Домашнее задание №2
Логика и Теория Алгоритмов

Козырнов Александр Дмитриевич
ИУ7-42Б
Вариант 6

4 мая 2024 г.

Оглавление

Задача 1

1.1 Условие

Для булевой функции f, заданной в таблице 1:
а) найти сокращенную ДНФ; б) найти ядро функции;
в) получить все тупиковые ДНФ и указать, какие из них являются минимальными;
г) на картах Карно указать ядро и покрытия, соответствующие минимальным ДНФ.

Сама функция f, заданная в виде вектора значений:

$$\boxed{f(1100\ 1101\ 1101\ 1001)}$$

1.2 Решение

1.2.1 Карты Карно

X_1X_2 \ X_3X_4	00	01	11	10
00	1	1		
01	1	1	1	
11	1		1	
10	1	1	1	

1.2.2 Ядро функции и сокращенная ДНФ

Ядром функции будет являться $\bar{x}_3\bar{x}_4$

Сокращенная ДНФ:

$$\boxed{\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3 \vee x_2x_3x_4 \vee x_1x_3x_4 \vee x_1\bar{x}_2x_4 \vee \bar{x}_1x_2x_4}$$

1.2.3 Поиск Тупиковых ДНФ. Функция Патрика

$K_1 = \bar{x}_3\bar{x}_4$ $\quad K_2 = \bar{x}_2\bar{x}_3$

$K_3 = \bar{x}_1\bar{x}_3$ $\quad K_4 = x_2x_3x_4$

$K_5 = x_1x_3x_4$ $\quad K_6 = x_1\bar{x}_2x_4$

$K_7 = \bar{x}_1x_2x_4$

Тогда изначальная функция Патрика будет выглядеть так:

$$(K_2 \vee K_3) \wedge (K_3 \vee K_7) \wedge (K_7 \vee K_4) \wedge (K_4 \vee K_5) \wedge (K_5 \vee K_6) \wedge (K_6 \vee K_2)$$

Вычислим (упростим) найденную функцию Патрика:

$$
\begin{aligned}
&(K_2 \vee K_3) \wedge (K_3 \vee K_7) \wedge (K_7 \vee K_4) \wedge (K_4 \vee K_5) \wedge (K_5 \vee K_6) \wedge (K_6 \vee K_2) = \\
&= (K_3 \vee K_3K_7 \vee K_2K_3 \vee K_2K_7) \wedge (K_7K_4 \vee K_7K_5 \vee K_4 \vee K_4K_5) \wedge (K_5K_6 \vee K_2K_5 \vee K_6 \vee K_6K_2) = \\
&= (K_3 \vee K_2K_7) \wedge (K_4 \vee K_5K_7) \wedge (K_6 \vee K_2K_5) = \\
&= (K_3K_4 \vee K_3K_5K_7 \vee K_2K_4K_7 \vee K_2K_5K_7) \wedge (K_6 \vee K_2K_5) = \\
&= K_3K_4K_6 \vee K_3K_4K_5 \vee K_2K_3K_4 \vee \cancel{K_3K_5K_6K_7} \vee K_3K_5K_7 \vee \cancel{K_2K_3K_5L_7} \vee \\
&\vee \cancel{K_2K_4K_6K_7} \vee \cancel{K_2K_4K_5K_7} \vee K_2K_4K_7 \vee \cancel{K_4K_5K_6K_7} \vee K_2K_5K_7 \vee \cancel{K_2K_5K_7} = \\
&= K_3K_4K_6 \vee K_3K_4K_5 \vee K_2K_3K_4 \vee K_3K_5K_7 \vee K_2K_4K_7 \vee K_2K_5K_7
\end{aligned}
$$

Получаем из вышенайденного

$$
\underbrace{\bar{x}_3\bar{x}_4}_{\text{Ядро}} \vee \underbrace{\begin{cases}
\bar{x}_1\bar{x}_3 \vee x_2x_3x_4 \vee x_1\bar{x}_2x_4 \\
\bar{x}_1\bar{x}_3 \vee x_2x_3x_4 \vee x_1x_3x_4 \\
\bar{x}_1\bar{x}_3 \vee x_2x_3x_4 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3 \\
\bar{x}_1\bar{x}_3 \vee x_1x_3x_4 \vee \bar{x}_1x_2x_4 \\
\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_2x_3x_4 \vee \bar{x}_1x_2x_4 \\
\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1x_3x_4 \vee \bar{x}_1x_2x_4
\end{cases}}_{\text{Тупиковые ДНФ}}
$$

1.2.4 Минимальная ДНФ

В итоге можем получить минимальную ДНФ:

$$
\boxed{\underbrace{\bar{x}_3\bar{x}_4}_{\text{Ядро}} \vee \underbrace{\bar{x}_2\bar{x}_3}_{K_2} \vee \underbrace{\bar{x}_1\bar{x}_3}_{K_3} \vee \underbrace{x_2x_3x_4}_{K_4}}
$$

Задача 2

2.1 Условие

Даны функции f (таблица 2) и w (таблица 3).

