Дискретная математика

Козырнов Александр Дмитриевич, ИУ7-32Б

2 января 2024 г.

Оглавление

Множества, отношения, алгебры

1.1 Опр. множества и операций над ним

1.1.1 Условие

Множества, подмножества. Способы определения множеств. Равенство множеств. Операции над множествами (объединение, пересечение, разность, симметрическая разность, дополнение). Методы доказательства теоретико-множественных тождеств.

1.1.2 Определение множества

Множества мы будем обозначать большими буквами латинского алфавита $(X, Y, Z, ...)$, элементы множества малыми буквами $(x, y, z, ...)$. Принадлежность элемента x множеству X (неопределяемое понятие) будем обозначать $x \in X$. Аналогично $x \notin X$ обозначает, что элемент x не принадлежит множеству X.

По определению считается $\varnothing \subseteq A$ и $A \subseteq U$

1.1.3 Равенство множеств

$A = B \risingdotseq (\forall x)(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$
Пример:
$\{1, 3, 5\} = \{5, 1, 3\} = \{1, 1, 3, 3, 5, 5\}$
Также возможно определить равенство через подмножество.
$A \subseteq B \risingdotseq (\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B)$ - опр. нестрогого включения A в B.
Тогда
$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B)(B \subseteq A)$

1.1.4 Операции над множествами

- объединение $A \cup B \risingdotseq \{x : x \in A \vee x \in B\}$
- пересечение $A \cap B \risingdotseq \{x : x \in A \& x \in B\}$
- разность $A \backslash B \risingdotseq \{x : x \in A \ \& \ x \notin B\}$
- симметрическая разность $A \triangle B \risingdotseq (A \backslash B) \cup (B \backslash A) = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$
- дополнение $\overline{A} \risingdotseq \{x : x \notin A\} = U \backslash A$

1.1.5 Методы доказательства теоретико-множественных тождеств

- Метод двух включений (На примере декартового умножения)
  $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
  Доказательство
  $(x, y) \in A \times (B \cap C) \Leftrightarrow (x \in A) \ \& \ (y \in (B \cap C)) \Leftrightarrow (x \in A) \ \& \ (y \in$

$B) \ \& \ (y \in C) \Leftrightarrow ((x,y) \in A \times B) \ \& \ ((x,y) \in A \times C) \Leftrightarrow (x,y) \in (A \times B) \cap (A \times C)$

- Методом Характеристических функций ($\chi_{A \times B \cap C}$)
- Методом эквивалетных преобазований ($\cap, \cup, \ \& \ , \setminus, ...$)

1.2 Неупорядоченная и упорядоченная пары, кортеж, Декартово произведение.

1.2.1 Условие

Неупорядоченная пара, упорядоченная пара, кортеж. Декартово произведение множеств

1.2.2 Виды вар

Неупорядоченная пара

$A, B \neq 0, a \in A, b \in B$
Тогда $\{a, b\}$ - неупорядоченная пара на множествах A и B

$$\begin{cases} \{a,b\} = \{a\}, |\{a\}| = 1, \text{ если } a = b \\ |\,\{a,b\}\,| = 2, \text{ если } a \neq b \end{cases}$$

$\{a, b\} = \{c, d\} \leftrightharpoons ((a = c)\ \&\ (b = d)) \vee ((a = d)\ \&\ (b = c))$
То есть $\{1, 2\} = \{2, 1\}$

Упорядоченная пара

$A, B \neq 0, a \in A, b \in B$
Тогда (a, b) - упорядоченная пара на множествах A и B
$(a, b) = (c, d) \leftrightharpoons (a = c)\ \&\ (b = d)$
То есть $(a, b) \neq (b, a)$
Ее можно свести к множеству: $(a, b) \leftrightharpoons \{\{a\}, \{a, b\}\}$

1.2.3 Кортеж

$A_1, A_2, \ldots, A_n, n \geq 1$
Тогда $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, где $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n$ - кортеж

- Равенство кортежей:
  $(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \leftrightharpoons (\forall i = \overline{1, n})(a_i = b_i)$
- Определение:
  $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \leftrightharpoons \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : (\forall i = \overline{1, n})(x_i \in A_i)\}$
  По определению если $(\exists i = \overline{1, n})(A_i = \varnothing)$, то $A_1 \times A_1 \times \ldots \times A_n = \varnothing$
- Степень кортежа:
  Если $A_1 = A_2 = \ldots = A_n, n \geq 1$, то $A_1 \times A_2 \ldots \times A_n = A^n$
  $A^0 \leftrightharpoons \{\lambda\}$, где λ - пустой кортеж, $A \neq \varnothing$

