МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

МГТУ им Н.Э.Баумана

Факультет ФН
Кафедра вычислительной математики и математической физики

Соколов Арсений Андреевич

Лабораторная работа №7 по численным методам

3 курс, группа ФН11-53Б
Вариант 6

Преподаватель
_____________ В. А. Кутыркин
«___» _______ 2019 г.

Москва, 2019 г.

Задание 1

Задание.
Используя дискретный аналог уравнения (1) Фредгольма 2-го рода с симметричным, непрерывным и аналитически заданным ядром

$$x(s) - \lambda \int_a^b K(s,\tau)x(\tau)d\tau = y(s), \quad s \in [a;b] \tag{1}$$

индуцированный методом конечных сумм с квадратурными формулами прямоугольников (количество узлов в квадратурной формуле не менее 20), найти приближённое решение уравнения (1), которое имеет конкретный вид:

$$x(s) - \frac{1}{n-49}\int_0^{\frac{N+5}{\mu}} K(s,\tau)x(\tau)d\tau = \frac{N+5}{N}\left(s^2+n-49\right), \quad s \in \left[0; \frac{N+5}{N}\right]$$

(N – номер студента в журнале, n – номер группы) И

$$K(s,\tau) = \begin{cases} s\left(2\frac{N+5}{N} - \tau\right), & 0 \le s \le \tau \\ \tau\left(2\frac{N+5}{N} - s\right), & \tau \le s \le \frac{N+5}{N} \end{cases}$$

Оценить абсолютную погрешность приближённого решения, сравнив его с аналитическим решением, полученным сведением уравнения (1) к краевой задаче для обыкновенного линейного дифференциального уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами.

Исходные данные.
$N = 6, n = 53$
Решение.
Будем использовать 20 узлов. Для построения дискретного аналога, аппроксимирующего уравнение (1), зададим на квадрате $[0; \frac{11}{6}] \times [0; \frac{11}{6}]$ двумерную центрально-равномерную сетку $B \times A = \langle (s_i, \tau_i) : s_i \in B, \tau_i \in A \rangle$ типа 20×20 шага (h, τ). Следовательно, $B = \langle s_1, s_2, \dots s_{20} \rangle$ и $A = \langle \tau_1, \tau_2, \dots \tau_{20} \rangle$ центрально равномерные сетки отрезка $[0; \frac{11}{6}] \times [0; \frac{11}{6}]$ с шагами $h = \frac{b-a}{n} = \frac{11}{120}$ и $\tau = \frac{b-a}{n} = \frac{11}{120}$, соответственно.
Получим:

$$A = B =$$

$$\left\langle \frac{11}{80}, \frac{11}{48}, \frac{77}{240}, \frac{33}{80}, \frac{121}{240}, \frac{143}{240}, \frac{11}{16}, \frac{187}{240}, \frac{209}{240}, \frac{77}{80}, \frac{253}{240}, \frac{55}{48}, \frac{99}{80}, \frac{319}{240}, \frac{341}{240}, \frac{121}{80}, \frac{77}{48}, \frac{407}{240}, \frac{143}{80} \right\rangle$$

Для любого узла $(s_i, \tau_i) \in B \times A \quad (i, j = \overline{1, 20})$ и функций K, x, y из уравнения (1) приняты обозначения: $K_j^i = K(s_i; \tau_j), \quad x^j = x(\tau_j) = x(s_j)$. и

$y^i = y(s_i)$. Используя эти обозначения и квадратурную формулу прямоугольников, из уравнения (1) получаем его дискретный аналог, аппроксимирующий уравнение (1) при $h, \tau \to 0$, в виде СЛАУ

$$K(s,\tau) = \begin{cases} x^i - \lambda \sum_{j=1}^{20} K^i_j h \cdot x_j = y^i \\ i = \overline{1,20} \end{cases}$$

Введём обозначения:

${}^{>}x = \left[x^1, \ldots, x^{20}\right\rangle, {}^{>}y = \left[y^1, \ldots, y^{20}\right\rangle \in {}^{>}R^n, F = \left(\delta^i_j - \lambda K^i_j \cdot h\right)^{20}_{20} = \left(f^i_j\right)^{20}_{20} \in L(R, 20),$

где

$$\delta^i_j = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$$

Используя эти обозначения, СЛАУ перепишем в виде $F \cdot^{>} x =^{>} y$.

