МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение

высшего образования

«Национальный исследовательский

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»

(ННГУ)

Институт информационных технологий, математики и механики

Кафедра математического обеспечения и суперкомпьютерных технологий

Направление подготовки: «Прикладная математика и информатика»

Профиль подготовки: «Вычислительная математика и суперкомпьютерные технологии»

Отчет по лабораторной работе №4

«Современные проблемы прикладной математики и информатики»

Выполнил: студент группы 381903-3м

_________________________ Панов А.А.

Подпись

Нижний Новгород

2020

1. Постановка задачи

На сетке $G = \left\{t = ih, h = \frac{\mathrm{T}}{n}, 0 \le i \le n\right\}$, где $h = 0.1, 0.01, 0.001$ необходимо численно решить следующие системы дифференциальных уравнений:

1. $x' = \pm x,\ x(0) = 1$
2. $x'' + x = 0,\ x'(0) = 0,\ x(0) = 1$
3. $\begin{cases} x' = -y - z \\ y' = x + ay \\ z' = b + (x - r)z \end{cases}$

Уравнения 1 и 2 нужно решить методом Эйлера, сравнить полученные решения с аналитическими и построить график ошибки ξ (t). Уравнение 3 необходимо решить методом Рунге-Кутта 4-го порядка.

Для уравнений первого порядка ξ (t) вычисляется как:

$$\xi\ (t) = |x_h^*(t) - x\ (t)|$$

где $x\ (t)$ - решение полученное аналитически, а $x_h^*(t)$ - численное решение, полученное методом Эйлера с шагом h.

В уравнении второго порядка производим замену $y = x'$ и получаем систему из двух уравнений. Для такой системы вычисляем $\xi(t)$ по следующей формуле:

$$\xi\ (t) = \sqrt{\left(x_h^*\ (t) - x(t)\right)^2 + \left(y_h^*(t) - y\ (t)\right)^2}$$

В третьей системе вычисляем $\xi(t)$ по следующей формуле, поскольку точное решение неизвестно.

$$\xi\ (t) = \sqrt{\left(x_h^*\ (t) - x_{h/2}^*\ (t)\right)^2 + \left(y_h^*(t) - y_{h/2}^*\ (t)\right)^2 + \left(z_h^*(t) - z_{h/2}^*\ (t)\right)^2}$$

2. Решение

2.1 Метод Эйлера

Если разложить функцию $x(t+h)$ в ряд Тейлора в точке t, получим: $x(t+h) = x(t) + hx'(t) + O(h^2) \approx x(t) + hx'(t)$ – на этом и строится метод Эйлера. Рассмотрим задачу Коши:

$x'(t) = f(t,x),\ \ x$ и $f(t,x) \epsilon R^n,\ t \epsilon [0,\mathrm{T}]$

$x(0) = x_0$

Приближенное значение в узлах сетки G находится следующей формуле:

$$x(t_{i+1}) = x(t_i) + hf(t_i, x(t_i))$$

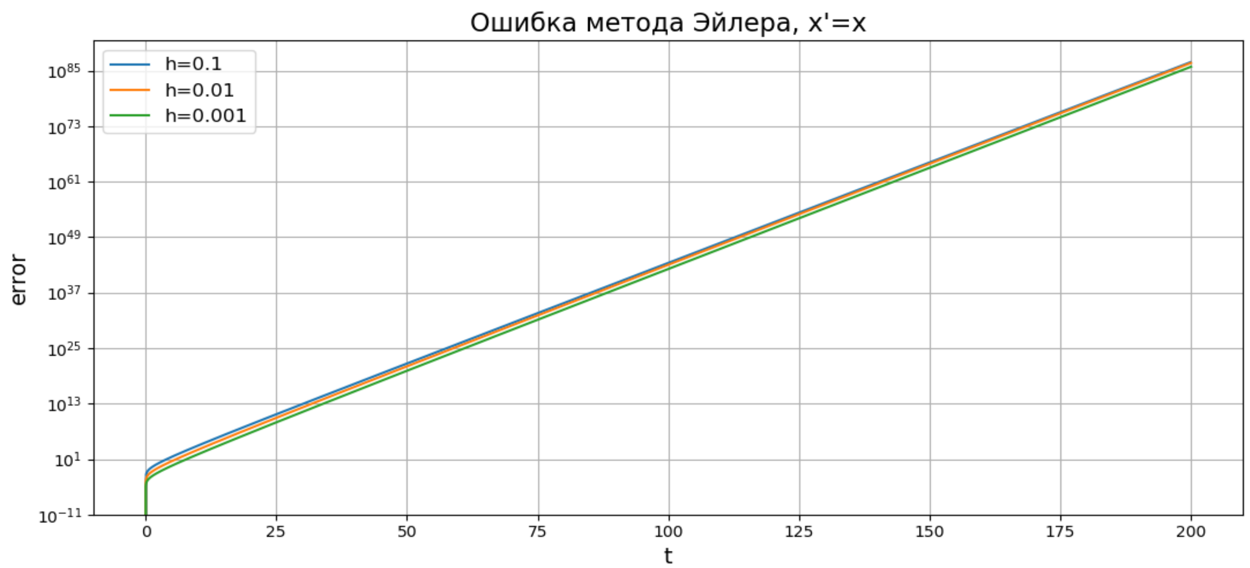
Погрешность каждого шага составляет $O(h^2)$. Так как общее количество шагов составляет $\frac{\mathrm{T}}{h}$, то глобальная погрешность метода равна $O\left(\frac{h^2\mathrm{T}}{h}\right) = O(h)$. Это означает, что при уменьшении h в два раза, погрешность также должна уменьшиться приблизительно в два раза.

