



Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования

**«Московский государственный технический  
университет  
имени Н.Э. Баумана  
(национальный исследовательский университет)»  
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)**

---

ФАКУЛЬТЕТ «Фундаментальные науки»

КАФЕДРА «Вычислительная математика и математическая физика» (ФН-11)

## **РАСЧЁТНО - ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА**

**к курсовой работе на тему:**

Дифференциальная геометрия и основы тензорного исчисления.

Дисциплина: Дифференциальная геометрия и основы тензорного исчисления

Студент

\_\_\_\_\_

(Подпись, дата)

А.А. Соколов

(И.О.Фамилия)

Руководитель курсовой работы

\_\_\_\_\_

(Подпись, дата)

Е.В. Осипов

(И.О.Фамилия)

Москва, 2019

## СПИСОК ИСПОЛНИТЕЛЕЙ

Руководитель курсовой \_\_\_\_\_ Е.В. Осипов  
работы подпись, дата

Исполнитель \_\_\_\_\_ А.А. Соколов  
подпись, дата

Нормоконтролер \_\_\_\_\_ С.С. Кудрявцева

подпись, дата

## РЕФЕРАТ

Отчет 27 с., 5 источников.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ, РИМАНОВЫ  
ПРОСТРАНСТВА, ГАУССОВА КРИВИЗНА, СРЕДНЯЯ КРИВИЗНА,  
СКАЛЯРНАЯ КРИВИЗНА, ГОСТ 7.32-2017.

Цель работы – исследование гауссовых, средних и скалярных кривизн поверхности, полученной вращением эволюты трактрисы вокруг оси  $OX$ .

В результате работы была произведена устная защита курсовой работы, а также выполнен письменный отчет в соответствии со стандартами оформления научно-технической документации.

ВВЕДЕНИЕ .....	5
1 Римановы пространства .....	6
1.1 Элементарное многообразие .....	6
1.2 Касательное пространство .....	7
1.3 Определение риманова пространства .....	9
2 Свойства римановых пространств .....	10
2.1 Коэффициенты связности в $\mathbb{V}^n$ .....	10
2.2 Определение аффинной связности .....	10
2.3 Тензоры в элементарном многообразии .....	11
2.4 Определение тензора в римановом пространстве .....	12
2.5 Ковариантное дифференцирование тензоров в $\mathbb{V}^n$ .....	13
2.6 Ковариантное дифференцирование тензоров в $\mathbb{L}^n$ .....	13
2.7 Риманово пространство с аффинной связностью .....	14
2.8 Тензор Римана-Кристоффеля .....	14
2.9 Тензор Риччи .....	16
2.10 Тензор Эйнштейна .....	17
3 Трактриса и ее эволюта .....	18
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	25
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ .....	26
ПРИЛОЖЕНИЕ А .....	27

## ВВЕДЕНИЕ

Курсовая работа – вид учебной работы обучающегося, в которой присутствуют элементы самостоятельного научного исследования. Работа рассчитана на закрепление и применение полученных навыков в процессе учёбы.

Целью курсовой работы является исследование гауссовых, скалярных и средних кривизн поверхности, получаемой вращением эволюты трактрисы вокруг оси  $OX$ .

Задачами курсовой работы являются:

- ознакомление с римановыми пространствами;
- нахождение гауссовой кривизны;
- нахождение средней кривизны;
- нахождение скалярной кривизны.

## 1 Римановы пространства

В механике и особенно в релятивистской физике тензоры широко применяют в  $n$ -мерных римановых пространствах, являющихся более общими, чем евклидовы [1]. Дадим определение этих пространств, а затем покажем, как конструируются тензоры в них. Начнём с основополагающего понятия римановых пространств - элементарного многообразия.

### 1.1 Элементарное многообразие

Определение 1. Элементарным  $n$ -мерным многообразием называют такое множество  $M^n$ , каждой точке которого взаимнооднозначно поставлен в соответствие упорядоченный набор чисел  $(X_1 \dots X_n)$  из некоторой связной области  $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^n$ , т.е, задано биективное отображение  $\varphi : M^n \longrightarrow \mathcal{D} \in \mathbb{R}^n$ .

Координатами точки  $\mathcal{M} \in M^n$  в системе координат  $\mathcal{D}$  называют координаты  $X^i \in \mathbb{R}^n$  ее образа  $\varphi(\mathcal{M})$ , изменяющиеся в области  $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^n$ . Если для множества  $M^n$  имеется другое биективное отображение  $\varphi' : M^n \longrightarrow \mathcal{D}' \in \mathbb{R}^n$ , то координаты точки  $\mathcal{M}$  в системах координат  $\mathcal{D}$  и  $\mathcal{D}'$ , связаны соотношениями:

$$X'^i = X'^i(X^j), \quad i, j = 1 \dots n, \quad (1)$$

которые предполагают достаточное число раз дифференцируемыми и невырожденными, т.е.  $\det\left(\frac{\partial X'^i}{\partial X^j}\right) \neq 0, \forall X^i \in \mathcal{D}$ . Введём обозначения для якобиевых матриц преобразования, а также для их производных:

$$Q^i_j \equiv \left(\frac{\partial X'^i}{\partial X^j}\right), \quad P^i_j \equiv \left(\frac{\partial X^i}{\partial X'^j}\right), \quad P^i_{jk} \equiv \frac{\partial^2 X^i}{\partial X'^j \partial X'^k}, \quad (2)$$

и кроме того будем использовать обозначения для частных производ-

ных:

$$\frac{\partial f}{\partial X^i} \equiv f_{,i}, \quad \frac{\partial f}{\partial X^{\bar{n}}} \equiv f_{|\bar{n}} = P^j_{\bar{n}} f_{,j}. \quad (3)$$

