>

> *with*(*plots*) :

> #*Найти свертку функций* $f(x)$ и $g(x)$, *если функция* $f(x)$ *принимает значение, равное нулю при* $x \notin [x_1, x_4]$, а *при* $x \in [x_1, x_4]$ *ее график состоит из звеньев ломаной ABCD*

> $x1 := -1 :$
$x2 := 2 :$
$x3 := 3 :$
$x4 := 5 :$
$a := 1 :$
$b := -2 :$

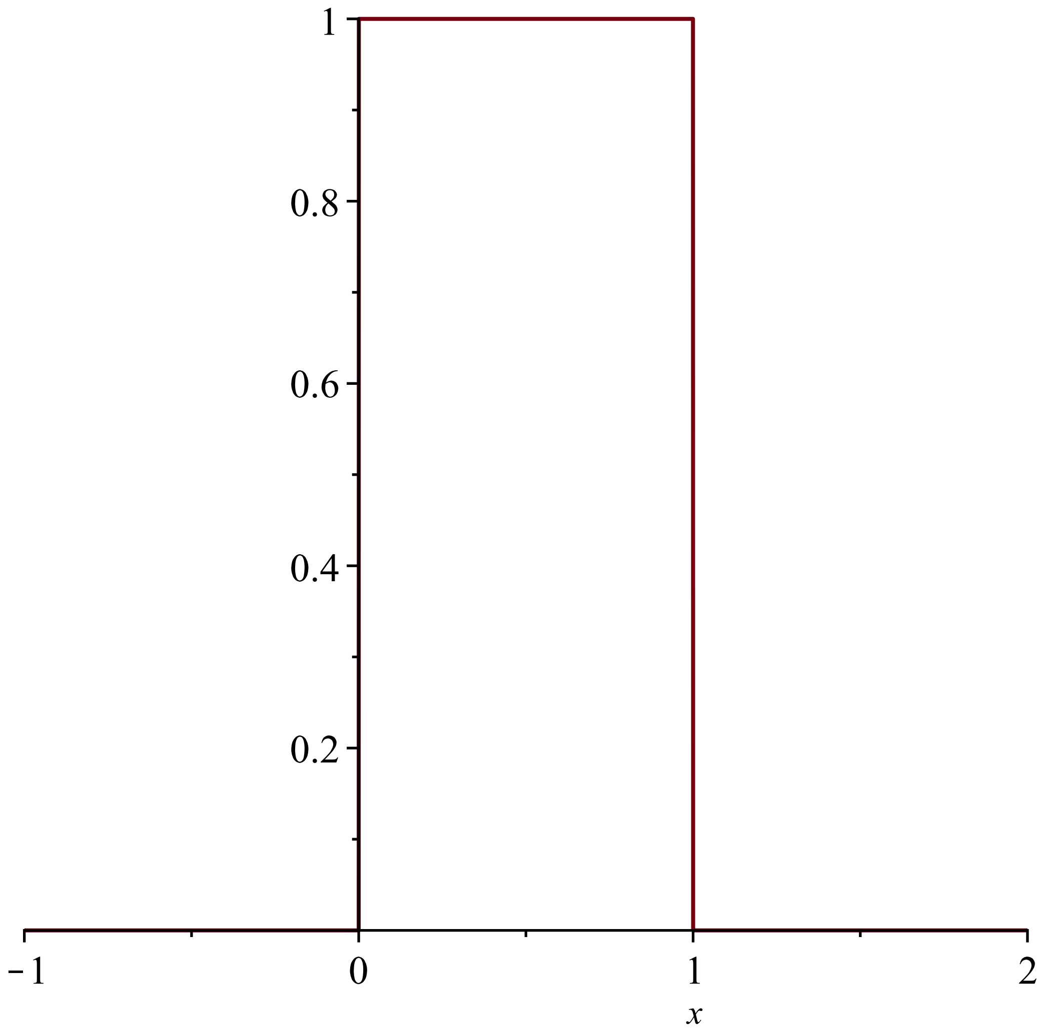
> $A(x1, a);$
$B(x2, a);$
$C(x3, b);$
$D1(x4, 0);$

$$A(-1, 1)$$
$$B(2, 1)$$
$$C(3, -2)$$
$$D1(5, 0) \tag{1}$$

> $g(x) := piecewise(x < 0, 0, \text{`and`}(x \geq 0, x < 1), 1, x \geq 1, 0) :$
$g(x)$

$$\begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & 1 \leq x \end{cases} \tag{2}$$

> $plot(g(x), x = -1\,..2)$



#Найдем функцию f(x) как уравнение прямой по двум точкам: две точки (x1,y1), (x2,y2)

тогда уравнение прямой имеет вид $\frac{y - y1}{y2 - y1} = \frac{x - x1}{x2 - x1}$

Первые две точки $A(-1, 1)$ и $B(2, 1)$,

тогда уравнение прямой имеет вид $\frac{y - 1}{1 - 1} = \frac{x - (-1)}{2 - (-1)} \Rightarrow y = 1$ на $-1 < x \le 2$

Следующие две точки $B(2, 1)$ и $C(3, -2)$,

тогда уравнение прямой имеет вид $\frac{y - 2}{-2 - 1} = \frac{x - 2}{3 - 2} \Rightarrow y = -3 \cdot x + 7$ на $2 < x \le 3$

Следующие две точки $C(3, -2)$ и $D1(5, 0)$,

тогда уравнение прямой имеет вид $\frac{y - (-2)}{0 - (-2)} = \frac{x - 3}{5 - 3} \Rightarrow y = x - 5$ на $3 < x \le 5$