2.2 Уравнение $x(t)' = \pm x(t)$

Аналитическое решение данного дифференциального уравнения с разделяющимися переменными $x(t) = x_0 e^{\pm t}$.

2.2.1 $x'(t) = x(t),\ \ x(t) = x_0 e^t$

Так как при $t \to \infty$ решение $x(t) \to \infty$, ошибка при вычислении методом Эйлера будет расти. Как видно из графиков, ошибка растет экспоненциально.



Докажем экспоненциальный рост аналитически. Численное решение в точке $t = ih$:

$x_i = x_{i-1} + hx_{i-1} = x_{i-1}(1+h) = x_{i-2}(1+h)^2 = x_0(1+h)^i$

Аналитическое решение в точке $t = ih$:

$x(t = ih) = x_0 e^{ih}$

Найдем отношение аналитического и численного решения:

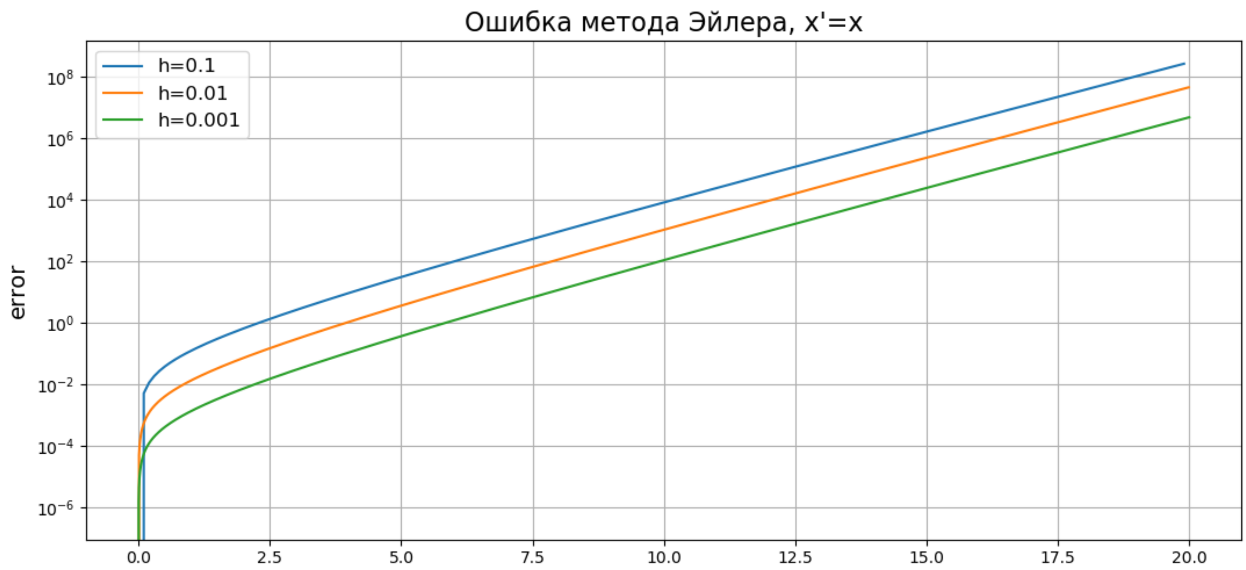
$$\frac{x_0 e^{ih}}{x_0(1+h)^i} = \left(\frac{e^h}{1+h}\right)^i, \qquad \frac{e^h}{1+h} > 1 \text{ при } h > 0 \Rightarrow \text{если } i \to \infty, \text{то} \left(\frac{e^h}{1+h}\right)^i \to \infty$$

Теперь найдем разность аналитического и численного решения:

$$x_0 e^{ih} - x_0(1+h)^i = x_0(1+h)^i \left\{\left(\frac{e^h}{1+h}\right)^i - 1\right\}$$

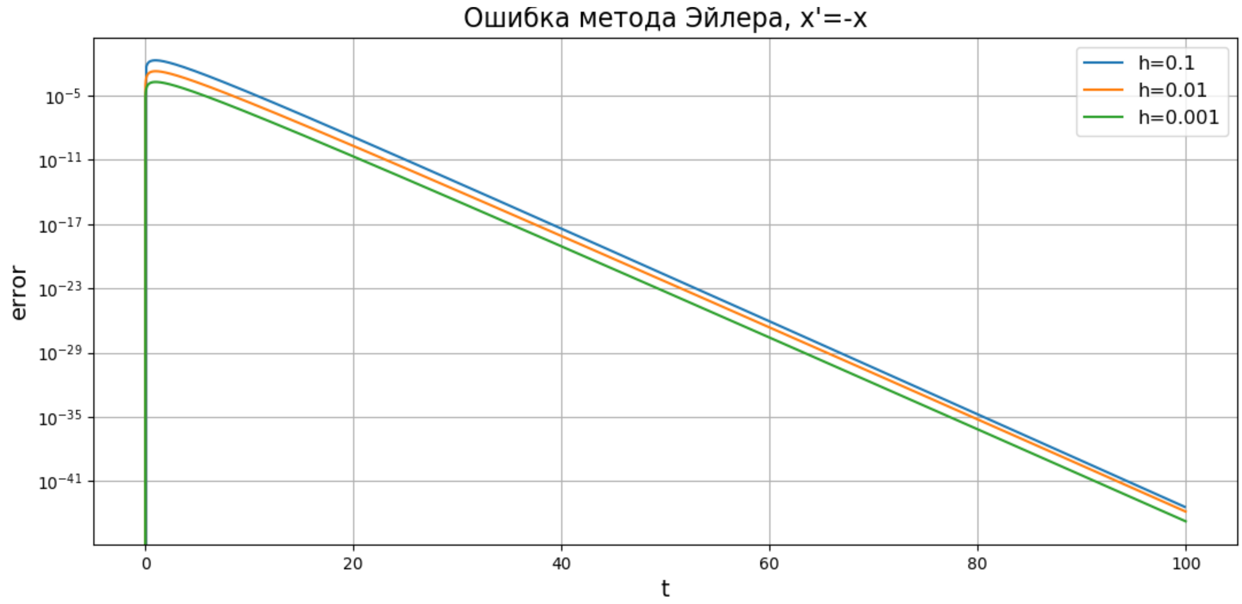
Полученная разность экспоненциально растет при увеличении i, что и требовалось доказать.

Также можно заметить, что при уменьшении h в 10 раз, ошибка уменьшается приблизительно в 10 раз, что совпадает с теоретическими свойствами метода.

