Множества и отношения

1.1 Понятие множества. Операции над множествами

Пусть дано
$$A = \{x : P(x)\},$$
где $P(x)$ - предикат.

Например:
$$A = \{x : x \text{ - четное число}\}$$
$C = \{1, 3, 5\} = \{x : x = 1 \vee x = 2 \vee x = 3\}$. C - замкнутое множество.

Определение 1. Равенство множеств можно задать так:
$$A = B \risingdotseq (\forall x)(x \in A \Longleftrightarrow x \in B)$$

Можно назвать это принципом экстенсиональности (extension). При равенстве множеств важен только их состав.

1.1.1 Подмножество

Определение 2. Нестрогое включение:
$$A \subseteq B \risingdotseq (\forall x)(x \in A \implies x \in B)$$

Тогда равенство можно задать и через поднмножества:
$$A = B \risingdotseq (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$$

Определение 3. Строгое включение:
$$A \subset B \risingdotseq (A \subseteq B) \wedge (A \neq B)$$

Пара примеров:
$$\{1, 3, 5\} = \{3, 5, 1\} \neq \{\{1, 3\}, 5\}$$
$$\{1, 3\} \subset \{1, 3, 5\}$$
$$\{1, 3\} \in \{\{1, 3\}, 5\}$$
$$\{\{1, 3\}\} \subset \{\{1, 3\}, 5\}$$

Определение 4. Пустое множество:
$$\varnothing = \{x : F(x)\},$$
где $F(x)$ - заведомо ложный предикат для всех x. По определению $\varnothing \subseteq A$

Определение 5. U - универсальное множество
$$(\forall x)(x \in U)$$

Также верно для всех других множеств:
$$A \subseteq U$$

1.1.2 Операции над множествами

- Объединение
$$A \cup B \leftrightharpoons \{x : x \in A \vee x \in B\}$$
- Пересечение
$$A \cap B \leftrightharpoons \{x : x \in A \wedge x \in B\}$$
- Разность
$$A \setminus B \leftrightharpoons \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$$
- Симметрическая разность
$$A \triangle B \leftrightharpoons (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$
- Дополнение
$$\overline{A} \leftrightharpoons \{x : x \notin A\} = U \setminus A$$

Тождества операций над множествами:

- $$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$
- $$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cap B = B \cap A$$
- $$A \cap A = A \cup A = A$$
- $$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
- $$A \cup \varnothing = A$$
$$A \cap \varnothing = \varnothing$$
- $$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$
$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$
- $$A \cup \overline{A} = U$$
$$A \cap \overline{A} = \varnothing$$
- $$A \triangle B = B \triangle A$$
- $$A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$$

Метод доказательства тождеств с помощью двух включений. Пусть дано выражение

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Докажем его верность:

$$\begin{aligned} x \in A \cap (B \cup C) &\implies \\ \implies (x \in A)\,\&(x \in B \cup C) &\implies \\ \implies (x \in A)\,\&((x \in B) \vee (x \in C)) &\implies \\ \implies ((x \in A)\,\&(x \in B)) \vee ((x \in A) \vee (x \in C)) &\implies \\ &\implies (x \in A \cap B) \cup (x \in A \cap C) \end{aligned}$$

Это верно и в обратную сторону (доказательство с конца в начало)

1.2 Неупорядоченная пара. Кортеж. Декартово произведение

Определение 6. Пусть $A, B \neq \varnothing, a \in A, b \in B$. Тогда $\{a, b\}$ - неупорядоченная пара на множествах A и B.

При этом

- Если $a = b$, то $|\{a, a\}| = |\{a\}| = 1$
- Если $a \neq b$, то $|\{a, b\}| = 2$

Равенство неупорядоченных пар:

$$\{a, b\} = \{c, d\} \Leftrightarrow ((a = c)\,\&(b = d)) \vee ((a = d) \vee (b = c))$$

Определение 7. Пусть $A, B \neq \varnothing, a \in A, b \in B$. Тогда (a, b) - упорядоченная пара на множествах A и B.

Равенство упорядоченных пар:

$$(a, b) = (c, d) \leftrightharpoons (a = c)\,\&(b = d)$$

Упорядоченная пара по определению не является множеством, но ее можно к нему свести:

$$(a, b) \leftrightharpoons \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

Определение 8. Пусть даны множества $A_1, A_2, \ldots, A_n, n \geq 0$. Тогда

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n), \text{ где } a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n$$

называется кортежем.

Можно задать через декартово умножение:

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \leftrightharpoons \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : (\forall i = \overline{1, n})(x_i \in A_i)\}$$

По определению если $A_i = \varnothing$, то все декартово произведение равно:

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \varnothing$$

Если $A_1 = A_2 = \ldots = A_n$, то

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \leftrightharpoons A^n, n \geq 1$$

Также по определению $A^0 \leftrightharpoons \{\lambda\}$, λ - пустой кортеж, а $A \neq \varnothing$

1.3 Дополнение к параграфу 1 и 2. Булеан

Определение 9. Булеан множества A:

$$2^A \leftrightharpoons \{x : x \subseteq A\}$$

. То есть множество всех подмножеств.

