Лабораторная работа № 8. Квадратурные формулы для вычисления интегралов

Вычисление интегралов Римана с помощью квадратурных формул

Пусть $f \in \underline{C}^m([a;b],\mathbb{R})$ – достаточно гладкая на отрезке $[a;b]$ функция и $A=\langle \tau_0,\tau_1,...,\tau_k \rangle$ – равномерная сетка отрезка $[a;b]$. Ниже, для задачи приближённого вычисления интеграла $\int\limits_a^b f(\tau)d\tau$ приведены различные квадратурные формулы, использующие равномерную сетку $A=\langle \tau_0,\tau_1,...,\tau_k \rangle$ с шагом $h=\dfrac{b-a}{k}$.

<u>Квадратурная формула прямоугольников</u>

$$\int\limits_a^b f(\tau)d\tau = h\cdot(f(\theta_1)+\ ...+f(\theta_k))+O(h)\ \textit{при}\ h\to 0,$$

где $\langle \theta_1=\dfrac{\tau_0+\tau_1}{2},...,\theta_k=\dfrac{\tau_{k-1}+\tau_k}{2}\rangle$ – центрально-равномерная сетка отрезка $\left[a;b\right]$.

<u>Квадратурная формула трапеций</u>

$$\int\limits_a^b f(\tau)d\tau = h\cdot(\frac{1}{2}f(\tau_0)+f(\tau_1)+...+f(\tau_{k-1})+\frac{1}{2}f(\tau_k))+O(h^2)\ \textit{при}\ h\to 0.$$

<u>Квадратурная формула парабол</u>

Если число k – чётное, то

$$\int\limits_a^b f(\tau)d\tau=\frac{h}{3}\cdot(f(\tau_0)+4f(\tau_1)+2f(\tau_2)+4f(\tau_3)+...+2f(\tau_{k-1})+4f(\tau_{k-1})+f(\tau_k))+O(h^3)\ \textit{при}\ h\to 0.$$

<u>*ЗАДАНИЕ*</u>

Для заданной на отрезке $[0;2]$ гладкой функции $f(x)=\dfrac{(a+52-n)x^4+(b-51+n)x^2+c}{(x+1)(x^2+1)}$ (см. *Таблицу 1, n* – номер группы) и равномерной сетки $A=\langle \tau_0,\tau_1,...,\tau_k \rangle$, где $k=20$, используя квадратурные формулы прямоугольников, трапеций и парабол, приближённо вычислить интеграл $\int\limits_0^2 f(\tau)d\tau$. Прокомментировать приближённые результаты, сравнивая их с аналитически вычисленным значением интеграла. ►

Таблица 1 (N – номер фамилии студента в журнале группы)

N	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**
a	2	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4	5	5	5	5	2	2	2	2	3	3
b	1	3	4	2	5	6	7	8	2	1	5	3	1	4	5	6	2	4	5	3	6	7
c	5	1	3	7	2	1	3	1	5	8	3	5	3	2	3	1	5	1	3	7	2	1