Доказательство. Индукция по длине n вывода формулы B из $\Gamma, A \quad (\Gamma, A \vdash^n B)$, то есть число MP.

Базис: $n = 0$, то есть 1) $B \in \Gamma$; 2) B - аксиома; 3) $B = A$

1-й случай.

1) B - гипотеза ($B \in \Gamma$)
2) $B \to (A \to B)$ - схема (1) при $A := B, B := A$
3) $A \to B$ - MP, (1) и (2)
То есть $\Gamma \vdash (A \to B)$

2-й случай

1) B - аксиома
2) $B \to (A \to B)$ - схема (1)
3) $A \to B$ - MP, (1) и (2)
То есть $\vdash (A \to B)$, то есть для всякого $\Gamma : \Gamma \vdash (A \to B)$

3-й случай

Тогда $\vdash (A \to A)$, и $\Gamma \vdash (A \to A)$

Предположение: Пусть для любой формулы Φ такой, что $\Gamma, A \vdash^{l \leq n-1} B$ влечет $\Gamma \vdash (A \to \Phi)$; $\quad n \geq 1$

Переход: $\Gamma, A \vdash^n B$, то есть $\Gamma, A, \ldots, \Phi, \ldots, \Phi \to B, B$, и $\Gamma, A \vdash^{l_1} \Phi, \quad l_1 < n; \quad \Gamma, A \vdash^{l_2} \Phi \to B; \quad l_2 < n$
По предположению индукции: $\Gamma \vdash A \to \Phi, \quad A \to (\Phi \to B)$
Предположим вывод из Γ :

1.$(A \to (\Phi \to B)) \to ((A \to \Phi) \to (A \to B))$ - схема (2) при B:=Φ, C := B
2.$(A \to \Phi) \to (A \to B)$ - MP, (1) и формуле $A \to (\Phi \to B)$
3.$A \to B$ - MP, (2) и формуле $A \to \Phi$

Итак, $\Gamma \vdash (A \to B)$

□

Теорема 0.1. *(Обратная). Если* $\Gamma \vdash (A \to B)$*, то* $\Gamma, A \vdash B$

То есть из этих двух теорем верно:

$$\boxed{\Gamma, A \vdash B \Longleftrightarrow \Gamma \vdash (A \to B)}$$

Далее любую формулу будем называть секвенцией.

Теорема 0.2. *В теории L имеют место следующие секвенции:*
1) $A \to B, B \to C \vdash A \to C$
2) $A \to (B \to C), B \vdash A \to C$
3) $\vdash (\neg\neg A \to A)$
4) $\vdash (A \to \neg\neg A)$
5) $\vdash (A \to (\neg A \to B))$
6) $\vdash (\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$
7) $\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$
8) $\neg A \to (\neg B \to \neg(A \to B))$
9) $\vdash (A \to B) \to ((\neg A \to B) \to B)$

Доказательство.

1)

1) $A \to B$ - гипотеза
2) $B \to C$ - гипотеза
3) A - гипотеза
4) B - MP, (1) и (3)
5) C - MP, (2), (4)

2)

1) $A \to (B \to C)$ - гипотеза
2) B - гипотеза
3) A - гипотеза
4) $B \to C$ - MP, (1) и (3)
5) C - MP, (2) и (3)

3)

1) $\neg\neg A$ - гипотеза
2) $(\neg A \to \neg\neg A) \to ((\neg A \to \neg A) \to A)$ - схема 3 при замене $A := \neg A, B := A$
3) $\neg\neg A \to (\neg A \to \neg\neg A)$ - схема 1 при $A := \neg\neg A, B :=$
4) $\neg A \to \neg\neg A$ - MP, (1) и (3)
5) $(\neg A \to) \to A$ - MP, (2) и (4)
6) $\neg A \to \neg A$ - теорема $\vdash (A \to A)$ при $A := \neg A$
7) A - MP, (5) и (6)

4)

