#решите краевую задачу для уравнения Лапласа $\Delta u(r, \varphi, z) = 0$ *внутри цилиндра* $r \le R1, \quad 0 \le \varphi < 2\pi, \quad 0 \le z \le h$ *при следующих граничных условиях*: $u\Big|_{r=R1} = 0;\ u\Big|_{z=0} = \dfrac{U_0 r^2}{R\_1^2} sin2\varphi;\ u_z\Big|_{z=h} = 0.$

#постановка задачи

$$\Delta u(r, \varphi, z) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}u\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}u + \frac{\partial^2}{\partial z^2}u = 0: \quad r \le R1, \quad 0 \le \varphi < 2\pi, \quad 0 \le z \le h \qquad (1)$$

$$u\Big|_{r=R1} = 0: \qquad (2)$$

$$u\Big|_{z=0} = \frac{U_0 r^2}{R\_1^2} sin2\varphi \qquad (3)$$

$$u_z\Big|_{z=h} = 0: \qquad (4)$$

#Решение:

#будем искать функцию $u(r, \varphi, z)$ в *виде*:

$u(r, \varphi, z) = w(r, z)\Phi(\varphi)$, *где* $\Phi(\varphi) = sin2\varphi$: $\qquad (5)$

#подставим (5) в уравнение (1) и граничные условия (2),(3),(4), приходим к краевой задаче относительно функции w(r,z)

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}w\right) - \frac{1}{r^2}w + \frac{\partial^2}{\partial z^2}w = 0: \quad r \le R1, \quad 0 \le z \le h \qquad (6)$$

$$w\Big|_{r=R} = 0: \qquad (7)$$

$$w\Big|_{z=0} = \frac{U_0 r^2}{R\_1^2}: \qquad (8)$$

$$w_z\Big|_{z=h} = 0: \qquad (9)$$

#для решения краевое задачи (5)-(9) применим метод Фурье. Функцию w(r,z) будем искать в следующем виде:

$w(r, z) = R(r)Z(z) \not\equiv 0 \qquad (10)$

#подствавим (10) в уравнение (6) и разделим переменные

$$-\frac{\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}R(r)\right) - \frac{4}{r^2}R(r)}{R(r)} = \frac{Z''(z)}{Z(z)} = \lambda$$

$$-\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}R(r)\right) + \frac{4}{r}R(r) = \lambda rR(r), \quad r \le R1$$

$$Z''(z) - \lambda Z(z) = 0, \quad 0 \le z \le h$$

 # функция w(r,z) должна удовлетворять однородному граничному условию при r=R, приходим к задаче Штурма-Лиувилля

$$-\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}R(r)\right) + \frac{4}{r}R(r) = \lambda rR(r), \quad r \le R1 \qquad (11)$$

$R(R1) = 0 \quad (12)$
$|R(0)| < \infty \quad (13)$

#*уравнение (11) можно привести к уравнению Бесселя 2 порядка, общее решение имеет вид*
$R(r) = AJ_2\left(\sqrt{\lambda}\, r\right) + BN_2\left(\sqrt{\lambda}\, r\right)$
#*из условия (13) получаем, что B=0. Полагаем, что A=1. Учитывая граничное условие (12) получаем*
$J_2\left(\sqrt{\lambda}\, R\_1\right) = 0$
#*обозначим* $\mu = \sqrt{\lambda}\, R\_1$
$J_2(\mu) = 0 \qquad (14)$
#*если* $\mu_n - n -$ й *положительный корень уравнения* (14),
то собственные значения и *собственные функции задачи* $\cdot (11) - (13)$ *имеют вид*

$$\lambda_n = \left(\frac{\mu_n}{R\_1}\right)^2; \quad R_n = J_2\left(\frac{\mu_n}{R\_1} r\right), \; n \in N$$

$Z''_n(z) - \lambda_n Z_n(z) = 0, \quad 0 \le z \le h$
#*общее решение*
$Z_n(z) = a_n sh\left(\sqrt{\lambda_n}\, z\right) + b_n ch\left(\sqrt{\lambda_n}\,(h - z)\right)$
#*подставим* R_n и $Z_n(z)$ в (10) и *получаем счетное множество частных решений уравнения* (6),
удовлетворяющих граничному условию (7)
$$w_n(r, z) = \left[a_n sh\left(\sqrt{\lambda_n}\, z\right) + b_n ch\left(\sqrt{\lambda_n}\,(h - z)\right)\right] J_2\left(\frac{\mu_n}{R\_1} r\right)$$
#*составим ряд*
$$w(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n sh\left(\sqrt{\lambda_n}\, z\right) + b_n ch\left(\sqrt{\lambda_n}\,(h - z)\right)\right] J_2\left(\frac{\mu_n}{R\_1} r\right) \qquad (15)$$
#*определим коэффициенты ряда, чтобы решение (15) удовлетворяло граничным условиям (8), (9)*

