Задача 10: Кое-что о диагоналях правильного многоугольника

Астахов Александр, Шишко Тимофей, Накорнеева Юлия
Лицей БНТУ

Минск 2021

Резюме:

Решены пункты: 0, 1, 2, 5a, 5b, частично решены пункты 3 и 4. Предложено обобщение. При исследовании данной задачи получены следующие основные резултьтаты:

0. В правильном $2n+1$ угольнике имеется $n-1$ различных по длине диагоналей.

1. А) Для $A_1A_2...A_7$ — правильного семиугольника. Доказано, что:

$$\frac{A_1A_3}{A_1A_2} - \frac{A_1A_3}{A_1A_4} = 1$$

Б) Для $A_1A_2...A_{2k+1}$ — правильного $(2k+1)$-угольника. Доказано, что:

$$\frac{A_1A_3}{A_1A_2} - \frac{A_1A_k}{A_1A_{k+1}} = 1$$

В) Для $A_1A_2...A_{3k+1}$ — правильного $(3k+1)$-угольника. Доказано, что:

$$\frac{A_1A_2}{A_1A_{k+1}} + \frac{A_1A_k}{A_1A_{k+2}} = 1$$

2. Для $A_1A_2...A_9$ — правильного девятиугольника. Доказано, что:

А)

$$\frac{A_1A_4}{A_1A_2} - \frac{A_1A_2}{A_1A_3} = 2$$

Б)

$$\frac{A_1A_4}{A_1A_3} + \frac{A_1A_3}{A_1A_5} = 2$$

В)

$$\frac{A_1A_5}{A_1A_2} - \frac{A_1A_4}{A_1A_5} = 2$$

3. При $n > 2$ в правильном $(2n+1)$-угольнике со стороной a существуют три диагонали, с необязательно различными длинами d_1, d_2, d_3 такие, что

$$\frac{d_1}{a} - \frac{d_2}{d_3} \in \mathbb{N}$$

4. Для правильного $(2n+1)$-угольника, в котором l_1, l_2, l_3, l_4 — длины отрезков соединяющих какие-то вершины (не все одинаковые). Доказано, что:

$$\frac{l_1}{l_2} + \frac{l_3}{l_4} \in \mathbb{N}$$

5. А) Для $A_1A_2...A_7$ — правильного семиугольника. Доказано, что:

$$\frac{1}{A_1A_2} = \frac{1}{A_1A_3} + \frac{1}{A_1A_4}$$

Б) Для $A_1A_2...A_{15}$ — правильного пятнадцатиугольника. Доказано, что:

$$\frac{1}{A_1A_2} = \frac{1}{A_1A_3} + \frac{1}{A_1A_5} + \frac{1}{A_1A_8}$$

6. Предложены и изучены свои направления исследования в задаче.

Постановка задачи:

0. Пусть $A_1A_2...A_{2n+1}$— правильный $(2n+1)$-угольник ($n \geqslant 2$). Напомним, что диагональю многоугольника называется отрезок соединяющий две несоседние вершины. Сколько существует различных по длине диагоналей в правильном $(2n+1)$-угольнике?

1. А) Пусть $A_1A_2...A_7$ — правильный семиугольник. Докажите, что

$$\frac{A_1A_3}{A_1A_2} - \frac{A_1A_3}{A_1A_4} = 1$$

   Б) Пусть $A_1A_2...A_{2k+1}$ — правильный $(2k+1)$-угольник. Докажите, что

$$\frac{A_1A_3}{A_1A_2} - \frac{A_1A_k}{A_1A_{k+1}} = 1$$

   В) Пусть $A_1A_2...A_{3k+1}$ — правильный $(3k+1)$-угольник. Докажите, что

$$\frac{A_1A_2}{A_1A_{k+1}} + \frac{A_1A_k}{A_1A_{k+2}} = 1$$

2. Пусть $A_1A_2...A_9$ — правильный девятиугольник. Докажите, что

   А)
$$\frac{A_1A_4}{A_1A_2} - \frac{A_1A_2}{A_1A_3} = 2$$

   Б)
$$\frac{A_1A_4}{A_1A_3} + \frac{A_1A_3}{A_1A_5} = 2$$

   В)
$$\frac{A_1A_5}{A_1A_2} - \frac{A_1A_4}{A_1A_5} = 2$$

3. При каких n в правильном $(2n+1)$-угольнике со стороной a существуют три диагонали с не обязательно различными длинами d_1, d_2, d_3 такие, что

$$\frac{d_1}{a} - \frac{d_2}{d_3} \in \mathbb{N}$$

   Попробуйте описать множество троек диагоналей (d_1, d_2, d_3), для которых выполняется это свойство.

