Теорема 0.1. *Язык является контекстно свободным тогда и только тогда, когда он допускается некоторым МП-автоматом.*

Дано: КС-грамматика $\mathcal{J} = (V, N, S, \mathscr{P})$
Строим: МП-автомат $\mathcal{M} = (Q, V, \Gamma, q_0, F, z_0, \delta)$
$\boxed{\text{L(M) = L(J)}}$

$\mathcal{M} = (\{q\}, V, V \cup N, q, \{q\}, S, \delta_{\mathscr{P}})$
Причем $q\lambda A \to q\alpha \in \delta_{\mathscr{P}} \leftrightharpoons A \to \alpha \in \mathscr{P}$

$(\forall a \in V)(qaa \to q\lambda \in \delta_{\mathscr{P}})$

Пример 1.

$\mathcal{J}: \quad S \to aSa \big| bSb \big| aa \big| bb \big| a \big| b \big|$
То есть $L(\mathcal{J}) = \{x : x = x^R, x \neq \lambda\}$
То есть система комманд такая:

$$\delta_{\mathscr{P}} : \begin{cases} q \to qaSa \big| qbSb \big| qaa \big| qbb \big| qa \big| qb \\ qaa \to q\lambda \\ qbb \to q\lambda \end{cases}$$

$\mathcal{J} : S \vdash aSa \vdash abSba \vdash ababa$
Для автомата:
$(q, ababa, S) \vdash (q, ababa, aSa) \vdash (q, baba, Sa) \vdash (q, baba, bSba) \vdash (q, aba, Sba) \vdash (q, aba, aba) \models^3 (q, \lambda, \lambda)$ - допуск

Пример 2.

$S \to ab \big| aSb \big| SS$

$$\delta : \begin{cases} qaS \to qb \big| qsb \\ q\lambda S \to qSS \\ qaa \to q\lambda \\ qbb \to q\lambda \end{cases}$$

$S \vdash SS \vdash aSbS \vdash aabbS \vdash aabbab$
Как автомат ее разберет:
$(q, aabbab, S) \vdash (q, aabbab, SS) \vdash (q, abbab, SbS) \vdash (q, bbab, bbS) \models^2 (q, ab, S) \vdash (q, b, b) \vdash (q, \lambda, \lambda)$ - допуск

Булевы функции

1.1 Булева алгебра

Свойства симметричного полукольца:

- a + (b + c) = (a + b) + c
- a + b = b + a
- a + a = a
- a + 0 = a
- a * (b * c) = (a * b) * c
- a * 1 = 1 * a =a
- a*(b+c) = ab + ac
- a*0=0*b=0
- ab = ba
- aa = a
- a + 1 = 1
- a + bc = (a + b)(a + c)

Симметричное полукольцо: $\mathscr{S} = (S, +, \cdot, 0, 1)$
Симметричное ему полукольцо: $\mathscr{S}^* = (S, \cdot, +, 1, 0)$
$(\forall a)(a^* = 1)$

Принцип двойственности симметрического полукольца. Любое тождество, доказанное для симметрического полукольца, останется справедливым, если в нем произвести взаимные замены операции сложения и умножения, а также взаимные замены нуля и единицы.

Пример.

$$(a+b)(a+c) = a^2 + ac + ab + bc = a + ac + ab + bc = a\underbrace{(1+c+b)}_{1} + bc = a + bc$$

Свойство 1. $a + ab = a(a+b) = a$

Доказательство. $a(a+b) = a^2 + ab = a + ab = a(1+b) = a * 1 = a$ □

Свойство 2. $a \leq b \Longleftrightarrow ab = a$

Доказательство.
$a \leq b \implies a + b = b \implies ab = a(a+b) = a$
$ab = a \implies a + b = ab + b = ab + 1 * b = (a+1)b = 1 * b = b$ □

Свойство 3. $(\forall a)(a \le 1)$, то есть $(\forall a)(0 \le a \le 1)$

Определение 1. Дополнение элемента a: $\overline{a} * a = 0$ и $\overline{a} + a = 1$

Теорема 1.1. *Если дополнение элемента симметрического полукольца определено, то оно определено однозначно.*

Доказательство. Пусть $(\exists x)(a + x = 1, ax = 0)$

Тогда

$$x = x + a * \overline{a} = (x + a)(x + \overline{a}) = 1(x + \overline{a}) = (a + \overline{a})(x + \overline{a}) = ax + \overline{a} = 0 + \overline{a} = \overline{a}$$

□

Следствие. $\overline{\overline{a}} = a$

Определение 2. Булева алгебра - это симметричное полукольцо, в котором каждый элемент имеет дополнение.

Примеры.

$\mathcal{B} = (\{0, 1\}, +, *, 0, 1)$
$\mathcal{S}_M = (2^M, \cup, \cap, \varnothing, M)$

Булева алгебра обозначается так:

$$\mathscr{D} = (B, \vee, \wedge, \Theta, I, \overline{})$$

Теорема 1.2. *В любой булевой алгебре имеет место:*

$$\overline{a \vee b} = \overline{a} \wedge \overline{b}; \quad \overline{a \wedge b} = \overline{a} \vee \overline{b}$$

Доказательство.

$$(a \vee b) \vee (\overline{a} \wedge \overline{b}) = (a \vee b \vee \overline{a}) \wedge (a \vee b \vee \overline{b}) = I$$

$$(a \vee b) \wedge (\overline{a} \wedge \overline{b}) = (\overline{a} \wedge \overline{b} \wedge a) \vee (\overline{a} \wedge \overline{b} \wedge b) = \Theta \vee \Theta = \Theta$$

Отсюда $\overline{a \vee b} = \overline{a} \vee \overline{b}$ □