

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

МГТУ им Н.Э.Баумана

Факультет ФН

Кафедра вычислительной математики и математической физики

Соколов Арсений Андреевич

Лабораторная работа №7 по численным
методам

3 курс, группа ФН11-53Б

Вариант 6

Преподаватель

_____ В. А. Кутыркин

«___» _____ 2019 г.

Москва, 2019 г.

Задание 1

Задание.

Используя дискретный аналог уравнения (1) Фредгольма 2-го рода с симметричным, непрерывным и аналитически заданным ядром

$$x(s) - \lambda \int_a^b K(s, \tau)x(\tau)d\tau = y(s), \quad s \in [a; b] \quad (1)$$

индуцированный методом конечных сумм с квадратурными формулами прямоугольников (количество узлов в квадратурной формуле не менее 20), найти приближённое решение уравнения (1), которое имеет конкретный вид:

$$x(s) - \frac{1}{n-49} \int_0^{\frac{N+5}{N}} K(s, \tau)x(\tau)d\tau = \frac{N+5}{N} (s^2 + n - 49), \quad s \in \left[0; \frac{N+5}{N}\right]$$

(N – номер студента в журнале, n – номер группы) И

$$K(s, \tau) = \begin{cases} s \left(2\frac{N+5}{N} - \tau\right), & 0 \leq s \leq \tau \\ \tau \left(2\frac{N+5}{N} - s\right), & \tau \leq s \leq \frac{N+5}{N} \end{cases}$$

Оценить абсолютную погрешность приближённого решения, сравнив его с аналитическим решением, полученным сведением уравнения (1) к краевой задаче для обыкновенного линейного дифференциального уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами.

Исходные данные.

$N = 6, n = 53$

Решение.

Будем использовать 20 узлов. Для построения дискретного аналога, аппроксимирующего уравнение (1), зададим на квадрате $[0; \frac{11}{6}] \times [0; \frac{11}{6}]$ двумерную центрально-равномерную сетку $B \times A = \langle (s_i, \tau_i) : s_i \in B, \tau_i \in A \rangle$ типа 20×20 шага (h, τ) . Следовательно, $B = \langle s_1, s_2, \dots, s_{20} \rangle$ и $A = \langle \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{20} \rangle$ центрально-равномерные сетки отрезка $[0; \frac{11}{6}] \times [0; \frac{11}{6}]$ с шагами $h = \frac{b-a}{n} = \frac{11}{120}$ и $\tau = \frac{b-a}{n} = \frac{11}{120}$, соответственно.

Получим:

$A = B =$

$$\left\langle \frac{11}{80}, \frac{11}{48}, \frac{77}{240}, \frac{33}{80}, \frac{121}{240}, \frac{143}{240}, \frac{11}{16}, \frac{187}{240}, \frac{209}{240}, \frac{77}{80}, \frac{253}{240}, \frac{55}{48}, \frac{99}{80}, \frac{319}{240}, \frac{341}{240}, \frac{121}{80}, \frac{77}{48}, \frac{407}{240}, \frac{143}{80} \right\rangle$$

Для любого узла $(s_i, \tau_i) \in B \times A$ ($i, j = \overline{1, 20}$) и функций K, x, y из уравнения (1) приняты обозначения: $K_j^i = K(s_i; \tau_j)$, $x^j = x(\tau_j) = x(s_j)$. и

$y^i = y(s_i)$. Используя эти обозначения и квадратурную формулу прямоугольников, из уравнения (1) получаем его дискретный аналог, аппроксимирующий уравнение (1) при $h, \tau \rightarrow 0$, в виде СЛАУ

$$K(s, \tau) = \begin{cases} x^i - \lambda \sum_{j=1}^{20} K_j^i h \cdot x_j = y^i \\ i = \overline{1, 20} \end{cases}$$

Введём обозначения:

$${}^>x = [x^1, \dots, x^{20}]^T, {}^>y = [y^1, \dots, y^{20}]^T \in {}^>R^n, F = (\delta_j^i - \lambda K_j^i \cdot h)_{20}^{20} = (f_j^i)_{20}^{20} \in L(R, 20),$$

где

$$\delta_j^i = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$$

Используя эти обозначения, СЛАУ перепишем в виде $F \cdot {}^>x = {}^>y$.

Найдём приближенное решение уравнения

$$x(s) - \frac{1}{4} \int_0^{\frac{11}{6}} K(s, \tau) x(\tau) d\tau = \frac{11}{6} (s^2 + 4), \quad s \in [0; \frac{11}{6}]$$

$$K(s, \tau) = \begin{cases} s(\frac{11}{3} - \tau), & 0 \leq s \leq \tau \\ \tau(\frac{11}{3} - s), & \tau \leq s \leq \frac{11}{3} \end{cases}$$

Так как $F \cdot {}^>x = {}^>y$, следовательно ${}^>x = F^{-1} \cdot {}^>y$.

Необходимые вычисления :

$$F = \begin{bmatrix} 27542851 & -102487 & 1331 & 97163 & -94501 & 30613 & -89177 & 17303 & 9317 & -81191 & 78529 & 25289 & -14641 & 70543 & 22627 & -65219 & 62557 & -1331 & -57233 & -54571 \\ 27648000 & 27648000 & 308640 & 27648000 & 27648000 & 27648000 & 27648000 & 27648000 & 27648000 & 27648000 & 27648000 & 27648000 & 27648000 & 27648000 & 27648000 & 27648000 & 27648000 & 27648000 & 27648000 \\ -102487 & 9113513 & 1331 & 97163 & 94501 & 30613 & 89177 & 17303 & 9317 & -81191 & 78529 & 25289 & -14641 & 70543 & 22627 & -65219 & 62557 & -1331 & -57233 & -54571 \\ -27648000 & 9216000 & 122880 & 9216000 & 9216000 & 3072000 & -1843200 & 1024000 & -9216000 & -9216000 & -9216000 & 3072000 & -1843200 & -9216000 & 3072000 & -9216000 & -204800 & 9216000 & -9216000 \\ -1331 & -1331 & 72397 & -97163 & 94501 & 30613 & 89177 & 17303 & 9317 & -81191 & 78529 & 25289 & -14641 & 70543 & 22627 & -65219 & 62557 & -1331 & -57233 & -54571 \\ -308640 & 122880 & 73728 & 5529600 & 5529600 & 1843200 & 5529600 & 1105920 & 614400 & 5529600 & 5529600 & 1843200 & 1105920 & 5529600 & 1843200 & 5529600 & 122880 & 5529600 & 5529600 \\ 97163 & 97163 & 97163 & 20867859 & 661507 & 214291 & 624239 & 121121 & 65219 & 563337 & 549703 & 177023 & 102487 & 493801 & 158389 & 456533 & 437899 & 9317 & 400631 & 381997 \\ 27648000 & 9216000 & 5529600 & 27648000 & 27648000 & 9216000 & 27648000 & 5529600 & 3072000 & 27648000 & 27648000 & 9216000 & 5529600 & 27648000 & 9216000 & 27648000 & 27648000 & 614400 & 27648000 & 27648000 \\ 94501 & 94501 & 94501 & 661507 & 2077499 & 30613 & 89177 & 17303 & 27951 & 81191 & 78529 & 25289 & -14641 & 70543 & 22627 & 65219 & 62557 & 3993 & 57233 & 54571 \\ 27648000 & 9216000 & 5529600 & 27648000 & 1024000 & 3072000 & 1024000 & 1024000 & 3072000 & 3072000 & 1024000 & 614400 & 3072000 & 1024000 & 3072000 & 1024000 & 3072000 & 204800 & 3072000 & 3072000 \\ 30613 & 30613 & 30613 & 214291 & 30613 & 8879257 & 980947 & 190333 & 102487 & 893101 & 863819 & 278179 & 161051 & 775973 & 248897 & 717499 & 688127 & 14641 & 629563 & 600281 \\ 9216000 & 3072000 & 1843200 & 9216000 & 1024000 & 9216000 & 27648000 & 5529600 & 3072000 & 27648000 & 27648000 & 9216000 & 5529600 & 27648000 & 9216000 & 27648000 & 27648000 & 614400 & 27648000 & 27648000 \\ 89177 & 89177 & 89177 & 624239 & 89177 & 980947 & 26488699 & 224939 & 121121 & 1055483 & 1020877 & 328757 & 190333 & 917059 & 294151 & 847847 & 813241 & 17303 & 744029 & 709423 \\ 27648000 & 9216000 & 5529600 & 27648000 & 3072000 & 27648000 & 27648000 & 5529600 & 3072000 & 27648000 & 27648000 & 9216000 & 5529600 & 27648000 & 9216000 & 27648000 & 27648000 & 614400 & 27648000 & 27648000 \\ 17303 & 17303 & 17303 & 121121 & 17303 & 190333 & 224939 & 351337 & 9317 & 81191 & 78529 & 25289 & -14641 & 70543 & 22627 & 65219 & 62557 & -1331 & -57233 & -54571 \\ 5529600 & 1843200 & 1105920 & 5529600 & 614400 & 5529600 & 5529600 & 308640 & 204800 & 1843200 & 1843200 & 614400 & 308640 & 1843200 & 614400 & 1843200 & 40960 & 1843200 & 1843200 \\ 9317 & 9317 & 9317 & 65219 & 27951 & 102487 & 121121 & 8317 & 2013611 & 1380247 & 1334093 & 429913 & 248897 & 1192231 & 384659 & 1108723 & 1063469 & 22627 & 922961 & 922707 \\ 3072000 & 1024000 & 614400 & 3072000 & 1024000 & 3072000 & 204800 & 3072000 & 3072000 & 27648000 & 27648000 & 9216000 & 5529600 & 27648000 & 9216000 & 27648000 & 27648000 & 614400 & 27648000 & 27648000 \\ 81191 & 81191 & 81191 & 568337 & 81191 & 893101 & 1055483 & 81191 & 1380247 & 26105371 & 1492051 & 480491 & 278179 & 1340317 & 429913 & 1239161 & 1188583 & 25289 & 1087427 & 1036849 \\ 27648000 & 9216000 & 5529600 & 27648000 & 3072000 & 27648000 & 1843200 & 27648000 & 27648000 & 27648000 & 27648000 & 9216000 & 5529600 & 27648000 & 9216000 & 27648000 & 27648000 & 614400 & 27648000 & 27648000 \\ 78529 & 78529 & 78529 & 549703 & 78529 & 863819 & 1020877 & 78529 & 1334093 & 1492051 & 8666297 & 177023 & 102487 & 493801 & 158389 & 456533 & 437899 & 9317 & 400631 & 381997 \\ 27648000 & 9216000 & 5529600 & 27648000 & 3072000 & 27648000 & 27648000 & 1843200 & 27648000 & 27648000 & 9216000 & 3072000 & 1843200 & 9216000 & 9216000 & 27648000 & 27648000 & 204800 & 9216000 & 9216000 \\ 25289 & 25289 & 25289 & 177023 & 25289 & 278179 & 328757 & 25289 & 429913 & 480491 & 177023 & 8634353 & 336743 & 1622489 & 520421 & 1500037 & 1438811 & 30613 & 1316359 & 1255133 \\ 9216000 & 3072000 & 1843200 & 9216000 & 1024000 & 9216000 & 614400 & 9216000 & 9216000 & 9216000 & 3072000 & 27648000 & 5529600 & 27648000 & 9216000 & 27648000 & 27648000 & 614400 & 27648000 & 27648000 \\ -14641 & -14641 & -14641 & 102487 & -14641 & 161051 & 190333 & -14641 & 248897 & 278179 & 102487 & 336743 & 206543 & 70543 & 22627 & 65219 & 62557 & -1331 & -57233 & -54571 \\ 5529600 & 1843200 & 1105920 & 5529600 & 614400 & 5529600 & 5529600 & 308640 & 5529600 & 1843200 & 5529600 & 221184 & 1105920 & 308640 & 1105920 & 1105920 & 24576 & 1105920 & 1105920 \\ 70543 & 70543 & 70543 & 493801 & 70543 & 775973 & 917059 & 70543 & 1192231 & 1340317 & 493801 & 1622489 & 953457 & 67881 & 65219 & 62557 & 11979 & 57233 & 54571 \\ 27648000 & 9216000 & 5529600 & 27648000 & 3072000 & 27648000 & 27648000 & 1843200 & 27648000 & 27648000 & 9216000 & 27648000 & 1105920 & 1024000 & 1024000 & 1024000 & 1024000 & 204800 & 1024000 & 1024000 \\ -22627 & 22627 & 22627 & -158389 & 22627 & 248897 & 294151 & 22627 & 384659 & 429913 & 158389 & 520421 & 22627 & 67881 & 8559817 & 1891351 & 1814153 & 38599 & 1659757 & 1582559 \\ 9216000 & 3072000 & 1843200 & 9216000 & 1024000 & 9216000 & 614400 & 9216000 & 9216000 & 9216000 & 3072000 & 9216000 & 308640 & 1024000 & 9216000 & 27648000 & 27648000 & 614400 & 27648000 & 27648000 \\ 65219 & 65219 & 65219 & 456533 & 65219 & 717499 & 847847 & 65219 & 1108723 & 1239161 & 456533 & 1500037 & 65219 & 65219 & 1891351 & 25626211 & 1939267 & 41261 & 1774223 & 1691701 \\ 27648000 & 9216000 & 5529600 & 27648000 & 3072000 & 27648000 & 27648000 & 1843200 & 27648000 & 27648000 & 9216000 & 27648000 & 1105920 & 1024000 & 27648000 & 27648000 & 27648000 & 614400 & 27648000 & 27648000 \\ 62557 & 62557 & 62557 & 437899 & 62557 & 688127 & 813241 & 62557 & 1063469 & 1188583 & 437899 & 1438811 & 62557 & 62557 & 1814153 & 1939267 & 8527873 & 14641 & 629563 & 600281 \\ 27648000 & 9216000 & 5529600 & 27648000 & 3072000 & 27648000 & 27648000 & 27648000 & 1843200 & 27648000 & 27648000 & 27648000 & 1105920 & 1024000 & 27648000 & 27648000 & 27648000 & 204800 & 9216000 & 9216000 \\ -1331 & -1331 & -1331 & 9317 & -3993 & 14641 & -17303 & -1331 & 22627 & 25289 & 9317 & -30613 & -1331 & 11979 & -38599 & -41261 & 14641 & 113563 & 400631 & 381997 \\ 614400 & 204800 & 122880 & 614400 & 204800 & 614400 & 40960 & 614400 & 40960 & 614400 & 204800 & 614400 & 24576 & 204800 & 614400 & 204800 & 122880 & 5529600 & 5529600 & 5529600 \\ 57233 & 57233 & 57233 & 400631 & 57233 & 629563 & 744029 & 57233 & 979961 & 1087427 & 400631 & 1316359 & 57233 & 57233 & 1659757 & 1774223 & 629563 & 400631 & 25530379 & 2019127 \\ 27648000 & 9216000 & 5529600 & 27648000 & 3072000 & 27648000 & 27648000 & 1843200 & 27648000 & 27648000 & 9216000 & 27648000 & 1105920 & 1024000 & 27648000 & 27648000 & 27648000 & 9216000 & 5529600 & 27648000 \\ 54571 & 54571 & 54571 & 381997 & 54571 & 600281 & 709423 & 54571 & 927707 & 1036849 & 381997 & 1255133 & 54571 & 54571 & 1582559 & 1691701 & 600281 & 381997 & 2019127 & 8506577 \\ 27648000 & 9216000 & 5529600 & 27648000 & 3072000 & 27648000 & 27648000 & 1843200 & 27648000 & 27648000 & 9216000 & 27648000 & 1105920 & 1024000 & 27648000 & 27648000 & 27648000 & 9216000 & 5529600 & 27648000 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 2535731 & 282931 & 102707 & 2599619 & 293579 & 2695451 & 2759339 & 12595 & 2919059 & 3014891 & 346819 & 3238499 & 134651 & 389411 & 3653771 & 3813491 & 442651 & 166595 & 4356539 & 506539 \\ 345600 & 38400 & 13824 & 345600 & 38400 & 345600 & 345600 & 1536 & 345600 & 345600 & 38400 & 345600 & 13824 & 38400 & 345600 & 345600 & 38400 & 13824 & 345600 & 38400 \end{bmatrix}$$