Найдём приближенное решение уравнения

$$x(s) - \frac{1}{4}\int_0^{\frac{11}{6}} K(s,\tau)x(\tau)d\tau = \frac{11}{6}\left(s^2+4\right), \quad s \in [0; \frac{11}{6}]$$

$$K(s,\tau) = \begin{cases} s(\frac{11}{3} - \tau), & 0 \leq s \leq \tau \\ \tau(\frac{11}{3} - s), & \tau \leq s \leq \frac{11}{3} \end{cases}$$

Так как $F \cdot^{>} x =^{>} y$, следовательно ${}^{>}x = F^{-}1 \cdot^{>} y$.

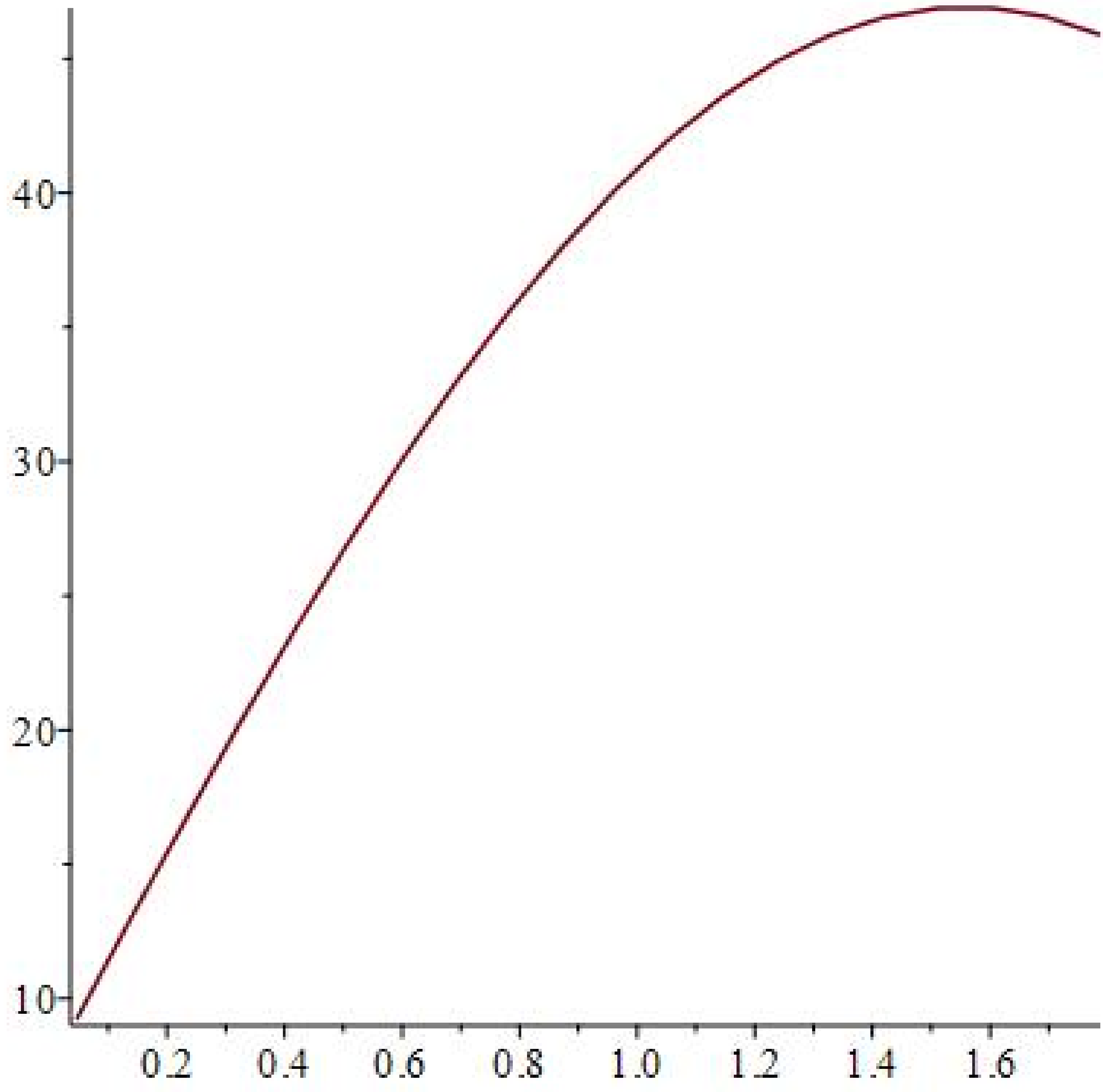
Необходимые вычисления :

