МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение

высшего образования

«Национальный исследовательский

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»

(ННГУ)

Институт информационных технологий, математики и механики

Кафедра математического обеспечения и суперкомпьютерных технологий

Направление подготовки: «Прикладная математика и информатика»

Профиль подготовки: «Вычислительная математика и суперкомпьютерные технологии»

Отчет по лабораторной работе

«Современные проблемы прикладной математики и информатики»

Выполнил: студент группы 381903-3м

_________________________ Панов А.А.

Подпись

Нижний Новгород

2020

1. Постановка задачи

Рассматривается задача синтеза белка. Реакция моделируется следующим дифференциальным уравнением $\dot{x}(\mathrm{t},\tau) = \mathrm{f}(\mathrm{t},\tau)$:

$$\dot{x}(\mathrm{t},\tau) = \frac{\alpha}{1+x(t-\tau)^N} - x(t) \qquad (1)$$

x − концентрация белка, $x \geq 0$

α − отвечает за синтез белка, $\alpha \geq 0$

Точка равновесия x^* находится из условия (2):

$$\mathrm{f}(x^*) = 0 \qquad (3)$$

Из условия (2) можно получить условие (3):

$$x^{N+1} + x - \alpha = 0 \qquad (3)$$

Цель работы:

1. Для n = 2, 4, 6 найти точку равновесия из уравнения (3) с помощью метода Ньютона.
2. Исследовать устойчивость точки равновесия в зависимости от τ и α.
3. Построить бифуркационную границу $\alpha(\tau)$.

2. Решение

Метод Ньютона был реализован в предыдущем задании. Для исследования точки равновесия x^* на устойчивость делаются следующие шаги:

1. Делается замена $\xi(t) = x(t) - x^*$:

   1.1. $\dot{\xi}(\xi, \xi_\tau) = \frac{\alpha}{1+(\xi_\tau + x^*)^N} - \xi - x^*$

   1.2. При такой замене $\dot{\xi}(0, 0) = 0$

2. $\dot{\xi}(\xi, \xi_\tau)$ линеаризуется в окрестности $(\xi = 0, \xi_\tau = 0)$:

   2.1. $\dot{\xi}(\xi, \xi_\tau) \approx \dot{\xi}(0,0) + \xi\ddot{\xi}_{t,\xi}(0,0) + \xi_\tau\ddot{\xi}_{t,\xi_\tau}(0,0) = \xi\ddot{\xi}_{t,\xi}(0,0) + \xi_\tau\ddot{\xi}_{t,\xi_\tau}(0,0)$

   2.2. $d(\frac{\alpha}{1+(\xi_\tau + x^*)^N} - \xi - x^*) = \frac{-\alpha n x^{*n-1}}{(1+(\xi_\tau + x^*)^N)^2} d\xi_\tau - d\xi$

   2.3. $\dot{\xi}(0,0) \approx \frac{-\alpha n x^{*n-1}}{(1+x^{*N})^2}\xi_\tau - \xi = \lambda\xi_\tau - \xi, \lambda = \frac{-\alpha n x^{*n-1}}{(1+x^{*N})^2} = \frac{-n x^{*n+1}}{\alpha}$

3. Рассмотрим решение вида $\xi = e^{st}$:

   3.1. $se^{st} = \lambda e^{s(t-\tau)} - e^{st}$

   3.2. $s = \lambda e^{-st} - 1$

4. $s = \tilde{\alpha} + i\tilde{\beta}$

   4.1. $\tilde{\alpha} > 0$ - точка равновесия неустойчива

   4.2. $\tilde{\alpha} < 0$ - точка равновесия устойчива

   4.3. $\tilde{\alpha} = 0$ - точка равновесия меняет устойчивость

5. Найдем при каких условиях точка равновесия меняет устойчивость:

   5.1. $i\tilde{\beta} = \lambda e^{-i\tilde{\beta}\tau} - 1 = \lambda(\cos\tilde{\beta}\tau - i\sin\tilde{\beta}\tau) - 1$

   5.2. $\begin{cases} \lambda\cos\tilde{\beta}\tau = 1 \\ \lambda\sin\tilde{\beta}\tau = -\tilde{\beta} \end{cases}$

