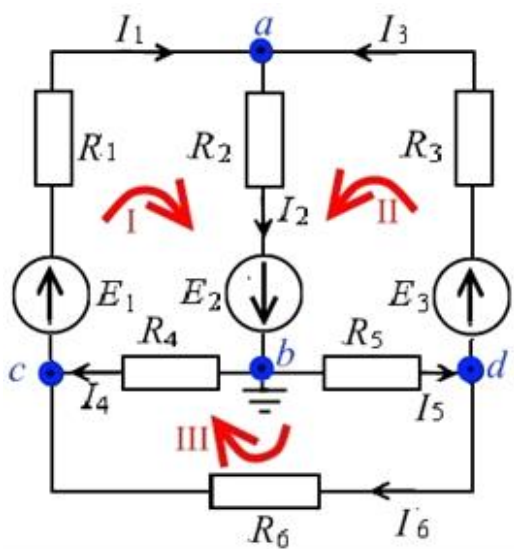


# 1. Пример математического моделирования электрической цепи постоянного тока с использованием правил Кирхгофа



Направления токов в ветвях и «направления обхода контуров» (НОК) на схеме (рис.1.1) условно выбираются любыми. Отрицательное значение тока в расчете означает, что действительное его направление на схеме противоположно выбранному. Для уменьшения количества указанных расхождений предпочтительно выбирать направления токов и НОК, включающих ЭДС, совпадающими с направлением ЭДС.

На схеме (рис. 1.1) внутренние сопротивления источников ЭДС условно включены в соответствующие сопротивления ветвей.

Рис. 1.1. Схема электрической цепи.

## Обозначения и единицы измерения исходных данных и переменных

Наименование	Обозначение	Единица измерения	Примечание
ЭДС	E	Вольт, В, V	Дано
Сопротивление	R	Ом, Ohm	Дано
Эл. Ток	I	Ампер, А	Найти
Мощность	P	Ватт, Вт, Watt, W	Найти
Напряжение	U	Вольт, В, V	Найти

## Исходные данные электрической цепи:

Источники ЭДС

$$E := \begin{pmatrix} 200 \\ 120 \\ 100 \end{pmatrix}$$

Сопротивления ветвей ЭЦ

$$R := \begin{pmatrix} 10 \\ 12 \\ 20 \\ 8 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

## Решение:

Определяем число уравнений для нахождения токов в ветвях ЭЦ:

- 1-е правило Кирхгофа:  $n1 = k - 1 = 4 - 1 = 3$
- 2-е правило Кирхгофа:  $n2 = p - n1 = 6 - 3 = 3$ ,

где:  $k$  - количество узлов цепи,  $p$  - количество ветвей ЭЦ (токов).

## Система уравнений в нормализованной форме

(все неизвестные строго на своем месте в каждом уравнении, свободные члены в правой части):

1-е правило Кирхгофа

$$n1 = k - 1 = 4 - 1 = 3$$

(узлы)

$$a) \quad I_1 - I_2 + I_3 + 0 \cdot I_4 + 0 \cdot I_5 + 0 \cdot I_6 = 0$$

$$b) \quad 0 + I_2 + 0 - I_4 - I_5 + 0 = 0 \quad ! \text{ далее упрощаем запись !}$$

$$c) \quad -I_1 + 0 + 0 + I_4 + 0 + I_6 = 0$$

2-е правило Кирхгофа

$$n2 = p - n1 = 6 - 3 = 3$$

(контур)

$$I) \quad R_1 \cdot I_1 + R_2 \cdot I_2 + 0 + R_4 \cdot I_4 + 0 + 0 = E_1 + E_2$$

$$II) \quad 0 + R_2 \cdot I_2 + R_3 \cdot I_3 + 0 + R_5 \cdot I_5 + 0 = E_2 + E_3$$

$$III) \quad 0 + 0 + 0 - R_4 \cdot I_4 + R_5 \cdot I_5 + R_6 \cdot I_6 = 0$$

Для решение системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) можно выбрать любой метод, например метод обратной матрицы.

