

## Примеры использования теоремы сочетания.

### 1) Проекцирующие НА

Дано  $V, \$ \notin V$ . Векторное слово в алфавите  $V : x_1 \$ x_2 \$ \dots \$ x_n, n \geq 1$ , где  $(\forall i = \overline{1, n})(x_i \in V^*)$

Нужен алгоритм, который вычисляет его  $x_i$

$$\prod_i (x_1 \$ x_2 \$ \dots \$ x_n) = x_i, \quad i = 1 \dots n$$

$$\mathcal{P}_1 : \begin{cases} \$ \eta \rightarrow // \eta \in V \\ \$ \rightarrow \\ \rightarrow \bullet \end{cases}$$

Результат работы  $\mathcal{P}_1(x_1 \$ x_2 \$ \dots \$ x_n) = x_1$

$$\mathcal{P}_2 : \begin{cases} \eta \rightarrow \# // \eta \in V, \# \notin V \\ \# \rightarrow \bullet \\ \$ \rightarrow \# \end{cases}$$

То есть  $\mathcal{P}_2(x_1 \$ x_2 \$ \dots \$ x_n) = x_2 \$ \dots \$ x_n$

Получаем  $\prod_i = \mathcal{P}_1 \circ \mathcal{P}_2^{i-1}, \quad 1 \leq i \leq n$

$$i = 1: \mathcal{P}_2^{i-1} = \mathcal{P}_2^0 = \mathcal{I}\alpha$$

$$i = n: \mathcal{P}_2^{n-1}(x_1 \$ x_2 \$ \dots \$ x_n) = x_w; \quad \mathcal{P}_1(x_n) = x_n$$

### 2) НА распознавания равенства слов

$$EQ(x \$ y) = \lambda \iff x = y; \quad x, y \in V^*, \$ \notin V$$

$$EQ(x \$ y) \simeq Comp(\mathcal{I}\alpha \$ Inv(y))$$

$$Inv(y) = y^R$$

$$Comp : \begin{cases} \eta \$ \eta \rightarrow \$ // \eta \in V \\ \$ \rightarrow \bullet \end{cases}$$

$$x^R = (x(1)x(2) \dots x(k))^R = x(k) \dots x(2)x(1)$$

### 3) НА определения центра слова

$$\mathcal{C}(x) = x_1 \$ x_2, \text{ где } x_1 x_2 = x, \quad ||x_1| - |x_2|| \leq 1, x \in V^*; \quad \$ \notin V$$

$$\mathcal{C} = \mathcal{B} \circ \mathcal{A} \langle L \circ R \rangle$$

$$L : \begin{cases} \alpha \beta \rightarrow \bullet \alpha \beta \\ \alpha \xi \rightarrow \bullet \xi \alpha // \xi \in V, \alpha \notin V \\ \rightarrow \alpha \end{cases}$$

$$R : \begin{cases} \gamma \xi \rightarrow \xi \gamma // \xi \in V; \beta, \gamma \notin V \\ \xi \gamma \rightarrow \bullet \beta \xi \\ \xi \beta \rightarrow \bullet \beta \xi \\ \rightarrow \gamma \end{cases}$$

$$\mathcal{A} : \begin{cases} \alpha\beta\xi \rightarrow \alpha\beta \\ \xi\alpha\beta \rightarrow \alpha\beta \\ \alpha\beta \rightarrow \bullet \\ \rightarrow \bullet \end{cases}$$

$$\mathcal{B} : \begin{cases} \alpha\beta \rightarrow \bullet\$ \\ \rightarrow \bullet\$ \end{cases}$$

