Доказательство. От противного. Предполагаем, что для языка L невозможен полуразрешающий, то возможен разрешающий НА.

Пусть $\mathscr{A}_L$ - разрешающий НА для $L \subseteq V^*$

По теореме о разветвлении строим

$$\mathscr{B}_L = {}_{\mathscr{A}_L}(\mathscr{A}_L \vee Null),$$

где

$$Null : \begin{cases} \to \end{cases}$$

Если $\mathscr{A}_L(x) = \lambda$, то есть $x \in L$, то $\mathscr{B}_L(x) = \mathscr{A}_L(x) = \lambda$.

Если $\mathscr{A}_L(x) \neq \lambda$, то есть $x \notin L$, отсюда $\neg!\mathscr{B}_L(x)$, так как $\neg!Null(x)$

Итак, $!\mathscr{B}_L(x) \iff x \in L$, то есть $\mathscr{B}_L$ - полуразрешающий НА для L вопреки условию теоремы. □

Теорема 0.1. *Если язык L разрешим, то и разрешимо его дополнение.*

$$\mathscr{A}_L(x) = \lambda \iff x \in L, \text{ то есть } \mathscr{A}_L \neq \lambda \iff x \notin L \text{ при } (\forall x)!\mathscr{A}_L(x)$$

Для универсального языка:

$$L = V^* \quad \mathscr{A}_{V^*} : \begin{cases} \xi \to \quad //\xi \in V \\ \to \bullet \end{cases}$$

Отсюда следует, что и пустой язык тоже разрешим, потому что он - дополнение универсального.

Определение 1. Конструктивное натуральное число (КНЧ) - это слово вида $0\underbrace{11\ldots1}_{n\geq0}$. Ноль кодирует ноль, 01 кодирует 1 и так далее. КНЧ $x \in V_0^*$

$$0 \to 0; \quad 01 \to 1; \quad 011 \to 2; \quad \ldots$$

Определение 2. Конструктивное целое число (КЦЧ) - это слово вида $[-]n$, где n - КНЧ.

Определение 3. Конструктивное рациональное число (КРЧ): m/n, где m, n - КЦЧ, то есть слово в $\{0, 1, -, /\}$ и $n \neq 0$

Определение 4. Язык $L \subseteq V^*$ называется алгорифмически перечислимым, если может быть построен НА N_L такой, что для любого КНЧ n $!N_L(n)$ и $N_L(n) \in L$, и $(\forall x \in L)$ <u>осуществимо</u> КНЧ n такое, что $x = N_L(n)$

Определение 5. A, $\quad \nu : \mathbb{N}_0 \to A$ сюръективно, то есть $(\forall x \in A)(\exists n \in \mathbb{N}_0)(x = \nu(n))$. Это называется нумерацией множества A.

Далее будем предполагать, что отображение ν будет биективной.

Проведем нумерацию целых чисел

рис1

Можно записать в виде формулы:

$$\gamma(n) = \begin{cases} -\frac{n}{2}, \text{ если } n \text{ четное} \\ \frac{n+1}{2}, \text{ если } n \text{ нечетное} \end{cases}$$

Сначала сделаем 3 алгорифма, нужных для следующей задачи (?)

$$\mathscr{C} : \begin{cases} 11 \to \\ 0 \to \bullet \end{cases}$$

Можем заметить, что $\mathscr{C}(n) = \lambda \iff n$ четное

$$N_L = {}_{\mathscr{C}}(\mathscr{A} \vee \mathscr{B})$$

Схема $\mathscr{A}$:

$$\mathscr{A} : \begin{cases} \alpha 11 \to 1\alpha \\ \alpha \to \bullet \\ 01 \to -0\alpha 1 \\ 0 \to \bullet 0 \end{cases}$$

Причем $\alpha \notin V_0$

Схема $\mathscr{B}$

$$\mathscr{B} : \begin{cases} \alpha 11 \to 1\alpha \\ \alpha \to \bullet \\ 01 \to 0\alpha 11 \\ \to \bullet \end{cases}$$

Нужно пронумеровать рациональные числа. Это по факту пары двух целых. Значит, учимся упорядочивать пары.

рис2

Определение 6. Область применимости НА $\mathscr{A}$ относительно алфавита V: пусть $\mathscr{A} = (V' \supset V, S, P)$ - НА над V; Тогда область применимости НА относительно алфавита V есть множество $\mathscr{M}_{\mathscr{A}}^V \risingdotseq \{x : x \in V^* \text{ и } !\mathscr{A}(x)\}$, причем $\mathscr{A} : V^* \underset{\bullet}{\to} V^*$. $\mathscr{M}_{\mathscr{A}}^V$ и есть область применимости.

Теорема 0.2. *Язык $L \subseteq V^*$ перечислим тогда и только тогда, когда он является областью применимости относительно алфавита V некоторого НА.*

Следствие. Всякий разрешимый язык перечислим.

Доказательство. (следствия). Пусть L - разрешимый язык и $\mathscr{A}_L$ - разрешающий НА.

Строим такой НА $\mathscr{B}_L = Empty \circ \mathscr{A}_L$, где $Empty$ применим только к пустому слову.

$$Empty : \begin{cases} \xi \to \xi \ //\xi \in V \\ \to \bullet \end{cases}$$

Отсюда получаем

$$!\mathscr{B}_L(x) \iff !\mathscr{A}_L(x) \text{ и } \mathscr{A}_L(x) = \lambda,$$

то есть $L = \mathscr{M}_{\mathscr{B}_L}^V$

Однако обратное неверно! □

0.1 Проблема применимости нормальных алгорифмов Маркова

Частная проблема применимости. Дан НА $\mathscr{A}$ в алфавите V. Можно ли построить НА $\mathscr{B}$ над алфавитом V такой, что $(\forall x \in V^*)!\mathscr{B}(x)$ и $\mathscr{B}(x) = \lambda \iff \neg!\mathscr{A}(x)$. Алгорифм Б задуман для того, чтобы расширить область применимости алгорфима А.

