>

> $with(plots)$:

> #*Найти свертку функций* $f(x)$ и $g(x)$, *если функция* $f(x)$ *принимает значение, равное нулю при* $x \notin [x_1, x_4]$, а *при* $x \in [x_1, x_4]$ *ее график состоит из звеньев ломаной ABCD*

> $x1 := -1$:
$x2 := 2$:
$x3 := 3$:
$x4 := 5$:
$a := 1$:
$b := -2$:

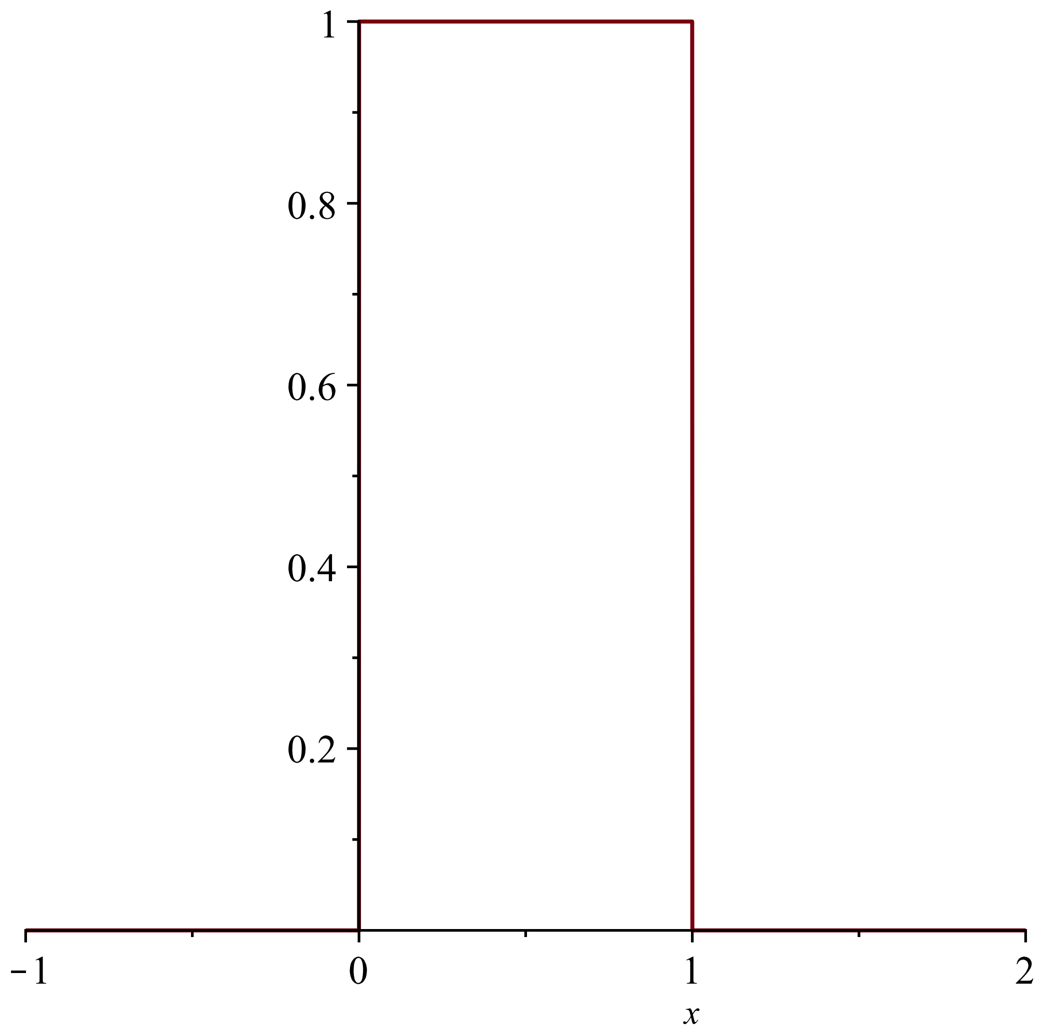
> $A(x1, a)$;
$B(x2, a)$;
$C(x3, b)$;
$D1(x4, 0)$;

$$A(-1, 1)$$
$$B(2, 1)$$
$$C(3, -2)$$
$$D1(5, 0) \tag{1}$$

> $g(x) := piecewise(x < 0, 0, \text{`and`}(x \geq 0, x < 1), 1, x \geq 1, 0)$:
$g(x)$

$$\begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & 1 \leq x \end{cases} \tag{2}$$

> $plot(g(x), x = -1 ..2)$



#Найдем функцию f(x) как уравнение прямой по двум точкам: две точки (x1,y1), (x2,y2)

тогда уравнение прямой имеет вид $\frac{y - y1}{y2 - y1} = \frac{x - x1}{x2 - x1}$

Первые две точки $A(-1, 1)$ и $B(2, 1)$,

тогда уравнение прямой имеет вид $\frac{y - 1}{1 - 1} = \frac{x - (-1)}{2 - (-1)} \Rightarrow y = 1$ *на* $-1 < x \le 2$

Следующие две точки $B(2, 1)$ и $C(3, -2)$,

тогда уравнение прямой имеет вид $\frac{y - 2}{-2 - 1} = \frac{x - 2}{3 - 2} \Rightarrow y = -3 \cdot x + 7$ *на* $2 < x \le 3$

Следующие две точки $C(3, -2)$ и $D1(5, 0)$,

тогда уравнение прямой имеет вид $\frac{y - (-2)}{0 - (-2)} = \frac{x - 3}{5 - 3} \Rightarrow y = x - 5$ *на* $3 < x \le 5$

