0.1 Диффуры, решение, пример?

Пусть дано

$$u''(x) = p(x)u'(x) + g(x) + f(x)$$

не имеет аналитического решения.

Область, в которой надо найти решение: $a \le x \le b$

$$\begin{array}{ccc} x = a & L_a u = A & (\alpha u'(a) + \beta u(a) = A) \\ x = b & u = B & \end{array}$$

$$y(x) = \underbrace{u_0(x)}_{\text{Произвольная ф-я}} + \sum_{k=1}^{n} C_k * \underbrace{u_k(x)}_{\text{Произвольные ф-и}}$$

u_0 и u_k удовлетворяют краевым условиям дифф. уравнения.

Далее делаем такую невязку:

$$R(x, C_1, \ldots, C_n)$$

$$\Phi(C_1, C_2, \ldots, C_n) = \sum R^2(x_i, C_1, \ldots, C_n) \to min$$

Причем помним, что C_k ищутся так:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial C_k} = 0, \quad k = 1, 2 \ldots, n$$

Мы сначала выбираем u_0, u_k. Выбираются произвольные функции, удовлетворяющие краевым условиям. Далее находим невязку:

$$R(x, C_1, \ldots, C_n) = y''(x) - p(x)y'(x) - g(x)y - f(x) \quad y(x) = u(x) \text{ замена}$$

0.2 Что-то про решение нелинейных систем уравнений?

Матрица Якоби:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

$$\overline{x}^{(1+1)} \quad \overline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\Phi(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} f_k^2(x_1, \ldots, x_n) \to min \quad \Phi(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

Пример.

$$\begin{cases} x^2 + x\cos xy + \frac{x}{y} = 5 \\ 8xy^3 + e^{x^2 y} = 9 \end{cases}$$

Надо линериазовать (?) систему. Вот как выглядит линеаризованное уравнение 1 выше:

$$\left(2x + \cos xy - x \sin xy * y + \frac{1}{y}\right)\Bigg|_{x^{(s-1)}} \Delta x^{(1)} + \left(-x \sin xy * x - \frac{x}{y^2}\right) \Delta y^{(1)}$$

Оно также равно:

$$-\left(x^2 + x\cos xy + \frac{x}{y} - 5\right)\Bigg|_{x^{(s-1)}}$$

Замечание к ЛР 5.

Реализация разностной схемы для краевой задачи метода Ньютона.

Пусть дано уравнение:

$$u''(x) = f(x,u) \quad a \le x \le b$$

Например

$$f(x,u) = \cos^2 xu + u^3 \tag{1}$$

Также даны условия:

$$u(a) = \alpha_1 \quad u(b) = \alpha_2$$

Сделаем сеточную функцию (?) этой функции.

$$\omega_h = \{x_n : x_n = a + nh, n = \overline{0, N}, h = \frac{b-a}{N}\}$$

Функция тогда выглядит в разностном виде так:

$$\frac{y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1}}{h^2} = f(x_n, y_n)$$

Или

$$y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1} = h^2 f(x,u), \quad n = 1, 2, \ldots, N-1 \quad (n = \overline{1, N-1}) \tag{2}$$

Получилась нелинейная система уравнений (2). Применим для решения этой системы рассмотренный выше метод Ньютона, то есть линеаризуем эту систему:

$$f(y_{n-1}, y_n, y_{n+1}) = 0$$
$$y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1} - h^2 f(x_n, y_n) = 0$$
$$\Delta y_{n-1}^{(s)} - 2\Delta y_n^{(s)} + \Delta y_{n+1}^{(s)} - h^2 f'(x_n, y_n^{(s-1)})\Delta y_n^{(s)} = -(y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1} - h^2 f(x_n, y_n))\Big|_{(s-1)}$$

Из третьего можно получить такое:

$$-y_{n-1}^{(s-1)} - 2y_n^{(s-1)} + y_{n+1}^{(s-1)} - h^2 f(x_n, y_n^{(s-1)}), \quad n = \overline{1, N-1}$$

Получили систему с трехдиагональной матрицей, для решения которой применяем известный из метода сплайнов метод прогонки . Ищутся Δy.

$$\begin{cases} -y_{n-1}^{(s-1)} - 2y_n^{(s-1)} + y_{n+1}^{(s-1)} - h^2 f(x_n, y_n^{(s-1)}), \quad n = \overline{1, N-1} \\ \Delta y_0 = 0 \\ \Delta y_N = 0 \end{cases}$$

$y_k^{(s)} = y_k^{(s-1)} + \Delta y_k^{(s)}, \quad k = \overline{1, N-1}$

Условие окончания итераций:

$$\underset{1 \le n \le N-1}{max} \left| \frac{\Delta y_k^{(s)}}{y_k^{(s)}} \right| <= 1o^{-4}$$

Применительно к $f(x,u) = \cos^2 xu + u^3$
$f'_u(x,u) = -2\cos xu \sin xu * x + 3u^2$
$f'_u(x_n, y_n) = -2\cos x_n y_n * \sin x_n y_n * x_n + 3y_n^2$
$|y_n - u(x_n)| \to 0$ при $n \to 0$
Тут в виду имеется $\cos(xu)$.

Методы решения одного нелинейного уравнения, $f(x) = 0$.

- Метод простой итерации
  $x^{(s)} = \varphi(x^{(s-1)})$
- Дихотомия. Нужно чтобы f(a) и f(b) имели разные знаки.

- Метод Ньютона
- Метод секущих
- Метод Хорд
- Метод парабол
- И другие