## Решение СЛАУ методом обратной матрицы

ORIGIN := 1

(вектор неизвестных определяется умножением обратной матрицы коэффициентов на вектор правых частей уравнений).

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ R_1 & R_2 & 0 & R_4 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & R_3 & 0 & R_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -R_4 & R_5 & R_6 \end{pmatrix}$$

$$B := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ E_1 + E_2 \\ E_2 + E_3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Токи в ветвях (A)

$$I := A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 11.068 \\ 12.858 \\ 1.79 \\ 6.879 \\ 5.979 \\ 4.189 \end{pmatrix}$$

Падения напряжений в ветвях (V)

$$U := (I \cdot R) = \begin{pmatrix} 110.675 \\ 154.295 \\ 35.808 \\ 55.029 \\ 29.896 \\ 25.133 \end{pmatrix}$$

Мощности, потребляемые в ветвях (W)

$$P := (I \cdot U) = \begin{pmatrix} 1.225 \times 10^3 \\ 1.984 \times 10^3 \\ 64.112 \\ 378.53 \\ 178.758 \\ 105.279 \end{pmatrix}$$

## Баланс (равенство) мощностей источников и потребителей

(может служить проверкой расчета):

$$\sum (E \cdot I) = \sum (U \cdot I) = \sum (I \cdot R \cdot I) = \sum (I^2 \cdot R)$$

!!! Мощность источника ЭДС ( $E \cdot I$ ) положительна при совпадении направлений ЭДС ( $E$ ) и тока ( $I$ ), проходящего через источник, и отрицательна при встречных направлениях ЭДС и тока. В первом случае источник ЭДС ( $E$ ) является генератором энергии, а во втором случае потребителем энергии !!!

Расчет левой части уравнения (алгебраическая сумма мощностей источников):

$$P_i := E_1 \cdot I_1 + E_2 \cdot I_2 + E_3 \cdot I_3$$

$$P_i = 3.936 \times 10^3$$

Расчет правой части уравнения (арифметическая сумма мощностей потребителей):

$$P_p := R_1 \cdot (I_1)^2 + R_2 \cdot (I_2)^2 + R_3 \cdot (I_3)^2 + R_4 \cdot (I_4)^2 + R_5 \cdot (I_5)^2 + R_6 \cdot (I_6)^2$$

$$P_p = 3.936 \times 10^3$$

Разбаланс (Вт):

$$|P_i| - |P_p| = -4.547 \times 10^{-13}$$

Разбаланс (%):

$$\frac{(|P_i| - |P_p|) \cdot 100}{|P_i|} = -1.156 \times 10^{-14}$$

## Исследование электрической цепи :

Для выполнения исследования ЭЦ следует поочередно изменять выбранные параметры в заданном интервале, построить таблицу и диаграмму по результатам исследования.

**Исследование 1:** Расчет параметров потребителя ( $I_p=I_6$ ,  $U_p=U_6$ ,  $P_p=P_6$ ) при изменении аргумента  $E_x=E_2$  в интервале 0 - 400 в (потребитель -  $R_p=R_6$ )

$$E2 := (0 \ 40 \ 80 \ 120 \ 160 \ 200 \ 240 \ 280 \ 320 \ 360 \ 400)$$

Вектор задания

Расчет выполняется подпрограммой-функцией Analiz1(A, B, C). См. ниже в выделенной области

! Для открытия или закрытия выделенной области дважды щелкните левой мышкой на линии или знаке !

## ! Подпрограмма-функция исследования 1 электрической цепи !

A - матрица коэффициентов, B - вектор свободных членов, C - вектор задания

ORIGIN := 1

```

Analiz1 (A,B,C) :=
  n ← rows(C)
  for i ∈ 1,2..n
    B4 ← E1 + Ci
    B5 ← Ci + E3
    I ← A-1·B
    Pi,1 ← Ci
    Pi,2 ← I6
    Pi,3 ← I6·R6
    Pi,4 ← I6·Pi,3
  P
  
```

A, B, C - локальные параметры действуют только в теле подпрограммы, поэтому сохранение и восстановление исходных данных (глобальных A и B), не требуется.

