Численное интегрирование функций

К методам приближенного и численного интегрирования функций приходится прибегать в случаях, когда

1. подынтегральная функция f(x) задана таблично на участке [a,b];
2. подынтегральная функция f(x) задана аналитически, но ее первообразная не выражается через элементарные функции;
3. подынтегральная функция f(x) задана аналитически, имеет первообразную, но ее определение слишком сложно.

Методы приближенного интегрирования используют разложение подынтегральных функций в ряды Тейлора (Маклорена) и дальнейшего почленного интегрирования членов ряда.

Определение. Функция $F(x)$ называется **первообразной** для функции $f(x)$ на заданном промежутке, если для всех x из этого промежутка выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

Нахождение первообразной – интегрирование – операция, обратная операции дифференцирования.

К недостаткам методов приближенного интегрирования относится требование дифференцируемости подынтегральных функций до порядка, который требуется при разложении функций в ряд Тейлора. От этого недостатка свободны **методы численного интегрирования**, в которых подынтегральная функция удовлетворяет только условию непрерывности (для существования определённого интеграла).

В численных методах интегрирования не используется нахождение первообразной. Основу алгоритма численных методов интегрирования составляет геометрический смысл определенного интеграла. Интеграл численно равен площади S криволинейной фигуры, расположенной под подынтегральной кривой f(x) на участке [a,b] (рис.10.1).

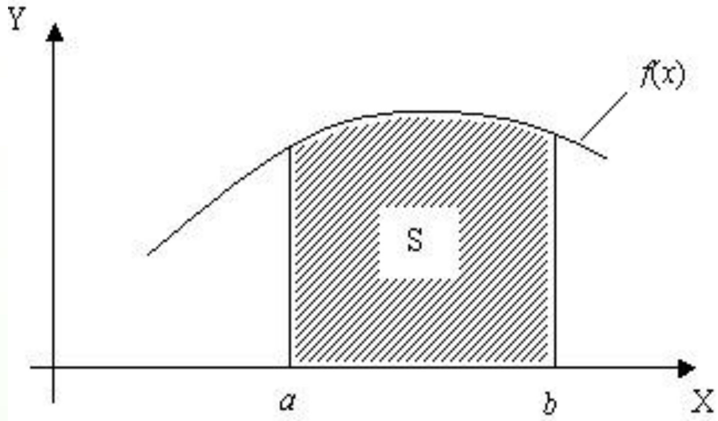


Рис. 10.1. Геометрический смысл определенного интеграла

Суть всех численных методов интегрирования состоит в приближенном вычислении указанной площади. Поэтому все численные методы являются приближенными.

При вычислении интеграла подынтегральная функция f(x) аппроксимируется интерполяционным многочленом

$\phi(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i(x)$, то есть $I = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b \varphi(x)dx + R$, где $R = \int_a^b r(x)dx$ - **априорная погрешность метода** или **остаточный член** на интервале интегрирования, а *r(x)* – априорная погрешность метода на отдельном шаге интегрирования.

На практике, чтобы не иметь дело с многочленами высоких степеней, весь участок [a,b] делят на части и интерполяционные многочлены строят для каждой части деления.

<u>Обзор методов интегрирования</u>

Методы вычисления однократных интегралов называются **квадратурными**, а формулы для приближенного вычисления интегралов - квадратурными формулами или квадратурными суммами. (для кратных интегралов – **кубатурными**).

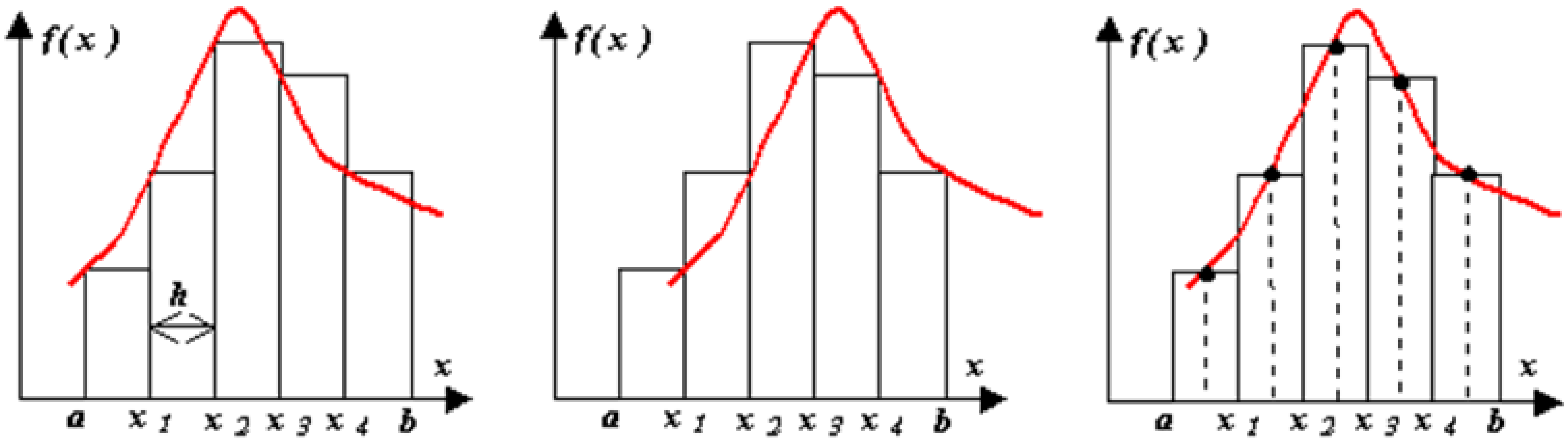
1. **Методы Ньютона-Котеса.** Здесь $\varphi(x)$ – полином различных степеней. Сюда относятся метод прямоугольников, трапеций, Симпсона.