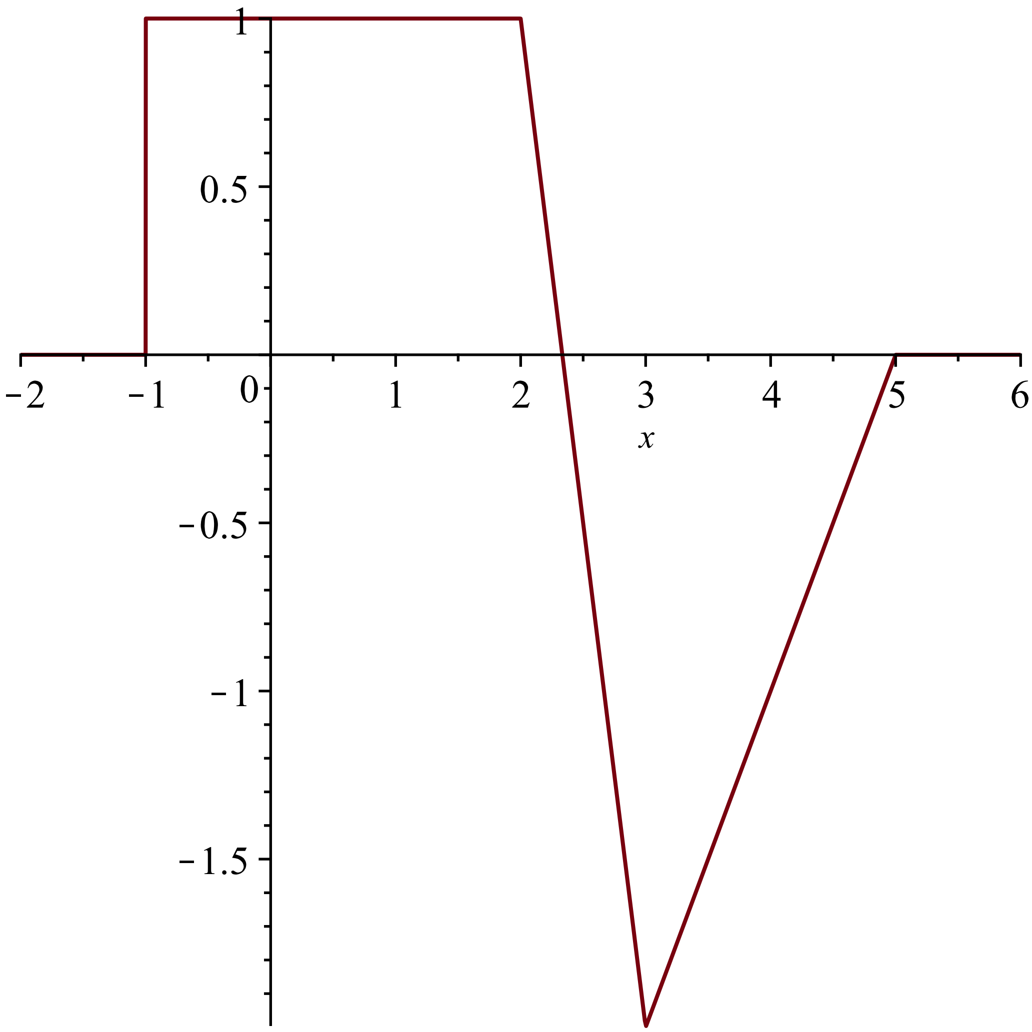
#Получаем функцию f(x):

> $f(x) := piecewise(x \le -1, 0, \text{`and`}(x > -1, x \le 2), 1, \text{`and`}(x > 2, x \le 3), -3 \cdot x + 7, \text{`and`}(x > 3, x \le 5), x - 5, x > 5, 0):$

$f(x)$

$$\begin{cases} 0 & x \le -1 \\ 1 & -1 < x \le 2 \\ -3\,x + 7 & 2 < x \le 3 \\ -5 + x & 3 < x \le 5 \\ 0 & 5 < x \end{cases} \tag{3}$$

> $plot(f(x), x = -2..6)$



> #Найдем свертку функций f(x) и g(x) по формуле $(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\, g(x - \xi)\, \mathrm{d}\xi$

> #Запишем функции $f(\xi)$ и $g(x - \xi)$:

> $f(\xi) := piecewise(\xi \le -1, 0, \text{`and`}(\xi > -1, \xi \le 2), 1, \text{`and`}(\xi > 2, \xi \le 3), -3 \cdot \xi + 7, \text{`and`}(\xi > 3, \xi \le 5), \xi - 5, \xi > 5, 0) :$

$f(\xi)$

$$\begin{cases} 0 & \xi \le -1 \\ 1 & -1 < \xi \le 2 \\ -3\,\xi + 7 & 2 < \xi \le 3 \\ -5 + \xi & 3 < \xi \le 5 \\ 0 & 5 < \xi \end{cases} \tag{4}$$

> $g(x\text{-}\xi) := piecewise(x\text{-}\xi < 0, 0, \text{`}and\text{`}(x - \xi \ge 0, x\text{-}\xi < 1), 1, x\text{-}\xi \ge 1, 0);$

$$g(x-\xi) := \begin{cases} 0 & x - \xi < 0 \\ 1 & 0 \le x - \xi < 1 \\ 0 & 1 \le x - \xi \end{cases} \tag{5}$$

