МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

МГТУ им Н.Э.Баумана

Факультет ФН

Кафедра вычислительной математики и математической физики

Соколов Арсений Андреевич

Домашнее задание №3 по математической статистике

3 курс, группа ФН11-53Б

Вариант 9

Преподаватель

_____________ Т. В. Облакова

«___» _______ 2019 г.

Москва, 2019 г.

1 Моделирование выборки методом обратных функций

Пусть требуется получить значения случайной величины X, распределенной в интервале $(a;b)$ с плотностью вероятности $f(x)$. Стандартный метод моделирования основан на том, что интегральная функция распределения $F(y) = \int_a^x f(x)dx$ любой непрерывной случайной величины равномерно распределена в интервале $(0;1)$, т.е. для любой случайной величины X с плотностью распределения $f(x)$ случайная величина равномерно распределена на интервале $(0;1)$. Тогда случайную величину X с произвольной плотностью распределения $f(x)$ можно рассчитать по следующему алгоритму, графическое решение которого представлено на Рис. 1.

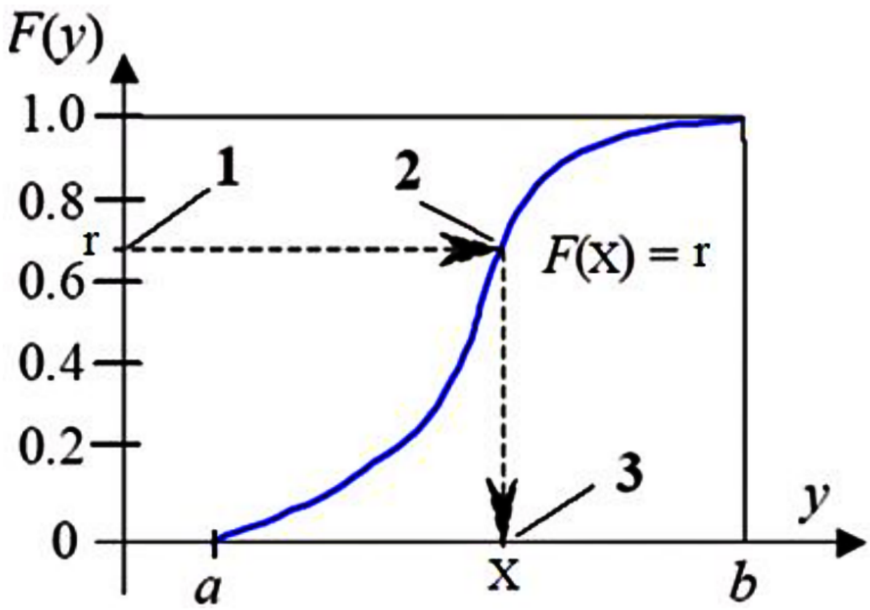


Рис. 1: Графическое изображение метода обратных функций.

Алгоритм.

1. Необходимо сгенерировать случайную величину r (значение случайной величины R), равномерно распределенную в интервале $(0;1)$.
2. Приравнять сгенерированное случайное число известной функции распределения $F(X)$ и получить уравнение $F(y) = \int_a^x f(x)dx = r$.
3. Решая уравнение $X = F^{-1}(r)$, находим искомое значение X.

Такой способ получения случайных величин называется *методом обратных функций.*

Решение.

По условию, имеется выборка, объёмом $n = 120$ элементов, подчиняющаяся логнормальному распределению с плотностью

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} e^{-\frac{(\ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

с параметрами $\mu = 2$ (mean value), $\sigma = \sqrt{0.2}$ (standard deviation).

Получим $n = 120$ случайных величин, равномерно распределенных на интервале $(0; 1)$:

```
> n <- 120
>
> set.seed(1337)
> rand_vect <- runif(n, 0, 1)
> head(rand_vect, 5)
[1] 0.57632155 0.56474213 0.07399023 0.45386562 0.37327926
```

