#Найдем эволюту трактрисы:

$x\_0(t) := a\cdot\left(\cos(t) + \ln\left(\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right)\right);$

$y\_0(t) := \sin(t);$

$0 < t < \mathrm{Pi}$

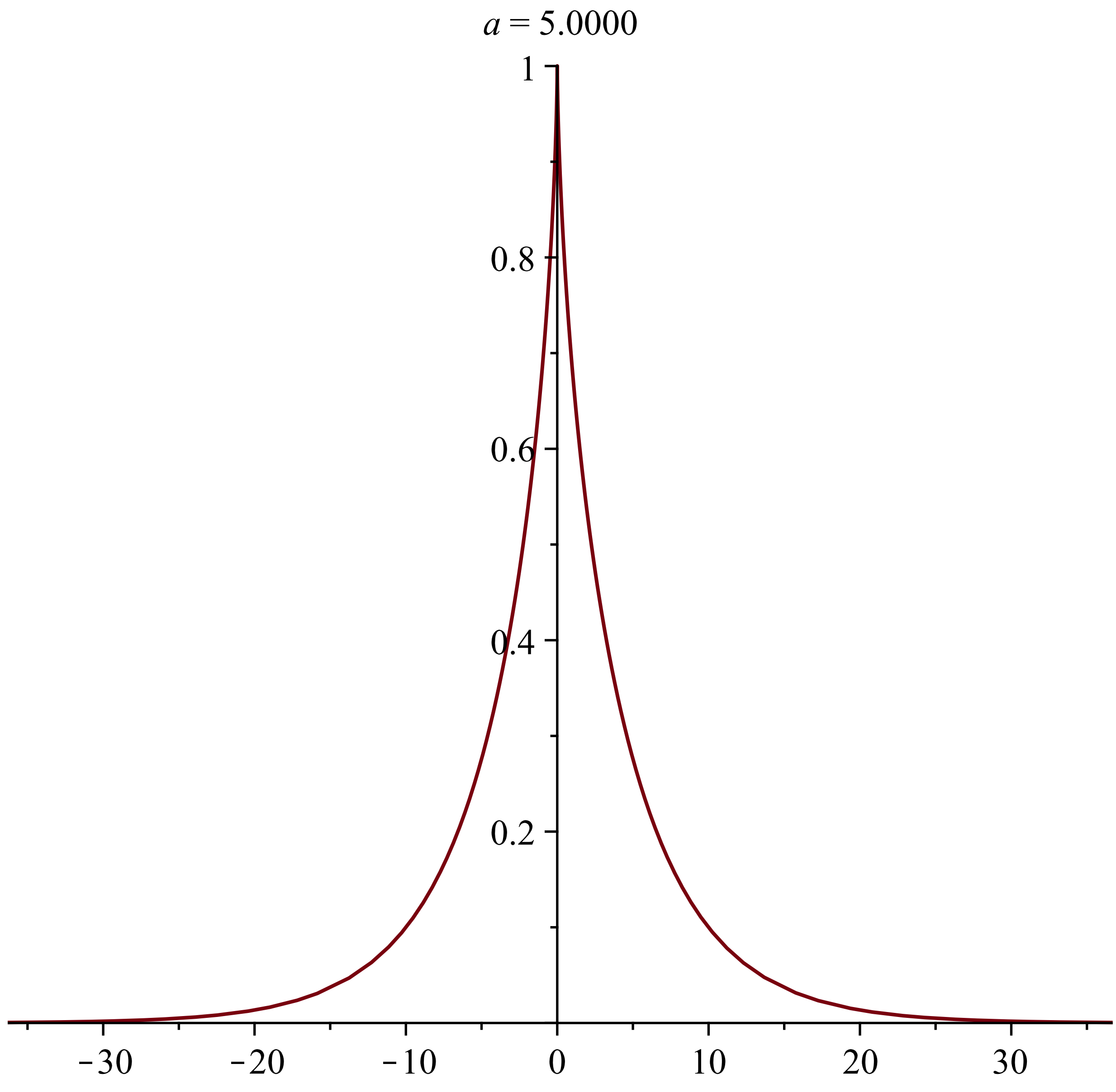
$$x\_0 := t \rightarrow a\left(\cos(t) + \ln\left(\tan\left(\frac{1}{2}t\right)\right)\right)$$

$$y\_0 := t \rightarrow \sin(t)$$

$$0 < t < \pi \qquad \textbf{(1)}$$

$with(plots):$

$plots[animate](plot, [[x\_0(t), y\_0(t), t = 0..\mathrm{Pi}]], a = 0..5)$



####Если линия задана параметрически, то ее эволюта имеет уравнение:

$$X\_ev0(t) := x(t) - \frac{d}{dt}y(t) \cdot \frac{\left(\frac{d}{dt}x(t)\right)^2 + \left(\frac{d}{dt}y(t)\right)^2}{\frac{d}{dt}x(t) \cdot \frac{d^2}{dt^2}y(t) - \frac{d}{dt}y(t) \cdot \frac{d^2}{dt^2}x(t)}$$

$$X\_ev0 := t \rightarrow x(t) - \frac{\left(\frac{d}{dt}\, y(t)\right)\left(\left(\frac{d}{dt}\, x(t)\right)^2 + \left(\frac{d}{dt}\, y(t)\right)^2\right)}{\left(\frac{d}{dt}\, x(t)\right)\left(\frac{d^2}{dt^2}\, y(t)\right) - \left(\frac{d}{dt}\, y(t)\right)\left(\frac{d^2}{dt^2}\, x(t)\right)} \tag{2}$$

$$Y\_ev0(t) := y(t) + \frac{d}{dt}x(t) \cdot \frac{\left(\frac{d}{dt}x(t)\right)^2 + \left(\frac{d}{dt}y(t)\right)^2}{\frac{d}{dt}x(t) \cdot \frac{d^2}{dt^2}y(t) - \frac{d}{dt}y(t) \cdot \frac{d^2}{dt^2}x(t)}$$

$$Y\_ev0 := t \rightarrow y(t) + \frac{\left(\frac{d}{dt}\, x(t)\right)\left(\left(\frac{d}{dt}\, x(t)\right)^2 + \left(\frac{d}{dt}\, y(t)\right)^2\right)}{\left(\frac{d}{dt}\, x(t)\right)\left(\frac{d^2}{dt^2}\, y(t)\right) - \left(\frac{d}{dt}\, y(t)\right)\left(\frac{d^2}{dt^2}\, x(t)\right)} \tag{3}$$

$X\_ev(t) := simplify(X\_ev0(t))$

$$X\_ev := t \rightarrow simplify(X\_ev0(t)) \tag{4}$$

$Y\_ev(t) := simplify(Y\_ev0(t))$

$$Y\_ev := t \rightarrow simplify(Y\_ev0(t)) \tag{5}$$

$X\_ev(t);$
$Y\_ev(t)$

$$\frac{-\cos(t)^3\, a^2 + \ln\left(\frac{1-\cos(t)}{\sin(t)}\right) a^2 + \cos(t)^3 + \cos(t)\, a^2 - \cos(t)}{a}$$