2. **Методы статистических испытаний (методы Монте-Карло).** Здесь узлы сетки для квадратурного или кубатурного интегрирования выбираются с помощью датчика случайных чисел, ответ носит вероятностный характер. В основном применяются для вычисления кратных интегралов.
3. **Сплайновые методы.** Здесь *φ(x)* – кусочный полином с условиями связи между отдельными полиномами посредством системы коэффициентов.
4. **Методы наивысшей алгебраической точности.** Обеспечивают оптимальную расстановку узлов сетки интегрирования и выбор весовых коэффициентов *ρ(x)* в задаче $\int_a^b \varphi(x)\rho(x)dx$

Сюда относятся метод Гаусса-Кристоффеля (вычисление несобственных интегралов) и метод Маркова.

Метод прямоугольников

Различают метод левых, правых и средних прямоугольников. Суть метода ясна из рисунка. На каждом шаге интегрирования функция аппроксимируется полиномом **нулевой** степени – отрезком, параллельным оси абсцисс.



Левые прямоугольники   Правые прямоугольники   Средние прямоугольники

Выведем формулу метода прямоугольников из анализа разложения функции *f(x)* в ряд Тейлора вблизи некоторой точки $x = x_i$.

$$f(x)\Big|_{x=x_i} = f(x_i) + (x - x_i)f'(x_i) + \frac{(x - x_i)^2}{2!}f''(x_i) + \ldots$$

Рассмотрим диапазон интегрирования от x_i до x_i+h, где h – шаг интегрирования.

Вычислим $\int_{x_i}^{x_i+h} f(x)dx = x \cdot f(x_i)\Big|_{x_i}^{x_i+h} + \frac{(x-x_i)^2}{2} f'(x_i)\Big|_{x_i}^{x_i+h} + \frac{(x-x_i)^3}{3 \cdot 2!} f''(x_i)\Big|_{x_i}^{x_i+h} + \ldots =$

$= f(x_i)h + \frac{h^2}{2} f'(x_i) + O(h^3) = \boxed{f(x_i)h + r_i}$. Получили формулу *правых (или левых) прямоугольников* и априорную оценку погрешности r на отдельном шаге интегрирования. Основной критерий, по которому судят о точности алгоритма – степень при величине шага в формуле априорной оценки погрешности.

В случае равного шага h на всем диапазоне интегрирования общая формула имеет вид

$$\int_a^b f(x)dx = h\sum_{i=1}^{n} f(x_i) + \sum_{i=1}^{n} r_i$$

Здесь n – число разбиений интервала интегрирования,

$R = \sum_{i=1}^{n} r_i = \frac{h^2}{2}\sum_{i=1}^{n} f'(x_i) = \frac{h^2}{2}\int_a^b f'(x)dx$. Для справедливости существования этой оценки необходимо существование непрерывной $f'(x)$.

На всём отрезке $[a,b]$ погрешность r_i необходимо

просуммировать n раз, $n = (b\text{-}a/h)$, получим: $R = \frac{nh^2}{2} f'(x_i)$

$$R = \frac{(b-a)h}{2} f'(x_i) \quad , \qquad x_i \epsilon (a,b) \qquad (1)$$

Поскольку местоположение точки x_i на интервале $x \in [a, b]$ неизвестно, то на основе погрешности **(1)** можно выписать верхнюю оценку абсолютной погрешности метода прямоугольников и при заданной точности ε метода выписать неравенства

$$|R_{\text{пр}}| \leqslant \frac{(b-a)h}{2} M_1 \leqslant \varepsilon, \quad M_1 = \max_{x \in [a,b]} \left| f'(x) \right|.$$

Последнее неравенство можно использовать для верхней оценки шага h численного интегрирования по методу прямоугольников:

$$h \leqslant \frac{2\varepsilon}{(b-a)\, M_1}, \quad M_1 = \max_{x \in [a,b]} \left| f'(x) \right|.$$

Для табличной функции

x_i	x_0	x_1	$\dots$	x_n
y_i	y_0	y_1	$\dots$	y_n

формула прямоугольников на отрезке *x є [a,b]*

имеет вид

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} y_{i-1}h_i. \qquad (2)$$

Ее погрешность определяется выражением (1).

Таким образом, определяющими формулами метода прямоугольников являются формула (2) численного интегрирования и формула (1) погрешности.

Из (1) видно, что на каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ формула прямоугольников имеет погрешность, пропорциональную h^2, а на всем отрезке $x \in [a, b]$ — шагу численного интегрирования h. В соответствии с этим *метод прямоугольников является методом первого порядка точности (главный член погрешности пропорционален шагу в первой степени).*

Метод средних прямоугольников

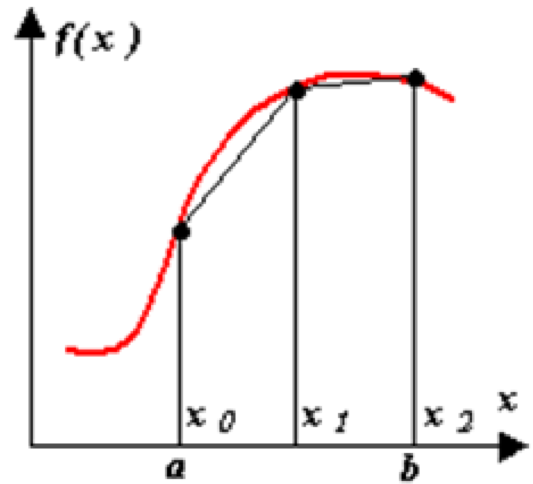
Здесь на каждом интервале значение функции считается в точке $\bar{x} = x_i + \frac{h}{2}$, то есть $\int_{x_i}^{x_i+h} f(x)dx = hf(\bar{x}) + r_i$. Разложение функции в ряд Тейлора показывает, что в случае средних прямоугольников точность метода существенно выше:

$$r = \frac{h^3}{24} f''(\bar{x}), R = \frac{h^2}{24} \int_a^b f''(x)dx$$

.