$$F = \begin{bmatrix}
\frac{27542851}{27648000} & -\frac{102487}{27648000} & -\frac{1331}{368640} & -\frac{97163}{27648000} & -\frac{94501}{27648000} & -\frac{30613}{9216000} & -\frac{89177}{27648000} & -\frac{17303}{5529600} & -\frac{9317}{3072000} & -\frac{81191}{27648000} & -\frac{78529}{27648000} & -\frac{25289}{9216000} & -\frac{14641}{5529600} & -\frac{70543}{27648000} & -\frac{22627}{9216000} & -\frac{65219}{27648000} & -\frac{62557}{27648000} & -\frac{1331}{614400} & -\frac{57233}{27648000} & -\frac{54571}{27648000} \\
-\frac{102487}{27648000} & \frac{9113513}{9216000} & -\frac{1331}{122880} & -\frac{97163}{9216000} & -\frac{94501}{9216000} & -\frac{30613}{3072000} & -\frac{89177}{9216000} & -\frac{17303}{1843200} & -\frac{9317}{1024000} & -\frac{81191}{9216000} & -\frac{78529}{9216000} & -\frac{25289}{3072000} & -\frac{14641}{1843200} & -\frac{70543}{9216000} & -\frac{22627}{3072000} & -\frac{65219}{9216000} & -\frac{62557}{9216000} & -\frac{1331}{204800} & -\frac{57233}{9216000} & -\frac{54571}{9216000} \\
-\frac{1331}{368640} & -\frac{1331}{122880} & \frac{72397}{73728} & -\frac{97163}{5529600} & -\frac{94501}{5529600} & -\frac{30613}{1843200} & -\frac{89177}{5529600} & -\frac{17303}{1105920} & -\frac{9317}{614400} & -\frac{81191}{5529600} & -\frac{78529}{5529600} & -\frac{25289}{1843200} & -\frac{14641}{1105920} & -\frac{70543}{5529600} & -\frac{22627}{1843200} & -\frac{65219}{5529600} & -\frac{62557}{5529600} & -\frac{1331}{122880} & -\frac{57233}{5529600} & -\frac{54571}{5529600} \\
-\frac{97163}{27648000} & -\frac{97163}{9216000} & -\frac{97163}{5529600} & \frac{26967859}{27648000} & -\frac{661507}{27648000} & -\frac{214291}{9216000} & -\frac{624239}{27648000} & -\frac{121121}{5529600} & -\frac{65219}{3072000} & -\frac{568337}{27648000} & -\frac{549703}{27648000} & -\frac{177023}{9216000} & -\frac{102487}{5529600} & -\frac{493801}{27648000} & -\frac{158389}{9216000} & -\frac{456533}{27648000} & -\frac{437899}{27648000} & -\frac{9317}{614400} & -\frac{400631}{27648000} & -\frac{381997}{27648000} \\
-\frac{94501}{27648000} & -\frac{94501}{9216000} & -\frac{94501}{5529600} & -\frac{661507}{27648000} & \frac{2977499}{3072000} & -\frac{30613}{1024000} & -\frac{89177}{3072000} & -\frac{17303}{614400} & -\frac{27951}{1024000} & -\frac{81191}{3072000} & -\frac{78529}{3072000} & -\frac{25289}{1024000} & -\frac{14641}{614400} & -\frac{70543}{3072000} & -\frac{22627}{1024000} & -\frac{65219}{3072000} & -\frac{62557}{3072000} & -\frac{3993}{204800} & -\frac{57233}{3072000} & -\frac{54571}{3072000} \\
-\frac{30613}{9216000} & -\frac{30613}{3072000} & -\frac{30613}{1843200} & -\frac{214291}{9216000} & -\frac{30613}{1024000} & \frac{8879257}{9216000} & -\frac{980947}{27648000} & -\frac{190333}{5529600} & -\frac{102487}{3072000} & -\frac{893101}{27648000} & -\frac{863819}{27648000} & -\frac{278179}{9216000} & -\frac{161051}{5529600} & -\frac{775973}{27648000} & -\frac{248897}{9216000} & -\frac{717409}{27648000} & -\frac{688127}{27648000} & -\frac{14641}{614400} & -\frac{629563}{27648000} & -\frac{600281}{27648000} \\
-\frac{89177}{27648000} & -\frac{89177}{9216000} & -\frac{89177}{5529600} & -\frac{624239}{27648000} & -\frac{89177}{3072000} & -\frac{980947}{27648000} & \frac{26488699}{27648000} & -\frac{224939}{5529600} & -\frac{121121}{3072000} & -\frac{1055483}{27648000} & -\frac{1020877}{27648000} & -\frac{328757}{9216000} & -\frac{190333}{5529600} & -\frac{917059}{27648000} & -\frac{294151}{9216000} & -\frac{847847}{27648000} & -\frac{813241}{27648000} & -\frac{17303}{614400} & -\frac{744029}{27648000} & -\frac{709423}{27648000} \\
