МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
**«Национальный исследовательский
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»
(ННГУ)**

Институт информационных технологий, математики и механики

Кафедра математического обеспечения и суперкомпьютерных технологий

Направление подготовки: «Прикладная математика и информатика»
Профиль подготовки: «Вычислительная математика и суперкомпьютерные технологии»

Отчет по лабораторной работе №3
«Современные проблемы прикладной математики и информатики»

Выполнил: студент группы 381903-3м
________________________ Панов А.А.
Подпись

Нижний Новгород
2020

1. Постановка задачи

Рассматривается дискретное логистическое уравнение, моделирующее размер популяции:

$x_{n+1} = x_n(r - x_n)$ (1)

x − число особей в популяции;

r − неотрицательный коэффициент увелечения особей;

$-\mathrm{x}_n^2$ − отвечает за уменьшение численности в результате конкуренкции.

Данное дискретное уравнение может быть получено из уравнения Ферхюльста:

$$\frac{dx}{dt} = rx(1 - \frac{x}{K})$$

1.1 Цель работы:

1. Построить бифуркационную диаграмму (диаграмму ветвления).
2. Оценить точки r_1, r_2, r_3, r_∞.
3. Исследовать устойчивость на аттракторе.
4. Построить график зависимости показателя Ляпунова от r.

2. Решение

Найдем точки равновесия системы $x_{n+1} = x_n(r - x_n)$.

По определению в точке равновесия x^* выполняется условие $x_n^* = x_{n+1}^*$.

$x_n = x_n(r - x_n)$

$x_n(r - x_n - 1) = 0$

Получаем следующие точки равновесия:

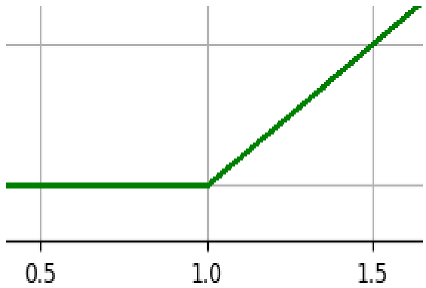
$x = 0$ *или* $x = r - 1$

Для отображения вида $x_{n+1} = f(x_n)$ устойчивость точки можно определить из условия $|f^{'}(x^*)| < 1$.

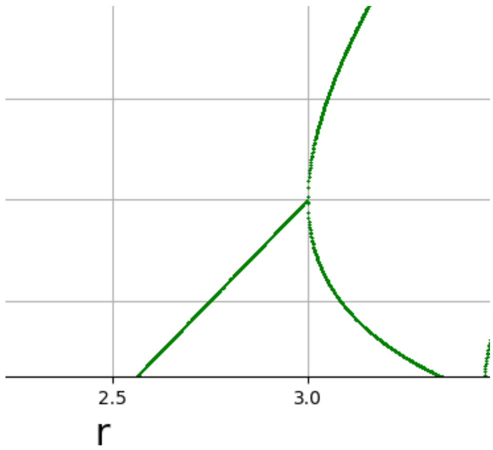
$\mu = f^{'}(x^*)$ называют мультипликатором.

Для данной системы получаем условие: $|r - 2x| < 1$. Точка равновесия $x = 0$ устойчива при $0 \le r < 1$, точка равновесия $x = r - 1$ устойчива при $1 < r \le 3$.

Рассмотрим случай когда две точки равновесия «сливаются» (бифуркация). Это происходит при условии, когда $r = 1$, тогда система принимает вид $x_{n+1} = x_n - {x_n}^2$. Точка x = 0 в таком случае «полуустойчива». Если $x_0 \in [0,1]$ то x_n стремится к 0 иначе x_n стремится к $-\infty$.



Если $r > 3$, то рассмотренные точки равновесия перестают быть устойчивыми и появляется цикл длины 2. Значения x из цикла длины n могут быть получены из формулы $x = f^{(n)}(x)$, где $f^{(n)}(x) = f(f(f(\dots f(x))) \dots)$. На лекции была выведена аналитическая формула для n=2 $x_{3,4} = \frac{1+r}{2} \pm \frac{\sqrt{(r+1)(r-3)}}{2}$ (заметим, что при r = 3 $x_3 = x_4 = 2$).



