БДЗ
вариант 10

Козырнов Никита Дмитриевич Б22-504

1 января 2024 г.

Оглавление

Задание 1

Условие

$$\iint\limits_{\mathbf{G}} f(x,y)dxdy \tag{1.1}$$

$$\mathbf{G} : x^2 + (y-1)^2 \le 1 \tag{1.2}$$

Решение

Уравнение задает окружность с радиусом 1, смещенную вверх на 1. Уравнение связывающее (x, y) и полярные координаты с полюсом в $(0, 0)$:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

Подставляя в 1.2 получаем:

$$r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi - 2r\sin\varphi + \cancel{1} \le \cancel{1},\ r\cos\varphi \ge 0$$

Отсюда получаем:

$$\begin{cases} r = 2\sin\varphi \\ r\cos\varphi = 0 \implies \varphi = -\frac{\pi}{2} \text{ или } \varphi = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Таким образом,

$$r \in [0; 2\sin\varphi]$$
$$\varphi \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$$

Якобиан выражения равен r
Подставляем в 1.1

$$I = \iint\limits_{\Omega} rf(r\cos\varphi, r\sin\varphi)drd\varphi =$$
$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\sin\varphi} rf(r\cos\varphi, r\sin\varphi)dr$$

Ответ

$$I = \iint\limits_{\Omega} rf(r\cos\varphi, r\sin\varphi)drd\varphi =$$
$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\sin\varphi} rf(r\cos\varphi, r\sin\varphi)dr$$

Задание 2

Условие

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1 \tag{2.1}$$

$$z = xy,\ z = 0,\ x > 0,\ y > 0 \tag{2.2}$$

Решение

Область ограничена цилиндрической поверхностью:

$$\begin{cases} x = 2r\cos\varphi \\ y = 3r\sin\varphi \\ z = h \end{cases}$$

Подставляя в 2.2 получаем следующие ограничения:

$$\begin{cases} 2r^2 = 1 \implies r = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ h = r^2\sin\varphi\cos\varphi \implies \sin\varphi\cos\varphi \geq 0 \text{ (при } x > 0, y > 0) \implies \varphi \in [0; \frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

Таким образом,

$$r \in \left[0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$
$$\varphi \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$$
$$h \in \left[0; r^2\sin\varphi\cos\varphi\right]$$

Якобиан выражения равен $6r$

Подставляем в 2.1

$$\iiint\limits_{\mathbf{V}} dxdydz = 6\iiint\limits_{\mathbf{\Omega}} drd\varphi dh =$$
$$= 6\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} rdr \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{r^2\sin\varphi\cos\varphi} dh$$
$$= 6\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} rdr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi d(\sin\varphi) =$$
$$= 6\frac{r^4}{4}\Bigg|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \cdot \frac{\sin^2\varphi}{2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$
$$= \frac{3}{8}$$

Ответ

$\frac{3}{8}$

Задание 3

Условие

$$\int\limits_C (x-y)ds \tag{3.1}$$

$$\mathbf{G} : x^2 + y^2 = 2y \tag{3.2}$$

Решение

Сначала преобразуем 3.2:

$$x^2 + y^2 = 2y \implies x^2 + y^2 - 2y = 0 \implies x^2 + (y-1)^2 = 1$$

Контур представляет собой окружность радиуса 1, смещенную по y на 1 вверх.

Окружность вида $x^2+y^2 = 2y$ параметризуется следующим образом:

$$\begin{cases} x = 2\cos t \sin t \\ y = 2\cos^2 t \end{cases}$$

Тогда $t \in [0; 2\pi]$.

Частные производные равны: $\begin{cases} \varphi'(t) = 2(cos^2 t - sin^2 t) \\ \psi'(t) = -4\sin t \cos t \end{cases}$

Отсюда считаем:

$$ds = \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} = 4$$

Подставляя в 3.1:

$$\int\limits_C (x-y)ds = \int_0^{2\pi} 2 \cdot 4(\cos t \sin t - \cos^2 t)dt =$$

$$= 8\left[\cancelto{0}{\int_0^{2\pi} \sin t d(\sin t)} + \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt\right] =$$

$$= 8\int_0^{2\pi} \frac{1 + 2\cos 2t}{2} dt = 4 \cdot \left(2\pi + \sin 2t\Big|_0^{2\pi}\right) = 8\pi$$

Ответ

8π

Задание 4

Условие

$$\iint\limits_{\mathbf{S}} |xy|z dS \tag{4.1}$$

$$\mathbf{S} : z = x^2 + y^2,\ z \le 1 \tag{4.2}$$

Решение

Из 4.2 вычисляем частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2y$$

Отсюда можем вычислить dS по формуле $dS = \sqrt{1 + (\frac{\partial z}{\partial x})^2 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2} dxdy$
Тогда:

$$dS = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dxdy$$

Параметризуем плоскость **S** следующим образом:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