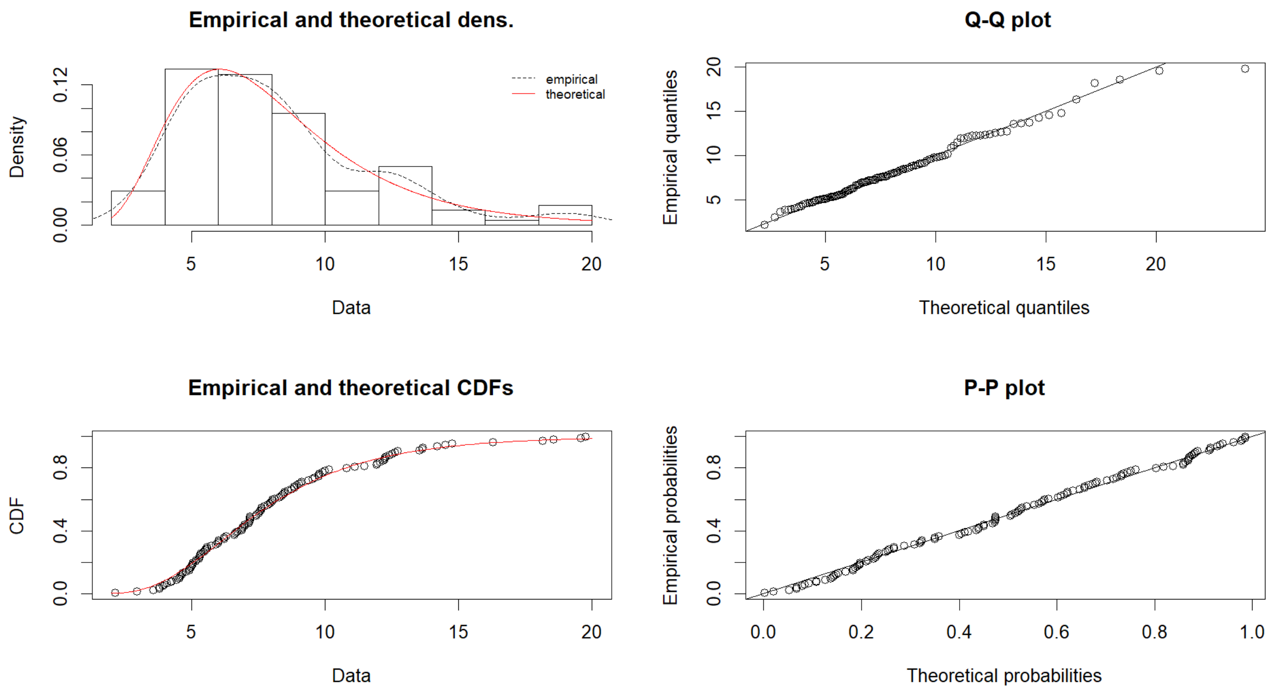
Для генерации выборки методом обратных функций, воспользуемся функцией встроенной функцией, которая реализует inverse cumulative distribution function (quantile function):

```
> emp_sample <- qlnorm(rand_vect, meanlog = 2, sdlog = sqrt(0.2))
> emp_sample
[1]   3.990763 12.302612  8.497904  8.025929 12.197833  4.247885
[7]   9.124920 13.659752 12.235190  9.621277 10.005020  7.179212
[13]  14.518153  5.497928 18.573254  7.721113  5.524374  5.360958
[19]   4.086884  5.336768  9.923687  7.588191  6.692421  7.848874
[25]   4.805251  2.145636  8.035223  5.911119  7.429629 12.414112
[31]  10.160859  4.427855  5.274709  5.596016  7.516338  9.754663
[37]  12.515976  6.218515  6.899750  6.917922  6.873591 14.774747
[43]  14.197261  6.996216 18.149756  9.754281  7.135947  6.287228
[49]  13.540432  7.993637  4.667527  5.183359  4.638413  8.610529
[55]   5.006042  4.567935 10.821463  4.528023  5.592873  9.534546
[61]  12.726443 16.294013  3.578286  7.181449  7.165889  5.036149
[67]   7.183834  8.938177 11.954062  4.929206 12.242937  8.298037
[73]   9.036860  7.625875  7.558123  8.852263  6.989422  6.604355
[79]  11.110204  4.592310  8.116544  4.243953  6.220247  6.025850
[85]  13.646471  3.930147  7.933541  5.749459  6.742192 11.477393
[91]   5.047701  6.011809  5.144834  9.803677  9.379658 19.760923
[97]   7.619729  7.451011  5.314831  8.418257  5.990557 19.579448
[103]   5.464541   5.047026   5.307714   7.182732  12.621683  12.058664
[109]   8.748923   8.471951   8.355218   3.788953   4.931962   9.103708
[115]   8.855572   2.970164   6.639599   4.964537  11.946642   3.794012
```

