МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

МГТУ им Н.Э.Баумана

Факультет ФН
Кафедра вычислительной математики и математической физики

Соколов Арсений Андреевич

Домашнее задание №6 по математической статистике

3 курс, группа ФН11-53Б
Вариант 6

Преподаватель
_____________ Т. В. Облакова
«___» _______ 2019 г.

Москва, 2019 г.

Задание 1

В условиях задачи №5 построить последовательный критерий Вальда для проверки гипотезы $H_0 : a = a_0 = 7.5$ против альтернативы $H_1 : a = a_1 = 8$ при известном $\sigma = \sigma_1 = 2.5$. Ошибка первого рода $\alpha = 0.1$, ошибка второго рода $\beta = 0.2362404$ вычислена в пункте 4 задачи №5.
Решение.

Рассмотрим выборку, предложенную нам в условии:

```
> df
[1]   0.653  13.884  11.088   7.409   8.827   5.582   9.747   8.023
8.396
[10]   6.535   6.036   5.251  12.462   9.350   9.770   5.517   6.740  10.759
[19]  10.718   0.840   8.737   2.278   8.447   2.267   8.656   9.460
9.385
[28]   7.924   9.215  10.360   7.239   8.399   7.962   6.712   5.626
7.737
[37]   9.671  13.497  10.708   6.189  10.516   8.845  10.926   8.755
7.728
[46]  12.783   5.300   9.802   5.133   8.534   5.855   5.777  10.128  10.662
[55]   8.307   5.644  10.632   6.060   6.989   5.183   9.587   7.891  15.015
[64]   8.106   9.898  10.504   8.307  10.680   6.788   9.904   6.918
4.250
[73]   8.908   9.837   5.805   6.018   7.735   8.206   5.502   8.473
4.870
[82]  10.159   6.639   7.936   8.149  10.462  12.296   3.403  10.631
7.802
[91]   5.580   8.325  10.687   9.843   9.509   5.668   8.511   8.657
8.835
[100]   9.484
```

Критическое множество для среднего при известном среднеквадратическом отклонении запишется в данном случае как $\bar{x} > c_1$, где

$$c_1 = a_0 + \frac{qnrom(1-\alpha, 0, 1)}{\sqrt{n}}\sigma_1$$

Имеем:

```
> c1 <- a0 + (qnorm(1-alpha))/(sqrt(df_len)) * sigma1
> c1
[1] 7.820388
```

Получаем критическое множество:

$$S_1 = \{\bar{x} > 7.820388\}$$

Ошибка второго рода критерия S_1 имеет вид:

$$\beta(c_1) = \Phi(\frac{c_1 - a_1}{\sigma_1}\sqrt{n})$$

Имеем:

```
> beta <- pnorm((c1-a1)/sigma1 * sqrt(df_len))
> beta
[1] 0.2362404
```

Построим критерий Вальда:

$$A = \frac{1-\beta}{\alpha}$$
$$B = \frac{\beta}{1-\alpha}$$

```
> A <- (1-beta)/alpha
> B <- beta/(1-alpha)
> A
[1] 7.637596
> B
[1] 0.2624894
```

$$\mathrm{Lf(j)} = \prod_{i=1}^{j} \exp\left[\frac{z_i(a_1 - a_0)}{\sigma_1^2} + \frac{a_0^2 - a_1^2}{2\sigma_1^2}\right]$$

Вычислим математическое ожидание момента принятия решения при основной гипотезе H_0 и при альтернативе H_1.