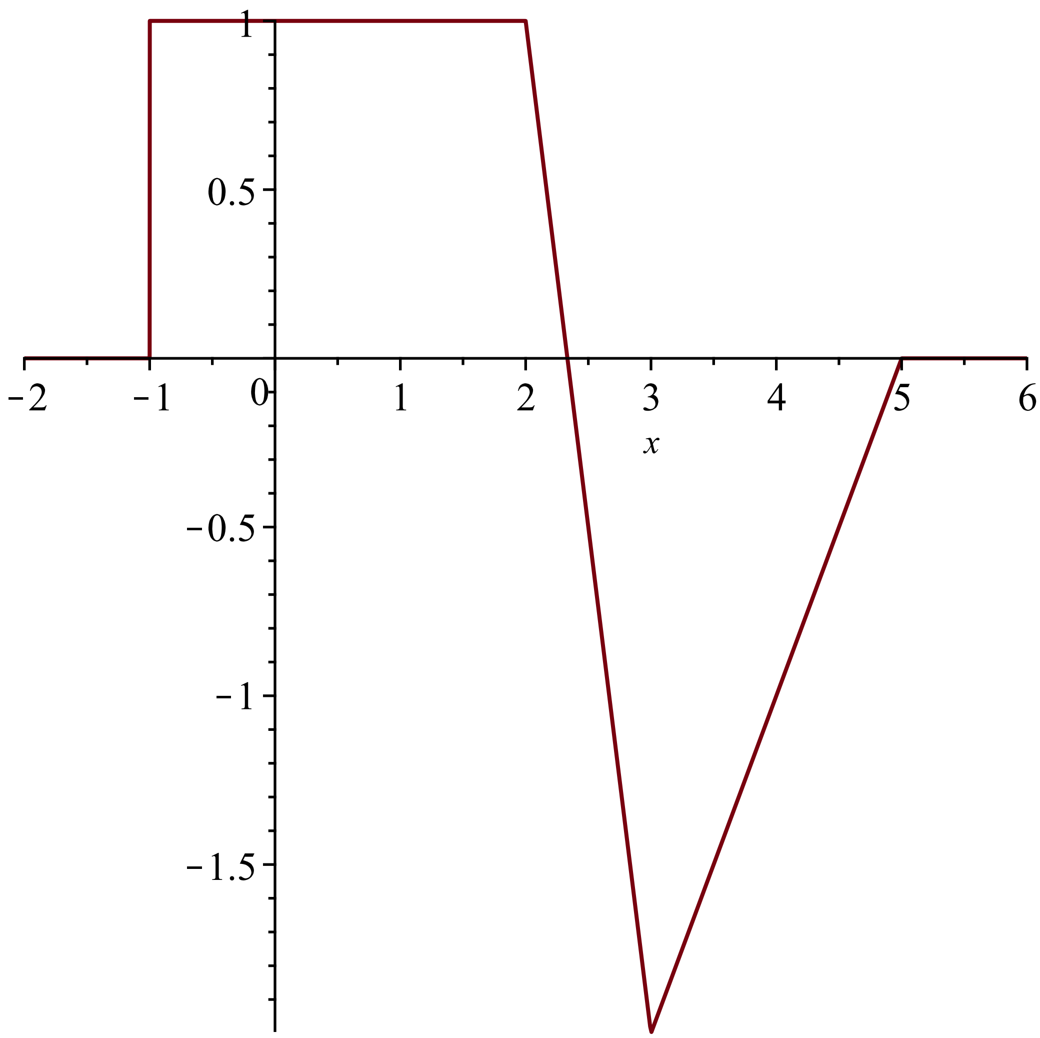
#Получаем функцию f(x):

> $f(x) := piecewise(x \le -1, 0, `and`(x > -1, x \le 2), 1, `and`(x > 2, x \le 3), -3 \cdot x + 7, `and`(x > 3, x \le 5), x - 5, x > 5, 0)$:

$f(x)$

$$\begin{cases} 0 & x \leq -1 \\ 1 & -1 < x \leq 2 \\ -3\,x+7 & 2 < x \leq 3 \\ -5+x & 3 < x \leq 5 \\ 0 & 5 < x \end{cases} \quad \textbf{(3)}$$

> $plot(f(x), x = -2..6)$



> #Найдем свертку функций f(x) и g(x) по формуле $(f*g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)g(x-\xi)\,\mathrm{d}\xi$

> #Запишем функции $f(\xi)$ и $g(x-\xi)$:

> $f(\xi) := piecewise(\xi \leq -1, 0, `and`(\xi > -1, \xi \leq 2), 1, `and`(\xi > 2, \xi \leq 3), -3\cdot\xi+7, `and`(\xi > 3, \xi \leq 5), \xi - 5, \xi > 5, 0) :$

$f(\xi)$

$$\begin{cases} 0 & \xi \leq -1 \\ 1 & -1 < \xi \leq 2 \\ -3\,\xi + 7 & 2 < \xi \leq 3 \\ -5 + \xi & 3 < \xi \leq 5 \\ 0 & 5 < \xi \end{cases} \qquad \textbf{(4)}$$

> $g(x\text{-}\xi) := piecewise(x\text{-}\xi < 0, 0, \text{`}and\text{`}(x - \xi \geq 0, x\text{-}\xi < 1), 1, x\text{-}\xi \geq 1, 0);$

$$g(x - \xi) := \begin{cases} 0 & x - \xi < 0 \\ 1 & 0 \leq x - \xi < 1 \\ 0 & 1 \leq x - \xi \end{cases} \qquad \textbf{(5)}$$

> $g(x\text{-}\xi) := piecewise(\xi \leq x - 1, 0, \text{`}and\text{`}(\xi > x - 1, \xi \leq x), 1, \xi > x, 0);$

$$g(x - \xi) := \begin{cases} 0 & \xi \leq -1 + x \\ 1 & -1 + x < \xi \leq x \\ 0 & x < \xi \end{cases} \qquad \textbf{(6)}$$

>

Подставим в *интервалы функции* $g(x)$ *значения* $-1, 2, 3, 5$

при $\xi = -1$:

$x < -1$

$-1 \leq x < 0$

$x \geq 0$

при $\xi = 2$:

$x < 2$

$2 \leq x < 3$

$x \geq 3$

при $\xi = 3$:

$x < 3$

$3 \leq x < 4$

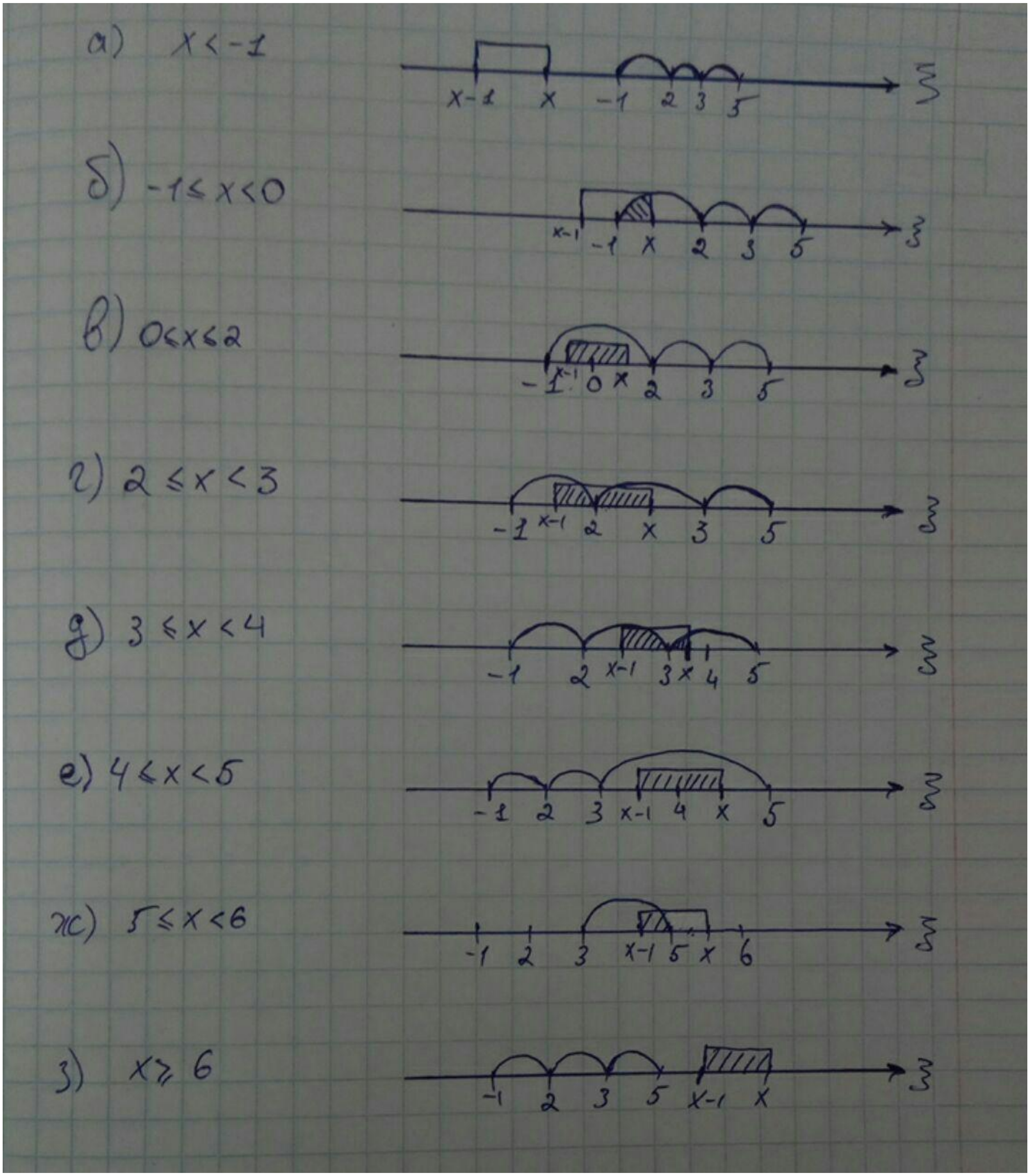
$x \geq 4$

при $\xi = 5$:

$x < 5$

$5 \leq x < 6$

$x \geq 6$



#В зависимости от того, какие значения принимает переменная *x*, приходим к следующим возможным случаям(рассмотрим рисунок)

> *a*)

> $x < -1$

> $(f*g)(x) = 0$:

> б)

> $-1 \le x < 0$

> $(f*g)(x) := \int_{-1}^{x} 1 \cdot 1 \, d\xi$

> $\int_{-1}^{x} 1 \cdot 1 \, d\xi$

$$x + 1 \tag{7}$$

> в)

> $0 \le x < 2$

> $(f*g)(x) = \int_{x-1}^{x} 1 \cdot 1 \, d\xi$

> $\int_{x-1}^{x} 1 \cdot 1 \, d\xi$

$$1 \tag{8}$$

> г)

> $2 \le x < 3$

> $(f*g)(x) = \int_{x-1}^{2} 1 \cdot 1 \, d\xi + \int_{2}^{x} (-3 \cdot \xi + 7) \cdot 1 \, d\xi$

> $\int_{x-1}^{2} 1 \cdot 1 \, d\xi + \int_{2}^{x} (-3 \cdot \xi + 7) \cdot 1 \, d\xi$

$$-5 + 6x - \frac{3}{2} x^2 \tag{9}$$

> д)

> $3 \le x < 4$

> $(f*g)(x) = \int_{x-1}^{3} (-3 \cdot \xi + 7) \cdot 1 \, d\xi + \int_{3}^{x} (\xi - 5) \cdot 1 \, d\xi$

> $\int_{x-1}^{3} (-3 \cdot \xi + 7) \cdot 1 \, d\xi + \int_{3}^{x} (\xi - 5) \cdot 1 \, d\xi$

$$25 + \frac{3(x-1)^2}{2} - 12x + \frac{x^2}{2} \tag{10}$$

> е)