4. При каких n в правильном $(2n+1)$-угольник, в котором l_1, l_2, l_3, l_4 — длины отрезков соединяющих какие-то вершины (не все одинаковые), что

$$\frac{l_1}{l_2} + \frac{l_3}{l_4} \in \mathbb{N}$$

   Попробуйте описать множество четверок (l_1, l_2, l_3, l_4) таких отрезков, для которых выполняется это свойство

5. А) Пусть $A_1A_2...A_7$ — правильный семиугольник. Докажите, что

$$\frac{1}{A_1A_2} = \frac{1}{A_1A_3} + \frac{1}{A_1A_4}$$

Б) Пусть $A_1A_2...A_{15}$ — правильный пятнадцатиугольник. Докажите, что

$$\frac{1}{A_1A_2} = \frac{1}{A_1A_3} + \frac{1}{A_1A_5} + \frac{1}{A_1A_8}$$

В) Найдите все n, при которых существует правильный n-угольник со стороной a, в котором найдутся различные диагонали $d_1...d_k$, $k \leqslant n$, такие, что будет выполнятся

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{d_1} + ... + \frac{1}{d_k}$$

6. Предложите свои направления исследования в этой задаче и изучите их.

Решение:

Пункт 0: Пусть $A_1A_2...A_{2n+1}$— правильный $(2n+1)$-угольник $(n \geqslant 2)$. Напомним, что диагональю многоугольника называется отрезок соединяющий две несоседние вершины. Сколько существует различных по длине диагоналей в правильном $(2n+1)$-угольнике?

Рассмотрим одну точку, так как для правильного $(2n+1)$-угольника все точки являются равносильными, в силу симметрии. Из одной точки выходит $(2n+1)-3$ диагоналей и, опять же, в силу симметрии, количество различных по длине диагоналей в правильном $(2n+1)$-угольнике равно:

$$\frac{2n+1-3}{2} = n-1$$

Пункт 1:

Многоугольник будем задавать на комплексной плоскости вписаным в единичную окружность. Вершинам правильного n-угольника будем ставить в соответствие корни уравнения $z^n - 1 = 0$. В таком случае вершине A_k ставится в соответствие комплексное число z^{k-1}. Так как $|z^t| = 1$, мы можем домножить любой модуль вектора вида $|z^{k_1} - z^{k_2}|$ на данное выражение.

Сумму или разность их модулей можно объединять в один модуль если они сонаправлены и коллинеарны.

1. Вектора являются сонаправленными тогда и только тогда, когда их аргументы равны.
2. Так как вектора вписаны в единичную окружность, значит для соблюдения условия коллениарности, достаточно выполнения следующего соотношения:$z^{k_1+k_2} = z^{k_3+k_4}$ для любых векторов вида $z^{k_1} - z^{k_2},\ z^{k_3} - z^{k_4}$.

Б) **Утверждение:** в правильном $(2k+1)$-угольнике имеет место: $\dfrac{A_1A_3}{A_1A_2} - \dfrac{A_1A_k}{A_1A_{k+1}} = 1$

$$\frac{|z^2-1|}{|z-1|} - \frac{|z^{k-1}-1|}{|z^k-1|} = 1,$$

$$|z^2-1|\ |z^k-1| - |z^{k-1}-1|\ |z-1| = |z-1|\ |z^k-1|,$$

$$|z^2-1|\ |z^k-1| = |z-1|\ (|z^{k-1}-1| + |z^k-1|)$$

Воспользуемся тем, что $|z| = 1$ и $|z^{k+1}| = 1$:

$$|z^2-1|\ |z^k-1| = |z-1|\ (|z|\ |z^{k-1}-1| + |z^{k+1}|\ |z^k-1|)$$

$$|z^2-1|\ |z^k-1| = |z-1|\ (|z^k-z| + |z^{k+1}-1|)$$

Так как вектора $z^k - z$ и $z^{k+1}-1$ коллениарны и сонаправлены, сумма их модулей равно модулю суммы:

$$|z^2-1|\ |z^k-1| = |z-1|\ (|z^k - z + z^{k+1} - 1|)$$

$$|z^2-1|\ |z^k-1| = |z-1|\ |z+1|\ |z^k-1|$$

Преобразовав выражение, получим:

$$|z^2-1|\ |z^k-1| = |z^2-1|\ |z^k-1|. \blacksquare$$

А) Является частным случаем пункта 1Б) при $k=3$.