-\frac{17303}{5529600} & -\frac{17303}{1843200} & -\frac{17303}{1105920} & -\frac{121121}{5529600} & -\frac{17303}{614400} & -\frac{190333}{5529600} & -\frac{224939}{5529600} & \frac{351337}{368640} & -\frac{9317}{204800} & -\frac{81191}{1843200} & -\frac{78529}{1843200} & -\frac{25289}{614400} & -\frac{14641}{368640} & -\frac{70543}{1843200} & -\frac{22627}{614400} & -\frac{65219}{1843200} & -\frac{62557}{1843200} & -\frac{1331}{40960} & -\frac{57233}{1843200} & -\frac{54571}{1843200} \\
-\frac{9317}{3072000} & -\frac{9317}{1024000} & -\frac{9317}{614400} & -\frac{65219}{3072000} & -\frac{27951}{1024000} & -\frac{102487}{3072000} & -\frac{121121}{3072000} & -\frac{9317}{204800} & \frac{2913611}{3072000} & -\frac{1380247}{27648000} & -\frac{1334993}{27648000} & -\frac{429913}{9216000} & -\frac{248897}{5529600} & -\frac{1199231}{27648000} & -\frac{384659}{9216000} & -\frac{1108723}{27648000} & -\frac{1063469}{27648000} & -\frac{22627}{614400} & -\frac{972961}{27648000} & -\frac{927707}{27648000} \\
-\frac{81191}{27648000} & -\frac{81191}{9216000} & -\frac{81191}{5529600} & -\frac{568337}{27648000} & -\frac{81191}{3072000} & -\frac{893101}{27648000} & -\frac{1055483}{27648000} & -\frac{81191}{1843200} & -\frac{1380247}{27648000} & \frac{26105371}{27648000} & -\frac{1492051}{27648000} & -\frac{480491}{9216000} & -\frac{278179}{5529600} & -\frac{1340317}{27648000} & -\frac{429913}{9216000} & -\frac{1239161}{27648000} & -\frac{1188583}{27648000} & -\frac{25289}{614400} & -\frac{1087427}{27648000} & -\frac{1036849}{27648000} \\
-\frac{78529}{27648000} & -\frac{78529}{9216000} & -\frac{78529}{5529600} & -\frac{549703}{27648000} & -\frac{78529}{3072000} & -\frac{863819}{27648000} & -\frac{1020877}{27648000} & -\frac{78529}{1843200} & -\frac{1334993}{27648000} & -\frac{1492051}{27648000} & \frac{8666297}{9216000} & -\frac{177023}{3072000} & -\frac{102487}{1843200} & -\frac{493801}{9216000} & -\frac{158389}{3072000} & -\frac{456533}{9216000} & -\frac{437899}{9216000} & -\frac{9317}{204800} & -\frac{400631}{9216000} & -\frac{381997}{9216000} \\
-\frac{25289}{9216000} & -\frac{25289}{3072000} & -\frac{25289}{1843200} & -\frac{177023}{9216000} & -\frac{25289}{1024000} & -\frac{278179}{9216000} & -\frac{328757}{9216000} & -\frac{25289}{614400} & -\frac{429913}{9216000} & -\frac{480491}{9216000} & -\frac{177023}{3072000} & \frac{8634353}{9216000} & -\frac{336743}{5529600} & -\frac{1622489}{27648000} & -\frac{520421}{9216000} & -\frac{1500037}{27648000} & -\frac{1438811}{27648000} & -\frac{30613}{614400} & -\frac{1316359}{27648000} & -\frac{1255133}{27648000} \\
-\frac{14641}{5529600} & -\frac{14641}{1843200} & -\frac{14641}{1105920} & -\frac{102487}{5529600} & -\frac{14641}{614400} & -\frac{161051}{5529600} & -\frac{190333}{5529600} & -\frac{14641}{368640} & -\frac{248897}{5529600} & -\frac{278179}{5529600} & -\frac{102487}{1843200} & -\frac{336743}{5529600} & \frac{206543}{221184} & -\frac{70543}{1105920} & -\frac{22627}{368640} & -\frac{65219}{1105920} & -\frac{62557}{1105920} & -\frac{1331}{24576} & -\frac{57233}{1105920} & -\frac{54571}{1105920} \\