> $4 \le x < 5$

> $(f*g)(x) = \int_{x-1}^{x} (\xi - 5) \cdot 1 \, d\xi$

> $\int_{x-1}^{x} (\xi - 5) \cdot 1 \, d\xi$

$$-5 + \frac{x^2}{2} - \frac{(x-1)^2}{2} \tag{11}$$

> *ж*)

> $5 \leq x < 6$

> $(f*g)(x) = \int_{x-1}^{5} (\xi - 5) \cdot 1 \, d\xi$

> $\int_{x-1}^{5} (\xi - 5) \cdot 1 \, d\xi$

$$-\frac{35}{2} + 5x - \frac{(x-1)^2}{2} \tag{12}$$

> *з*)

> $x \geq 6$

> $(f*g)(x) = 0$:

> *#В итоге получаем функцию*

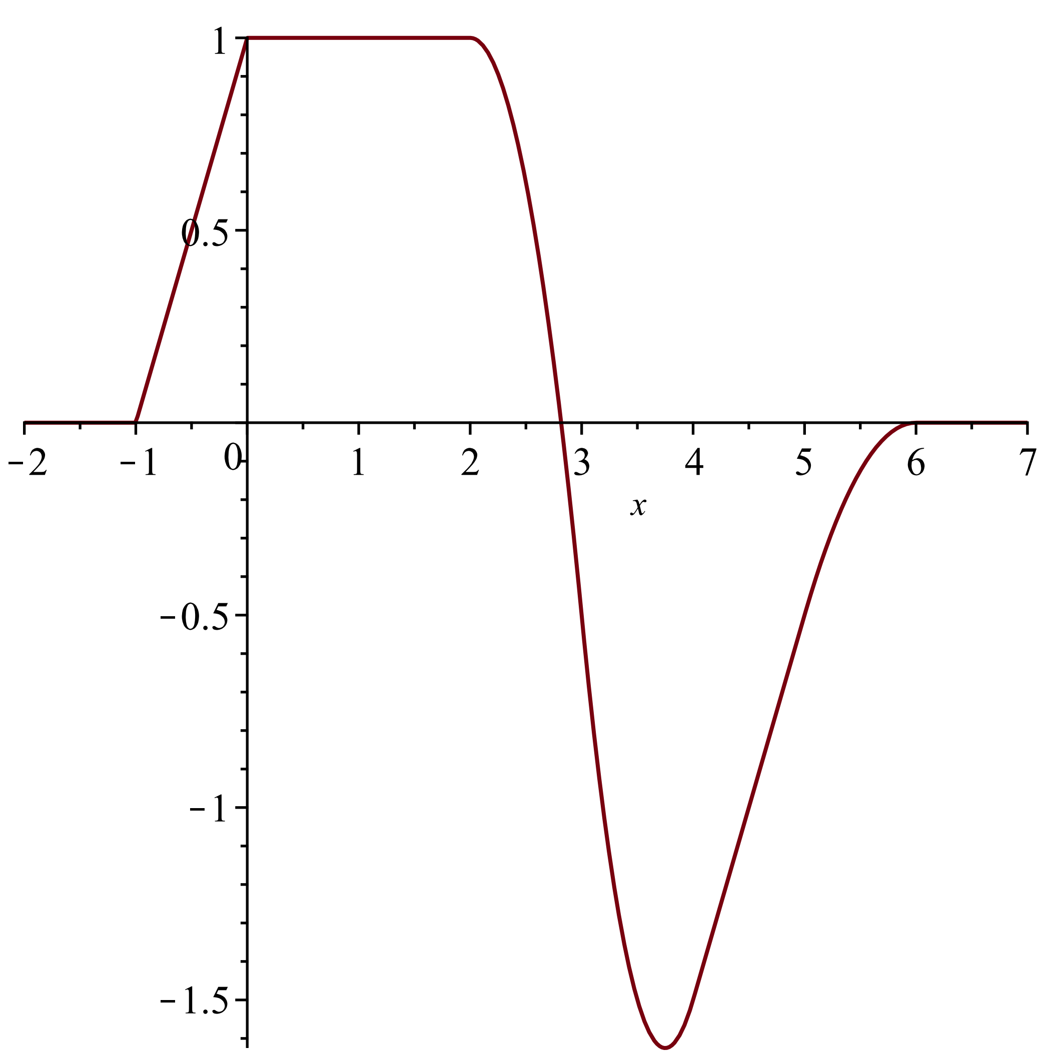
> $f\_g(x) = (f*g)(x)$:

> $f\_g(x) := piecewise\Big(x < -1, 0, -1 \leq x < 0,\ x+1, 0 \leq x < 2, 1, 2 \leq x < 3, -5 + 6x - \frac{3}{2}x^2, 3 \leq x < 4, 25 + \frac{3(x-1)^2}{2} - 12x + \frac{x^2}{2}, 4 \leq x < 5, -5 + \frac{x^2}{2} - \frac{(x-1)^2}{2}, 5 \leq x < 6, -\frac{35}{2} + 5x - \frac{(x-1)^2}{2}, x \geq 6, 0\Big)$:

$f\_g(x)$

$$\begin{cases} 0 & x < -1 \\ x+1 & -1 \leq x < 0 \\ 1 & 0 \leq x < 2 \\ -5 + 6x - \frac{3}{2}x^2 & 2 \leq x < 3 \\ 25 + \frac{3(x-1)^2}{2} - 12x + \frac{x^2}{2} & 3 \leq x < 4 \\ -5 + \frac{x^2}{2} - \frac{(x-1)^2}{2} & 4 \leq x < 5 \\ -\frac{35}{2} + 5x - \frac{(x-1)^2}{2} & 5 \leq x < 6 \\ 0 & 6 \leq x \end{cases} \tag{13}$$

> $plot(f\_g(x), x = -2..7)$



>

свертка функций $f(x)$ и $g(x)$ *склеилась во всех точках, следовательно найдена верно*

> *restart*;

> *with*(*plots*) :

> *#Найти образ Фурье функции f(x), если f(x)≡0 при x∉[x1, x4], а при x∈[x1, x4] график этой функции состоит из звеньев ломаной, проходящей через точки* $A(x1, y1)$, $B(x2, y2)$, $C(x3, y3)$, $D1(x4, y4)$.