Якобиан выражения будет r.
Причем

$$\Omega\colon \begin{cases} r \in [0; 1] \\ \varphi \in [0; 2\pi] \end{cases}$$

При подстановке в 4.1:

$$\iint\limits_{\mathbf{S}} |xy|z dS = \iint\limits_{\mathbf{\Omega}} r^5 |\sin\varphi \cdot \cos\varphi| \cdot \sqrt{1 + 4r^2} dr d\varphi =$$
$$= \int_0^{2\pi} |\sin\varphi \cdot \cos\varphi| d\varphi \int_0^1 r^5 \sqrt{1 + 4r^2} dr$$

Посчитаем эти итегралы по отдельности.

$$\int_0^{2\pi} |\sin\varphi \cdot \cos\varphi| d\varphi = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \cdot \cos\varphi d\varphi =$$
$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi d(\sin\varphi) = 4 \cdot \frac{\sin^2\varphi}{2}\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2$$

$$\int_0^1 r^5 \sqrt{1 + 4r^2} dr = \begin{bmatrix} r = \frac{1}{2}\tan\theta & \implies \theta = \arctan(2r) \\ dr = \frac{1}{2\cos\theta} d\theta & \end{bmatrix} =$$

$$= \int_0^{\arctan(2r)} \frac{\tan^5\theta}{64\cos^3\theta} d\theta = \int_0^{\arctan(2r)} \frac{\sin^4\theta \sin\theta}{64\cos^8} d\theta =$$

$$= -\frac{1}{64} \int_0^{\arctan(2r)} \frac{(1-\cos^2\theta)^2}{64\cos^8\theta} d(\cos\theta) =$$

$$= -\frac{1}{64}\left(-\frac{1}{3\cos^3\theta} + \frac{2}{5\cos^5\theta} - \frac{1}{7\cos^7\theta}\right)\Bigg|_0^{\arctan(2r)} = \frac{35\cos^4\theta - 42\cos^2\theta + 15}{6720\cos^7\theta}\Bigg|_0^{\arctan(2r)}$$

$$= \left(\frac{x^6\sqrt{4x^2+1}}{7} + \frac{x^4\sqrt{4x^2+1}}{140} - \frac{x^2\sqrt{4x^2+1}}{420} + \frac{\sqrt{4x^2+1}}{840}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{25\sqrt{2}}{168} - \frac{1}{840}$$

Тогда

$$2 \cdot \left(\frac{25\sqrt{2}}{168} - \frac{1}{840}\right) = \frac{25\sqrt{2}}{84} - \frac{1}{420}$$

Ответ

$\frac{25\sqrt{2}}{84} - \frac{1}{420}$

Задание 5

Условие

$$\vec{F} = \left\{y^4 - 6xz^3, 3y^2z^2 + 4xy^3, 2y^3z - 9x^2z^2\right\} \tag{5.1}$$

Решение

Сначала проверяем, что поле $\vec{F}$ потенциально:

$$\begin{aligned}&\operatorname{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix} =\\ &= \left\{6y^2z - 6y^2z, -18xz^2 - (-18xz^2), 4y^3 - 4y^3\right\} = \{0,0,0\}\end{aligned}$$

Поле потенциально.

Теперь найдем функцию $u(x,y,z)$. По определению:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = F_x = y^4 - 6xz^2$$

Значит

$$u(x,y,z) = \int\left(\frac{\partial u}{\partial x} + C_1(y,z)\right)dx = xy^4 - 3x^2z^3 + \varphi(y,z)$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial(xy^4 - 3x^2z^3 + \varphi(y,z))}{\partial y} = \cancel{4xy^3} + \frac{\partial\varphi(y,z)}{\partial y} = F_y = 3y^2z^2 + \cancel{4xy^3} \implies\\ &\implies \varphi(y,z) = \int\left(3y^2z^2 + C_2(z)\right)dy = y^3z^2 + \psi(z)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial(xy^4 - 3x^2z^3 + y^3z^2 + \psi(z))}{\partial z} =\\ &= \cancel{-9x^2z^2} + \cancel{2y^3}z + \frac{\partial\psi(z)}{\partial z} = F_z = \cancel{-9x^2z^2} + \cancel{2y^3}z \implies\\ &\implies \psi(z) = C \text{ - const}\end{aligned}$$

Тогда $u(x,y,z) = xy^4 - 3x^2z^3 + y^3z^2 + C$

Чтобы найти потенциал, необходимо посчитать $u(4,3,2) - u(1,2,1)$.

$$\begin{cases}u(4,3,2) = 4\cdot 3^4 - 3\cdot 4^2\cdot 2^3 + 3^2\cdot 2^2 + C = 48 + C\\ u(1,2,1) = 1\cdot 2 - 3\cdot 1\cdot 1 + 8\cdot 1 + C = 21 + C\end{cases}$$

Тогда $u(4,3,2) - u(1,2,1) = 48 + C - 21 - C = 27$

Ответ

27

Задание 6

Условие

$$\vec{F} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k} \tag{6.1}$$

$$\mathbf{S} : (x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = R^2 \tag{6.2}$$

