

0.1 Многомерная интерполяция

Пусть $z = f(x, y)$. Работаем в трехмерном пространстве.

Обычно представляют это в виде таблицы x, y . На регулярной сетке многомерная интерполяция выполняется последовательно (по строкам и по столбцам). Задаются отдельно степени полиномов n_x и n_y . Относительно x берем $n_x + 1$ строк, а относительно y берем $n_y + 1$ столбцов.

$$\left. \begin{array}{l} z = f(x, y) \\ z_0 = f(x_1, y) \\ z_1 = f(x_1, y) \\ z_2 = f(x_2, y) \end{array} \right\} \rightarrow z = f(x, y)$$

Если $u = f(x, y, z)$, то при каждой новой переменной алгоритм сводится к интерполяции функции на одну переменную меньше. То есть

$$u = f(x, y, z_i)$$

$$\begin{array}{cc} z & u \\ z_0 & u_0 \\ \vdots & \vdots \\ z_n & u_n \end{array}$$

0.1.1 Двумерный полином Ньютона

Это когда матрица (таблица) треугольного вида.

$$\mathcal{P}_n(x, y) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} z(x_0, x_1, \dots, x_i; y_0, y_1, \dots, y_j) \prod_{p=0}^{i-1} (x - x_p) \prod_{q=0}^{j-1} (y - y_q)$$

z - разделенная разность.

$$z(x_0, x_1, y_0) = \frac{z(x_0, y_0) - z(x_1, y_0)}{x_0 - x_1}$$

$$z(x_0, x_1; y_0, y_1) = \frac{z(x_0, x_1, y_0) - z(x_0, x_1, y_1)}{y_0 - y_1}$$

Замечание.

При вычислении полинома Ньютона погрешность вычисляется такой формулой:

$$|y - \mathcal{P}_n(x)| \leq \frac{M_n + 1}{(n+1)!} |\omega_{n+1}(x)|$$

$$\text{где } M_{n+1} = \max(y^{(n+1)}), \omega_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{x_0 \leq x \leq x_n} (x - x_i)$$

Наилучшее среднее квадратичное приближение

Чем меньше ошибка, тем важнее точка. Отчего мы присваиваем вес каждой точке. Вес - ρ

$$\begin{array}{ccc} x_i & y_i & \rho_i \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & y_n & \rho_n \end{array}$$

ρ может быть задан пользователем. Иначе считаем сами как обратная от ошибки:

$$\rho_i \sim \frac{1}{\varepsilon_i^2}$$

Задача искания аппроксимирующей функции способом усреднения набором данных формулируется следующим образом. Вводится такая величина $I = \sum \rho_i [y_i - \varphi(x_i)]^2$ - сумма квадратов отклонения.

Тогда задачи. Подобрать $\varphi(x)$ так, чтобы

- 1) $I < \varepsilon$, то есть сумма меньше погрешности
- 2) $I \rightarrow I_{min}$

Можно записать так (общий вариант, но пользоваться не будем, тк у нас дискретный вариант):

$$I = \int_a^b \rho(x)(y(x) - \varphi(x))^2 dx$$

Пользоваться мы будем методом наименьших квадратов.

Рассмотрим задачу построение наилучшего квадратичного приближения (метод наименьших квадратов). Выберем $\varphi(x)$ так, чтобы она была линейной.

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^n a_k \varphi_k(x) \quad \varphi_k(x) - \text{известные линейно независимые функции}$$

Чаще всего $\varphi_k(x) = x^k$. Они называются базисными функциями. Отсюда

$$I = \sum_i \rho_i \left[y_i - \sum_{k=0}^n a_k \varphi_k(x) \right]^2$$

Предварительно рассмотрим скалярное произведение двух функций:

$$(f, \varphi) = \sum_{i=1}^N \rho_i f(x_i) \cdot \varphi(x_i)$$

Свойства скалярного произведения:

- 1) $(f, \varphi) = (\varphi, f)$
- 2) $(\alpha f, \varphi) = \alpha(f, \varphi)$ (следствие $(f, \alpha \varphi) = \alpha(f, \varphi)$)
- 3) $(f + \varphi, \psi) = (f, \psi) + (\varphi, \psi)$

Тогда

$$I = (y - \varphi, y - \varphi) = (y, y) - 2(y, \varphi) + (\varphi, \varphi) = (y, y) - 2 \left(y, \sum_{k=0}^n a_k \varphi_k(x) \right) + \left(\sum_{k=0}^n a_k \varphi_k(x), \sum_{m=0}^n a_m \varphi_m(x) \right)$$

В итоге получим

$$I = (y, y) - 2 \sum_{k=0}^n a_k (y, \varphi_k(x)) + \sum_{k=0}^n \sum_{m=0}^n a_k a_m (\varphi_k, \varphi_m)$$

Осталось минимизировать I . Значит, ищем неизвестные параметры.

$$\frac{\partial I}{\partial a_k} = 0, \quad k = \overline{0, n}$$

Получим

$$\frac{\partial I}{\partial a_k} = -2(y, \varphi_k) + 2 \sum_{m=0}^n a_m (\varphi_k, \varphi_m) = 0$$

Итого система состоит из

$$\sum_{m=0}^n a_m (\varphi_k, \varphi_m) = (y, \varphi_k), \quad k = \overline{0, n}$$

что мы и искали. Определитель тут Грамма, и он не равен нулю. Наилучшее среднее приближение существует и оно единственно по этой причине.

Если φ_k и φ_m ортогональны, то получаем

$$a_k = (y, \varphi_k) = \sum_{i=1}^N \rho y_i \varphi_k(x_i), \quad k = \overline{0, n} \quad (1.1)$$

В таком случае (если базис ортогонален), то это ряд Фурье.

Заметка. Нам всегда известны y_i, φ_k, ρ_i .

Часто во многих задачах используется $\varphi_k(x) = x^k$. Тогда

$$(\varphi_k, \varphi_m) = \sum_{i=0}^N \rho_i x_i^k x_i^m = \sum_{i=1}^N \rho_i x_i^{k+m}$$

$$(y, \varphi_k) = \sum_{i=0}^N \rho_i y_i x_i^k$$

Пример.

$$\varphi_k(x) = x^k$$

$$n = 1$$

Аппроксимирующая функция: $\varphi(x) = a_0 + a_1 x$

Тогда для формулы (1):

$$\begin{cases} a_0(\varphi_0, \varphi_0) + a_1(\varphi_0, \varphi_1) = (y, \varphi_0) - k = 0 \\ a_0(\varphi_1, \varphi_0) + a_1(\varphi_1, \varphi_1) = (y, \varphi_1) - k = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_0 \sum_{i=0}^N \rho_i + a_1 \sum_{i=1}^N \rho_i x_i = \sum_{i=0}^N \rho_i y_i \\ a_0 \sum_{i=0}^N \rho_i x_i + a_1 \sum_{i=1}^N \rho_i x_i^2 = \sum_{i=0}^N \rho_i y_i x_i \end{cases}$$

Отсюда найдем a_0, a_1 .