> $A(-2, 1)$:
$B(-1, 1)$:
$C(1, -2)$:
$D1(3, 1)$:

#Найдем функцию f(x) как уравнение прямой по двум точкам: две точки (x1,y1), (x2,y2)

тогда уравнение прямой имеет вид $\dfrac{y - y1}{y2 - y1} = \dfrac{x - x1}{x2 - x1}$

Первые две точки $A(-2, 1)$ и $B(-1, 1)$,

тогда уравнение прямой имеет вид $\dfrac{y - 1}{1 - 1} = \dfrac{x - (-2)}{-1 - (-2)} \Rightarrow y = 1$ *на* $-2 < x \leq -1$

Следующие две точки $B(-1, 1)$ и $C(1, -2)$, *тогда уравнение прямой имеет вид* $\frac{y-1}{-2-1} = \frac{x-(-1)}{1-(-1)} \Rightarrow y = \frac{-3\cdot x-1}{2}$ *на* $-1 < x \le 1$

Следующие две точки $C(1,-2)$ и $D1(3,1)$,

тогда уравнение прямой имеет вид $\frac{y-(-2)}{1-(-2)} = \frac{x-1}{3-1} \Rightarrow y = \frac{3\cdot x-7}{2}$ *на* $1 < x \le 3$

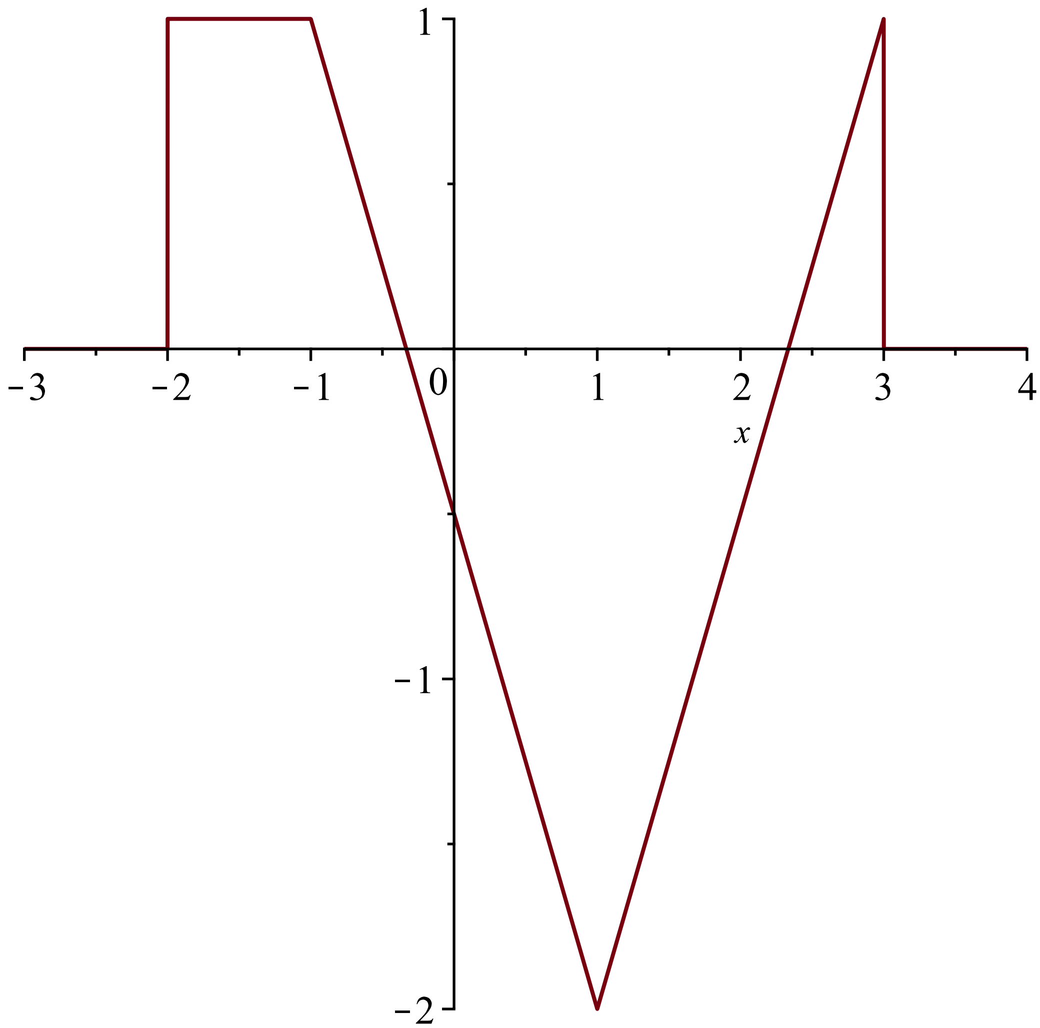
#Получаем функцию f(x):

$> f(x) := piecewise\left(x \le -2, 0, -2 < x \le -1, 1, -1 < x \le 1, \frac{-3\cdot x-1}{2}, 1 < x \le 3, \frac{3\cdot x-7}{2}, x > 3, 0\right):$

$f(x)$

$$\begin{cases} 0 & x \le -2 \\ 1 & -2 < x \le -1 \\ -\frac{3x}{2} - \frac{1}{2} & -1 < x \le 1 \\ \frac{3x}{2} - \frac{7}{2} & 1 < x \le 3 \\ 0 & 3 < x \end{cases} \tag{14}$$