B) **Утверждение:** в правильном $(3k+1)$-угольнике имеет место: $\dfrac{A_1A_2}{A_1A_{k+1}} + \dfrac{A_1A_k}{A_1A_{k+2}} = 1$

$$\frac{|z-1|}{|z^k-1|} + \frac{|z^{k-1}-1|}{|z^{k+1}-1|} = 1$$

$$|z-1|\ |z^{k+1}-1| + |z^{k-1}-1|\ |z^k-1| = |z^k-1|\ |z^{k+1}-1|,$$

$$|z-1|\ |z^{k+1}-1| = |z^k-1|\ (|z^{k+1}-1| - |z^k-z|)$$

Так как вектора $|z^{k+1}-1|$ и $|z^k-z|$ коллениарны и сонаправлены, разность их модулей равно модулю разностей:

$$|z-1|\ |z^{k+1}-1| = |z^k-1|\ |z^{k+1}-1-z^k+z|$$

$$|z-1|\ |z^{k+1}-1| = |z^k-1|\ |z^k(z-1)+(z-1)|$$

$$|z-1|\ |z^{k+1}-1| = |z^k-1|\ |z^k+1|\ |z-1|$$

$$|z-1|\ |z^{k+1}-1| = |z^{2k}-1|\ |z-1|$$

Так как $z^{3k+1}=1,\ |z^{2k}|=1$ имеем:

$$|z-1|\ |z^{k+1}-1|\ |z^{2k}| = |z-1|\ |z^{2k}-1|.$$

$$|z-1|\ |z^{2k}-1| = |z-1|\ |z^{2k}-1|. \ \blacksquare$$

Пункт 2:

A) **Утверждение:** в правильном девятиугольнике имеет место: $\dfrac{A_1A_4}{A_1A_2} - \dfrac{A_1A_2}{A_1A_3} = 2$

$$\frac{|z^3-1|}{|z-1|} - \frac{|z-1|}{|z^2-1|} = 2,$$

$$|z^3-1|\ |z^2-1| - |z-1|^2 = |z-1|\ |z^2-1| + |z-1|\ |z^2-1|,$$

$$|z^3-1|\ |z^2-1| - |z-1|\ |z^2-1| = |z-1|\ |z^2-1| + |z-1|^2,$$

$$(|z^3-1| - |z-1|)\ |z^2-1| = |z-1|\ (|z-1| + |z^2-1|),$$

Воспользуемся тем, что $|z|=1,\ |z^8|=1,\ |z^3|=1$:

$$(|z^3-1| - |z-1||z|)\ |z^2-1| = |z-1|\ (|z-1| + |z^2-1|),$$

$$(|z^3-1| - |z^2-z|)\ |z^2-1| = |z-1|\ (|z-1| + |z^2-1|),$$

$$(|z^3-1| - |z^2-z|)\ |z^2-1| = |z-1|\ (|z^8||z-1| + |z^3||z^2-1|),$$

Так как вектора z^3-1 и z^2-z коллениарны и сонаправлены, сумма их модулей равно модулю суммы:

$$|z^3-1-z^2+z|\ |z^2-1| = |z-1|\ (|z^8-1| + |z^5-z^3|),$$

Так как вектора z^8-1 и z^5-z^3 коллениарны и сонаправлены, сумма их модулей равно модулю суммы:

$$|z^3-1-z^2+z|\ |z^2-1| = |z-1|\ |z^8-1+z^5-z^3|,$$

$$|z-1|\ |z^2+1|\ |z^2-1| = |z-1|\ |z^3+1|\ |z^5-1|,$$

Преобразовав выражение, получим:

$$|z^4-1| = |z^3+1|\ |z^5-1|,$$

Воспользуемся тем, что $|z^5|=1$:

$$|z^5||z^4-1| = |z^3+1|\ |z^5-1|,$$

Напомним, что, так как $z^n=1$ для любого n-угольника имеем:

$$|z^5-1| = |z^3+1|\ |z^5-1|,$$

$$|z^3+1| = 1$$

Найдем модуль данного вектора с помощью тригонометрической формы записи комлесных чисел.

$$1 = |z^3+1| = \sqrt{(1+\cos 3\ \frac{2\pi}{9} + i\sin 3\ \frac{2\pi}{9})(1+\cos 3\ \frac{2\pi}{9} - i\sin 3\ \frac{2\pi}{9})} = 1.\ \blacksquare$$

