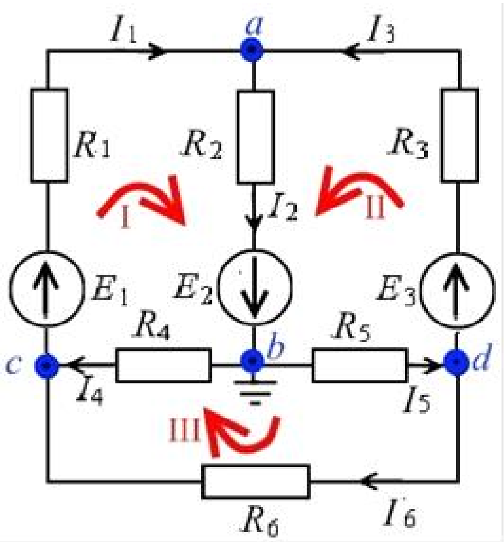
2.1 Пример математического моделирования электрической цепи синусоидального тока с использованием правил Кирхгофа



Направления токов в ветвях и «направления обхода контуров» (НОК) на схеме (рис.2.1.1) условно выбираются любыми. Отрицательное значение тока в расчете означает, что действительное его направление на схеме противоположно выбранному. Для уменьшения количества указанных расхождений предпочтительно выбирать направления токов и НОК, включающих ЭДС, совпадающими с направлением ЭДС.

На схеме (рис. 2.1.1) внутренние сопротивления источников ЭДС условно включены в соответствующие сопротивления ветвей.

Рис. 2.1.1. Схема электрической цепи.

Обозначения и единицы измерения исходных данных и переменных

Наименование	Обозначение	Единица измерения	Unit of measure	Name
Потенциал	Φ	Вольт, В	Volt, V	Potential
ЭДС, Напряжение	E, U	Вольт, В	Volt, V	EMF, Voltage
Частота источника	f	c^{-1}, Герц, Гц	c^{-1}, Hertz, Hz	Frequency
Ток	I	Ампер, А	Amp, A	Current
Мощность	P, Q, S	Ватт, Вт, ВАр, ВА	Watt, W, VAr, VA	Power
Сопротивление	Z, R, X_L, X_C	Ом, Ω	Ohm, Ω	Resistance
Проводимость	Y, G, B_L, B_C	$Ом^{-1}$, Сименс	Ohm^{-1}, Simens, S	Conductance
Емкость	C	Фарада, Ф	Farad, F	Capasitance
Индуктивность	L	Генри, Гн	Henry, H	Inductance

Исходные данные электрической цепи в векторном виде:

Действующие значения ЭДС [В]

$$E_d := \begin{pmatrix} 200 \\ 120 \\ 100 \end{pmatrix}$$

Начальные фазы [град]

$$\psi E := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Частота источников [1/с]

$$f := 50$$

Номер потребителя

$$ip := 6$$

Индуктивность катушки [Гн]

$$Lp := 0.05$$

Емкость конденсатора [Ф]

$$Cp := 0.0001$$

!!! Для номинального режима индуктивность и емкость приравнять нулю !!!

Резисторы

$$R := \begin{pmatrix} 10 \\ 12 \\ 20 \\ 8 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Генерация векторов

$$k := 1..6$$

Индуктивности

$$L_k := \text{if}(k = ip, Lp, 0)$$

$$L = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.05 \end{pmatrix}$$

Емкости

$$C_k := \text{if}(k = ip, Cp, 0)$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \times 10^{-4} \end{pmatrix}$$

Решение: $\omega := 2\cdot\pi\cdot f$ $\omega = 314.159$ ORIGIN := 1

$k := 1..6$

$X_{L_k} := \omega\cdot L_k$

$$X_{C_k} := \begin{cases} 0 & \text{if } C_k = 0 \\ \dfrac{1}{\omega\cdot C_k} & \text{if } C_k > 0 \end{cases}$$

$$X_L = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 15.708 \end{pmatrix} \qquad X_C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 31.831 \end{pmatrix}$$

