МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

МГТУ им Н.Э.Баумана

Факультет ФН
Кафедра вычислительной математики и математической физики

Соколов Арсений Андреевич

Домашнее задание №6 по математической статистике

3 курс, группа ФН11-53Б
Вариант 6

Преподаватель
_____________ Т. В. Облакова
«___» _______ 2019 г.

Москва, 2019 г.

Задание 1

В условиях задачи №5 построить последовательный критерий Вальда для проверки гипотезы $H_0 : a = a_0 = 7.5$ против альтернативы $H_1 : a = a_1 = 8$ при известном $\sigma = \sigma_1 = 2.5$. Ошибка первого рода $\alpha = 0.1$, ошибка второго рода $\beta = 0.2362404$ вычислена в пункте 4 задачи №5.
Решение.
Рассмотрим выборку, предложенную нам в условии:

```
> df
[1]   0.653 13.884 11.088  7.409  8.827  5.582  9.747  8.023  8.396
[10]   6.535  6.036  5.251 12.462  9.350  9.770  5.517  6.740 10.759
[19]  10.718  0.840  8.737  2.278  8.447  2.267  8.656  9.460  9.385
[28]   7.924  9.215 10.360  7.239  8.399  7.962  6.712  5.626  7.737
[37]   9.671 13.497 10.708  6.189 10.516  8.845 10.926  8.755  7.728
[46]  12.783  5.300  9.802  5.133  8.534  5.855  5.777 10.128 10.662
[55]   8.307  5.644 10.632  6.060  6.989  5.183  9.587  7.891 15.015
[64]   8.106  9.898 10.504  8.307 10.680  6.788  9.904  6.918  4.250
[73]   8.908  9.837  5.805  6.018  7.735  8.206  5.502  8.473  4.870
[82]  10.159  6.639  7.936  8.149 10.462 12.296  3.403 10.631  7.802
[91]   5.580  8.325 10.687  9.843  9.509  5.668  8.511  8.657  8.835
[100]  9.484
```

Критическое множество для среднего при известном среднеквадратическом отклонении запишется в данном случае как $\bar{x} > c_1$, где

$$c_1 = a_0 + \frac{qnrom(1-\alpha, 0, 1)}{\sqrt{n}}\sigma_1$$

Имеем:

```
> c1 <- a0 + (qnorm(1-alpha))/(sqrt(df_len)) * sigma1
> c1
[1] 7.820388
```

Получаем критическое множество:

$$S_1 = \{\bar{x} > 7.820388\}$$

Ошибка второго рода критерия S_1 имеет вид:

$$\beta(c_1) = \Phi(\frac{c_1 - a_1}{\sigma_1}\sqrt{n})$$

Имеем:

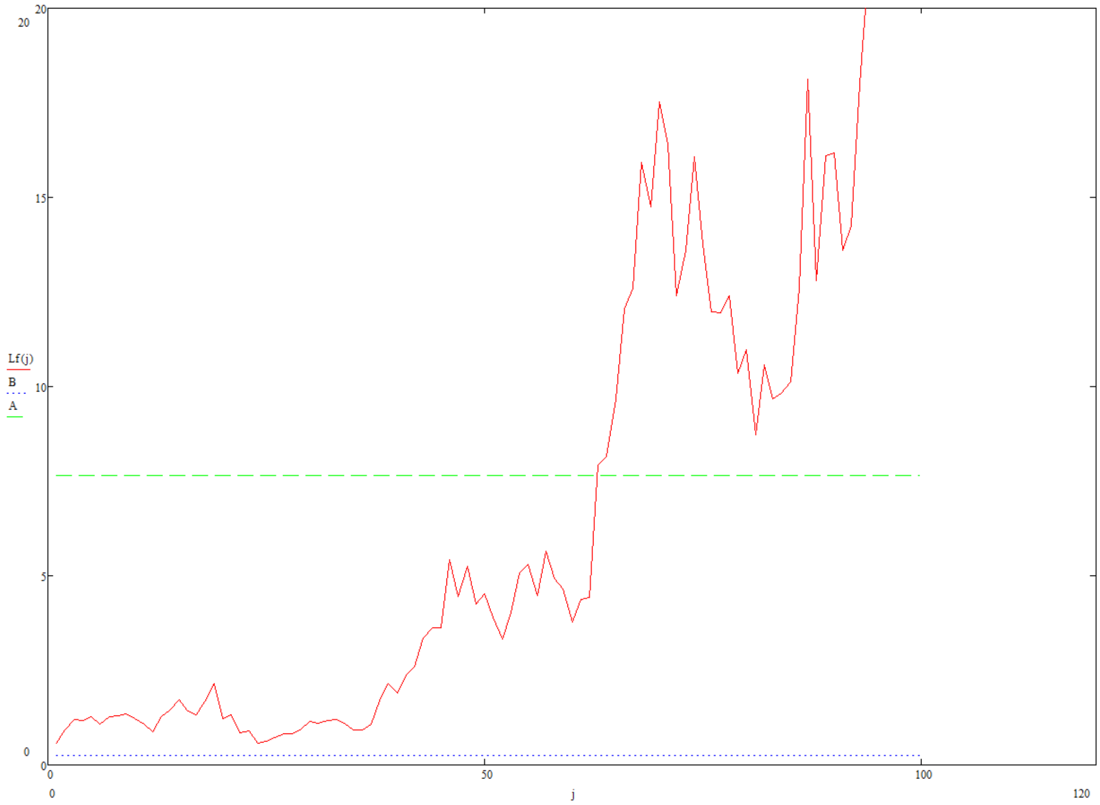
```
> beta <- pnorm((c1-a1)/sigma1 * sqrt(df_len))
> beta
[1] 0.2362404
```

