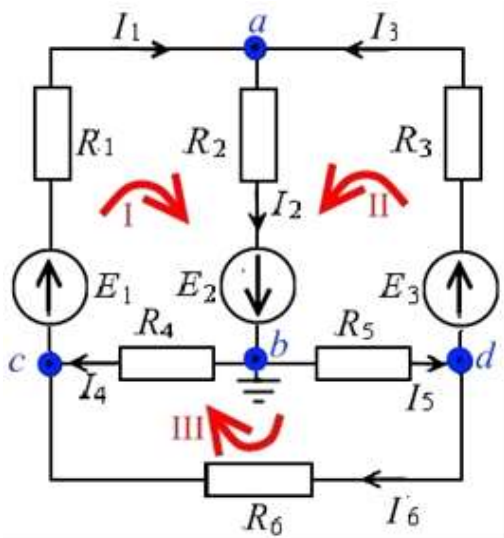


2.1 Пример математического моделирования электрической цепи синусоидального тока с использованием правил Кирхгофа



Направления токов в ветвях и «направления обхода контуров» (НОК) на схеме (рис.2.1.1) условно выбираются любыми. Отрицательное значение тока в расчете означает, что действительное его направление на схеме противоположно выбранному. Для уменьшения количества указанных расхождений предпочтительно выбирать направления токов и НОК, включающих ЭДС, совпадающими с направлением ЭДС.

На схеме (рис. 2.1.1) внутренние сопротивления источников ЭДС условно включены в соответствующие сопротивления ветвей.

Рис. 2.1.1. Схема электрической цепи.

Обозначения и единицы измерения исходных данных и переменных

Наименование	Обозначение	Единица измерения	Unit of measure	Name
Потенциал	Ф	Вольт, В	Volt, V	Potential
ЭДС, Напряжение	E, U	Вольт, В	Volt, V	EMF, Voltage
Частота источника	f	c ⁻¹ , Герц, Гц	c ⁻¹ , Hertz, Hz	Frequency
Ток	I	Ампер, А	Amp, A	Current
Мощность	P, Q, S	Ватт, Вт, ВАр, ВА	Watt, W, VAr, VA	Power
Сопротивление	Z, R, X _L , X _C	Ом, Ω	Ohm, Ω	Resistance
Проводимость	Y, G, B _L , B _C	Ом ⁻¹ , Сименс	Ohm ⁻¹ , Simens, S	Conductance
Емкость	C	Фарада, Ф	Farad, F	Capacitance
Индуктивность	L	Генри, Гн	Henry, H	Inductance

Исходные данные электрической цепи в векторном виде:

Действующие значения ЭДС

$$E_d := \begin{pmatrix} 200 \\ 120 \\ 100 \end{pmatrix}$$

Начальные фазы

$$\psi E := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Частота источников

$$f := 50$$

Активные сопротивления

$$R_w := \begin{pmatrix} 10 \\ 12 \\ 20 \\ 8 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Индуктивности

$$L_w := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Емкости

$$C_w := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Решение:

$\omega := 2 \cdot \pi \cdot f$

$\omega = 314.159$

ORIGIN

$:= 1$

$k := 1..6$

$X_{L_k} := \omega \cdot L_k$

$X_{C_k} := \begin{cases} 0 & \text{if } C_k = 0 \\ \frac{1}{\omega \cdot C_k} & \text{if } C_k > 0 \end{cases}$

$X_L = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$X_C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Комплексные значения параметров цепи:

Источники напряжения:

$E := \overrightarrow{(E_d \cdot \exp(j \cdot \psi_E))}$

$E = \begin{pmatrix} 200 \\ 120 \\ 100 \end{pmatrix}$

Обозначение мнимой единицы $j = i$

Полные сопротивления ветвей:

$Z := R + j \cdot (X_L - X_C)$

$Z = \begin{pmatrix} 10 \\ 12 \\ 20 \\ 8 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

$Z_d := \overrightarrow{|Z|}$

$Z_d = \begin{pmatrix} 10 \\ 12 \\ 20 \\ 8 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

$\varphi := \overrightarrow{\arg(Z)}$

$\varphi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot ^\circ$

Временная диаграмма ЭДС источников :

$t := 0, 0.0005..0.02$

Мгновенные значения источников ЭДС

$e1(t) := E_{d_1} \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi_{E_1})$

$e2(t) := E_{d_2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi_{E_2})$

$e3(t) := E_{d_3} \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi_{E_3})$