Примером двумерного ( $n = 2$ ) элементарного многообразия  $M^2$  являются поверхности в  $\mathbb{R}^3$ , на которых определены криволинейные координаты  $X_1, X_2$  и которые заданы тремя функциями:

$$x^i = x^i(X^1, X^2), \quad i = 1, 2, 3. \quad (4)$$

## 1.2 Касательное пространство

Определение 2. Кривой  $\mathcal{L}$  в многообразии  $M^n$  называют отображение  $\mathcal{L} : [\xi_1, \xi_2] \in \mathbb{R}^1 \longrightarrow M^n$ , которое записывают в виде функции:

$$X^i = X^i(\xi) \quad \forall \xi \in [\xi_1, \xi_2], \quad X^i \in M^n. \quad (5)$$

Здесь  $X^i$  - координаты точки  $\mathcal{M} \in M^n$ ,  $[\xi_1, \xi_2]$  - некоторый отрезок из  $\mathbb{R}^1$ , ( $\xi_1 < \xi_2$ ), а функции (5) предполагаем непрерывно дифференцируемыми, по крайней мере, два раза.

Зафиксировав значение параметра  $\xi \in [\xi_1, \xi_2]$ , получим некоторую точку  $\mathcal{M} \in \mathcal{L}$ , в ней можно вычислить производные от функций (5):

$$a^i = \frac{dX^i}{d\xi}. \quad (6)$$

Определение 3. Упорядоченный набор  $(a_1 \dots a_n)$  производных (6) называют компонентами касательного вектора  $a^i$  в точке  $\mathcal{M}$  кривой  $\mathcal{L}$  в  $M^n$ .

Если перейти к координатам  $X^{\bar{n}}$  той же точки  $\mathcal{M} \in \mathcal{L}$ , то согласно (1)

получаем, что компоненты касательного вектора  $a'^i$  в этой системе координат будут иметь вид:  $a'^i = \frac{dX'^i}{d\xi}$  и связаны с  $a^i$  тензорным законом:

$$a'^i = Q^i_j a^j. \quad (7)$$

Поскольку через фиксированную точку  $\mathcal{M} \in M^n$  можно провести различные кривые  $\mathcal{L}$ , то, вообще говоря, в каждой точке  $\mathcal{M}$  имеется множество упорядоченных наборов  $(a_1 \dots a_n)$ . Определим операции с этими наборами.

Пусть имеется две кривые  $\mathcal{L}_1$  и  $\mathcal{L}_2$ , заданные в виде функций  $X_1^i(\xi)$ ,  $X_2^i(\xi)$ , проходящие через точку  $\mathcal{L}$ , тогда можно построить два набора компонент касательных векторов  $a_1^i = \frac{dX_1^i}{d\xi}$  и  $a_2^i = \frac{dX_2^i}{d\xi}$ .

Суммой компонент двух касательных векторов назовём набор

$$a_1^i + a_2^i = \frac{dX_1^i + X_2^i}{d\xi}, \quad (8)$$

который представляет собой компоненты касательного вектора к кривой  $(X_1^i + X_2^i)(\xi)$  в данной точке  $\mathcal{M}$ .

Аналогично определяем произведение компонент  $a^i$  на вещественное число  $\lambda$ :

$$\lambda a^i = \lambda \frac{dX^i}{d\xi} = \frac{d\lambda X^i}{d\xi}. \quad (9)$$

Поскольку набор чисел  $(a_1 \dots a_n)$  является элементом пространства  $\mathbb{R}$ , то, выбрав базис  $e_i$  в этом пространстве, можно построить сам касательный вектор  $a$  в точке  $\mathcal{M}$  кривой  $\mathcal{L}$ :  $a = a^i e_i = a'^i e'_i$ , где  $e'_i = P^j_i e_j$  - новый базис.

**Определение 4.** Касательным пространством в данной точке  $\mathcal{M}$  элементарного многообразия  $M^n$  называют множество касательных векторов  $= a^i e_i$ , построенных ко всевозможным кривым  $\mathcal{L}$ , проходящим через данную точку.

**Теорема 1.** Касательное пространство в любой точке  $\mathcal{M} \in M^n$  является  $n$ -мерным линейным пространством, которое обозначают как  $T_{\mathcal{M}} M^n$ ,



а векторы  $e$ , образуют базис в нем.

### 1.3 Определение риманова пространства

Определение 5. Элементарное  $n$ -мерное многообразие  $M^n$  называют римановым пространством  $\mathbb{V}^n$ , если в каждой точке  $\mathcal{M} \in M^n$  с координатами  $X^i$  задана матрица  $g_{ij}$   $n$ -го порядка, которая является

- 1) симметричной,
- 2) невырожденной:  $\det(\tilde{g}_{ij}) \neq 0, \quad \forall X^i$ ,
- 3) компоненты её являются непрерывно-дифференцируемыми функциями,
- 4) при переходе к другим координатам  $X'^l$  преобразуется по тензорному закону:

$$g_{ij} = Q_i^k Q_j^l g'_{kl}. \quad (10)$$

Двумерные поверхности в  $\mathbb{R}^3$ , очевидно, можно рассматривать как двумерные римановы пространства  $\mathbb{V}^2$  с метрической матрицей  $\tilde{g}_{IJ}$ .

Расстояние в римановом пространстве вводят для бесконечно близких точек  $\mathcal{M}$  и  $\mathcal{M}'$ , имеющих координаты  $X^i$  и  $X^i + dX^i$ , и определяют его как

$$ds^2 = \kappa g_{ij} dX^i dX^j, \quad (11)$$

где  $\kappa$  – знаковое число, которое выбирают так, чтобы форма (11) была положительной.

