Del

1.1 Многомерная интерполяция

Пусть $z = f(x, y)$. Работаем в трехмерном пространстве.

Обычно представляют это в виде таблицы x,y. На регулярной сетке многомерная интерполяция выполняется последовательно (по строкам и по столбцам). Задаются отдельно степени полиномов n_x и n_y. Относительно x берем $n_x + 1$ строк, а относительно y берем $n_y + 1$ столбцов.

$$\left.\begin{aligned} z &= f(x, y) \\ z_0 &= f(x_1, y) \\ z_1 &= f(x_1, y) \\ z_2 &= f(x_2, y) \end{aligned}\right\} \to z = f(x, y)$$

Если $u = f(x, y, z)$, то при каждой новой переменной алгоритм сводится к интерполяции функции на одну переменную меньше. То есть

$$u = f(x, y, z_i)$$

$$\begin{matrix} z & u \\ z_0 & u_0 \\ \vdots & \vdots \\ z_n & u_n \end{matrix}$$

1.1.1 Двумерный полином Ньютона

Это когда матрица (таблица) треугольного вида.

$$\mathscr{P}_n(x, y) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} z(x_0, x_1, \ldots, x_i; y_0, y_1, \ldots, y_j) \prod_{p=0}^{i-1} (x - x_p) \prod_{q=0}^{j-1} (y - y_q)$$

z - разделенная разность.

$$z(x_0, x_1, y_0) = \frac{z(x_0, y_0) - z(x_1, y_0)}{x_0 - x_1}$$

$$z(x_0, x_1; y_0, y_1) = \frac{z(x_0, x_1, y_0) - z(x_0, x_1, y_1)}{y_0 - y_1}$$

Замечание.

При вычислении полинома Ньютона погрешность вычисляется такой формулой:

$$|y - \mathscr{P}_n(x)| \leq \frac{M_n + 1}{(n+1)!} |\omega_{n+1}(x)|$$

где $M_{n+1} = max(y^{(n+1)})$, $\omega_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{x_0 \leq x \leq xn} (x - x_i)$

Наилучшее среднее квадратичное приближение

Чем меньше ошибка, тем важнее точка. Отчего мы присваиваем вес каждой точке. Вес - ρ

$$\begin{matrix} x_i & y_i & \rho_i \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & y_n & \rho_n \end{matrix}$$

ρ может быть задан пользователем. Иначе считаем сами как обратная от ошибки:

$$\rho_i \sim \frac{1}{\varepsilon_i^2}$$

Задача искания аппроксимирующей функции способом усреднения набором данных формулируется следующим образом. Вводится такая величина $I = \sum \rho_i [y_i - \varphi(x_i)]^2$ - сумма квадратов отклонения.

Тогда задачи. Подобрать $\varphi(x)$ так, чтобы

1) $I < \varepsilon$, то есть сумма меньше погрешности

2) $I \to I_{min}$

Можно записать так (общий вариант, но пользоваться не будем, тк у нас дискретный вариант):

$$I = \int\limits_a^b \rho(x)(y(x) - \varphi(x))^2 dx$$

Пользоваться мы будем методом наименьших квадратов.

Рассмотрим задачу построение наилучшего квадратичного приближения (метод наименьших квадратов). Выберем $\varphi(x)$ так, чтобы она была линейной.

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi_k(x) \qquad \varphi_k(x) \text{ - известные линейно независимые функции}$$

Чаще всего $\varphi_k(x) = x^k$. Они называются базисными функциями. Отсюда

$$I = \sum_i \rho_i \left[y_i - \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi_k(x) \right]^2$$

Предварительно рассмотрим скалярное произведение двух функций:

$$(f, \varphi) = \sum_{i=1}^{N} \rho_i f(x_i) \cdot \varphi(x_i)$$

Свойства скалярного произведения:

1) $(f, \varphi) = (\varphi, f)$

2) $(\alpha f, \varphi) = \alpha(f, \varphi)$ (следствие $(f, \alpha\varphi) = \alpha(f, \varphi)$)

3) $(f + \varphi, \psi) = (f, \psi) + (\varphi, \psi)$

Тогда

$$I=(y-\varphi,y-\varphi)=(y,y)-2(y,\varphi)+(\varphi,\varphi)=(y,y)-2\left(y,\sum_{k=0}^{n}a_k\varphi_k(x)\right)+\left(\sum_{k=0}^{n}a_k\varphi_k(x),\sum_{m=0}^{n}a_m\varphi_m(x)\right)$$

В итоге получим

$$I=(y,y)-2\sum_{k=0}^{n}a_k\left(y,\varphi_k(x)\right)+\sum_{k=0}^{n}\sum_{m=0}^{n}a_ka_m(\varphi_k,\varphi_m)$$

Осталось минимизировать I. Значит, ищем неизвестные параметры.

$$\frac{\partial I}{\partial a_k}=0,\quad k=\overline{0,n}$$

Получим

$$\frac{\partial I}{\partial a_k}=-2(y,\varphi_k)+2\sum_{m=0}^{n}a_m(\varphi_k,\varphi_m)=0$$

Итого система состоит из

$$\sum_{m=0}^{n}a_m(\varphi_k,\varphi_m)=(y,\varphi_k),\quad k=\overline{0,n}$$

что мы и искали. Определитель тут Грамма, и он не равен нулю. Наилучшее среднее приближение существует и оно единственно по этой причине.

Если φ_k и φ_m ортогональны, то получаем

$$a_k=(y,\varphi_k)=\sum_{i=1}^{N}\rho y_i\varphi_k(x_i),\quad k=\overline{0,n} \tag{2.1}$$

В таком случае (если базис ортогонален), то это ряд Фурье.

Заметка. Нам всегда известны y_i,φ_k,ρ_i.

Часто во многих задачах используется $\varphi_k(x)=x^k$. Тогда

$$(\varphi_k,\varphi_m)=\sum_{i=0}^{N}\rho_ix_i^kx_i^m=\sum_{i=1}^{N}\rho_ix_i^{k+m}$$

$$(y,\varphi_k)=\sum_{i=0}^{N}\rho_iy_ix_i^k$$

Пример.

$\varphi_k(x)=x^k$
$n=1$
Аппроксимирующая функция: $\varphi(x)=a_0+a_1x$
Тогда для формулы (1):

$$\begin{cases}a_0(\varphi_0,\varphi_0)+a_1(\varphi_0,\varphi_1)=(y,\varphi_0)-k=0\\a_0(\varphi_1,\varphi_0)+a_1(\varphi_1,\varphi_1)=(y,\varphi_1)-k=1\end{cases}$$

$$\begin{cases}a_0\sum\limits_{i=0}^{N}\rho_i+a_1\sum\limits_{i=1}^{N}\rho_ix_i=\sum\limits_{i=0}^{N}\rho_iy_i\\a_0\sum\limits_{i=0}^{N}\rho_ix_i+a_1\sum\limits_{i=1}^{N}\rho_ix_i^2=\sum\limits_{i=0}^{N}\rho_iy_ix_i\end{cases}$$

Отсюда найдем a_0,a_1.