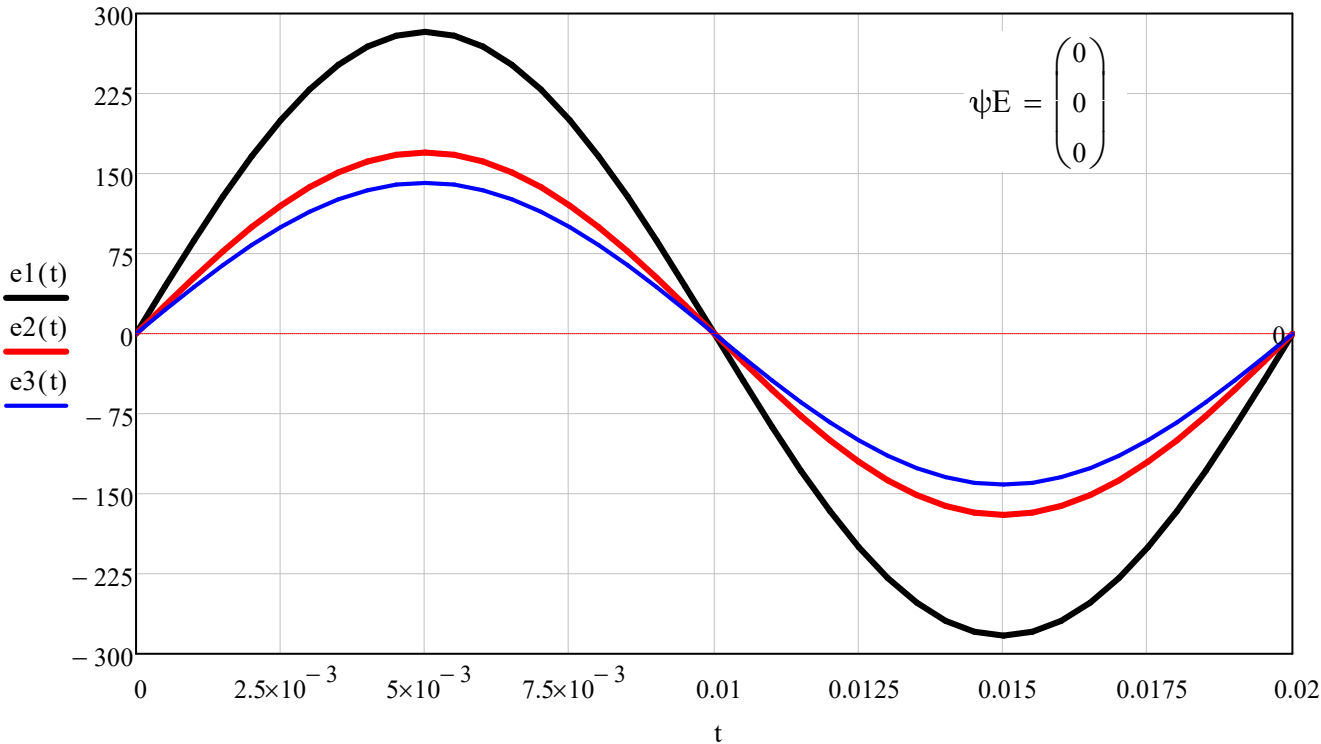


Рис. 2.1.2. Временная диаграмма источников ЭДС: $e1(t)$, $e2(t)$ и $e3(t)$

Решение СЛАУ для нахождения токов (правила Кирхгофа) :

Определяем число уравнений для нахождения токов в ветвях цепи:

- 1-й закон Кирхгофа: $n1 = k - 1 = 4 - 1 = 3$
- 2-й закон Кирхгофа: $n2 = p - n1 = 6 - 3 = 3$,

где: k - количество узлов цепи, p - количество ветвей цепи (токов).

Система уравнений в нормализованной форме

(все неизвестные строго на своем месте в каждом уравнении, свободные члены в правой части) :