$$\frac{1 + (a^2 - 1)\cos(t)^4}{\sin(t)} \tag{6}$$

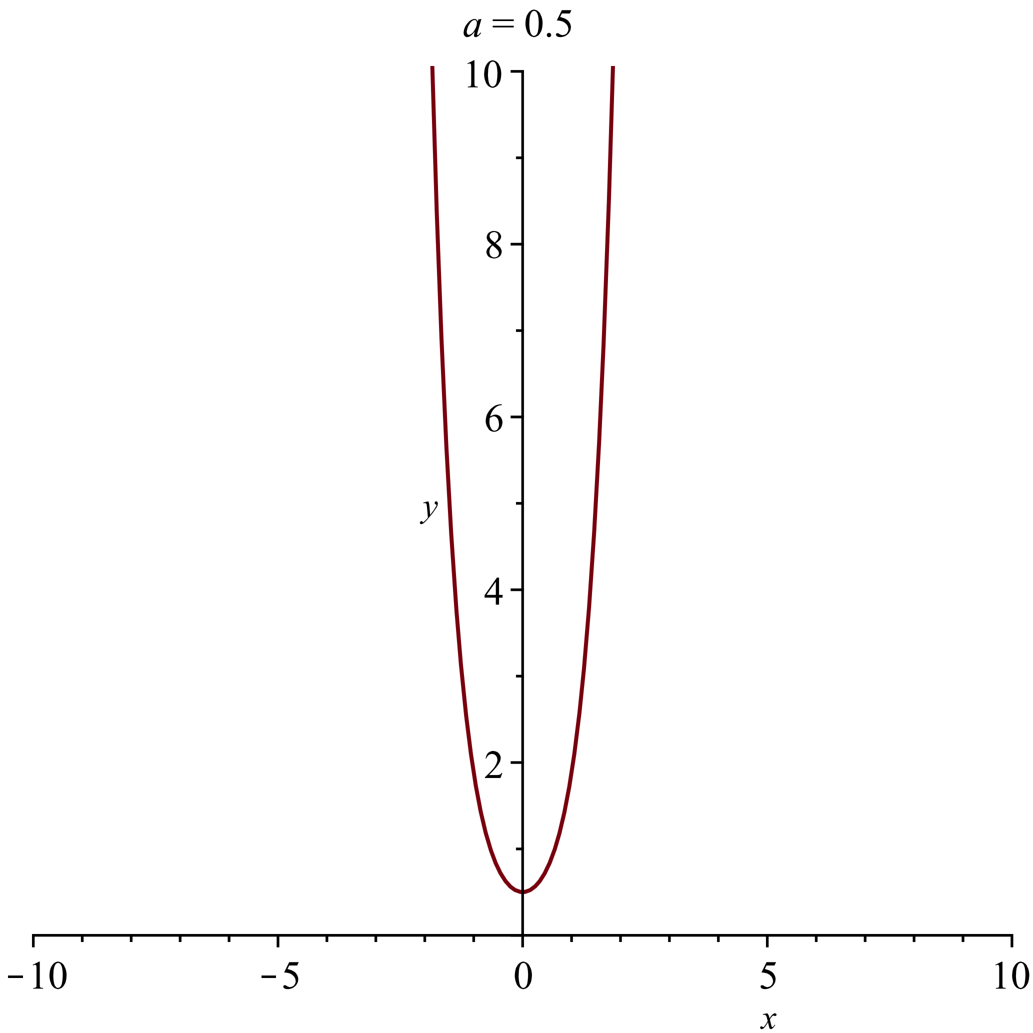
$sys := \{X\_ev(t), Y\_ev(t)\}$

$$sys := \left\{\frac{1 + (a^2 - 1)\cos(t)^4}{\sin(t)}, \frac{-\cos(t)^3\, a^2 + \ln\left(\frac{1-\cos(t)}{\sin(t)}\right) a^2 + \cos(t)^3 + \cos(t)\, a^2 - \cos(t)}{a}\right\} \tag{7}$$

$evoluta(x) := eliminate(sys, t)$

$$a \cosh\left(\frac{x}{a}\right) \tag{8}$$

$plots[animate](plot, [evoluta(x), x = -10..10, y = 0..10], a = 0.5..5)$



#Получили, что эволютой трактрисы является цепная линия

 # Ее уравнение:

$$y(x) = a\cosh\left(\frac{x}{a}\right)$$

#Вращая полученную эволюту вокруг оси OX получаем поверхность вращения, называемую катеноидом
#Катеноид можно задать параметрически:
#$x\_kat(u, v) := a \cdot \cosh\left(\frac{v}{a}\right) \cdot \cos(u);$
#$y\_kat(u, v) := a \cdot \cosh\left(\frac{v}{a}\right) \cdot \sin(u);$
#$z\_kat(u) := u;$
#$-Pi \le u < Pi;$
#$v \in \mathbb{R}$

$$x\_kat := (u, v) \rightarrow \cosh(u)\ \cos(v) \tag{9}$$

$$y\_kat := (u, v) \rightarrow \cosh(u)\ \sin(v) \tag{9}$$

$$z\_kat := u \rightarrow u \tag{9}$$

$$0 \le v < 2\,\pi \tag{9}$$

$$u \in real \tag{9}$$

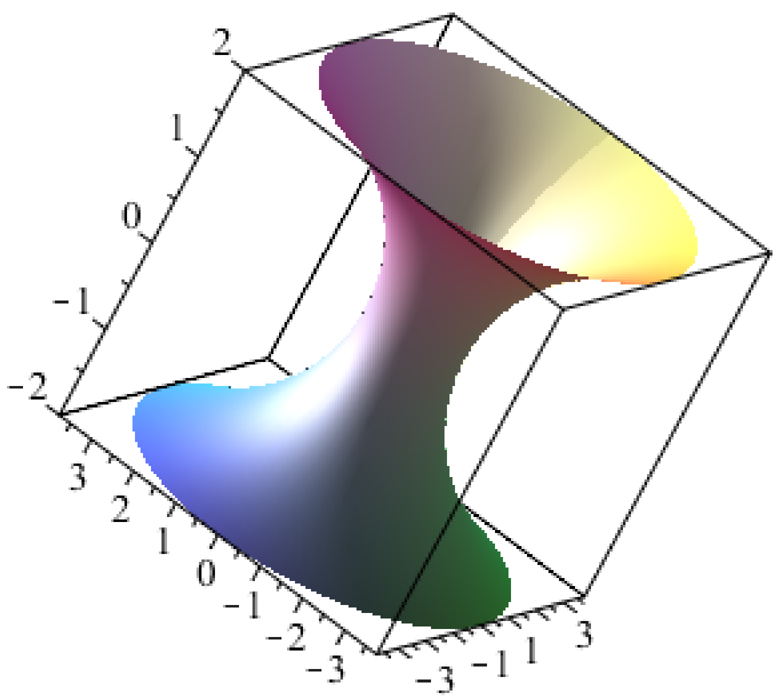
$$a := 2 \tag{10}$$

$catenoid := \left[u, a \cdot \cosh\left(\frac{u}{a}\right) * \cos(v), a \cdot \cosh\left(\frac{u}{a}\right) * \sin(v)\right];$