$> plot(f(x), x=-3..4)$



Представим функцию $f(x)$ в *виде суммы* "треугольного импульса" и "прямоугольного импульса"

> *#График функции f1(x) - "прямоугольный импульс"*

> $f1(x) := rect\left(\frac{x-m}{d}\right)$, *m* − *середина отрезка* $[a, b]$, *d* − *длина отрезка* $[a, b]$

> $a := -2 :$
> $b := -1 :$

$m := \frac{a+b}{2}$

$$m := -\frac{3}{2} \quad (15)$$

$d := b - a$

$$d := 1 \quad (16)$$

$f1(x) := rect\left(\frac{x-m}{d}\right) :$

$f1(x)$

$$rect\left(x+\frac{3}{2}\right) \quad (17)$$

> #График функции f2(x) - "треугольный импульс"

> $f2(x) := c1\cdot\Lambda\left(\frac{x-m1}{d1}\right) + rect\left(\frac{x-m2}{d2}\right), m1, m2 - середина\ отрезка\ [c,f], d1, d2 - длина\ отрезка\ [c,f], c1 - растяжение\ вдоль\ оси\ ординат$ и $отражение\ относительно\ оси\ абсцисс$

$c := -1:$
$c1 := -3:$
$f := 3:$

$$m1 := \frac{c+f}{2}$$

$$m1 := 1 \tag{18}$$

$$d1 := \frac{f-c}{2}$$

$$d1 := 2 \tag{19}$$

$$m2 := \frac{c+f}{2}$$

$$m2 := 1 \tag{20}$$

$$d2 := f - c$$

$$d2 := 4 \tag{21}$$

$$f2(x) := c1\cdot\Lambda\left(\frac{x-m1}{d1}\right) + rect\left(\frac{x-m2}{d2}\right):$$

$f2(x)$

$$-3\,\Lambda\left(-\frac{1}{2}+\frac{x}{2}\right) + rect\left(-\frac{1}{4}+\frac{x}{4}\right) \tag{22}$$

> #Таким образом, функция f(x) представляет собой сумму "треугольного импульса" и двух "прямоугольных импульсов":

> $f(x) := f1(x) + f2(x);$

$$f := x \rightarrow f1(x) + f2(x) \tag{23}$$

> $f(x)$

$$rect\left(x+\frac{3}{2}\right) - 3\,\Lambda\left(-\frac{1}{2}+\frac{x}{2}\right) + rect\left(-\frac{1}{4}+\frac{x}{4}\right) \tag{24}$$

> #Найдем образ Фурье функции f(x):

$$F[f](\nu) := d\cdot e^{-I\cdot 2\cdot\pi\cdot\nu\cdot m}\cdot\frac{\sin(\pi\cdot\nu\cdot d)}{\pi\cdot\nu\cdot d} + d2\cdot e^{-I\cdot 2\cdot\pi\cdot\nu\cdot m2}\cdot\frac{\sin(\pi\cdot\nu\cdot d2)}{\pi\cdot\nu\cdot d2} + c1\cdot d1\cdot e^{-I\cdot 2\cdot\pi\cdot\nu\cdot m1}\cdot\frac{\sin^2(\pi\cdot\nu\cdot d1)}{(\pi\cdot\nu\cdot d1)^2}$$

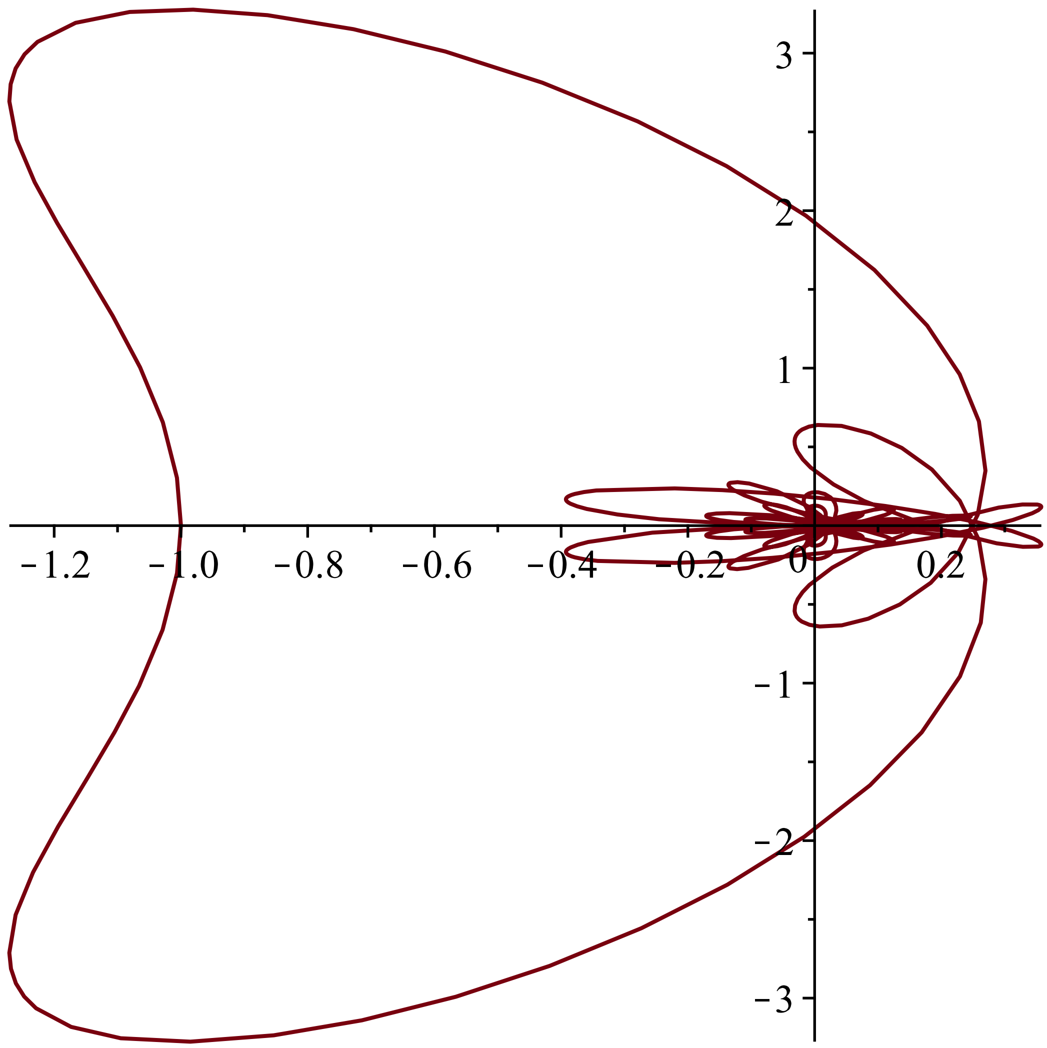
$$F_f := \nu \rightarrow \frac{d\,e^{-2I\pi\nu m}\sin(\pi\nu d)}{\pi\nu d} + \frac{d2\,e^{-2I\pi\nu m2}\sin(\pi\nu\,d2)}{\pi\nu\,d2} + \frac{c1\,d1\,e^{-2I\pi\nu m1}\sin(\pi\nu\,d1)^2}{\pi^2\nu^2\,d1^2} \tag{25}$$