Некоторые свойства декартового умножения:

- $\overline{A \times B} = (\overline{A} \times \overline{B}) \cup (\overline{A} \times B) \cup (A \times \overline{B})$
- $A \times (B \backslash C) = (A \times B) \backslash (A \times C)$
- $A \times B \neq B \times A$

1.3 Отображение, частичное отображение

1.3.1 Условие

Отображения: область определения, область значений. Инъективное, сюръективное и биективное отображения. Частичное отображение

1.3.2 Отображение

Отображение - это соответствие, которое всюду определено и функционально по второй компоненте

Пусть $\rho \subseteq A \times B$, тогда

- Область определения: $D(\rho) \leftrightharpoons \{x : x \in A, (x, y) \in \rho\}$
- Область значений: $R(\rho) \leftrightharpoons \{y : y \in B, (x, y) \in \rho\}$

$f : A \underset{\bullet}{\to} B$ - частичное отображение, или отображение, где $D(\rho) \neq A$
Виды отобажений:

- Инъективное отображение:
  Если отображение функционально и по первой компоненте, то она называется инъекцией
  $f : A \to B, (\forall x \in A)(\exists! y = f(x))\ \&\ (\forall y \in R(f))(\exists! x \in A)(y = f(x))$
- Сюръективное отображение:
  Это такое отображение, где $R(f) = B$, то есть
  $(\forall y \in B)(\exists x \in A)(y = f(x))$
- Биективное отображение:
  Это такое отображение, которое инъективно и сюръективно.
  $(\forall x \in A)(\exists! y = f(x))\ \&\ (\forall y \in B)(\exists! y = f(x))$

1.4 Соответствие

Условие

Соответствия. График и граф соответствия, область определения, область значения. Сечение соответствия. Сечение соответствия по множеству. Функциональность соответствия по компоненте. Бинарные и n-арные отношения. Связь между отношениями, соответствиями и отображениями.

1.4.1 Соответствие

$\rho \subseteq A \times B$ - соответствие из A в множество B, причем $A, B \neq \varnothing$

- Область определения: $D(\rho) \leftrightharpoons \{x : x \in A, (x, y) \in \rho\}$
- Область значений: $R(\rho) \leftrightharpoons \{y : y \in B, (x, y) \in \rho\}$
- Сечение по $a \in A : \rho(a) \leftrightharpoons \{y : (a, y) \in \rho\}$
- Сечение по множеству $C \subseteq D(\rho) : \rho(C) \leftrightharpoons \{(x, y) : x \in C, (x, y) \in \rho\}$

Соответствие $\rho = A \times B$ называют функциональным по второй компоненте, если $\forall (x, y)$ и $(x', y') : x = x' \Rightarrow y = y'$

Соответствие $\rho = A \times B$ называют функциональным по первой компоненте, если $\forall (x, y)$ и $(x', y') : y = y' \Rightarrow x = x'$

1.4.2 График и граф соответствия

СДЕЛАТЬ

1.4.3 Бинарные и н-арные (н-местные) отношения

Н-местное (н-арное) отношение на множествах $A_1, A_2, \ldots, A_n, n \geq 1$: $\rho \subseteq A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$

Бинарное отношение: $\rho = A^2, A \neq \varnothing$, иногда записывается как $x \rho y$

Свойства

- Рефлексивность
  $(\forall x \in A)(x \rho x)$, то есть диагональ $id_A \subseteq \rho$
- Иррефлексивность
  $id_A \cap \rho = \varnothing$
- Симметричность
  $\forall (x, y) \in A, x \rho y \Rightarrow y \rho x$, то есть $\rho = \rho^{-1}$
- Антисимметричность
  $\forall (x, y) \in A, x \rho y$ & $y \rho x \Rightarrow x = y$, например $x \leq y$ & $y \leq x \Rightarrow x = y$
- Транзитивность
  $(\forall x, y, z \in A)(x \rho z$ & $z \rho y \Rightarrow x \rho y)$, например $x = z, z = y \Rightarrow x = y$

1.4.4 Связь отношения, соответствия, отображения

Соответствие - это бинарное отношения вида $\rho = A \times B$ или $\rho = A \times A$. Отображение - это соответствие, которое всюду определено и функционально по второй компоненте.