Метод трапеций

Аппроксимация в этом методе осуществляется полиномом **первой** степени. Суть метода ясна из рисунка.



Метод трапеций

На единичном интервале

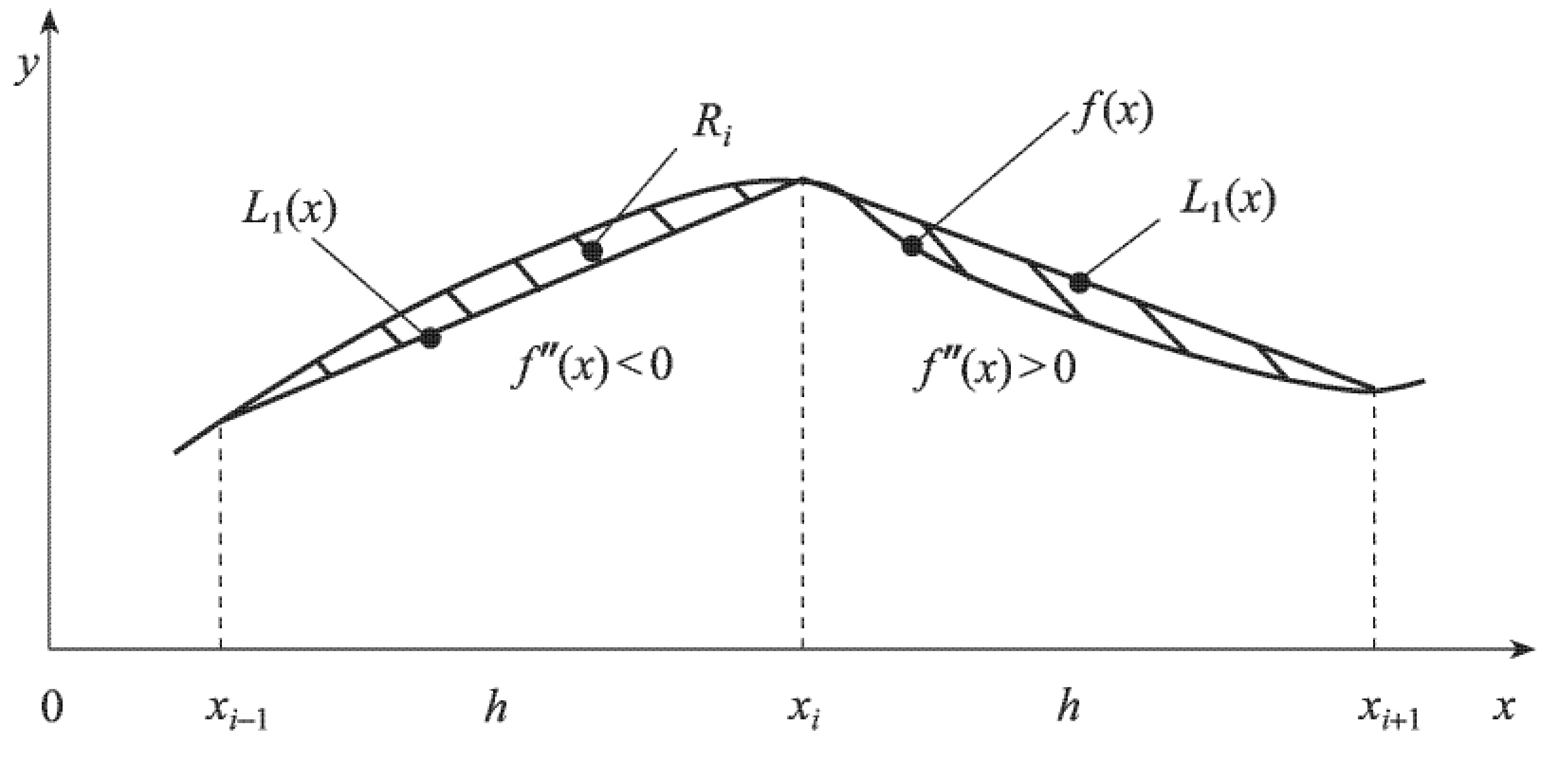
$$\int_{x_i}^{x_i+h} f(x)dx = \frac{h}{2}\big(f(x_i)+f(x_i+h)\big)+r_i$$

.

В случае равномерной сетки ($h = \mathrm{const}$)

$$\int_a^b f(x)dx = h\left(\frac{1}{2}f(x_0)+\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)+\frac{1}{2}f(x_n)\right)+R$$

При этом $r_i = -\dfrac{h^3}{12}f''(x_i)$, а $R = -\dfrac{h^2}{12}\int_a^b f''(x)dx$.



Из рис. видно, что если $f''(x) < 0$, то $R_i > 0$

если же $f''(x) > 0$, то $R_i < 0$.

Для всего отрезка [a,b] необходимо сложить выражение для одного интервала n раз:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}\left(y_0 + y_n + 2\sum_{i=1}^{n-1} y_i\right). \qquad (3)$$

Выражение (3) *называют формулой трапеций численного интегрирования для всего отрезка* $[a,\, b]$.

