Следствие 3. (Свойства конъюнкции).
1) $A, B \vdash A \,\&\, B$
2) $A \,\&\, B \vdash A, B$
3) $A \,\&\, B \vdash B \,\&\, A$

Доказательство.

1 пункт.

1) A - гипотеза
2) B - гипотеза
3) $\neg\neg B$ - R4, (2)
4) $\neg(A \to \neg B)$ - R8, (1) и (3)

2 пункт

1) $\neg A$ - гипотеза
2) $\neg A \to (A \to \neg B)$ - секвенция 5
3) $A \to \neg B$ - MP, (1) и (2)
4) $\neg\neg(A \to \neg B)$ - R4, (3)

3 пункт.

1) $B \to \neg A$ - гипотеза
2) $\neg\neg A \to \neg B$ - R7, (1)
3) $A \to \neg\neg A$ - секвенция 4
4) $A \to \neg B$ - R1, (3) и (2)

□

0.1 Непротиворечивость и полнота теории L

Теорема 0.1. *Любая теорема теории L есть тавтология.*

Доказательство. Легко проверить, что каждая формула, получаемая из схемы аксиомы, будет тавтологией.
Φ - тавтология, $\Phi \to \Psi$ - тавтология.
Пусть Ψ - не есть тавтология.

$$(\forall\widetilde{\alpha})\Phi(\alpha) = T, \quad (\Phi \to \Psi)(\alpha) = \Phi(\widetilde{\alpha}) \to \Psi(\widetilde{\alpha}) = T$$

То есть

$$\Phi(\widetilde{\alpha}) \to \Psi(\widetilde{\alpha}) = T \to F$$

есть противоречие. □

Следствие. В теории L нельзя доказать формулу и ее отрицание.

Теорема 0.2. *Любая тавтология доказуема в теории L.*

Доказательство. Будем считать, что

$$\Phi = \Phi(x_1, \ldots, x_n); \quad \widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n); \quad \Phi^{\widetilde{\alpha}} \leftrightharpoons \begin{cases} \Phi, \text{ если } \Phi(\widetilde{\alpha}) = T \\ \neg\Phi, \text{ если } \Phi(\widetilde{\alpha}) = F \end{cases}$$

Лемма (Кальмара) . $x_1^{\alpha_1}, \ldots, x_n^{\alpha_n} \vdash \Phi^{\widetilde{\alpha}}$

Доказательство. (Док-во леммы). Индукция по числу $l(\Phi)$ логических связок в формуле Φ.

Базис: $l(\Phi) = 0$, значит формула Φ есть переменная. $\Phi = x_i$ - переменная.
Тогда очевидна такая секвенция $x_i^{\alpha_i} \vdash x_i^{\alpha_i}$, то есть $x_i \vdash x_i$ или $\neg x_i \vdash \neg x_i$ - очевидно В силу $\vdash (A \to A)$.

Предположение: Пусть утверждение леммы справедливо при любом значении $l(\Phi) \leq n - 1, n \geq 1$

Переход: Полагаем, что $l(\Phi) = n$.

1 случай.

$\Phi = \neg\Psi$, где $l(\Psi) = n-1$
1.1 $\Psi(\widetilde{\alpha}) = F$
$\Phi(\widetilde{\alpha}) = n, \Phi^{\widetilde{\alpha}} = \Phi, \Psi^{\widetilde{\alpha}} = \neg\Psi$
По предположению индукции $x_1^{\alpha_1}, \ldots, x_n^{\alpha_n} \vdash \Psi^{\widetilde{\alpha}} = \neg\Psi = \Phi = \Phi^{\widetilde{\alpha}}$

1.2 $\Psi(\widetilde{\alpha}) = T$
$\Phi(\widetilde{\alpha}) = F, \quad \Phi^{\widetilde{\alpha}} = \Phi, \quad \Psi^{\widetilde{\alpha}} = \Psi$
$x_1^{\alpha_1}, \ldots, x_n^{\alpha_n} \vdash \Psi^{\widetilde{\alpha}} \vdash \neg\neg\Psi = \neg\Phi = \Phi^{\widetilde{\alpha}}$

2 случай.