Пример:

$$A = \{a, b, c\}$$
$$2^A = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \ldots\}$$

$2^A = \exp A = \Phi(A) = \beta(A)$

1.4 Отношение. Соответствие. Отображение.

Рассуждения будут происходить от самого абстрактного к самому точному примеру.

Определение 10. Н-местное (н-арное) отношение на множествах $A_1, A_2, \ldots, A_n$:

$$\rho \subseteq A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$$

Пример:

$$A_1 = A_2 = \mathbb{R}$$
$$\rho \leftrightharpoons \{(x, y) : x^2 + y^2 = a^2, a \geq 0\}$$

Определение 11. Если $A_1 = A_2 = \ldots = A_n$, то $\rho \subseteq A^n, n \geq 1$, то это называется н-арным отношением на множестве A.

Определение 12. Область определения:

$$D(\rho) \leftrightharpoons \{x : x \in A, (x, y) \in \rho\}$$

Определение 13. Область значений:

$$R(\rho) \leftrightharpoons \{y : y \in B, (x, y) \in \rho\}$$

Определение 14. Область сечения соответствия $\rho \subseteq A \times B$ по $a \in A$:

$$\rho(a) \leftrightharpoons \{y : (a, y) \in \rho\}$$

Определение 15. Область сечения соответствия $\rho \subseteq A \times B$ по множеству $C \subseteq D(\rho)$:

$$\rho(C) \leftrightharpoons \{(x, y) : x \in C, (x, y) \in \rho\}$$

Определение 16. Если у соотношения $\rho \subseteq A \times B$ будет верно $D(\rho) = A$, то оно называется соответствием.

Определение 17. Соответствие $\rho \subseteq A \times B$ называют функциональным по 2-й компоненте, если $\forall (x, y)$ и $\forall (x', y') : x = x' \implies y = y'$

Определение 18. Соответствие $\rho \subseteq A \times B$ называют функциональным по 1-й компоненте, если для $\forall (x, y)$ и $(x', y') : y = y' \implies x = x'$

Определение 19. Соответствие, которое всюду определено и функционально по 2-й компоненте, называют отображением.

$$f : A \to B.$$

Причем $D(f) = A$.

Также $(x, y) \in f$ превращается в $y = f(x)$. y - образ элемента x при отображении в y. То есть $x = x' \implies f(x) = f(x')$

Определение 20. Частичное отображение - это такое отображение, где $D(f) \neq A$.

$$f : A \underset{\bullet}{\to} B$$

Определение 21. Если отображение функционально и по первой компоненте, то оно называется инъекцией.

$$(\forall x \in A)(\exists! y = f(x))\,\&(\forall y \in R(f))(\exists! x \in A)(y = f(x))$$

Определение 22. Сюръекция - это отображение, где $R(f) = B$.

$$(\forall y \in B)(\exists x \in A)(y = f(x))$$

Определение 23. Биекция - это инъекция и сюръекция одновременно.

Определение 24. Два множества называют эквивалентными, если между ними можно установить взаимооднозначное соответствие.

$$\begin{aligned}
&1) A \sim A (f : A \to A, \text{ где } (\forall x \in A)(f(x) = x))\\
&2) A \sim B, B \sim C \implies A \sim C\\
&3) A \sim B \implies B \sim A
\end{aligned}$$

Заметка. Принимается, как аксиома, что между 2-мя конечными множествами может быть установлено однозначно взаимное соответствие, если они состоят из одинакового числа элементов.

Способы доказательства на отображения. Докажем, что

$$f : X \to Y; A, B \subseteq X \implies f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
y \in f(A \cup B) &\implies\\
\implies (\exists x \in A \cup B)(y = f(x)) &\implies\\
\implies (\exists x)(x \in A, y = f(x)) \vee (x \in B, y = f(x)) &\implies\\
&\implies y \in f(A) \cup f(B)
\end{aligned}$$

Докажем в обратную сторону:

$$\begin{aligned}
y \in f(A) \cup f(B) &\implies\\
\implies y \in f(A) \vee y \in f(B) &\implies\\
\implies (\exists x \in A)(y = f(x)) \vee (\exists x' \in B)(y = f(x')) &\implies\\
\implies (\exists t \in A \cup B)(y = f(t)) &\implies\\
&\implies y \in f(A \cup B)
\end{aligned}$$

□

1.5 Операции над соответствиями

- Теоретико-множественные: $\cup, \cap, \setminus, \triangle, ^{-}$
- Композиция
$$\rho \subseteq A \times B, \sigma \subseteq C \times D$$
$$\rho \circ \sigma \risingdotseq \{(x,y) : (\exists z)((x,z) \in \rho \,\&(z,y) \in \sigma)\}$$

То есть если $\rho \subseteq A \times B$, а $\sigma \subseteq C \times D$, то их композиция $\rho \circ \sigma \subseteq A \times D$

Также верно:

$$f : A \to B, g : B \to C$$
$$f \circ g = \{(x,y) : (\exists z)((x,z) \in f \,\&(y,z) \in g)\}$$

Можно показать, что $f \circ g = g(f(x))$.