$F[f](\nu)$

$$\frac{e^{3I\pi\nu}\sin(\pi\nu)}{\pi\nu} + \frac{e^{-2I\pi\nu}\sin(4\pi\nu)}{\pi\nu} - \frac{3\,e^{-2I\pi\nu}\sin(2\pi\nu)^2}{2\pi^2\nu^2} \tag{26}$$

> *#Построим график найденного образа Фурье*

> $complexplot(F[f](\nu), \nu = -3..3)$

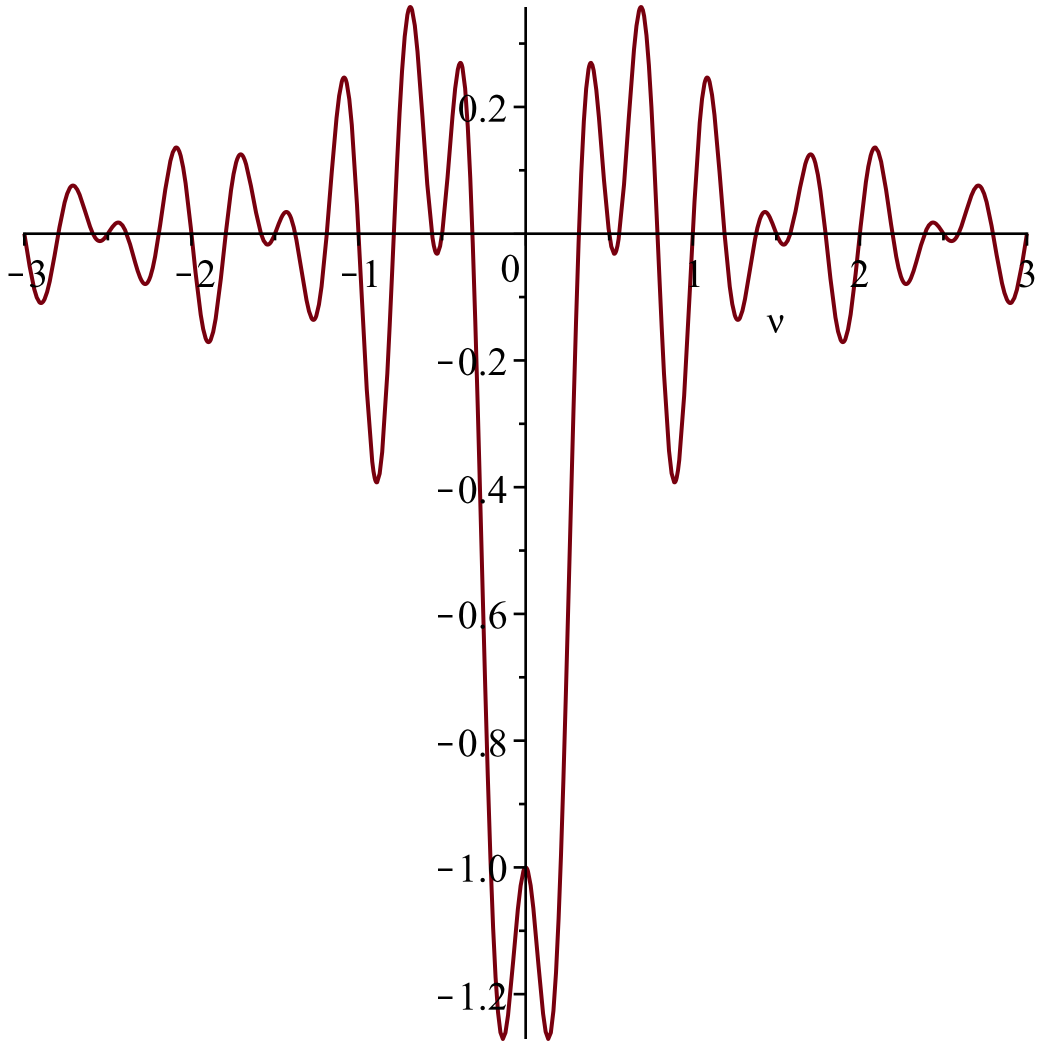


#Построим действительную часть образа Фурье

> $F1[f](\nu) := d\cdot\cos(-2\cdot\pi\cdot\nu\cdot m)\cdot\frac{\sin(\pi\cdot\nu\cdot d)}{\pi\cdot\nu\cdot d} + d2\cdot\cos(-2\cdot\pi\cdot\nu\cdot m2)\cdot\frac{\sin(\pi\cdot\nu\cdot d2)}{\pi\cdot\nu\cdot d2} + c1\cdot d1 \cdot\cos(-2\cdot\pi\cdot\nu\cdot m1)\cdot\frac{\sin^2(\pi\cdot\nu\cdot d1)}{(\pi\cdot\nu\cdot d1)^2}$

$$F1_f := \nu \rightarrow \frac{d\cos(-2\pi\nu m)\sin(\pi\nu d)}{\pi\nu d} + \frac{d2\cos(-2\pi\nu m2)\sin(\pi\nu d2)}{\pi\nu d2} + \frac{c1\, d1\cos(-2\pi\nu m1)\sin(\pi\nu d1)^2}{\pi^2\nu^2 d1^2} \qquad \textbf{(27)}$$