## ! Подпрограмма-функция исследования 1 электрической цепи !

Исследование 1 выполняется одним оператором

D1 := Analiz1(A,B,E2<sup>T</sup>)

Матрица-результат :

E <sub>x</sub>	I <sub>p</sub>	U <sub>p</sub>	P <sub>p</sub>
----------------	----------------	----------------	----------------

**Результат исследования 1:**

E2<sup>T</sup> =

0
40
80
120
160
200
240
280
320
360
400

Ip1 := D1<sup><2></sup>

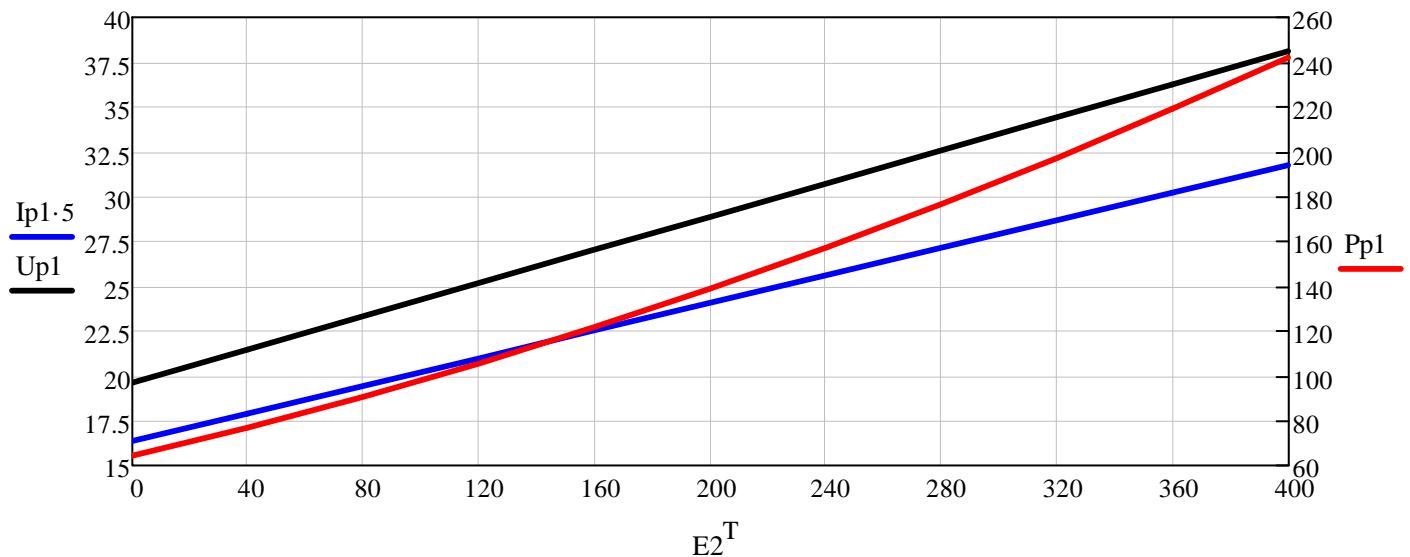
Up1 := D1<sup><3></sup>

Pp1 := D1<sup><4></sup>

D1 =

0	3.264	19.585	63.931
40	3.572	21.435	76.574
80	3.881	23.284	90.356
120	4.189	25.133	105.279
160	4.497	26.982	121.341
200	4.805	28.832	138.544
240	5.113	30.681	156.886
280	5.422	32.53	176.368
320	5.73	34.379	196.99
360	6.038	36.229	218.752
400	6.346	38.078	241.654

## Ip1(E2), Up1(E2), Pp1(E2)



**Запись результата исследования 1 в формате Excel (Raschet\_1.xls) :**

 Raschet\_1.xls

D1

**Исследование 2:** Расчет параметров потребителя ( $I_p=I_6$ ,  $U_p=U_6$ ,  $P_p=P_6$ ) при изменении аргумента  $R_x=R_5$  в интервале 0 - 50 Ом (потребитель -  $R_p=R_6$ )