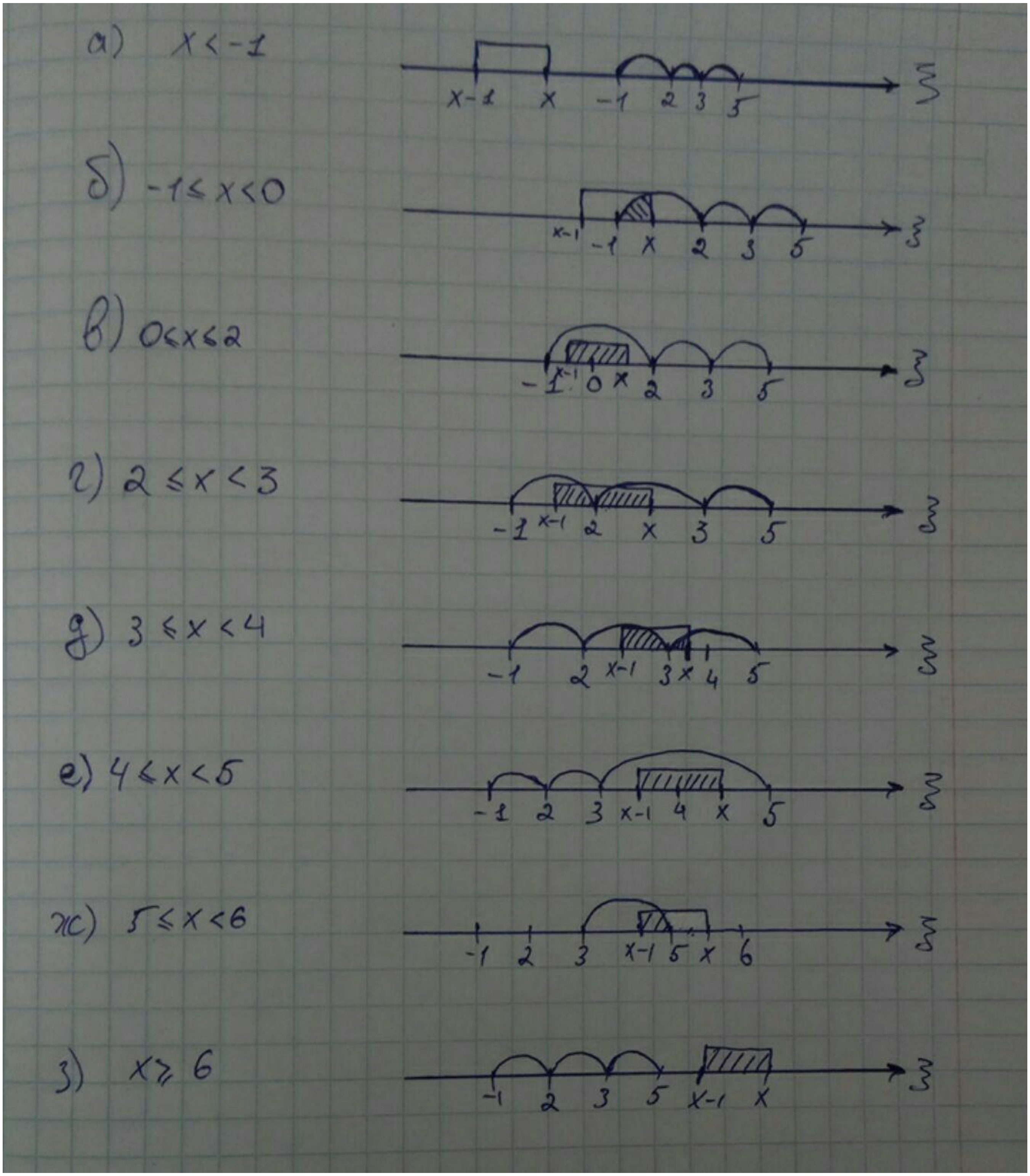
> $g(x\text{-}\xi) := piecewise(\xi \le x - 1, 0, \text{`}and\text{`}(\xi > x - 1, \xi \le x), 1, \xi > x, 0);$

$$g(x-\xi) := \begin{cases} 0 & \xi \le -1 + x \\ 1 & -1 + x < \xi \le x \\ 0 & x < \xi \end{cases} \tag{6}$$

>

Подставим в *интервалы функции* $g(x)$ *значения* $-1, 2, 3, 5$

при $\xi = -1$:
$x < -1$
$-1 \le x < 0$
$x \ge 0$
при $\xi = 2$:
$x < 2$
$2 \le x < 3$
$x \ge 3$
при $\xi = 3$:
$x < 3$
$3 \le x < 4$
$x \ge 4$
при $\xi = 5$:
$x < 5$
$5 \le x < 6$
$x \ge 6$



#В зависимости от того, какие значения принимает переменная x, приходим к следующим возможным случаям(рассмотрим рисунок)

> $a)$

> $x < -1$

> $(f*g)(x) = 0:$

$f\_g1(x) := 0:$
$f\_g1(x)$

$$0 \tag{7}$$

> б)

> $-1 \le x < 0$

> $(f*g)(x) := \int_{-1}^{x} 1 \cdot 1 \, d\xi$

> $f\_g2(x) := \int_{-1}^{x} 1 \cdot 1 \, d\xi:$

$f\_g2(x);$
$f\_g1(-1) = f\_g2(-1)$

$$x + 1$$
$$0 = 0 \tag{8}$$

> в)

> $0 \le x < 2$

> $(f*g)(x) = \int_{x-1}^{x} 1 \cdot 1 \, d\xi$

> $f\_g3(x) := \int_{x-1}^{x} 1 \cdot 1 \, d\xi:$

$f\_g3(x);$
$f\_g2(0) = f\_g3(0)$

$$1$$
$$1 = 1 \tag{9}$$

> г)

> $2 \le x < 3$

> $(f*g)(x) = \int_{x-1}^{2} 1 \cdot 1 \, d\xi + \int_{2}^{x} (-3 \cdot \xi + 7) \cdot 1 \, d\xi$

> $f\_g4(x) := \int_{x-1}^{2} 1 \cdot 1 \, d\xi + \int_{2}^{x} (-3 \cdot \xi + 7) \cdot 1 \, d\xi:$

$f\_g4(x);$
$f\_g3(2) = f\_g4(2);$

$$-5 + 6x - \frac{3}{2} x^2$$
$$1 = 1 \tag{10}$$

> д)

> $3 \le x < 4$

> $(f*g)(x) = \int_{x-1}^{3} (-3 \cdot \xi + 7) \cdot 1 \, d\xi + \int_{3}^{x} (\xi - 5) \cdot 1 \, d\xi$

> $f\_g5(x) := \int_{x-1}^{3} (-3 \cdot \xi + 7) \cdot 1 \, d\xi + \int_{3}^{x} (\xi - 5) \cdot 1 \, d\xi:$