Комплексные значения параметров цепи: Обозначение мнимой единицы $j = i$

Источники напряжения:

$$E := \overrightarrow{\left(E_d\cdot\exp(j\cdot\psi E)\right)} \qquad E = \begin{pmatrix} 200 \\ 120 \\ 100 \end{pmatrix}$$

Полные сопротивления ветвей:

$$Z := R + j\cdot(X_L - X_C) \quad Z = \begin{pmatrix} 10 \\ 12 \\ 20 \\ 8 \\ 5 \\ 6 - 16.123i \end{pmatrix} \quad Z_d := \overrightarrow{|Z|} \quad Z_d = \begin{pmatrix} 10 \\ 12 \\ 20 \\ 8 \\ 5 \\ 17.203 \end{pmatrix} \quad \varphi := \overrightarrow{\arg(Z)} \quad \varphi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -69.588 \end{pmatrix}\cdot{}^\circ$$

Временная диаграмма ЭДС источников :

$t := 0, 0.0005..0.02$ Мгновенные значения источников ЭДС

$$e1(t) := E_{d_1}\cdot\sqrt{2}\cdot\sin(\omega\cdot t + \psi E_1) \quad e2(t) := E_{d_2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sin(\omega\cdot t + \psi E_2) \quad e3(t) := E_{d_3}\cdot\sqrt{2}\cdot\sin(\omega\cdot t + \psi E_3)$$