2 Анализ полученной выборки

Для анализа полученной выборки построим несколько графиков:

```
>library(fitdistrplus)
> png(filename = "../img/graphics_1.png",
+     width = 1920, height = 1080,
+     pointsize = 24, res = 96 * 1.25)
> plotdist(emp_sample, distr = "lnorm", list(2,sqrt(0.2)),
+          histo = T, demp = T)
> dev.off()
```



А также вычислим среднее и стандартное отклонение для нашей выборки и сравним с теоретическими:

```
> emp_mean <- mean(emp_sample)
> emp_mean
[1] 8.13665
>
> theor_mean <- mean(theor_distr)
> theor_mean
[1] 8.195072
>
>
> emp_sd <- sd(emp_sample)
```

```
> emp_sd
[1] 3.563209
>
> theor_sd <- sd(theor_distr)
> theor_sd
[1] 4.53649
```

3 Построение доверительного интервала функции распределения

3.1 Dvoretzky–Kiefer-Wolfowitz

Существует несколько вариантов построения доверительной полосы (confidence band) для CDF. Один из них основан на неравенстве Дворецкого-Кифера-Вольфовица (ДКВ, Dvoretzky–Kiefer-Wolfowitz, 1956), которое определяет, насколько близко эмпирическая функция распределения связана с функцией распределения, из которой извлекаются эмпирические выборки:

$$\Pr\left(\sup\left|\hat{F}_n(x) - F(x)\right| > \epsilon\right) \leq 2\exp\left(-2n\epsilon^2\right),$$

где ϵ – некоторая положительная постоянная.

Если принять уровень значимость $\alpha = 2\exp(-2n\epsilon^2)$, то $\epsilon(n) = \sqrt{\frac{\ln(\frac{2}{\alpha})}{2n}}$. Используя неравенство ДКВ и представленное выражение для ϵ, можно оценить доверительные интервалы (CI) для $F(x)$:

$$CI_{l,u} = \hat{F}_n(x) \pm \epsilon,$$

которые будут находиться на одинаковом удалении от каждой точки ECDF по оси ординат.

Более точно значение ϵ можно оценить с помощью аппроксимации статистики Колмогорова-Смирнова (КС) функцией approx.ksD() (Bickel & Doksum, table IX, p.483; Lienert G.A.(1975)) для доверительного уровня 0.95:

```
> approx.ksD <- function(n)
+ {
+   ## оценка критического значения статистики Колмогорова-
+   ## Смирнова D для доверительного уровня 0.95.
+   ## реализована по Bickel & Doksum, table IX,  p.483
+   ## и Lienert G.A.(1975)
+   ifelse(n > 80, 1.358 /( sqrt(n) + .12 + .11/sqrt(n)),   ##B&D
+      splinefun(c(1:9, 10, 15, 10 * 2:8),# from Lienert
```

```
+                c(.975,   .84189, .70760, .62394, .56328,  # 1:5
+                  .51926, .48342, .45427, .43001, .40925,  # 6:10
+                  .33760, .29408, .24170, .21012,     # 15,20,30,40
+                  .18841, .17231, .15975, .14960)) (n))
+ }
```

3.2 Центральная предельная теорема

Второй вариант основан на том, что согласно центральной предельной теореме (ЦПТ) асимптотическое поточечное распределение абсолютной разности $F(x)$ и $\hat{F}_n(x)$ имеет нормальное распределение со стандартной степенью приближения