$$\begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l}
 \text{1-й закон Кирхгофа} \\
 n1 = k - 1 = 4 - 1 = 3 \\
 \text{(узлы)}
 \end{array} \right\} \begin{array}{l}
 \text{a) } I_1 - I_2 + I_3 + 0 \cdot I_4 + 0 \cdot I_5 + 0 \cdot I_6 = 0 \\
 \text{b) } 0 + I_2 + 0 - I_4 - I_5 + 0 = 0 \quad \text{! далее упрощаем запись !} \\
 \text{c) } -I_1 + 0 + 0 + I_4 + 0 + I_6 = 0
 \end{array} \\
 \\
 \left. \begin{array}{l}
 \text{2-й закон Кирхгофа} \\
 n2 = p - n1 = 6 - 3 = 3 \\
 \text{(контуры)}
 \end{array} \right\} \begin{array}{l}
 \text{I) } Z_1 \cdot I_1 + Z_2 \cdot I_2 + 0 + Z_4 \cdot I_4 + 0 + 0 = E_1 + E_2 \\
 \text{II) } 0 + Z_2 \cdot I_2 + Z_3 \cdot I_3 + 0 + Z_5 \cdot I_5 + 0 = E_2 + E_3 \\
 \text{III) } 0 + 0 + 0 - Z_4 \cdot I_4 + Z_5 \cdot I_5 + Z_6 \cdot I_6 = 0
 \end{array}
 \end{array}$$

Для решение системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) можно выбрать любой метод, например: метод обратной матрицы

Решение СЛАУ методом обратной матрицы

(вектор неизвестных определяется умножением обратной матрицы коэффициентов на вектор правых частей уравнений).

ORIGIN := 1

$$\begin{array}{l}
 \underline{\underline{A}} := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ Z_1 & Z_2 & 0 & Z_4 & 0 & 0 \\ 0 & Z_2 & Z_3 & 0 & Z_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -Z_4 & Z_5 & Z_6 \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{B}} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ E_1 + E_2 \\ E_2 + E_3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{I}} := \underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \underline{\underline{B}} \quad \underline{\underline{I}} = \begin{pmatrix} 11.068 \\ 12.858 \\ 1.79 \\ 6.879 \\ 5.979 \\ 4.189 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

Действующие значения токов на участках цепи:

Сопряженный вектор токов:

$$\underline{\underline{I}}_d := \overrightarrow{|\underline{\underline{I}}|} = \begin{pmatrix} 11.068 \\ 12.858 \\ 1.79 \\ 6.879 \\ 5.979 \\ 4.189 \end{pmatrix} \quad \psi \underline{\underline{I}} := \arg(\underline{\underline{I}}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot ^\circ \quad \underline{\underline{\bar{I}}} = \begin{pmatrix} 11.068 \\ 12.858 \\ 1.79 \\ 6.879 \\ 5.979 \\ 4.189 \end{pmatrix} \quad \psi \underline{\underline{I}}_s := \arg(\underline{\underline{\bar{I}}}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot ^\circ$$

Комплексные значения падений напряжения на сопротивлениях цепи:

$$\underline{\underline{U}} := \overrightarrow{(\underline{\underline{I}} \cdot \underline{\underline{Z}})} = \begin{pmatrix} 110.675 \\ 154.295 \\ 35.808 \\ 55.029 \\ 29.896 \\ 25.133 \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{U}}_d := \overrightarrow{|\underline{\underline{U}}|} = \begin{pmatrix} 110.675 \\ 154.295 \\ 35.808 \\ 55.029 \\ 29.896 \\ 25.133 \end{pmatrix} \quad \psi \underline{\underline{U}} := \arg(\underline{\underline{U}}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot ^\circ$$

Активная мощность потребляемая в ветвях:

$$P := \overrightarrow{\text{Re}(U \cdot \bar{I})} = \begin{pmatrix} 1.225 \times 10^3 \\ 1.984 \times 10^3 \\ 64.112 \\ 378.53 \\ 178.758 \\ 105.279 \end{pmatrix}$$

$$P_d := \overrightarrow{|P|} = \begin{pmatrix} 1.225 \times 10^3 \\ 1.984 \times 10^3 \\ 64.112 \\ 378.53 \\ 178.758 \\ 105.279 \end{pmatrix}$$

$$P_{ds} := \sum P_d = 3.936 \times 10^3$$

Реактивная мощность в ветвях:

$$Q := \overrightarrow{\text{Im}(U \cdot \bar{I})} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Q_d := \overrightarrow{|Q|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Q_{ds} := \sum Q_d = 0$$