$$Y_k = \ln\frac{p\left(X_k, a_1\right)}{p\left(X_k, a_0\right)} = \ln\frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{\left(X_k - a_1\right)^2}{2\sigma_1^2}}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{\left(X_k - a_0\right)^2}{2\sigma_1^2}}} = -\frac{\left(X_k - a_1\right)^2}{2\sigma_1^2} + \frac{\left(X_k - a_0\right)^2}{2\sigma_1^2} =$$
$$= \frac{2X_k(a_1 - a_0) + a_0^2 - a_1^2}{2\sigma_1^2}$$

$$\mathrm{M}_0 Y_k = \frac{2a_0 * (a_1 - a_0) + a_0^2 - a_1^2}{2\sigma_1^2} = -\frac{(a_0 - a_1)^2}{2\sigma_1^2}$$

```
> M0Yk <- -(a1-a0)^2 / (2*sigma1^2)
> M0Yk
[1] -0.02
```

$$\mathrm{M}_1 Y_k = \frac{2a_1 * (a_1 - a_0) + a_0^2 - a_1^2}{2\sigma_1^2} = \frac{(a_0 - a_1)^2}{2\sigma_1^2}$$

```
> M1Yk <- -(a1-a0)^2 / (2*sigma1^2)
> M1Yk
[1] 0.02
```

Найдём среднее число испытаний, если верна нулевая гипотеза:

$$\mathrm{M}_0 \nu = \frac{\alpha \ln(A) + (1 - \alpha) \ln(B)}{\mathrm{M}_0 Y_k}$$

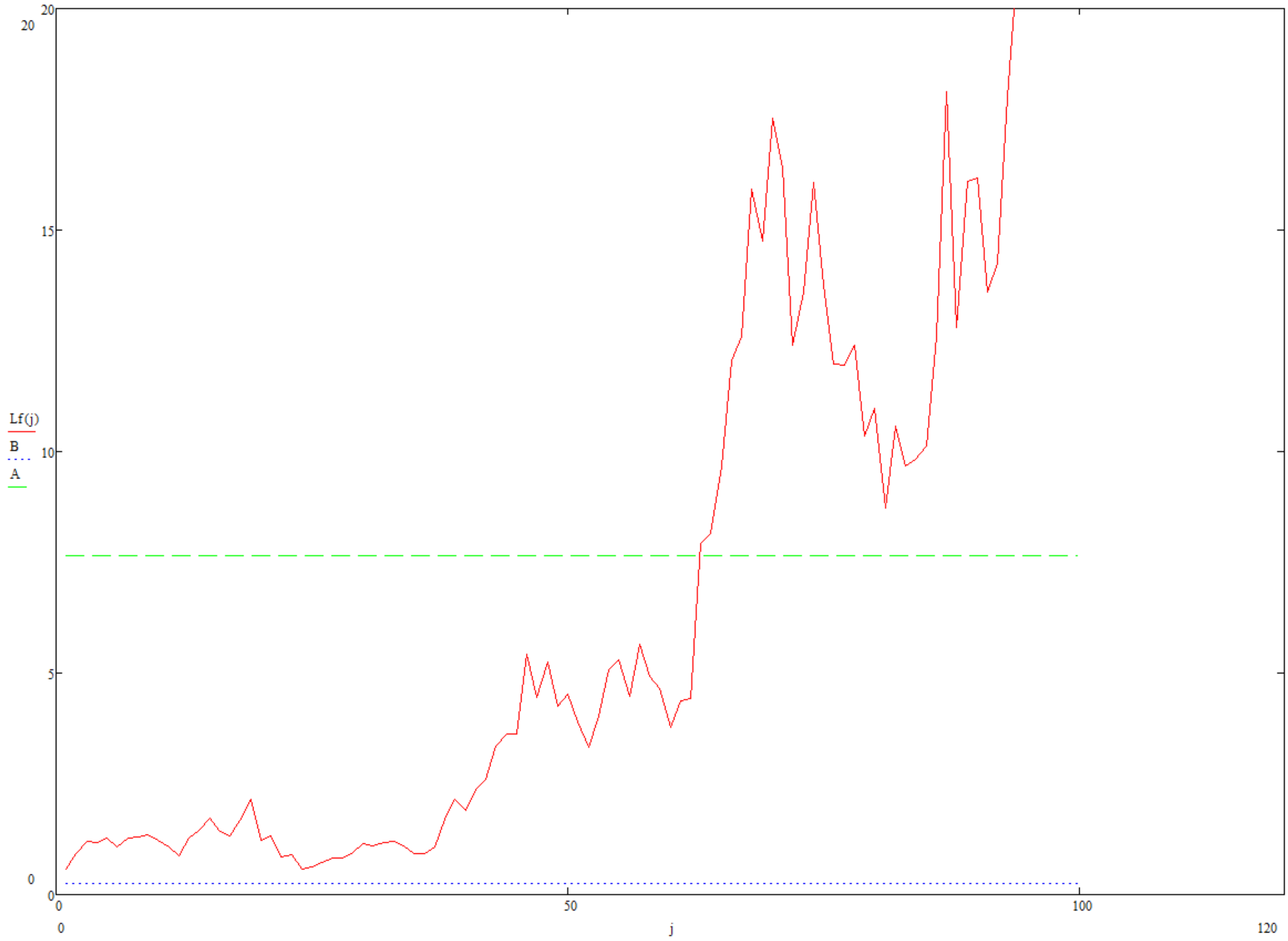
```
> M0_nu <- (alpha*log(A) + (1-alpha)*log(B))/M0Yk
> M0_nu
[1] 50.0241
```