$R5 := (0 \ 5 \ 10 \ 15 \ 20 \ 25 \ 30 \ 35 \ 40 \ 45 \ 50)$

Вектор задания

Расчет выполняется подпрограммой-функцией Analiz2(A, B, C). См. ниже в **выделенной области**

**! Для открытия или закрытия выделенной области дважды щелкните левой мышкой на линии или знаке !**



**! Подпрограмма-функция исследования 2 электрической цепи !**

A - матрица коэффициентов, B - вектор свободных членов, C - вектор задания

ORIGIN := 1

```
Analiz2(A, B, C) :=
    n ← rows(C)
    for i ∈ 1, 2.. n
        A5,5 ← Ci
        A6,5 ← Ci
        I ← A-1 · B
        Pi,1 ← Ci
        Pi,2 ← I6
        Pi,3 ← I6 · R6
        Pi,4 ← I6 · Pi,3
    P
```

A, B, C - локальные параметры действуют только в теле подпрограммы, поэтому сохранение и восстановление исходных данных (глобальных A и B), не требуется.



**! Подпрограмма-функция исследования 2 электрической цепи !**

Задание выполняется одним оператором

$D2 := \text{Analiz2}(A, B, R5^T)$

Результат исследования 2:

$R5^T =$

0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50

$Ip2 := D2^{(2)}$

$Up2 := D2^{(3)}$

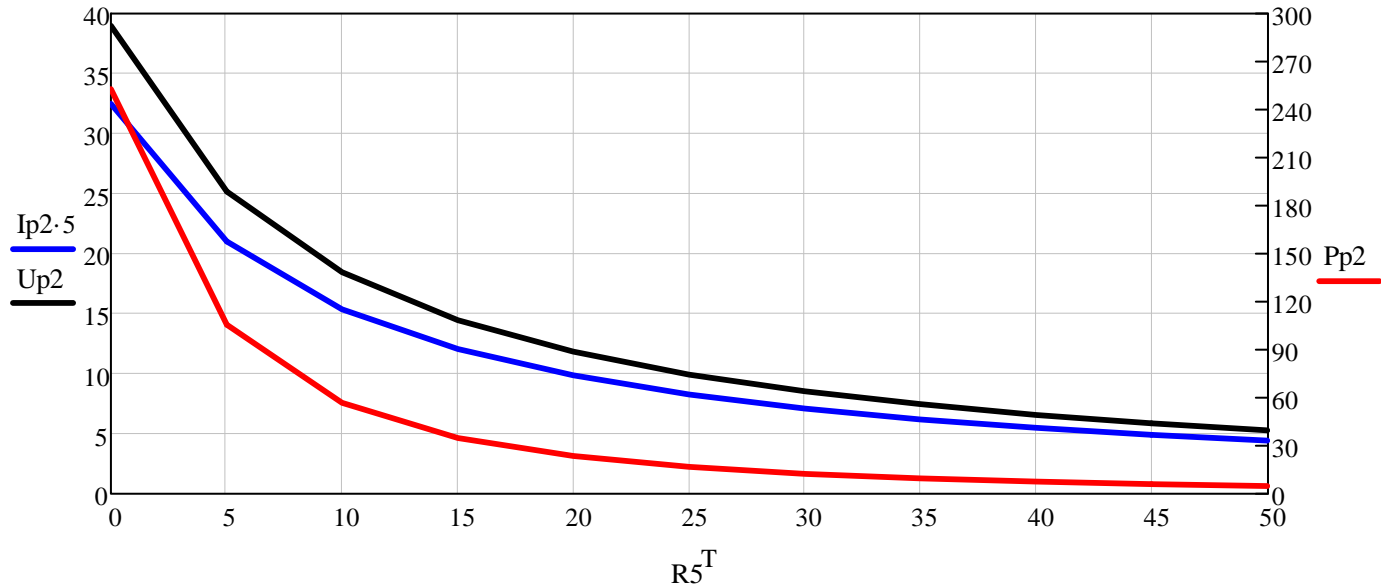
$Pp2 := D2^{(4)}$

$R_x$	$I_p$	$U_p$	$P_p$
-------	-------	-------	-------

$D2 =$

0	6.485	38.908	252.303
5	4.189	25.133	105.279
10	3.066	18.398	56.414
15	2.401	14.404	34.581
20	1.96	11.761	23.055
25	1.647	9.883	16.279
30	1.413	8.479	11.984
