Задача 3

1.1 Условие

Доказать в исчислении высказываний (буквы обозначают произвольные формулы):

$$\boxed{\neg((X \,\&\, Y) \,\&\, \neg Z) \vdash (\neg(\neg X \to \neg Y) \vee (Y \to Z))}$$

1.2 Решение

Нам известно, что

$$A \,\&\, B = \neg(A \to \neg B) \qquad A \vee B = \neg A \to B$$

Перепишем формулу:

$$\neg\neg(\neg(X \to \neg Y) \to \neg\neg Z) \vdash \neg\neg(\neg X \to \neg Y) \to (Y \to Z)$$

Доказательство:
1) $\neg\neg(\neg(X \to \neg Y) \to \neg\neg Z)$ - Гипотеза
2) $\neg\neg(\neg(X \to \neg Y) \to \neg\neg Z) \to (\neg(\neg X \to \neg Y) \to \neg\neg Z)$ - секвенция 3 при $A := \neg(X \to \neg Y) \to \neg\neg Z$
3) $\neg(\neg X \to \neg Y) \to \neg\neg Z$ - modus ponens, (1) и (2)
4) $\neg\neg(\neg X \to \neg Y)$ - Гипотеза
5) $\neg\neg(\neg X \to \neg Y) \to (\neg X \to \neg Y)$ - секвенция 3 при $A := (\neg X \to \neg Y)$
6) $\neg X \to \neg Y$ - modus ponens, (4) и (5)
7) Y - Гипотеза
8) $(\neg X \to \neg Y) \to (Y \to X)$ - секвенция 6 при $A := Y, B := X$
9) $Y \to X$ - modus pomems, (6) и (8)
10) X - modus ponens, (7) и (9)
11) $X \to (\neg\neg Y \to \neg(X \to \neg Y))$ - секвенция 9 при $A := X, B := \neg Y$
12) $\neg\neg Y \to \neg(X \to \neg Y)$ - modus ponens, (10) и (11)
13) $Y \to \neg\neg Y$ - секвенция 4 при $A := Y$
14) $Y \to \neg(X \to \neg Y)$ - секвенция 1, (12) и (13) при $A := Y, B := \neg\neg Y, C := \neg(X \to \neg Y)$
15) $\neg(X \to \neg Y)$ - modus ponens, (7) и (14)
16) $\neg\neg Z$ - modus ponens, (3) и (15)
17) $\neg\neg Z \to Z$ - секвенция 3 при $A := Z$
18) Z - modus ponens, (16) и (17)