>

> $with(plots):$

> #*Найти свертку функций* $f(x)$ и $g(x)$, *если функция* $f(x)$ *принимает значение, равное нулю при* $x \notin [x_1, x_4]$, а *при* $x \in [x_1, x_4]$ *ее график состоит из звеньев ломаной ABCD*

> $x1 := 0:$
$x2 := 2:$
$x3 := 4:$
$x4 := 5:$
$a := 2:$
$b := -2:$

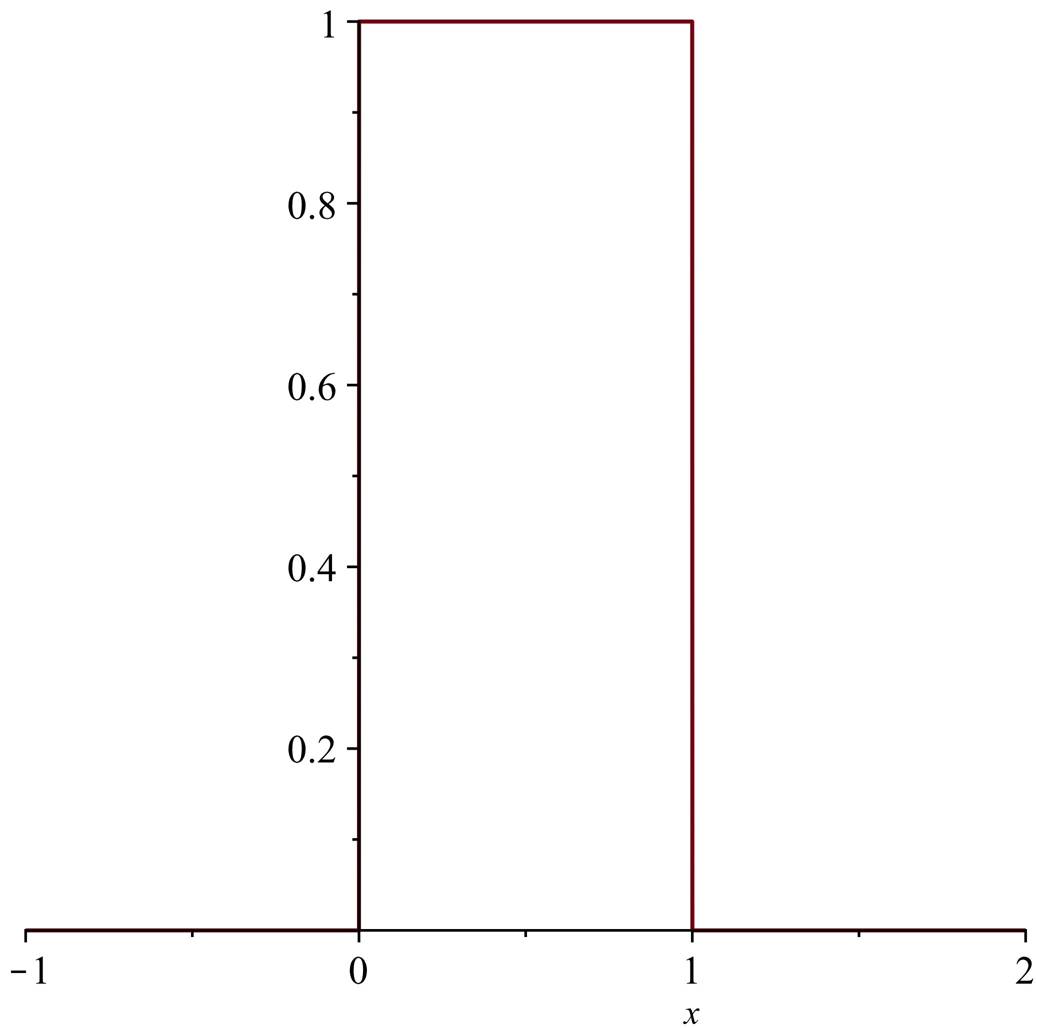
> $A(x1, a);$
$B(x2, a);$
$C(x3, b);$
$D1(x4, 0);$

$$A(0, 2)$$
$$B(2, 2)$$
$$C(4, -2)$$
$$D1(5, 0) \qquad \textbf{(1)}$$

> $g(x) := piecewise(x < 0, 0, \text{`and`}(x \geq 0, x < 1), 1, x \geq 1, 0):$
$g(x)$

$$\begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & 1 \leq x \end{cases} \qquad \textbf{(2)}$$

> $plot(g(x), x = -1..2)$



#Найдем функцию f(x) как уравнение прямой по двум точкам: две точки (x1,y1), (x2,y2)
тогда уравнение прямой имеет вид $\frac{y-y1}{y2-y1}=\frac{x-x1}{x2-x1}$

Первые две точки $A(0,2)$ и $B(2,2)$,

тогда уравнение прямой имеет вид $\frac{y-2}{2-2}=\frac{x-0}{2-0} \Rightarrow y=2$ *на* $0<x\le 2$

Следующие две точки $B(2,2)$ и $C(4,-2)$,

тогда уравнение прямой имеет вид $\frac{y-2}{-2-2}=\frac{x-2}{4-2} \Rightarrow y=-2\cdot x+6$ *на* $2<x\le 4$

Следующие две точки $C(4,-2)$ и $D1(5,0)$,

тогда уравнение прямой имеет вид $\frac{y-(-2)}{0-(-2)}=\frac{x-4}{5-4} \Rightarrow y=-2\cdot x-10$ *на* $4<x\le 5$