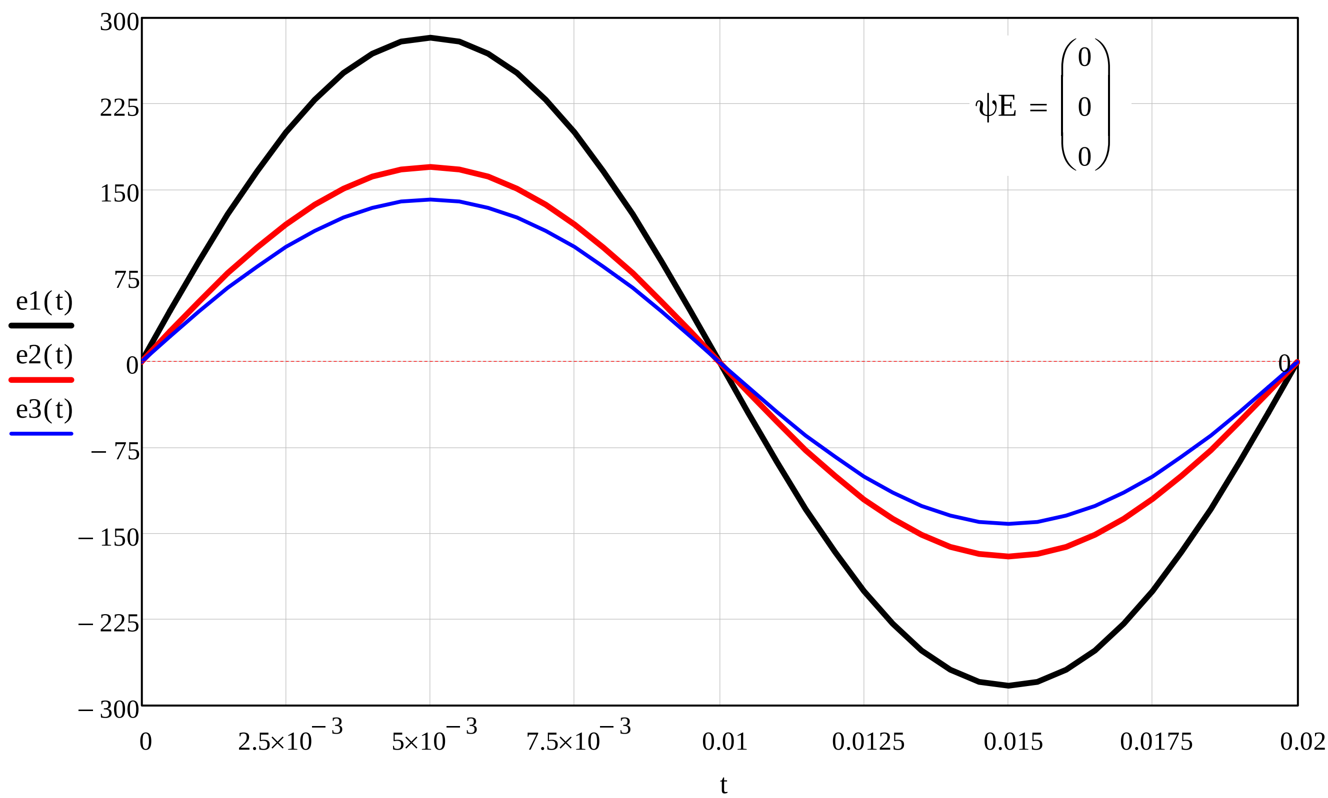


Рис. 2.1.2. Временная диаграмма источников ЭДС: e1(t), e2(t) и e3(t)

Решение СЛАУ для нахождения токов (правила Кирхгофа) :

Определяем число уравнений для нахождения токов в ветвях цепи:

- 1-й закон Кирхгофа: $n1 = k - 1 = 4 - 1 = 3$
- 2-й закон Кирхгофа: $n2 = p - n1 = 6 - 3 = 3$,

где: k - количество узлов цепи, p - количество ветвей цепи (*токов*).

Система уравнений в __нормализованной форме__

(*все неизвестные строго на своем месте в каждом уравнении, свободные члены в правой части*) :

1-й закон Кирхгофа
$n1 = k - 1 = 4 - 1 = 3$
(узлы)

$$\begin{cases} \text{a)}\ I_1 - I_2 + I_3 + 0 \cdot I_4 + 0 \cdot I_5 + 0 \cdot I_6 = 0 \\ \text{b)}\ 0 + I_2 + 0 - I_4 - I_5 + 0 = 0 \\ \text{c)}\ -I_1 + 0 + 0 + I_4 + 0 + I_6 = 0 \end{cases}$$

! далее упрощаем запись !

2-й закон Кирхгофа
$n2 = p - n1 = 6 - 3 = 3$
(контуры)

$$\begin{cases} \text{I)}\ Z_1 \cdot I_1 + Z_2 \cdot I_2 + 0 + Z_4 \cdot I_4 + 0 + 0 = E_1 + E_2 \\ \text{II)}\ 0 + Z_2 \cdot I_2 + Z_3 \cdot I_3 + 0 + Z_5 \cdot I_5 + 0 = E_2 + E_3 \\ \text{III)}\ 0 + 0 + 0 - Z_4 \cdot I_4 + Z_5 \cdot I_5 + Z_6 \cdot I_6 = 0 \end{cases}$$

Для решение системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) можно выбрать любой метод, например: метод обратной матрицы

Решение СЛАУ методом обратной матрицы

(*вектор неизвестных определяется умножением обратной матрицы коэффициентов на вектор правых частей уравнений).*

$ORIGIN := 1$

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ Z_1 & Z_2 & 0 & Z_4 & 0 & 0 \\ 0 & Z_2 & Z_3 & 0 & Z_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -Z_4 & Z_5 & Z_6 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ E_1 + E_2 \\ E_2 + E_3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad I := A^{-1} \cdot B \quad I = \begin{pmatrix} 10.229 + 0.769i \\ 12.599 + 0.238i \\ 2.37 - 0.531i \\ 8.316 - 1.318i \\ 4.283 + 1.555i \\ 1.913 + 2.087i \end{pmatrix}$$