На всем отрезке $[a,\, b]$ погрешность r_i необходимо увеличить в n раз:

$$R_{\text{тр}} = n\, r_i = -\frac{nh^3}{12} f''(x_i) = -\frac{(nh)h^2}{12} f''(x_i) =$$

$$= -\frac{b-a}{12} h^2 f''(x_i), \quad x \in (a,b). \qquad (4)$$

Таким образом, метод трапеций — *метод второго порядка точности относительно шага* h (*главный член погрешности пропорционален шагу в квадрате*).

Поскольку положение точки x_i на интервале (a, b) неизвестно, то, задавая точность ε численного интегрирования, можно записать следующие неравенства, используемые для определения шага h численного интегрирования:

$$|R_{\text{тр}}| \leqslant \max_{x \in [a,b]} \left| f''(x) \right| \ \frac{b-a}{12} h^2 \leqslant \varepsilon,$$

откуда

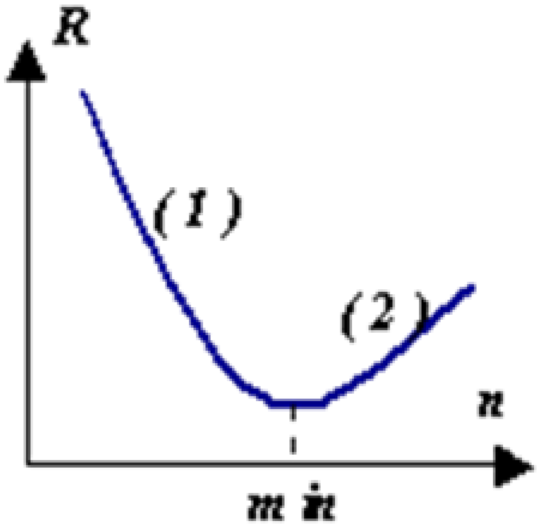
$$h \leqslant \sqrt{\frac{12 \cdot \varepsilon}{(b-a) M_2}}, \quad M_2 = \max_{x \in [a,b]} \left| f''(x) \right|. \qquad (5)$$

Если точность ε не задана, то выбирая шаг h численного интегрирования, можно по формуле (4) оценить погрешность $R_{\text{тр}}$ формулы трапеций.

Особенности поведения погрешности

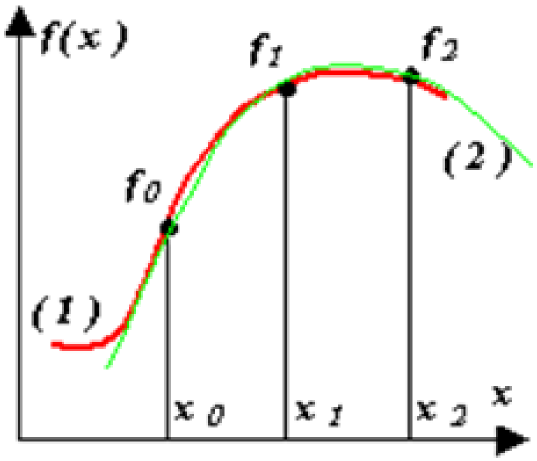
Казалось бы, зачем анализировать разные методы интегрирования, если мы можем достичь высокой точности, просто уменьшая величину шага интегрирования. Однако, рассмотрим график поведения апостериорной погрешности R результатов численного расчета в зависимости от числа n разбиений интервала (то есть при $n \to \infty$ шаг $h \to 0$.

На участке (1) погрешность уменьшается в связи с уменьшением шага h. Но на участке (2) начинает доминировать вычислительная погрешность, накапливающаяся в результате многочисленных арифметических действий. Таким образом, для каждого метода существует своя R_{min}, которая зависит от многих факторов, но прежде всего от априорного значения погрешности метода R.



<u>Метод Симпсона</u>

Подынтегральная функция *f(x)* заменяется интерполяционным полиномом **второй** степени *P(x)* – параболой, проходящей через три узла, например, как показано на рисунке ((1) – функция, (2) – полином).



Метод Симпсона

Рассмотрим два шага интегрирования (h = const = $x_{i+1} - x_i$), то есть три узла x_0, x_1, x_2, через которые проведем параболу, воспользовавшись уравнением Ньютона:

$$P(x) = f_0 + \frac{x - x_0}{h}(f_1 - f_0) + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{2h^2}(f_0 - 2f_1 + f_2).$$

Пусть $z = x - x_0$,
тогда

$$P(z) = f_0 + \frac{z}{h}(f_1 - f_0) + \frac{z(z - h)}{2h^2}(f_0 - 2f_1 + f_2) =$$

$$= f_0 + \frac{z}{2h}(-3f_0 + 4f_1 - f_2) + \frac{z^2}{2h^2}(f_0 - 2f_1 + f_2)$$

Теперь, воспользовавшись полученным соотношением, сосчитаем интеграл по данному интервалу:

$$\int_{x_0}^{x_2} P(x)dx = \int_0^{2h} P(z)dz = 2hf_0 + \frac{(2h)^2}{4h}(-3f_0 + 4f_1 - f_2) + \frac{(2h)^3}{6h^2}(f_0 - 2f_1 + f_2) =$$

$$= 2hf_0 + h(-3f_0 + 4f_1 - f_2) + \frac{4h}{3}(f_0 - 2f_1 + f_2) = \frac{h}{3}(6f_0 - 9f_0 + 12f_1 - 3f_2 + 4f_0 - 8f_1 + 4f_2)$$

.