Полная мощность в ветвях:

$$S_m := \overrightarrow{U \cdot \bar{I}} = \begin{pmatrix} 1.225 \times 10^3 \\ 1.984 \times 10^3 \\ 64.112 \\ 378.53 \\ 178.758 \\ 105.279 \end{pmatrix}$$

$$S_{m_d} := \overrightarrow{|S_m|} = \begin{pmatrix} 1.225 \times 10^3 \\ 1.984 \times 10^3 \\ 64.112 \\ 378.53 \\ 178.758 \\ 105.279 \end{pmatrix}$$

$$S_{ds} := \sqrt{P_{ds}^2 + Q_{ds}^2} = 3.936 \times 10^3$$

___ Проверка ___

$$S_1 := \sqrt{\left(\sum P_d\right)^2 + \left(\sum Q_d\right)^2} = 3.936 \times 10^3$$

Для проверки расчета составляем баланс мощностей:

$$E_1 \cdot I_1 + E_2 \cdot I_2 + E_3 \cdot I_3 = Z_1 \cdot I_1^2 + Z_2 \cdot I_2^2 + Z_3 \cdot I_3^2 + Z_4 \cdot I_4^2 + Z_5 \cdot I_5^2 + Z_6 \cdot I_6^2$$

!!! Мощность источника ЭДС ($E \cdot I$) положительна при совпадении направлений ЭДС (E) и тока (I), проходящего через источник, и отрицательна при встречных направлениях ЭДС и тока. В первом случае источник ЭДС (E) является генератором энергии, а во втором случае потребителем энергии !!!

Расчет левой части уравнения

$$S_i := E_1 \cdot I_1 + E_2 \cdot I_2 + E_3 \cdot I_3$$

$$S_i = 3.936 \times 10^3$$

Расчет правой части уравнения

$$S_p := Z_1 \cdot (I_1)^2 + Z_2 \cdot (I_2)^2 + Z_3 \cdot (I_3)^2 + Z_4 \cdot (I_4)^2 + Z_5 \cdot (I_5)^2 + Z_6 \cdot (I_6)^2$$

$$S_p = 3.936 \times 10^3$$

Разбаланс (Вт) :

$$|S_i| - |S_p| = 4.547 \times 10^{-13}$$

$$S_{pd} := |S_p| = 3.936 \times 10^3$$

Разбаланс (%) :

$$\frac{(|S_i| - |S_p|) \cdot 100}{|S_i|} = 1.156 \times 10^{-14}$$

Временная диаграмма напряжения, тока и мощности приемника R6:

Начальные ($t = 0$) фазы тока I_6 , напряжения U_6 и активная мощность приемника R6 :

$$\psi_{U_6} := \arg(U_6) = 0^\circ$$

$$\psi_{I_6} := \arg(I_6) = 0^\circ$$

$$P_6 = 105.279$$

$$Q_6 = 0$$

Угол сдвига фазы тока I_6 от напряжения U_6 и коэффициент мощности:

$$\varphi_6 := \psi_{U_6} - \psi_{I_6}$$

$$\varphi_6 = 0^\circ$$

$$\sin(\varphi_6) = 0$$

$$C_m := \cos(\varphi_6)$$

$$C_m = 1$$

Все функции на диаграмме строят с условным сдвигом по оси времени $\left(\frac{-\psi_{U_6}}{360 \cdot f} \right)$, что соответствует повороту всех вектор-функций на плоскости $\{Re - Im\}$ на угол $(-\psi_{U_6})$.

В этом случае вектор-напряжение совпадает с осью Re, а ток фактический и ток сопряженный симметричны относительно оси Re и напряжения: $(-\varphi \text{ и } +\varphi)$

Масштаб тока : $mi := 10$

Масштаб мощности : $ms := 1$

Аргумент - время (t). Интервал изменения: 0 - 0,02сек (период). Шаг: 0,0005сек

$$t := 0, 0.0001 \dots 0.02$$

$$u_6(t) := U_{d_6} \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

$$i_6(t) := I_{d_6} \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\omega \cdot t - \varphi_6)$$

Ток сопряженный мгновенный:

$$i_{6s}(t) := I_{d_6} \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_6)$$

Проверка: $s(t) = p(t) + q(t)$

$$s_6(t) := u_6(t) \cdot i_{6s}(t) \quad p_6(t) := P_6 \cdot (1 - \cos(2 \cdot \omega \cdot t)) \quad q_6(t) := Q_6 \cdot \sin(2 \cdot \omega \cdot t)$$

$$pq(t) := p_6(t) + q_6(t)$$

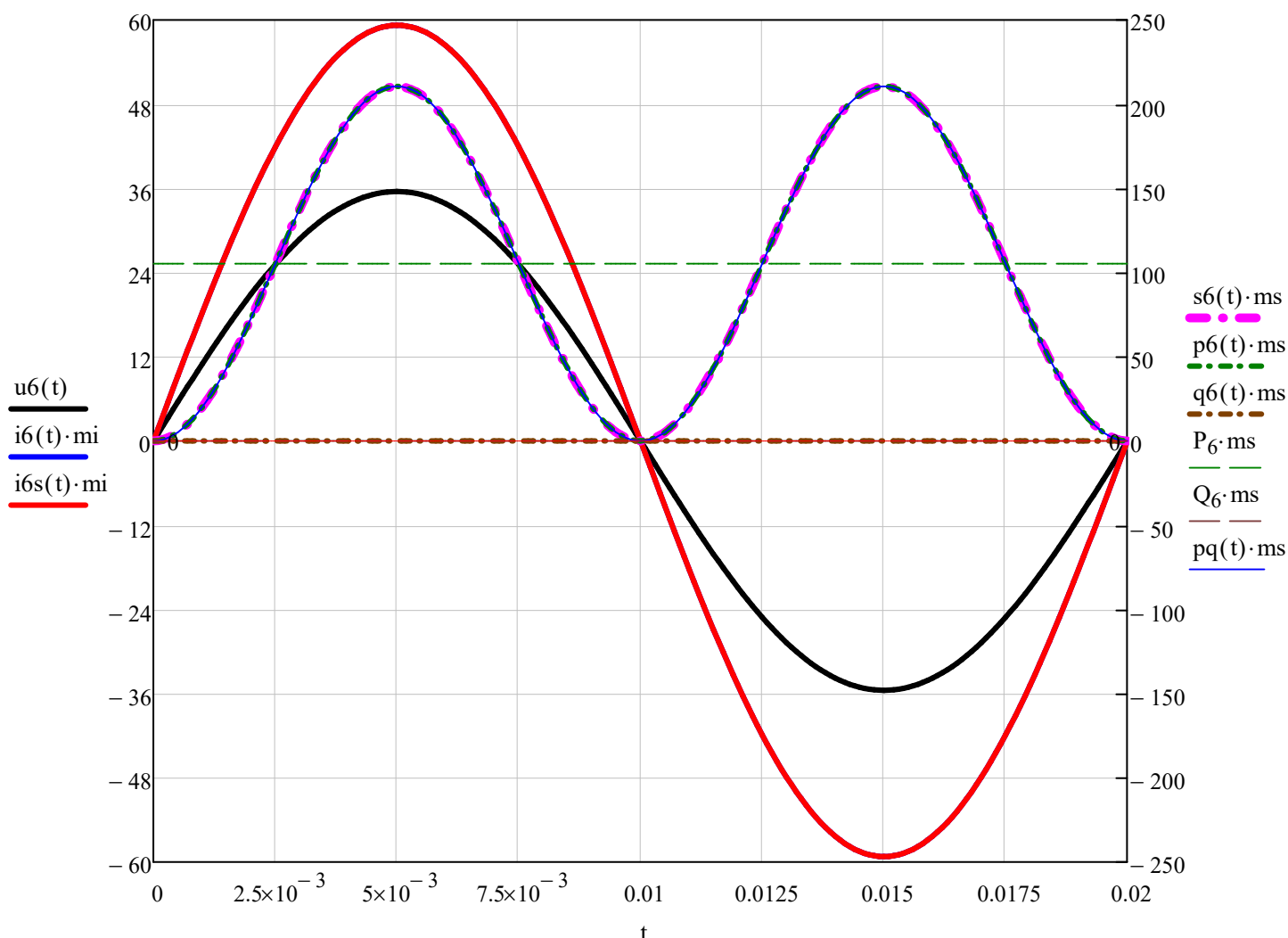


Рис. 2.1.5. Временная диаграмма тока $i_6(t)$, напряжения $u_6(t)$ и мощности $p_6(t)$, $q_6(t)$, $s_6(t)$

Исследования электрической цепи № 1 и №2, а также проверка адекватности **не входит** в план лаб. №2 (выполнять не требуется).

...

...Но обязательно сравнить с результатами лаб. № 1...

Исследование электрической цепи (см. лаб. № 1):

Для выполнения пункта 6 задания следует изменить параметры цепи и интервал их изменения согласно полученным указаниям, построить таблицу и диаграмму по результатам исследования и провести анализ.