Построим критерий Вальда:

$$A = \frac{1-\beta}{\alpha}$$
$$B = \frac{\beta}{1-\alpha}$$

```
> A <- (1-beta)/alpha
> B <- beta/(1-alpha)
> A
[1] 7.637596
> B
[1] 0.2624894
```

$$\mathrm{Lf(j)} = \prod_{i=1}^{j} \exp\left[\frac{z_i(a_1-a_0)}{\sigma_1^2} + \frac{a_0^2-a_1^2}{2\sigma_1^2}\right]$$



Вычислим математическое ожидание момента принятия решения при основной гипотезе H_0 и при альтернативе H_1.

$$Y_k = \ln \frac{p\left(X_k, a_1\right)}{p\left(X_k, a_0\right)} = \ln \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{\left(X_k - a_1\right)^2}{2\sigma_1^2}}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{\left(X_k - a_0\right)^2}{2\sigma_1^2}}} = -\frac{\left(X_k - a_1\right)^2}{2\sigma_1^2} + \frac{\left(X_k - a_0\right)^2}{2\sigma_1^2} =$$
$$= \frac{2X_k(a_1 - a_0) + a_0^2 - a_1^2}{2\sigma_1^2}$$

$$\mathrm{M}_0 Y_k = \frac{2a_0 * (a_1 - a_0) + a_0^2 - a_1^2}{2\sigma_1^2} = -\frac{(a_0 - a_1)^2}{2\sigma_1^2}$$

```
> M0Yk <- -(a1-a0)^2 / (2*sigma1^2)
> M0Yk
[1] -0.02
```

$$\mathrm{M}_1 Y_k = \frac{2a_1 * (a_1 - a_0) + a_0^2 - a_1^2}{2\sigma_1^2} = \frac{(a_0 - a_1)^2}{2\sigma_1^2}$$

```
> M1Yk <- -(a1-a0)^2 / (2*sigma1^2)
> M1Yk
[1] 0.02
```

Найдём среднее число испытаний, если верна нулевая гипотеза:

$$\mathrm{M}_0 \nu = \frac{\alpha \ln(A) + (1 - \alpha) \ln(B)}{\mathrm{M}_0 Y_k}$$

```
> M0_nu <- (alpha*log(A) + (1-alpha)*log(B))/M0Yk
> M0_nu
[1] 50.0241
```

А также среднее число испытаний, если верна альтернативная гипотеза:

$$\mathrm{M}_1 \nu = \frac{\beta \ln(B) + (1 - \beta) \ln(A)}{\mathrm{M}_1 Y_k}$$

```
> M1_nu <- (beta*log(B) + (1-beta)*log(A))/M1Yk
> M1_nu
[1] 61.84022
```

Задание 2

Переписать критическое множество из предыдущего пункта в виде $\left(\frac{L\left(\overrightarrow{X_n}, a_1\right)}{L\left(\overrightarrow{X_n}, a_1\right)} \geqslant C\right)$, отметить на графике и сравнить результаты применения критериев Вальда и Неймана-Пирсона.

Решение.