$f\_g5(x);$

$f\_g4(3)=f\_g5(3)$

$$25+\frac{3\,(x-1)^2}{2}-12\,x+\frac{x^2}{2}$$

$$-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2} \qquad \textbf{(11)}$$

> $e)$

> $4 \le x < 5$

> $(f*g)(x)=\int_{x-1}^{x}(\xi-5)\cdot 1\,d\xi$

> $f\_g6(x) := \int_{x-1}^{x}(\xi-5)\cdot 1\,d\xi :$
$f\_g6(x);$
$f\_g5(4)=f\_g5(4);$

$$\frac{x^2}{2}-\frac{(x-1)^2}{2}-5$$

$$-\frac{3}{2}=-\frac{3}{2} \qquad \textbf{(12)}$$

> $ж)$

> $5 \le x < 6$

> $(f*g)(x)=\int_{x-1}^{5}(\xi-5)\cdot 1\,d\xi$

> $f\_g7(x) := \int_{x-1}^{5}(\xi-5)\cdot 1\,d\xi :$
$f\_g7(x);$
$f\_g6(5)=f\_g7(5)$

$$-\frac{35}{2}-\frac{(x-1)^2}{2}+5\,x$$

$$-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2} \qquad \textbf{(13)}$$

> $з)$

> $x \ge 6$

> $(f*g)(x)=0 :$
$f\_g8(x) := 0 :$
$f\_g8(x);$
$f\_g7(6)=f\_g8(6)$

$$0$$

$$0=0 \qquad \textbf{(14)}$$

> *#В итоге получаем функцию*

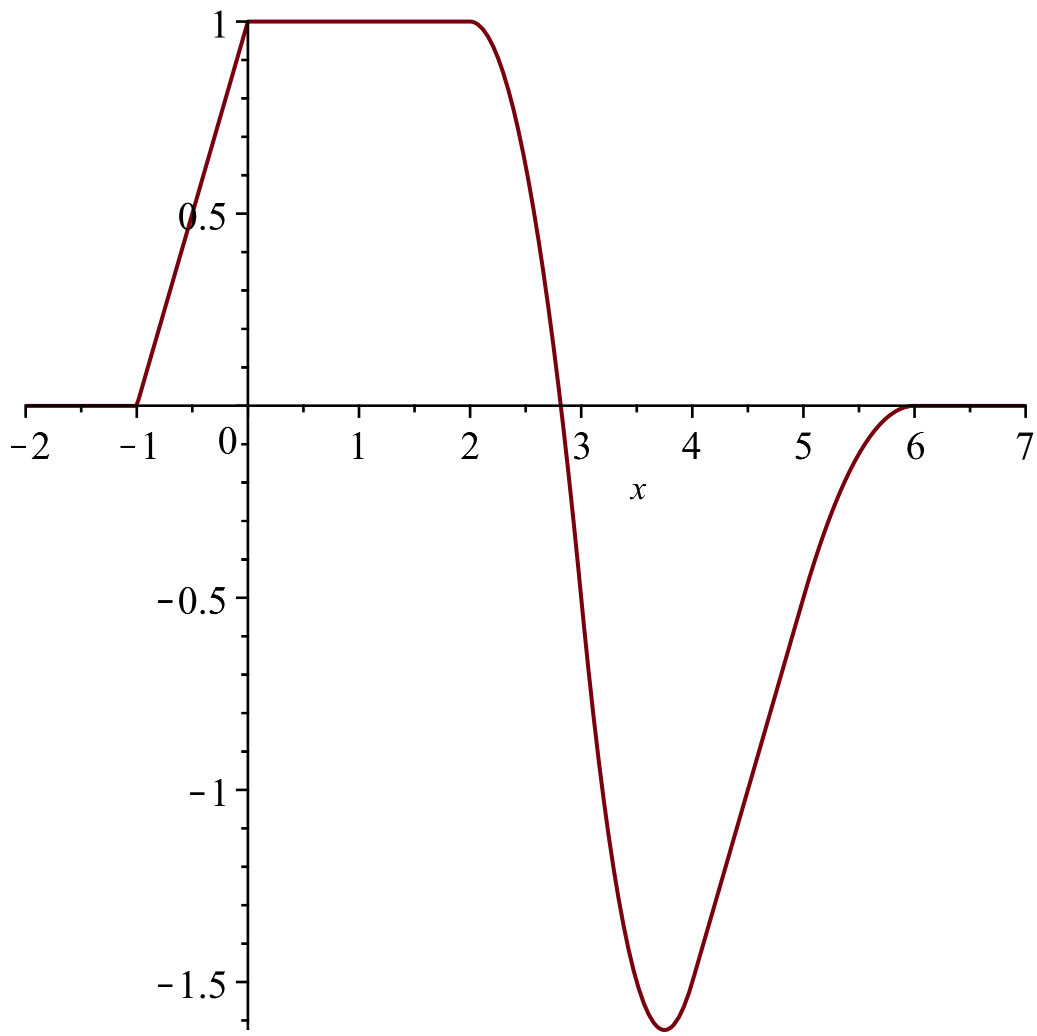
> $f\_g(x)=(f*g)(x) :$

> $f\_g(x) := piecewise(x < -1, f\_g1(x), -1 \leq x < 0, f\_g2(x), 0 \leq x < 2, f\_g3(x), 2 \leq x < 3, f\_g4(x), 3 \leq x < 4, f\_g5(x), 4 \leq x < 5, f\_g6(x), 5 \leq x < 6, f\_g7(x), x \geq 6, f\_g8(x)) :$

$f\_g(x)$

$$\begin{cases} 0 & x < -1 \\ x+1 & -1 \leq x < 0 \\ 1 & 0 \leq x < 2 \\ -5 + 6x - \frac{3}{2}x^2 & 2 \leq x < 3 \\ 25 + \frac{3(x-1)^2}{2} - 12x + \frac{x^2}{2} & 3 \leq x < 4 \\ \frac{x^2}{2} - \frac{(x-1)^2}{2} - 5 & 4 \leq x < 5 \\ -\frac{35}{2} - \frac{(x-1)^2}{2} + 5x & 5 \leq x < 6 \\ 0 & 6 \leq x \end{cases} \tag{15}$$

> $plot(f\_g(x), x = -2..7)$



>

свертка функций $f(x)$ и $g(x)$ *склеилась во всех точках, следовательно найдена верно*

> *restart*;

> *with*(*plots*) :

> *#Найти образ Фурье функции f(x), если f(x)≡0 при x∉[x1, x4], а при x∈[x1, x4] график этой функции состоит из звеньев ломаной, проходящей через точки* $A(x1, y1)$, $B(x2, y2)$, $C(x3, y3)$, $D1(x4, y4)$.