Общая проблема применимости. Дан алфавит V, $\$ \notin V \cup V_0$. Можно ли построить НА $\mathscr{B}$ над алфавитом $V \cup V_0$ так, что для любых НА $\mathscr{A}$ в алфавите V и слова $x \in V^*$

$$!\mathscr{B}(\text{Ɛ}\mathscr{A}\text{З}\$x) \text{ и } \mathscr{B}(\text{Ɛ}\mathscr{A}\text{З}\$x) = \lambda \iff \neg!\mathscr{A}(x)$$

0.1.1 Проблема самоприменимости.

Рассмотрим проблему самоприменимости. Мы хотим, чтобы алгорифм работал со своей собственной записью.

Соглашение. В дальнейшем, не оговаривая это особо, мы считаем, что алгорифм в алфавите V заменяем его в алфавит $V \cup V_0$

$$V \to V \cup V_0$$

$$V_1 = V \cup V_0 \cup \{\alpha, \beta\}; \alpha, \beta \notin V \cup V_0$$

$$\mathscr{A} : (V \cup V_0)^* \subset \bullet\!\!\to (V \cup V_0)^*$$

$$V_2 = V_0 \cup \{\alpha, \beta\}$$

Дан алфавит V. Можно ли построить НА $\mathscr{B}$ над алфавитом V_0 такой, что для любого НА $\mathscr{A}$ в $V \cup V_0$ будет верно

$$!\mathscr{B}(\text{Ɛ}\mathscr{A}\text{З}) \text{ и } \mathscr{B}(\text{Ɛ}\mathscr{A}\text{З}) = \lambda \iff \neg!\mathscr{A}(\text{Ɛ}\mathscr{A}\text{З})$$

Примеры. Построим как самоприменимые, так и несамоприменимые НА.

$$\mathscr{A}_0 : \begin{cases} \#a \to a\# \\ \#b \to b\# \\ \# \to \bullet aba \\ \to \# \end{cases}$$

Дадим ему на вход свою же запись:

$$\mathscr{A}_0 : \text{Ɛ}\mathscr{A}_0\text{З} \vdash \#\text{Ɛ}\mathscr{A}_0\text{З} \vdash \bullet aba\text{Ɛ}\mathscr{A}_0\text{З}$$

Причем $V_0 \cap \{\#, a, b\} = \varnothing$. Этот алгорифм самоприменим.

$$\mathscr{A}_0^f : \begin{cases} 0 \to 0 \\ 1 \to 1 \\ \text{Схема } \mathscr{A}_0 \end{cases}$$

Дадим ему на вход свою же запись:

$$\mathscr{A}_0^f : \text{Ɛ}\mathscr{A}_0^f\text{З} \vdash \text{Ɛ}\mathscr{A}_0^f\text{З} \vdash \dots$$

То есть $\neg!\mathscr{A}_0^f(\text{Ɛ}\mathscr{A}_0^f\text{З})$

Лемма. Невозможен НА $\mathscr{B}$ в алфавите $V \cup V_0$ такой, что для любого НА $\mathscr{A}$ в алфавите $V \cup V_0$ имело бы место

$$!\mathscr{B}(\varepsilon\mathscr{A}3) \Longleftrightarrow \neg!\mathscr{A}(\varepsilon\mathscr{A}3)$$

Доказательство. Пусть алгорифм $\mathscr{B}$ построен. Тогда при $\mathscr{A} = \mathscr{B}$ имеем:

$$!\mathscr{B}(\varepsilon\mathscr{B}3) \Longleftrightarrow \neg!\mathscr{B}(\varepsilon\mathscr{B}3)$$

что является противоречием. То есть он применим тогда, когда не применим?) □

Теорема 0.3. *Невозможен НА $\mathscr{B}$ над алфавитом V_0 так, что для любого НА $\mathscr{A}$ в алфавите V_1 имело бы место*

$$!\mathscr{B}(\varepsilon\mathscr{A}3) \Longleftrightarrow \neg!\mathscr{A}(\varepsilon\mathscr{A}3)$$

Доказательство. По теореме о переводе может быть построен НА $\mathscr{B}_1$ в алфавите $V_0 \cup \{\alpha, \beta\}$ так, что $(\forall x \in V_0^*)\mathscr{B}_1(x) \simeq \mathscr{B}(x)$.

Строим НА $\mathscr{B}_2$ как естественное распространение НА $\mathscr{B}_1$ на алфавит V_1.

Пусть

$$!\mathscr{B}(\varepsilon\mathscr{A}3) \Longleftrightarrow \neg!\mathscr{A}(\varepsilon\mathscr{A}3),$$

но тогда $!\mathscr{B}(\varepsilon\mathscr{A}3) \Longleftrightarrow !\mathscr{B}_1(\varepsilon\mathscr{A}3) \Longleftrightarrow !\mathscr{B}_2(\varepsilon\mathscr{A}3) \Longleftrightarrow \neg!\mathscr{A}(\varepsilon\mathscr{A}3)$, что невозможно в силу самой леммы. □

Итак, мы доказали невозможность полуразрешимость самоприменимости.

Проблема самоприменимости для алгорифмов алгорифмически неразрешима.