Действующие значения токов на участках цепи:

$$I_d := \overrightarrow{|I|} = \begin{pmatrix} 10.257 \\ 12.601 \\ 2.429 \\ 8.42 \\ 4.556 \\ 2.83 \end{pmatrix} \quad \psi I := \overrightarrow{\arg(I)} = \begin{pmatrix} 4.299 \\ 1.08 \\ -12.636 \\ -9.003 \\ 19.958 \\ 47.491 \end{pmatrix} \cdot {}^\circ$$

__Сопряженный вектор токов__:

$$\overline{I} = \begin{pmatrix} 10.229 - 0.769i \\ 12.599 - 0.238i \\ 2.37 + 0.531i \\ 8.316 + 1.318i \\ 4.283 - 1.555i \\ 1.913 - 2.087i \end{pmatrix} \quad \psi Is := \overrightarrow{\arg(\overline{I})} = \begin{pmatrix} -4.299 \\ -1.08 \\ 12.636 \\ 9.003 \\ -19.958 \\ -47.491 \end{pmatrix} \cdot {}^\circ$$

Комплексные значения падений напряжения на сопротивлениях цепи:

$$U := \overrightarrow{(I \cdot Z)} = \begin{pmatrix} 102.286 + 7.689i \\ 151.185 + 2.851i \\ 47.402 - 10.627i \\ 66.529 - 10.541i \\ 21.413 + 7.776i \\ 45.116 - 18.316i \end{pmatrix} \quad U_d := \overrightarrow{|U|} = \begin{pmatrix} 102.575 \\ 151.212 \\ 48.579 \\ 67.359 \\ 22.781 \\ 48.692 \end{pmatrix} \quad \psi U := \overrightarrow{\arg(U)} = \begin{pmatrix} 4.299 \\ 1.08 \\ -12.636 \\ -9.003 \\ 19.958 \\ -22.096 \end{pmatrix} \cdot {}^\circ$$

Активная мощность потребляемая в ветвях:

$$P := \overrightarrow{\left(\mathrm{Re}\left(U\cdot\bar{I}\right)\right)} = \begin{pmatrix} 1.052\times10^{3} \\ 1.905\times10^{3} \\ 117.995 \\ 567.151 \\ 103.797 \\ 48.067 \end{pmatrix} \qquad P_d := \overrightarrow{|P|} = \begin{pmatrix} 1.052\times10^{3} \\ 1.905\times10^{3} \\ 117.995 \\ 567.151 \\ 103.797 \\ 48.067 \end{pmatrix} \qquad Pds := \sum P_d = 3.795\times10^{3}$$

Реактивная мощность в ветвях:

$$Q := \overrightarrow{\left(\mathrm{Im}\left(U\cdot\bar{I}\right)\right)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -129.165 \end{pmatrix} \qquad Q_d := \overrightarrow{|Q|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 129.165 \end{pmatrix} \qquad Qds := \sum Q_d = 129.165$$

Полная мощность в ветвях:

$$Sm := \overrightarrow{\left(U\cdot\bar{I}\right)} = \begin{pmatrix} 1.052\times10^{3} \\ 1.905\times10^{3} \\ 117.995 \\ 567.151 \\ 103.797 \\ 48.067-129.165i \end{pmatrix} \qquad Sm_d := \overrightarrow{|Sm|} = \begin{pmatrix} 1.052\times10^{3} \\ 1.905\times10^{3} \\ 117.995 \\ 567.151 \\ 103.797 \\ 137.819 \end{pmatrix}$$

$$Sds := \sqrt{Pds^2 + Qds^2} = 3.797\times10^{3}$$

___ Проверка ___

$$S1 := \sqrt{\left(\sum P_d\right)^2 + \left(\sum Q_d\right)^2} = 3.797\times10^{3}$$