Пример: Расчет изменения I_6 , U_6 и P_6 при изменении E_2 (0, 40, 80, 120, 160, 200, 240, 280, 320, 400)

$E_2 := (0 \ 40 \ 80 \ 120 \ 160 \ 200 \ 240 \ 280 \ 320 \ 360 \ 400)$

Вектор задания

Для расчета используется подпрограмма-функция "Analiz1(A,B,C)"

! Для открытия или закрытия выделенной области дважды щелкните левой мышкой на линии или знаке !



! Подпрограмма-функция заданного исследования электрической цепи !

A - матрица коэффициентов, B - вектор свободных членов, C - вектор задания

ORIGIN := 1

```
Analiz1(A,B,C) :=
|
| n ← rows(C)
|   for i ∈ 1,2..n
|     |
|     | B4 ← E1 + Ci
|     | B5 ← Ci + E3
|     | I ← A-1 · B
|     | Pi,1 ← Ci
|     | Pi,2 ← I6
|     | Pi,3 ← I6 · Z6
|     | Pi,4 ← Re(I6 · Pi,3)
|   P
```



! Подпрограмма-функция заданного исследования электрической цепи !

Задание выполняется одним оператором

$D1 := \text{Analiz1}(A, B, E2^T)$

1 Результат исследования :

E2	i6	U6	P6
----	----	----	----

D1 =	0	3.264	19.585	63.931
	40	3.572	21.435	76.574
	80	3.881	23.284	90.356
	120	4.189	25.133	105.279
	160	4.497	26.982	121.341
	200	4.805	28.832	138.544
	240	5.113	30.681	156.886
	280	5.422	32.53	176.368
	320	5.73	34.379	196.99
	360	6.038	36.229	218.752
	400	6.346	38.078	241.654

$$I_{61} := D1^{\langle 2 \rangle}$$

$$U_{61} := D1^{\langle 3 \rangle}$$

$$P_{61} := D1^{\langle 4 \rangle}$$

I6(E2), U6(E2), P6(E2)

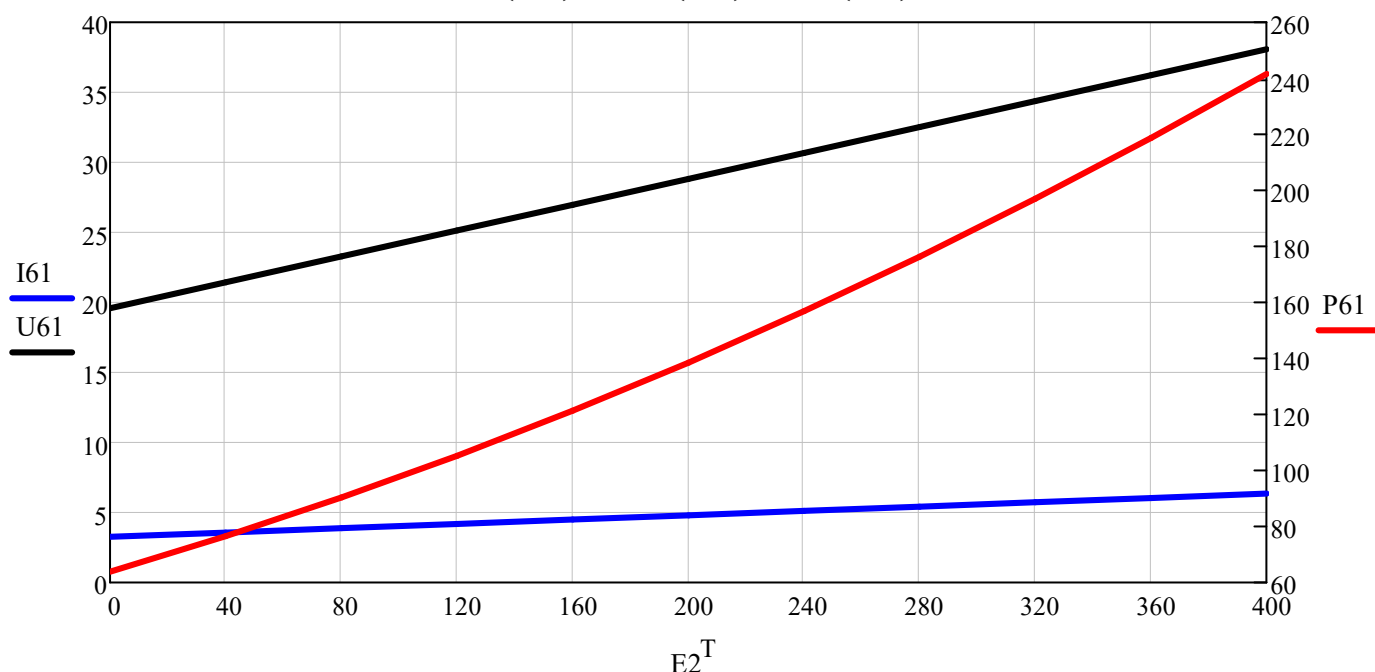


Рис.2.1.3. Зависимость тока I₆, напряжения U₆ и мощности P₆ от ЭДС E₂

Запись результата исследования в формате Excel (Raschet_1.xls) :