-\frac{70543}{27648000} & -\frac{70543}{9216000} & -\frac{70543}{5529600} & -\frac{493801}{27648000} & -\frac{70543}{3072000} & -\frac{775973}{27648000} & -\frac{917059}{27648000} & -\frac{70543}{1843200} & -\frac{1199231}{27648000} & -\frac{1340317}{27648000} & -\frac{493801}{9216000} & -\frac{1622489}{27648000} & -\frac{70543}{1105920} & \frac{953457}{1024000} & -\frac{67881}{1024000} & -\frac{65219}{1024000} & -\frac{62557}{1024000} & -\frac{11979}{204800} & -\frac{57233}{1024000} & -\frac{54571}{1024000} \\
-\frac{22627}{9216000} & -\frac{22627}{3072000} & -\frac{22627}{1843200} & -\frac{158389}{9216000} & -\frac{22627}{1024000} & -\frac{248897}{9216000} & -\frac{294151}{9216000} & -\frac{22627}{614400} & -\frac{384659}{9216000} & -\frac{429913}{9216000} & -\frac{158389}{3072000} & -\frac{520421}{9216000} & -\frac{22627}{368640} & -\frac{67881}{1024000} & \frac{8559817}{9216000} & -\frac{1891351}{27648000} & -\frac{1814153}{27648000} & -\frac{38599}{614400} & -\frac{1659757}{27648000} & -\frac{1582559}{27648000} \\
-\frac{65219}{27648000} & -\frac{65219}{9216000} & -\frac{65219}{5529600} & -\frac{456533}{27648000} & -\frac{65219}{3072000} & -\frac{717409}{27648000} & -\frac{847847}{27648000} & -\frac{65219}{1843200} & -\frac{1108723}{27648000} & -\frac{1239161}{27648000} & -\frac{456533}{9216000} & -\frac{1500037}{27648000} & -\frac{65219}{1105920} & -\frac{65219}{1024000} & -\frac{1891351}{27648000} & \frac{25626211}{27648000} & -\frac{1939267}{27648000} & -\frac{41261}{614400} & -\frac{1774223}{27648000} & -\frac{1691701}{27648000} \\
-\frac{62557}{27648000} & -\frac{62557}{9216000} & -\frac{62557}{5529600} & -\frac{437899}{27648000} & -\frac{62557}{3072000} & -\frac{688127}{27648000} & -\frac{813241}{27648000} & -\frac{62557}{1843200} & -\frac{1063469}{27648000} & -\frac{1188583}{27648000} & -\frac{437899}{9216000} & -\frac{1438811}{27648000} & -\frac{62557}{1105920} & -\frac{62557}{1024000} & -\frac{1814153}{27648000} & -\frac{1939267}{27648000} & \frac{8527873}{9216000} & -\frac{14641}{204800} & -\frac{629563}{9216000} & -\frac{600281}{9216000} \\
-\frac{1331}{614400} & -\frac{1331}{204800} & -\frac{1331}{122880} & -\frac{9317}{614400} & -\frac{3993}{204800} & -\frac{14641}{614400} & -\frac{17303}{614400} & -\frac{1331}{40960} & -\frac{22627}{614400} & -\frac{25289}{614400} & -\frac{9317}{204800} & -\frac{30613}{614400} & -\frac{1331}{24576} & -\frac{11979}{204800} & -\frac{38599}{614400} & -\frac{41261}{614400} & -\frac{14641}{204800} & \frac{113563}{122880} & -\frac{400631}{5529600} & -\frac{381997}{5529600} \\
-\frac{57233}{27648000} & -\frac{57233}{9216000} & -\frac{57233}{5529600} & -\frac{400631}{27648000} & -\frac{57233}{3072000} & -\frac{629563}{27648000} & -\frac{744029}{27648000} & -\frac{57233}{1843200} & -\frac{972961}{27648000} & -\frac{1087427}{27648000} & -\frac{400631}{9216000} & -\frac{1316359}{27648000} & -\frac{57233}{1105920} & -\frac{57233}{1024000} & -\frac{1659757}{27648000} & -\frac{1774223}{27648000} & -\frac{629563}{9216000} & -\frac{400631}{5529600} & \frac{25530379}{27648000} & -\frac{2019127}{27648000} \\
-\frac{54571}{27648000} & -\frac{54571}{9216000} & -\frac{54571}{5529600} & -\frac{381997}{27648000} & -\frac{54571}{3072000} & -\frac{600281}{27648000} & -\frac{709423}{27648000} & -\frac{54571}{1843200} & -\frac{927707}{27648000} & -\frac{1036849}{27648000} & -\frac{381997}{9216000} & -\frac{1255133}{27648000} & -\frac{54571}{1105920} & -\frac{54571}{1024000} & -\frac{1582559}{27648000} & -\frac{1691701}{27648000} & -\frac{600281}{9216000} & -\frac{381997}{5529600} & -\frac{2019127}{27648000} & \frac{8506577}{9216000}
\end{bmatrix}$$