Для проверки расчета составляем баланс мощностей:

$$E_1\cdot I_1 + E_2\cdot I_2 + E_3\cdot I_3 = Z_1\cdot I_1^2 + Z_2\cdot I_2^2 + Z_3\cdot I_3^2 + Z_4\cdot I_4^2 + Z_5\cdot I_5^2 + Z_6\cdot I_6^2$$

!!! Мощность источника ЭДС *(E*I)* положительна при совпадении направлений ЭДС *(E)* и тока *(I)*, проходящего через источник, и отрицательна при встречных направлениях ЭДС и тока. В первом случае источник ЭДС *(E)* является генератором энергии, а во втором случае потребителем энергии !!!

Расчет левой части уравнения - общая мощность генерации электроэнергии

$$Si := E_1\cdot I_1 + E_2\cdot I_2 + E_3\cdot I_3 \qquad Si = 3.795\times10^{3} + 129.165i$$

Расчет правой части уравнения - общая мощность потребления электроэнергии

$$Sp := Z_1\cdot(I_1)^2 + Z_2\cdot(I_2)^2 + Z_3\cdot(I_3)^2 + Z_4\cdot(I_4)^2 + Z_5\cdot(I_5)^2 + Z_6\cdot(I_6)^2 \qquad Sp = 3.795\times10^{3} + 129.165i$$

Разбаланс (Вт) : $|Si| - |Sp| = 4.547\times10^{-13}$ $\qquad Spd := |Sp| = 3.797\times10^{3}$

Разбаланс (%): $\dfrac{(|Si| - |Sp|)\cdot100}{|Si|} = 1.198\times10^{-14}$

Временная диаграмма напряжения, тока и мощности потребителя RLC:

Начальные (t = 0) фазы напряжения Up, тока Ip. Мощность приемника RLC:

$\psi_{Up} := \arg(U_{ip}) = -22.096\cdot°$ $\psi_{Ip} := \arg(I_{ip}) = 47.491\cdot°$ $P_{ip} = 48.067$ $Q_{ip} = -129.165$

Угол сдвига фазы тока Ip от напряжения Up и коэффициент мощности:

$\varphi_p := \psi_{Up} - \psi_{Ip} = -69.588\cdot°$ $\sin(\varphi_p) = -0.937$ $Cm := \cos(\varphi_p) = 0.349$

Все функции на диаграмме строят с условным сдвигом по оси времени $\left(\frac{-\psi_{U6}}{360\cdot f}\right)$, что соответствует повороту всех вектор-функций на плоскости {Re - Im} на угол $(-\psi_{U6})$.
В этом случае вектор-напряжение совпадает с осью Re, а ток фактический и ток сопряженный симметричны относительно оси Re и напряжения: ($-\varphi$ ∎ $+\varphi$)

Масштаб тока : $mi := 10$ Масштаб мощности : $ms := 1$

Аргумент - время (t). Интервал изменения: 0 - 0,02сек (период). Шаг: 0,0005сек

$t := 0, 0.0001 .. 0.02$

Ток сопряженный мгновенный:

$up(t) := U_{d_{ip}}\cdot\sqrt{2}\cdot\sin(\omega\cdot t)$ $ipp(t) := I_{d_{ip}}\cdot\sqrt{2}\cdot\sin(\omega\cdot t - \varphi_p)$ $ips(t) := I_{d_{ip}}\cdot\sqrt{2}\cdot\sin(\omega\cdot t + \varphi_p)$

Проверка: s(t) = p(t) + q(t)

$sp(t) := up(t)\cdot ips(t)$ $pp(t) := P_{ip}\cdot(1 - \cos(2\cdot\omega\cdot t))$ $qp(t) := Q_{ip}\cdot\sin(2\cdot\omega\cdot t)$ $pq(t) := pp(t) + qp(t)$