$$\sqrt{n}\left(\hat{F}_n(x) - F(x)\right) \to \mathcal{N}(0, F(x)(1 - F(x))).$$

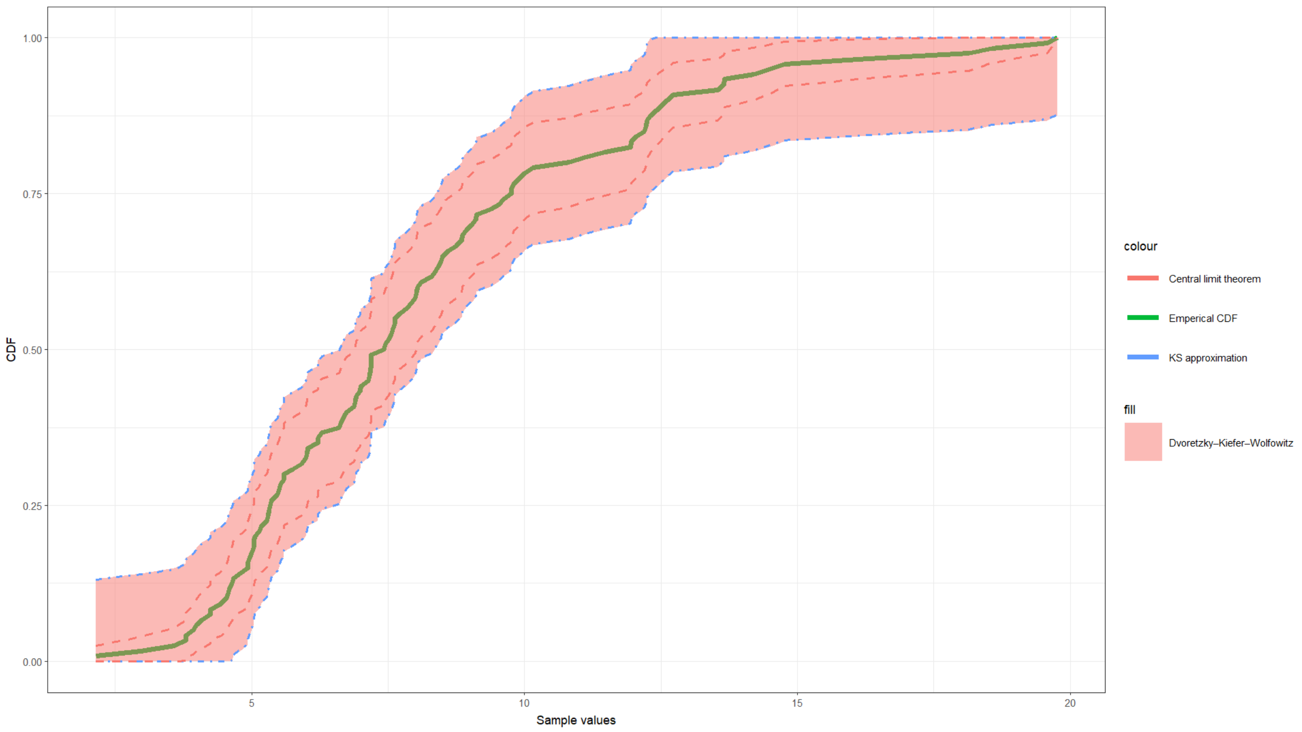
Поскольку $E(\hat{F}_n(x)) = F(x)$, мы можем оценить доверительную полосу $F(x)$, имеющую переменное значение в каждой точке ECDF:

$$\hat{F}_n(x) \pm z_\alpha \frac{\hat{F}_n(x)\left(1 - \hat{F}_n(x)\right)}{n}$$

Рассмотрим код для построения графика доверительных огибающих:

```
> # Функция, формирующая доверительные интервалы ECDF
> get_df.ecdf <- function(x, level = 0.05) {
+   n <- length(x)
+   x.sort <- sort(x)
+   y <- (1:n)/n
+   # CI по теореме Дворецкого-Кифера-Вольфовица (ДКВ)
+   epsilon = sqrt(log(2/level)/(2*n))
+   L = pmax(y - epsilon, 0)
+   U = pmin(y + epsilon, 1)
+   D <- approx.ksD(n)
+   U3 <- pmin(y + D, 1)
+   L3 <- pmax(y - D, 0)
+   # CI на основе центральной предельной теоремы (ЦПТ)
+   z <- qnorm(1-level/2)
+   U2 = pmin(y + z*sqrt(y*(1-y)/n ),1)
+   L2 = pmax(y - z*sqrt(y*(1-y)/n ),0)
+   data.frame(x=x.sort, y, L, U, L2, U2, L3, U3)
+ }
>
> # Формирование таблицы
```

```r
> df.emp <- get_df.ecdf(emp_sample)
>
>
> # Создание графика
> library(ggplot2)
>
>
> png(filename = "../img/emp_cdfs_1.png",
+     width = 1920, height = 1080,
+     pointsize = 24, res = 96 * 1.25)
> ggplot(df.emp, aes(x=x, y=y)) +
+   # Эмпирические распределения
+   geom_line(aes(colour="Emperical CDF"),size=2) +
+   # Заливаются области доверительных интервалов ДКВ
+   geom_ribbon(aes(ymin = L, ymax = U,
+               fill = "Dvoretzky-Kiefer-Wolfowitz"),
+               alpha = 0.5) +
+   geom_line(aes(x = x, y = L3,
+             colour = "KS approximation"),
+             linetype = "3313", size = 1) +
+   geom_line(aes(x = x, y = U3,
+             colour = "KS approximation"),
+             linetype = "3313", size = 1) +
+   # Рисуются кривые доверительных интервалов ЦПТ
+   geom_line(aes(x = x, y = L2,
+             colour = "Central limit theorem"),
+             linetype = "dashed", size = 1) +
+   geom_line(aes(x = x, y = U2,
+             colour = "Central limit theorem"),
+             linetype = "dashed", size = 1) +
+   labs(x = 'Sample values',
+        y = 'CDF') +
+   theme_bw()
> dev.off()
```