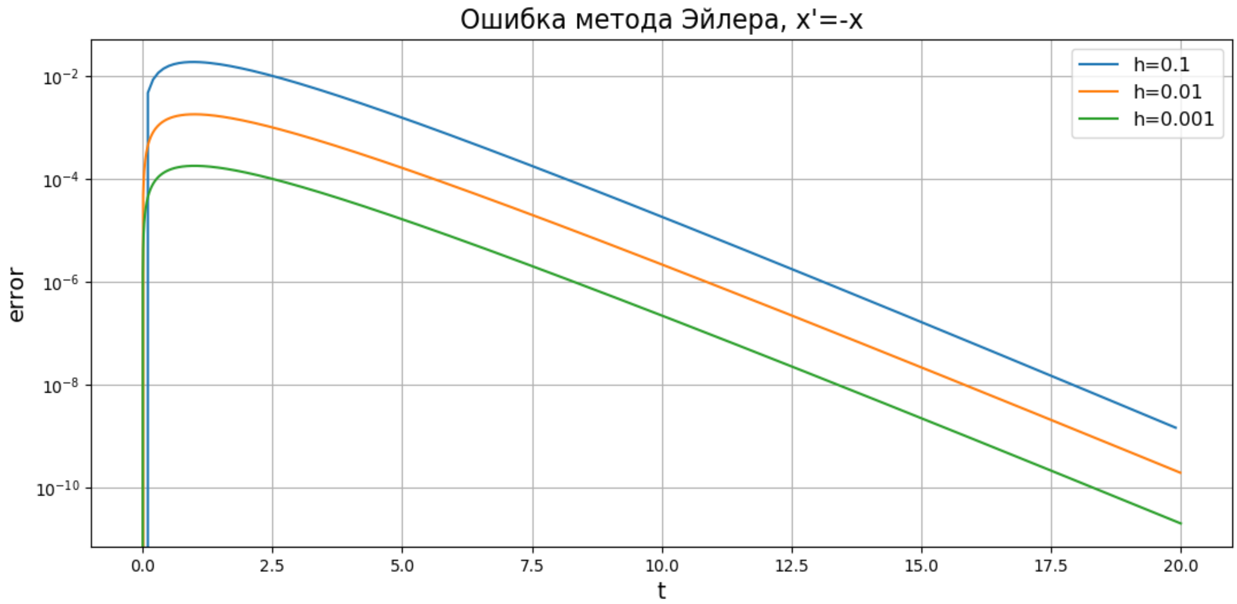


2.2.2 $x'(t) = -x(t),\ x(t) = x_0 e^{-t}$

В данном уравнении при любых начальных условиях и $t \to \infty$ решение $x(t) \to 0$. В таком случае ошибка при вычислении методом Эйлера с достаточно маленьким шагом при $t \to \infty$ будет стремиться к 0.



Также можно заметить, что при уменьшении h в 10 раз, ошибка уменьшается приблизительно в 10 раз, что совпадает с теоретическими свойствами метода.



2.3 Уравнение $\ddot{x} + x = 0$

$x'' + x = 0$

$x'(0) = 0$

$x(0) = 1$

Данное однородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами легко решается с помощью характеристического уравнения.

$$\lambda_{1,2} = \pm i - \text{корни характреристического уравнения}$$

Таким корням соответствует следующее общее решение:

$x(t) = C_1 \cos(t) + C_2 \sin(t)$

После подстановки получаем, что $C_1 = 1, C_2 = 0$, решение принимает вид:

$x(t) = \cos(t)$

Для численного решения методом Эйлера преобразуем уравнение к системе с помощью замены $x' = y$:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Формула для метода Эйлера в таком случае будет выглядеть так:

$$\begin{pmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} y_i \\ -x_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$$

Аналитическое решение данной системы:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos(t) \\ -sin(t) \end{pmatrix}$$

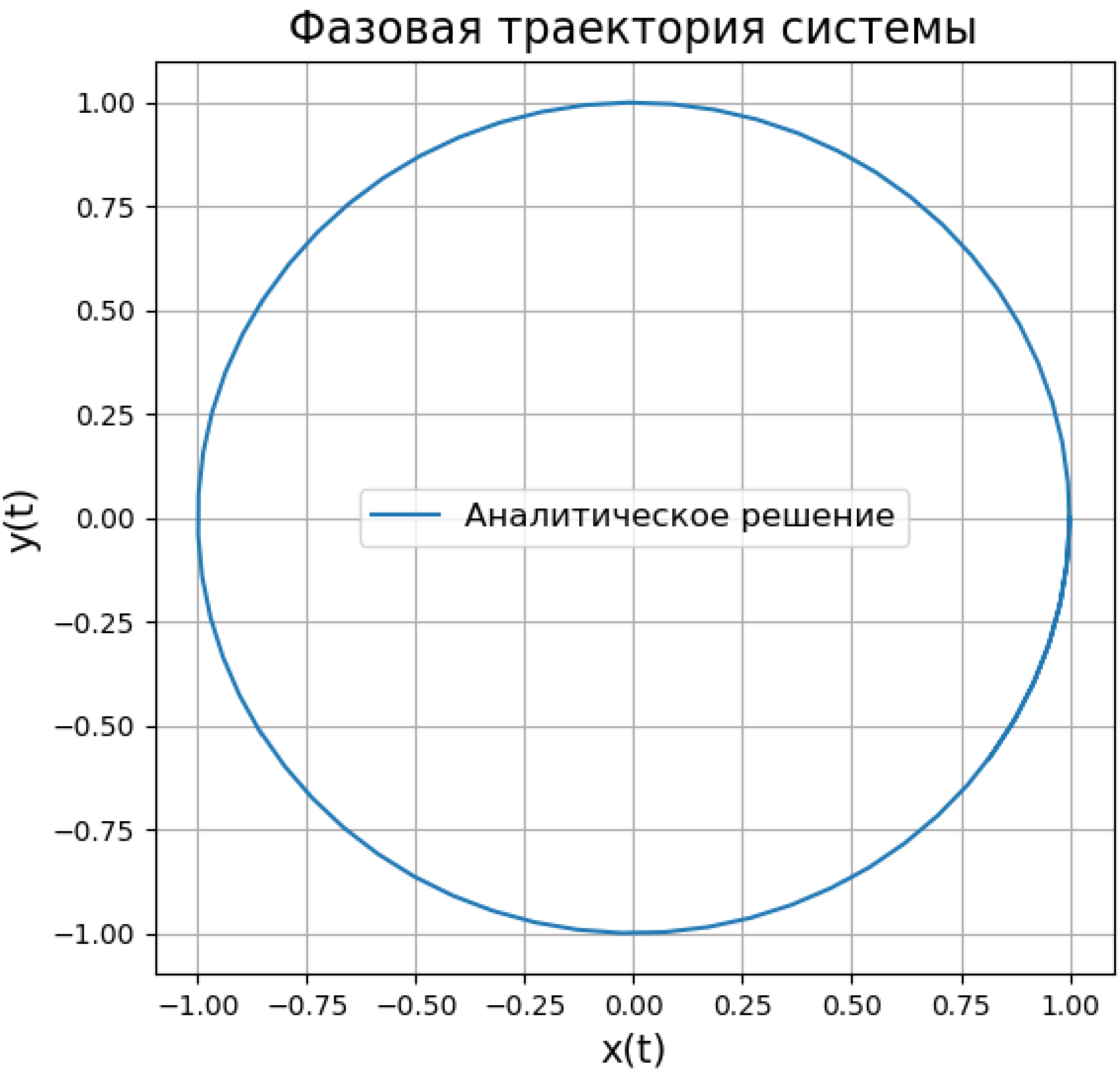
Точка равновесия:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_{1,2} = \pm i - \text{собственные значения матрицы системы}$$