Риманово пространство называют собственно римановым, если метрическая матрица  $g_{ij}, \forall X^i \in \mathcal{D}$  является положительно-определённой, в противном случае говорят о псевдоримановых пространствах.

## 2 Свойства римановых пространств

Рассмотрим некоторые свойства римановых пространств, которые понадобятся нам для введения тензора Эйнштейна, чтобы указать связь римановых пространств с общей теорией относительности.

### 2.1 Коэффициенты связности в $\mathbb{V}^n$

Поскольку в каждой точке  $\mathcal{M}(X^i) \in \mathbb{V}^n$  введена метрическая матрица  $g_{ij}(X^i)$  компоненты которой, согласно п.3 определения 5, являются непрерывно дифференцируемыми функциями, то можно вычислить производные  $\frac{\partial g_{ij}}{\partial X^k}$  и образовать из них следующие объекты:

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2}(g_{ik,j} + g_{jk,i} - g_{ij,k}). \quad (12)$$

Определение 6. Функции  $\Gamma_{ijk}$  определённые по формулам (12), называют коэффициентами связности первого рода в  $\mathbb{V}^n$ . Коэффициенты связности второго рода вводим с помощью обратной матрицы  $g^{ij}$ :

$$\Gamma_{ij}^m = g^{mp}\Gamma_{ijp}. \quad (13)$$

### 2.2 Определение аффинной связности

Определение 7. Элементарное  $n$ -мерное многообразие  $M^n$  называют пространством аффинной связности  $\mathbb{L}^n$ , если в каждой точке  $\mathcal{M} \in M^n$  с координатами  $X^i$  задана система функций  $\Gamma_{ij}^{*m}$ , которые

- 1) являются непрерывно-дифференцируемыми функциями,
- 2) при переходе к другим координатам  $X'^i$  преобразуются следующим

образом:

$$\Gamma_{ij}^{*m} = P_i^l P_j^q Q_r^m \Gamma_{lq}^{*r} + Q_r^m P_{ij}^r. \quad (14)$$

Функции  $\Gamma_{ij}^{*m}$ , заданные в  $\mathbb{L}^n$ , называют коэффициентами аффинной связности (или просто аффинной связностью).

### 2.3 Тензоры в элементарном многообразии

Построим в каждой точке  $\mathcal{M} \in M^n$  множество наборов касательных векторов:

$$(a_1 b^{(1)} a_2 b^{(2)} \dots a_n b^{(n)}) \equiv (a_i b^{(i)}), \quad (15)$$

где  $a_i \in T_{\mathcal{M}} M^n$ ,  $b^{(i)} \in T_{\mathcal{M}}^* M^n$ , и введём на этом множестве операции сложения и умножения на вещественное число  $s$ :

$$(a_i b^{(i)}) + (a_i c^{(i)}) = (a_i (b^{(i)} + c^{(i)})), \quad (16)$$

$$(a_i b^{(i)}) + (d_i b^{(i)}) = ((a_i + d_i) b^{(i)}), \quad (17)$$

$$s(a_i b^{(i)}) = ((s a_i) b^{(i)}) = (a_i (s b^{(i)})). \quad (18)$$

Определение 8. Тензорным касательным пространством  $\mathcal{T}_n^{(pq)}(T_{\mathcal{M}} M^n)$  типа  $pq$ , где  $p+q = 2$ , в точке  $\mathcal{M}$  элементарного многообразия  $M^n$  называют тензорное произведение касательного пространства  $T_{\mathcal{M}} M^n$  на себя:

$$\mathcal{T}_n^{(pq)}(T_{\mathcal{M}} M^n) = T_{\mathcal{M}} M^n \otimes T_{\mathcal{M}} M^n \quad \forall \mathcal{M} \in M^n, \quad p+q = 2, \quad (19)$$

где тензорное произведение вводится как фактор-пространство  $n$ -ой степе-

ни декартова квадрата

$$T_{\mathcal{M}}M^n \otimes T_{\mathcal{M}}M^n = [(T_{\mathcal{M}}M^n \times T_{\mathcal{M}}M^n)^n] \quad (20)$$

Базисные диады в  $\mathcal{T}_n^{(pq)}(T_{\mathcal{M}}M^n)$  введём как

$$e_j \otimes e_k = [e_i(\delta_j^i e_k)], \quad (21)$$

где  $[ \ ]$  – классы эквивалентности соответствующих наборов касательных векторов. Очевидно, что если рассматриваемое многообразие  $M^2$  является поверхностью  $\Sigma \in \mathbb{R}^3$ , то базисные диады совпадают с соответствующими диадами  $\rho_I \otimes \rho_K$ .

Определение 9. Тензором второго ранга  $A(\mathcal{M})$  типа  $(pq)$  в точке  $\mathcal{M} \in M^n$  называют элемент тензорного произведения касательного пространства  $\mathcal{T}_n^{(pq)}(T_{\mathcal{M}}M^n)$ ,  $p + q = 2$ .

Тензор  $k$ -го ранга  ${}^k A(\mathcal{M})$  введём как

$${}^k A = A_{i_1 \dots i_p}{}^{j_1 \dots j_q} e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_q}, \quad p + q = k. \quad (22)$$

## 2.4 Определение тензора в римановом пространстве

Если в многообразии  $M^n$  введена метрическая матрица  $g_{ij}$  то оно становится римановым пространством  $\mathbb{V}$ , а касательное пространство в каждой точке  $\mathcal{M} \in \mathbb{V}^n$  - евклидовым (или псевдоевклидовым)  $T_{\mathcal{M}}\mathbb{V}^n$ . Тогда используя соглашение о совпадении пространств  $T_{\mathcal{M}}^*\mathbb{V}^n$  и  $T_{\mathcal{M}}\mathbb{V}^n$ , можно говорить о тензорном касательном пространстве  $\mathcal{T}_n^{(k)}(T_{\mathcal{M}}\mathbb{V}^n)$ , заданном на римановом пространстве  $\mathbb{V}^n$ .

## 2.5 Ковариантное дифференцирование тензоров в $\mathbb{V}^n$

Рассмотрим в  $\mathbb{V}^n$  произвольное поле тензора  $k$ -го ранга:

$${}^k\Omega(X^i) = \Omega^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} \mathbf{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i_p} \otimes \mathbf{e}^{j_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}^{j_q}, \quad p + q = k, \quad (23)$$

причём его компоненты  $\Omega^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$  будем считать непрерывно дифференцируемыми функциями координат  $X^i$  точки  $\mathcal{M} \in \mathbb{V}^n$

Определение 10. Ковариантной производной от компонент тензора  $\Omega^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$   $k$ -го ранга  ${}^k\Omega$ , определённого в  $\mathbb{V}^n$ , называют следующий объект:

$$\begin{aligned} \nabla_i \Omega^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} &= \frac{\partial}{\partial X^i} \Omega^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} + \sum_{s=1}^p \Gamma_{mi}^s \Omega^{i_1 \dots i_p = m \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} + \dots \\ &\dots - \sum_{s=1}^q \Gamma_{js}^m \Omega^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q = m \dots i_q}, \quad p + q = k. \end{aligned} \quad (24)$$

## 2.6 Ковариантное дифференцирование тензоров в $\mathbb{L}^n$

Наличие связности  $\Gamma_{ij}^m$  в  $\mathbb{L}^n$  означает, что в этом пространстве определена операция ковариантного дифференцирования.

Определение 11. Ковариантной производной от компонент тензора  ${}^k A \in \mathcal{T}_n^{pq}(T\mathcal{M}\mathbb{L}^n)$ ,  $k = p + q$ , (или иначе ковариантной производной относительно связности  $\Gamma_{ij}^m$ ) называют следующий объект:

$$\nabla_i^* A^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} + \sum_{s=1}^p \Gamma_{mi}^s A^{i_1 \dots i_s = m \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} - \sum_{s=1}^q \Gamma_{js}^m A^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_s = m \dots i_q}. \quad (25)$$

Теорема 2. Ковариантная производная от компонент тензора  $k$ -го ранга является компонентами тензора  $(k+1)$ -го ранга  $\nabla \otimes^k A$  в  $\mathbb{L}^n$ , называемого

градиентом тензора:

$$\nabla^* \otimes^k A = A^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} e^i \otimes e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_q}, \quad p + q = k. \quad (26)$$

## 2.7 Риманово пространство с аффинной связностью

В римановом пространстве  $\mathbb{V}^n$  у нас была определена метрика  $g_{ij}$  (ей соответствовала вполне определённая связность  $\Gamma_{ij}^m$ ). Можно однако построить такое пространство, в котором будет одновременно определена и метрика  $g_{ij}$ , и некоторая «самостоятельная» связность  $\Gamma_{ij}^{m*}$ , для которой уже не имеют места соотношения (12).

Определение 12. Элементарное  $n$ -мерное многообразие  $M^n$  называют римановым пространством аффинной связностью  $\mathbb{W}^n$ , если в каждой точке  $\mathcal{M} \in M^n$  с координатами  $x^i$  заданы две системы функций  $g_{ij}$  и  $\Gamma_{ij}^{m*}$ , вообще говоря, не связанные никакими соотношениями и удовлетворяющие свойствам 1-4 из определения 5 и 1,2 из определения 7 соответственно.

Поскольку в  $\mathbb{W}^n$  определена метрическая матрица  $g_{ij}$ , то можно образовывать из неё символы  $\Gamma_{ij}^m$  по формуле (13)

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2} g^{mk} (g_{ik,j} + g_{jk,i} - g_{ij,k}). \quad (27)$$

Символы  $\Gamma_{ij}^{m*}$  уже не являются связностью:  $\Gamma_{ij}^{m*} \neq \Gamma_{ij}^m$ .

## 2.8 Тензор Римана-Кристоффеля

Рассмотрим в точке  $\mathcal{M} \in \mathbb{L}^n$  произвольный вектор  $b = b^k e_k$  из  $T_{\mathbb{L}^n}$  и вычислим его ковариантную производную относительно связности  $\Gamma_{ij}^{m*}$ :

$$\nabla_i^* b^k = \frac{\partial b^k}{\partial X^i} + \Gamma_{si}^k b^s. \quad (28)$$

Вычислим вторую ковариантную производную:

$$\begin{aligned} \nabla_j^* \nabla_i^* b^k &= \frac{\partial}{\partial X^j} + \Gamma_{mj}^* \nabla_i^* b^m - \Gamma_{ij}^m \nabla_m b^k = \frac{\partial^2 b^k}{\partial X^j \partial X^i} + \frac{\partial \Gamma_{si}^k}{\partial X^j} b^s + \Gamma_{si}^* \frac{\partial b^s}{\partial X^j} + \\ &+ \Gamma_{mj}^* \left( \frac{\partial b^m}{\partial X^i} + \Gamma_{mj}^* b^s \right) - \Gamma_{ij}^m \left( \frac{\partial b^k}{\partial X^m} + \Gamma_{sm}^* b^s \right). \end{aligned} \quad (29)$$

Поменяем теперь индексы  $i$  и  $j$  и образуем разность:

$$\nabla_j^* \nabla_i^* b^k - \nabla_i^* \nabla_j^* b^k = \left( \frac{\partial \Gamma_{si}^k}{\partial X^j} - \frac{\partial \Gamma_{sj}^k}{\partial X^i} + \Gamma_{mj}^* \Gamma_{si}^m - \Gamma_{mi}^* \Gamma_{sj}^m \right) b^s - (\Gamma_{ij}^m - \Gamma_{ji}^m) \nabla_m^* b^k. \quad (30)$$

Коэффициенты, стоящие в первой скобке, обозначим следующим образом:

$$R_{jis}^{*k} = \Gamma_{si,j}^k - \Gamma_{sj,i}^k + \Gamma_{si}^* \Gamma_{mj}^* + \Gamma_{sj}^* \Gamma_{mi}^*. \quad (31)$$

Здесь, как и ранее,  $\Gamma_{si,j}^k = \partial \Gamma_{si}^k / \partial X^j$ .

Теорема 3. Система коэффициентов  $R_{jis}^{*k}$ , образованная по формуле (31), представляет собой компоненты тензора  ${}^4_* R$  четвёртого ранга из пространства  $\mathcal{T}_n^{(31)}(T_M \mathbb{L}^n)$ :

$${}^4_* R = R_{jis}^{*k} e^j \otimes e^i \otimes e^s \otimes e_k \quad (32)$$

Определение 13. Тензор (32) называют тензором кривизны пространства  $\mathbb{L}^n$  относительно связности  $\Gamma_{ij}^m$  (или тензором Римана-Кристоффеля).

## 2.9 Тензор Риччи

В пространстве  $\mathbb{W}^n$  из тензора Римана-Кристоффеля можно образовать несколько тензоров второго ранга. Свёртка транспонированного тензора Римана-Кристоффеля  ${}^4R$  с метрическим тензором образует тензор второго ранга:

$$\mathcal{R}^* = {}^4R^{(2314)} \cdot \cdot E, \quad (33)$$

называемый тензором Риччи. Компоненты этого тензора имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^* &= R_{ji}^* e^j \otimes R_{i_1 i_2 i_3 i_4}^* e^{i_2} \otimes e^{i_3} \otimes e^{i_1} \otimes e^{i_4} \cdot \cdot e^{i_4} \cdot \cdot e^k \otimes e_k = \\ &= R_{i_1 i_2 i_3 i_4}^* \delta_k^{i_1} g^{i_4 k} e^{i_2} \otimes e^{i_3} = R_{kji}^* e^j \otimes e^i, \end{aligned} \quad (34)$$

то есть

$$R_{ji}^* = R_{kji}^*{}^k = R_{nji}^*{}^k \delta_k^n. \quad (35)$$

Подставляя в (35) выражение (31) для компонент тензора Римана-Кристоффеля, получаем:

$$R_{ji}^* = \frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial X^k} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^k}{\partial X^j} + \Gamma_{ij}^* \Gamma_{nk}^* - \Gamma_{ik}^* \Gamma_{nj}^*. \quad (36)$$

Аналогичным образом можно ввести тензор Риччи относительно символов  $\Gamma_{ij}^k$ :

$$R_{ji} = R_{kji}{}^k = R_{nji}{}^k \delta_k^n, \quad (37)$$



и

$$R_{ji} = \Gamma_{ij,k}^k - \Gamma_{ik,j}^k + \Gamma_{ij}^m \Gamma_{mk}^k - \Gamma_{ik}^m \Gamma_{kj}^k. \quad (38)$$

## 2.10 Тензор Эйнштейна

Тензоры Эйнштейна  $\overset{*}{G}$  и  $G$  образуются из тензоров Риччи  $\overset{*}{\mathcal{R}}$  и  $\mathcal{R}$  следующим образом:

$$\overset{*}{G} = \overset{*}{\mathcal{R}} - \frac{1}{2} \overset{*}{\mathcal{R}} E, \quad G = \mathcal{R} - \frac{1}{2} \mathcal{R} E, \quad (39)$$

где  $\overset{*}{\mathcal{R}} = \overset{*}{R} \cdot \cdot E$  и  $\mathcal{R} = R \cdot \cdot E$  – свертки тензоров Риччи с метрическим тензором.

Тензор Эйнштейна играет важную роль в общей теории относительности (см., например, [2], [3], [4]).

### 3 Трактриса и её эволюта

Практическую часть курсовой работы будем выполнять в среде Maple18.

Определение 14. Трактриса (линия влечения) – плоская кривая, для которой длина отрезка касательной от точки касания до точки пересечения с фиксированной прямой является постоянной величиной. Её параметрическое описание имеет вид:

$$x(t) = a(\cos t + \ln \tan \frac{t}{2}), \quad (40)$$

$$y(t) = \sin t, \quad (41)$$

$$0 < t < \pi. \quad (42)$$

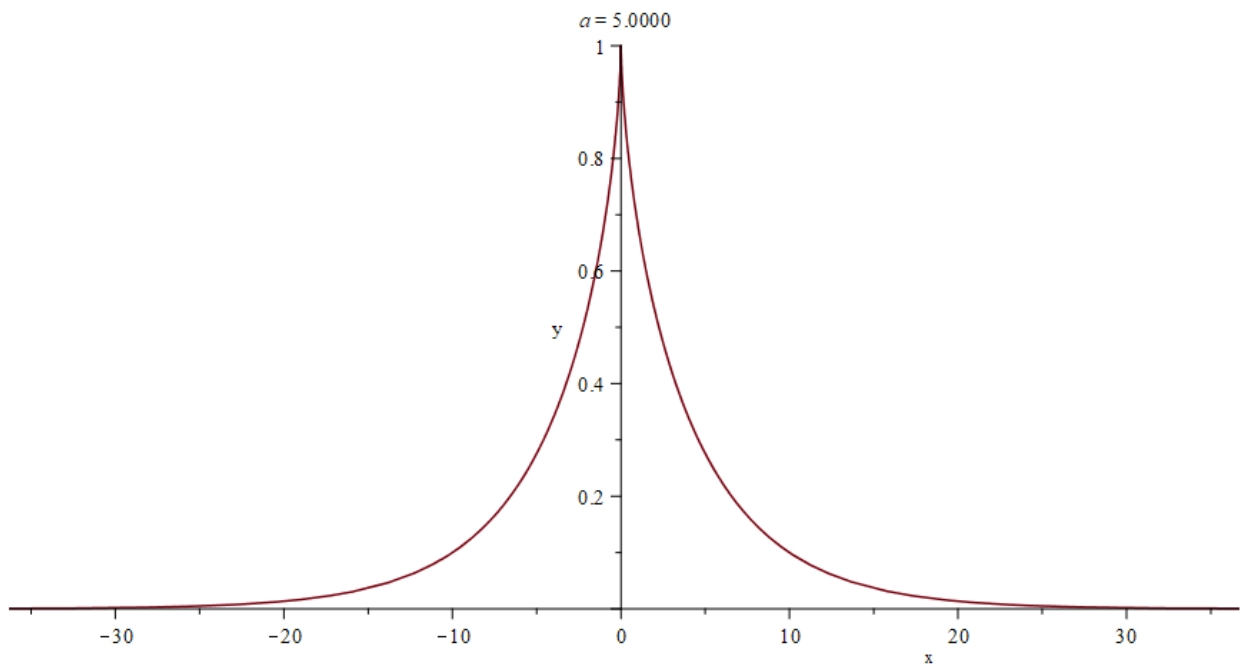


Рисунок 1 – График трактрисы при  $a = 5$ .

Если линия задана параметрически, то её эволюта имеет уравнение:

$$X(t) = x(t) - y' \frac{x^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'}, \quad (43)$$

$$Y(t) = y(t) + x' \frac{x^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'}. \quad (44)$$

Подставляя уравнение трактрисы в (43) и (44) и сокращая, получим:

$$X(t) = \frac{-\cos(t)^3 a^2 + \ln\left(\frac{1-\cos(t)}{\sin(t)}\right) a^2 + \cos(t)^3 + \cos(t) a^2 - \cos(t)}{a}, \quad (45)$$

$$Y(t) = \frac{1 + (a^2 - 1) (\cos(t))^4}{\sin(t)}. \quad (46)$$

Избавляясь в полученной системе от  $t$  придём к уравнению эволюты, зависящей только от  $x$ :

$$evoluta(x) = a \cdot \cosh \frac{x}{a}. \quad (47)$$

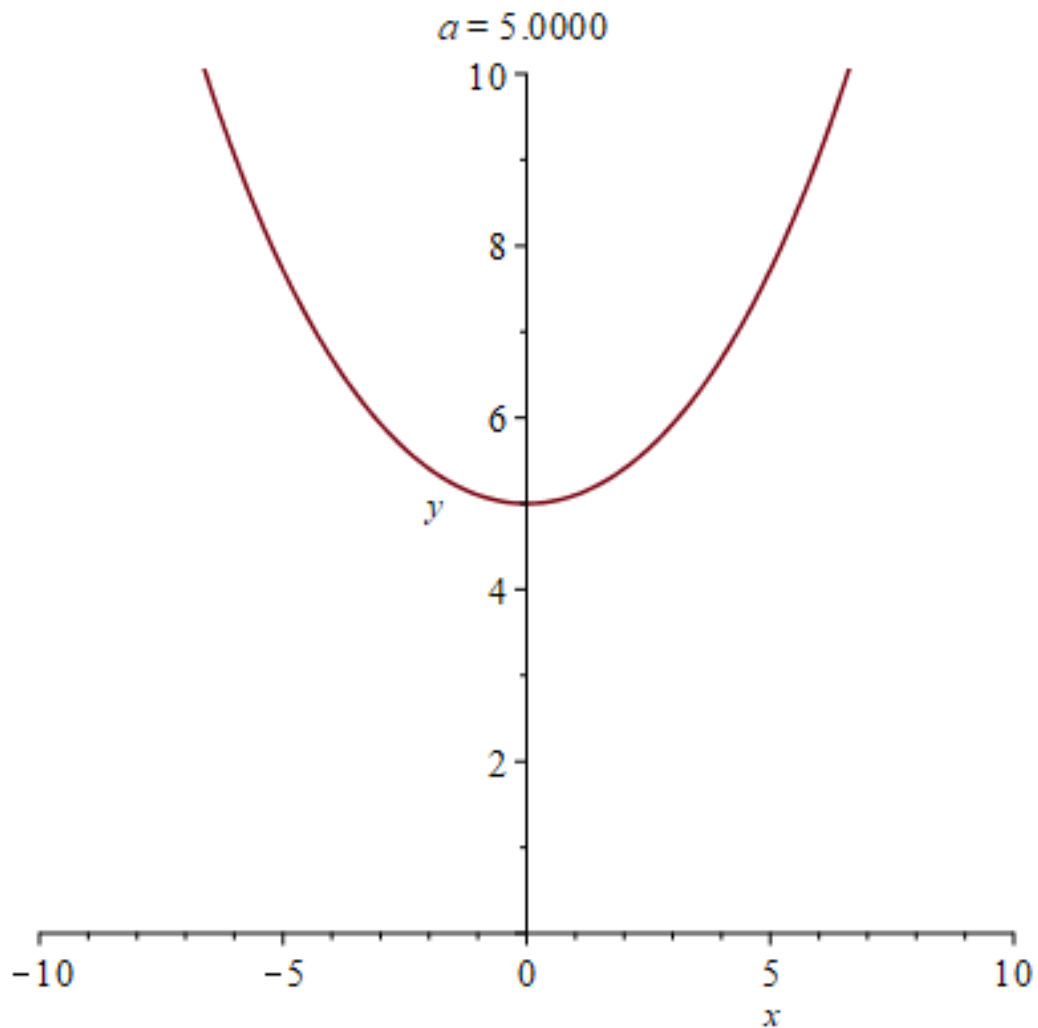


Рисунок 2 – График эволюты трактрисы при  $a = 5$ .

Получили, что эволютой трактрисы является цепная линия.

Определение 15. Цепная линия — линия, форму которой принимает гибкая однородная нерастяжимая тяжёлая нить или цепь (отсюда название) с закреплёнными концами в однородном гравитационном поле. Является плоской кривой. Её уравнением является (47).

Вращая полученную эволюту вокруг оси  $OX$  получаем поверхность вращения, называемую катеноидом. Катеноид можно задать параметрически:

$$x_{kat}(u, v) = a \cdot \cosh \frac{v}{a} \cos u, \quad (48)$$

$$y_{kat}(u, v) = a \cdot \cosh \frac{v}{a} \sin u, \quad (49)$$

$$z_{kat}(u, v) = u, \quad (50)$$

где  $-\pi \leq u \leq \pi$  и  $v \in \mathbb{R}$ .

Построим полученную поверхность.

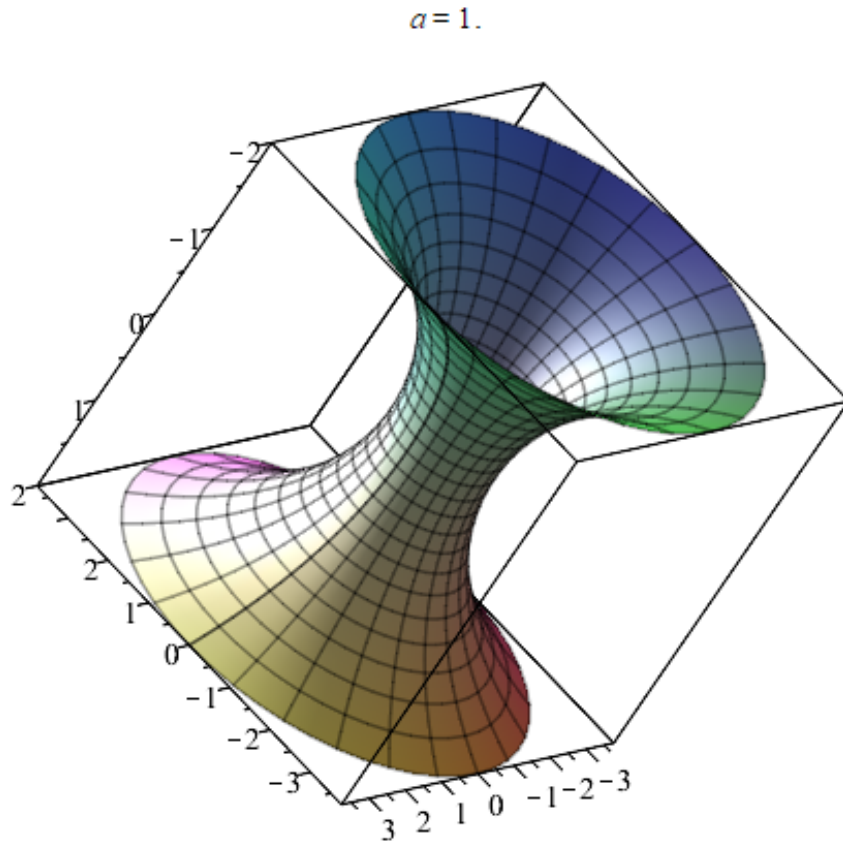


Рисунок 3 – Катеноид при  $a = 1$ .

Для вычисления Гауссовой и средней кривизн воспользуемся формулами из ([5]), позволяющими написать универсальный программный код.

Пусть  $K$  – Гауссова кривизна, а  $H$  – средняя. Введём дополнительные обозначения:

$$E = x_u \cdot x_u, \quad (51)$$

$$F = x_u \cdot x_v, \quad (52)$$

$$G = x_v \cdot x_v, \quad (53)$$

$$l = U \cdot x_{uu}, \quad (54)$$

$$m = U \cdot x_{uv}, \quad (55)$$

$$n = U \cdot x_{vv}, \quad (56)$$

где  $U$  – единичный вектор нормали к поверхности:

$$U = \frac{x_u \times x_v}{|x_u \times x_v|}. \quad (57)$$

Тогда Гауссова кривизна будет рассчитываться как

$$K = \frac{lm - m^2}{EG - F^2}, \quad (58)$$

а средняя кривизна:

$$H = \frac{Gl + En - 2Fm}{2(EG - F^2)}. \quad (59)$$

Рассчитаем введенные выше величины для нашего катеноида (48)-(50):

$$\begin{aligned}
E &= x_u \cdot x_u = \\
&= \left(1, \sinh \frac{u}{a} \cos v, \sinh \frac{u}{a} \sin v\right) \cdot \left(1, \sinh \frac{u}{a} \cos v, \sinh \frac{u}{a} \sin v\right) = \\
&= 1 + \sinh^2 \frac{u}{a} \cdot \cos^2 v + \sinh^2 \frac{u}{a} \cdot \sin^2 v.
\end{aligned} \tag{60}$$

$$\begin{aligned}
F &= x_u \cdot x_v = \\
&= \left(1, \sinh \frac{u}{a} \cos v, \sinh \frac{u}{a} \sin v\right) \cdot \left(0, -a \cosh \frac{u}{a} \sin v, a \cosh \frac{u}{a} \cos v\right) = \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{61}$$

$$\begin{aligned}
G &= x_v \cdot x_v = \\
&= \left(0, -a \cosh \frac{u}{a} \sin v, a \cosh \frac{u}{a} \cos v\right) \cdot \left(0, -a \cosh \frac{u}{a} \sin v, a \cosh \frac{u}{a} \cos v\right) = \\
&= a^2 \cosh^2 \frac{u}{a} \sin^2 v + a^2 \cosh^2 \frac{u}{a} \cos^2 v.
\end{aligned} \tag{62}$$

$$\begin{aligned}
U &= \frac{x_u \times x_v}{|x_u \times x_v|} = \\
&= \frac{(0, -a \cosh \frac{u}{a} \sin v, a \cosh \frac{u}{a} \cos v) \times (0, -a \cosh \frac{u}{a} \sin v, a \cosh \frac{u}{a} \cos v)}{|(0, -a \cosh \frac{u}{a} \sin v, a \cosh \frac{u}{a} \cos v) \times (0, -a \cosh \frac{u}{a} \sin v, a \cosh \frac{u}{a} \cos v)|} = \\
&= \frac{(a \cosh \frac{u}{a} \sinh \frac{u}{a}, -a \cosh \frac{u}{a} \cos v, -a \cosh \frac{u}{a} \sin v)}{\sqrt{\cosh^4 \frac{u}{a} a^2}} = \\
&= \left(\frac{\sinh \frac{u}{a}}{\cosh \frac{u}{a}}, -\frac{\cos v}{\cosh \frac{u}{a}}, -\frac{\sin v}{\cosh \frac{u}{a}}\right).
\end{aligned} \tag{63}$$

$$\begin{aligned}
l &= U \cdot x_{uu} = \\
&= \left( \frac{\sinh \frac{u}{a}}{\cosh \frac{u}{a}}, -\frac{\cos v}{\cosh \frac{u}{a}}, -\frac{\sin v}{\cosh \frac{u}{a}} \right) \cdot \left( 0, \frac{\cosh \frac{u}{a} \cos v}{a}, \frac{\cosh \frac{u}{a} \sin v}{a} \right) = \\
&= -\frac{1}{a}.
\end{aligned} \tag{64}$$

$$\begin{aligned}
m &= U \cdot x_{uv} = \\
&= \left( \frac{\sinh \frac{u}{a}}{\cosh \frac{u}{a}}, -\frac{\cos v}{\cosh \frac{u}{a}}, -\frac{\sin v}{\cosh \frac{u}{a}} \right) \cdot \left( 0, -\sinh \frac{u}{a} \sin v, \sinh \frac{u}{a} \cos v \right) = \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{65}$$

$$\begin{aligned}
n &= U \cdot x_{vv} = \\
&= \left( \frac{\sinh \frac{u}{a}}{\cosh \frac{u}{a}}, -\frac{\cos v}{\cosh \frac{u}{a}}, -\frac{\sin v}{\cosh \frac{u}{a}} \right) \cdot \left( 0, -a \cosh \frac{u}{a} \cos v, -a \cosh \frac{u}{a} \sin v \right) = \\
&= a.
\end{aligned} \tag{66}$$

Теперь мы можем рассчитать Гауссову кривизну по формуле (58):

$$K = \frac{lm - m^2}{EG - F^2} = -\frac{1}{\cosh^4 \frac{u}{a} a^2}. \tag{67}$$

И среднюю кривизну по формуле (59):

$$H = \frac{Gl + En - 2Fm}{2(EG - F^2)} = 0. \tag{68}$$

Также из [5] известно, что скалярная кривизна равняется удвоенной гауссовой кривизне для римановых многообразий. Так что, обозначая ска-

лярную кривизну за  $SK$  имеем:

$$SK = 2K = -\frac{2}{\cosh^4 \frac{u}{a} a^2}. \quad (69)$$



## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение хотелось бы сказать, что в ходе курсовой работы было проведено исследование гауссовых, скалярных и средних кривизн поверхности, полученной вращением эволюты трактрисы вокруг оси  $OX$ .

Также были решены следующие задачи:

- ознакомление с римановыми пространствами;
- нахождение гауссовой кривизны;
- нахождение скалярной кривизны;
- нахождение средней кривизны.

Кроме того, в результате выполнения работы были получены сведения о таких понятиях, как трактриса, эволюта, цепная линия, катеноид.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Димитриенко Ю.И. Тензорное исчисление: Учеб.пособие для вузов. М.:Высш, шк., 2001, 575 с.
2. Петров А.З. Пространства Эйнштейна. М.: Физматгиз, 1961, 464 с.
3. Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Наука, 1967, 664 с.
4. Шипов Г.И. Теория физического вакуума. НТ-Центр, 1993, 362 с.
5. Oprea J.F. Differential geometry and its applications. London: Prentice-Hall International, 1997, 387 с.

## ПРИЛОЖЕНИЕ А