Теорема 0.1. *Язык записей несамоприменимых НА неперечислим.*

Доказательство. Пусть указанный язык $L = \{\varepsilon\mathscr{A}3 : \neg!\mathscr{A}(\varepsilon\mathscr{A}3)\}$ перечислим. Тогда L есть область применимости относительно алфавита V_0 некоторого НА $\mathscr{B}$, то есть

$$!\mathscr{B}(\varepsilon\mathscr{A}3) \iff \neg!\mathscr{A}(\varepsilon\mathscr{A}3),$$

что невозможно! □

Один вспомогательный НА. Нам нужен такой НА:

$$Double^{\$}(x) = x\$x, \quad x \in V^*, \quad \$ \notin V$$

Его схема:

$$Double^{\$} : \begin{cases} \alpha\xi \to \xi\beta\xi\alpha \\ \beta\xi\eta \to \eta\beta\xi \\ \alpha \to \$ \\ \beta\xi\$ \to \$\xi \\ \$ \to \bullet\$ \\ \to \alpha \end{cases}$$

причем $\alpha, \beta, \# \notin V; \quad \xi, \eta \in V$

Пример его работы. Несколько примеров.

①$\lambda \vdash \alpha \vdash \$ \vdash \bullet\$$

②a $\vdash \alpha a \vdash a\beta a\alpha \vdash a\beta a\$ \vdash a\$a \vdash \bullet a\$a$

$$\begin{aligned} &abc \vdash \\ &\quad \vdash \alpha abc \vdash a\beta a\alpha bc \vdash a\beta ab\beta b\alpha c \vdash \\ &\quad \vdash \ldots \vdash abc\$abc \\ &\quad \vdash \bullet abc\$abc \end{aligned}$$

Теорема 0.2. *Может быть построен НА $\mathscr{A}$ в алфавите V_2 так, что невозможен НА $\mathscr{B}$ над алфавитом V_2, для которого выполнялось бы*

$$!\mathscr{B}(y) \iff \neg!\mathscr{A}(y), y \in V_2^*$$

Доказательство. По теореме об универсальном НА построим НА U над алфавитом V_2 так, что для любых НА D в алфавите V_2 и слово $y \in V_2^*$ выполняется

$$U(\varepsilon D3\$y) \simeq D(y).$$

Определим НА U_1 так, что

$$(\forall y \in V_2^*)(U_1(y) \simeq U(y\$y)),$$

то есть $U_1 = U \circ Double^{\$}$.

Тонкий момент здесь! Алгорифм U_1 будучи НА над алфавитом V_2 тем самым является и НА над алфавитом V_0 (V_2 - расширение V_0). По теореме о переводе он может быть заменен вполне эквивалентным ему относительно алфавита V_0 НА U_2 в алфавите V_2 (то есть в двухбуквенном расширении V_0).

$$U_2(x) \simeq U_1(x), \text{ где } x \in V_0^*, U_2 \text{ - НА в } V_2 = V_0 \cup \{\alpha, \beta\}$$

Предположим, что такой НА $\mathcal{B}$ нашелся.

$$!\mathcal{B}(\varepsilon D3) \iff \neg!U_2(\varepsilon D3) \iff \neg!U_1(\varepsilon D3) \iff \neg!U(\varepsilon D3\$\varepsilon D3) \iff \neg!D(\varepsilon D3)$$

Он будет полуразразрешающим НА для несамоприменимых НА в языке V_2, что невозможно. □

Следствие. Может быть построен НА с неразрешимой частной проблемой применимости, следовательно его область применимости будет перечислимая, но неразрешимая (множество?).

Примеры неразрешимых проблем. Проблема соответствия Поста.

$\rho = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)\} \subseteq V^{+^2}$
Существует ли

$$(x_{i1}, y_{i1}), (x_{i2}, y_{i2}), \ldots, (x_{im}, y_{im}) : x_{i1}x_{i2}\ldots x_{im} = y_{i1}y_{i2}\ldots y_{im}?$$

0.1 Порождающие грамматики

Определение 1. $\mathcal{J} = (V, N, S \in N, \Phi), V \cap N = \varnothing$

Правило вывода: $\alpha \to \beta, \quad \to \notin V \cup N$
Левая часть $\alpha \in (V \cup N)^* N (V \cup N)^*$, N - детерминал.

Пусть $\gamma, \delta \in (V \cup N)^*$. Тогда

$$\gamma \underset{\mathcal{J}}{\vdash} \delta \leftrightharpoons \text{сущ правило вывода } \alpha \to \beta \text{ в системе } \Phi \text{ и } \gamma = \gamma_1 \alpha \gamma_2, \delta = \gamma_1 \beta \gamma_2$$

Определение 2. Вывод в порождающей грамматике $\mathcal{J}$ - это последовательность $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots$, где $(\forall i \geq 0)(\alpha_i \in (V \cup N)^*)$ и $(\forall i \geq 0)(\alpha_i \underset{\mathcal{J}}{\vdash} \alpha_{i+1})$, если α_{i+1} определен в последовательности.

Определение 3. $\gamma \vdash^*_{\mathcal{J}} \delta \leftrightharpoons$ существует вывод
$\gamma = \alpha_0 \vdash \alpha_1 \vdash \ldots \vdash \alpha_n = \delta, n \geq 0$ - длина вывода (к-рая конечна).

Определение 4. $L(\mathcal{J}) \leftrightharpoons \{x : x \in V^*, S \vdash^*_{\mathcal{J}} x\}$

Примеры грамматик.

1) $S \to aSb \big| \lambda$

   $S \vdash aSb \vdash aaSbb \vdash \ldots \vdash a^n S b^n \vdash a^n b^n$

   $\mathcal{J}_1 = (\{a, b\}, \{S\}, S, \Phi_1)$

   Тогда язык, порожденный такой грамматикой
   $L(\mathcal{J}_1) = \{a^n b^n : n \geq 0\}$

2) $\Phi_2 : S \to aSa \big| bSb \big| aa \big| bb \big| a \big| b \big| \lambda$

   $S \vdash aSa \vdash aba$

   $S \vdash aSa \vdash abSba \vdash abbSbba \vdash abbbba$

   $L(\mathcal{J}_2) = \{x : x = x^R, x \in \{a, b\}^*\}$ - палиндром

3) $S \to () \big| (S) \big| SS$ - правильная скобочная структура

4) $\mathcal{J}_4 = (\{a,b\},\{S,A,B,C,D\},S,\Phi_4)$

$$\Phi_4 : \begin{cases} S \to CD \\ c \to aCA \big| bcD \big| \lambda \\ AD \to aD \\ BD \to bD \\ Aa \to aA \\ Ab \to bA \\ Ba \to aB \\ Bb \to bB \\ D \to \end{cases}$$

$S \vdash CD \vdash \lambda D \vdash \lambda\lambda = \lambda$

$S \vdash CD \vdash aCAD \vdash abcBAD \vdash abbCBBAD \vdash abbBBAD \vdash$
$\vdash abbBBaD \vdash abbBaBD \vdash abbaBBD \vdash abbaBbD \vdash abbabBD \vdash$
$\vdash abbabbD \vdash abbabb$

$L(\mathcal{J}_4) \supseteq \{\omega\omega : \omega \in \{a,b\}^*\}$. Можно доказать, что такой язык будет состоять только из двойных слов.

$L(\mathcal{J}_4) = \{\omega\omega : \omega \in \{a,b\}^*\}$