$$y = [\frac{2535731}{345600}, \frac{282931}{38400}, \frac{102707}{13824}, \frac{2599619}{345600}, \frac{293579}{38400}, \frac{2695451}{345600}, \frac{2759339}{345600}, \frac{12595}{1536}, \frac{2919059}{345600}, \frac{3014891}{345600}, \frac{346819}{38400}, \frac{3238499}{345600}, \frac{134651}{13824}, \frac{389411}{38400}, \frac{3653771}{345600}, \frac{3813491}{345600}, \frac{442651}{38400}, \frac{166595}{13824}, \frac{4356539}{345600}, \frac{506539}{38400}]$$

$$\begin{aligned} x = [&9.214764354, 12.93031592, 16.57727112, 20.12653911, 23.55178152,\\ &26.82661524, 29.92581570, 32.82551120, 35.50236666, 37.93776350,\\ &40.11094297, 42.00616607, 43.60783469, 44.90461195, 45.88550937,\\ &46.54297154, 46.88193429, 46.87978680, 46.55654554, 45.89470037] \end{aligned}$$

Получили сеточную функцию, индуцирующую с помощью интерполяции в виде ломаной приближённое решение уравнения (1).
Построим график полученного приближенного решения:



Найдем аналитическое решение уравнения

$$x(s) - \frac{1}{4}\int_0^{\frac{11}{6}} K(s,\tau)x(\tau)d\tau = \frac{11}{6}\left(s^2+4\right), \quad s \in [0; \frac{11}{6}]$$

$$x(s) = C_1 \sin\left(\sqrt{\frac{2(N+5)}{N(n-49)}}s\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{\frac{2(N+5)}{N(n-49)}}s\right) + (n-49)$$