Так как $\lambda_{1,2}$ чисто мнимые, то точка $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ – центр, а значит состояние равновесия устойчиво по Ляпунову.

Фазовая траектория данной системы – окружность с радиусом $\sqrt{x_0^2 + y_0^2}$.

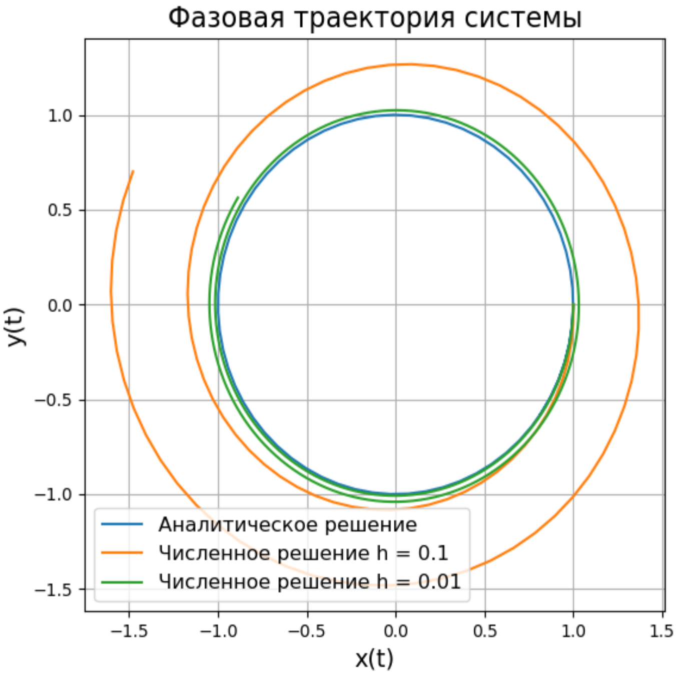


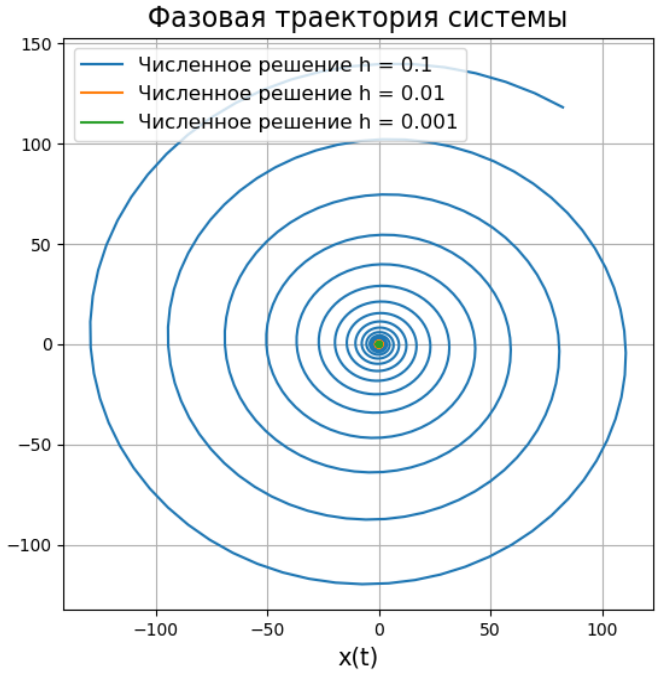
Выразим x_{i+1} и y_{i+1} через x_i и y_i (с помощью формулы Эйлера) и найдем, во сколько раз увеличивается радиус траектории:

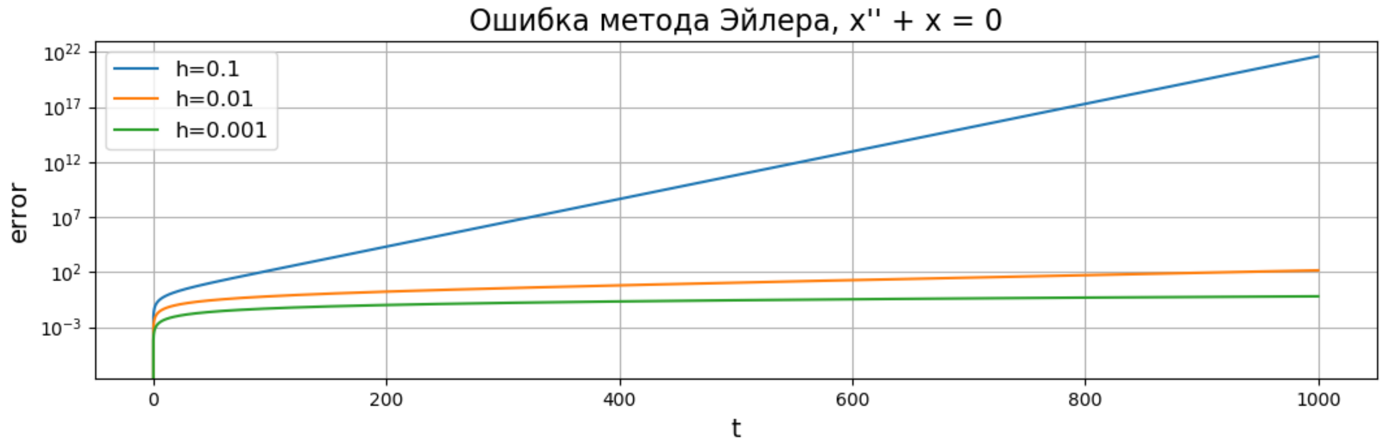
$(x_{i+1}^2 + y_{i+1}^2) - (x_i^2 + y_i^2) = (x_i^2 + y_i^2)(1 + h^2)$

Таким образом, с каждой итерацией радиус траектории будет увеличиваться в $\sqrt{1 + h^2}$ раз, следовательно, численная ошибка будет неограниченно расти.

В примере слева расчет выполнялся до T = 10, в примере справа расчет выполнялся до T = 100.







2.4 Метод Рунге-Кутты 4 порядка

Рассмотрим задачу Коши:

$x'(t,x) = f(t,x), x$ и $f(t,x) \epsilon R^n, t \epsilon [0, \mathrm{T}]$

$x(0) = x_0$

Приближенное значение в узлах сетки G находится следующей формуле:

$$x_{i+1} = x_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = f(t_i, x_i)$$

$$k_2 = f(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{h}{2}k_1)$$

$$k_3 = f(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{h}{2}k_2)$$

$$k_4 = f(t_i + h, x_i + hk_3)$$

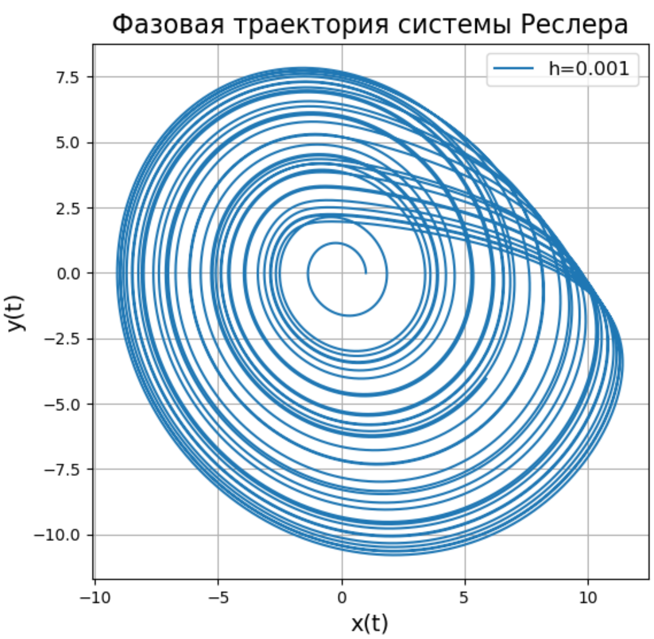
Погрешность метода порядка $O(h^4)$.