$\Phi = q \to \psi$, где $l(Q) + l(\Psi) = n-1, \quad l(Q), l(\Psi) < n.$

2.1 $Q(\widetilde{\alpha}) = \Psi(\widetilde{\alpha}) = F$
$Q^{\widetilde{\alpha}} = \neg Q, \Psi^{\widetilde{\alpha}} = \neg\Psi, \Phi(\widetilde{\alpha}) = F \to F = T$
По предположению индукции:
$x_1^{\alpha_1}, \ldots, x_n^{\alpha_n} \vdash \neg Q, \neg\Psi; \quad \neg Q \to (Q \to \Psi)$ - секвенция 5; $Q \to \Psi$ - MP
$x_1^{\alpha_1}, \ldots, x_n^{\alpha_n} \vdash Q \to \Psi = \Phi = \Phi^{\widetilde{\alpha}}$

2.2 $Q(\widetilde{\alpha}) = F \quad \Psi(\widetilde{\alpha}) = T$
$Q^{\widetilde{\alpha}} = \neg Q, \Psi^{\widetilde{\alpha}} = \Psi, \Phi(\widetilde{\alpha}) = F \to T = T$
По предположению индукции:
$x_1^{\alpha_1}, \ldots, x_n^{\alpha_n} \vdash \neg Q, \Psi; \quad \neg Q \to (Q \to \Psi)$ - секвенция 5; $Q \to \Psi$ - MP
$x_1^{\alpha_1}, \ldots, x_n^{\alpha_n} \vdash Q \to \Psi = \Phi = \Phi^{\widetilde{\alpha}}$

2.3 $Q(\widetilde{\alpha}) = T \quad \Psi(\widetilde{\alpha}) = F$
$Q^{\widetilde{\alpha}} = Q, \Psi^{\widetilde{\alpha}} = \neg\Psi, \Phi(\widetilde{\alpha}) = T \to F = F$
По предположению индукции:
$x_1^{\alpha_1}, \ldots, x_n^{\alpha_n} \vdash Q, \neg\Psi; \neg(Q \to \Psi)$ - по R8
$x_1^{\alpha_1}, \ldots, x_n^{\alpha_n} \vdash \neg(Q \to \Psi) = \neg\Phi = \Phi^{\widetilde{\alpha}}$

2.4 $Q(\widetilde{\alpha}) = T \quad \Psi(\widetilde{\alpha}) = T$
$Q^{\widetilde{\alpha}} = Q, \Psi^{\widetilde{\alpha}} = \Psi, \Phi(\widetilde{\alpha}) = T \to T = T$
По предположению индукции:
$x_1^{\alpha_1}, \ldots, x_n^{\alpha_n} \vdash Q, \Psi; \Psi \to (\Phi \to \Psi), Q \to \Psi$ - MP
$x_1^{\alpha_1}, \ldots, x_n^{\alpha_n} \vdash (Q \to \Psi) = \Phi = \Phi^{\widetilde{\alpha}}$

$\square$

Продолжаем доказательство теоремы.
Пусть Φ - тавтология, то есть $(\forall\widetilde{\alpha})(\Phi(\widetilde{\alpha}) = T)$.
В силу леммы: $x_1^{\alpha_1}, \ldots, x_n^{\alpha_n} \vdash \Phi \left[(\forall\widetilde{\alpha}) Phi^{\widetilde{\alpha}} = \Phi\right]$

$$\widetilde{\alpha}_1 = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \neg\alpha_n) \quad x_1^{\alpha_1}, \ldots, x_n^{\alpha_n - 1}, x_{n-1}^{\alpha_n} \vdash \Phi$$

То есть

$$x_1^{\alpha_1}, \ldots, x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \vdash \Phi,$$

где стало на 1 меньше. Так отсчипываем, пока не получим:

$$x_1^{\alpha_1} \vdash \Phi_1, \neg x_1^{\alpha_1} \vdash \Phi$$

$$\vdash \Phi$$

$\square$

Следствие. Формула является тавтологией тогда и только тогда, когда она доказуема в теории L.

0.2 Эквивалентные формулы

Определение 1. Две формулы называют эквивалентными, если они выводимы друг из друга

$$\Phi \equiv \Psi \leftrightharpoons \Phi \vdash \Psi \quad \Psi \vdash \Phi$$

$$\Phi \equiv \Psi \Longleftrightarrow \vdash (\Phi \to \Psi) \,\&(\Psi \to \Phi)$$

Также $\Phi \equiv \Psi \Longleftrightarrow \neg\Phi \equiv \neg\Psi$

Утверждение. Если $\Phi \equiv \Psi$, то $(\forall\widetilde{\alpha})(\Phi(\widetilde{\alpha}) = \Psi(\widetilde{\alpha}))$

Примеры эквивалентности.

1) $\neg\neg A \equiv A$
2) $(A \to B) \equiv (\neg B \to \neg A)$
3) $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \,\&\, \neg B \quad \neg(A \,\&\, B) \equiv \neg A \vee \neg B$