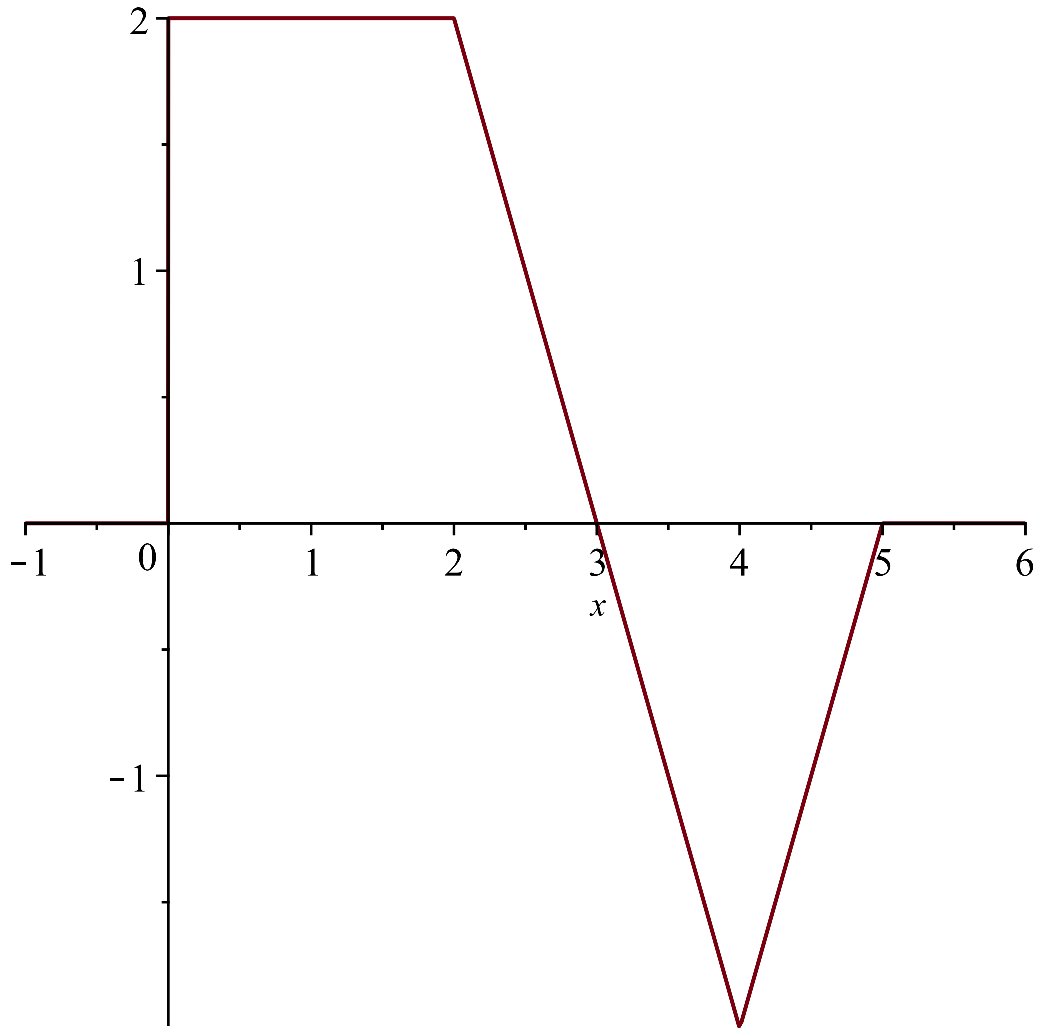
#Получаем функцию f(x):

> $f(x) := piecewise(x \le 0, 0, \text{`and`}(x>0, x\le 2), 2, \text{`and`}(x>2, x\le 4), -2\cdot x+6, \text{`and`}(x>4, x\le 5), 2\cdot x-10, x>5, 0):$

$f(x)$

$$\begin{cases} 0 & x \le 0 \\ 2 & 0 < x \le 2 \\ -2\,x + 6 & 2 < x \le 4 \\ 2\,x - 10 & 4 < x \le 5 \\ 0 & 5 < x \end{cases} \tag{3}$$

> $plot(f(x), x = -1..6)$



> *#Найдем свертку функций f(x) и g(x) по формуле* $(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) g(x-\xi)\, \mathrm{d}\xi$

> *#Запишем функции* $f(\xi)$ и $g(x-\xi)$:

> $f(\xi) := piecewise((\xi \le 0, 0, `and`(\xi > 0, \xi \le 2), 2, `and`(\xi > 2, \xi \le 4), -2\cdot x + 6, `and`(\xi > 4, \xi \le 5), 2\cdot\xi - 10, \xi > 5, 0))$:

$f(\xi)$

$$\begin{cases} 0 & \xi \le 0 \\ 2 & 0 < \xi \le 2 \\ -2x+6 & 2 < \xi \le 4 \\ 2\xi - 10 & 4 < \xi \le 5 \\ 0 & 5 < \xi \end{cases} \tag{4}$$

> $g(x\text{-}\xi) := piecewise(x\text{-}\xi < 0, 0, \text{`}and\text{`}(x-\xi \ge 0, x\text{-}\xi < 1), 1, x\text{-}\xi \ge 1, 0);$

$$g(x-\xi) := \begin{cases} 0 & x-\xi < 0 \\ 1 & 0 \le x-\xi < 1 \\ 0 & 1 \le x-\xi \end{cases} \tag{5}$$

> $g(x\text{-}\xi) := piecewise(\xi \le x-1, 0, \text{`}and\text{`}(\xi > x-1, \xi \le x), 1, \xi > x, 0);$

$$g(x-\xi) := \begin{cases} 0 & \xi \le -1+x \\ 1 & -1+x < \xi \le x \\ 0 & x < \xi \end{cases} \tag{6}$$

>

Подставим в *интервалы функции* $g(x)$ *значения* 0, 2, 4, 5

при $\xi = 0$:

$x < 0$

$0 \le x < 1$

$x \ge 1$

при $\xi = 2$:

$x < 2$

$2 \le x < 3$

$x \ge 3$

при $\xi = 4$:

$x < 4$

$4 \le x < 5$

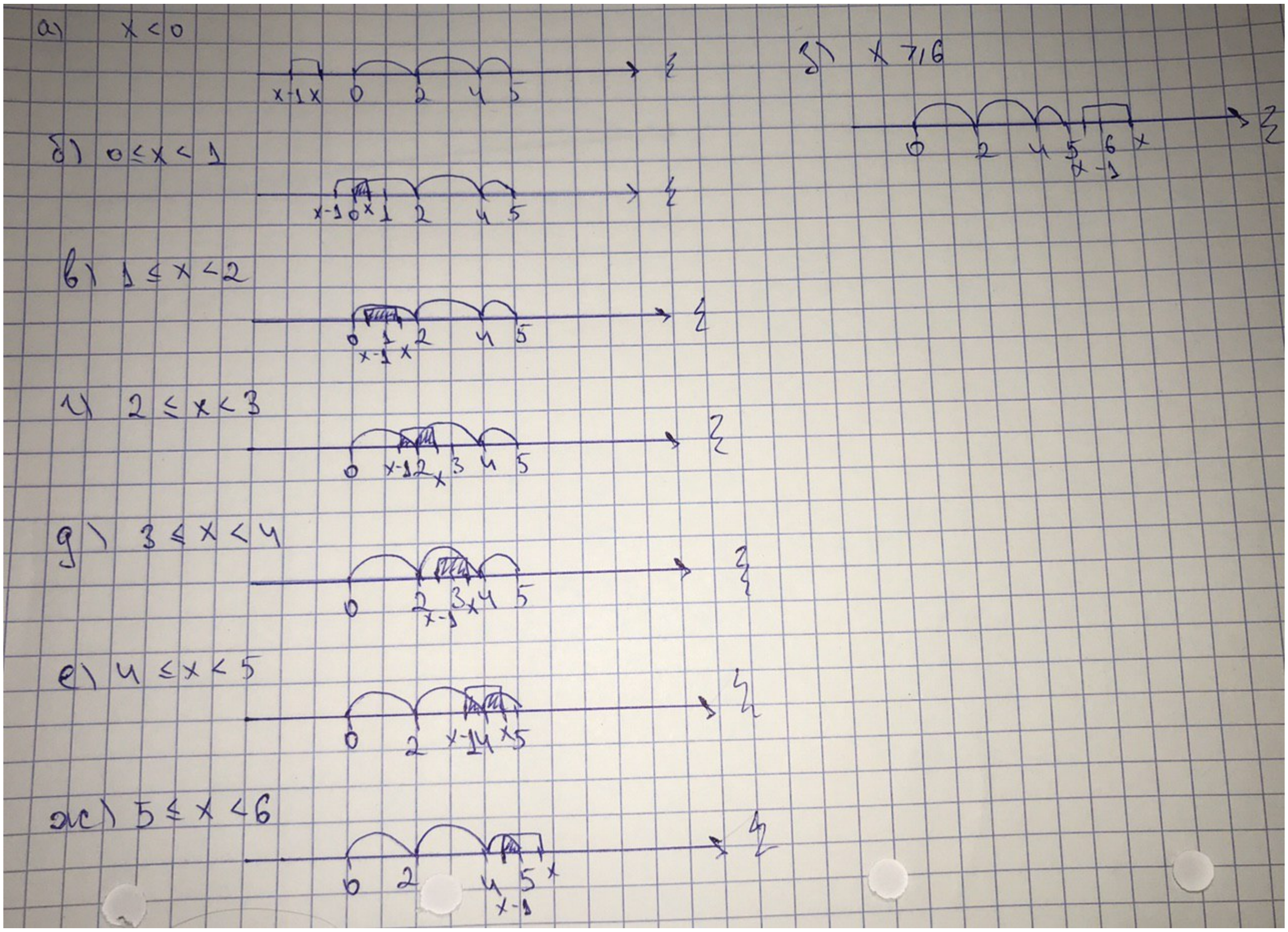
$x \ge 5$

при $\xi = 5$:

$x < 5$

$5 \le x < 6$

$x \ge 6$



#В зависимости от того, какие значения принимает переменная x,
приходим к следующим возможным случаям(рассмотрим рисунок)

> $a)$

> $x < 0$

> $(f*g)(x) = 0 :$
> $f\_g1(x) := 0 :$

> б)

> $0 \leq x < 1$

> $(f*g)(x) := \int_0^x 2\cdot 1 \, \mathrm{d}\xi$

> $f\_g2(x) := \int_0^x 2\cdot 1 \, \mathrm{d}\xi :$
> $f\_g2(x);$
> $f\_g2(0) = f\_g1(0);$

$$2\,x$$
$$0 = 0 \tag{7}$$

> $в)$

> $1 \leq x < 2$

> $(f*g)(x) = \int_{x-1}^{x} 2\cdot 1 \, d\xi$

> $f\_g3(x) := \int_{x-1}^{x} 2\cdot 1 \, d\xi :$
$f\_g3(x);$
$f\_g2(1) = f\_g3(1)$

$$2$$
$$2 = 2 \quad (8)$$

> *г*)

> $2 \le x < 3$

> $(f*g)(x) = \int_{x-1}^{2} 2\cdot 1 \, d\xi + \int_{2}^{x} (-2\cdot\xi + 6)\cdot 1 \, d\xi$

> $f\_g4(x) := \int_{x-1}^{2} 2\cdot 1 \, d\xi + \int_{2}^{x} (-2\cdot\xi + 6)\cdot 1 \, d\xi :$
$f\_g4(x);$
$f\_g3(2) = f\_g4(2)$

$$-x^2 + 4x - 2$$
$$2 = 2 \quad (9)$$

> *д*)