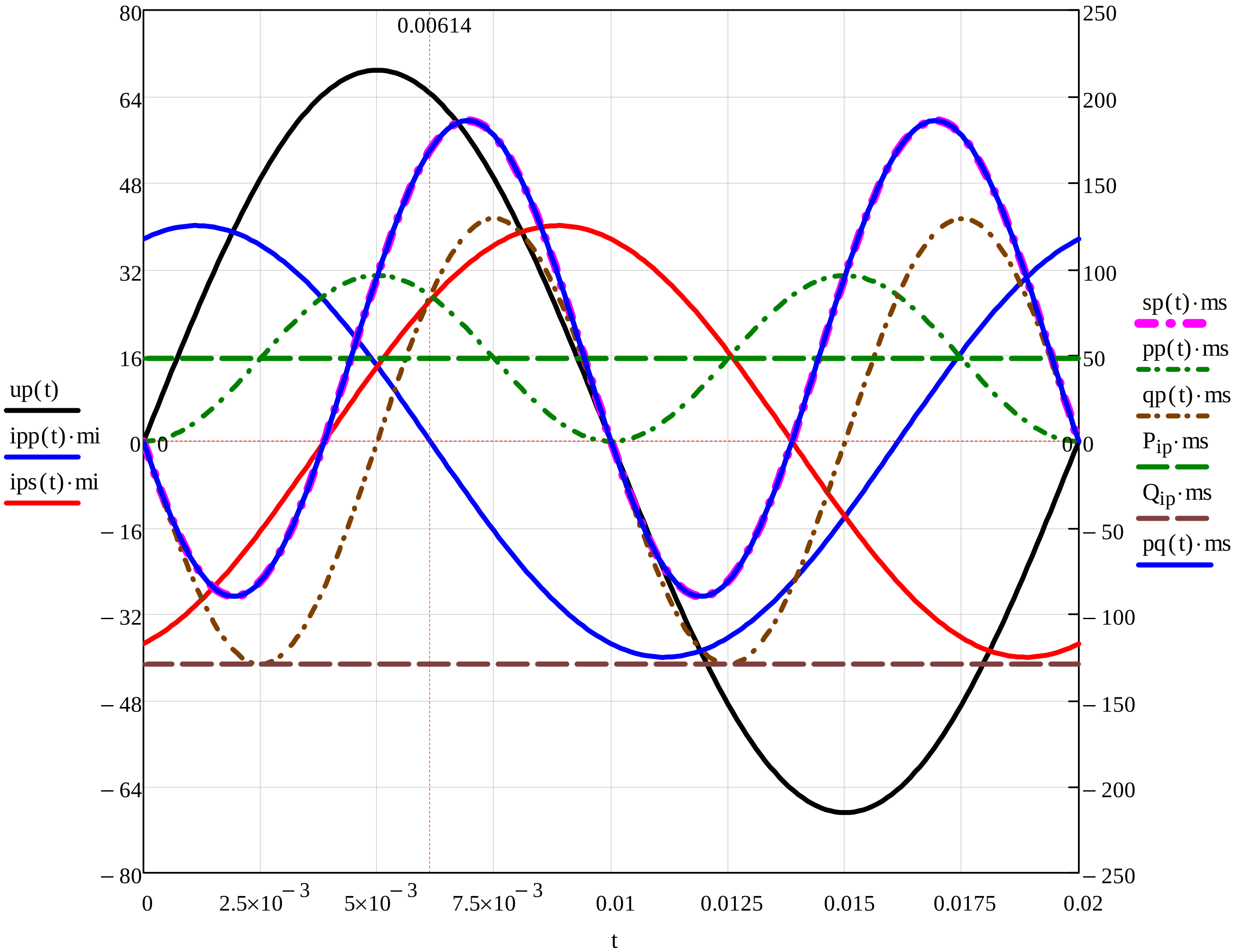


Рис. 2.1.5. Временная диаграмма тока i6(t), напряжения u6(t) и мощности p6(t), q6(t), s6(t)