> $A(-2, 1)$:
$B(-1, 1)$:
$C(1, -2)$:
$D1(3, 1)$:

#Найдем функцию f(x) как уравнение прямой по двум точкам: две точки (x1,y1), (x2,y2)

тогда уравнение прямой имеет вид $\dfrac{y - y1}{y2 - y1} = \dfrac{x - x1}{x2 - x1}$

Первые две точки $A(-2, 1)$ и $B(-1, 1)$,

тогда уравнение прямой имеет вид $\dfrac{y-1}{1-1} = \dfrac{x-(-2)}{-1-(-2)} \Rightarrow y = 1$ *на* $-2 < x \leq -1$

Следующие две точки $B(-1, 1)$ и $C(1, -2)$, *тогда уравнение прямой имеет вид* $\frac{y-1}{-2-1} = \frac{x-(-1)}{1-(-1)} \Rightarrow y = \frac{-3\cdot x-1}{2}$ *на* $-1 < x \le 1$

Следующие две точки $C(1,-2)$ и $D1(3,1)$,

тогда уравнение прямой имеет вид $\frac{y-(-2)}{1-(-2)} = \frac{x-1}{3-1} \Rightarrow y = \frac{3\cdot x-7}{2}$ *на* $1 < x \le 3$

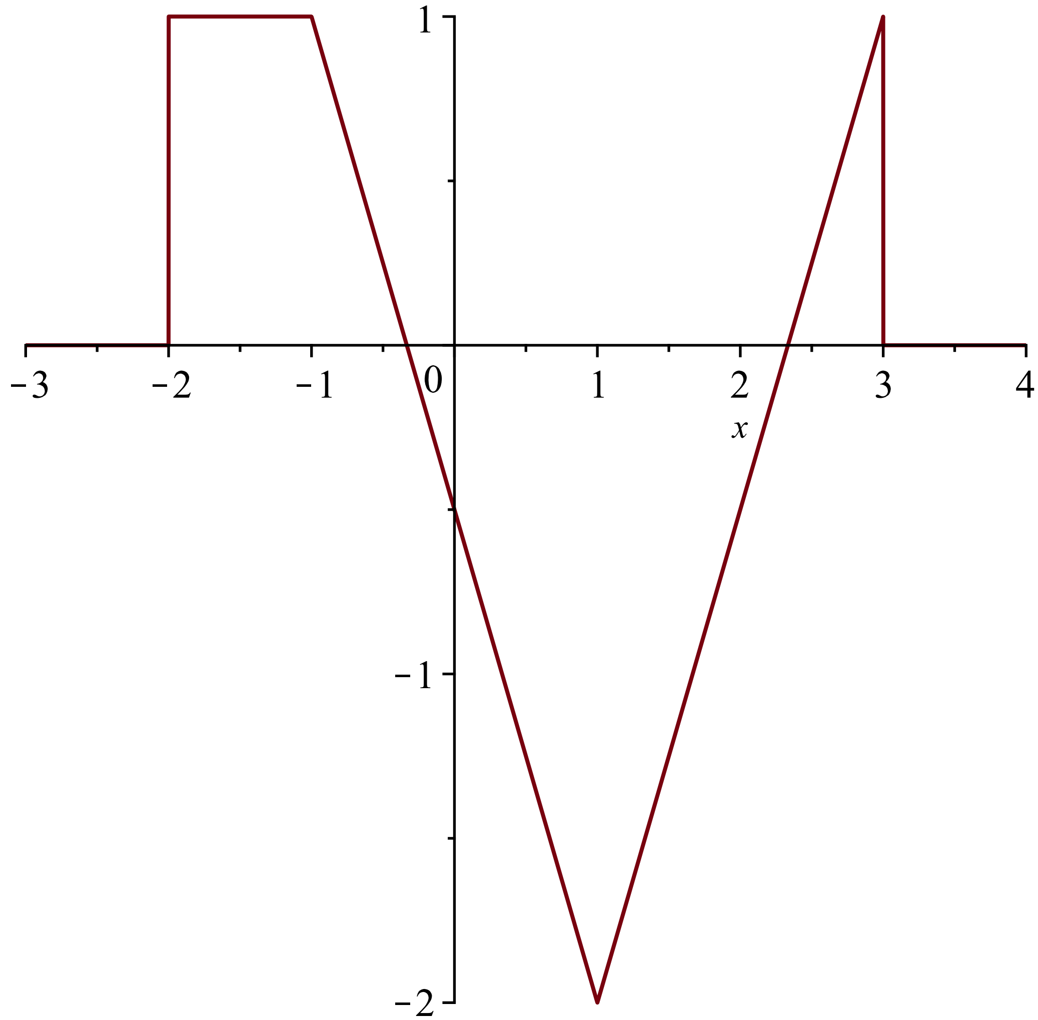
#Получаем функцию f(x):

> $f(x) := piecewise\left(x \le -2, 0, -2 < x \le -1, 1, -1 < x \le 1, \frac{-3\cdot x-1}{2}, 1 < x \le 3, \frac{3\cdot x-7}{2},\right.$
> $\left. x > 3, 0\right):$