> $3 \le x < 4$

> $(f*g)(x) = \int_{x-1}^{x} (-2\cdot\xi + 6)\cdot 1 \, d\xi$

> $f\_g5(x) := \int_{x-1}^{x} (-2\cdot\xi + 6)\cdot 1 \, d\xi :$
$f\_g5(x);$
$f\_g4(3) = f\_g5(3);$

$$-x^2 + (x-1)^2 + 6$$
$$1 = 1 \quad (10)$$

> *е*)

> $4 \le x < 5$

> $(f*g)(x) = \int_{x-1}^{4} (-2\cdot\xi + 6)\cdot 1 \, d\xi + \int_{4}^{x} (2\cdot\xi - 10)\cdot 1 \, d\xi$

> $f\_g6(x) := \int_{x-1}^{4} (-2\cdot\xi + 6)\cdot 1 \, d\xi + \int_{4}^{x} (2\cdot\xi - 10)\cdot 1 \, d\xi :$
$f\_g6(x);$
$f\_g5(4) = f\_g6(4);$

$$38 + (x-1)^2 - 16x + x^2$$
$$-1 = -1 \quad (11)$$

> *ж*)

> $5 \le x < 6$

> $(f*g)(x) = \int_{x-1}^{5} (2\cdot\xi - 10)\cdot 1\, d\xi$

> $f\_g7(x) := \int_{x-1}^{5} (2\cdot\xi - 10)\cdot 1\, d\xi$:
$f\_g7(x)$;
$f\_g6(5) = f\_g7(5)$

$$-35 - (x-1)^2 + 10x$$

$$-1 = -1 \tag{12}$$

> з)

> $x \geq 6$

> $(f*g)(x) = 0$:
$f\_g8(x) := 0$:
$f\_g8(6) = f\_g7(6)$

$$0 = 0 \tag{13}$$

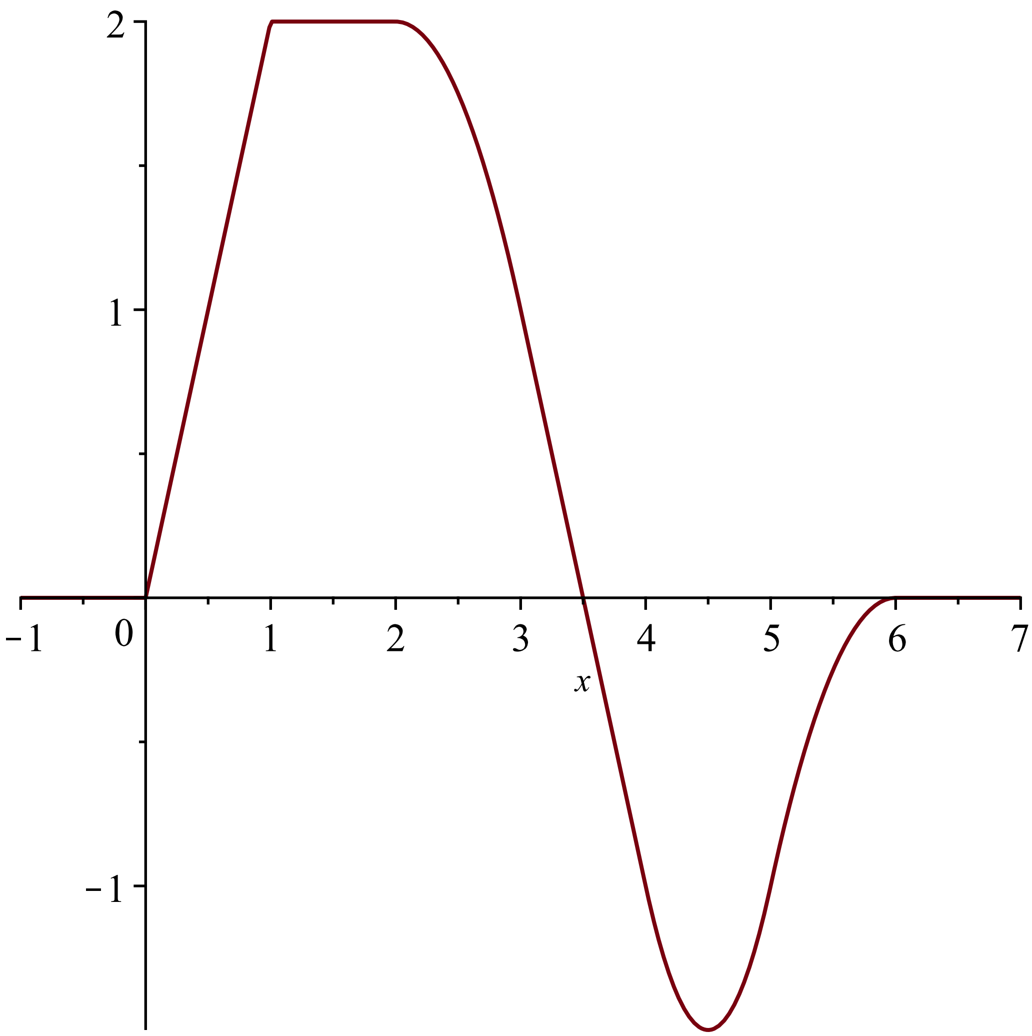
> *#В итоге получаем функцию*

> $f\_g(x) = (f*g)(x)$:

> $f\_g(x) := piecewise(x < 0, f\_g1(x), 0 \leq x < 1, f\_g2(x), 1 \leq x < 2, f\_g3(x), 2 \leq x < 3, f\_g4(x), 3 \leq x < 4, f\_g5(x), 4 \leq x < 5, f\_g6(x), 5 \leq x < 6, f\_g7(x), x \geq 6, f\_g8(x))$:
$f\_g(x)$

$$\begin{cases} 0 & x < 0 \\ 2x & 0 \leq x < 1 \\ 2 & 1 \leq x < 2 \\ -x^2 + 4x - 2 & 2 \leq x < 3 \\ -x^2 + (x-1)^2 + 6 & 3 \leq x < 4 \\ 38 + (x-1)^2 - 16x + x^2 & 4 \leq x < 5 \\ -35 - (x-1)^2 + 10x & 5 \leq x < 6 \\ 0 & 6 \leq x \end{cases} \tag{14}$$

