4) $A \vee A \equiv A$
5) $A \to (B \to C) \equiv (A \,\&\, B) \to C$
6) $\neg(A \to B) \equiv A \,\&\, \neg B$

Определение 1. Подформула - это часть формулы, которая сама является формулой. Формула Фи содержит Тета в виде подформулы - $\Phi[\Theta]$. $\Phi[\Theta'/\ \Theta]$ - формула, получаемая заменой Θ на формулу Θ'

Теорема 0.1. *Пусть* $\Phi[\Theta](x_1, \ldots, x_n)$. *Тогда, если* $\Theta' \equiv \Theta$, *то* $(\forall \widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n))\Phi(\Theta'/\ \Theta)(\widetilde{\alpha}) = \Phi[\Theta](\widetilde{\alpha})$

Следствие. Если $\vdash \Phi[\Theta]$, то при $\Theta' \equiv \Theta \vdash \Phi[\Theta'/\ \Theta]$

0.1 Исчисление предикатов первого порядка

0.1.1 Понятие алгебраической системы

Определение 2. $\mathscr{A} = (A, \Omega, \prod)$ - алгебраическая система. A - множество, далее сигнатура операций, сигнатура предикатов.
$\omega : A^n \to A, \quad n \geq 0, \omega \in \Omega$ - операция
$p : A^n \to \{T, F\}, \quad n \geq 1$ - предикат

$p(x_1) = T \leftrightharpoons x_1$ есть четное число
$p(x_1, x_2) = T \leftrightharpoons x_1 + x_2 \geq x_1 * x_2$

Если множество предикатов $\prod = \varnothing$, то получаем алгебру $\mathscr{A} = (A, \Omega)$
Если множество операций $\Omega = \varnothing$, то получаем модель $\mathscr{A} = (A, \prod)$

Модель - это, например, граф $\mathcal{J} = (V, \rho)$.

0.1.2 ИП1: алфавит, понятие формулы

Определение 3. Алфавит состоит из таких частей:

1) $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ - множество предметных элементов
2) $\mathcal{F} = \mathcal{F}^{(0)} \cup \mathcal{F}^{(1)} \cup \ldots \cup F^{(n)} \cup \ldots$ - множество функциональных символов
3) $\mathscr{P} = \mathscr{P}^{(1)} \cup \mathscr{P}^{(2)} \cup \ldots \cup \mathscr{P}^{(n)} \cup \ldots$ - множество предикатных символов
4) $C = \mathcal{F}^{(0)}$ - множество предметных констант
5) Множество логических символов: $\to, \neg, \forall$. $\forall$ - квантор общности.
6) Множество вспомогательных символов Aux

Определение 4. Термы - это

1) Любая предметная переменная и любая переменная константа есть терм
2) Если $t_1, \ldots, t_n$ - термы, а $f^{(n)} \in \mathcal{F}^{(n)}$, то $f^{(n)}(t_1, \ldots, t_n)$ - терм
3) Других термов нет

Вместо $f^{(2)}(t_1, t_2)$ пишем $t_1 f^{(2)} t_2$

$t = (x_1 + x_2) \cdot ((-x_3) + x_1)$
$+, \cdot \in \mathcal{F}^{(2)}, \quad - \in F^{(1)}$

Определение 5. Атомарная формула - это выражение вида $p^{(n)}(t_1, \ldots, t_n)$, где $p^{(n)}$ - n-арный предикатный символ, а $t_1, \ldots, t_n$ - термы.

$$\underbrace{\geq}_{p^{(2)}}(\underbrace{x_1 + x_1}_{t_1}, \underbrace{x_1 * x_2}_{t_2})$$

Определение 6. Формула - это

1) Атомарная формула есть формула.

2) Если Φ, Ψ - формулы, то $(\Phi \to \Psi)$ - формула

3) Если Φ - формула, то $(\overline{\Phi})$ - формула

4) Если Φ - формула, а $x_i \in X$, то $(\forall x_i)\Phi$ - формула

5) Других формул нет

Определение 7.

1) $\Phi \vee \Psi = \neg\Phi \to \Psi$
2) $\Phi \,\&\, \Psi = \neg(\Phi \to \neg\Psi)$
3) $(\exists x_i)\Phi = \neg(\forall x_i)\neg\Phi$

$F \vee (\Phi)$ - множество свободных переменных в формуле Φ