В итоге

$$\boxed{\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2) + r} \qquad (6)$$

На всем отрезке $[a, b]$ выражение (6) необходимо сложить m раз, поскольку имеется m пар отрезков длиной h, получим *формулу Симпсона численного интегрирования определенного интеграла*

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left(y_0 + y_n + 4\sum_{i=1}^{m} y_{2i-1} + 2\sum_{i=1}^{m-1} y_{2i}\right). \tag{7}$$

Погрешность формулы Симпсона на одной паре шагов записывается следующим образом:

$$r_i = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x)dx - \frac{h}{3}(y_{i-1} + 4y_i + y_{i+1}) =$$

$$= -\frac{h^5}{90} f^{IV}(x_i) \qquad x \in (x_{i-1}, x_{i+1}).$$

Для всего отрезка $[a,b]$ эту погрешность необходимо умножить на m пар отрезков:

$$R_c = m\, r_i = -\frac{mh^5}{90} f^{IV}(x) = -\frac{2mh^5}{180} f^{IV}(x) =$$

$$= -\frac{nh \cdot h^4}{180} f^{IV}(x) = -\frac{(b-a)h^4}{180} f^{IV}(x) \quad x \in (a,b), \qquad (8)$$

т. е. в формуле Симпсона на всем отрезке $[a,b]$ *погрешность пропорциональна четвертой степени шага, и, следовательно, метод Симпсона является методом четвертого порядка точности (т. е. главный член погрешности пропорционален четвертой степени шага* h*).*

Поскольку положение точки на отрезке $[a, b]$ неизвестно, то в соответствии с (8) можно записать верхнюю оценку погрешности и при заданной точности ε получить

$$|R_c| \leqslant \frac{(b-a)h^4}{180} M_4 \leqslant \varepsilon, \quad M_4 = \max_{x \in [a,b]} \left| f^{IV}(x) \right|,$$

откуда

$$h \leqslant \sqrt[4]{\frac{180\varepsilon}{(b-a)M_4}}, \quad M_4 = \max_{x \in [a,b]} \left| f^{IV}(x) \right|. \qquad (9)$$

Таким образом, определяющими формулами метода Симпсона являются выражения (7), (8), (9), в соответствии с которыми по заданной точности ε из ур.(9) находится шаг h численного интегрирования, с его помощью составляется сеточная функция $y_i = f(x_i)$, $i = \overline{0, n}$, $n = 2m$, а затем приближенно вычисляется интеграл по формуле (7). Если точность ε неизвестна, то, задаваясь шагом h, можно по формуле (8) вычислить погрешность численного интегрирования.

Процедура Рунге оценки погрешности и уточнения формул численного интегрирования. Процедура Рунге позволяет оценить погрешность и повысить на единицу порядок метода путем многократного (в простейшем случае двукратного) просчета с различными шагами.

Пусть используется какой-либо метод численного интегрирования с шагами h и $h/2$. И пусть порядок выбранного метода равен p, тогда

$$I = I_h + \psi h^p + O(h^{p+1}), \tag{10}$$

$$I = I_{h/2} + \psi \left(\frac{h}{2}\right)^p + O(h^{p+1}), \tag{11}$$

где I — точное значение интеграла; I_h, $I_{h/2}$ — вычисленные значения интеграла с шагом h и $h/2$ соответственно; вторые слагаемые справа — главные члены погрешности метода численного интегрирования порядка p. Для их вычисления вычтем из выражения (11) выражение (10) , получим

$$\left(I_{h/2}-I_h\right)+\psi\left(\frac{h}{2}\right)^p\left[1-2^p\right]+O\left(h^{p+1}\right)=0,$$

$$\psi\left(\frac{h}{2}\right)^p=\frac{I_{h/2}-I_h}{2^p-1} \qquad (12)$$

Выражение (12) позволяет провести апостериорную оценку погрешности вычисленного значения определенного интеграла.

Подставим (12) в (11), получим формулу численного интегрирования уже порядка $p+1$:

$$I=I_{h/2}+\frac{I_{h/2}-I_h}{2^p-1}+O\left(h^{p+1}\right). \qquad (13)$$

Таким образом, формула (13) — простейшая процедура Рунге уточнения на один порядок формулы численного интегрирования.

Замечание. Если для подынтегральной функции $y=f(x)$ построена сеточная функция $y_i=f(x_i)$ с переменным шагом h_i, то погрешность численного интегрирования определяется как интеграл от погрешности интерполяционного многочлена.

Использование полиномов высоких степеней в квадратурных формулах Ньютона-Котеса сопряжено со значительными вычислительными трудностями. Поэтому на практике поступают так: разбивают промежуток интегрирования на достаточно большое число маленьких отрезков и к каждому из них применяют квадратурную формулу Ньютона-Котеса с небольшим числом ординат. В результате получаются не сложные формулы и расчёты по ним дают достаточно высокую точность. Известны также квадратурные формулы Чебышёва и Гаусса.

Ошибка в выборе величины шага интегрирования либо не обеспечит нужной точности, либо приведёт к необоснованным затратам машинного времени. Можно использовать такую стратегию: сначала задаются довольно большим шагом интегрирования, затем последовательно его дробят до тех пор, пока различие между двумя последующими значениями интегралов, рассчитанными при различном шаге, не станет незначительным.