> $plot(f\_g(x), x = -1..7)$



>

свертка функций $f(x)$ и $g(x)$ *склеилась во всех точках, следовательно найдена верно*

> *restart*;

> *with*(*plots*) :

> #Найти образ Фурье функции f(x), если f(x)≡0 при $x \notin [x1, x4]$, а при $x \in [x1, x4]$ график этой функции состоит из звеньев ломаной, проходящей через точки $A(x1, y1)$, $B(x2, y2)$, $C(x3, y3)$, $D1(x4, y4)$.

> $A(-1, 1)$:
$B(0, 1)$:
$C(1, 2)$:
$D1(2, 1)$:

#Найдем функцию f(x) как уравнение прямой по двум точкам: две точки (x1,y1), (x2,y2)

тогда уравнение прямой имеет вид $\dfrac{y - y1}{y2 - y1} = \dfrac{x - x1}{x2 - x1}$

Первые две точки $A(-1, 1)$ и $B(0, 1)$,

тогда уравнение прямой имеет вид $\dfrac{y - 1}{1 - 1} = \dfrac{x - (-1)}{0 - (-1)} \Rightarrow y = 1$ *на* $-1 < x \leq 0$

Следующие две точки $B(0, 1)$ и $C(1, 2)$, *тогда уравнение прямой имеет вид* $\dfrac{y-1}{2-1} = \dfrac{x-0}{1-0} \Rightarrow y = x+1$ *на* $0 < x \leq 1$

Следующие две точки $C(1, 2)$ и $D1(2, 1)$,

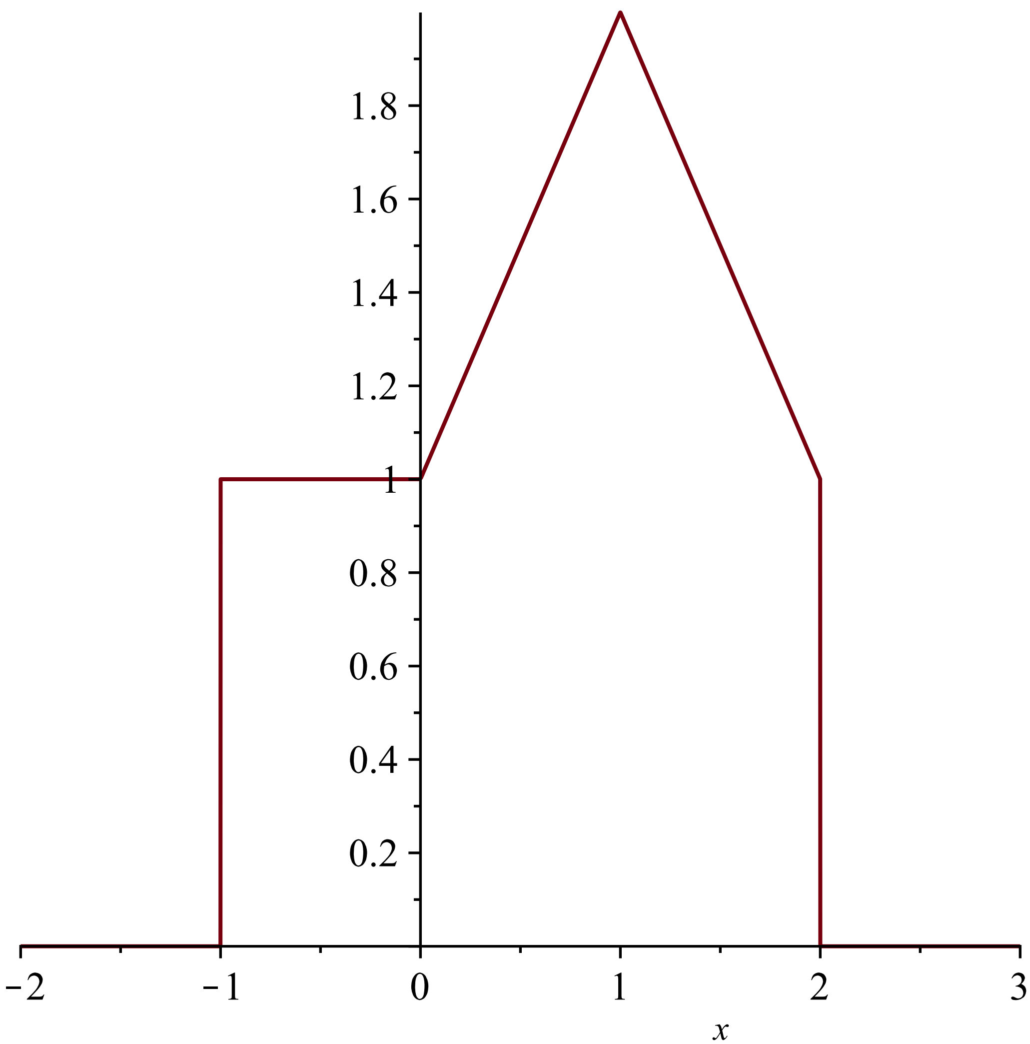
тогда уравнение прямой имеет вид $\dfrac{y-2}{1-2} = \dfrac{x-1}{2-1} \Rightarrow y = -x+3$ *на* $1 < x \leq 2$

#Получаем функцию f(x):

