МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДАНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

«Московский государственный технический

университет имени Н.Э. Баумана»

(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ ФУНДАМАНТЕЛЬНЫЕ НАУКИ

КАФЕДРА
«ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА»

Направление: Математика и компьютерные науки

Дисциплина: Численные методы

Лабораторная работа №7

«Метод конечных сумм для решения интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода с симметричным, непрерывным и аналитически заданным ядром»

Группа: ФН11-53

Вариант №10

Студент: Юн А.А.

Преподаватель: Кутыркин В.А.

Оценка:

Москва 2019

Задание

Используя дискретный аналог уравнения (1) Фредгольма 2-го рода с симметричным, непрерывным и аналитически заданным ядром

$$x(s) - \lambda \int_a^b K(s,\tau)x(\tau)d\tau = y(s), \quad s \in [a;b] \qquad (1),$$ индуцированный методом

конечных сумм с квадратурными формулами прямоугольников (количество узлов в квадратурной формуле не менее 20), найти приближённое решение уравнения (1), которое имеет конкретный вид:

$$x(s) - \frac{1}{n-49} \int_0^{\frac{N+5}{N}} K(s,\tau)x(\tau)d\tau = \frac{N+5}{N}(s^2 + n - 49), \quad s \in [0; \frac{N+5}{N}]$$

($N-$номер студента в журнале, $n-$номер группы)

И $K(s,\tau) = \begin{cases} s(2\frac{N+5}{N} - \tau), & 0 \le s \le \tau; \\ \tau(2\frac{N+5}{N} - s), & \tau \le s \le \frac{N+5}{N}. \end{cases}$

Оценить абсолютную погрешность приближённого решения, сравнив его с аналитическим решением, полученным сведением уравнения (1) к краевой задаче для обыкновенного линейного дифференциального уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами.►

Решение

($N = 10, \;\; n = 53$). Рассмотрим 20 узлов.

Для построения дискретного аналога, аппроксимирующего уравнение (1), зададим на квадрате $[0; 1.5] \times [0; 1.5]$ двумерную центрально-равномерную сетку

$B \times A = \langle (s_i, \tau_i) : s_i \in B, \tau_i \in A \rangle$ типа 20×20 шага (h, τ). Следовательно, $B = \langle s_1, s_2, \ldots, s_{20} \rangle$ и $A = \langle \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{20} \rangle$ центрально-равномерные сетки отрезка $[0; 1.5]$ с шагами $h = \dfrac{b-a}{n} = 0.075$ и $\tau = \dfrac{b-a}{n} = 0.075$, соответственно.

Получаем:

$$A = B = \langle \frac{3}{80}, \frac{9}{80}, \frac{3}{16}, \frac{21}{80}, \frac{27}{80}, \frac{33}{80}, \frac{39}{80}, \frac{9}{16}, \frac{51}{80}, \frac{57}{80}, \frac{63}{80}, \frac{69}{80}, \frac{15}{16}, \frac{81}{80}, \frac{87}{80}, \frac{93}{80}, \frac{99}{80}, \frac{21}{16}, \frac{111}{80}, \frac{117}{80} \rangle$$

Для любого узла $(s_i, \tau_i) \in B \times A \quad (i, j = \overline{1,20})$ и функций K, x, y из уравнения (1) приняты обозначения: $K_j^i = K(s_i; \tau_j,\ \ x^j = x(\tau_j) = x(s_j)$ и $y^i = y(s_i)$. Используя эти обозначения и квадратурную формулу прямоугольников, из уравнения (1) получаем его дискретный аналог, аппроксимирующий уравнение (1) при $h, \tau \to 0$, в виде СЛАУ: $K(s,\tau) = \begin{cases} x^i - \lambda \sum\limits_{j=1}^{20} K_j^i h \cdot x_j = y^i; \\ i = \overline{1,20}. \end{cases}$

Введём обозначения:

$^{>}x = [x^1, \ldots, x^{20}\rangle,\ \ {}^{>}y = [y^1, \ldots, y^{20}\rangle \in {}^{>}R^n,\ \ F = (\delta_j^i - \lambda K_j^i \cdot h)_{20}^{20} = (f_j^i)_{20}^{20} \in L(R, 20)$, где

$$\delta_j^i = \begin{cases} 1, i = j; \\ 0, i \neq j. \end{cases}$$

Используя эти обозначения, СЛАУ перепишем в виде :$F \cdot {}^{>}x = {}^{>}y$

Найдем приближенное решение уравнения

$$x(s) - \frac{1}{4} \int_0^{1.5} K(s,\tau) x(\tau) d\tau = 1.5(s^2 + 4),\ \ s \in [0; 1.5]$$

$$K(s,\tau) = \begin{cases} s(3 - \tau),\ \ 0 \leq s \leq \tau; \\ \tau(3 - s),\ \ \tau \leq s \leq 1.5. \end{cases}$$

Так как $F \cdot {}^{>}x = {}^{>}y$, следовательно ${}^{>}x = F^{-1} \cdot {}^{>}y$

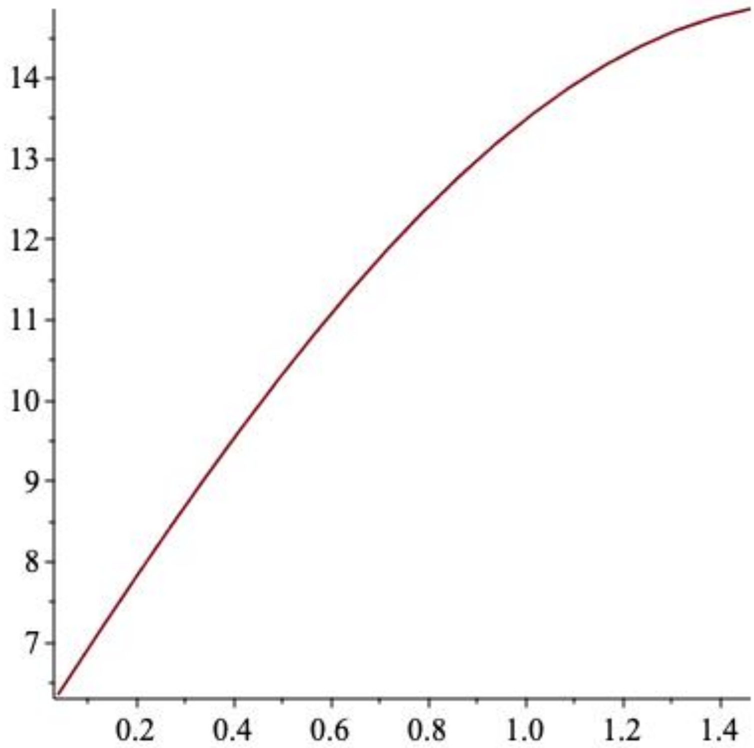
Необходимые вычисления :