Решение

Так как $\mathbf{S}$ это замкнутая поверхность (сфера), то 6.1 выражается таким образом

$$\iint\limits_{\mathbf{S}} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint\limits_{\mathbf{S}} x^2 dz \wedge dy + y^2 dz \wedge dx + z^2 dx \wedge dy =$$
$$= 2 \iiint\limits_{\mathbf{V}} (x+y+z) dxdydz$$

Поверхность можно параметризовать следующим образом:

$$\begin{cases} x - 1 = r\cos\varphi\cos\psi \\ y - 1 = r\sin\varphi\cos\psi \\ z = r\sin\psi \end{cases}$$

Отсюда при подстановке в 6.2 получаем следующее

$$\begin{cases} \varphi \in [0; 2\pi] \\ \psi \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \\ r \in [0; R] \end{cases}$$

Якобиан выражения $r^2\cos\psi$.
При подстановке в интеграл:

$$2 \iiint\limits_{\mathbf{V}} (x+y+z) dxdydz =$$
$$= 2 \iiint\limits_{\mathbf{V}'} r^2 \cos\psi \left(r\cos\varphi\cos\psi + r\sin\varphi\cos\psi + r\sin\psi + 2\right) d\varphi d\psi dr =$$
$$= 2 \left[\cancelto{0}{\iiint\limits_{\mathbf{V}'} r^3 \cos\varphi\cos^2\psi d\varphi d\psi dr} \right.$$
$$+ \cancelto{0}{\iiint\limits_{\mathbf{V}'} r^3 \sin\varphi\cos^2\psi d\varphi d\psi dr}$$
$$+ \cancelto{0}{\iiint\limits_{\mathbf{V}'} r^3 \cos\psi\cos\psi d\varphi d\psi dr}$$
$$\left. +2 \iiint\limits_{\mathbf{V}'} r^2 \cos\psi d\varphi d\psi dr \right] =$$
$$= 4 \cdot 2\pi \cdot \frac{R^3}{3} \cdot 2 = \frac{16\pi R^3}{3}$$

Ответ

$\frac{16\pi R^3}{3}$

Задание 7

Условие

$$\vec{F} = 4x\vec{i} - 2y\vec{j} - z\vec{k} \tag{7.1}$$

$$\mathbf{S} : 3x + 2y = 12,\ 3x + y = 6,\ y = 0,\ x + y + z = 6, \tag{7.2}$$

Решение

По формуле Остроградского-Гаусса, необходимо посчитать дивергенцию $\vec{F}$:

$$\operatorname{div} \vec{F} = 4 - 2 - 1 = 1$$

В таком случае

$$\oiint\limits_{\mathbf{S}} (\vec{F} \cdot \vec{n}) dS = \iiint\limits_{\mathbf{V}} 1 \cdot dxdydz \tag{7.3}$$

Из 7.2 получаем следующие ограничения:

$$\begin{cases} x \in \left[\frac{6-y}{3}; \frac{12-2y}{3}\right] \\ y \in [0; 6] \\ z \in [0; 6 - x - y] \end{cases}$$

Тогда разбиваем 7.3 на повторные интегралы:

$$\iiint\limits_{\mathbf{V}} dxdydz = \int_0^6 dy \int_{\frac{6-y}{3}}^{\frac{12-2y}{3}} dx \int_0^{6-x-y} dz =$$

$$= \int_0^6 dy \int_{\frac{6-y}{3}}^{\frac{12-2y}{3}} (6 - x - y) dz =$$

$$= \int_0^6 \left(6 - \frac{4y}{3}\right) dy = 6y\Big|_0^6 - \frac{2y^2}{3}\Big|_0^6 = 36 - 24 = 12$$

Ответ

12

Задание 8

Условие

$$\vec{F} = y\vec{i} - x\vec{j} - z^2\vec{k} \tag{8.1}$$

$$\gamma : x^2 + y^2 = 1,\; z = 4 \tag{8.2}$$

Решение

Для начала необходимо посчитать ротор $\vec{F}$:

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \{0, 0, -2\}$$

Возьмем нормальный вектор $\vec{n} = \{0, 0, 1\}$, тогда

$$\oint \vec{F} d\vec{r} = -2 \iint\limits_{\mathbf{S}} dS$$

Также $dS = \sqrt{1 + (\frac{\partial z}{\partial x})^2 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2} dxdy = \sqrt{1 + 0 + 0} dxdy = 1 \cdot dxdy$
S можно параметризовать следующим образом:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

Тогда из 8.2 получаем следующие ограничения:

$$\begin{cases} r \in [0; 1] \\ \varphi \in [0; 2\pi] \end{cases}$$

Якобиан выражения равен r.
Подставляя в полученный раньше интеграл получаем:

$$-2 \iint\limits_{\mathbf{S}} dS = -2 \iint\limits_{\mathbf{\Omega}} r dr d\varphi =$$
$$= -2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r dr = -2 \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{2} = -2\pi$$

Ответ

-2π