$$w\Big|_{z=0} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n ch\left(\sqrt{\lambda_n}\, h\right) J_2\left(\frac{\mu_n}{R\_1} r\right) = \frac{U_0 r^2}{R\_1^2} :$$
$$w_z\Big|_{z=h} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n sh\left(\sqrt{\lambda_n}\;\; h\right) J_2\left(\frac{\mu_n}{R\_1} r\right) = 0 : \qquad \Rightarrow a_n = 0$$
#*вычислим коэффициенты Фурье* $c_n \equiv b_n ch\left(\sqrt{\lambda_n}\, h\right)$
$$c_n = \frac{1}{\|J_1\|^2} \int_0^{R1} r \frac{U_0 r^2}{R\_1^2} J_2\left(\frac{\mu_n}{R\_1} r\right) \mathrm{d}r$$

$$\| J`\_\_2`\|^2 = \frac{R\_1^2}{2} J_2'^2\left(\mu_n\right)$$

$$c_n = \frac{1}{\frac{R\_1^2}{2} J_2'^2\left(\mu_n\right)} \int_0^{R\_1} r \frac{U_0 r^2}{R\_1^2} J_2\left(\frac{\mu_n}{R\_1} r\right) \mathrm{d}r = \left| x = \frac{\mu_n}{R\_1} r \right| = \frac{1}{\frac{R\_1^2}{2} J_2'^2\left(\mu_n\right)} \int_0^{R\_1} \frac{U_0 x^3 R\_1^3}{R\_1^2 \mu_n^3} \frac{J_2(x) R\_1}{\mu_n}$$

$$\mathrm{d}x = \frac{2\,U_0}{\mu_n^4 J_2'^2\left(\mu_n\right)} \int_0^{R\_1} x^3 J_2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2\,U_0}{\mu_n^4 J_2'^2\left(\mu_n\right)} \mu_n^3 J_3\left(\mu_n\right) = \frac{2\,U_0}{\mu_n J_2'^2\left(\mu_n\right)} J_3\left(\mu_n\right)$$

#подставим в (15), учитывая, что $\frac{\mu}{R\_1} = \sqrt{\lambda}$

$$w(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\,U_0}{\mu_n J_2'^2\left(\mu_n\right)} J_3\left(\mu_n\right) \frac{ch\left(\frac{\mu_n}{R\_1}(h-z)\right)}{ch\left(\frac{\mu_n}{R\_1} h\right)} J_2\left(\frac{\mu_n}{R1} r\right) \quad (16)$$

#подставим (16) в (5)
 # Получаем ответ

$$u(r, \varphi, z) = 2\,U_0 sin2\varphi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_3\left(\mu_n\right)}{\mu_n J_2'^2\left(\mu_n\right)} \frac{ch\left(\frac{\mu_n}{R\_1}(h-z)\right)}{ch\left(\frac{\mu_n}{R\_1} h\right)} J_2\left(\frac{\mu_n}{R1} r\right)$$

μ_n *— положительные корни уравнения* $J_2\left(\mu_n\right) = 0$
 # Построим граифики
with(plots) :

$$u0(r, \varphi, z) := 2\,U_0 sin2\varphi \sum_{n=1}^{10} \frac{\mathrm{BesselJ}\left(3, \mu_n\right)}{\mu_n \left(\frac{\partial}{\partial \mu_n} \mathrm{BesselJ}\left(2, \mu_n\right)\right)^2} \frac{ch\left(\frac{\mu_n}{R\_1}(h-z)\right)}{ch\left(\frac{\mu_n}{R\_1} h\right)} \mathrm{BesselJ}\left(2, \frac{\mu_n}{R\_1} r\right) :$$

#Проверка
#Граничные условия:

$$\boldsymbol{u\Big|_{r=R1} = 0 :}$$

$$\boldsymbol{u\Big|_{z=0} = \frac{U_0 r^2}{R\_1^2} sin2\varphi}$$

$$\left. u_z \right|_{z=h} = 0 :$$

$$\left. u1 \right|_{r=R1} = u(R\_1, \varphi, z) = 2\ U_0 sin2\varphi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_3(\mu_n)}{\mu_n J_2'^2(\mu_n)} \quad \frac{ch\left(\frac{\mu_n}{R\_1}(h-z)\right)}{ch\left(\frac{\mu_n}{R\_1}h\right)} J_2\left(\frac{\mu_n}{R\_1} R\_1\right)$$

$$= 2\ U_0 sin2\varphi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_3(\mu_n)}{\mu_n J_2'^2(\mu_n)} \quad \frac{ch\left(\frac{\mu_n}{R\_1}(h-z)\right)}{ch\left(\frac{\mu_n}{R\_1}h\right)} J_2(\mu_n) = 0 :$$