$$F = \begin{array}{l}
\Big[\Big[\frac{1021867}{1024000}, -\frac{2079}{1024000}, -\frac{81}{40960}, -\frac{1971}{1024000}, -\frac{1917}{1024000}, -\frac{1863}{1024000}, -\frac{1809}{1024000}, -\frac{351}{204800}, -\frac{1701}{1024000}, -\frac{1647}{1024000}, -\frac{1593}{1024000}, -\frac{1539}{1024000}, -\frac{297}{204800}, -\frac{1431}{1024000}, -\frac{1377}{1024000}, -\frac{1323}{1024000}, -\frac{1269}{1024000}, -\frac{243}{204800}, -\frac{1161}{1024000}, -\frac{1107}{1024000}\Big], \\
\Big[-\frac{2079}{1024000}, \frac{1017763}{1024000}, -\frac{243}{40960}, -\frac{5913}{1024000}, -\frac{5751}{1024000}, -\frac{5589}{1024000}, -\frac{5427}{1024000}, -\frac{1053}{204800}, -\frac{5103}{1024000}, -\frac{4941}{1024000}, -\frac{4779}{1024000}, -\frac{4617}{1024000}, -\frac{891}{204800}, -\frac{4293}{1024000}, -\frac{4131}{1024000}, -\frac{3969}{1024000}, -\frac{3807}{1024000}, -\frac{729}{204800}, -\frac{3483}{1024000}, -\frac{3321}{1024000}\Big], \\
\Big[-\frac{81}{40960}, -\frac{243}{40960}, \frac{8111}{8192}, -\frac{1971}{204800}, -\frac{1917}{204800}, -\frac{1863}{204800}, -\frac{1809}{204800}, -\frac{351}{40960}, -\frac{1701}{204800}, -\frac{1647}{204800}, -\frac{1593}{204800}, -\frac{1539}{204800}, -\frac{297}{40960}, -\frac{1431}{204800}, -\frac{1377}{204800}, -\frac{1323}{204800}, -\frac{1269}{204800}, -\frac{243}{40960}, -\frac{1161}{204800}, -\frac{1107}{204800}\Big], \\
\Big[-\frac{1971}{1024000}, -\frac{5913}{1024000}, -\frac{1971}{204800}, \frac{1010203}{1024000}, -\frac{13419}{1024000}, -\frac{13041}{1024000}, -\frac{12663}{1024000}, -\frac{2457}{204800}, -\frac{11907}{1024000}, -\frac{11529}{1024000}, -\frac{11151}{1024000}, -\frac{10773}{1024000}, -\frac{2079}{204800}, -\frac{10017}{1024000}, -\frac{9639}{1024000}, -\frac{9261}{1024000}, -\frac{8883}{1024000}, -\frac{1701}{204800}, -\frac{8127}{1024000}, -\frac{7749}{1024000}\Big], \\
\Big[-\frac{1917}{1024000}, -\frac{5751}{1024000}, -\frac{1917}{204800}, -\frac{13419}{1024000}, \frac{1006747}{1024000}, -\frac{16767}{1024000}, -\frac{16281}{1024000}, -\frac{3159}{204800}, -\frac{15309}{1024000}, -\frac{14823}{1024000}, -\frac{14337}{1024000}, -\frac{13851}{1024000}, -\frac{2673}{204800}, -\frac{12879}{1024000}, -\frac{12393}{1024000}, -\frac{11907}{1024000}, -\frac{11421}{1024000}, -\frac{2187}{204800}, -\frac{10449}{1024000}, -\frac{9963}{1024000}\Big], \\
\Big[-\frac{1863}{1024000}, -\frac{5589}{1024000}, -\frac{1863}{204800}, -\frac{13041}{1024000}, -\frac{16767}{1024000}, \frac{1003507}{1024000}, -\frac{19899}{1024000}, -\frac{3861}{204800}, -\frac{18711}{1024000}, -\frac{18117}{1024000}, -\frac{17523}{1024000}, -\frac{16929}{1024000}, -\frac{3267}{204800}, -\frac{15741}{1024000}, -\frac{15147}{1024000}, -\frac{14553}{1024000}, -\frac{13959}{1024000}, -\frac{2673}{204800}, -\frac{12771}{1024000}, -\frac{12177}{1024000}\Big], \\
\Big[-\frac{1809}{1024000}, -\frac{5427}{1024000}, -\frac{1809}{204800}, -\frac{12663}{1024000}, -\frac{16281}{1024000}, -\frac{19899}{1024000}, \frac{1000483}{1024000}, -\frac{4563}{204800}, -\frac{22113}{1024000}, -\frac{21411}{1024000}, -\frac{20709}{1024000}, -\frac{20007}{1024000}, -\frac{3861}{204800}, -\frac{18603}{1024000}, -\frac{17901}{1024000}, -\frac{17199}{1024000}, -\frac{16497}{1024000}, -\frac{3159}{204800}, -\frac{15093}{1024000}, -\frac{14391}{1024000}\Big], \\