$f(x)$

$$\begin{cases} 0 & x \le -2 \\ 1 & -2 < x \le -1 \\ -\frac{3x}{2} - \frac{1}{2} & -1 < x \le 1 \\ \frac{3x}{2} - \frac{7}{2} & 1 < x \le 3 \\ 0 & 3 < x \end{cases} \tag{16}$$

> $plot(f(x), x=-3..4)$



Представим функцию $f(x)$ в *виде суммы* "треугольного импульса" и "прямоугольного импульса"

> *#График функции f1(x) - "прямоугольный импульс"*

> $f1(x) := rect\left(\frac{x-m}{d}\right), m - середина\ отрезка\ [a, b], d - длина\ отрезка\ [a, b]$

> $a := -2 :$
> $b := -1 :$

$m := \frac{a+b}{2}$

$$m := -\frac{3}{2} \quad (17)$$

$d := b - a$

$$d := 1 \quad (18)$$

$f1(x) := rect\left(\frac{x-m}{d}\right) :$

$f1(x)$

$$rect\left(x+\frac{3}{2}\right) \quad (19)$$

> #График функции f2(x) - "треугольный импульс"

> $f2(x) := c1\cdot\Lambda\left(\frac{x-m1}{d1}\right)+rect\left(\frac{x-m2}{d2}\right)$, $m1, m2$ — середина отрезка $[c, f]$, $d1, d2$ — длина отрезка $[c, f]$, $c1$ — растяжение вдоль оси ординат и отражение относительно оси абсцисс

$c := -1 :$
$c1 := -3 :$
$f := 3 :$

$m1 := \frac{c+f}{2}$

$$m1 := 1 \tag{20}$$

$d1 := \frac{f-c}{2}$

$$d1 := 2 \tag{21}$$

$m2 := \frac{c+f}{2}$

$$m2 := 1 \tag{22}$$

$d2 := f - c$

$$d2 := 4 \tag{23}$$

$f2(x) := c1\cdot\Lambda\left(\frac{x-m1}{d1}\right)+rect\left(\frac{x-m2}{d2}\right) :$

$f2(x)$

$$-3\,\Lambda\left(-\frac{1}{2}+\frac{x}{2}\right)+rect\left(-\frac{1}{4}+\frac{x}{4}\right) \tag{24}$$

> #Таким образом, функция f(x) представляет собой сумму "треугольного импульса" и двух "прямоугольных импульсов":

> $f(x) := f1(x) + f2(x);$

$$f := x \rightarrow f1(x) + f2(x) \tag{25}$$

> $f(x)$

$$rect\left(x+\frac{3}{2}\right)-3\,\Lambda\left(-\frac{1}{2}+\frac{x}{2}\right)+rect\left(-\frac{1}{4}+\frac{x}{4}\right) \tag{26}$$

> #Найдем образ Фурье функции f(x):

$F[f](\nu) := d\cdot e^{-I\cdot 2\cdot\pi\cdot\nu\cdot m}\cdot\frac{\sin(\pi\cdot\nu\cdot d)}{\pi\cdot\nu\cdot d}+d2\cdot e^{-I\cdot 2\cdot\pi\cdot\nu\cdot m2}\cdot\frac{\sin(\pi\cdot\nu\cdot d2)}{\pi\cdot\nu\cdot d2}+c1\cdot d1\cdot e^{-I\cdot 2\cdot\pi\cdot\nu\cdot m1}\cdot\frac{\sin^2(\pi\cdot\nu\cdot d1)}{(\pi\cdot\nu\cdot d1)^2}$

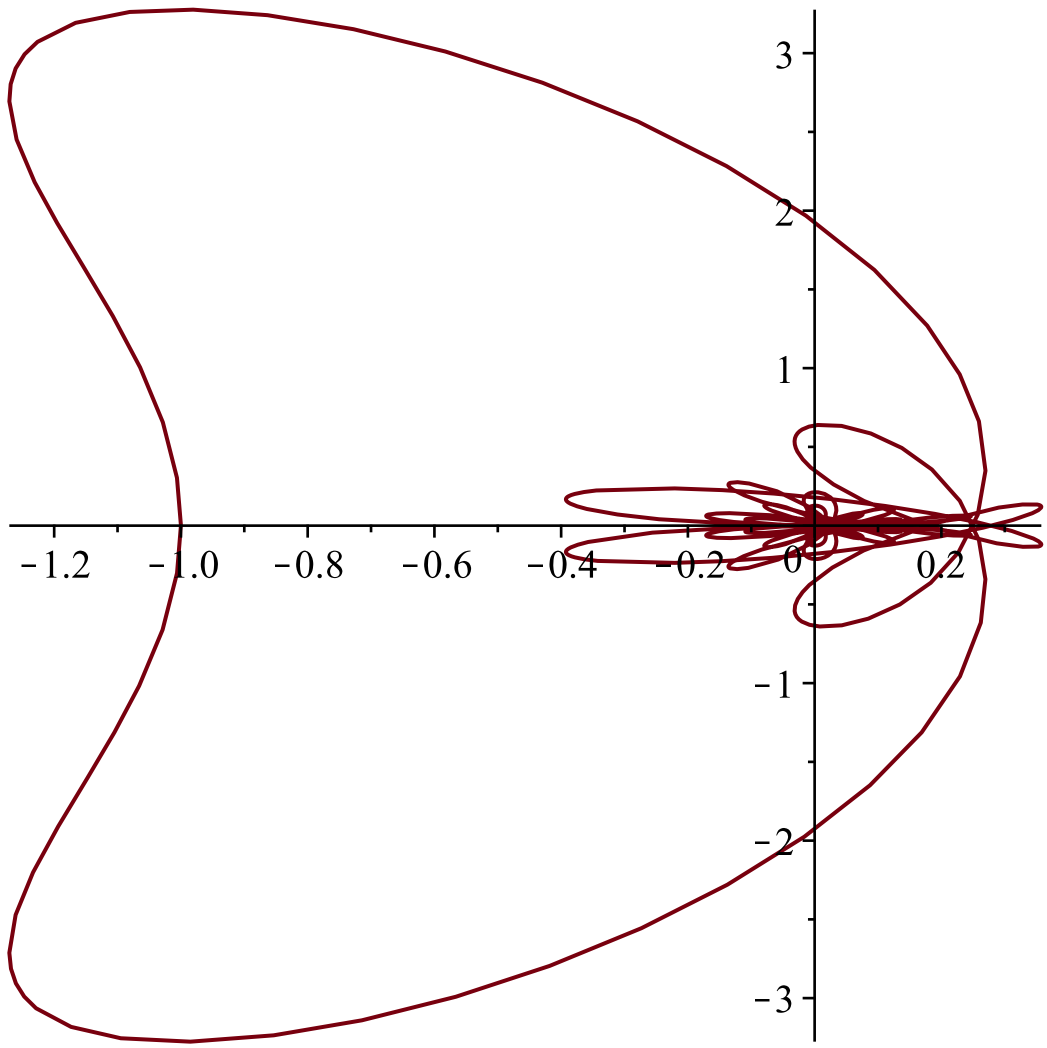
$$F_f := \nu \rightarrow \frac{d\,e^{-2I\pi\nu m}\sin(\pi\nu d)}{\pi\nu d}+\frac{d2\,e^{-2I\pi\nu m2}\sin(\pi\nu d2)}{\pi\nu d2}+\frac{c1\,d1\,e^{-2I\pi\nu m1}\sin(\pi\nu d1)^2}{\pi^2\nu^2 d1^2} \tag{27}$$