Здесь сплошной линией синего цвета показана эмпирическая CDF для нашей выборки с 95% доверительной областью ДКВ, залитой прозрачно-красным цветом. Штрих-пунктирной линией синего цвета отмечены границы, полученные с помощью аппроксимации КС, а штриховыми линиями красного цвета - полученные с применением ЦПТ.

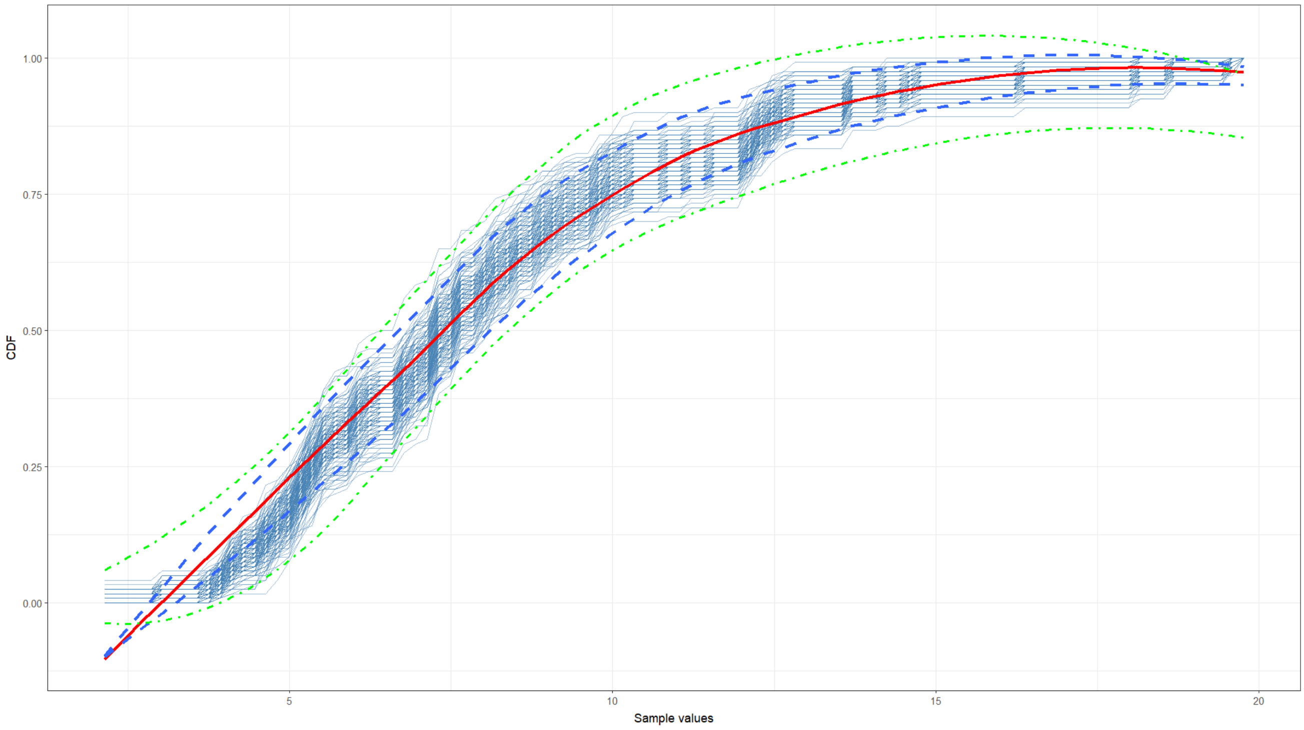
3.3 Бутстрэп

Третьим способом оценки доверительных интервалов является непараметрическая бутстреп-процедура. Для этого на основе имеющейся эмпирической выборки генерируется множество псевдовыборок того же размера, состоящих из случайных комбинаций исходного набора элементов. При этом используется алгоритм "случайного выбора с возвращением"(random sampling with replacement), т.е. извлеченный выборочный элемент снова помещается в исходную совокупность, прежде чем извелекается следующее наблюдение. В результате некоторые наблюдения в каждой отдельной бутстреп-выборке могут повторяться два или более раз, тогда как другие - отсутствовать.

Для каждой бутстреп-выборки формируется кумулятивная функция распределения, а доверительная полоса в каждом ее вертикальном сечении включает "пучок"из 95% таких кривых, максимально приближенных к медиане. Ограничимся 200 репликами:

```
> n = length(emp_sample)
> nrep = 200
>
> # новые данные для построения плавной кривой
> newxs <- (seq(min(emp_sample), max(emp_sample), length.out = 100))
>
> # добавление в итоговую таблицу координат ECDF
> pdat <- data.frame(newxs, py = ecdf(emp_sample)(newxs))
>
> # создание бутстреп-выборок
> boots <- t(replicate(nrep,
+                      emp_sample[sample.int(n, replace = TRUE)]))
> bootdat <- data.frame(apply(boots, 1, function(x) ecdf(x)(newxs)))
>
> # извлечение доверительных интервалов
> cis <- apply(bootdat, 1, quantile, c(0.025, 0.975))
> rownames(cis) <- c('lwr', 'upr')
>
> # добавление доверительных интервалов
> pdat <- cbind(pdat, t(cis))
>
> # таблица бустреп-кривых
> bootdat$newxs <- newxs
> require(reshape2)
> bootline <- melt(bootdat, id = 'newxs')
>
> # Вывод итогового графика с использованием пакета  ggplot2