Пример Методом трапеций с точностью $\varepsilon = 10^{-2}$ и Симпсона с точностью $\varepsilon_1 = 10^{-4}$ вычислить определенный интеграл (вычисляемый точно):

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln|1+x|\,\Big|_0^1 = \ln 2 = 0{,}69315.$$

Решение. 1) *Метод трапеций.* Исходя из заданной точности $\varepsilon = 10^{-2}$ вычислим шаг численного интегрирования, для чего используется формула (5):

$$h \leqslant \sqrt{\frac{12\varepsilon}{(b-a)\,M_2}}, \quad M_2 = \max_{x\in[0;\,1]} \left|f''(x)\right| = \max_{x\in[0;\,1]} \left|\frac{2}{(1+x)^3}\right| = 2;$$

$$h \leqslant \sqrt{\frac{12\cdot 0{,}01}{(1-0)\cdot 2}} = \sqrt{6}\cdot 0{,}1 = 0{,}2449.$$

Необходимо выбрать такой шаг, который удовлетворяет неравенству $h \leqslant 0{,}2449$, и чтобы на отрезке интегрирования $x \in [0;\ 1]$ он укладывался целое число раз. Принимаем шаг $h = 0{,}2$. Он удовлетворяет обоим этим требованиям.

Для подынтегральной функции $f(x) = (1+x)^{-1}$ с независимой переменной x_i, изменяющейся в соответствии с равенством $x_i = x_0 + ih = 0 + i \cdot 0{,}2$, $i = \overline{0,\ 5}$, составляем сеточную функцию с точностью до второго знака после запятой:

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
y_i	1,0	0,83	0,71	0,63	0,56	0,5

Используется формула трапеций (3) численного интегрирования ($n = 5$):

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x} \approx \frac{h}{2}\left(y_0 + y_n + 2\sum_{i=1}^{n-1} y_i\right) =$$

$$= \frac{0{,}2}{2}\left[1{,}0 + 0{,}5 + 2\,(0{,}83 + 0{,}71 + 0{,}63 + 0{,}56)\right] = 0{,}696.$$

Сравнивая это значение с точным, видим, что абсолютная погрешность не превышает заданной точности ε: $|0{,}69315 - 0{,}696| < 0{,}01$.

Таким образом, за приближенное значение определенного интеграла по методу трапеций с точностью$\varepsilon = 0{,}01$ принимается значение

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x} \approx 0{,}696.$$

2) *Метод Симпсона.* Исходя из заданной точности $\varepsilon_1 = 10^{-4}$ вычисляется шаг численного интегрирования для метода Симпсона по формуле (9):

$$h \leqslant \sqrt[4]{\frac{180\varepsilon}{(b-a)\,M_4}}, \quad M_4 = \max_{x\in[0;\,1]} \left|f^{IV}(x)\right| = \max_{x\in[0;\,1]} \left|\frac{24}{(1+x)^5}\right| = 24;$$

$$h \leqslant \sqrt[4]{\frac{180\cdot 10^{-4}}{(1-0)\cdot 24}} = 10^{-1}\sqrt[4]{7{,}5} = 0{,}165.$$

Необходимо выбрать такой шаг, чтобы он удовлетворял неравенству $h \leqslant 0{,}165$, и чтобы на отрезке интегрирования $x \in [0;\,1]$ он укладывался *четное число* раз. Принимаем $h = 0{,}1$. С этим шагом для подынтегральной функции $f(x) = (1+x)^{-1}$ формируется сеточная функция с независимой переменной x_i, изменяющейся по закону $x_i = x_0 + ih = 0 + i\cdot 0{,}1$, $i = \overline{0,\,10}$, $n = 10$, $m = 5$, причем значения сеточной функции вычисляются с точностью до четвертого знака после запятой:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
y_i	1,0	0,9091	0,8333	0,7692	0,7143	0,6667	0,625	0,5882	0,5556	0,5263	0,5

Используется формула Симпсона (7) численного интегрирования ($n = 10$, $m = 5$)

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \frac{h}{3}\left(y_0 + y_n + 4\sum_{i=1}^{m} y_{2i-1} + 2\sum_{i=1}^{m-1} y_{2i}\right) = \frac{0,1}{3}\cdot[1,0+$$

$$+0,5 + 4\,(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9) + 2\,(y_2 + y_4 + y_6 + y_8)] =$$

$$= \frac{0,1}{3}\,[1,5 + 4\,(0,9091 + 0,7692 + 0,6667 + 0,5882 + 0,5263) +$$

$$+2\,(0,8333 + 0,7143 + 0,625 + 0,5556)] =$$

$$= \frac{0,1}{3}\,(1,5 + 4\cdot 3,4595 + 2\cdot 2,7281) = \frac{0,1}{3}20,7942 = 0,69314.$$

Сравнение этого значения с точным значением интеграла показывает, что абсолютная погрешность не превышает заданной точности ε_1:

$$|0{,}69315 - 0{,}69314| < 0{,}0001.$$

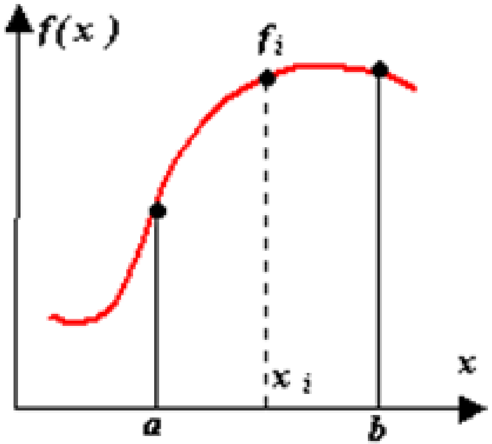
Таким образом, за приближенное значение определенного интеграла по методу Симпсона с точностью $\varepsilon_1 = 0{,}0001$ принимается значение

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x} \approx 0{,}6931.$$

З а м е ч а н и е. Ясно, что для большинства интегралов от непрерывных функций первообразная не вычисляется (однако она существует) и вычисленное приближенное значение сравнивать не с чем, однако шаг численного интегрирования, вычисленный по заданной точности, гарантирует эту точность вычисления.