Raschet_1.xls

D1

Пример 2: Расчет изменения I₆, U₆ и P₆ при изменении R₅ (0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50)

R5 := (0 5 10 15 20 25 30 35 40 45 50)

Вектор задания

! Для открытия или закрытия выделенной области дважды щелкните левой мышкой на линии или знаке !



! Подпрограмма-функция заданного исследования электрической цепи !

A - матрица коэффициентов, B - вектор свободных членов, C - вектор задания

ORIGIN := 1

```
Analiz3(A,B,C) := | n ← rows(C)
                   | for i ∈ 1,2..n
                   |   | A5,5 ← Ci
                   |   | A6,5 ← Ci
                   |   | I ← A-1·B
                   |   | Pi,1 ← Ci
                   |   | Pi,2 ← I6
                   |   | Pi,3 ← I6·Z6
                   |   | Pi,4 ← Re(I6·Pi,3)
                   | P
```

! Подпрограмма-функция заданного исследования электрической цепи !



Задание выполняется одним оператором

D2 := Analiz3(A,B,R5^T)

2 Результат исследования :

E2	i6	U6	P6
----	----	----	----

D2 =

0	6.485	38.908	252.303
5	4.189	25.133	105.279
10	3.066	18.398	56.414
15	2.401	14.404	34.581
20	1.96	11.761	23.055
25	1.647	9.883	16.279
30	1.413	8.479	11.984
35	1.232	7.391	9.104
40	1.087	6.522	7.089
45	0.969	5.812	5.63
50	0.87	5.221	4.544

I62 := D2^{<2>}

U62 := D2^{<3>}

P62 := D2^{<4>}

I6(R5), U6(R5), P6(R5)