$F[f](\nu)$

$$\frac{e^{3I\pi\nu}\sin(\pi\nu)}{\pi\nu}+\frac{e^{-2I\pi\nu}\sin(4\pi\nu)}{\pi\nu}-\frac{3\,e^{-2I\pi\nu}\sin(2\pi\nu)^2}{2\pi^2\nu^2} \tag{28}$$

> #Построим график найденного образа Фурье

> $complexplot(F[f](\nu), \nu = -3..3)$

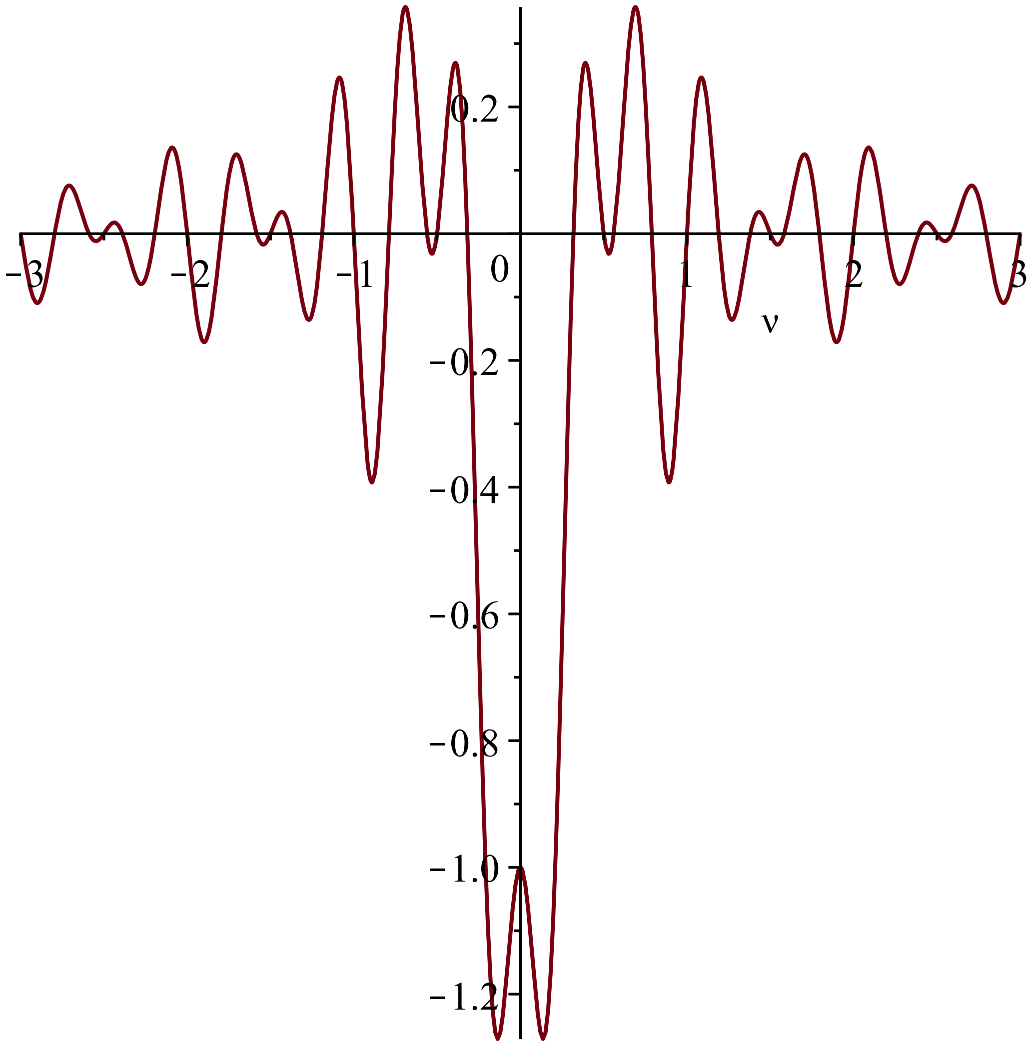


#Построим действительную часть образа Фурье

> $$F1[f](\nu) := d\cdot\cos(-2\cdot\pi\cdot\nu\cdot m)\cdot\frac{\sin(\pi\cdot\nu\cdot d)}{\pi\cdot\nu\cdot d} + d2\cdot\cos(-2\cdot\pi\cdot\nu\cdot m2)\cdot\frac{\sin(\pi\cdot\nu\cdot d2)}{\pi\cdot\nu\cdot d2} + c1\cdot d1\cdot\cos(-2\cdot\pi\cdot\nu\cdot m1)\cdot\frac{\sin^2(\pi\cdot\nu\cdot d1)}{(\pi\cdot\nu\cdot d1)^2}$$