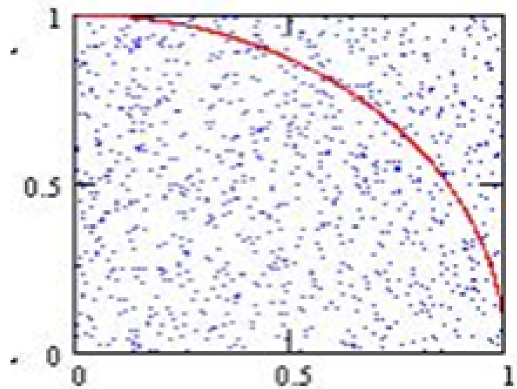
Методы Монте-Карло

1) одномерная *случайная величина* – статистический вариант метода прямоугольников.
В качестве текущего узла x_i берется случайное число, равномерно распределенное на интервале интегрирования [*a*, *b*]. Проведя *N* вычислений, значение интеграла определим по следующей формуле: $\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{N}\sum_{i=1}^{N} f(x_i) + R$. Для *R* можно утверждать хотя бы $\sim \frac{1}{\sqrt{N}}$.



2) двумерная случайная величина– оценка площадей.

Рассматриваются две равномерно распределенных случайных величины x_i и y_i, которые можно рассматривать как координаты точки в двумерном пространстве. За приближенное значение интеграла принимается количества точек *S*, попавших под кривую $y = f(x)$, к общему числу испытаний *N*, т.е. $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{S}{N}$.



И первый, и второй случаи легко обобщаются на кратные интегралы.

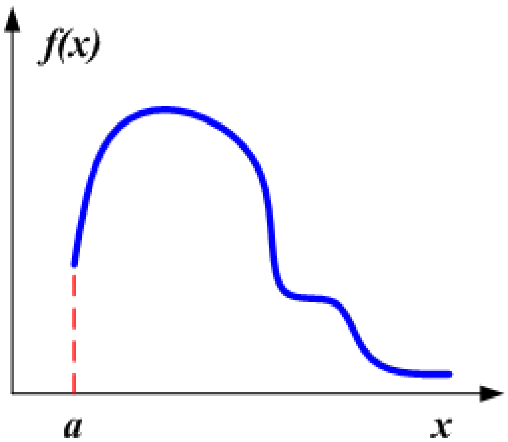
Приближенное вычисление несобственных интегралов

Несобственными называются интегралы, у которых один или оба предела интегрирования бесконечны:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\int_a^b f(x)dx$$

Если пределы в правых частях равенств существуют, то интегралы называются ***сходящимися***, а в противном случае – ***расходящимися***.

Геометрически для неотрицательной подынтегральной функции несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ представляет собой площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком подынтегральной функции, осью абсцисс и прямой $x=a$.



В основе приближенного вычисления несобственных интегралов лежит их представление в виде:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{b} f(x)dx + \int_{b}^{+\infty} f(x)dx \qquad (14)$$

При этом в случае сходящихся интегралов решение задачи заключается в следующем:

а) нахождение пределов интегрирования $[a,b]$, при которых значения первого и третьего интегралов несущественны;

б) приближенный расчёт второго интеграла в найденных пределах $[a,b]$ любым из рассмотренных выше методов.

Практически алгоритм определения несобственного интеграла включает итерационную процедуру расчётов. Сначала задаются одни пределы интегрирования, и вычисляется значение среднего интеграла , затем более широкие пределы $[a,b]$ и снова рассчитывается его значение. Так происходит до тех пор, пока два последовательных значения интеграла $\int_{a}^{b} f(x)dx$ при различных пределах $[a,b]$ не будут несущественно отличаться друг от друга.

Численное интегрирование в MATLAB

При вычислениях интегралов численными методами подынтегральную функцию целесообразно представлять в наиболее простом виде. Это может ускорить вычисления. Упрощение подынтегральной функции можно выполнить, воспользовавшись функциями `simplify()` и `factor()`. Имеют место случаи, когда система до упрощения не может вычислить неопределенный интеграл и легко его определяет после упрощения.

Метод трапеций реализован в MATLAB несколькими функциями, приведенными ниже.

Функция

```
cumtrapz(y)
```

осуществляет вычисление интеграла в случае, когда значения функции `y` заданы в виде вектора или матрицы неограниченных размеров. Откликом этой функции является *n* интегралов, где *n* — число элементов вектора или число элементов в каждом столбце матрицы.

Интегралы вычисляются по методу трапеций, когда значения функции y состоят из одного элемента вектора (первого), двух элементов вектора (первого и второго) и т. д. до последнего интеграла, когда число значений y равно числу элементов вектора или элементов столбцов матрицы (количество элементов в каждом столбце одинаково).

Такое вычисление интеграла называется *интегрированием с накоплением*. Программа вычисляет интеграл с шагом $h=1$. Если же ординаты получены с иным шагом, то результат вычислений интеграла нужно умножить на h.

Пример Пусть функция $y(x)$ имеет значения, представленные в виде следующего вектора: `y=[1,2,3,4,5,6,7,8,9,10]`. Необходимо вычислить

$$\int_a^b y(x)dx .$$

При этом $a=1$, $b=1, 2, 3, ..., 10$.

Функция вычисления интеграла методом трапеций будет иметь вид:

```
>> y=[1,2,3,4,5,6,7,8,9,10];
>> cumtrapz (y)
ans =
     0  1.5000  4.0000   7.5000   12.0000   17.5000   24.0000
     31.5000   40.0000  49.5000
```

Функция $y(x)$ является матрицей.

```
>> y=[1,2,3;2,3,4;3,4,5;4,5,6];
>> cumtrapz(y)
ans =
     0        0         0
     1.5      2.5       3.5
     4        6         8
     7.5     10.5      13.5
```

В каждом столбце исходной матрицы получены значения интеграла с накоплением.