\Big[-\frac{351}{204800}, -\frac{1053}{204800}, -\frac{351}{40960}, -\frac{2457}{204800}, -\frac{3159}{204800}, -\frac{3861}{204800}, -\frac{4563}{204800}, \frac{39907}{40960}, -\frac{5103}{204800}, -\frac{4941}{204800}, -\frac{4779}{204800}, -\frac{4617}{204800}, -\frac{891}{40960}, -\frac{4293}{204800}, -\frac{4131}{204800}, -\frac{3969}{204800}, -\frac{3807}{204800}, -\frac{729}{40960}, -\frac{3483}{204800}, -\frac{3321}{204800}\Big], \\
\Big[-\frac{1701}{1024000}, -\frac{5103}{1024000}, -\frac{1701}{204800}, -\frac{11907}{1024000}, -\frac{15309}{1024000}, -\frac{18711}{1024000}, -\frac{22113}{1024000}, -\frac{5103}{204800}, \frac{995083}{1024000}, -\frac{27999}{1024000}, -\frac{27081}{1024000}, -\frac{26163}{1024000}, -\frac{5049}{204800}, -\frac{24327}{1024000}, -\frac{23409}{1024000}, -\frac{22491}{1024000}, -\frac{21573}{1024000}, -\frac{4131}{204800}, -\frac{19737}{1024000}, -\frac{18819}{1024000}\Big], \\
\Big[-\frac{1647}{1024000}, -\frac{4941}{1024000}, -\frac{1647}{204800}, -\frac{11529}{1024000}, -\frac{14823}{1024000}, -\frac{18117}{1024000}, -\frac{21411}{1024000}, -\frac{4941}{204800}, -\frac{27999}{1024000}, \frac{992707}{1024000}, -\frac{30267}{1024000}, -\frac{29241}{1024000}, -\frac{5643}{204800}, -\frac{27189}{1024000}, -\frac{26163}{1024000}, -\frac{25137}{1024000}, -\frac{24111}{1024000}, -\frac{4617}{204800}, -\frac{22059}{1024000}, -\frac{21033}{1024000}\Big], \\
\Big[-\frac{1593}{1024000}, -\frac{4779}{1024000}, -\frac{1593}{204800}, -\frac{11151}{1024000}, -\frac{14337}{1024000}, -\frac{17523}{1024000}, -\frac{20709}{1024000}, -\frac{4779}{204800}, -\frac{27081}{1024000}, -\frac{30267}{1024000}, \frac{990547}{1024000}, -\frac{32319}{1024000}, -\frac{6237}{204800}, -\frac{30051}{1024000}, -\frac{28917}{1024000}, -\frac{27783}{1024000}, -\frac{26649}{1024000}, -\frac{5103}{204800}, -\frac{24381}{1024000}, -\frac{23247}{1024000}\Big], \\
\Big[-\frac{1539}{1024000}, -\frac{4617}{1024000}, -\frac{1539}{204800}, -\frac{10773}{1024000}, -\frac{13851}{1024000}, -\frac{16929}{1024000}, -\frac{20007}{1024000}, -\frac{4617}{204800}, -\frac{26163}{1024000}, -\frac{29241}{1024000}, -\frac{32319}{1024000}, \frac{988603}{1024000}, -\frac{6831}{204800}, -\frac{32913}{1024000}, -\frac{31671}{1024000}, -\frac{30429}{1024000}, -\frac{29187}{1024000}, -\frac{5589}{204800}, -\frac{26703}{1024000}, -\frac{25461}{1024000}\Big], \\
\Big[-\frac{297}{204800}, -\frac{891}{204800}, -\frac{297}{40960}, -\frac{2079}{204800}, -\frac{2673}{204800}, -\frac{3267}{204800}, -\frac{3861}{204800}, -\frac{891}{40960}, -\frac{5049}{204800}, -\frac{5643}{204800}, -\frac{6237}{204800}, -\frac{6831}{204800}, \frac{7895}{8192}, -\frac{1431}{40960}, -\frac{1377}{40960}, -\frac{1323}{40960}, -\frac{1269}{40960}, -\frac{243}{8192}, -\frac{1161}{40960}, -\frac{1107}{40960}\Big], \\
