МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского» (ННГУ)

Институт информационных технологий, математики и механики

Кафедра математического обеспечения и суперкомпьютерных технологий

Направление подготовки: «Прикладная математика и информатика»

Профиль подготовки: «Вычислительная математика и суперкомпьютерные технологии»

Отчет по лабораторной работе

«Современные проблемы прикладной математики и информатики»

Выполнил: студент группы 381903-3м

_________________________ Панов А.А.

Подпись

Нижний Новгород

2020

1. Постановка задачи

Рассматривается задача синтеза белка. Реакция моделируется следующим дифференциальным уравнением $\dot{x}(\mathrm{t},\tau) = \mathrm{f}(\mathrm{t},\tau)$:

$$\dot{x}(\mathrm{t},\tau) = \frac{\alpha}{1+x(t-\tau)^N} - x(t) \quad (1)$$

x − концентрация белка, $x \geq 0$

α − отвечает за синтез белка, $\alpha \geq 0$

Точка равновесия x^* находится из условия (2):

$$\mathrm{f}(x^*) = 0 \quad (3)$$

В точке равновесия (условие 2), выполняется равенство $x(t-\tau) = x(t)$. Подставив данное условие в (1) получим следующее (3):

$$x^{N+1} + x - \alpha = 0 \quad (3)$$

Цель работы:

1. Для n = 2, 4, 6 найти точку равновесия из уравнения (3) с помощью метода Ньютона.
2. Исследовать устойчивость точки равновесия в зависимости от τ и α.
3. Построить бифуркационную границу $\alpha(\tau)$.

2. Решение

$$\dot{x}(\mathrm{t},\tau) = \frac{\alpha}{1 + x(t-\tau)^N} - x(t)$$

Метод Ньютона был реализован в предыдущем задании. Для исследования точки равновесия x^* на устойчивость делаются следующие шаги:

1. Делается замена $\xi(t) = x(t) - x^*$:

   1.1. $\dot{\xi}(\xi,\xi_\tau) = \frac{\alpha}{1+(\xi_\tau + x^*)^N} - \xi - x^*$

   1.2. При такой замене $\dot{\xi}(0,0) = 0$

2. $\dot{\xi}(\xi,\xi_\tau)$ линеаризуется в окрестности $(\xi = 0, \xi_\tau = 0)$:

   2.1. $\dot{\xi}(\xi,\xi_\tau) \approx \dot{\xi}(0,0) + \xi\ddot{\xi}_{t,\xi}(0,0) + \xi_\tau\ddot{\xi}_{t,\xi_\tau}(0,0) = \xi\ddot{\xi}_{t,\xi}(0,0) + \xi_\tau\ddot{\xi}_{t,\xi_\tau}(0,0)$

   2.2. $d(\frac{\alpha}{1+(\xi_\tau + x^*)^N} - \xi - x^*) = \frac{-\alpha n x^{*n-1}}{(1+(\xi_\tau + x^*)^N)^2} d\xi_\tau - d\xi$

   2.3. $\dot{\xi}(0,0) \approx \frac{-\alpha n x^{*n-1}}{(1+x^{*N})^2}\xi_\tau - \xi = \lambda\xi_\tau - \xi, \lambda = \frac{-\alpha n x^{*n-1}}{(1+x^{*N})^2} = \frac{-n x^{*n+1}}{\alpha}$

3. Рассмотрим решение вида $\xi = e^{st}$:

   3.1. $se^{st} = \lambda e^{s(t-\tau)} - e^{st}$ – сократим на e^{st}

   3.2. $s = \lambda e^{-s\tau} - 1$

4. $s = \tilde{\alpha} + i\tilde{\beta}$

   Так как решение $\xi = e^{st}$, вещественная часть s должна быть меньше нуля

   4.1. $\tilde{\alpha} > 0$ - точка равновесия неустойчива

   4.2. $\tilde{\alpha} < 0$ - точка равновесия устойчива

   4.3. $\tilde{\alpha} = 0$ - точка равновесия меняет устойчивость

5. Найдем при каких условиях точка равновесия меняет устойчивость (подставим $\tilde{\alpha} = 0$):

   5.1. $i\tilde{\beta} = \lambda e^{-i\tilde{\beta}\tau} - 1 = \lambda\left(\cos\tilde{\beta}\tau - i\sin\tilde{\beta}\tau\right) - 1$ (по формуле Эйлера)

   5.2. $\begin{cases} \lambda\cos\tilde{\beta}\tau = 1 \\ \lambda\sin\tilde{\beta}\tau = -\tilde{\beta} \end{cases}$

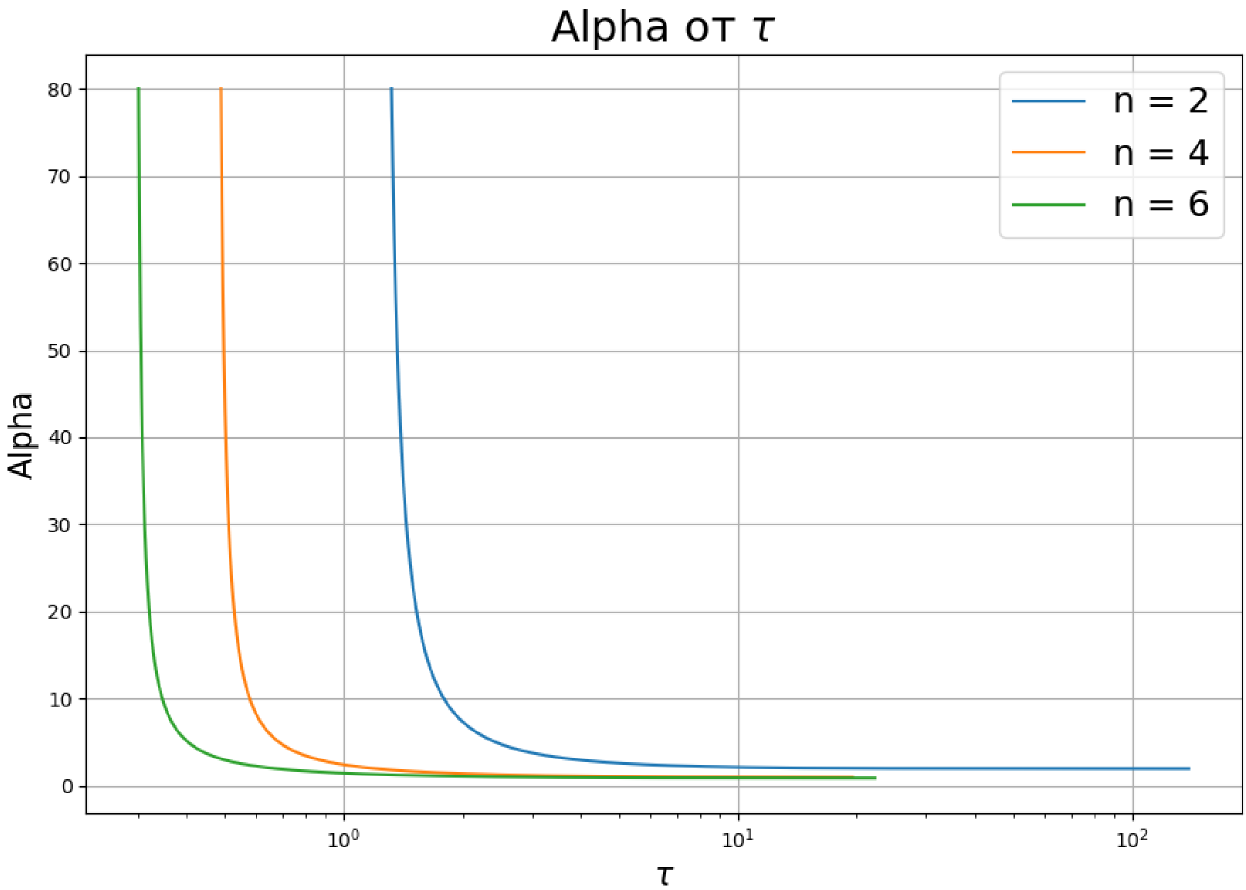
   5.3. $\lambda^2 = 1 + \tilde{\beta}^2$

5.4. $abs(\tilde{\beta}) = \sqrt{\lambda^2 - 1}$, если $\lambda^2 - 1 < 0$, то биффуркционная граница $\nexists$

5.5. $\tau = abs\left(\frac{1}{\tilde{\beta}} \arccos\frac{1}{\lambda}\right) = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2-1}} abs\left(\arccos\frac{1}{\lambda}\right)$, так как $\tau \geq 0$

3. Вывод

Для n = 2,4,6 и α от 0 до 80 были построены следующие бифуркационные границы:



При $\alpha = 0$ линеаризованная система упрощается до $\dot{\xi} = -\xi$, в таком случае состояние равновесия устойчиво; при $\tau = 0$ система вырождается в систему «без запаздывания», для которой состояние равновесия также устойчиво.

Кривая $\alpha = \alpha(\tau)$ делит пространство на две подобласти: область устойчивости и неустойчивости. Т.к. при $\alpha = 0$ состояние равновесия устойчиво, то **область устойчивости находится слева и под кривой $\boldsymbol{\alpha(\tau)}$**. Если же значение τ больше $\frac{1}{\sqrt{\lambda^2-1}} abs\left(\arccos\frac{1}{\lambda}\right)$, то значение $\lambda \cos\tilde{\beta}\tau$ (из системы 5.2) будет больше 1, а значит и $\tilde{\alpha} > 0$ и точка равновесия будет неустойчивой.

При достаточно малых значениях α состояние равновесия устойчиво для всех τ.