$$F1_f := \nu \rightarrow \frac{d\cos(-2\,\pi\,\nu\,m)\,\sin(\pi\,\nu\,d)}{\pi\,\nu\,d} + \frac{d2\cos(-2\,\pi\,\nu\,m2)\,\sin(\pi\,\nu\,d2)}{\pi\,\nu\,d2} + \frac{c1\,d1\cos(-2\,\pi\,\nu\,m1)\,\sin(\pi\,\nu\,d1)^2}{\pi^2\,\nu^2\,d1^2} \quad \textbf{(29)}$$

> $plot(F1[f](\nu), \nu = -3..3)$

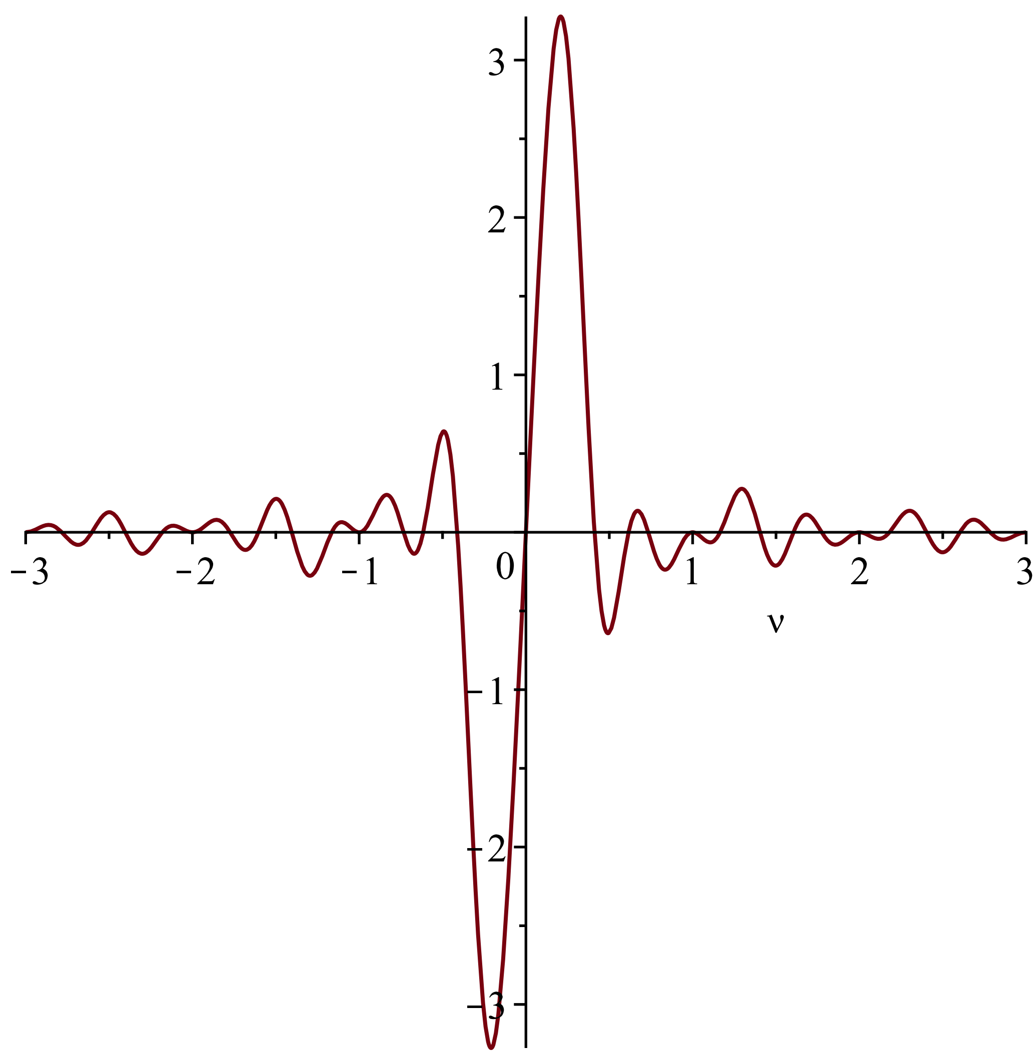


#Построим мнимую часть образа Фурье

> $F2[f](\nu) := d\cdot\sin(-2\cdot\pi\cdot\nu\cdot m)\cdot\frac{\sin(\pi\cdot\nu\cdot d)}{\pi\cdot\nu\cdot d} + d2\cdot\sin(-2\cdot\pi\cdot\nu\cdot m2)\cdot\frac{\sin(\pi\cdot\nu\cdot d2)}{\pi\cdot\nu\cdot d2} + c1\cdot d1\cdot\sin(-2\cdot\pi\cdot\nu\cdot m1)\cdot\frac{\sin^2(\pi\cdot\nu\cdot d1)}{(\pi\cdot\nu\cdot d1)^2}$

$$F2_f := \nu \rightarrow \frac{d\sin(-2\pi\nu m)\sin(\pi\nu d)}{\pi\nu d} + \frac{d2\sin(-2\pi\nu m2)\sin(\pi\nu d2)}{\pi\nu d2} + \frac{c1\, d1\sin(-2\pi\nu m1)\sin(\pi\nu d1)^2}{\pi^2\nu^2 d1^2} \qquad \textbf{(30)}$$

> $plot(F2[f](\nu), \nu = -3..3)$



3
2
1
0
−1
−2
−3
−3
−2
−1
1
2
3
ν

>