1.5 Композиция соответсвий, их свойства

1.5.1 Условие

Композиция соответствий, обратное соответствие и их свойства (с доказательством)

1.5.2 Композиция соответсвий

$\rho \subseteq A \times B, \sigma \subseteq C \times D$

Тогда композиция:

- $\rho \circ \sigma \rightleftharpoons \{(x, y) : (x, z) \in \rho \;\&\; (z, y) \in \sigma\}$
- $\rho = A \times B, \sigma = B \times C, \rho \circ \sigma = A \times C$
- $f : A \to B, g : B \to C, f \circ g : A \to C$

причем $R(\rho) \cap D(\sigma) \neq \varnothing$

Покажем, что $f \circ g(x) = g(f(x))$

$f \circ g = \{(x, y) : (\exists z)((x, z) \in f) \;\&\; ((z, y) \in g)\} = \{(x, y) : (\exists z)(z = f(x), y = g(z))\} = \{(x, y) : y = g(f(x))\}$

1.5.3 Обратное соответствие

$\rho^{-1} \rightleftharpoons \{(x, y) : (y, x) \in \rho\}$ - обратное соответствие

Если $\rho = A \times B$, то $\rho^{-1} = B \times A$

1.5.4 Свойства и их доказательства

- $\rho \circ (\sigma \circ \tau) = (\rho \circ \sigma) \circ \tau$
  Рассмотрим $(\rho \circ (\sigma \circ \tau))(x)$: $(\rho \circ (\sigma \circ \tau))(x) = \rho((\sigma \circ \tau)(x)) = \rho(\sigma(\tau(x)))$
  Рассмотрим $((\rho \circ \sigma) \circ \tau)(x)$: $((\rho \circ \sigma) \circ \tau)(x) = ((\rho \circ \sigma)(f(x)) = \rho(\sigma(\tau(x)))$
  Как можем заметить, результат получен одинаковый

- $\rho \circ \sigma \neq \sigma \circ \rho$
  Пусть $\rho = A \times B, f : A \to B$ и $\sigma = B \times C, g : B \to C$
  Тогда $\rho \circ \sigma : A \to C$
  Получаем $\sigma \circ \rho : B \to B$ при условии, что $B \cap A \neq \varnothing$, иначе $\sigma \circ \rho = \varnothing$
  В обоих случаях $R(\rho \circ \sigma) \neq R(\sigma \circ \rho), D(\rho \circ \sigma) \neq D(\sigma \circ \rho) \Rightarrow \rho \circ \sigma \neq \sigma \circ \rho$ в общем случае

- $\rho \circ (\sigma \cup \tau) = (\rho \circ \sigma) \cup (\rho \circ \tau)$
  $(x, y) \in \rho \circ (\sigma \circ \tau) \Rightarrow (\exists z)(((x, z) \in \rho) \wedge ((z, y) \in \sigma \cup \tau)) \Rightarrow (\exists z)((((x, z) \in \rho) \wedge ((z, y) \in \sigma) \vee ((z, y) \in \tau))) \Rightarrow (\exists u)(((x, u) \in \rho) \wedge ((u, y) \in \sigma) \vee (\exists v)((x, v) \in \rho \wedge (v, y) \in \tau))$

- $\rho \circ (\sigma \cap \tau) \subseteq (\rho \circ \sigma) \cap (\rho \circ \tau)$
  Доказательство Аналогично прошлому доказательству

- $(\rho^{-1})^{-1} = \rho$
  $\rho^{-1} \rightleftharpoons \{(y, x) : (x, y) \in \rho\}$
  Тогда $(\rho^{-1})^{-1} \rightleftharpoons \{(x, y) : (y, x) \in \rho^{-1}\} \rightleftharpoons \{(x, y) : (x, y) \in \rho\} \rightleftharpoons \rho$

- $(\rho \circ \sigma)^{-1} = \sigma^{-1} \circ \rho^{-1}$
  Пусть $\rho : A \to B, \sigma : B \to C$, тогда $\rho \circ \sigma : A \to C$
  Тогда $(\rho \circ \sigma)^{-1} : C \to A$
  $\rho^{-1} : B \to A,\ \sigma^{-1} : C \to B$
  Из этого следует $\sigma^{-1} \circ \rho^{-1} : C \to A$, что равно $(\rho \circ \sigma)^{-1} : C \to A$

- $\rho \subseteq A^2$