> png(filename = "../img/emp_cdfs_2.png",
+     width = 1920, height = 1080,
+     pointsize = 24, res = 96 * 1.25)
> ggplot()+
+   labs(x = 'Sample values', y = 'CDF')  +
+   geom_line(data = bootline, aes(x = newxs, y = value,
+             group = variable), col = 'steelblue',
+             alpha = 0.5) +
+   geom_smooth(data = pdat,  aes(x = newxs, y = py),
+               col = 'red', size=1.2, se= FALSE) +
+   geom_smooth(data = pdat, aes(x = newxs, y = lwr),
+               linetype = 'dashed', size=1.2, se= FALSE) +
+   geom_smooth(data = pdat, aes(x = newxs, y = upr),
+               linetype = 'dashed', size=1.2, se= FALSE) +
+   geom_smooth(data = df.emp, aes(x = x, y = L),
```

```
+                  linetype = '3313', col = 'green',size=1, se= FALSE) +
+   geom_smooth(data = df.emp, aes(x = x, y = U),
+                  linetype = '3313', col = 'green',size=1, se= FALSE) +
+   theme_bw()
> dev.off()
```



Здесь ступенчатыми линиями показаны CDF на основе бутстреп-выборок. Остальные представленные кривые были сглажены локальной регрессией, в том числе: красным цветом показана эмпирическая CDF, синие штриховые линии обозначают доверительные огибающие, полученные бутстреп-методом, а зеленые штрих-пунктирные - доверительные огибающие, полученные из неравенства Дворецкого-Кифера-Вольфовица (приведены для сравнения).

Видно, что доверительные области, построенные на основе ЦПТ и бутстреп-метода существенно уже, чем ДКВ-области, особенно на обоих концах кумулятивной кривой. Как следует из дискуссии[1], это - два разных типа доверительных полос. "Точечная доверительная полоса"(pointwise confidence band) предполагает, что, если выборки данных извлекаются из некоторого генерального распределения, то в среднем 5% точек окажется вне доверительной области. Для "одновременной полосы"(simultaneous band) формулируется принципиально иное условие: существует 5%-ная вероятность того, что точка с наибольшим отклонением окажется вне доверительной области (Francisco-Fernandez & Quintela-del-Rio 2016).

[1] https://stats.stackexchange.com/questions/181724/confidence-intervals-for-ecdf