Пример 1.  $\lambda$ ,  $\mathcal{B}(\lambda) = \$$

$\mathcal{A}(\lambda) = \lambda \implies$  тело цикла не выполнилось

Пример 2.  $x = a \in V$

$\mathcal{A}(a) = a \neq \lambda$

$R : a \vdash \gamma a \vdash a\gamma \vdash \bullet\beta a$

$L : \beta a \vdash \alpha\beta a \vdash \bullet\alpha\beta a$

$\mathcal{A}(\alpha\beta a) = \lambda$

$\mathcal{B}(\alpha\beta a) = \$a$

Пример 3.  $x = ab$

$\mathcal{A}(ab) = ab \neq \lambda$

$R : ab \vdash \gamma ab \models^2 ab\gamma \vdash \bullet\alpha\beta b$

$L : \alpha\beta B \vdash \alpha a\beta b \vdash \bullet a\alpha\beta b$

$\mathcal{A}(a\alpha\beta b) = \lambda$

$\mathcal{B}(a\alpha\beta b) = a\$b$

Пример 4.  $x = abcde$

$\mathcal{A}(x) = x \neq \lambda$

1 Итерация:

$R : abcde \vdash \gamma abcde \models^5 abcde\gamma \vdash \bullet abcde\beta e$

$L : abcd\beta e \vdash \alpha abcd\beta e \vdash \bullet a\alpha bcd\beta e$

2 Итерация:

$R : a\alpha bcd\beta e \vdash \bullet a\alpha bcd\beta e$

$L : a\alpha bcd\beta e \vdash \bullet a\alpha bcd\beta e$

3 Итерация:

$R : ab\alpha c\beta de \vdash \bullet ab\alpha c\beta de$

$L : ab\alpha c\beta de \vdash \bullet ab\alpha c\beta de$

$\mathcal{A}(ab\alpha c\beta de) = \lambda$

$\mathcal{B}(ab\alpha c\beta de) = ab\$cde$

## 0.1 Универсальный нормальный алгоритм.

Пусть дан НА:

$$\mathcal{A} : \begin{cases} u_1 \rightarrow [\cdot]v_1 \\ \vdots \\ u_n \rightarrow [\cdot]v_n \end{cases}$$

$$A^{\text{II}} \Leftarrow u_1\alpha[\beta]v_1\gamma u_2\alpha[\beta]v_2\gamma \dots \gamma u_n\alpha[\beta]v_n, \text{ где } \alpha, \beta, \gamma \notin V$$

Пусть

$$\mathcal{A}_0 : \begin{cases} \#a \rightarrow a\# \\ \#b \rightarrow b\# \\ \# \rightarrow \bullet aba \rightarrow \# \end{cases}$$

Отсюда

$$A_0^{\text{II}} = \#a\alpha a\#\gamma\#b\alpha b\#\gamma\#\alpha\beta aba\gamma\alpha\#$$

$$\varepsilon A_0 3 = \underbrace{01110}_{\#} \underbrace{010}_a \underbrace{011110}_{\alpha} \underbrace{010}_a \underbrace{01110}_{\#} \underbrace{01111110}_{\gamma}$$

$a$	$b$	$\#$	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$
1	2	3	4	5	6

**Теорема 0.1.** (Об универсальном НА). Пусть  $V$  - произвольный алфавит. Может быть построен НА  $U$  над алфавитом  $V \cup V_0$  такой, что для любых НА  $\mathcal{A}$  в алфавите  $V$  и слова  $x \in V^*$  имеет место  $U(\varepsilon A 3 \$ x) \simeq \mathcal{A}(x)$ , где  $\$ \notin V \cup V_0$

## 0.2 Разрешимые и перечислимые языки.

**Определение 1.** Язык  $L \subseteq V^*$  называется алгоритмически разрешимым, если может быть построен НА  $\mathcal{A}_L$  над алфавитом  $V$  такой, что

$$(\forall x \in V^*)(!A_L) \text{ и } \mathcal{A}_L(x) = \lambda \iff x \in L$$

**Пример.** Пусть  $L = \{\omega\omega : \omega \in V^*\}$   
рис1

**Определение 2.** НА  $\widetilde{\mathcal{A}}_L$  называется полуразрешимым для языка  $L \subseteq V^*$ , если

$$!\widetilde{\mathcal{A}}_L(x) \iff x \in L$$

**Теорема 0.2.** Если для языка  $L$  невозможен полуразрешающий НА, то невозможен и разрешающий.