Б) **Утверждение:** в правильном девятиугольнике имеет место: $\dfrac{A_1A_4}{A_1A_3} + \dfrac{A_1A_3}{A_1A_5} = 2$

$$\frac{|z^3-1|}{|z^2-1|} + \frac{|z^2-1|}{|z^4-1|} = 2,$$

$$|z^3-1|\ |z^4-1| + |z^2-1|^2 = |z^2-1|\ |z^4-1| + |z^2-1|\ |z^4-1|,$$
$$|z^3-1|\ |z^4-1| - |z^2-1|\ |z^4-1| = |z^2-1|\ |z^4-1| - |z^2-1|^2,$$
$$|z^4-1|\ (|z^3-1| - |z^2-1|) = |z^2-1|\ (|z^4-1| - |z^2-1|),$$

Домножив на $|z^6| = 1$ и $|z^2| = 1$ соответствующие выражения, получим:

$$|z^4-1|\ (|z^6||z^3-1| - |z^2||z^2-1|) = |z^2-1|\ (|z^4-1| - |z^2-1|),$$

Преобразовав выражение, так же как и в предыдущем пункте, получим:

$$|z^4-1|\ (|z^6-1| - |z^4-z^2|) = |z^2-1|\ (|z^4-1| - |z^3-z|),$$

Далее, используя коллинеарность и сонаправленность векторов, преобразуем, как в предыдущем пункте:

$$|z^4-1|\ |z^6-1-z^4+z^2| = |z^2-1|\ |z^4-1-z^3+z|,$$

$$|z^4-1|\ |z^4+1|\ |z^2-1| = |z^2-1|\ |z^3+1|\ |z-1|,$$

Так как рассматривается девятиугольник, то $z^9 = 1$. Домножив на $|z| = 1$ соответствующие выражения, получим:

$$|z|\ |z^8-1| = |z-1| = |z-1|\ |z^3+1|,$$

$$1 = |z^3+1|.$$

Найдем модуль данного вектора с помощью тригонометрической формы записи комлесных чисел.

$$1 = |z^3+1| = \sqrt{(1+\cos 3\ \frac{2\pi}{9} + i\sin 3\ \frac{2\pi}{9})(1+\cos 3\ \frac{2\pi}{9} - i\sin 3\ \frac{2\pi}{9})} = 1.\ \blacksquare$$

В) **Утверждение:** в правильном девятиугольнике имеет место: $\dfrac{A_1A_5}{A_1A_2} - \dfrac{A_1A_4}{A_1A_5} = 2$

$$\frac{|z^4-1|}{|z-1|} - \frac{|z^3-1|}{|z^4-1|} = 2,$$

Приведем к общему знаменателю.

$$|z^4-1|^2 - |z^3-1|\ |z-1| = |z-1|\ |z^4-1| + |z-1|\ |z^4-1|,$$

$$|z^4-1|^2 - |z-1|\ |z^4-1| = |z^3-1|\ |z-1| + |z-1|\ |z^4-1|,$$

$$|z^4-1|\,(|z^4-1|-|z-1|)=|z-1|\,(|z^3-1|+|z^4-1|),$$

Домножив на $|z^5|=1$, $|z^2|=1$ и $|z|=1$, $|z^5|=1$ соответствующие выражения, получим:

$$|z^4-1|\,(|z^5|\,|z^4-1|-|z^2|\,|z-1|)=|z-1|\,(|z|\,|z^3-1|+|z^5|\,|z^4-1|),$$

$$|z^4-1|\,(|z^5-1|-|z^3-z^2|)=|z-1|\,(|z^4-z|+|z^5-1|),$$

Далее, используя коллинеарность и сонаправленность векторов, преобразуем, как в предыдущих пунктах:

$$|z^4-1|\,|z^5-1-z^3+z^2|=|z-1|\,|z^4-z+z^5-1|,$$

$$|z^4-1|\,|z^2-1|\,|z^3+1|=|z-1|\,|z^4-1|\,|z+1|,$$

$$|z^3+1|=1.$$

Найдем модуль данного вектора с помощью тригонометрической формы записи комлесных чисел.

$$1=|z^3+1|=\sqrt{(1+\cos 3\,\frac{2\pi}{9}+i\sin 3\,\frac{2\pi}{9})(1+\cos 3\,\frac{2\pi}{9}-i\sin 3\,\frac{2\pi}{9})}=1.\ \blacksquare$$