C_1 и C_2 определим из следующей системы:

$$\begin{cases} C_2 + n - 49 = \frac{N+5}{N}(n-49) \\ C_1 \sin\left(\sqrt{\frac{2(N+5)}{N(n-49)}}\frac{N+5}{N}\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{\frac{2(N+5)}{N(n-49)}}\frac{N+5}{N}\right) + (n-49) + \\ \frac{N+5}{N}\left[C_1\sqrt{\frac{2(N+5)}{N(n-49)}}\cos\left(\sqrt{\frac{2(N+5)}{N(n-49)}}\frac{N+5}{N}\right) - C_2\sqrt{\frac{2(N+5)}{N(n-49)}}\sin\left(\sqrt{\frac{2(N+5)}{N(n-49)}}\frac{N+5}{N}\right)\right] = \\ = \frac{N+5^3}{N} + (n-49)\frac{N+5}{N} + 2\frac{N+5}{N} \end{cases}$$

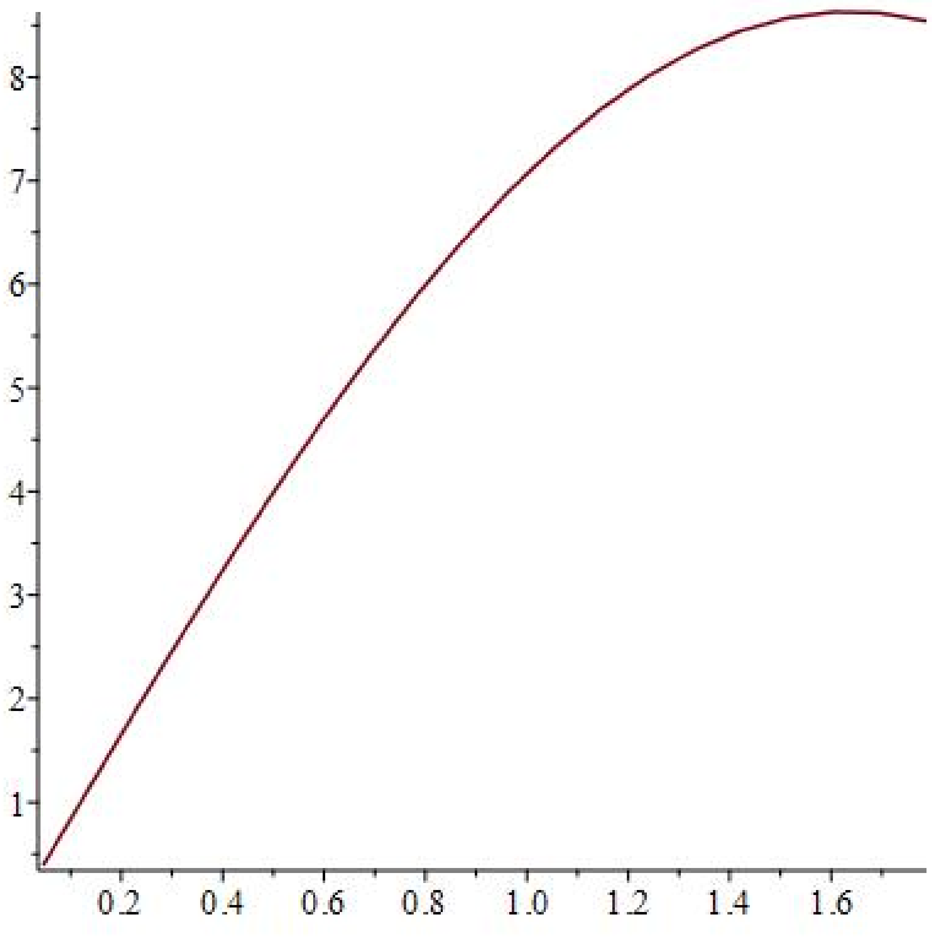
Получаем:

$$x(s) = C_1 \sin\left(\sqrt{\frac{33}{36}}s\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{\frac{33}{36}}s\right) + 4$$