> $f(x) := piecewise(x \leq -1, 0, -1 < x \leq 0, 1, 0 < x \leq 1, x+1, 1 < x \leq 2, -x+3, x > 2, 0):$
$f(x)$

$$\begin{cases} 0 & x \leq -1 \\ 1 & -1 < x \leq 0 \\ 1+x & 0 < x \leq 1 \\ -x+3 & 1 < x \leq 2 \\ 0 & 2 < x \end{cases} \tag{15}$$

> $plot(f(x), x = -2..3)$



Представим функцию $f(x)$ *в виде суммы* "треугольного импульса" и "прямоугольного импульса"

> #График функции f1(x) - "прямоугольный импульс"

> $f1(x) := rect\left(\frac{x-m}{d}\right)$, $m -$ *середина отрезка* $[a, b]$, $d -$ *длина отрезка* $[a, b]$

> $a := -1 :$
$b := 0 :$

$m := \frac{a+b}{2}$

$$m := -\frac{1}{2} \tag{16}$$

$d := b - a$

$$d := 1 \tag{17}$$

$f1(x) := rect\left(\frac{x-m}{d}\right) :$
$f1(x)$

$$rect\left(x + \frac{1}{2}\right) \tag{18}$$

> #График функции f2(x) - "треугольный импульс"

> $f2(x) := c1 \cdot \Lambda\left(\frac{x-m1}{d1}\right) + rect\left(\frac{x-m2}{d2}\right)$, $m1, m2 -$ *середина отрезка* $[c, f]$, $d1, d2$ $-$ *длина отрезка* $[c, f]$, $c1 -$ *высота треугольника*

$c := 0 :$
$c1 := 1 :$
$f := 2 :$
$m1 := \frac{c+f}{2}$

$$m1 := 1 \tag{19}$$

$d1 := \frac{f-c}{2}$

$$d1 := 1 \tag{20}$$

$m2 := \frac{c+f}{2}$

$$m2 := 1 \tag{21}$$

$d2 := f - c$

$$d2 := 2 \tag{22}$$

$f2(x) := c1 \cdot \Lambda\left(\frac{x-m1}{d1}\right) + rect\left(\frac{x-m2}{d2}\right) :$
$f2(x)$

$$\Lambda(x-1) + rect\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right) \tag{23}$$

> #Таким образом, функция f(x) представляет собой сумму "треугольного импульса" и двух "прямоугольных импульсов":

> $f(x) := f1(x) + f2(x);$

(24)

$$f := x \rightarrow f1(x) + f2(x) \tag{24}$$

> $f(x)$

$$rect\left(x + \frac{1}{2}\right) + \Lambda(x-1) + rect\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right) \tag{25}$$

> *#Найдем образ Фурье функции f(x):*

$$F[f](\nu) := d \cdot e^{-I \cdot 2 \cdot \pi \cdot \nu \cdot m} \cdot \frac{\sin(\pi \cdot \nu \cdot d)}{\pi \cdot \nu \cdot d} + d2 \cdot e^{-I \cdot 2 \cdot \pi \cdot \nu \cdot m2} \cdot \frac{\sin(\pi \cdot \nu \cdot d2)}{\pi \cdot \nu \cdot d2} + d1 \cdot e^{-I \cdot 2 \cdot \pi \cdot \nu \cdot m1} \cdot \frac{\sin^2(\pi \cdot \nu \cdot d1)}{(\pi \cdot \nu \cdot d1)^2}$$

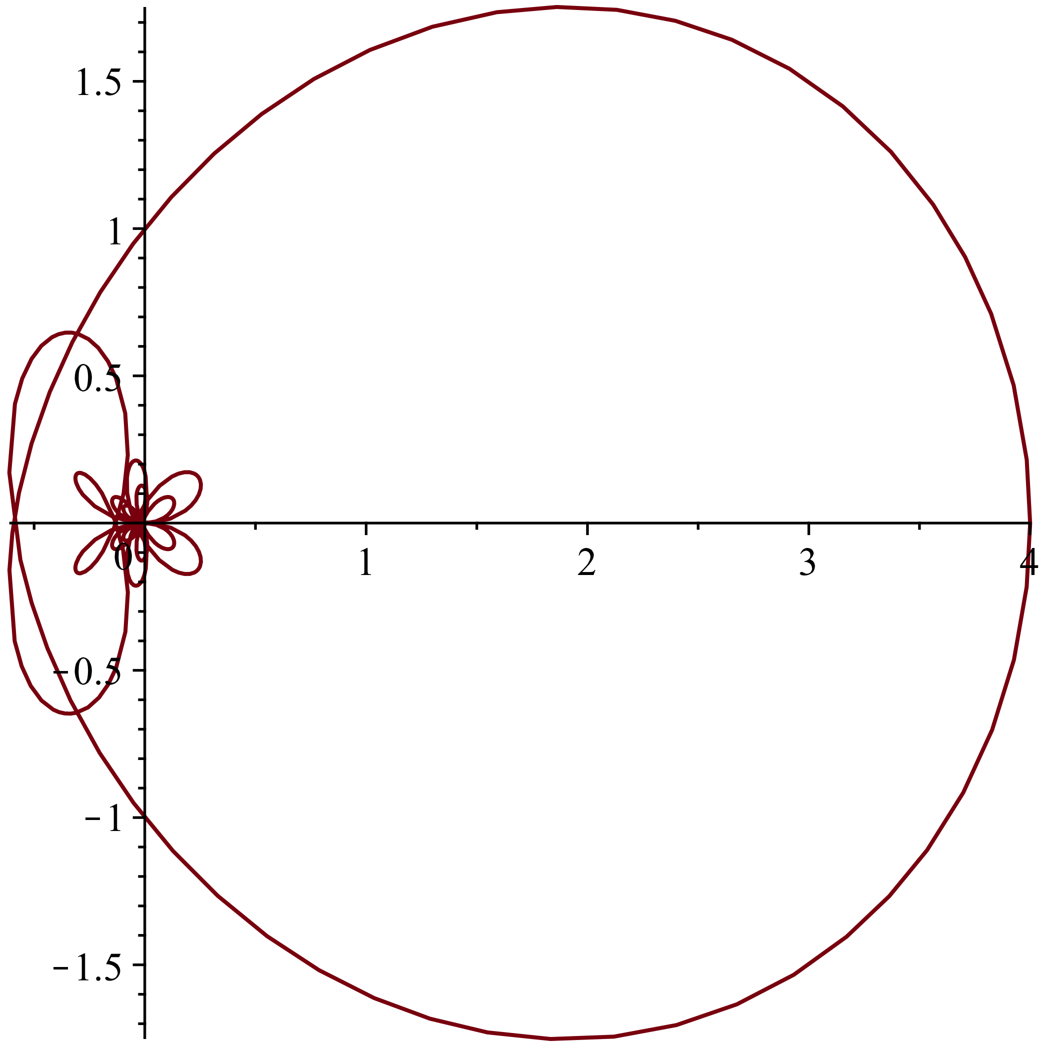
$$F_f := \nu \rightarrow \frac{d\, e^{-2 I \pi \nu m} \sin(\pi \nu d)}{\pi \nu d} + \frac{d2\, e^{-2 I \pi \nu m2} \sin(\pi \nu d2)}{\pi \nu d2} + \frac{d1\, e^{-2 I \pi \nu m1} \sin(\pi \nu d1)^2}{\pi^2 \nu^2 d1^2} \tag{26}$$

