0.1 Дизъюнктивная и конъюнктивная нормальные формы (ДНФ и КНФ)

Определение 1. Литерал - это формула, в которой есть либо переменная, либо отрицание переменной.

$$x^{\sigma} \leftrightharpoons \begin{cases} x_i, \text{ если } \sigma = 1 \\ \overline{x_i}, \text{ если } \sigma = 0 \end{cases}$$

Обозначение $\widetilde{x_i}$ - это возможное отрицание.

Определение 2. Элементарная конъюнкция - это конъюнкция каких-то литералов.

$$\widetilde{x_{i_1}}\widetilde{x_{i_2}}\dots\widetilde{x_{ik}}$$

Определение 3. ДНФ - это $k_1 \vee k_2 \vee \ldots \vee k_m$ от $x_1, x_2, \ldots, x_3$, где k_i - элементарная конъюнкция.

Определение 4. В СДНФ в каждую элементарную конъюнкцию входит каждый из $x_1, x_2, \ldots, x_n$ либо сам, либо как отрицание.

ДНФ: $\{x_1, x_2, x_3\}: \quad \overline{x_1}x_2 \vee x_2 \vee x_1\overline{x_2x_3}$
СДНФ: $\{x_1, x_2, x_3\}: \quad x_1x_2x_3 \vee x_1\overline{x_2}x_3 \vee \overline{x_1}x_2x_3$

Определение 5. Элементарная дизъюнкция - это дизъюнкция каких-то литералов.

Определение 6. КНФ от $x_1, x_2, \ldots, x_n$: $D_1 * D_2 * \ldots * D_m, m \geq 1$

Определение 7. В СКНФ в каждую элементарную дизъюнкцию входит каждый из $x_1, x_2, \ldots, x_n$ либо сам, либо как отрицание.

Теорема 0.1. *Любая функция, отличная от константы 0, может быть представлена в виде ДНФ. Любая функция, отличная от константы 1, может быть представлена в виде КНФ.*

Доказательство. 1) Так как $f \not\equiv 0$, то $\exists \widetilde{\alpha} \in \{0,1\}^n : f(\widetilde{\alpha}) = 1$ - называется это конституента 1 функции f.

Тогда

$$C_f^1 \leftrightharpoons \{\widetilde{\alpha} : f(\widetilde{\alpha}) = 1\} \neq \varnothing, \widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n).$$

$K_{\widetilde{\alpha}} = x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n}$

Заметим, что

$$K_{\widetilde{\alpha}}(\widetilde{\beta}) = 1 \Longleftrightarrow \widetilde{\beta} = \widetilde{\alpha}$$

Отсюда получаем:

$$\boxed{f(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee_{\mathcal{Z} \in C_f^1} K_{\widetilde{\alpha}}}$$

Заметим, что если

$$f(x_1, \ldots, x_m) = 1 \implies (\exists \widetilde{\alpha} \in C_f^1)(f(\widetilde{\alpha}) = 1) \implies k_{\widetilde{\alpha}} = 1 \implies \underset{\mathcal{Z} \in C_f^1}{} k_{\widetilde{\alpha}} = 1,$$

то есть $f(\widetilde{\alpha}) = 1$. Аналогично для КНФ. □

Следствие. Любая булевая функция может быть представлена некоторой формулой над стандартным базисом. То есть стандартным базисом является полным множеством булевых функций.

0.2 Полином Жегалкина

$\mathcal{F}_1 = \{\oplus, *, 1\}$

Отсюда $\overline{x} = x \oplus 1$ и $x_1 \vee x_2 = x_1x_2 \oplus x_1 \oplus x_2$.

Определение 8. Полиномом Жегалкина является

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum (mod2) a_{i_1i_2\ldots i_k} x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{ik}, \quad \{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Здесь 2^n слагаемых. $a_{i_1i_2\ldots i_k} \in \{0,1\}$

Общий вид полинома Жегалкина от двух переменных:

$$P(x_1, x_2) = a_{12}x_1x_2 \oplus a_1x_1 \oplus a_2x_2 \oplus a_0$$

Общий вид от трех:

$$P(x_1, x_2, x_3) = a_{123}x_1x_2x_3 \oplus a_{12}x_1x_2 \oplus a_{13}x_1x_3 \oplus a_{23}x_2x_3 \oplus a_1x_1 \oplus x_2x_2 \oplus a_3x_3 \oplus a_0$$

Теорема 0.2. *Каждая булева функция однозначно представима в виде полинома Жегалкина.*

Метод неопределенных коэффициентов.

$f = (00010111)$
$f(0,0,0) = a_0 = 0$
$f(1,0,0) = a_1 \oplus a_0 = 0 \implies a_1 = 0$
$f(0,1,0) = a_2 \oplus a_0 = 0 \implies a_2 = 0$
$f(0,0,1) = a_3 \oplus a_0 = 0 \implies a_3 = 0$
$f(1,1,0) = a_{12} \oplus a_2 \oplus a_1 \oplus a_0 = 1 \implies a_{12} = 1$
$f(1,0,1) = a_{13} \oplus a_1 \oplus a_3 \oplus a_0 \implies a_{13} = 1$
$f(0,1,1) = a_{23} \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus 3 \implies a_{23} = 1$
$f(1,1,1) = a_{123} \oplus a_{12} \oplus a_{13} \oplus a_{23} \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_0 = 1 \implies a_{123} \oplus 1 = 1 \implies a_{123} = 0$

Определение 9. Булева функция называется линейной, если она может быть представлена полиномом Жегалкина первой степени.

$$f \in L \leftrightharpoons f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} (mod 2) a_i x_i \oplus a_0$$