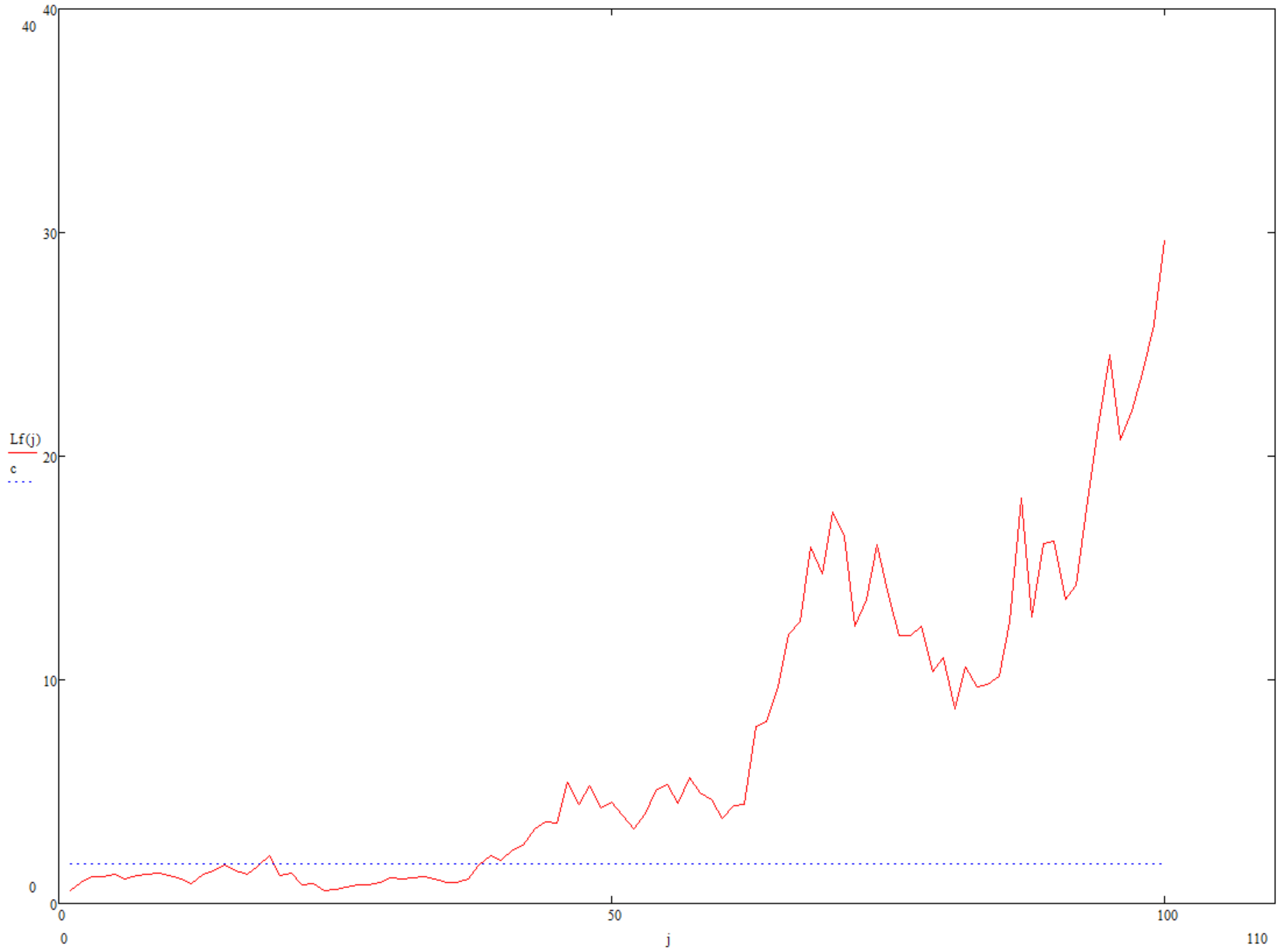
Рассмотрим критическое множество критерия Неймана-Пирсона:

$$S = \{\prod_{i=1}^{j} \exp\left[\frac{z_i(a_1 - a_0)}{\sigma_1^2} + \frac{a_0^2 - a_1^2}{2\sigma_1^2}\right] \geqslant C\} = \{\prod_{i=1}^{100} \frac{z_i(a_1 - a_0)}{\sigma_1^2} + 100\frac{a_0^2 - a_1^2}{2\sigma_1^2} \geqslant C_3\} =$$
$$= \{\sum_{i=1}^{100} z_i \geqslant C_2\} = \{\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} z_i \geqslant C_1\},$$

где

$$C_1 = c_1$$
$$C_2 = 100 \cdot C_1$$
$$C_3 = 100\frac{a_0^2 - a_1^2}{2\sigma_1^2} + C_2\frac{a_1 - a_0}{\sigma_1^2}$$
$$C = e^{C_3}$$

```
> C1 <- c1
> C2 <- 100 * C1
> C3 <- 100 * (a0^2-a1^2)/(2*sigma1^2) + C2 * (a1-a0)/(sigma1^2)
> C <- exp(C3)
> C1
[1] 7.820388
> C2
[1] 782.0388
> C3
[1] 0.5631031
> C
[1] 1.756114
```



40
30
20
10
0
Lf(j)
c
0
50
100
110
j