\Big[-\frac{1431}{1024000}, -\frac{4293}{1024000}, -\frac{1431}{204800}, -\frac{10017}{1024000}, -\frac{12879}{1024000}, -\frac{15741}{1024000}, -\frac{18603}{1024000}, -\frac{4293}{204800}, -\frac{24327}{1024000}, -\frac{27189}{1024000}, -\frac{30051}{1024000}, -\frac{32913}{1024000}, -\frac{1431}{40960}, \frac{985363}{1024000}, -\frac{37179}{1024000}, -\frac{35721}{1024000}, -\frac{34263}{1024000}, -\frac{6561}{204800}, -\frac{31347}{1024000}, -\frac{29889}{1024000}\Big], \\
\Big[-\frac{1377}{1024000}, -\frac{4131}{1024000}, -\frac{1377}{204800}, -\frac{9639}{1024000}, -\frac{12393}{1024000}, -\frac{15147}{1024000}, -\frac{17901}{1024000}, -\frac{4131}{204800}, -\frac{23409}{1024000}, -\frac{26163}{1024000}, -\frac{28917}{1024000}, -\frac{31671}{1024000}, -\frac{1377}{40960}, -\frac{37179}{1024000}, \frac{984067}{1024000}, -\frac{38367}{1024000}, -\frac{36801}{1024000}, -\frac{7047}{204800}, -\frac{33669}{1024000}, -\frac{32103}{1024000}\Big], \\
\Big[-\frac{1323}{1024000}, -\frac{3969}{1024000}, -\frac{1323}{204800}, -\frac{9261}{1024000}, -\frac{11907}{1024000}, -\frac{14553}{1024000}, -\frac{17199}{1024000}, -\frac{3969}{204800}, -\frac{22491}{1024000}, -\frac{25137}{1024000}, -\frac{27783}{1024000}, -\frac{30429}{1024000}, -\frac{1323}{40960}, -\frac{35721}{1024000}, -\frac{38367}{1024000}, \frac{982987}{1024000}, -\frac{39339}{1024000}, -\frac{7533}{204800}, -\frac{35991}{1024000}, -\frac{34317}{1024000}\Big], \\
\Big[-\frac{1269}{1024000}, -\frac{3807}{1024000}, -\frac{1269}{204800}, -\frac{8883}{1024000}, -\frac{11421}{1024000}, -\frac{13959}{1024000}, -\frac{16497}{1024000}, -\frac{3807}{204800}, -\frac{21573}{1024000}, -\frac{24111}{1024000}, -\frac{26649}{1024000}, -\frac{29187}{1024000}, -\frac{1269}{40960}, -\frac{34263}{1024000}, -\frac{36801}{1024000}, -\frac{39339}{1024000}, \frac{982123}{1024000}, -\frac{8019}{204800}, -\frac{38313}{1024000}, -\frac{36531}{1024000}\Big], \\
\Big[-\frac{243}{204800}, -\frac{729}{204800}, -\frac{243}{40960}, -\frac{1701}{204800}, -\frac{2187}{204800}, -\frac{2673}{204800}, -\frac{3159}{204800}, -\frac{729}{40960}, -\frac{4131}{204800}, -\frac{4617}{204800}, -\frac{5103}{204800}, -\frac{5589}{204800}, -\frac{243}{8192}, -\frac{6561}{204800}, -\frac{7047}{204800}, -\frac{7533}{204800}, -\frac{8019}{204800}, \frac{39259}{40960}, -\frac{8127}{204800}, -\frac{7749}{204800}\Big], \\
\Big[-\frac{1161}{1024000}, -\frac{3483}{1024000}, -\frac{1161}{204800}, -\frac{8127}{1024000}, -\frac{10449}{1024000}, -\frac{12771}{1024000}, -\frac{15093}{1024000}, -\frac{3483}{204800}, -\frac{19737}{1024000}, -\frac{22059}{1024000}, -\frac{24381}{1024000}, -\frac{26703}{1024000}, -\frac{1161}{40960}, -\frac{31347}{1024000}, -\frac{33669}{1024000}, -\frac{35991}{1024000}, -\frac{38313}{1024000}, -\frac{8127}{204800}, \frac{981043}{1024000}, -\frac{40959}{1024000}\Big], \\
\Big[-\frac{1107}{1024000}, -\frac{3321}{1024000}, -\frac{1107}{204800}, -\frac{7749}{1024000}, -\frac{9963}{1024000}, -\frac{12177}{1024000}, -\frac{14391}{1024000}, -\frac{3321}{204800}, -\frac{18819}{1024000}, -\frac{21033}{1024000}, -\frac{23247}{1024000}, -\frac{25461}{1024000}, -\frac{1107}{40960}, -\frac{29889}{1024000}, -\frac{32103}{1024000}, -\frac{34317}{1024000}, -\frac{36531}{1024000}, -\frac{7749}{204800}, -\frac{40959}{1024000}, \frac{980827}{1024000}\Big]\Big]
\end{array}$$

