МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДАНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

«Московский государственный технический

университет имени Н.Э. Баумана»

(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ ФУНДАМАНТЕЛЬНЫЕ НАУКИ

КАФЕДРА
«ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА»

Направление: Математика и компьютерные науки

Дисциплина: Численные методы

Лабораторная работа №8

«Вычисление интегралов Римана с помощью квадратурных формул »

Группа: ФН11-53

Вариант №10

Студент: Юн А.А.

Преподаватель: Кутыркин В.А.

Оценка:

Москва 2019

Задание

Для заданной на отрезке $[0;2]$ гладкой функции

$f(x) = \dfrac{(a+52-n)x^4 + (b-51+n)x^2 + c}{(x+1)(x^2+1)}$, где $N-$номер студента в журнале, $n-$номер группы, и равномерной сетки $A = \langle \tau_0, \tau_1, .., \tau_k \rangle$, где $k = 20$,используя квадратурные формулы прямоугольников, трапеций и парабол, приближённо вычислить интеграл $\int\limits_0^2 f(\tau)d\tau$.

Прокомментировать приближённые результаты, сравнивая их с аналитически вычисленным значением интеграла. ►

Решение

$(N = 10,\ \ n = 53,\ \ a = 4,\ \ b = 1,\ \ c = 8)$

$$f(x) = \frac{(4+52-53)x^4 + (1-51+53)x^2 + 8}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{3x^4 + 3x^2 + 8}{(x+1)(x^2+1)}$$

На отрезке $[0;2]$ задана равномерная сетка $A = \langle \tau_0, \tau_1, .., \tau_k \rangle$, где $k = 20$, с шагом $\dfrac{b-a}{k} = 0.1$

Получаем:

$$A = \langle 0, \frac{1}{10}, \frac{1}{5}, \frac{3}{10}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{7}{10}, \frac{4}{5}, \frac{9}{10}, 1, \frac{11}{10}, \frac{6}{5}, \frac{13}{10}, \frac{7}{5}, \frac{3}{2}, \frac{8}{5}, \frac{17}{10}, \frac{9}{5}, \frac{19}{10} 2 \rangle$$

Квадратурная формула прямоугольников

$$\int_0^2 f(\tau)d\tau = h(f(\theta_1) + \ldots + f(\theta_20)) + O(h) \text{ при } h \to 0, \text{ где}$$

$\langle \theta_1 = \dfrac{\tau_0 + \tau_1}{2}, \ldots, \theta_{20} = \dfrac{\tau_{19} + \tau_{20}}{2} \rangle$-– центрально-равномерная сетка отрезка $[0; 2]$

Получаем:

$$\langle \frac{1}{20}, \frac{3}{20}, \frac{1}{4}, \frac{7}{20}, \frac{9}{20}, \frac{11}{20}, \frac{13}{20}, \frac{3}{4}, \frac{17}{20}, \frac{19}{20}, \frac{21}{20}, \frac{23}{20}, \frac{5}{4}, \frac{27}{20}, \frac{29}{20}, \frac{31}{20}, \frac{33}{20}, \frac{7}{4}, \frac{37}{20}, \frac{39}{20} \rangle$$

$$\int_0^2 f(\tau)d\tau = h(f(\theta_1) + \ldots + f(\theta_20)) + O(h) = 8.895814412$$

Квадратурная формула трапеций

$$\int_0^2 f(\tau)d\tau = h(\frac{1}{2}f(\tau_0) + f(\tau_1) + \ldots + f(\tau_{19}) + \frac{1}{2}f(\tau_{20})) + O(h^2) \text{ при}$$

$h \to 0$

Получаем:

$$\int_0^2 f(\tau)d\tau = h(\frac{1}{2}f(\tau_0) + f(\tau_1) + \ldots + f(\tau_{19}) + \frac{1}{2}f(\tau_{20})) + O(h^2) = 8.908388033$$

Квадратурная формула парабол

Если k- четное, то

$$\int_0^2 f(\tau)d\tau = \frac{h}{3}(f(\tau_0) + 4f(\tau_1) + 2f(\tau_2) + 4f(\tau_3) + \ldots + 2f(\tau_{18}) + 4f(\tau_{19}) + f(\tau_{20})) + O(h^3)$$

при $h \to 0$

Получаем:

$$\int_0^2 f(\tau)d\tau = \frac{h}{3}(f(\tau_0) + 4f(\tau_1) + 2f(\tau_2) + 4f(\tau_3) + \ldots + 2f(\tau_{18}) + 4f(\tau_{19}) + f(\tau_{20})) + O(h^3) = 8.900013256$$

Вычислим аналитически значение интеграла:

$$\int_0^2 \frac{3\tau^4 + 3\tau^2 + 8}{(\tau + 1)(\tau^2 + 1)}d\tau = \frac{3\tau^2}{2} - 3\tau + 2ln(\tau + 1) - 2ln(\tau^2 + 1) + 4arctg(\tau)\Big|_0^2 = 8.900005071$$

<u>Результат</u>

Вычислив приближенные результаты 3 способами, квадратурная форма парабол дала наибольшее приближение с аналитически вычисленным значением, а кадратурная форма прямоугольников дала наименьшее приближение с аналитически вычисленным значением.