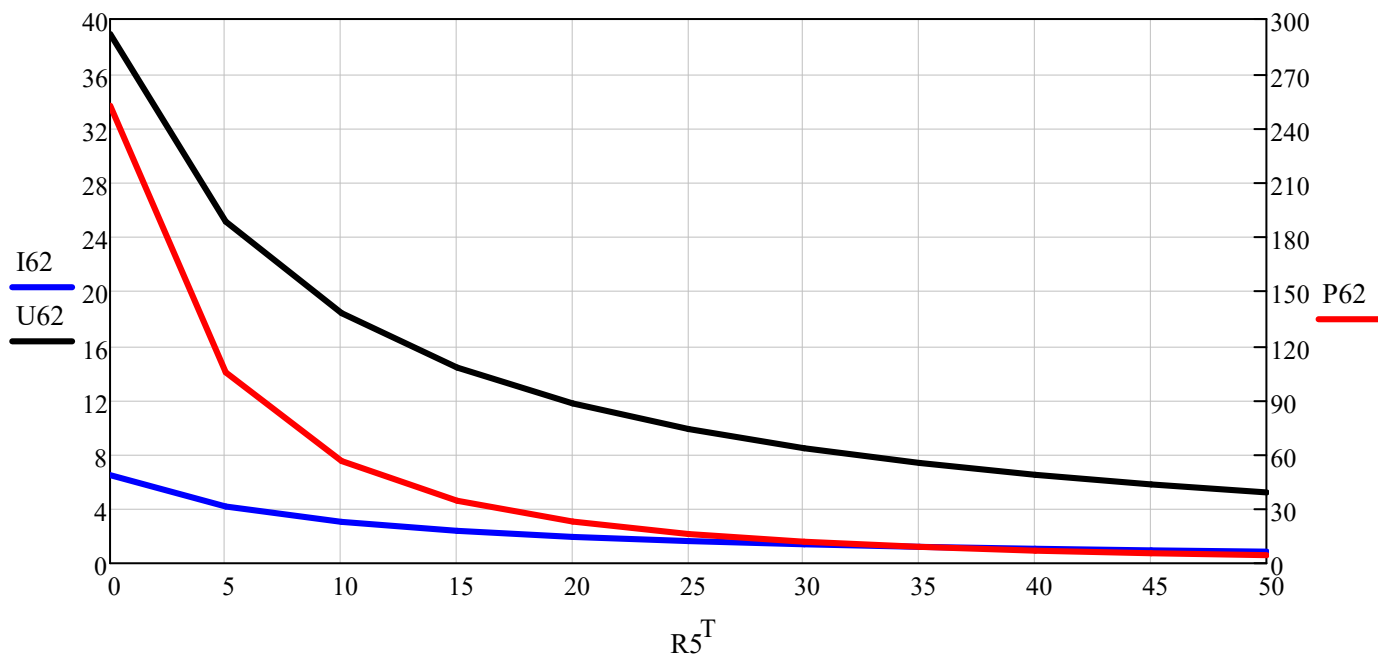


Рис.2.1.4. Зависимость тока I_6 , напряжения U_6 и мощности P_6 от R_5

Запись результата исследования в формате Excel (Raschet_2.xls) :

Raschet_2.xls

D2

Проверка адекватности математической модели

ПРИМЕЧАНИЕ: Проверка выполняется корректно, только в случае "активной нагрузки" ($L=0$, $C=0$), для которого был выполнен эксперимент.

Математическую модель объекта исследования можно считать адекватной объекту в том случае, если результаты математического моделирования объекта и результаты эксперимента на самом объекте равны (сходны) в смысле некоторого критерия адекватности (численная характеристика сходства).

Ниже представлен расчет трех различных критериев адекватности (см. справку и расчет).

СПРАВКА. В данном случае для оценки адекватности кроме расчета относительной погрешности (1) и коэффициента корреляции (2) используется выборочная статистическая оценка (3) квадрата смешанной корреляции (R^2), которая отражает взаимосвязь вектора расчетных и вектора экспериментальных значений переменной от полной их независимости ($0 > R^2 = 0$) до полного тождества ($R^2 = 1$):

Чтение результата эксперимента в MultiSim (Experiment.xls) :

Dr :=

Experiment.xls

E2	i6	U6	P6
0	3.27	20.026	65.494
40	3.646	22.18	80.862
80	3.933	24.007	94.409
120	4.056	24.235	98.298
160	4.401	26.13	114.997
200	4.763	28.855	137.446
240	5.213	31.633	164.908
280	5.439	32.203	175.163
320	5.649	34.83	196.745
360	6.075	35.709	216.935
400	6.357	38.638	245.643

Dr =

3.27
3.646
3.933
4.056
4.401
4.763
5.213
5.439
5.649
6.075
6.357

I61e := Dr^{<2>} =

Вектора экспериментальных и расчетных значений тока I₆:

$$I61e^T = (3.27 \ 3.646 \ 3.933 \ 4.056 \ 4.401 \ 4.763 \ 5.213 \ 5.439 \ 5.649 \ 6.075 \ 6.357)$$

Эксперимент

$$I61^T = (3.264 \ 3.572 \ 3.881 \ 4.189 \ 4.497 \ 4.805 \ 5.113 \ 5.422 \ 5.73 \ 6.038 \ 6.346)$$

Расчет

Вектор отклонений расчетных значений от экспериментальных

$$\Delta := I61e - I61$$

$$\Delta^T = (6.25 \times 10^{-3} \ 0.073 \ 0.052 \ -0.133 \ -0.096 \ -0.042 \ 0.1 \ 0.018 \ -0.081 \ 0.037 \ 0.011)$$

1. Вектор относительных отклонений в %

$$\delta := \frac{|\Delta| \cdot 100}{|I61e|}$$

Максимальное отклонение в % = max(δ) = 3.275

$$\delta^T = (0.191 \ 2.011 \ 1.322 \ 3.275 \ 2.183 \ 0.88 \ 1.911 \ 0.324 \ 1.436 \ 0.608 \ 0.176)$$

2. Коэффициент корреляции (R) векторов расчетного и экспериментального
можно использовать для оценки адекватности математической модели :

corr(X1,X2) - это стандартная статистическая функция MultiSim

$$Rk := \text{corr}(I61, I61e) = 0.997$$

3. Квадрат смешанной корреляции (R²) векторов расчетного и экспериментального
также можно использовать для оценки адекватности математической модели :

! Для открытия или закрытия выделенной области дважды щелкните левой мышкой на линии или знаке !



Расчет квадрата смешанной корреляции (R²) векторов

$$Ra := R2(I61e, I61)$$

$$Ra = 0.995$$

! Математическая модель адекватна объекту !