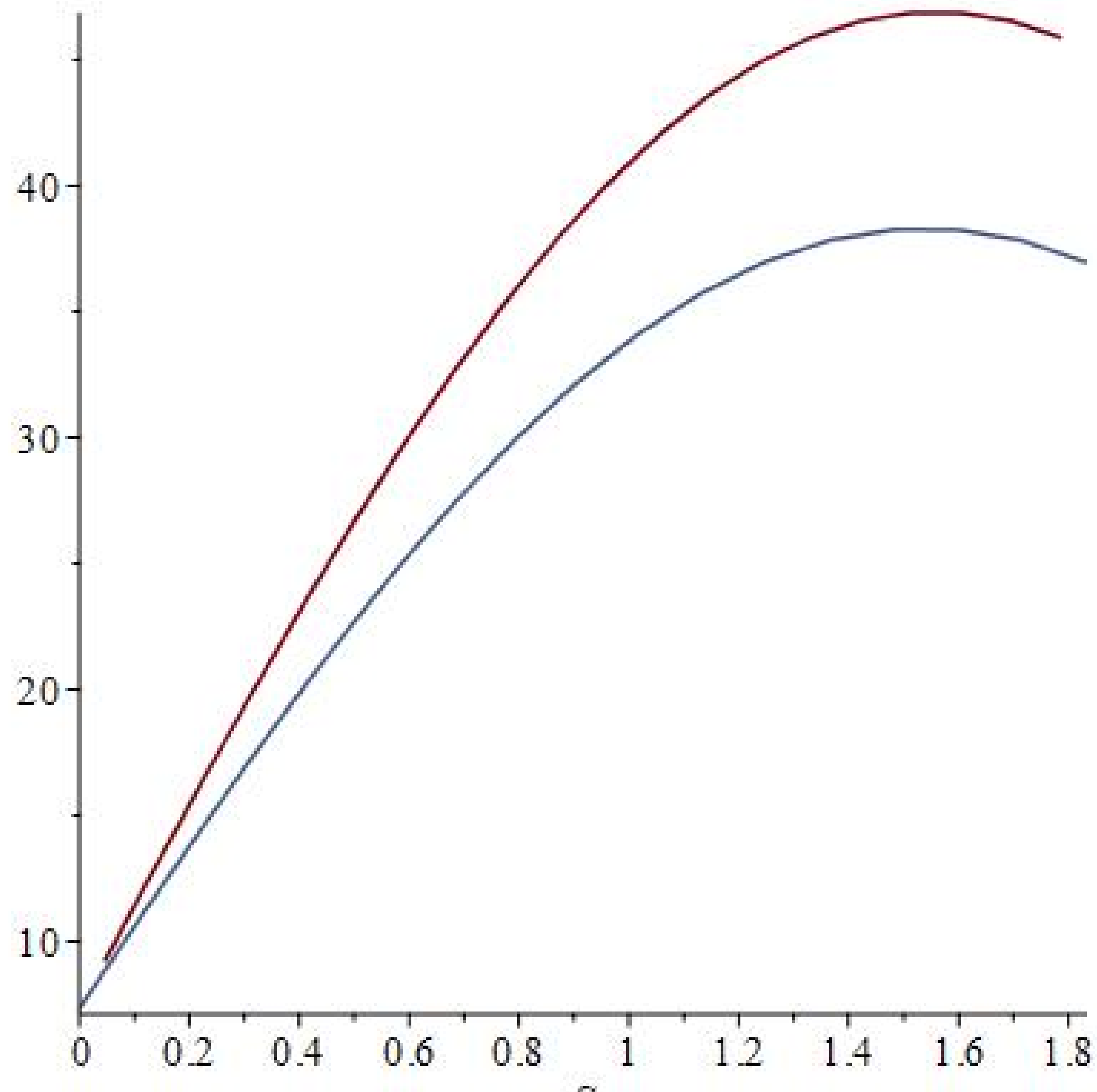
$$C_1 = -\frac{-570\,\sin\left(\frac{19\sqrt{399}}{294}\right)\sqrt{399} + 8820\,\cos\left(\frac{19\sqrt{399}}{294}\right) - 59721}{532\,\cos\left(\frac{19\sqrt{399}}{294}\right)\sqrt{399} + 8232\,\sin\left(\frac{19\sqrt{399}}{294}\right)}$$

$$C_2 = \frac{15}{14}$$

Построим график полученного аналитического решения:



А так же построим совмещенные графики полученных решений и найдем абсолютную погрешность(красным выделено приближенное значение, синим-аналитическое решение)



$$\Delta_{max} = 8.54122$$