$F[f](\nu)$

$$\frac{e^{I \pi \nu} \sin(\pi \nu)}{\pi \nu} + \frac{e^{-2 I \pi \nu} \sin(2 \pi \nu)}{\pi \nu} + \frac{e^{-2 I \pi \nu} \sin(\pi \nu)^2}{\pi^2 \nu^2} \tag{27}$$

> *#Построим график найденного образа Фурье*

> $complexplot(F[f](\nu), \nu = -3..3)$

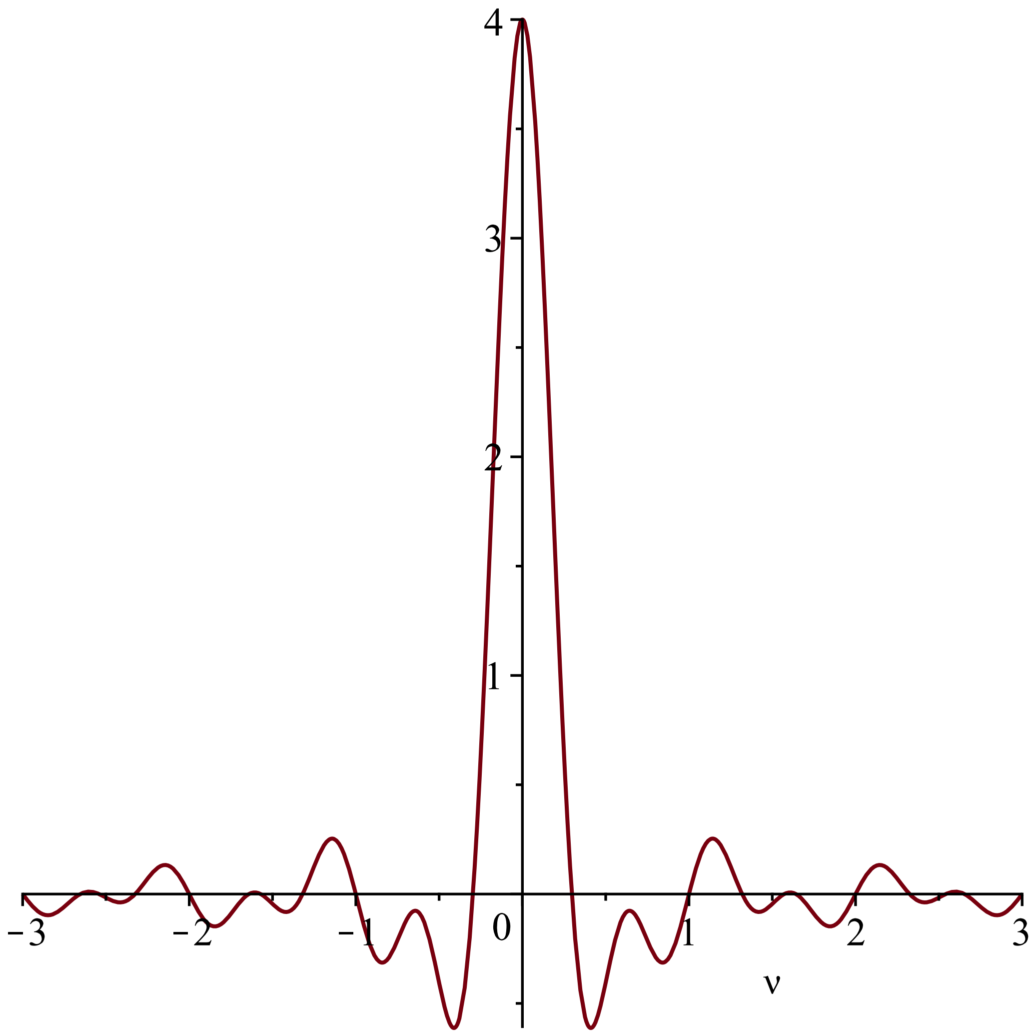


#Построим действительную часть образа Фурье

> $F1[f](\nu) := d\cdot\cos(-2\cdot\pi\cdot\nu\cdot m)\cdot\frac{\sin(\pi\cdot\nu\cdot d)}{\pi\cdot\nu\cdot d} + d2\cdot\cos(-2\cdot\pi\cdot\nu\cdot m2)\cdot\frac{\sin(\pi\cdot\nu\cdot d2)}{\pi\cdot\nu\cdot d2} + d1\cdot\cos(-2\cdot\pi\cdot\nu\cdot m1)\cdot\frac{\sin^2(\pi\cdot\nu\cdot d1)}{(\pi\cdot\nu\cdot d1)^2}$

$$F1_f := \nu \rightarrow \frac{d\cos(-2\pi\nu m)\sin(\pi\nu d)}{\pi\nu d} + \frac{d2\cos(-2\pi\nu m2)\sin(\pi\nu d2)}{\pi\nu d2} + \frac{d1\cos(-2\pi\nu m1)\sin(\pi\nu d1)^2}{\pi^2\nu^2 d1^2} \quad \textbf{(28)}$$