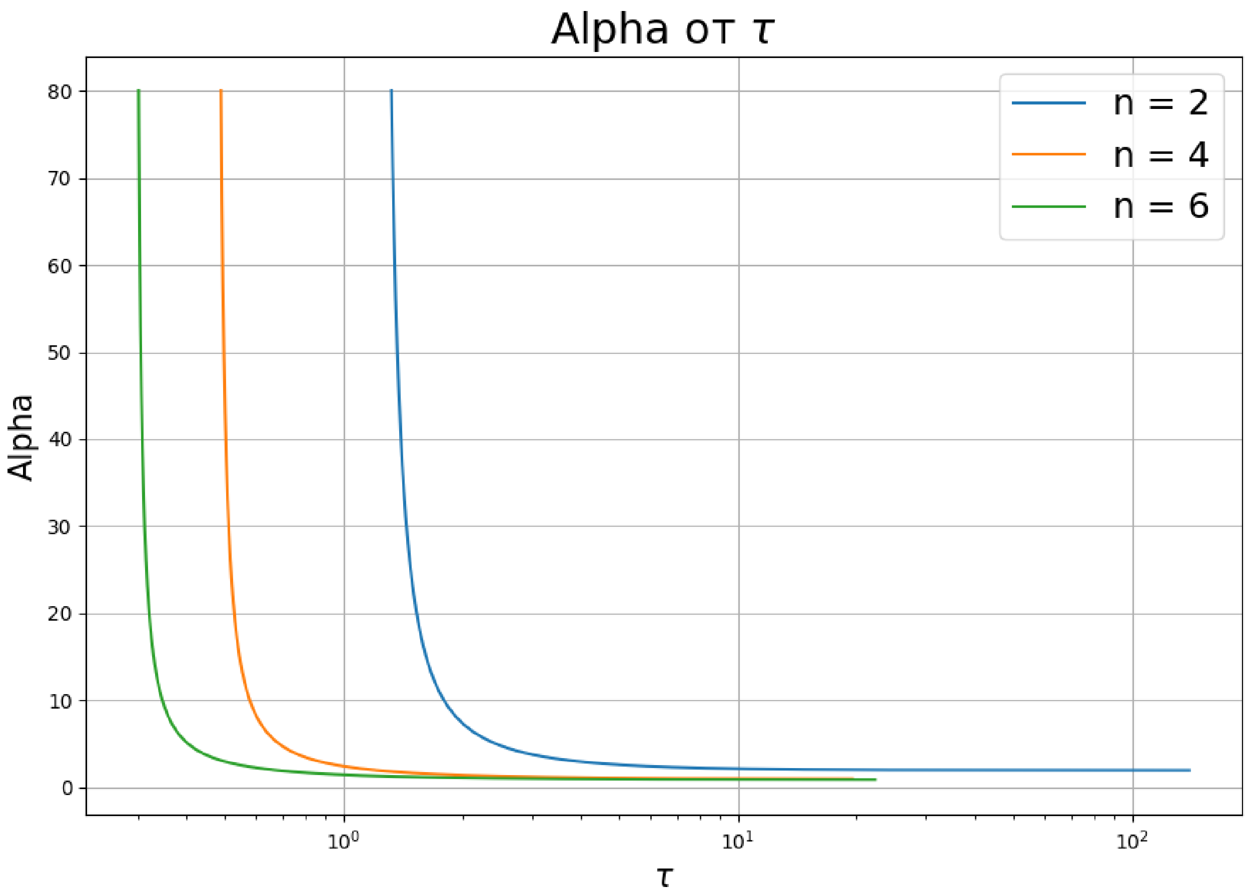
   5.3. $\lambda^2 = 1 + \tilde{\beta}^2$

   5.4. $abs(\tilde{\beta}) = \sqrt{\lambda^2 - 1}$, если $\lambda^2 - 1 < 0,$ то биффуркционная граница $\nexists$

   5.5. $\tau = abs\left(\frac{1}{\tilde{\beta}}\arccos\frac{1}{\lambda}\right) = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2-1}}abs\,(\arccos\frac{1}{\lambda}),$ так как $\tau \geq 0$

3. Вывод

Для n = 2,4,6 были построены следующие бифуркационные границы:



При $\alpha = 0$ линеаризованная система упрощается до $\dot{\xi} = -\xi$, в таком случае состояние равновесия устойчиво; при $\tau = 0$ система вырождается в систему «без запаздывания», для которой состояние равновесия также устойчиво.

Кривая $\alpha = \alpha(\tau)$ делит пространство на две подобласти: область устойчивости и неустойчивости. Область устойчивости находится слева и под кривой $\alpha(\tau)$.

При малых значениях α состояние равновесия устойчиво для всех τ.