Аппроксимация функций

Мы хотим заменить $f(x) \to \varphi(x, \overline{a})$. То есть на такую, которая наиболее близка к исходной.

Определение 1. Близость функций определяется нормой:

$$|| \, f(x) - \varphi(x, \overline{a}) \, ||$$

Самая простая аппроксимация - это интерполяция.

Определение 2. $f(x)$ - исходная функция, а $\varphi(x, \overline{a})$ - аппроксимирующая функция.

$$f(x) \to \varphi(x, \overline{a}), \overline{a} = \{a_0, a_1, \dots, a_n\}$$

С помощью интерполяции можно получить значение между двумя точками x_i. Проходит аппроксимирующая функция через узлы.

Интерполяция бывает Лагранжевой или Эрмитовой.

Определение 3. Эрмитова интерполяция - это использование 1-й, 2-й, 3-й и так далее производные для учета наклона аппроксимирующей функции в узле. В итоге получаем более точную функцию.

Определение 4. Сплайн - это многочлен, который непрерывен вместе со своими 1-ми и 2-ми производные на всей области аппроксимации.

Заметка. Если узлы неточны (например, $y \pm \delta x$), то строим методом наименьшим квадратам (наилучшее среднее квадратичное приближение).

1.1 Линейная интерполяция

Определение 5. Обобщенный полином:

$$\varphi(x, \overline{a}) = \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi_k(x)$$

Задача интерполяции состоит в том, чтобы так подобрать параметры, чтобы функция совпадала $\varphi(x, \overline{a}) = y_i, i = \overline{0, n} \to \{a_0, a_1, \dots, a_n\}$

Наиболее часто используют полином с целыми степенями:

$$\varphi(x, \overline{a}) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^n \qquad \sum_{k=0}^{n} a_k x_i^k = y_i, i = \overline{0, n} \to \{a_0, a_1, \dots, a_n\}$$

Примем это является линейной системой. Решим ее:

$$a_0 + a_1 x_i + a_2 x_1^2 + a_3 x_i^3 + \dots + a_n x_i^n = y_i$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \dots x_0^n \\ \vdots & & \\ 1 & x_n & x_n^2 \dots x_n^n \end{vmatrix} \neq 0$$

1.1.1 Интерполяционный полином Ньютона.

Определение 6. Введем понятие разделенных разностей:

$$y(x_0, x_1) = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}$$
$$y(x_0, x_1, x_2) = \frac{y(x_0, x_1) - y(x_1, x_2)}{x_0 - x_2}$$
$$\vdots$$
$$y(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \frac{y(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) - y(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{x_0 - x_n}$$

Отсюда получаем:

$$\begin{aligned}\Phi_n(x) =& y_0 + (x - x_0)y(x_0, x_1) + (x_0 - x_1)(x - x_1)y(x_0, x_1, x_2) + \ldots + (x - x_0)\ldots \\ & \ldots(x - x_{n-1})y(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)\end{aligned}$$

В общем виде получается так:

$$y_0 + \sum_{k=0}^{n}(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{k-1})y(x_0, x_1, \ldots, x_k)$$

Пример.

x	y(x)	y(x$_i$)	y(x$_i, x_j, x_k$)	y(x$_i, x_j, x_j, x_l$)	y(x$_i, \ldots, x_m$)
0	1				
		-0.304			
0.25	0.924		-1.128		
		-0.868		0.363	
0.5	0.707		-0.856		0.149
		-1.296		0.512	
0.75	0.383		-0.472		
		-1.532			
1	0				

Найти $x = 0.6$, 4-я степень полинома. Она требует 5 узлов. Берем только самые верхние числа (Это и есть разделенные разности!!!). Получаем:

$$\begin{aligned}\Phi_n(x) =& 1 - 0.304(x - 0) - 1.128(x - 0)(x - 0.25) + 0.363(x - 0)(x - 0.25)(x - 0.5) + \\ & + 0.149(x - 0)(x - 0.25)(x - 0.5)(x - 0.75)\end{aligned}$$

Отсюда $\Phi_4(0.6) \approx 0.589$ (точный результат 0.588)

Заметка. *Желательно, чтобы узлы находились симметрично относительно выбора (то есть три узла больше x и меньше x). В нашем примере 3 узла меньше x и 2 узла больше x (x = 0.6)*

Кратко подведем итоги полинома Ньютона:

1) Выбор конфигурации зависит от выбранного x и степени полинома (кол-во узлов равно степень полинома + 1.)

2) Степени больше 5-7 обычно не применяются из-за сильных неточностей.

Что нужно сделать:

- Построить конфигурацию
- таблицу разделенных разностей
- Построить полином Ньютона

Замечания об обратной интерполяции. Пусть даны числа:

x	y
0	5
1	3.2
2	-2.8
3	-4

Для обратной интерполяции поменяем местами столбцы x и y:

y	x
5	0
3.2	1
-2.8	2
-4	3

Строим для него полином Ньютона и ищем для него x = 0. Это и есть корень. Важно, чтобы обратная таблица функции должна быть упорядочена (сложность алгоритма будет меньше! Например, возрастающая последовательность).

1.1.2 Полином Эрмита

Определение 7. Полином Эрмита:

$$H_n(x) = \Phi_n(x, \underbrace{x_0, x_0, \ldots, x_0}_{n_0}, \underbrace{x_1, x_1, \ldots, x_1}_{n_1}, \ldots, \underbrace{x_m, x_m, \ldots, x_m}_{n_m})$$

А также $x_0, x_1, \ldots, x_m$ повторяются по $n_0, n_1, \ldots, n_m$ раз соответственно. Причем

$$\sum_{k=0}^{m} n_k = n + 1.$$

Пример. Пусть нужно построить по 2-м значениям функции и 2-м ее производным:

$$\begin{aligned} \mathscr{H}_3(x) &= \\ \Phi_3(x, x_0, x_0, x_1, x_1) &= \\ &= y_0 + (x - x_0)y(x_0, x_0) + (x - x_0)(x - x_0)y(x_0, x_0, x_1) + \\ &\quad + (x - x_0)^2(x - x_1)y(x_0, x_0, x_1, x_1) \end{aligned}$$

Заметим, что

$$y(x_0, x_0) = \left.\frac{y_0 - y_k}{x_0 - x_k}\right|_{k\to 0} = y_0'$$

И так далее.

Тогда:

$$y(x_0, x_0, x_1) = \frac{\overbrace{y(x_0, x_0)}^{y_0'} - y(x_0, x_1)}{x_0 - x_1} = \frac{y_0' - y(x_0, x_1)}{x_0 - x_1}$$

Общая формула производной:

$$\Phi(\underbrace{x_0, x_0, \ldots, x_0}_{m}) = \frac{y^{(m-1)}(x_0)}{(m-1)!}$$

Пример.

$$\Phi(x_0, x_0, x_0) = \frac{y_0''}{2!}$$