1) $(\neg\neg\neg A \to \neg A) \to ((\neg\neg\neg A \to A) \to \neg\neg A)$ - схема 3 при $B := \neg\neg A$
2) $\neg\neg\neg A \to \neg A$ - секвенция 3 при $A := \neg A$
3) $A \to (\neg\neg\neg A \to A)$ - схема 1 при $B := \neg\neg\neg A$
4) $(\neg\neg\neg A \to A) \to \neg\neg A$ - MP, (1) и (2)
5) $A \to \neg\neg A$ - R1, (3) и (4)

5)

1) A - гипотеза
2) $\neg A$ - гипотеза
3) $(\neg B \to \neg A) \to ((\neg B \to A) \to B)$ - схема 3
4) $\neg A \to (\neg B \to \neg A)$ - схема 1 при $A := \neg A$, $B := \neg B$
5) $\neg B \to \neg A$ - MP, (2) и (4)
6) $(\neg B \to \neg A) \to B$ - MP, (3) и (5)
7) $A \to (\neg B \to A)$ - схема 1 при $B := \neg B$
8) $\neg B \to A$ - MP, (1) и (7)
9) B - MP, (6) и (8)

6)

Уже доказана

7)

1) $A \to B$ - гипотеза
2) $\neg\neg A \to A$ - секвенция 3
3) ${}_5A \to B$ - R1, (2) и (1)
4) $B \to \neg\neg B$ - секвенция 4
5) $\neg\neg A \to \neg\neg B$ - R1, (3) и (4)
6) $\neg B \to \neg A$ - R6, (5) при $A := \neg B, B := \neg A$

8)

$\vdash (A \to ((A \to B) \to B))$ - вспомогательная секвенция
1) A - гипотеза
2) $A \to B$ - гипотеза
3) B - MP, (1) и (2)
Само док-во:
1) A - гипотеза
2) $A \to ((A \to B) \to B)$ - теорема
3) $(A \to B) \to B$ - MP, (1) и (2)
4) $\neg B \to \neg(A \to B)$, R7, (3)

9)

1) $A \to B$ - гипотеза
2) $\neg A \to B$ - гипотеза
3) $\neg B \to \neg A$ - R7, (1)
4) $\neg B \to \neg\neg A$ - R7, (2)
5) $(\neg B \to \neg\neg A) \to ((\neg B \to \neg A) \to B)$ - схема 3 при $A := \neg A$
6) $(\neg B \to \neg A) \to B$ - MP, (4) и (5)
7) B - MP, (3) и (6)

$\square$

Следствие 1. Если $\Gamma, A \vdash B$ и $\Gamma, \neg A \vdash B$, то $\Gamma \vdash B$

Доказательство. $\Gamma, A \vdash B \implies \Gamma \vdash A \to B$; $\quad \Gamma, \neg A \vdash B \implies \Gamma \vdash (\neg A \to B)$, тогда по R9 $\Gamma \vdash B$ $\square$

Следствие 2. (Свойства дизъюнкции).
1) $A \vdash A \lor B$; $\quad B \vdash A \lor B$
2) $A \lor B \vdash B \lor A$
3) Если $A \vdash B$, то для любой формулы $\Phi : \Phi \lor A \vdash \Phi \lor B$; $\quad A \lor \Phi \vdash B \lor \Phi$

Доказательство.

1 пункт.

1) A - гипотеза
2) $A \to (\neg A \to B) = A \to (A \lor B)$ - секвенция 5
3) $\neg A \to B = A \lor B$

2 пункт.

1) $A \lor B = \neg A \to B$ - гипотеза
2) $\neg B \to \neg\neg A$ - R7, (1)
3) $\neg\neg A \to A$ - секвенция 3
4) $\neg B \to A$ - R1, (2) и (3) $(= B \lor A)$

3 пункт.

1) $A \to B$ - теорема, так как $A \vdash B$
2) $\Phi \lor A = \neg\Phi \to A$ - гипотеза
3) $\neg\Phi \to B = \Phi \lor B$ - R1, (2) и (1)

$\square$