Доказательство.

$$\begin{aligned} f \circ g = \\ = \{(x,y) : (\exists z)((x,z) \in f \,\&(y,z) \in g)\} = \\ = \{(x,y) : (\exists z)(z = f(x) \,\&\, y = g(z))\} = \\ = \{(x,y) : y = g(f(x))\} \end{aligned}$$

$\square$

Пример нахождения композиций. Пусть дано соответствие $\rho \subseteq A^2$. Найдем $\rho^2 \risingdotseq \rho \circ \rho$.

$$\rho = \{(x,y) : x^2 + y^2 = a^2\}$$
$$\rho^2 = \{(x,y) : (\exists z)(x^2 + z^2 = a^2, z^2 + y^2 = a^2)\}$$
$$\rho^2 = \{(x,y) : x^2 - y^2 = 0\} \text{ (Отняли } z^2 + y^2 \text{ из } x^2 + z^2)$$

Определение 25. Если $\rho \subseteq A \times B$, то $\rho^{-1} \subseteq B \times A$ - обратное соответствие.
$$\rho^{-1} \risingdotseq \{(x,y) : (y,x) \in \rho\}$$

Следует также заметить, что если $\rho = f : A \to B$ - биекция, то можно найти обратное отображение:

$$f^{-1} : B \to A$$

Свойства композиции:

1)
$$\rho \circ (\sigma \circ \tau) = (\rho \circ \sigma) \circ \tau$$

2)
$$\rho \circ \sigma \neq \sigma \circ \rho$$

3)
$$\rho \circ (\sigma \cup \tau) = (\rho \circ \sigma) \cup (\rho \circ \tau)$$

4)
$$\rho \circ (\sigma \cap \tau) = (\rho \cap \sigma) \cap (\rho \cap \tau)$$

5)

$$(\rho^{-1})^{-1} = \rho$$

6)

$$(\rho \circ \sigma)^{-1} = \sigma^{-1} \circ \rho^{-1}$$

7)

$$\rho \subseteq A^2$$

1.6 Специальные свойства бинарных отношений

Пусть дано A^2 - бинарное отношение.

$\rho \subseteq A^2, A \neq \varnothing$. Вместо $(x, y) \in \rho$ пишем $x\rho y$.

Тогда его свойства:

- Рефлексивность.

  Отношение ρ называется рефлексивным, если $(\forall x \in A)(x\rho x)$. То есть диагональ $id_A \subseteq \rho$.

- Иррефлексивность

  Отношение ρ называется иррефлексивным, если $Id_A \cap A = \varnothing$.

- Симметричность

  Отношение ρ называется симметричным, если

  $$(\forall, y \in A)(x\rho y \implies y\rho x),$$

  то есть $rho = \rho^{-1}$

- Антисимметричность

  Отношение ρ называется антисимметричным, если

  $$(\forall x, y \in A)(x\rho y \,\&\, y\rho x \implies x = y)$$

- Транзитивность

  Отношение ρ называется транзитивным, если

  $$(\forall x, y, z \in A)(x\rho y, y\rho z \implies x\rho z)$$

Теорема 1.1. *Отношение $\rho \subseteq A^2$ транзитивно тогда и только тогда, когда $\rho^2 \subseteq \rho$*

Доказательство. В прямую сторону.

Пусть $\rho \subseteq A^2$ транзитивно. Тогда если $x\rho^2 y$, то $(\exists z)(x\rho z, z\rho y)$, то есть в силу транзитивности $x\rho y$.

В обратную сторону.

Пусть $\rho^2 \subseteq \rho$ и пусть $(\exists x, y, z \in \rho)(x\rho y, y\rho z)$. Тогда мы имеем $x\rho^2 y \implies x\rho y$, то есть оно транзитивно. □

Замечание. Если отношение ρ рефлексивно и транзитивно, то $\rho^2 = \rho$

Классы отношений:

1) Отношение эквивалентности
   - Рефлексивность
   - Симметричность
   - Транзитивность

2) Отношение толерантности
   - Рефлексивность
   - Симметричность

3) Отношение порядка

   - Рефлексивность
   - Антисимметричность
   - Транзитивность

4) Отношение предпорядка

   - Рефлексивность
   - Транзитивность