Функция *cumtrapz(x,y)*

Эта функция выполняет интегрирование с накоплением функции $y(x)$ также методом трапеций. При этом x и y могут быть либо векторами одной и той же размерности, либо x — это вектор-столбец, а y — матрица.

Откликом является значение интеграла с диапазоном значений x.

Пример Функция $y(x)$ задана в виде следующих векторов:

`x=[1,3,7,9,10], y=[1,3,5,7,9].`

Необходимо вычислить методом трапеций значение интеграла с накоплением.

Решение:

```
>> x=[1,3,7,9,10];
>> y=[1,3,5,7,9];
>> cumtrapz(x,y)
ans =
      0     4    20    32    40
```

Как видно из примера, функция `cumtrapz(x,y)` вычисляет интеграл с накоплением при переменном шаге h.

trapz(Y) и **trapz(X,Y)** - вычисление интеграла методом трапеций.

```
>> Y = [1 4 9 16 25];
>> Q = trapz(Y)
   Q = 42
>> X = 0:pi/100:pi;
>> Y = sin(X);
>> Q = trapz(X,Y)
   Q = 1.9998
```

Вычисление двойных интегралов:

$$I = \int_{-5}^{5}\int_{-3}^{3}(x^2 + y^2)dx\,dy$$

```
>> x = -3:0.1:3;
>> y = -5:0.1:5;
>>[X,Y] = meshgrid(x,y);
>>F = X.^2 + Y.^2;
>> I = trapz(y,trapz(x,F,2))
   I = 680.2000
```

integral(fun,xmin,xmax) - вычисление интеграла функции fun(x) от xmin до xmax.

Пример. Вычислить интеграл функции $f(x) = e - x^2(\ln x)^2$, от 0 до Inf.

```
>> fun = @(x) exp(-x.^2).*log(x).^2;
>> q = integral(fun,0,Inf)
   q = 1.9475
```

Пример. Вычислить интеграл функции $f(x) = 1/(x^3 - 2x - c)$ с параметром *c* на интервале от 0 до 2 и c=5.

```
>> fun = @(x,c) 1./(x.^3-2*x-c);
>> q = -0.4605
```

Вычисление двойного интеграла **integral2(fun,xmin,xmax,ymin,ymax)** функции z = fun(x,y) на интервалах xmin ≤ x ≤ xmax и ymin(x) ≤ y ≤ ymax(x).

Пример. Вычислить интеграл функции $f(x,y) = \frac{1}{(\sqrt{x+y})(1+x+y)^2}$. при $0 \le x \le 1$ and $0 \le y \le 1 - x$.

```
>> fun = @(x,y) 1./( sqrt(x + y) .* (1 + x + y).^2 )
>> ymax = @(x) 1 - x; q = integral2(fun,0,1,0,ymax)
   q = 0.2854
```

q = quad(fun,a,b) - вычисление интеграла функции fun(x) методом Симпсона, где $a \le x \le b$.

Пример. Вычислить интеграл функции $\int_0^2 \frac{1}{x^3 - 2x - 5} dx,$

```
>> F = @(x)1./(x.^3-2*x-5);
>> Q =quad(F,0,2)
   Q =  -0.4605
```

q = quad2d(fun,a,b,c,d) - вычисление интеграла функции двух переменных fun(x,y), где $a \le x \le b$ и $c(x) \le y \le d(x)$.

Пример. Вычислить интеграл функции ysin(x)+xcos(y), $-\pi \le x \le 2\pi$ и $0 \le y \le \pi$.

```
>> fun = @(x,y) y.*sin(x)+x.*cos(y);
>> Q = quad2d(fun,pi,2*pi,0,pi)
   Q = -9.8696
```

Сравните полученный результат с точным значением интеграла: -pi^2

```
  ans = -9.8696
```

Символьные вычисления *неопределенных интегралов* в MATLAB осуществляется при помощи функции **int(fun, var),** где fun – символьное выражение, представляющее собой подынтегральную функцию, а var – переменная интегрирования.

Пример. Вычисление неопределенного интеграла

```
>> syms x %Определение символьной переменной
>> f=sym('exp(x) -x'); %Определение символьной функции
>> int(f,x) %Вычисление неопределенного интеграла
```

Результатом будет: ans = exp(x)-1/2*x^2

Для того чтобы вычислить *определенный интеграл*, можно использовать функцию **int(fun, var, [a, b]),** где fun –подынтегральная функция, а var – переменная интегрирования, a, b – пределы интегрирования.

```
>> syms x
>> f = cos(x)/sqrt(1 + x^2);
>> Fint = int(f,x,[0 10]) или
>> Fvpa = vpa(Fint)
   Fvpa = 0.37570628299079723478493405557162
>> Fvpaint = vpaintegral(f,x,[0 10])
   Fvpaint = 0.375706
```

Задания.

1. Вычислить интеграл $\int\limits_{0,1}^{10}\left(xe^{-x}+\ln x+1\right)dx$.

   а) аналитически

   б) методом трапеций с точностью $\varepsilon=10^{-2}$

   в) методом Симпсона с точностью $\varepsilon=10^{-4}$

   Для метода трапеций применить процедуру Рунге уточнения формулы численного интегрирования.

   Решить задачу, используя стандартные функции MATLAB. Сравнить полученные результаты .

2. Вычислить неопределённый интеграл $\int a^x e^{-x}\,dx$

3. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_0^{\infty}\frac{1+x}{(x+a)^{p+1}}dx$