0.1 Алгебра высказываний. Тавтологии

У нас есть высказывания $p, q, r, \ldots$ и они могут принимать значения Ложь (Л) или Истина (И). Указываются по-русски, однако для упрощения разметки буду использовать F, T (False, True).

p	q	$\vee$	$\&$	$\to$	$\oplus$
F	F	F	F	T	F
F	T	T	F	T	T
T	F	T	F	F	T
T	T	T	T	T	F

Функции также аналогичны тем, что описаны в математической логике:

$$G : \{F, T\}^n \to \{F, T\}$$
$$f : \{0, 1\}^n \to \{0, 1\}$$

Определение 1. Тавтология - это то, что говорит само за себя

0.2 Исчисление высказываний

Мы строим ее на основе Теории L.

Определение 2. Теория $L = (V_L, \mathcal{F}_L, \mathcal{A}_L, \mathcal{P}_L)$. Причем $V_L = Var \cup \{\neg, \to\} \cup Aux$, $\quad \mathcal{F}_L$: 1) Каждая переменная есть формула, 2) Если Φ - формула, то $(\neg\Phi)$ - формула, 3) если Φ и Ψ - формулы, то $(\Phi \to \Psi)$ - формула, 4) Никаких других формул нет.

Наше "подсахаривание"формул: 1) $\Phi \vee \Psi = \neg\Phi \to \Psi$, 2) $\Phi \& \Psi = \neg(\Phi \to \neg\Psi)$

Схем аксиом всего три:

$$\mathcal{A}_L : \begin{array}{cc} (1) & A \to (B \to A) \\ (2) & (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)) \\ (3) & (\neg B \to \neg A) \to ((\neg B \to A) \to B) \end{array}$$

И наши правила вывода:

$$\mathcal{P}_L : \frac{A, A \to B}{B} \quad \textit{modus ponens } (MP)$$

Пример Тавтологии.

$\vdash (A \to A)$

Доказательство.

1. $A \to ((A \to A) \to A) \to ((A \to (A \to A)) \to (A \to A))$ - схема (2) при $B := A \to A, \quad C := A$
2. $A \to ((A \to A) \to A)$ - схема (1) при $B := A \to A$
3. $(A \to (A \to A)) \to (A \to A)$ - Modus ponens к шагам (1) и (2)
4. $A \to (A \to A)$ - схема (1) при $B := A$
5. $A \to A$ - modus ponens шагов (3) и (4) $\square$

0.3 Теорема дедукции

Теорема 0.1. *(Эрбрам). Пусть дано некоторое множество формул, A - произвольная формула, тогда если из Γ, A выводится формула B $(\Gamma, A \vdash B)$, то $\Gamma \vdash (A \to B)$.*

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash (A \to B)}$$

Пример применения.

$\vdash (\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$
1. $\neg B \to \neg A$ - гипотеза
2. A - гипотеза
3. $(\neg B \to \neg A) \to ((\neg B \to A) \to B)$ - схема 3
4. $(\neg B \to A)$ - MP, (1) и (3)
5. $A \to (\neg B \to A)$ - схема 1 при $B := \neg B$
6. $\neg B \to A$ - MP, (2) и (5)
7. B - MP, (4) и (6)

То есть $\neg B \to \neg A, A \vdash B$ по теореме дедукции $\neg B \to \neg A \vdash A \to B$ по теореме дедекции $\vdash (\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$