> $plot(F1[f](\nu), \nu=-3..3)$

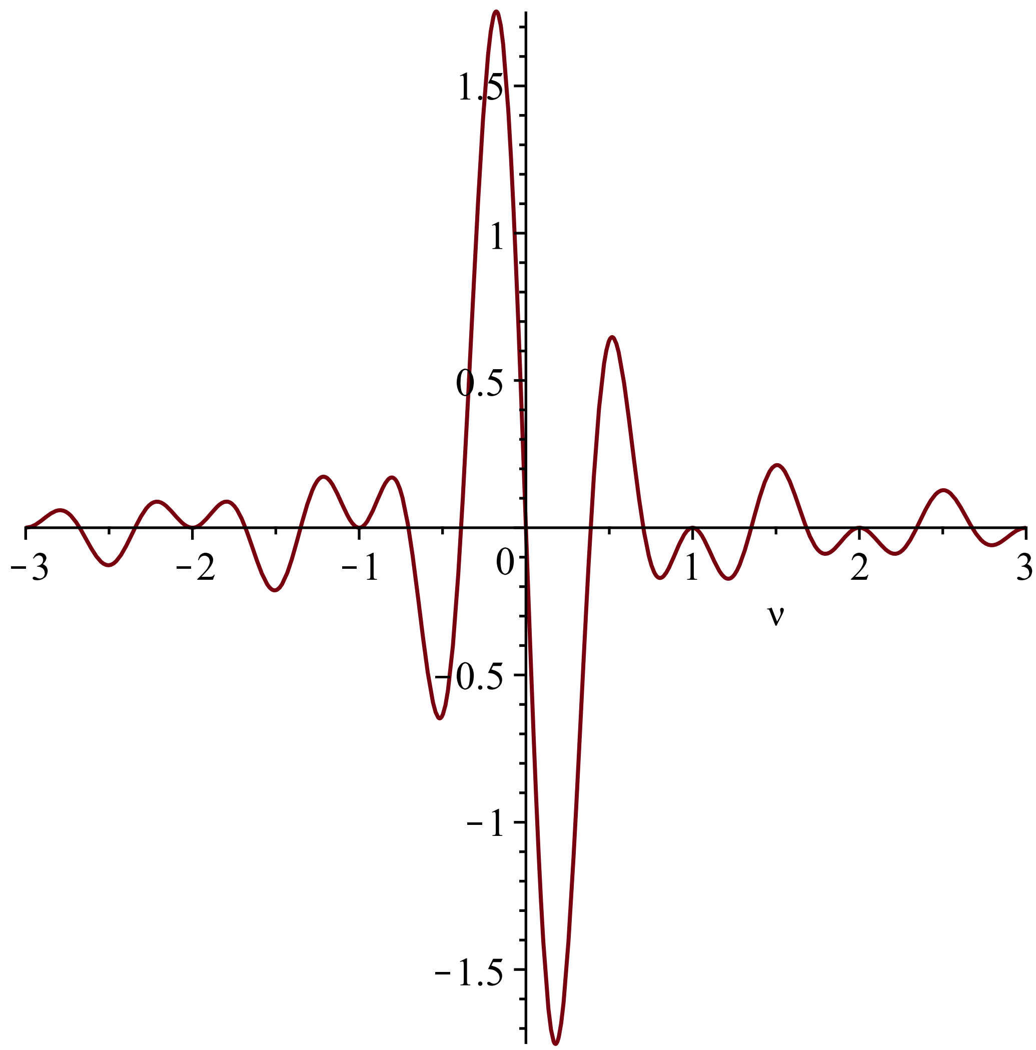


#Построим мнимую часть образа Фурье

$$> F2[f](\nu) := d\cdot\sin(-2\cdot\pi\cdot\nu\cdot m)\cdot\frac{\sin(\pi\cdot\nu\cdot d)}{\pi\cdot\nu\cdot d} + d2\cdot\sin(-2\cdot\pi\cdot\nu\cdot m2)\cdot\frac{\sin(\pi\cdot\nu\cdot d2)}{\pi\cdot\nu\cdot d2} + d1\cdot\sin(-2\cdot\pi\cdot\nu\cdot m1)\cdot\frac{\sin^2(\pi\cdot\nu\cdot d1)}{(\pi\cdot\nu\cdot d1)^2}$$

$$F2_f := \nu \to \frac{d\sin(-2\,\pi\,\nu\,m)\,\sin(\pi\,\nu\,d)}{\pi\,\nu\,d} + \frac{d2\sin(-2\,\pi\,\nu\,m2)\,\sin(\pi\,\nu\,d2)}{\pi\,\nu\,d2} + \frac{d1\sin(-2\,\pi\,\nu\,m1)\,\sin(\pi\,\nu\,d1)^2}{\pi^2\,\nu^2\,d1^2} \tag{29}$$

$$> plot(F2[f](\nu), \nu = -3..3)$$


1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
−1.5
−3
−2
−1
1
2
3
ν