А также среднее число испытаний, если верна альтернативная гипотеза:

$$\mathrm{M}_1 \nu = \frac{\beta \ln(B) + (1 - \beta) \ln(A)}{\mathrm{M}_1 Y_k}$$

```
> M1_nu <- (beta*log(B) + (1-beta)*log(A))/M1Yk
> M1_nu
[1] 61.84022
```

Получили, что при условии H_0 потребуется в среднем 50 испытаний, а при условии H_1 – 62 испытания.



По графику видим, что кривая пересекает прямую A, следовательно, принимаем гипотезу H_1.

Задание 2

Переписать критическое множество из предыдущего пункта в виде $\left(\frac{L\left(\overrightarrow{X_n}, a_1\right)}{L\left(\overrightarrow{X_n}, a_1\right)} \geqslant C\right)$, отметить на графике и сравнить результаты применения критериев Вальда и Неймана-Пирсона.

Решение.

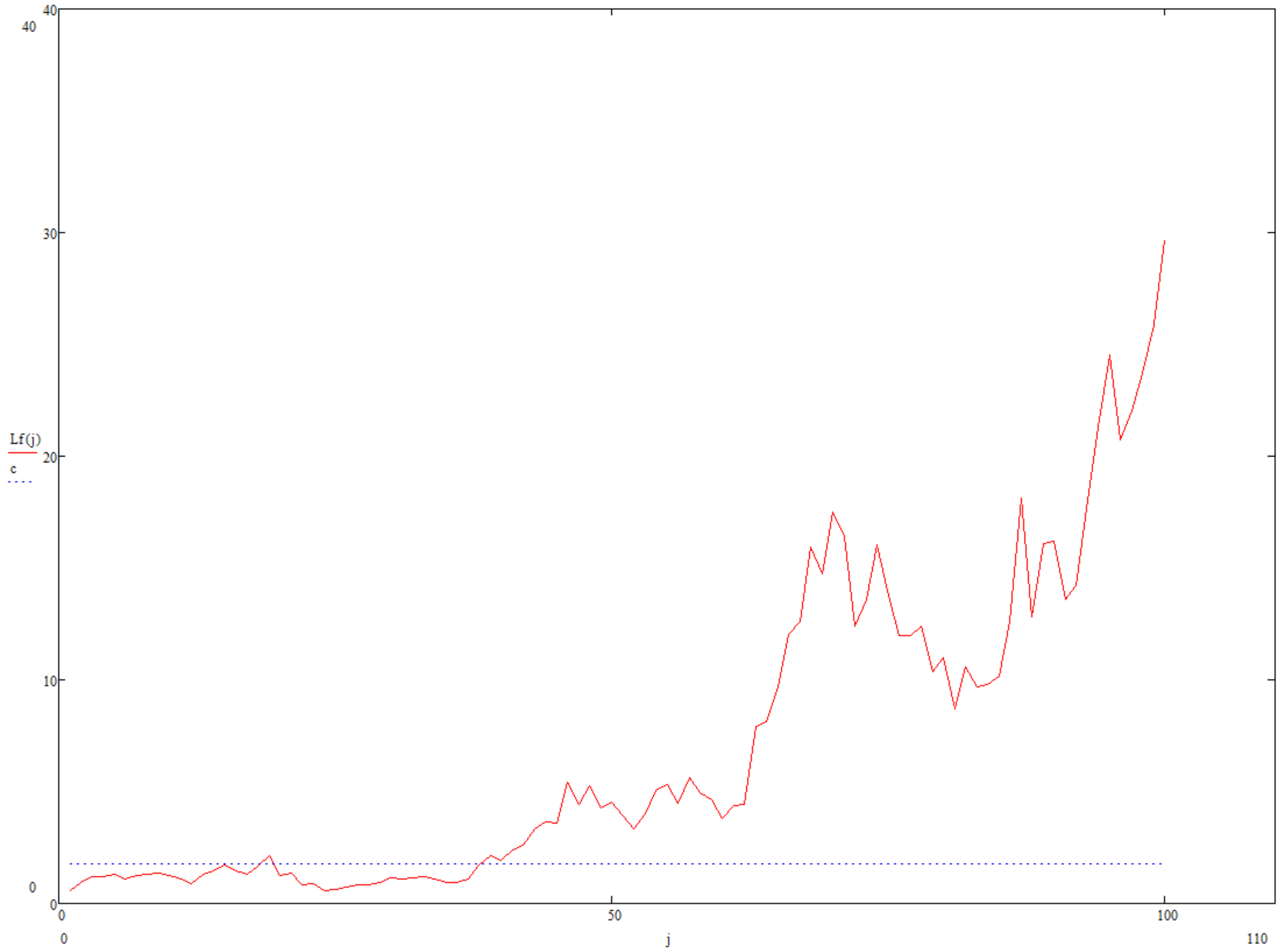
Рассмотрим критическое множество критерия Неймана-Пирсона:

$$S = \{\prod_{i=1}^{j} \exp\left[\frac{z_i(a_1 - a_0)}{\sigma_1^2} + \frac{a_0^2 - a_1^2}{2\sigma_1^2}\right] \geqslant C\} = \{\prod_{i=1}^{100} \frac{z_i(a_1 - a_0)}{\sigma_1^2} + 100\frac{a_0^2 - a_1^2}{2\sigma_1^2} \geqslant C_3\} =$$
$$= \{\sum_{i=1}^{100} z_i \geqslant C_2\} = \{\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} z_i \geqslant C_1\},$$

где

$$C_1 = c_1$$
$$C_2 = 100 \cdot C_1$$
$$C_3 = 100\frac{a_0^2 - a_1^2}{2\sigma_1^2} + C_2\frac{a_1 - a_0}{\sigma_1^2}$$
$$C = e^{C_3}$$

```
> C1 <- c1
> C2 <- 100 * C1
> C3 <- 100 * (a0^2-a1^2)/(2*sigma1^2) + C2 * (a1-a0)/(sigma1^2)
> C <- exp(C3)
> C1
[1] 7.820388
> C2
[1] 782.0388
> C3
[1] 0.5631031
> C
[1] 1.756114
```



По графику видим, что кривая на $n = 100$ испытании находится над прямой C, следовательно принимаем гипотезу H_1

Так же можем заметить, что среднее число испытаний в критерии Вальда примерно в два раза меньше, чем для критерия Неймана-Пирсона.