Примеры использования теоремы сочетания.

1) Проекцирующие НА

   Дано $V, \$ \notin V$. Векторное слово в алфавите $V: x_1\$x_2\$\ldots\$x_n, n \geq 1$, где $(\forall i = \overline{1,n})(x_i \in V^*)$

   Нужен алгоритм, который вычисляет его x_i

   $\prod_i(x_1\$x_2\$\ldots\$x_n) = x_i, \quad i = 1\ldots n$

$$\mathscr{P}_1 : \begin{cases} \$\eta \to \ //\eta \in V \\ \$ \to \\ \to \bullet \end{cases}$$

Результат работы $\mathscr{P}_1(x_1\$x_2\$\ldots\$x_n) = x_1$

$$\mathscr{P}_2 : \begin{cases} \eta \to \# \ //\eta \in V, \# \notin V \\ \# \to \bullet \\ \$ \to \# \end{cases}$$

   То есть $\mathscr{P}_2(x_1\$x_2\$\ldots\$x_n) = x_2\$\ldots\$x_n$

   Получаем $\prod_i = \mathscr{P}_1 \circ \mathscr{P}_2^{i-1}, \quad 1 \leq i \leq n$

   i = 1: $\mathscr{P}_2^{i-1} = \mathscr{P}_2^0 = \mathcal{J}\alpha$

   i = n: $\mathscr{P}_2^{n-1}(x_1\$x_2\$\ldots\$x_n) = x_w; \quad \mathscr{P}_1(x_n) = x_n$

2) НА распознавания равенства слов

   $EQ(x\$y) = \lambda \Longleftrightarrow x = y; \quad x, y \in V^*, \$ \notin V$

   $EQ(x\$y) \simeq Comp(\mathcal{J}\alpha\$\mathcal{I}nv(y))$

   $\mathcal{I}nv(y) = y^R$

$$Comp : \begin{cases} \eta\$\eta \to \$ \ //\eta \in V \\ \$ \to \bullet \end{cases}$$

   $x^R = (x(1)x(2)\ldots x(k))^R = x(k)\ldots x(2)x(1)$

3) НА определения центра слова

   $\mathscr{C}(x) = x_1\$x_2$, где $x_1x_2 = x, \quad ||x_1| - |x_2|| \leq 1$, $x \in V^*; \quad \$ \notin V$

   $\mathscr{C} = \mathscr{B} \circ_{\mathscr{A}} \langle L \circ R \rangle$

$$L : \begin{cases} \alpha\beta \to \bullet\alpha\beta \\ \alpha\xi \to \bullet\xi\alpha \ //\xi \in V, \alpha \notin V \\ \to \alpha \end{cases}$$

$$R : \begin{cases} \gamma\xi \to \xi\gamma \ //\xi \in V; \beta, \gamma \notin V \\ \xi\gamma \to \bullet\beta\xi \\ \xi\beta \to \bullet\beta\xi \\ \to \gamma \end{cases}$$

$$\mathscr{A}:\begin{cases}\alpha\beta\xi \to \alpha\beta\\ \xi\alpha\beta \to \alpha\beta\\ \alpha\beta \to \bullet\\ \to \bullet\end{cases}$$

$$\mathscr{B}:\begin{cases}\alpha\beta \to \bullet\$\\ \to \bullet\$\end{cases}$$

Пример 1. $\lambda, \quad \mathscr{B}(\lambda) = \$$

$\mathscr{A}(\lambda) = \lambda \implies$ тело цикла не выполнилось

Пример 2. $x = a \in V$

$\mathscr{A}(a) = a \neq \lambda$

$R : a \vdash \gamma a \vdash a\gamma \vdash \bullet\beta a$

$L : \beta a \vdash \alpha\beta a \vdash \bullet\alpha\beta a$

$\mathscr{A}(\alpha\beta a) = \lambda$

$\mathscr{B}(\alpha\beta a) = \$a$

Пример 3. $x = ab$

$\mathscr{A}(ab) = ab \neq \lambda$

$R : ab \vdash \gamma ab \models^2 ab\gamma \vdash \bullet\alpha\beta b$

$L : \alpha\beta B \vdash \alpha a\beta b \vdash \bullet a\alpha\beta b$

$\mathscr{A}(a\alpha\beta b) = \lambda$

$\mathscr{B}(a\alpha\beta b) = a\$b$

Пример 4. $x = abcde$

$\mathscr{A}(x) = x \neq \lambda$

1 Итерация:

$R : abcde \vdash \gamma abcde \models^5 abcde\gamma \vdash \bullet abcde\beta e$

$L : abcd\beta e \vdash \alpha abcd\beta e \vdash \bullet a\alpha bcd\beta e$

2 Итерация:

$R : a\alpha bcd\beta e \vdash \bullet a\alpha bc\beta de$

$L : a\alpha bc\beta de \vdash \bullet ab\alpha c\beta de$

3 Итерация:

$R : ab\alpha c\beta de \vdash \bullet ab\alpha\beta cde$

$L : ab\alpha\beta cde \vdash \bullet ab\alpha\beta cde$

$\mathscr{A}(ab\alpha\beta cde) = \lambda$

$\mathscr{B}(ab\alpha\beta cde) = ab\$cde$

0.1 Универсальный нормальный алгорифм.

Пусть дан НА:

$$\mathscr{A}:\begin{cases}u_1 \to [\bullet]v_1\\ \vdots\\ u_n \to [\bullet]v_n\end{cases}$$

$$A^{\text{И}} \leftrightharpoons u_1\alpha[\beta]v_1\gamma u_2\alpha[\beta]v_2\gamma\dots\gamma u_n\alpha[\beta]v_n, \text{ где } \alpha, \beta, \gamma \notin V$$

Пусть

$$\mathscr{A}_0 : \begin{cases} \#a \to a\# \\ \#b \to b\# \\ \# \to \cdot aba \to \# \end{cases}$$

Отсюда

$$A_0^{\text{И}} = \#a\alpha a\#\gamma\#b\alpha b\#\gamma\#\alpha\beta aba\gamma\alpha\#$$

$$\text{Ɛ}A_0\text{З} = \underbrace{01110}_{\#}\underbrace{010}_{a}\underbrace{011110}_{\alpha}\underbrace{010}_{a}\underbrace{01110}_{\#}\underbrace{01111110}_{\gamma}$$

a	b	$\#$	α	β	γ
1	2	3	4	5	6

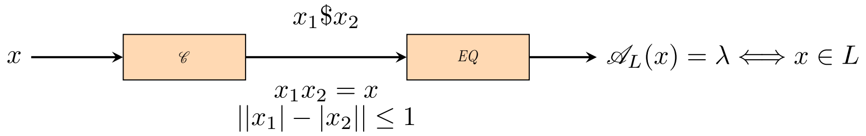
Теорема 0.1. *(Об универсальном НА). Пусть V - произвольный алфавит. Может быть построен НА U над алфавитом $V \cup V_0$ такой, что для любых НА $\mathcal{A}$ в алфавите V и слова $x \in V^*$ имеет место $U(\text{Ɛ}\mathcal{A}\text{З}\$x) \simeq \mathcal{A}(x)$, где $\$ \notin V \cup V_0$*

0.2 Разрешимые и перечислимые языки.

Определение 1. Язык $L \subseteq V^*$ называется алгоритмически разрешимым, если может быть построен НА $\mathscr{A}_L$ над алфавитом V такой, что

$$(\forall x \in V^*)(!\mathscr{A}_L) \text{ и } \mathscr{A}_L(x) = \lambda \Longleftrightarrow x \in L$$

Пример. Пусть $L = \{\omega\omega : \omega \in V^*\}$



Также стоит заметить, что здесь $\mathscr{A}_L = \mathscr{C} + EQ$. Запись формальная и Белоусов может не понять, что здесь написано. А написано здесь то, что алгорифм $\mathscr{A}_L$ состоит из $\mathscr{C}$ и EQ.

$$\underbrace{\mathscr{C} \to EQ}_{\mathscr{A}_L}$$

Определение 2. НА $\widetilde{\mathscr{A}_L}$ называется полуразрешимым для языка $L \subseteq V^*$, если

$$!\widetilde{\mathscr{A}_L}(x) \Longleftrightarrow x \in L$$

Теорема 0.2. *Если для языка L невозможен полуразрешающий НА, то невозможен и разрешающий.*