$$y = \left[\frac{76827}{12800}, \frac{77043}{12800}, \frac{3099}{512}, \frac{78123}{12800}, \frac{78987}{12800}, \frac{80067}{12800}, \frac{81363}{12800}, \frac{3315}{512}, \frac{84603}{12800}, \frac{86547}{12800}, \frac{88707}{12800}, \frac{91083}{12800}, \frac{3747}{512}, \frac{96483}{12800}, \frac{99507}{12800}, \frac{102747}{12800}, \frac{106203}{12800}, \frac{4395}{512}, \frac{113763}{12800}, \frac{117867}{12800}\right]$$

$$x = [6.3512, 7.0396, 7.7151, 8.3750, 9.0164, 9.6367, 10.233, 10.803, 11.345, 11.855, 12.333, 12.775, 13.180, 13.546, 13.873, 14.157, 14.399, 14.597, 14.750, 14.857]$$

Получили сеточную функцию, индуцирующую с помощью интерполяции в виде ломаной приближённое решение уравнения (1). Построим график полученного приближенного решения:



Найдем аналитическое решение уравнения

$$x(s) - \frac{1}{4}\int_{0}^{1.5} K(s,\tau)x(\tau)d\tau = 1.5(s^2+4), \quad s \in [0; 1.5]$$

$$x(s) = C_1 sin(\sqrt{\frac{2(N+5)}{N(n-49)}}s) + C_2 cos(\sqrt{\frac{2(N+5)}{N(n-49)}}s) + (n-49)$$

C_1 и C_2 определим из следующей системы

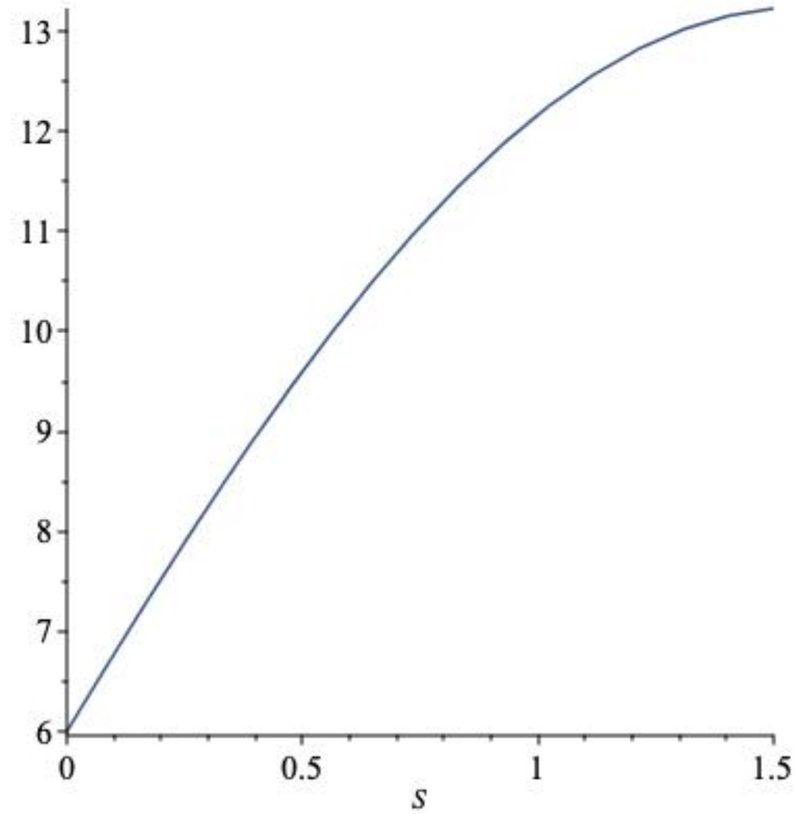
$$\begin{cases} C_2 + n - 49 = \frac{N+5}{N}(n-49); \\ C_1 sin(\sqrt{\frac{2(N+5)}{N(n-49)}}\frac{N+5}{N}) + C_2 cos(\sqrt{\frac{2(N+5)}{N(n-49)}}\frac{N+5}{N}) + (n-49) + \\ \frac{N+5}{N}[C_1\sqrt{\frac{2(N+5)}{N(n-49)}}cos(\sqrt{\frac{2(N+5)}{N(n-49)}}\frac{N+5}{N}) - C_2\sqrt{\frac{2(N+5)}{N(n-49)}}sin(\sqrt{\frac{2(N+5)}{N(n-49)}}\frac{N+5}{N})] = \\ = \frac{N+5}{N}^3 + (n-49)\frac{N+5}{N} + 2\frac{N+5}{N}^2) \end{cases}$$