> $plot(F1[f](\nu), \nu = -3..3)$

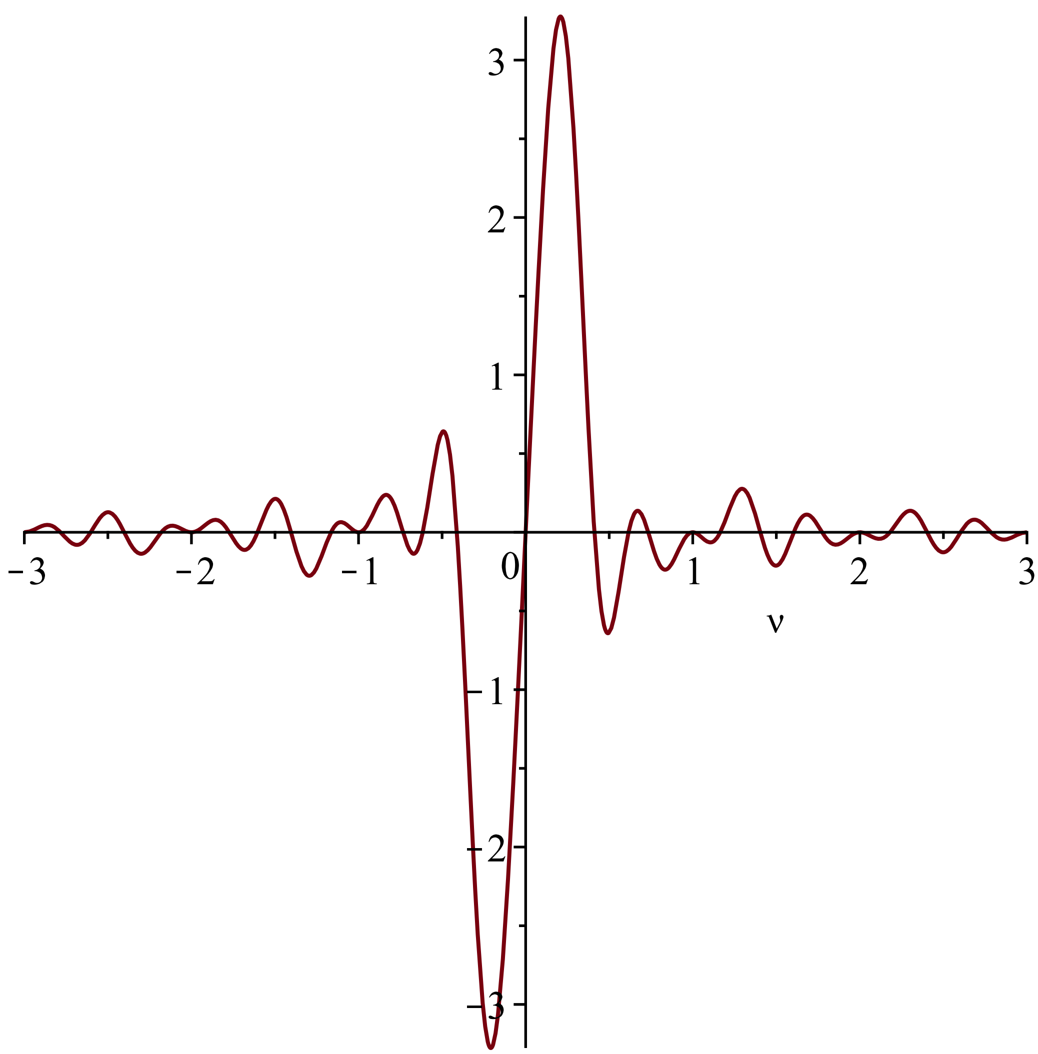


#Построим мнимую часть образа Фурье

> $F2[f](\nu) := d\cdot\sin(-2\cdot\pi\cdot\nu\cdot m)\cdot\frac{\sin(\pi\cdot\nu\cdot d)}{\pi\cdot\nu\cdot d} + d2\cdot\sin(-2\cdot\pi\cdot\nu\cdot m2)\cdot\frac{\sin(\pi\cdot\nu\cdot d2)}{\pi\cdot\nu\cdot d2} + c1\cdot d1\cdot\sin(-2\cdot\pi\cdot\nu\cdot m1)\cdot\frac{\sin^2(\pi\cdot\nu\cdot d1)}{(\pi\cdot\nu\cdot d1)^2}$

$$F2_f := \nu \rightarrow \frac{d\sin(-2\,\pi\,\nu\,m)\,\sin(\pi\,\nu\,d)}{\pi\,\nu\,d} + \frac{d2\,\sin(-2\,\pi\,\nu\,m2)\,\sin(\pi\,\nu\,d2)}{\pi\,\nu\,d2} + \frac{c1\,d1\,\sin(-2\,\pi\,\nu\,m1)\,\sin(\pi\,\nu\,d1)^2}{\pi^2\,\nu^2\,d1^2} \tag{28}$$

> $plot(F2[f](\nu), \nu = -3..3)$



3
2
1
0
−1
−2
−3
−3
−2
−1
1
2
3
ν

>