Пункт 3: При каких n в правильном $(2n+1\ )$-угольнике со стороной a существуют три диагонали с необязательно различными длинами d_1, d_2, d_3 такие, что

$$\frac{d_1}{a}-\frac{d_2}{d_3}\in\mathbb{N}$$

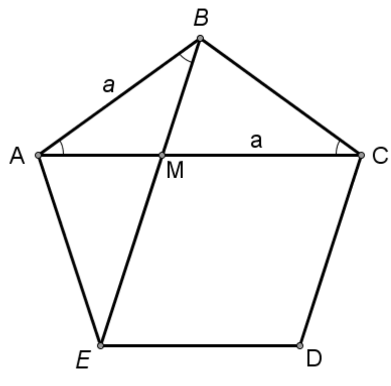
Попробуйте описать множество троек диагоналей (d_1, d_2, d_3), для которых выполняется это свойство.

При $n>2$ в каждом правильном $(2n+1)$-уольнике, есть такое соотношение:

$$\frac{A_1A_3}{A_1A_2}-\frac{A_1A_n}{A_1A_{n+1}}=1$$

Данное соотношение доказано в пунте 1.Б исходной постановки задачи.

Значит при $n>2$ в каждом правильном $(2n+1)$-уольнике существуют три диагонали с необязательно различными длинами d_1, d_2, d_3 такие, что $\frac{d_1}{a}-\frac{d_2}{d_3}\in\mathbb{N}$



При $n=2$ многоугольник является правильным пятиугольником. Так как в пятиугольнике все диагонали имеют одинаковую длину, наше выражение примет вид: $\dfrac{d}{a}-1$.

$\Delta AMB\sim\Delta ABC$, треугольники подобны по двум углам ($\angle CAB$ – общий, $\angle ABE=\angle ACB$), тогда:

$$\frac{AB}{AC}=\frac{AM}{AB}\implies\frac{a}{d}=\frac{d-a}{a}\implies d=\frac{a(\sqrt{5}-1)}{2}$$

Тогда выражение примет вид:

$$\frac{d}{a}-1=\frac{\frac{a(\sqrt{5}-1)}{2}}{a}-1=\frac{\sqrt{5}-1}{2}-1\notin\mathbb{N}$$

Что не является натуральным числом. То есть в првильном пятиугольнике не существуют три диагонали, с необязательно различными длинами d_1, d_2, d_3, такие что $\frac{d_1}{a}-\frac{d_2}{d_3}\in\mathbb{N}$.

Пункт 4: При каких n в правильном $(2n+1\ )$-угольнике, в котором l_1, l_2, l_3, l_4 — длины отрезков соединяющих какие-то вершины (не все одинаковые), что

$$\frac{l_1}{l_2} + \frac{l_3}{l_4} \in \mathbb{N}$$

Попробуйте описать множество четверок (l_1, l_2, l_3, l_4) таких отрезков, для которых выполняется это свойство.

Пусть $l_1 = l_2$ и $l_3 = l_4$, тогда наше выражение будет равно двум. Таким образом в каждои $2n+1$ угольнике есть такое соотношение.

Пункт 5:

А) **Утверждение:** В правильном семиугольнике имеет место: $\dfrac{1}{A_1A_2} = \dfrac{1}{A_1A_3} + \dfrac{1}{A_1A_4}$

$$\frac{1}{|z-1|} = \frac{1}{|z^2-1|} + \frac{1}{|z^3-1|},$$

Приведем к общему знаменателю.

$$\frac{1}{|z-1|} = \frac{|z^2-1| + |z^3-1|}{|z^2-1|\ |z^3-1|},$$

$$|z-1|\ (|z^2-1| + |z^3-1|) = |z^2-1|\ |z^3-1|,$$

Домножив на $|z^5| = 1$, $|z| = 1$ соответствующие выражения, получим:

$$|z-1|\ (|z^5|\ |z^2-1| + |z|\ |z^3-1|) = |z^2-1|\ |z^3-1|,$$

$$|z-1|\ (\ |z^7-z^5| + |z^4-z|) = |z^2-1|\ |z^3-1|,$$

Напомним, что, так как $z^n = 1$ для любого n-угольника, имеем:

$$|z-1|\ (\ |z^5-1| + |z^4-z|) = |z^2-1|\ |z^3-1|,$$

Так как вектора z^5-1 и z^4-z коллениарны и сонаправлены, сумма их модулей равно модулю суммы:

$$|z-1|\ (|z^5-1+z^4-z|) = |z^2-1|\ |z^3-1|,$$

$$|z-1|\ |z^4-1|\ |z+1| = |z^2-1|\ |z^3-1|,$$

$$|z^4-1| = |z^4|\ |z^3-1| = |z^4-1|.\ \blacksquare$$

Б) **Утверждение:**

В правильном пятнадцатиугольнике имеет место: $\dfrac{1}{A_1A_2} = \dfrac{1}{A_1A_3} + \dfrac{1}{A_1A_5} + \dfrac{1}{A_1A_8}$

$$\frac{1}{|z-1|} = \frac{1}{|z^2-1|} + \frac{1}{|z^4-1|} + \frac{1}{|z^7-1|},$$

$$\frac{1}{|z-1|} - \frac{1}{|z^7-1|} = \frac{1}{|z^2-1|} + \frac{1}{|z^4-1|},$$

Приведем к общему знаменателю.

$$\frac{|z^7-1| - |z-1|}{|z-1|\ |z^7-1|} = \frac{|z^4-1| + |z^2-1|}{|z^2-1|\ |z^4-1|},$$

Домножив на $|z^3| = 1$ и $|z| = 1$ соответствующие выражения, получим:

$$\frac{|z^7-1| - |z^3|\ |z-1|}{|z-1|\ |z^7-1|} = \frac{|z^4-1| + |z|\ |z^2-1|}{|z^2-1|\ |z^4-1|},$$

$$\frac{|z^7-1|-|z^4-z^3|}{|z-1|\;|z^7-1|}=\frac{|z^4-1|+|z^3-z|}{|z^2-1|\;|z^4-1|},$$

Далее, используя коллинеарность и сонаправленность векторов, преобразуем, как в предыдущих пунктах:

$$\frac{|z^7-1-z^4+z^3|}{|z-1|\;|z^7-1|}=\frac{|z^4-1+z^3-z|}{|z^2-1|\;|z^4-1|},$$
$$\frac{|z^4+1|\;|z^3-1|}{|z-1|\;|z^7-1|}=\frac{|z^3-1|\;|z+1|}{|z^2-1|\;|z^4-1|},$$
$$\frac{|z^4+1|}{|z^7-1|}=\frac{1}{|z^4-1|},$$

Преобразовав выражение, так же как и в предыдущем пункте, получим

$$|z^8-1|=|z^7-1|$$
$$|z^8|\;|z^7-1|=|z^8-1|$$
$$|z^8-1|=|z^8-1|.\ \blacksquare$$

Обобщение:

Рассмотрим n-мерный гиперкуб со стороной $a=1$:
Координаты его вершин это кортежи длины n, состоящие из нулей и единиц. Понятно, что длины его диагоналей, не являющиеся диагоналями квадрата, принадлежат множеству: $\{\sqrt{k}\},\ k\in\{3,\ 4,\ \dots\ n\}$.
Найдем с какой размерности в гиперкубе существует соотношение:

$$1=\frac{1}{a}=\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{d_i},$$

где d_i— длина различных диагоналей гиперкуба.
В силу того, что $a=1$ и утверждения о том, что сумма иррациональных значений радикалов натуральных чисел не может быть рациональным числом, что доказанов в статье "Иррациональность суммы радикалов" журнала "квант"1972 года. Получаем то, что если $\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{d_i}$ — рациональна, то и каждое слагаемое — рационально. Значит, наименьшая размерность гиперкуба в которой выполняется это условие является 36. Так как:$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$. При меньших длинах диагоналей это невозможно.
Получение новых соотношений:
Приведем бесконечную серию подобных сумм обратных длин диагоналей:
Докажем, что $1=\frac{1}{2}+\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{3^i}+\frac{1}{2\cdot 3^m}$.
Доказательство:
Так как данная сума представляет сабой сумму геометрической прогрессии имеем:

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{3^i}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3^m}$$

Подставим данное выражение в исходное имеем:

$$\frac{1}{2}+\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{3^i}+\frac{1}{2\cdot 3^m}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3^m}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3^m}=1.\ \blacksquare$$

Таким образом каждое m-соотношение из серии начинает выполнятся начиная с размерности $(2\cdot 3^m)^2$.

Литература:

1. Камнев Л. Н. Иррациональность суммы радикалов. Квант. – 1972. – N 2.– С. 26-27.

2. Я. П. Понарин "Алгебра комплексных чисел в геометрических задачах"