35	1.232	7.391	9.104
40	1.087	6.522	7.089
45	0.969	5.812	5.63
50	0.87	5.221	4.544

$Ip2(R5), Up2(R5), Pp2(R5)$

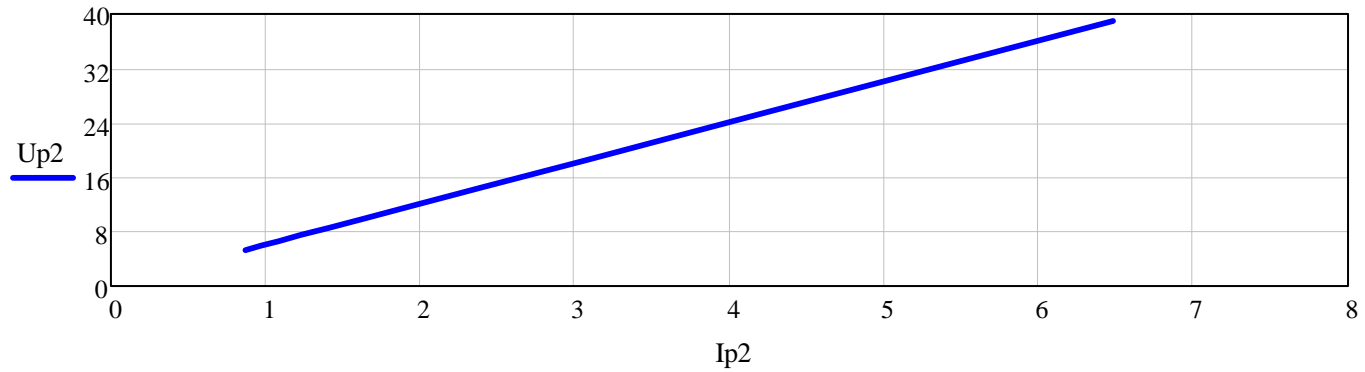


Запись результата исследования в формате Excel (Raschet\_2.xls) :

  
Raschet\_2.xls

D2

Вольтамперная характеристика потребителя



## Проверка адекватности математической модели объекта самому объекту исследования

Математическую модель объекта исследования можно считать адекватной объекту в том случае, если результаты математического моделирования объекта и результаты эксперимента на самом объекте равны (сходны) в смысле некоторого критерия адекватности (численная характеристика сходства).  
Ниже представлен расчет трех различных критериев адекватности (см. справку и расчет).

**СПРАВКА.** В данном случае для оценки адекватности кроме расчета относительной погрешности (1) и коэффициента корреляции (2) используется выборочная статистическая оценка (3) квадрата смешанной корреляции ( $R^2$ ), которая отражает взаимосвязь вектора расчетных и вектора экспериментальных значений переменной от полной их независимости ( $0 > R^2 = 0$ ) до полного тождества ( $R^2 = 1$ ):

Вектор расчетных значений тока потребителя Ip1 из примера 1 (модель в MathCad)

$$Ip1^T = (3.264 \ 3.572 \ 3.881 \ 4.189 \ 4.497 \ 4.805 \ 5.113 \ 5.422 \ 5.73 \ 6.038 \ 6.346) \quad \text{Гранспонированный вектор}$$