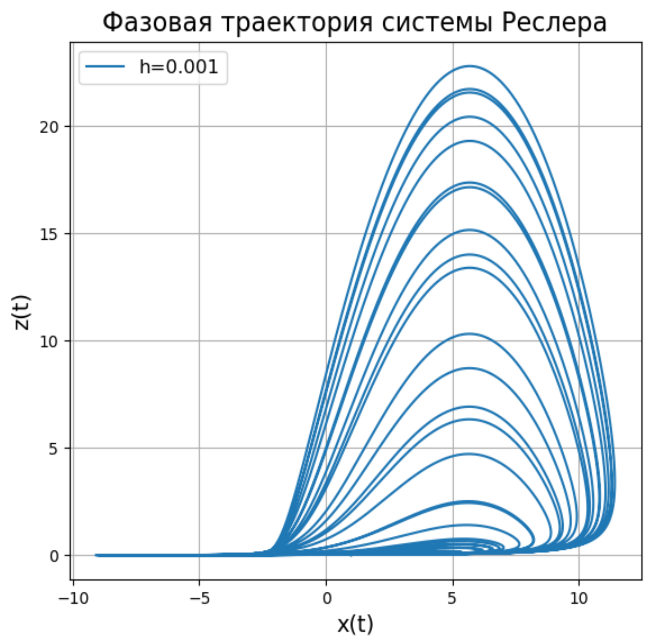
2.5 Система Реслера

Система Реслера имеет вид:

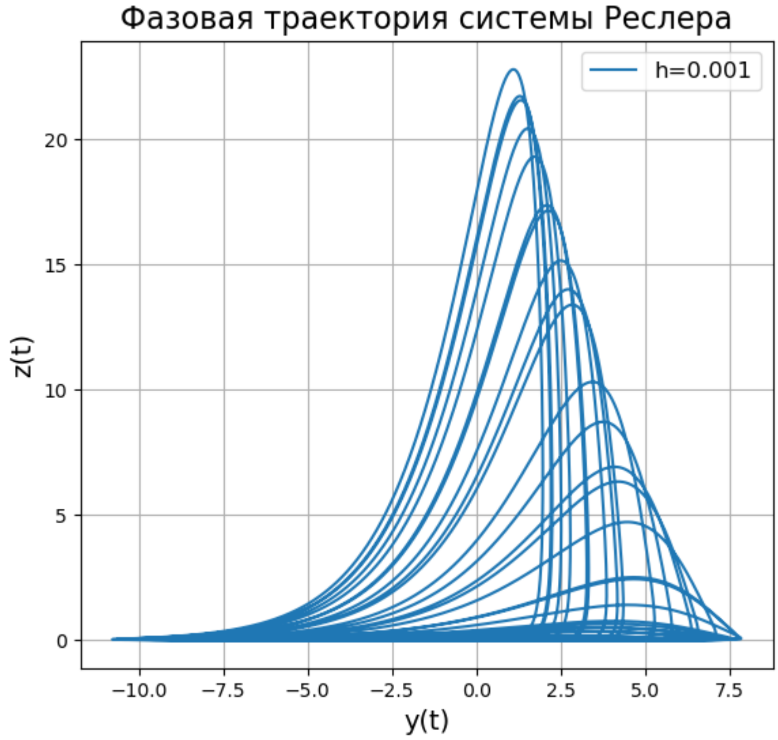
$$\begin{cases} x' = -y - z \\ y' = x + ay \\ z' = b + (x - r)z \end{cases}$$

По условию задачи a=0.2, b=0.2, r=5.7. Из начальной точки $x_0 = (1, 0, 0)$ численно были получены проекции траектории системы на координатные плоскости.