а) Вычислить таблицу значений функции f. б) Найти минимальные ДНФ функций f и w.

в) Выяснить полноту системы $\{f, w\}$. Если система не полна, дополнить систему функцией g до полной системы.

Указание. Запрещается дополнять систему константами, отрицанием и базовыми функциями двух переменных ($\oplus, \vee, \wedge, |, \downarrow$ и т.д.) Не допускается дополнение функцией, образующей с f или w полную подсистему, кроме случаев, когда иное невозможно.

г) Из функциональных элементов, реализующих функции полной системы $\{f, w\}$ или $\{f, w, g\}$, построить функциональные элементы, реализующие базовые функции $(\vee, \wedge, \bar{\ }, 0, 1)$.

Функция f:	Вектор значений функции w:
$\boxed{(x_3 \Rightarrow (x_2 \sim \bar{x}_3)) \vee (x_1 \oplus \bar{x}_2) \oplus x_1 x_2}$	$\boxed{w(1101\ 0100)}$

2.2 Решение

2.2.1 Нахождение таблицы значений функции f

$$\boxed{f = (x_3 \Rightarrow (x_2 \sim \bar{x}_3)) \vee (x_1 \oplus \bar{x}_2) \oplus x_1 x_2}$$

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

2.2.2 Нахождение минимальных ДНФ

Минимальная ДНФ функции f

X_1 \ X_2X_3	00	01	11	10
0	1	1		1
1	1	1		

Так как все склейки находятся в ядре функции, то найденная ДНФ будет минимальной:

$$\boxed{\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_3}$$

Минимальная ДНФ функции w

		X_2X_3			
		00	01	11	10
X_1	0	1	1	1	
	1		1		

Аналогично функции f функция w имеет все склейки в ядре, отчего минимальная ДНФ:

$$\boxed{\bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1x_3}$$

2.2.3 Выяснение полноты системы

	T_0	T_1	S	M	L
f	-	-	-	-	-
w	-	-	+	-	-

Легко понять, что обе функции не сохраняют констант 1 и 0. $f \notin S$, то есть не является самодвойственной, потому что ее набор значений как минимум является несимметричным. У функции w вектор значений является симметричным (1101 - 0100). То есть $Revers(0100) = 0010$, а $\overline{0010} = 1101$, что равно левой части. Функция f немонотонна, например есть значение $010 = 1$ и $011 = 0$. Обе функции нелинейны, так как их полиномы Жегалкина нелинейны.

Полином Жегалкина функции f

$$
\begin{aligned}
&f(0,0,0) = a_0 = 1 && \implies a_0 = 1\\
&f(1,0,0) = a_0 \oplus a_1 = 1 && \implies a_1 = 0\\
&f(0,1,0) = a_0 \oplus a_2 = 1 && \implies a_2 = 0\\
&f(0,0,1) = a_0 \oplus a_3 = 1 && \implies a_3 = 0\\
&f(1,1,0) = a_0 \oplus \cancel{a_1} \oplus \cancel{a_2} \oplus a_{12} = 0 && \implies a_{12} = 1\\
&f(1,0,1) = a_0 \oplus \cancel{a_1} \oplus \cancel{a_3} \oplus a_{13} = 1 && \implies a_{13} = 0\\
&f(0,1,1) = a_0 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_{23} = 0 && \implies a_{23} = 1\\
&f(1,1,1) = a_0 \oplus \cancel{a_1} \oplus \cancel{a_2} \oplus \cancel{a_3} \oplus a_{12} \oplus \cancel{a_{13}} \oplus a_{23} \oplus a_{123} = 0 && \implies a_{123} = 1
\end{aligned}
$$