Результат исследования 1. выполненного в MultiSim в режиме "*Использовать допуски*" (пункт 6 задания, столбцы 2 - 5 таб. 1.5.1) следует предварительно записать в Excel-файл: [Experiment.xls](#) в текущую папку с данным MathCad-файлом

Чтение результата эксперимента, выполненного в MultiSim (Experiment.xls) :

De :=  
  
Experiment.xls

	$E_x$	$I_p$	$U_p$	$P_p$	
De =	0	3.27	20.026	65.494	Ip1e := (De) <sup>(2)</sup>
	40	3.646	22.18	80.862	
	80	3.933	24.007	94.409	
	120	4.056	24.235	98.298	
	160	4.401	26.13	114.997	
	200	4.763	28.855	137.446	
	240	5.213	31.633	164.908	
	280	5.439	32.203	175.163	
	320	5.649	34.83	196.745	
	360	6.075	35.709	216.935	
	400	6.357	38.638	245.643	

Вектор экспериментальных значений тока Ip1e (эксперимент в MultiSim)

$$Ip1e^T = (3.27 \ 3.646 \ 3.933 \ 4.056 \ 4.401 \ 4.763 \ 5.213 \ 5.439 \ 5.649 \ 6.075 \ 6.357) \quad \text{Гранспонированный вектор}$$

Вектор отклонений расчетных значений от экспериментальных  $\Delta := Ip1 - Ip1e$

$$\Delta^T = (-6.25 \times 10^{-3} \ -0.073 \ -0.052 \ 0.133 \ 0.096 \ 0.042 \ -0.1 \ -0.018 \ 0.081 \ -0.037 \ -0.011)$$

Для оценки адекватности математической модели выбраны три критерия:

1. Максимальное по модулю значение вектора относительных отклонений в %

$$\delta_{\omega} := \frac{\Delta \cdot 100}{Ip1e}$$

$$\delta^T = (-0.191 \ -2.011 \ -1.322 \ 3.275 \ 2.183 \ 0.88 \ -1.911 \ -0.324 \ 1.436 \ -0.608 \ -0.176)$$

Максимальное отклонение в % =  $\max(\delta) = 3.275$

2. Коэффициент корреляции (R) векторов расчетного и экспериментального

*corr(X1,X2) - это стандартная статистическая функция MathCad*

$$R_k := \text{corr}(I_{p1}, I_{p1e}) = 0.997$$

3. Квадрат смешанной корреляции ( $R^2$ ) векторов расчетного и экспериментального:

**! Для открытия или закрытия выделенной области дважды щелкните левой мышкой на линии или знаке !**



Расчет квадрата смешанной корреляции ( $R^2$ ) векторов  $I_{p1}, I_{p1e}$

$$R2(I_{p1}, I_{p1e}) = 0.995$$

**! Математическая модель адекватна объекту !**

**ПРИМЕЧАНИЕ** В дальнейшем при многократном использовании данной программы (MathCad-файла) для исследования электрической цепи рекомендуется:

1. Все выделенные области, открытые для просмотра скрыть двойным щелчком левой мышки на знаке области или на линии.
2. Блок "Проверка адекватности модели объекту" выполняется только один раз в **номинальном** режиме и далее может быть удален.

Созданный файл является одновременно и листингом MathCad-программы и результатом исполнения этой программы (моделирования электрической цепи), а также отчетом, пригодным для распечатки на принтере или публикации в формате WEB и/или PDF.

**Ньютон.** Если вы повернете вон тот выключатель возле двери, что произойдет?

**Инспектор.** Зажжется свет.

**Ньютон.** Другими словами, вы замкнете электрическую цепь. Вы что-нибудь смыслите в электричестве, Рихард?

**Инспектор.** Я ведь не физик.

**Ньютон.** Я тоже мало что понимаю в этом (...), нынче любой остолоп может зажечь электрическую лампочку — или взорвать атомную бомбу. (...) Почему же вы, хотя ничего не понимаете в электричестве, решаетесь включать свет?

*Фридрих Дюренматт "Физики"*

*(разговор полицейского и пациента в сумасшедшем доме).*