$$catenoid := \left[u, a\ \cosh\left(\frac{u}{a}\right)\ \cos(v), a\ \cosh\left(\frac{u}{a}\right)\ \sin(v)\right] \tag{11}$$

$plots[animate](plot3d, [catenoid, u = -2\,..2, v = 0\,..2 * \mathrm{Pi}], a = 1\,..3);$

$a = 1.$



```
#Найдем Гауссову, среднюю и скалярные кривизны
with(plots) :
dp := proc(X, Y) #dot product == скалярное произведение
X[1]*Y[1] + X[2]*Y[2] + X[3]*Y[3];
end:

nrm := proc(X) #norm == норма
sqrt(dp(X, X));
end:

xp := proc(X, Y) #cross product == векторое произведение
local a, b, c;
a := X[2]*Y[3]-X[3]*Y[2];
b := X[3]*Y[1]-X[1]*Y[3];
c := X[1]*Y[2]-X[2]*Y[1];
[a, b, c];
end:

############
# Вычислим метрики E = x_u·x_u, F = x_u·x_v, G =x_v·x_v
###########
EFG := proc(X)
local Xu, Xv, E, F, G;
Xu := [diff(X[1], u), diff(X[2], u), diff(X[3], u)];
Xv := [diff(X[1], v), diff(X[2], v), diff(X[3], v)];
E := dp(Xu, Xu);
F := dp(Xu, Xv);
G := dp(Xv, Xv);
simplify([E, F, G]);
end:

##########
#Найдем единичный вектор нормали к поверхности
##########
UN := proc(X)
local Xu, Xv, Z, s;
Xu := [diff(X[1], u), diff(X[2], u), diff(X[3], u)];
Xv := [diff(X[1], v), diff(X[2], v), diff(X[3], v)];
Z := xp(Xu, Xv);
s := nrm(Z);
simplify([Z[1]/s, Z[2]/s, Z[3]/s], sqrt, symbolic);
end:

##########
#Найдем соответствующие частные производные
#########
lmn := proc(X)
local Xu, Xv, Xuu, Xuv, Xvv, U, l, m, n;
Xu := [diff(X[1], u), diff(X[2], u), diff(X[3], u)];
Xv := [diff(X[1], v), diff(X[2], v), diff(X[3], v)];
```

```
Xuu := [diff(Xu[1], u), diff(Xu[2], u), diff(Xu[3], u)];
Xuv := [diff(Xu[1], v), diff(Xu[2], v), diff(Xu[3], v)];
Xvv := [diff(Xv[1], v), diff(Xv[2], v), diff(Xv[3], v)];
U := UN(X);
l := dp(U, Xuu);
m := dp(U, Xuv);
n := dp(U, Xvv);
simplify([l, m, n]);
end:

##########
# Итак, найдем Гауссову кривизу:
##########

GK := proc(X)
local E, F, G, l, m, n, S, T;
S := EFG(X);
T := lmn(X);
E := S[1];
F := S[2];
G := S[3];
l := T[1];
m := T[2];
n := T[3];
simplify((l*n-m^2)/(E*G-F^2));
end:

###########
# А также среднюю кривизну:
##########

MK := proc(X)
local E, F, G, l, m, n, S, T;
S := EFG(X);
T := lmn(X);
E := S[1];
F := S[2];
G := S[3];
l := T[1];
m := T[2];
n := T[3];
simplify((G*l+E*n-2*F*m)/(2*E*G-2*F^2));
end:

#Средняя кривизна
MK(catenoid)
```

$$0 \tag{12}$$

```
#Гауссова кривизна
GK(catenoid)
```

$$-\frac{1}{\cosh\left(\frac{u}{a}\right)^4 a^2} \tag{13}$$

###############
Скалярная кривизна равняется удвоенной Гауссовой кривизне, то есть:
##############

```
SK := proc(X)
 simplify(2· GK(X) )
 end:
 SK(catenoid)
```

$$-\frac{2}{\cosh\left(\frac{u}{a}\right)^4 a^2} \tag{14}$$