1. Описание задачи

Дано уравнение динамики генной регуляции с задержкой:

$$\dot{x} = \frac{\alpha}{1 + x_\tau^n} - x$$

Здесь $x = x(t) \geq 0$ – концентрация белка в момент времени t, $x_\tau = x(t - \tau)$, $\tau \geq 0$ – задержка по времени; $\alpha \geq 0$, $n = 1,2,4,6, \ldots$ – параметры системы.

Поскольку в состоянии равновесия $x(t) = x(t - \tau) = x^*$, то стационарной точкой является решение уравнения $x^{n+1} + x - \alpha = 0$. Для его нахождения используются численные методы поиска корней уравнения (метод Ньютона).

Линеаризуем систему в окрестности состояния равновесия.

$$\xi(t) = x(t) - x^*$$

$$\dot{\xi} = \frac{\alpha}{1 + (\xi_\tau + x^*)^n} - \xi - x^*$$

$$\left(\frac{\alpha}{1 + (\xi_\tau + x^*)^n} - \xi - x^*\right)'_{\xi \equiv 0} = \frac{-\alpha n {x^*}^{n-1}}{(1 + {x^*}^n)^2} - 1$$

$$\dot{\xi} \approx \frac{-\alpha n {x^*}^{n-1}}{(1 + {x^*}^n)^2} \xi_\tau - \xi$$

$$\dot{\xi} \approx \lambda \xi_\tau - \xi, \qquad \lambda = \frac{-\alpha n {x^*}^{n-1}}{(1 + {x^*}^n)^2} = \frac{-n {x^*}^{n+1}}{\alpha}$$

Исследуем тип состояния равновесия линеаризованной системы с задержкой. Будем искать решение в виде $\xi = e^{st}$. В таком случае имеем условие на s:

$$s = \lambda e^{-s\tau} - 1$$

Найдем такие s, при которых изменяется тип состояния равновесия (точка бифуркации). Тогда $Re(s) = 0$.

$$s = \tilde{\alpha} + i\tilde{\beta}, \qquad \tilde{\alpha} = 0$$

$$i\tilde{\beta} = \lambda e^{-i\tilde{\beta}\tau} - 1 = \lambda\left(\cos\tilde{\beta}\tau - i\sin\tilde{\beta}\tau\right) - 1$$

$$\begin{cases} \lambda\cos\tilde{\beta}\tau = 1 \\ \lambda\sin\tilde{\beta}\tau = -\tilde{\beta} \end{cases}$$

$$\lambda^2 = 1 + \tilde{\beta}^2, \qquad \tilde{\beta} = \pm\sqrt{\lambda^2 - 1}$$

$$\tilde{\beta}\tau = \pm\arccos\frac{1}{\lambda}$$

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - 1}}\arccos\frac{1}{\lambda}, \qquad \tau \geq 0$$

Таким образом, мы нашли бифуркационную границу $\lambda = \lambda(\tau) = \lambda(\alpha, n)$. Следовательно, изменяя параметры системы n, α, мы можем найти такое τ, при котором изменяется тип состояния равновесия.

2. Практическая работа

Построим бифуркационную границу $\alpha = \alpha(\tau)$ при фиксированном $n = 2,4,6$.

Алгоритм определения множества точек, задающего кривую $\alpha = \alpha(\tau)$ на плоскости (τ, α):

1. фиксируем некоторое α;
2. определяем состояние равновесия x^* с помощью метода Ньютона;
3. вычисляем значение λ и τ по формулам из п. 1.

Получившаяся зависимость для различных n приведена на рис. 1.

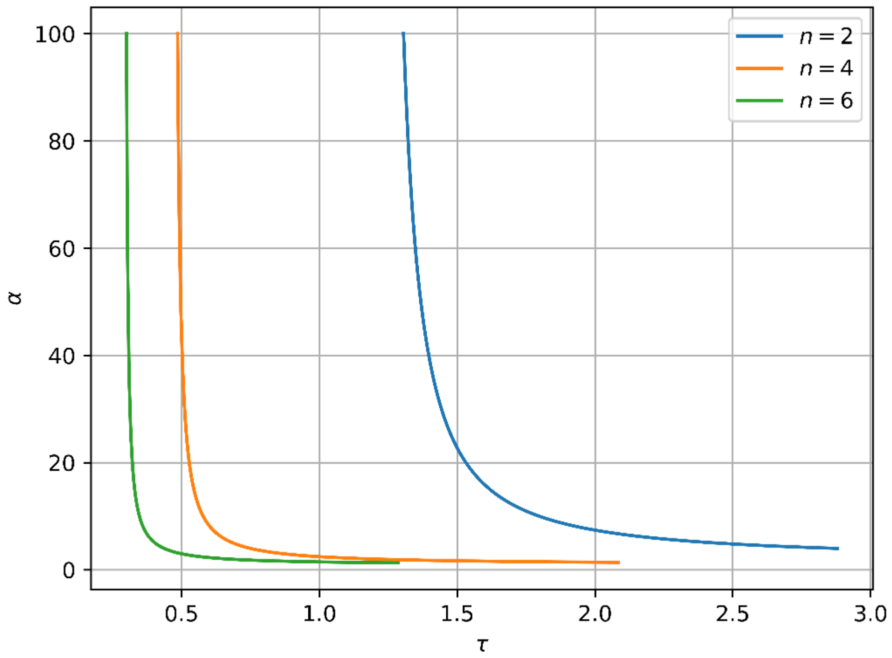

Рисунок 1. Зависимость $\alpha(\tau)$ при $n = 2,4,6$.

Для каждого n кривая $\alpha = \alpha(\tau)$ делит пространство на две подобласти: область устойчивости и неустойчивости. Область устойчивости, очевидно, находится левее и ниже кривой, т.к. при $\alpha = 0$ линеаризованная система упрощается до $\dot{\xi} = -\xi$, $\forall \tau \geq 0$; также при $\tau = 0$ имеется система без запаздывания, для которой известно, что ее состояние равновесия устойчиво.

Таким образом, зная бифуркационную границу $\alpha(\tau)$, мы можем легко установить тип состояния равновесия.