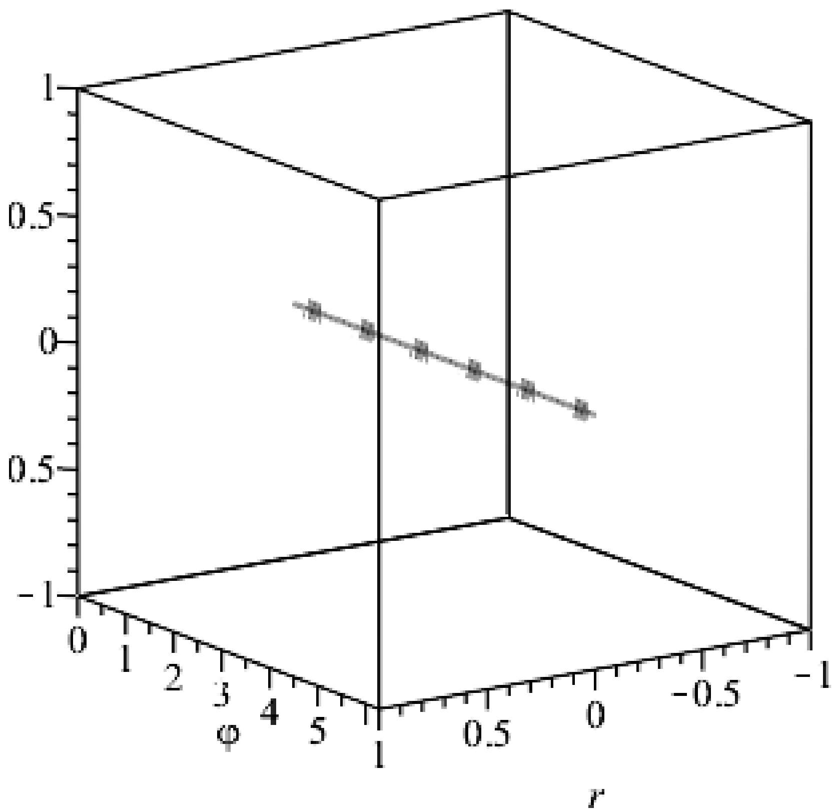
$$\left. u1 \right|_{z=0} = \frac{U_0 r^2}{R\_1^2} sin2\varphi :$$

$$u1\_bez\_z(r, \varphi) := 2 \cdot U_0 \sin(2 \cdot \varphi) \cdot \sum_{n=1}^{100} \frac{\mathrm{BesselJ}(3, \mu_n)}{\mu_n \left(\frac{\partial}{\partial \mu_n} \mathrm{BesselJ}(2, \mu_n)\right)^2} \quad \mathrm{BesselJ}\left(2, \frac{\mu_n}{R\_1} r\right)$$

$$u0\_bez\_z := (r, \varphi) \rightarrow 2\ U_0 \sin(2\ \varphi) \left(\sum_{n=1}^{10} \frac{\mathrm{BesselJ}(3, \mu_n)\ \mathrm{BesselJ}\left(2, \frac{\mu_n r}{R\_1}\right)}{\mu_n \left(\frac{d}{d\mu_n} \mathrm{BesselJ}(2, \mu_n)\right)^2} \right) \tag{1}$$

#Построим совмещенный график граничного условия и функции, полученной выше, для проверки верности решения

$$plot3d\left(\left[\frac{U_0 r^2}{R\_1^2} \sin(2 \cdot \varphi), u1\_bez\_z(r, \varphi)\right], r = 0..R\_1, \varphi = 0..2 \cdot \pi, linestyle = [solid, dot], symbol = [point, asterisk], thickness = [2, 8]\right)$$



 # Анализируя графики, делаем вывод, что они совпадают, то есть решение верное и граничные условия сошлись

$$u1_z\Big|_{z=h} = 2\ U_0 sin2\varphi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_3(\mu_n)}{\mu_n J_2'^2(\mu_n)} \quad \frac{sh\left(\frac{\mu_n}{R\_1}(h-h)\right) \cdot \left(-\frac{\mu_n}{R\_1}\right)}{ch\left(\frac{\mu_n}{R\_1}h\right)} J_2\left(\frac{\mu_n}{R1}r\right)$$

$$= 2\ U_0 sin2\varphi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_3(\mu_n)}{\mu_n J_2'^2(\mu_n)} \quad \frac{sh(0) \cdot \left(-\frac{\mu_n}{R\_1}\right)}{ch\left(\frac{\mu_n}{R\_1}h\right)} J_2\left(\frac{\mu_n}{R1}r\right) = 0 :$$