Определение 1. Терм t свободен для переменной X_i в формуле $\Phi(x_i)$, если никакое свободное вхождение переменной X_i в формулу $\Phi(x_i)$ не находится в области действия квантора по переменной, входящей в терм.

0.0.1 Понятие интерпретации. Выполнимость, истинность, логическая общезначность.

Определение 2. Интерпретация - это $\mathcal{J} = (\underbrace{\mathscr{A} = (A, \Omega, \prod)}_{\text{Область интерпретации}} , i_F, i_P)$

$$i_F : \mathcal{F} \to \Omega, \text{ причем } (\forall n \geq 0) i_F(f^{(n)}) \in \Omega^{(n)}$$

$$I_P : \mathscr{P} \to \prod, \text{ причем } (\forall n \geq 1) i_P(P^{(n)}) \in \Pi^{(n)}$$

Определение 3. Состояние - это $\sigma : X \to A$

Определение 4. $\sigma \underset{i}{=} \tau \leftrightharpoons$ для всех $i \neq j$ верно $\sigma(x_j) = \tau(x_j)$

Определение 5. Значение $t^\sigma_\mathcal{J}$ терма t в состоянии σ при интерпретации $\mathcal{J}$

1) Если $t = x_i \in X$, то $t^\sigma \leftrightharpoons \sigma(x_i)$
2) Если $t = c \in C = \mathcal{F}^{(0)}$, то $t^\sigma = i_F(c) \in A$
3) Если $t = f^{(n)}(s_1, \ldots, s_n)$, то $t^\sigma \leftrightharpoons i_F(f^{(n)})(s_1^\sigma, \ldots, s_n^\sigma)$
   Пусть $t = (x_1 + x_2)((-x_3) + x_1 x_2)$. Состояние $\sigma = \{1|x_1, 2|x_2, 3|x_3, \ldots\} = \{x_1 := 1, x_2 := 2, x_3 := 3, \ldots\}$
   То есть $t^\sigma = (3)(-1) = -3$ (просто подставили в формулу и посчитали)
4) (Истинностное) значение Φ^σ формулы Φ в состоянии σ (при заданной интерпретации)

Определение 6. Значение формулы с квантором

1) Если $\Phi = p^{(n)}(t_1, \ldots, t_n)$, то $\Phi^\sigma \leftrightharpoons i_P(p^{(n)})(t_1^\sigma, \ldots, t_n^\sigma)$
2) Если $\Phi = \neg\Psi$, то $\Phi^\sigma = \neg(\Psi^\sigma)$
3) Если $\Phi = \Theta \to \Psi$, то $\Phi^\sigma \leftrightharpoons \Theta^\sigma \to \Psi^\sigma$
4) Если $\Phi = (\forall x_i)\Psi$, то $\Phi^\sigma = T \leftrightharpoons$ Для любого состояния $\tau \underset{i}{=} \sigma :\ \Psi^\tau = T$

Определение 7.

$\underset{\mathcal{J}}{\models} \Phi \leftrightharpoons$ существует состояние σ, для которого $\Phi^\sigma = T$
$\underset{\mathcal{J}}{\vdash} \Phi \leftrightharpoons$ Для всех состояний σ $\Phi^\sigma = T$
Формула называется логически общезначной, если она истинна в любой интерпретации.

0.0.2 Аксиомы и правила вывода ИП1

$$\begin{array}{lc}
(1) & A \to (B \to A) \\
(2) & (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)) \\
(3) & (\neg B \to \neg A) \to ((\neg B \to A) \to B) \\
(4) & (\forall x_i) A(x_i) \to A(t|x_i) \text{ при } Free(t, x_i, A) \\
(5) & (\forall x_i)(A \to B) \to (A \to (\forall x_i) B) \text{ при } x_i \notin F \vee (A)
\end{array}$$

Правило A4: $\frac{(\forall x_i) A(x_i)}{A(t)}$, где $Free(t, x_i, A)$.

Теорема 0.1. *Всякая теорема исчисления предикатов первого порядка логически общезначима.*

По определению в исчислении предикатов первого порядка считается, что тавтологией считается любая формула, выводимая исключительно из первых трех схем с применением только правила *modus ponens*

Исчисление предикатов первого порядка не противоречиво.

Теорема 0.2. *Исчисление предикатов первого порядка полно, то есть любая логически общезначимая формула доказуема в этом исчислении.*

Следствие. Формула логически общезначимая тогда и только тогда, когда она доказуема в исчислении предикатов первого порядка. (Теорема Бёдаля о Полноте).