Получаем:

$$x(s) = C_1 sin(\sqrt{0.75}s) + C_2 cos(\sqrt{0.75}s) + 4$$

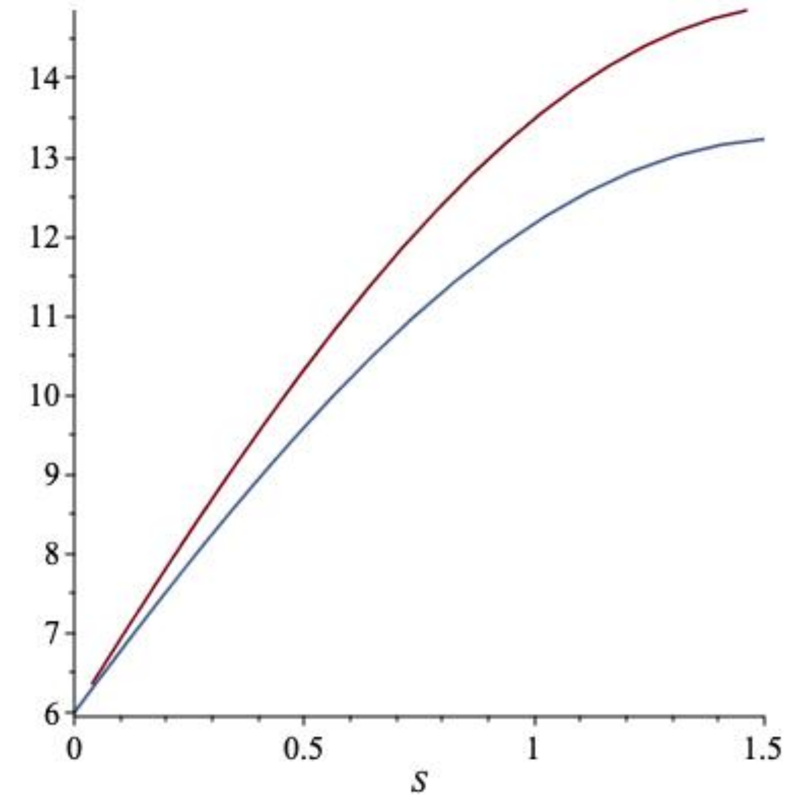
$$\begin{cases} C_1 = \dfrac{(12sin(\sqrt{3}\frac{3}{4})\sqrt{3} - 16cos(\sqrt{3}\frac{3}{4}) + 79)}{(2(3cos(\sqrt{3}\frac{3}{4})\sqrt{3} + 4sin(\sqrt{3}\frac{3}{4}))} \\ C_2 = 2 \end{cases}$$

Построим график полученного аналитического решения:



А так же построим совмещенные графики полученных решений и найдем абсолютную погрешность(красным выделено приближенное значение, синим-аналитическое решение)

$$\Delta x = 1.647596873$$



14
13
12
11
10
9
8
7
6
0
0.5
1
1.5
s