Полином Жегалкина: $\boxed{x_1x_2 \oplus x_2x_3 \oplus x_1x_2x_3 \oplus 1}$

Полином Жегалкина функции w

$$
\begin{aligned}
&w(0,0,0) = a_0 = 1 && \implies a_0 = 1\\
&w(1,0,0) = a_0 \oplus a_1 = 0 && \implies a_1 = 1\\
&w(0,1,0) = a_0 \oplus a_2 = 0 && \implies a_2 = 1\\
&w(0,0,1) = a_0 \oplus a_3 = 1 && \implies a_3 = 0\\
&w(1,1,0) = a_0 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_{12} = 0 && \implies a_{12} = 1\\
&w(1,0,1) = a_0 \oplus a_1 \oplus \cancel{a_3} \oplus a_{13} = 1 && \implies a_{13} = 1\\
&w(0,1,1) = a_0 \oplus a_2 \oplus \cancel{a_3} \oplus a_{23} = 1 && \implies a_{23} = 1\\
&w(1,1,1) = a_0 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus \cancel{a_3} \oplus a_{12} \oplus a_{13} \oplus a_{23} \oplus a_{123} = 0 && \implies a_{123} = 0
\end{aligned}
$$

Полином Жегалкина: $\boxed{x_1 \oplus x_2 \oplus x_1x_2 \oplus x_1x_3 \oplus x_2x_3 \oplus 1}$

2.2.4 Построение функциональных элементов, образующих базовые функции

Конъюнкция

$f(x_1, x_2, 0) = x_1 x_2 \oplus 1$ - штрих Шеффера (отрицание конъюнкции)

Отсюда конъюнкция - это $x_1 x_2 = \overline{f(x_1, x_2, 0)}$

Дизъюнкция

$x_1 \vee x_2 = \overline{\overline{x_1 x_2}} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, 0)$

Константа 0 и 1. Отрицание

$1 = f(1, 0, x) \quad 0 = w(1, 1, x) \quad \overline{x} = w(x, x, x)$

Задача 3

3.1 Условие

Доказать в исчислении высказываний (буквы обозначают произвольные формулы):

$$\boxed{\neg((X \,\&\, Y) \,\&\, \neg Z) \vdash (\neg(\neg X \to \neg Y) \vee (Y \to Z))}$$

3.2 Решение

Нам известно, что

$$A \,\&\, B = \neg(A \to \neg B) \qquad A \vee B = \neg A \to B$$

Перепишем формулу:

$$\neg\neg(\neg(X \to \neg Y) \to \neg\neg Z) \vdash \neg\neg(\neg X \to \neg Y) \to (Y \to Z)$$

Доказательство:
1) $\neg\neg(\neg(X \to \neg Y) \to \neg\neg Z)$ - Гипотеза
2) $\neg\neg(\neg(X \to \neg Y) \to \neg\neg Z) \to (\neg(\neg X \to \neg Y) \to \neg\neg Z)$ - секвенция 3 при $A := \neg(X \to \neg Y) \to \neg\neg Z$
3) $\neg(\neg X \to \neg Y) \to \neg\neg Z$ - modus ponens, (1) и (2)
4) $\neg\neg(\neg X \to \neg Y)$ - Гипотеза
5) $\neg\neg(\neg X \to \neg Y) \to (\neg X \to \neg Y)$ - секвенция 3 при $A := (\neg X \to \neg Y)$
6) $\neg X \to \neg Y$ - modus ponens, (4) и (5)
7) Y - Гипотеза
8) $(\neg X \to \neg Y) \to (Y \to X)$ - секвенция 6 при $A := Y, B := X$
9) $Y \to X$ - modus pomems, (6) и (8)
10) X - modus ponens, (7) и (9)
11) $X \to (\neg\neg Y \to \neg(X \to \neg Y))$ - секвенция 9 при $A := X, B := \neg Y$
12) $\neg\neg Y \to \neg(X \to \neg Y)$ - modus ponens, (10) и (11)
13) $Y \to \neg\neg Y$ - секвенция 4 при $A := Y$
14) $Y \to \neg(X \to \neg Y)$ - секвенция 1, (12) и (13) при $A := Y, B := \neg\neg Y, C := \neg(X \to \neg Y)$
15) $\neg(X \to \neg Y)$ - modus ponens, (7) и (14)
16) $\neg\neg Z$ - modus ponens, (3) и (15)
17) $\neg\neg Z \to Z$ - секвенция 3 при $A := Z$
18) Z - modus ponens, (16) и (17)