>

> $with(plots):$

> #*Найти свертку функций* $f(x)$ и $g(x)$, *если функция* $f(x)$ *принимает значение, равное нулю при* $x \notin [x_1, x_4]$, а *при* $x \in [x_1, x_4]$ *ее график состоит из звеньев ломаной ABCD*

> $x1 := 0:$
$x2 := 2:$
$x3 := 4:$
$x4 := 5:$
$a := 2:$
$b := -2:$

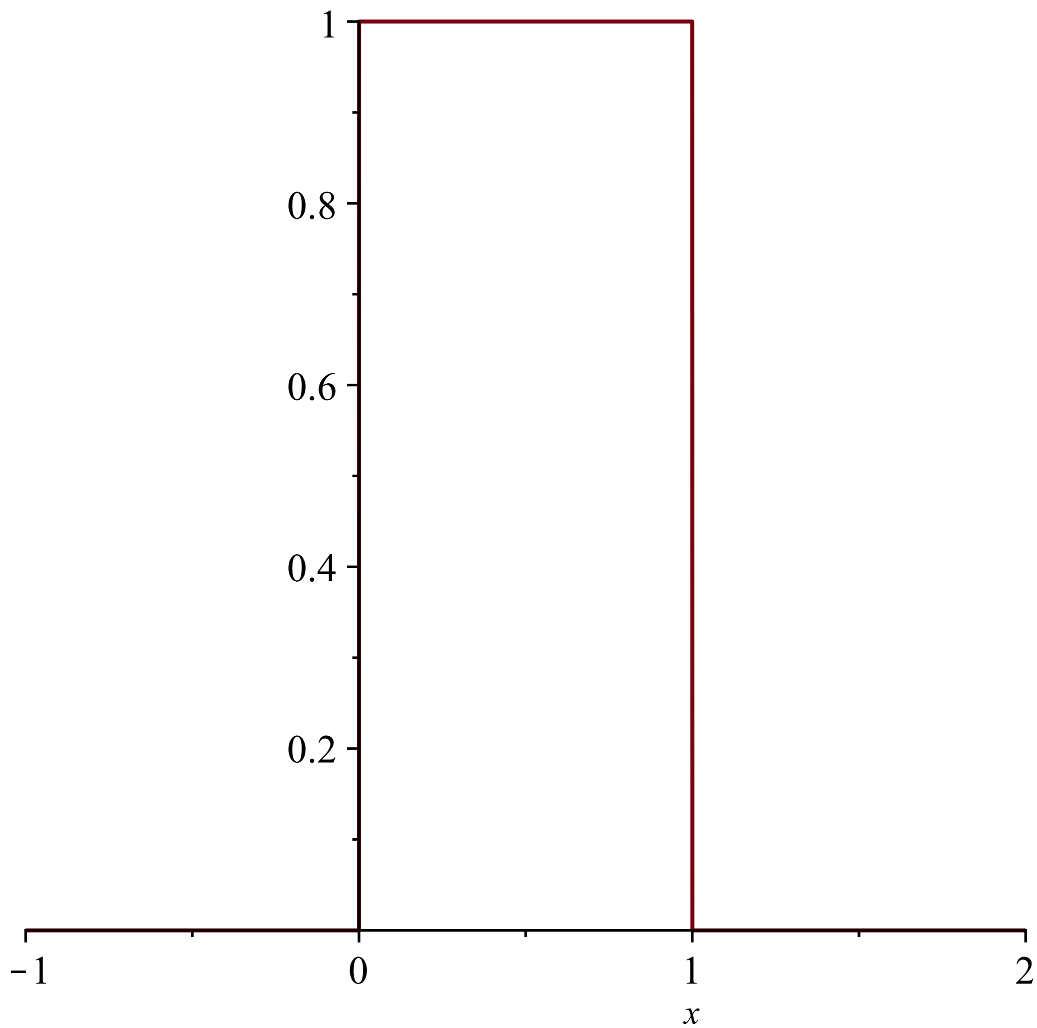
> $A(x1, a);$
$B(x2, a);$
$C(x3, b);$
$D1(x4, 0);$

$$A(0, 2)$$
$$B(2, 2)$$
$$C(4, -2)$$
$$D1(5, 0) \quad \textbf{(1)}$$

> $g(x) := piecewise(x < 0, 0, \text{`and`}(x \geq 0, x < 1), 1, x \geq 1, 0):$
$g(x)$

$$\begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & 1 \leq x \end{cases} \quad \textbf{(2)}$$

> $plot(g(x), x = -1..2)$



#Найдем функцию f(x) как уравнение прямой по двум точкам: две точки (x1,y1), (x2,y2)

тогда уравнение прямой имеет вид $\frac{y - y1}{y2 - y1} = \frac{x - x1}{x2 - x1}$

Первые две точки $A(0, 2)$ и $B(2, 2)$,

тогда уравнение прямой имеет вид $\frac{y-2}{2-2} = \frac{x-0}{2-0} \Rightarrow y = 2$ *на* $0 < x \leq 2$

Следующие две точки $B(2, 2)$ и $C(4, -2)$,

тогда уравнение прямой имеет вид $\frac{y-2}{-2-2} = \frac{x-2}{4-2} \Rightarrow y = -2 \cdot x + 6$ *на* $2 < x \leq 4$

Следующие две точки $C(4, -2)$ и $D1(5, 0)$,

тогда уравнение прямой имеет вид $\frac{y-(-2)}{0-(-2)} = \frac{x-4}{5-4} \Rightarrow y = -2 \cdot x - 10$ *на* $4 < x \leq 5$

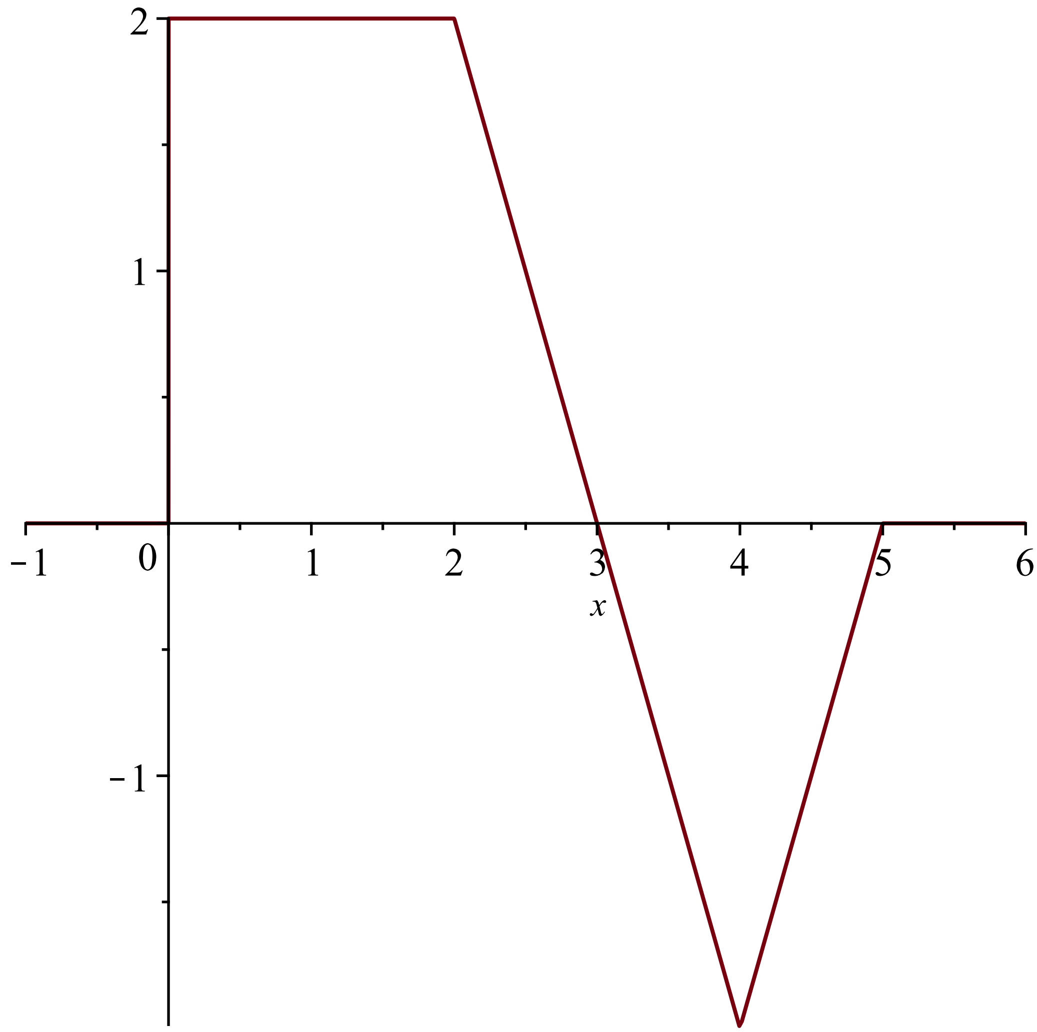
#Получаем функцию f(x):

> $f(x) := piecewise(x \leq 0, 0, \text{`and`}(x > 0, x \leq 2), 2, \text{`and`}(x > 2, x \leq 4), -2 \cdot x + 6, \text{`and`}(x > 4, x \leq 5), 2 \cdot x - 10, x > 5, 0) :$

$f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 2 & 0 < x \leq 2 \\ -2\,x+6 & 2 < x \leq 4 \\ 2\,x-10 & 4 < x \leq 5 \\ 0 & 5 < x \end{cases} \qquad (3)$$

> $plot(f(x), x = -1..6)$



> *#Найдем свертку функций f(x) и g(x) по формуле* $(f*g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\, g(x-\xi)\, \mathrm{d}\xi$

> *#Запишем функции* $f(\xi)$ и $g(x-\xi)$:

> $f(\xi) := piecewise(\,(\xi \leq 0, 0,\ `and`(\xi > 0, \xi \leq 2), 2,\ `and`(\xi > 2, \xi \leq 4),\ -2\cdot x+6,\ `and`(\xi > 4, \xi \leq 5), 2\cdot\xi - 10, \xi > 5, 0)\,)$:

$f(\xi)$

$$\begin{cases} 0 & \xi \le 0 \\ 2 & 0 < \xi \le 2 \\ -2x+6 & 2 < \xi \le 4 \\ 2\xi - 10 & 4 < \xi \le 5 \\ 0 & 5 < \xi \end{cases} \qquad (4)$$

> $g(x\text{-}\xi) := piecewise(x\text{-}\xi < 0, 0, \text{`and`}(x - \xi \ge 0, x\text{-}\xi < 1), 1, x\text{-}\xi \ge 1, 0);$

$$g(x-\xi) := \begin{cases} 0 & x - \xi < 0 \\ 1 & 0 \le x - \xi < 1 \\ 0 & 1 \le x - \xi \end{cases} \qquad (5)$$

> $g(x\text{-}\xi) := piecewise(\xi \le x - 1, 0, \text{`and`}(\xi > x - 1, \xi \le x), 1, \xi > x, 0);$

$$g(x-\xi) := \begin{cases} 0 & \xi \le -1 + x \\ 1 & -1 + x < \xi \le x \\ 0 & x < \xi \end{cases} \qquad (6)$$

>

Подставим в *интервалы функции* $g(x)$ *значения* 0, 2, 4, 5

при $\xi = 0$:

$x < 0$

$0 \le x < 1$

$x \ge 1$

при $\xi = 2$:

$x < 2$

$2 \le x < 3$

$x \ge 3$

при $\xi = 4$:

$x < 4$

$4 \le x < 5$

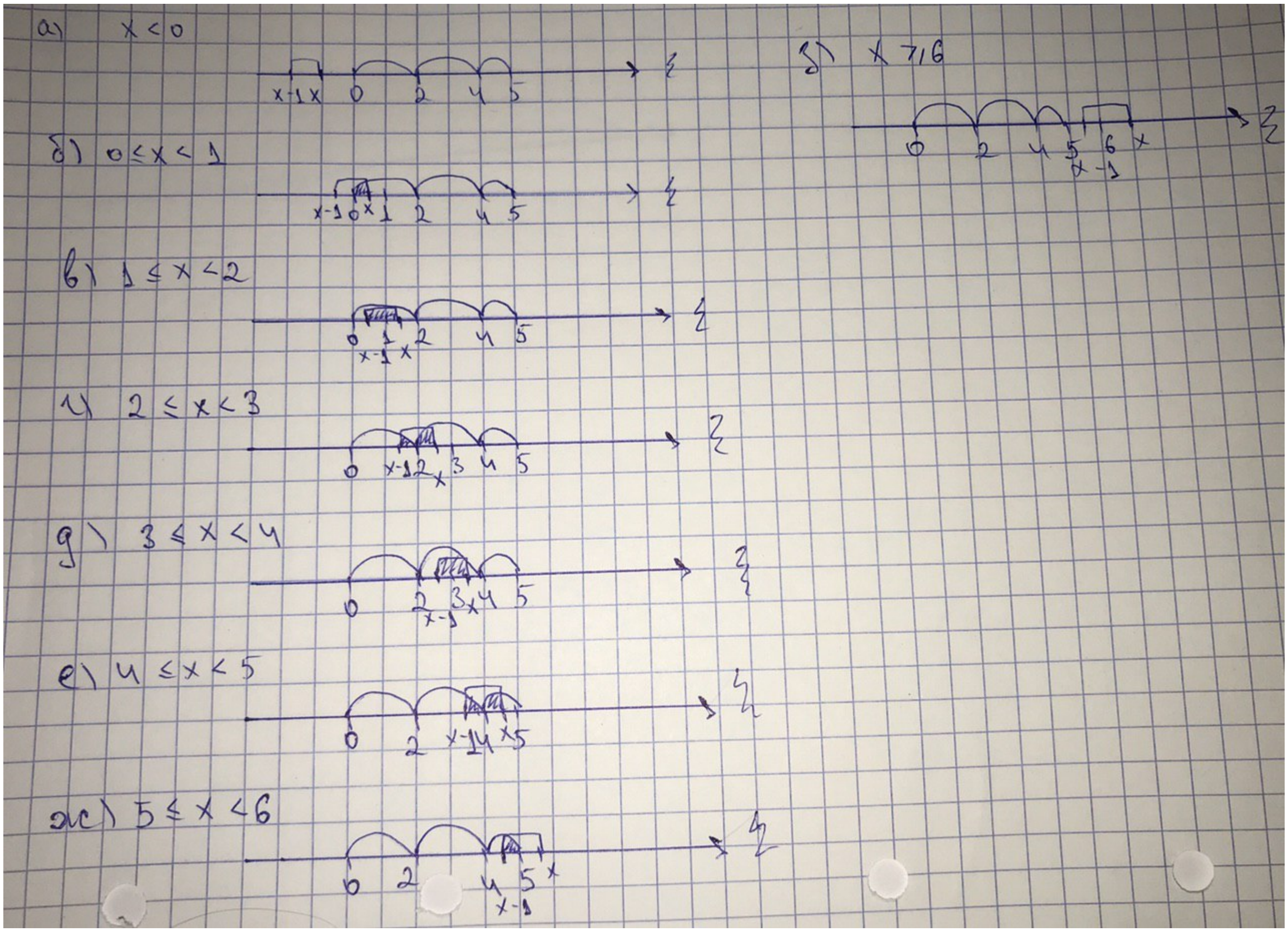
$x \ge 5$

при $\xi = 5$:

$x < 5$

$5 \le x < 6$

$x \ge 6$



#В зависимости от того, какие значения принимает переменная x,
приходим к следующим возможным случаям(рассмотрим рисунок)

> *а*)

> $x < 0$

> $(f*g)(x) = 0$:

> б)

> $0 \le x < 1$

> $(f*g)(x) := \int_0^x 2\cdot 1 \, \mathrm{d}\xi$

> $\int_0^x 2\cdot 1 \, \mathrm{d}\xi$

$$2\,x \tag{7}$$

> *в*)

> $1 \le x < 2$

> $(f*g)(x) = \int_{x-1}^{x} 2\cdot 1 \, \mathrm{d}\xi$

> $\int_{x-1}^{x} 2\cdot 1 \, \mathrm{d}\xi$

$$2 \qquad (8)$$

> *г)*

> $2 \le x < 3$

> $(f*g)(x) = \int_{x-1}^{2} 2\cdot 1 \, d\xi + \int_{2}^{x} (-2\cdot\xi + 6)\cdot 1 \, d\xi$

> $\int_{x-1}^{2} 2\cdot 1 \, d\xi + \int_{2}^{x} (-2\cdot\xi + 6)\cdot 1 \, d\xi$

$$-x^2 + 4x - 2 \qquad (9)$$

> *д)*

> $3 \le x < 4$

> $(f*g)(x) = \int_{x-1}^{x} (-2\cdot\xi + 6)\cdot 1 \, d\xi$

> $\int_{x-1}^{x} (-2\cdot\xi + 6)\cdot 1 \, d\xi$

$$-x^2 + (-1 + x)^2 + 6 \qquad (10)$$

> *е)*

> $4 \le x < 5$

> $(f*g)(x) = \int_{x-1}^{4} (-2\cdot\xi + 6)\cdot 1 \, d\xi + \int_{4}^{x} (2\cdot \xi - 10)\cdot 1 \, d\xi$

> $\int_{x-1}^{4} (-2\cdot\xi + 6)\cdot 1 \, d\xi + \int_{4}^{x} (2\cdot \xi - 10)\cdot 1 \, d\xi$

$$38 + (-1 + x)^2 - 16x + x^2 \qquad (11)$$

> *ж)*

> $5 \le x < 6$

> $(f*g)(x) = \int_{x-1}^{5} (2\cdot \xi - 10)\cdot 1 \, d\xi$

> $\int_{x-1}^{5} (2\cdot \xi - 10)\cdot 1 \, d\xi$

$$-35 - (-1 + x)^2 + 10x \qquad (12)$$

> *з)*

> $x \ge 6$

> $(f*g)(x) = 0 :$

> *#В итоге получаем функцию*

> $f\_g(x) = (f*g)(x) :$

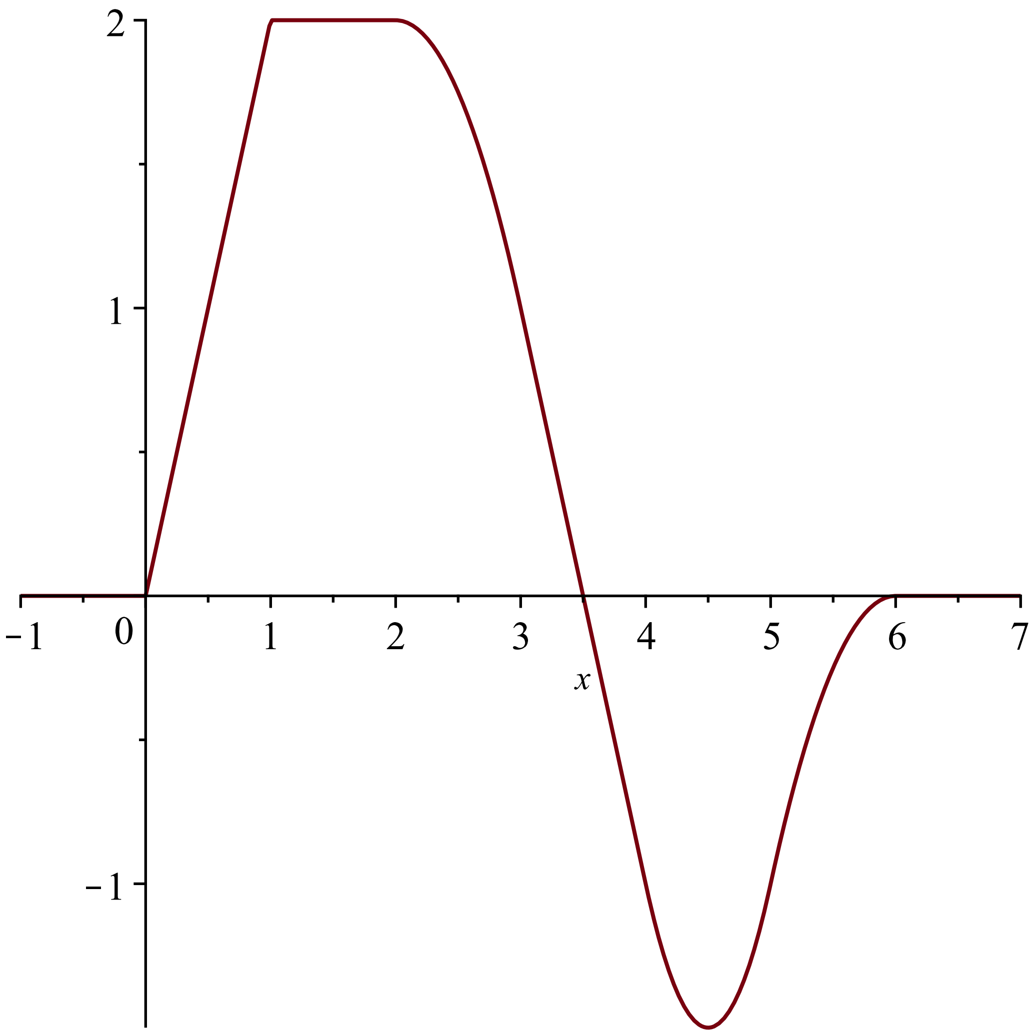
> $f\_g(x) := piecewise\big(x < 0, 0, 0 \le x < 1, 2x, 1 \le x < 2, 2, 2 \le x < 3, -x^2 + 4\cdot x - 2, 3 \le x < 4, -x^2 + (-1 + x)^2 + 6, 4 \le x < 5, 38 + (-1 + x)^2 - 16\cdot x + x^2, 5 \le x < 6, -35$

$- (-1+x)^2 + 10\,x, x \geq 6, 0)$:

$f\_g(x)$

$$f\_g(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 2\,x & 0 \leq x < 1 \\ 2 & 1 \leq x < 2 \\ -x^2 + 4\,x - 2 & 2 \leq x < 3 \\ -x^2 + (-1+x)^2 + 6 & 3 \leq x < 4 \\ 38 + (-1+x)^2 - 16\,x + x^2 & 4 \leq x < 5 \\ -35 - (-1+x)^2 + 10\,x & 5 \leq x < 6 \\ 0 & 6 \leq x \end{cases} \tag{13}$$

> *plot*$(f\_g(x), x = -1..7)$



>

свертка функций $f(x)$ и $g(x)$ склеилась во всех точках, следовательно найдена верно

```
> restart;
> with(plots) :
> #Найти образ Фурье функции f(x), если f(x)≡0 при x∉[x1, x4], а при x∈[x1, x4] график
  этой функции состоит из звеньев ломаной, проходящей через точки A(x1, y1), B(x2,
  y2), C(x3, y3), D1(x4, y4).
> A(-1, 1) :
  B(0, 1) :
  C(1, 2) :
  D1(2, 1) :
```

#Найдем функцию f(x) как уравнение прямой по двум точкам: две точки (x1,y1), (x2,y2)

тогда уравнение прямой имеет вид $\dfrac{y - y1}{y2 - y1} = \dfrac{x - x1}{x2 - x1}$

Первые две точки $A(-1, 1)$ и $B(0, 1)$,

тогда уравнение прямой имеет вид $\dfrac{y-1}{1-1} = \dfrac{x-(-1)}{0-(-1)} \Rightarrow y = 1$ *на* $-1 < x \le 0$

Следующие две точки $B(0, 1)$ и $C(1, 2)$,

тогда уравнение прямой имеет вид $\dfrac{y-1}{2-1} = \dfrac{x-0}{1-0} \Rightarrow y = x + 1$ *на* $0 < x \le 1$

Следующие две точки $C(1, 2)$ и $D1(2, 1)$,

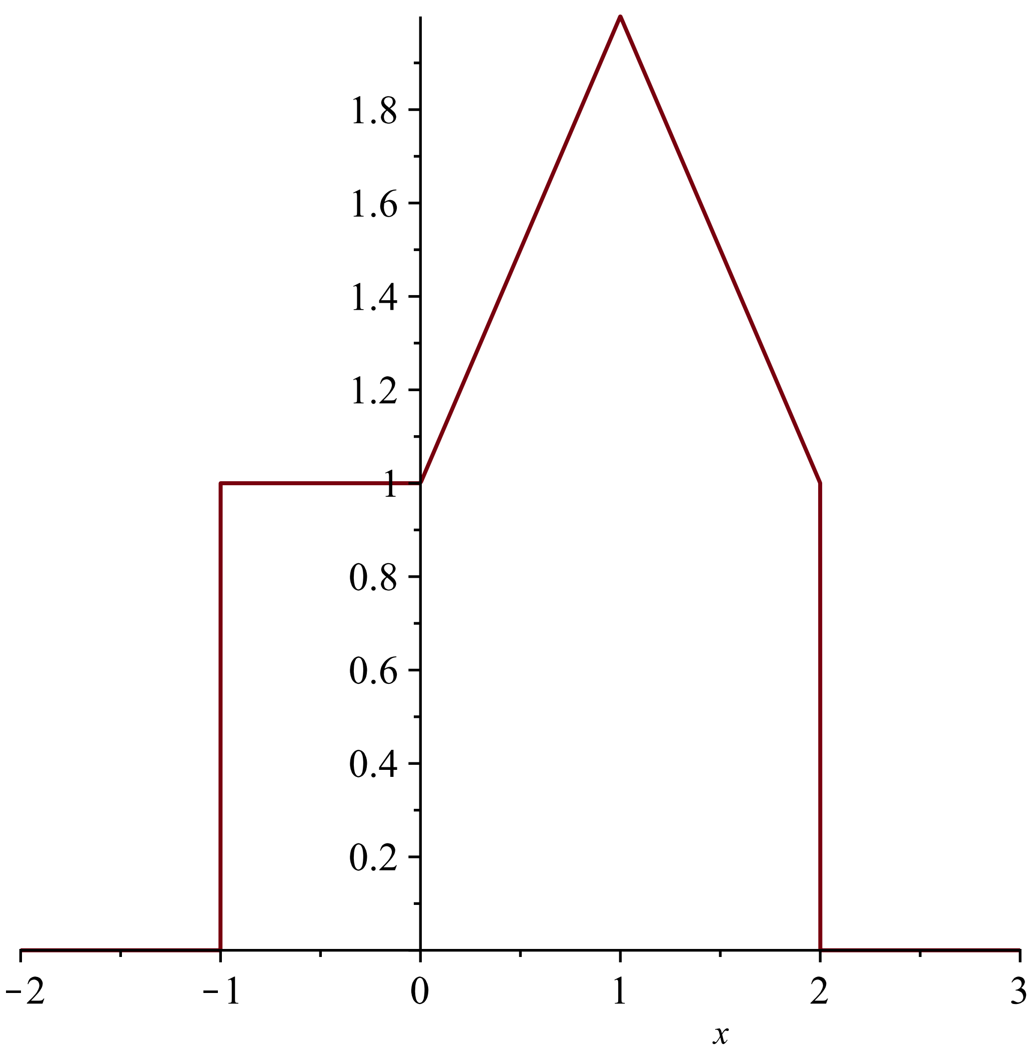
тогда уравнение прямой имеет вид $\dfrac{y-2}{1-2} = \dfrac{x-1}{2-1} \Rightarrow y = -x + 3$ *на* $1 < x \le 2$

#Получаем функцию f(x):

```
> f(x) := piecewise(x ≤ -1, 0, -1 < x ≤ 0, 1, 0 < x ≤ 1, x + 1, 1 < x ≤ 2, -x + 3, x > 2, 0) :
  f(x)
```

$$\begin{cases} 0 & x \le -1 \\ 1 & -1 < x \le 0 \\ 1 + x & 0 < x \le 1 \\ -x + 3 & 1 < x \le 2 \\ 0 & 2 < x \end{cases} \qquad \textbf{(14)}$$

```
> plot(f(x), x = -2..3)
```



Представим функцию $f(x)$ в *виде суммы* "треугольного импульса" и "прямоугольного импульса"

> *#График функции f1(x) - "прямоугольный импульс"*

> $f1(x) := rect\left(\dfrac{x-m}{d}\right)$, *m − середина отрезка* $[a, b]$, *d − длина отрезка* $[a, b]$

> $a := -1:$
> $b := 0:$

$$m := \frac{a+b}{2}$$

$$m := -\frac{1}{2} \tag{15}$$

$$d := b - a$$

$$d := 1 \tag{16}$$

$$f1(x) := rect\left(\frac{x-m}{d}\right):$$

$$f1(x)$$

$$rect\left(x+\frac{1}{2}\right) \tag{17}$$

> #График функции f2(x) - "треугольный импульс"

> $f2(x) := c1 \cdot \Lambda\left(\frac{x - m1}{d1}\right) + rect\left(\frac{x - m2}{d2}\right)$, $m1, m2$ — середина отрезка $[c, f]$, $d1, d2$ — длина отрезка $[c, f]$, $c1$ — высота треугольника

$c := 0 :$
$c1 := 1 :$
$f := 2 :$

$$m1 := \frac{c + f}{2}$$

$$m1 := 1 \tag{18}$$

$$d1 := \frac{f - c}{2}$$

$$d1 := 1 \tag{19}$$

$$m2 := \frac{c + f}{2}$$

$$m2 := 1 \tag{20}$$

$$d2 := f - c$$

$$d2 := 2 \tag{21}$$

$$f2(x) := c1 \cdot \Lambda\left(\frac{x - m1}{d1}\right) + rect\left(\frac{x - m2}{d2}\right) :$$

$f2(x)$

$$\Lambda(x - 1) + rect\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right) \tag{22}$$

> #Таким образом, функция f(x) представляет собой сумму "треугольного импульса" и двух "прямоугольных импульсов":

> $f(x) := f1(x) + f2(x);$

$$f := x \rightarrow f1(x) + f2(x) \tag{23}$$

> $f(x)$

$$rect\left(x + \frac{1}{2}\right) + \Lambda(x - 1) + rect\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right) \tag{24}$$

> #Найдем образ Фурье функции f(x):

$$F[f](\nu) := d \cdot e^{-I \cdot 2 \cdot \pi \cdot \nu \cdot m} \cdot \frac{\sin(\pi \cdot \nu \cdot d)}{\pi \cdot \nu \cdot d} + d2 \cdot e^{-I \cdot 2 \cdot \pi \cdot \nu \cdot m2} \cdot \frac{\sin(\pi \cdot \nu \cdot d2)}{\pi \cdot \nu \cdot d2} + d1 \cdot e^{-I \cdot 2 \cdot \pi \cdot \nu \cdot m1} \cdot \frac{\sin^2(\pi \cdot \nu \cdot d1)}{(\pi \cdot \nu \cdot d1)^2}$$

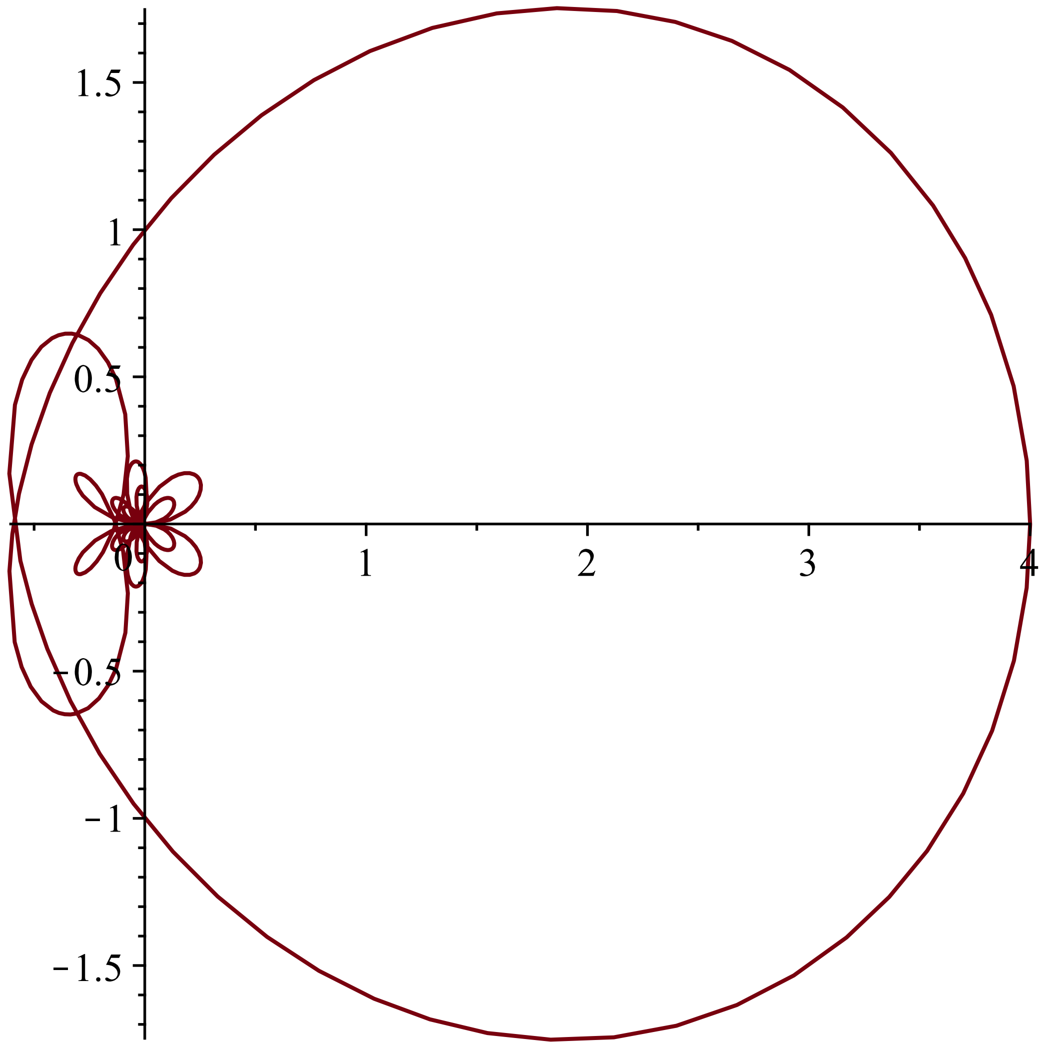
$$F_f := \nu \rightarrow \frac{d\, e^{-2 I \pi \nu m} \sin(\pi \nu d)}{\pi \nu d} + \frac{d2\, e^{-2 I \pi \nu m2} \sin(\pi \nu d2)}{\pi \nu d2} + \frac{d1\, e^{-2 I \pi \nu m1} \sin(\pi \nu d1)^2}{\pi^2 \nu^2 d1^2} \tag{25}$$

$F[f](\nu)$

$$\frac{e^{I \pi \nu} \sin(\pi \nu)}{\pi \nu} + \frac{e^{-2 I \pi \nu} \sin(2 \pi \nu)}{\pi \nu} + \frac{e^{-2 I \pi \nu} \sin(\pi \nu)^2}{\pi^2 \nu^2} \tag{26}$$

> #Построим график найденного образа Фурье

> $complexplot(F[f](\nu), \nu = -3..3)$

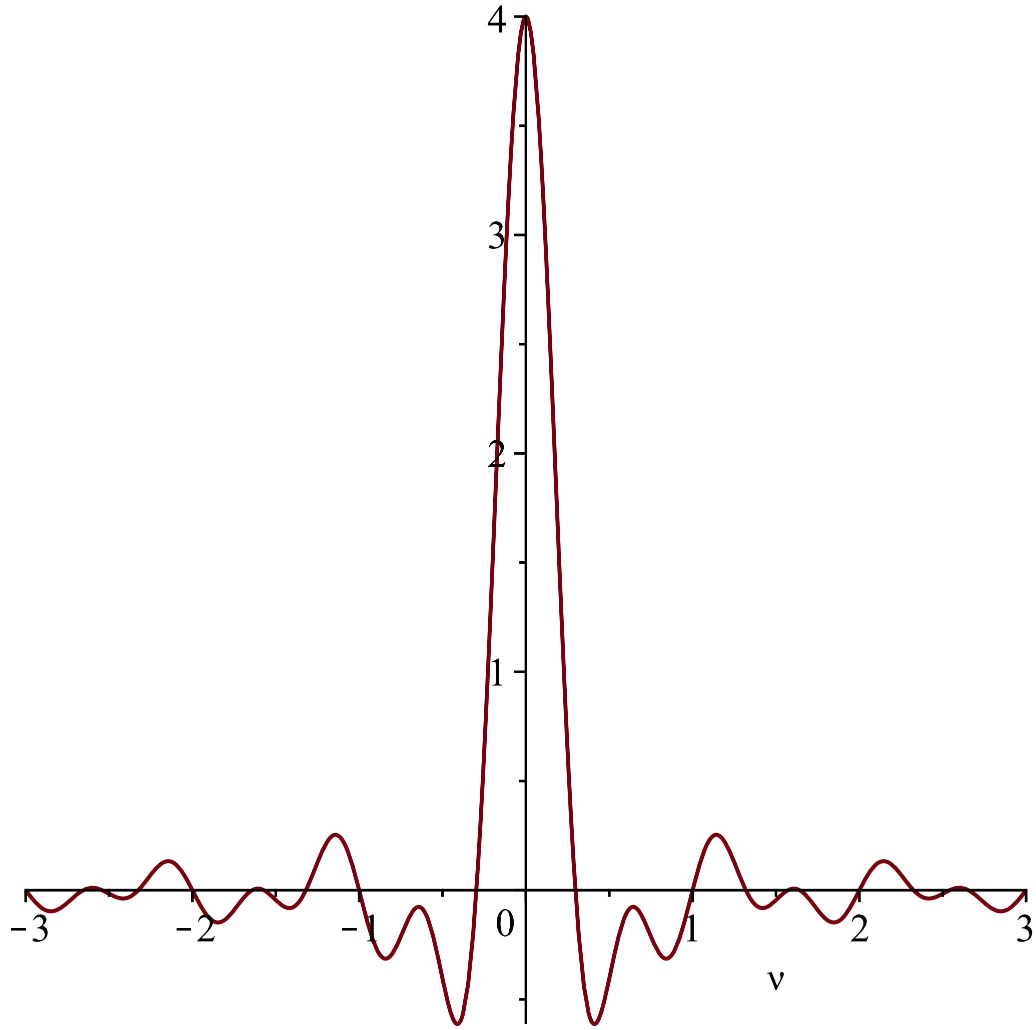


#Построим действительную часть образа Фурье

> $F1[f](\nu) := d \cdot \cos(-2 \cdot \pi \cdot \nu \cdot m) \cdot \frac{\sin(\pi \cdot \nu \cdot d)}{\pi \cdot \nu \cdot d} + d2 \cdot \cos(-2 \cdot \pi \cdot \nu \cdot m2) \cdot \frac{\sin(\pi \cdot \nu \cdot d2)}{\pi \cdot \nu \cdot d2} + d1 \cdot \cos(-2 \cdot \pi \cdot \nu \cdot m1) \cdot \frac{\sin^2(\pi \cdot \nu \cdot d1)}{(\pi \cdot \nu \cdot d1)^2}$

$$F1_f := \nu \to \frac{d \cos(-2 \pi \nu m) \sin(\pi \nu d)}{\pi \nu d} + \frac{d2 \cos(-2 \pi \nu m2) \sin(\pi \nu d2)}{\pi \nu d2} + \frac{d1 \cos(-2 \pi \nu m1) \sin(\pi \nu d1)^2}{\pi^2 \nu^2 d1^2} \quad \textbf{(27)}$$

> $plot(F1[f](\nu), \nu = -3..3)$

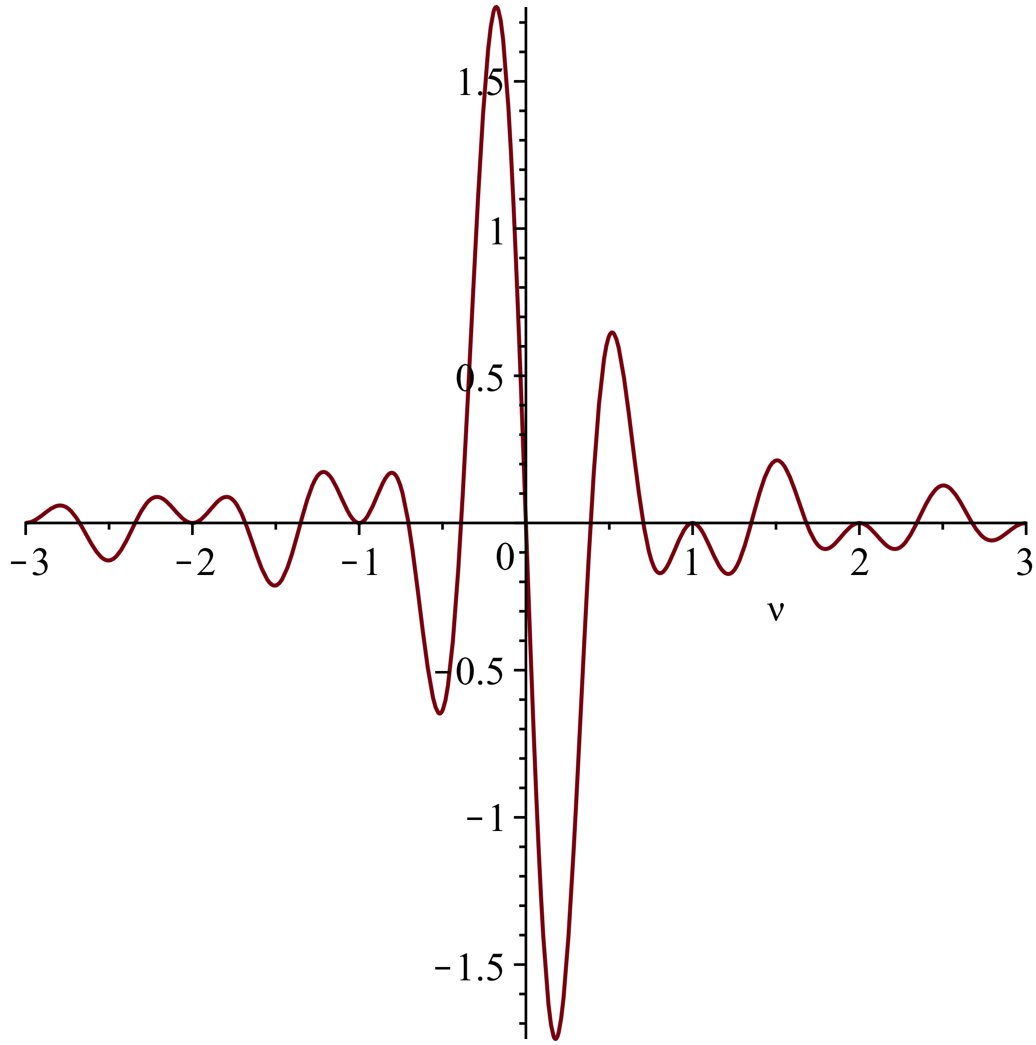


#Построим мнимую часть образа Фурье

> $F2[f](\nu) := d\cdot\sin(-2\cdot\pi\cdot\nu\cdot m)\cdot\frac{\sin(\pi\cdot\nu\cdot d)}{\pi\cdot\nu\cdot d} + d2\cdot\sin(-2\cdot\pi\cdot\nu\cdot m2)\cdot\frac{\sin(\pi\cdot\nu\cdot d2)}{\pi\cdot\nu\cdot d2} + d1\cdot\sin(-2\cdot\pi\cdot\nu\cdot m1)\cdot\frac{\sin^2(\pi\cdot\nu\cdot d1)}{(\pi\cdot\nu\cdot d1)^2}$

$$F2_f := \nu \rightarrow \frac{d\sin(-2\pi\nu m)\sin(\pi\nu d)}{\pi\nu d} + \frac{d2\sin(-2\pi\nu m2)\sin(\pi\nu d2)}{\pi\nu d2} + \frac{d1\sin(-2\pi\nu m1)\sin(\pi\nu d1)^2}{\pi^2\nu^2 d1^2} \tag{28}$$

> $plot(F2[f](\nu), \nu = -3..3)$


1.5
1
0.5
−0.5
−1
−1.5
−3
−2
−1
0
1
2
3
ν

>