> *Найти фундаментальное решение* $E(t)$ *указанного дифференциального оператора*

$$L=\left(a_1\cdot\frac{d}{dt}+b_1\right)\cdot\left(a_2\cdot\frac{d}{dt}+b_2\right)\cdot\left(a_3\cdot\frac{d}{dt}+b_3\right)$$

С помощью свертки найти решение обыкновенного дифференциального уравнения

$Lu(t)=f(t)\eta\left(t-t_0\right)$

описывающего поведение линейной динамической системы при включении в *момент времени* t_0 *внешнего воздействия, характеризуемого функцией* $f(t)$

. *Построить совмещенные графики функций* $E(t)$, $f(t)\eta\left(t-t_0\right)$, $u(t)$

$a_1 := 1 :$

$b_1 := 1 :$

$a_2 := 0 :$

$b_2 := 2 :$

$a_3 := 1 :$

$b_3 := 0 :$

$f(t) := e^{-2\cdot t}:$

$t_0 := 1 :$

Получаем

$$L=\left(1\cdot\frac{d}{dt}+1\right)\cdot\left(0\cdot\frac{d}{dt}+2\right)\cdot\left(1\cdot\frac{d}{dt}+0\right)=\left(1\cdot\frac{d}{dt}+1\right)\cdot(2)\cdot\left(1\cdot\frac{d}{dt}\right)=2\cdot\frac{d^2}{dt^2}+2\cdot\frac{d}{dt}$$

1 *способ*

$E(t)=y(t)\eta(t)$, *где* $y(t)$ *— частное решение однородного дифференциального уравнения* $2\,y''+2\,y'=0$ с *начальными условиями* $y(0)=0$, $y'(0)=\frac{1}{2}$ (*так как коэффициент перед высшей производной равен* 2)

Характеристическое уравнение $2\,\lambda^2+2\,\lambda=0$

его корни $\lambda_1=0$, $\lambda_2=-1$

Тогда получаем

$y(t)=C1\cdot e^{-t}+C2\cdot e^{0}$

или

$y(t) := C1\cdot e^{-t}+C2 :$

Находим коэффициенты $C1$ и $C2$ *из начальных условий*

$y(0)$

$$C1+C2 \qquad (1)$$

$\left.\frac{d}{dt}y(t)\right|_{t=0}$

$$-C1 \qquad (2)$$

$solve\left(\left\{C1+C2=0,-C1=\frac{1}{2}\right\},\{C1,C2\}\right)$

$$\left\{C1=-\frac{1}{2},C2=\frac{1}{2}\right\} \qquad (3)$$

$C1 := -\frac{1}{2} :$

$C2 := \frac{1}{2}:$

$y(t)$

$$-\frac{e^{-t}}{2}+\frac{1}{2} \tag{4}$$

Следовательно, получаем фундаментальное решение дифференциального оператора

$E(t) := y(t)\cdot \mathrm{Heaviside}(t)$

$$E := t \to y(t)\ \mathrm{Heaviside}(t) \tag{5}$$

$E(t)$

$$\left(-\frac{e^{-t}}{2}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{Heaviside}(t) \tag{6}$$

2 способ

Решаем операционным методом уравнение

$2\cdot\frac{d^2}{dt^2}E+2\cdot\frac{d}{dt}E=\delta(t)$

Обозначим изображение искомой функции $E(t)$ *через* $E1(p)$, $E(t)\doteqdot E1(p)$

Для изображений получаем

$2\,p^2 E1(p)+2\,pE1(p)=1$

Отсюда

$E1(p)=\frac{1}{2\,p^2+2\,p}=\frac{1}{2\,p}-\frac{1}{2(p+1)}$

Восстановим оригинал

$E(t) := \mathrm{Heaviside}(t)\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot e^{-t}\right):$

Ответы сошлись!

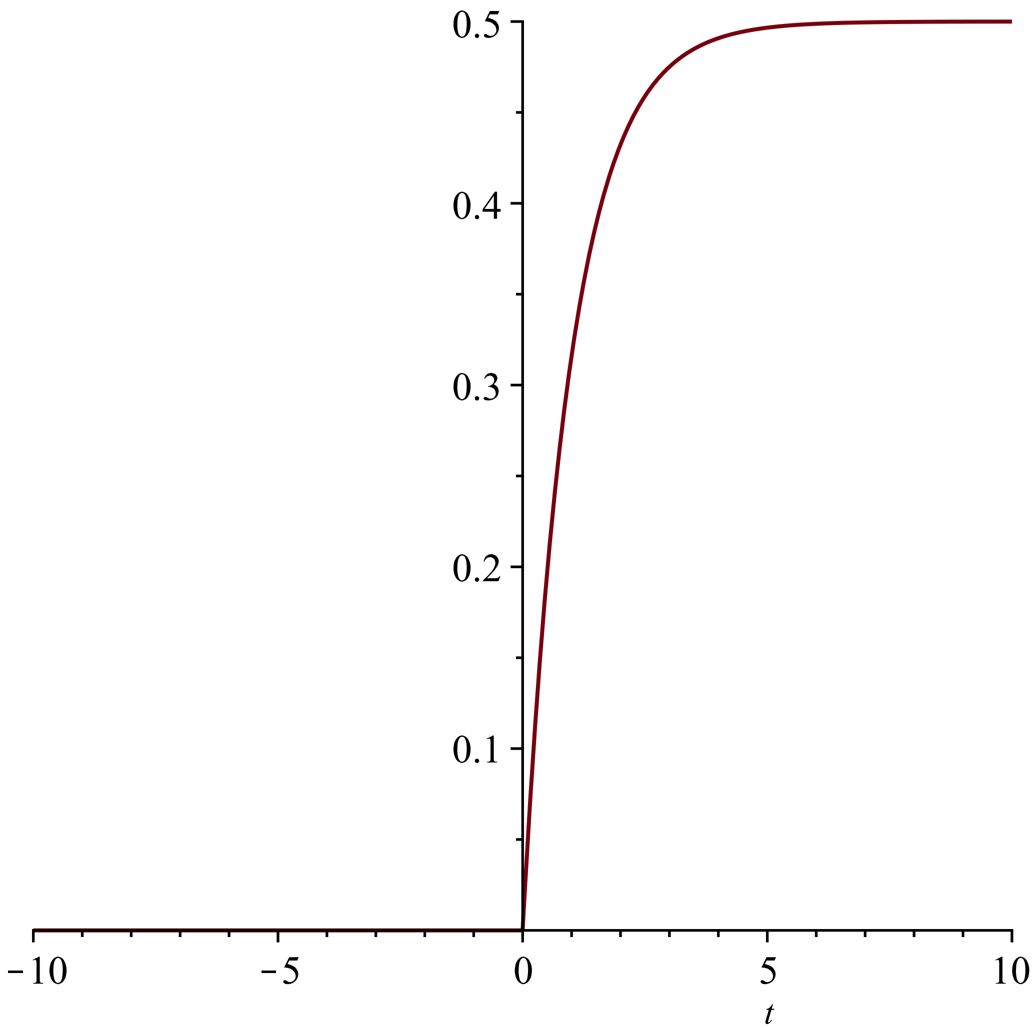
Построим график $E(t)$

фцнкция Хевисайда имеет вид :

$\mathrm{Heaviside}(t) := \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}:$

Получаем следующий график фундаментального решения

$plot(E(t))$



С помощью свертки найдем решение обыкновенного дифференциального уравнения
$Lu(t) = f(t)\eta(t - t_0)$

Формула свертки
$u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(t-\tau) f(\tau) \eta(\tau - t_0)\, \mathrm{d}\tau$

Получаем
$u(t) := \int_{-\infty}^{+\infty} E(t-\tau) \cdot f(\tau) \cdot \mathrm{Heaviside}(\tau - t_0)\, \mathrm{d}\tau$

$$u := t \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} E(t-\tau)\, f(\tau)\, \mathrm{Heaviside}(\tau - t_0)\, \mathrm{d}\tau \tag{7}$$

$u(t)$

$$\begin{cases} 0 & t < 1 \\ \dfrac{\left(\mathrm{e}^{-2+2t} - 2\,\mathrm{e}^{-1+t} + 1\right)\mathrm{e}^{-2t}}{4} & 1 \le t \end{cases} \tag{8}$$

Проверка склейки **:**

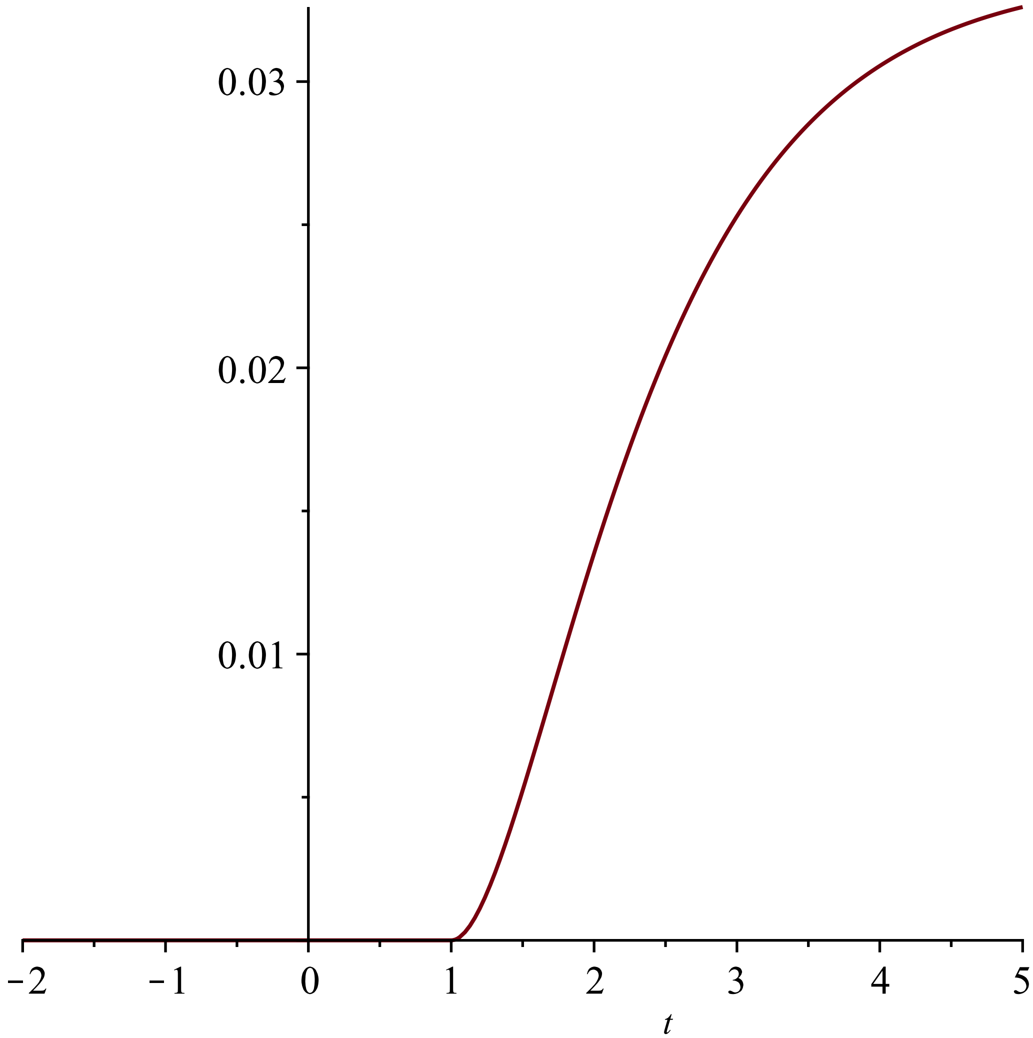
$$u(t)\Big|_{t=1}$$

$$0 \qquad \textbf{(9)}$$

функция склеивается!

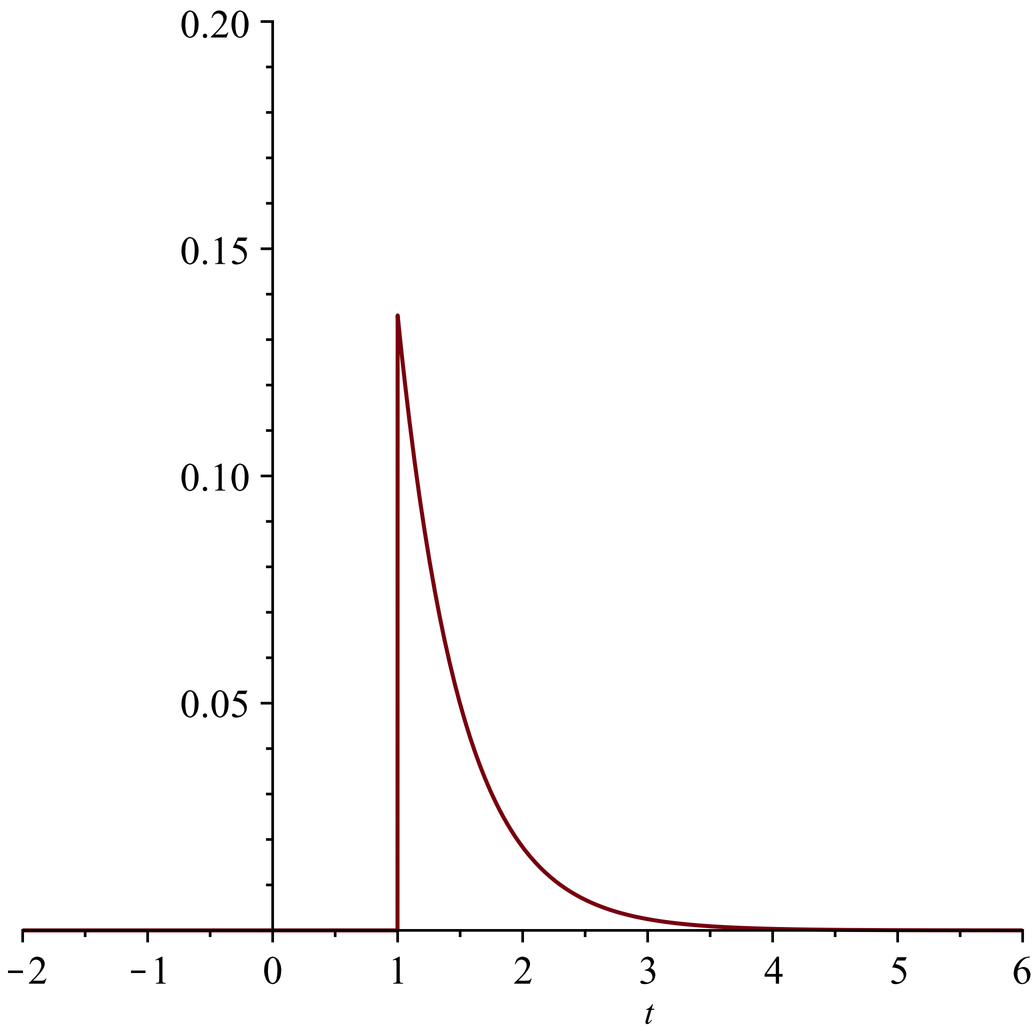
Построим решение обыкновенного дифференциального уравнения

$plot(u(t), t=-2..5)$



Построим правую часть нашего обыкновенного дифференциального уравнения $Lu(t) = f(t)\,\eta(t - t_0)$

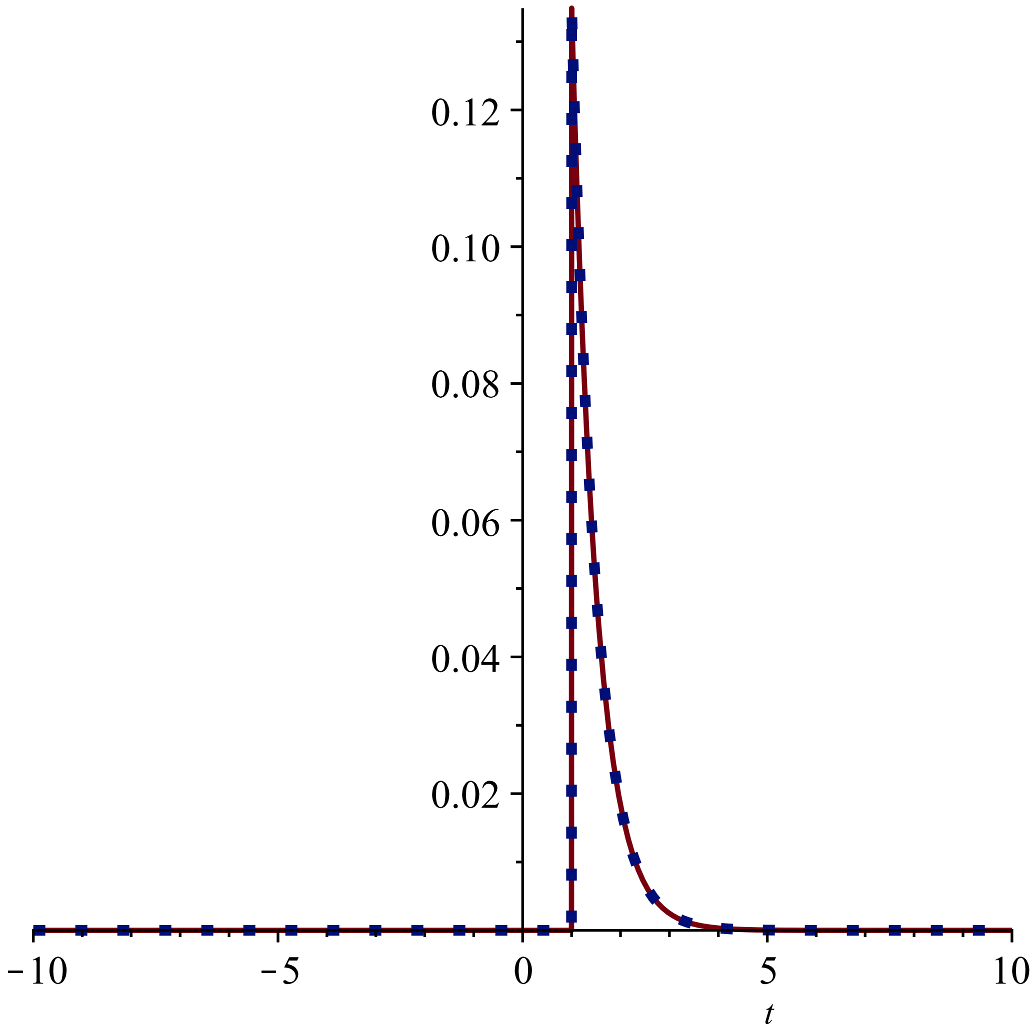
$plot\left(f(t)\cdot \text{Heaviside}\left(t - t_0\right), t=-2..6, 0..0.2\right)$



Проверим действие нашего оператора на полученное решение дифференциального уравнения и получим правую часть уравнения $\boldsymbol{Lu(t) = f(t)\,\eta(t - t_0)}$

Построим совмещенные графики правой и *левой частей уравнения*

$$plot\left(\left[2\cdot\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\,t^2}u(t)+2\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}u(t), f(t)\cdot\mathrm{Heaviside}\left(t-t_0\right)\right], linestyle=[solid, dot], thickness=[2,4]\right)$$

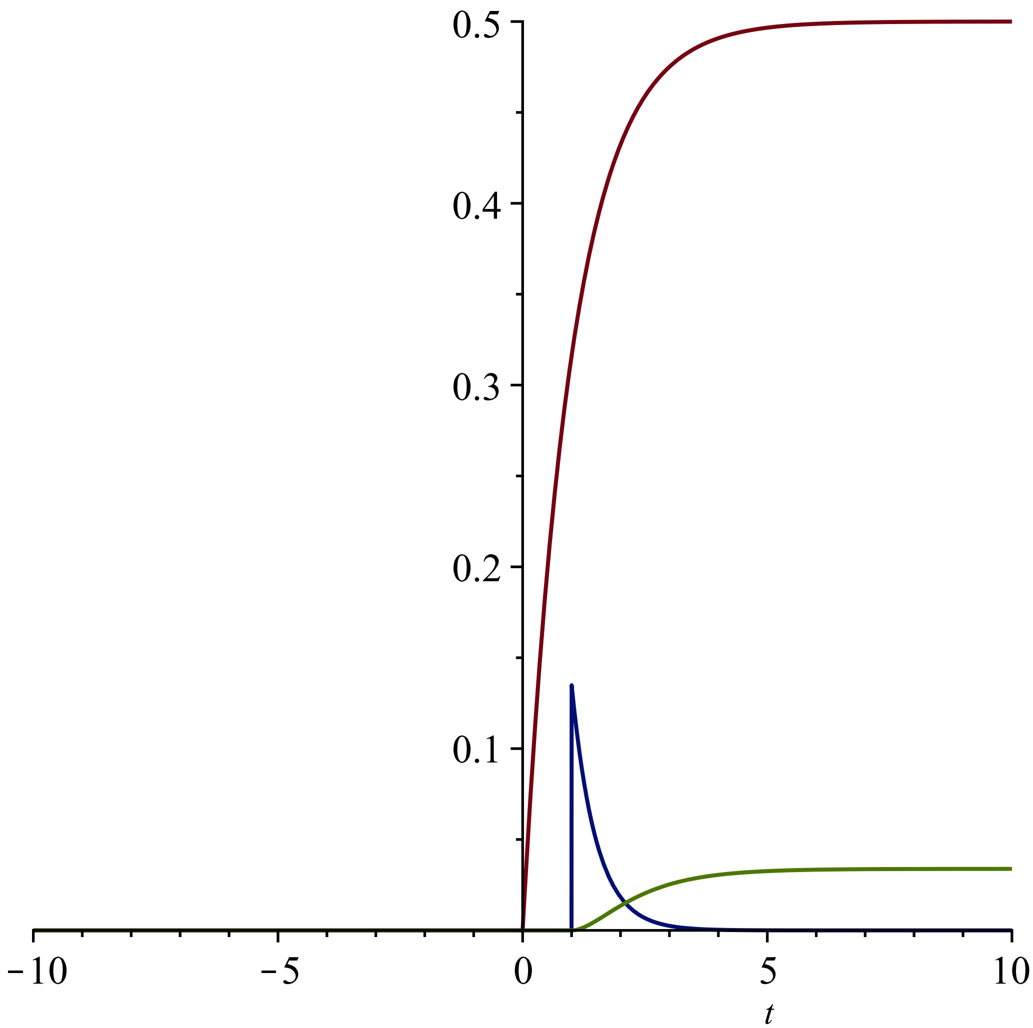


графики наложились друг на друга, следовательно, решение найдено верно!

Построим совмещенные графики функций $E(t)$, $f(t)\,\boldsymbol{\eta}(t-t_0)$, $u(t)$

$with(plots):$

$plot([E(t), f(t)\cdot \mathrm{Heaviside}(t-t_0), u(t)])$ *# Красным выделена функция* $E(t)$, *синим* $-f(t)\cdot \mathrm{Heaviside}(t-t_0)$, *зеленым* $-u(t)$


0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
−10
−5
0
5
10
t