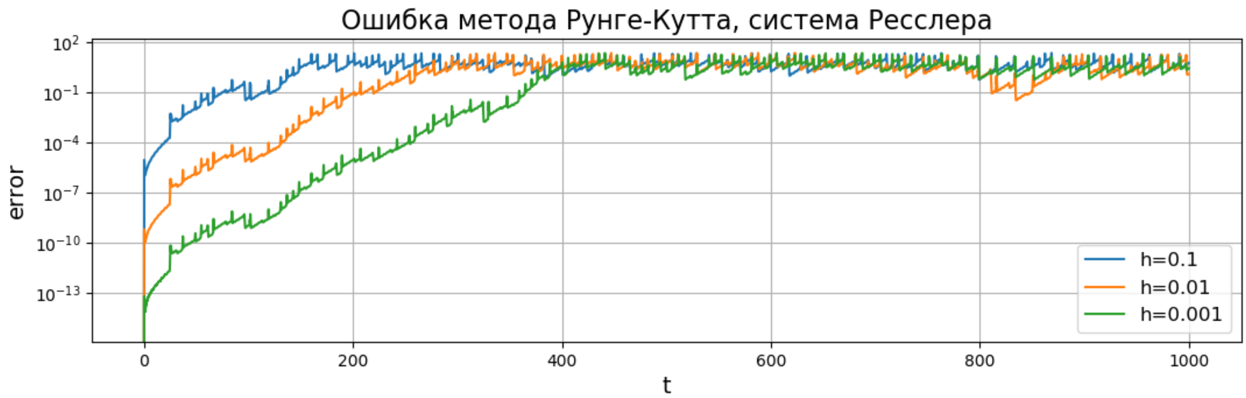




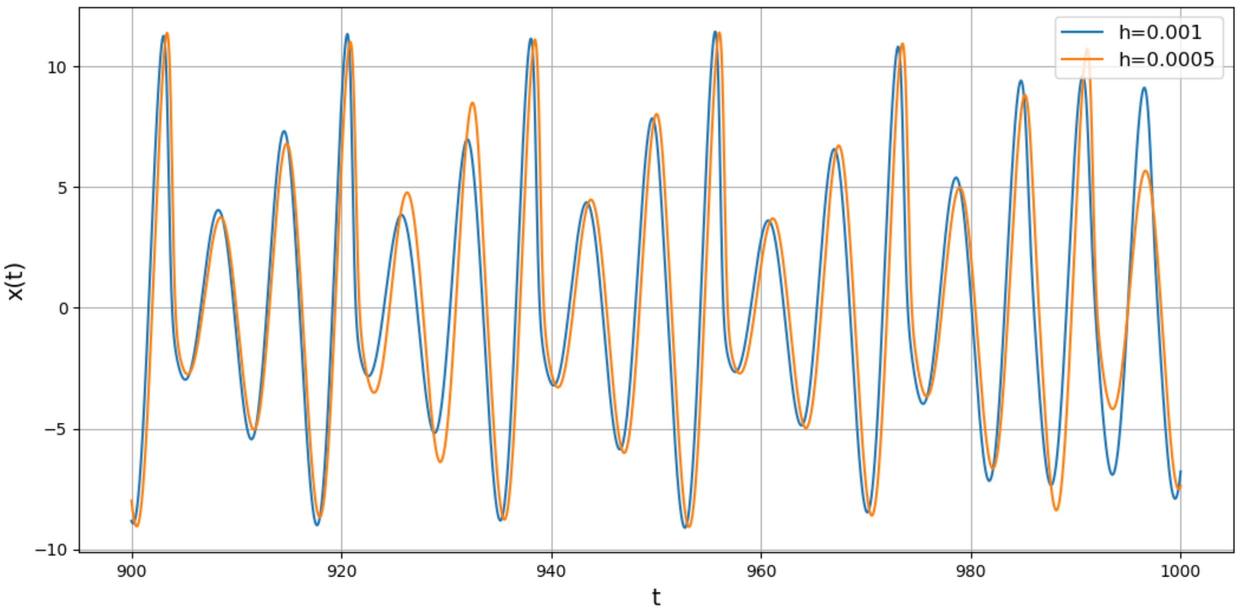
Точки решения системы образуют хаотический аттрактор, который начинается в точке x_0 и закручивается в спираль (в плоскости XY). При этом в плоскостях XZ, YZ происходит цикличное увеличение и уменьшение значения z.



Численная ошибка метода Рунге-Кутта 4 порядка постепенно растет, но перестает увеличиваться, достигнув определенных значений. Скорее всего, это связано с тем, что численное решение не выходит за пределы аттрактора, а значит ошибка ограничена.



Также можно заметить, что при уменьшении h в 10 раз, ошибка уменьшается приблизительно в 10^4 раз, что совпадает с теоретическими свойствами метода.



Начиная с некоторого t из-за численной ошибки метод Рунге-Кутта 4 порядка даже при небольшом изменении h может породить довольно сильно отличающиеся траектории.