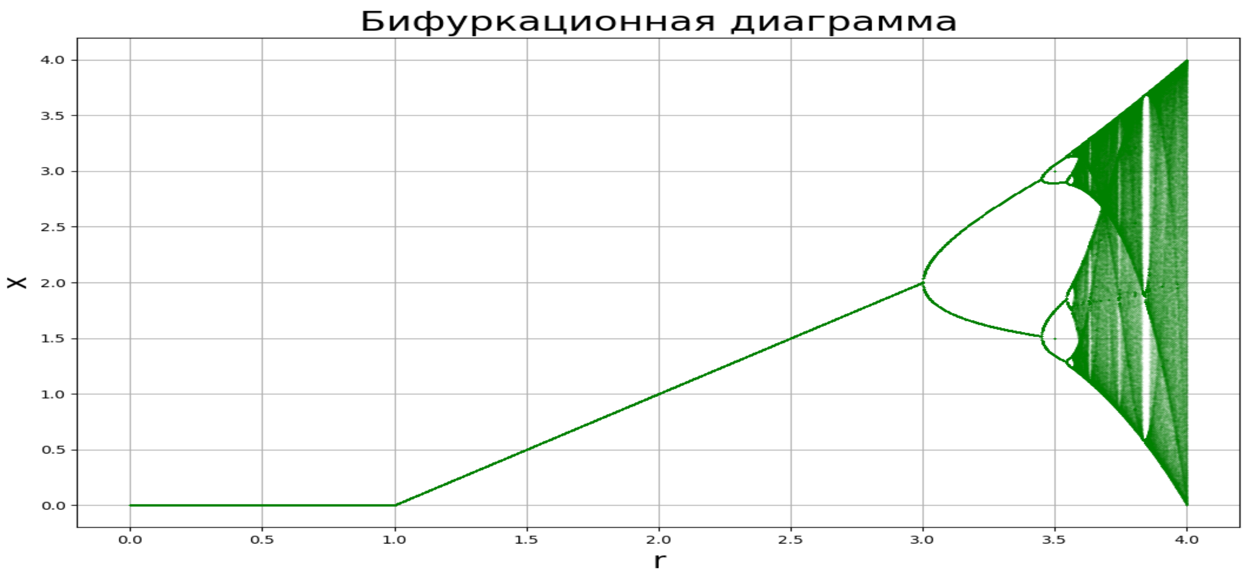
При увеличении длины цикла степень уравнения увеличивается, а значит аналитическое решение будет найти гораздо сложнее (если вообще получится). Значение x можно вычислить численно. Устойчивость состояния равновесия x можно определить через показатель

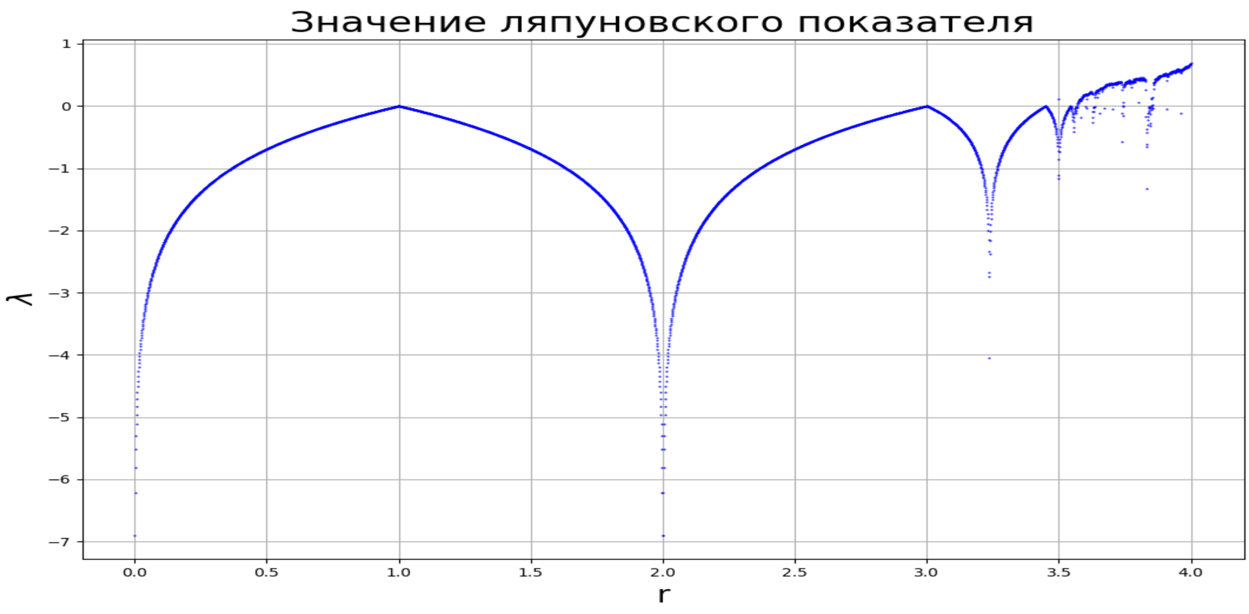
Ляпунова по формуле $\lambda = \ln\left|f'(x^*)\right|$. Если $\lambda < 0$,то точка устойчива, если $\lambda > 0$,то точка неустойчива. Для цикла длины n показатель Ляпунова определяется по формуле $\sum_{k=1}^{n} \ln|f'(x_k)|$.

Рассмотрим аттрактор системы с $x_0 = 0.5$ при различных r от 0 до 4.0 с шагом 0.001. Для каждого значения r вычислялость 10000 «переходных» значений x, после чего следующие 1000 значений изображались на диаграмме. В точке $r_2 = 3$ появляется цикл длины 2. Далее в точке $r_3 \approx 3.44$ длина цикла становится равной 4. В точке $r_4 \approx 3.54$ она равна 8.

Точка r_∞ достигается там, где показатель Ляпунова становится положительным (циклический порядок в этом случае переходит в динамический хаос), $r_\infty \approx 3.57$. Можно заметить, что в некоторых областях, например в окрестности точки $r = 3.84$ показатель Ляпунова меньше нуля, а на бифуркационной диаграмме видно незаполненное пространство. В этих областях динамический хаос сменяется циклическим порядком.

При $r\ >\ 4$ при любом $x_0 > 0$ x_n устремляется к минус бесконечности.





Те же изображения в большем масштабе: