МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

МГТУ им Н.Э.Баумана

Факультет ФН
Кафедра вычислительной математики и математической физики

Соколов Арсений Андреевич

Курсовая работа по дифференциальной геометрии

3 курс, группа ФН11-53Б
Вариант 8

Преподаватель
_____________ Е. В. Осипов
«___» _______ 2019 г.

Москва, 2019 г.

1 Римановы пространства

В механике и особенно в релятивистской физике тензоры широко применяют в n-мерных римановых пространствах, являющихся более общими, чем евклидовы. Дадим определение этих пространств, а затем покажем, как конструируются тензоры в них. Начнём с основополагающего понятия римановых пространств - элементарного многообразия.

1.1 Элементарное многообразие

Определение 1. Элементарным n-мерным многообразием называют такое множество M^n, каждой точке которого взаимнооднозначно поставлен в соответствие упорядоченный набор чисел $(X_1...X_n)$ из некоторой связной области $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^n$, т.е, задано биективное отображение $\varphi : M^n \longrightarrow \mathcal{D} \in \mathbb{R}^n$.

Координатами точки $\mathcal{M} \in M^n$ в системе координат $\mathcal{D}$ называют координаты $X^i \in \mathbb{R}^n$ ее образа $\varphi(\mathcal{M})$, изменяющиеся в области $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^n$. Если для множества M^n имеется другое биективное отображение $\varphi' : M^n \longrightarrow \mathcal{D} \in \mathbb{R}^n$, то координаты точки $\mathcal{M}$ в системах координат $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}'$, связаны соотношениями:

$$X'^i = X'^i(X^j), \quad i, j = 1 \dots n, \tag{1}$$

которые предполагают число раз дифференцируемыми и невырожденными, т.е. $\det\left(\frac{\partial X'^i}{\partial X^j}\right) \neq 0, \forall X^i \in \mathcal{D}$. Введём обозначения для якобиевых матриц преобразования, а также для их производных:

$$Q^i_{\ j} \equiv \left(\frac{\partial X'^i}{\partial X^j}\right), \quad P^i_{\ j} \equiv \left(\frac{\partial X^i}{\partial X'^j}\right), \quad P^i_{\ jk} \equiv \frac{\partial^2 X^i}{\partial X'^j \partial X'^k}, \tag{2}$$

и кроме того будем использовать обозначения для частных производных:

$$\frac{\partial f}{\partial X^i} \equiv f_{,i}, \quad \frac{\partial f}{\partial X'^i} \equiv f_{|i} = P^j_{\ i} f_{,i}. \tag{3}$$

Примером двумерного ($n = 2$) элементарного многообразия M^2 являются поверхности в $\mathbb{R}^3$, на которых определены криволинейные координаты X_1, X_2 и которые заданы тремя функциями:

$$x^i = x^i(X^1, X^2), \quad i = 1, 2, 3. \tag{4}$$

1.2 Касательное пространство

Определение 2. Кривой $\mathcal{L}$ в многообразии M^n называют отображение $\mathcal{L} : [\xi_1, \xi_2] \in \mathbb{R}^1 \longrightarrow M^n$, которое записывают в виде функции:

$$X^i = X^i(\xi) \quad \forall \xi \in [\xi_1, \xi_2], \quad X^i \in M^n. \tag{5}$$

Здесь X^i - координаты точки $\mathcal{M} \in M^n$, $[\xi_1, \xi_2]$ - некоторый отрезок из $\mathbb{R}^1$, $(\xi_1 < \xi_2)$, а функции (5) предполагаем непрерывно дифференцируемыми, по крайней мере, два раза.

Зафиксировав значение параметра $\xi \in [\xi_1, \xi_2]$, получим некоторую точку $\mathcal{M} \in \mathcal{L}$, в ней можно вычислить производные от функций (5):

$$a^i = \frac{\mathrm{d}X^i}{\mathrm{d}\xi}. \tag{6}$$

Определение 3. Упорядоченный набор $(a_1 \dots a_n)$ производных (6) называют компонентами касательного вектора a^i в точке $\mathcal{M}$ кривой $\mathcal{L}$ в M^n.

Если перейти к координатам X'^i той же точки $\mathcal{M} \in \mathcal{L}$, то согласно (1) получаем, что компоненты касательного вектора a'^i в этой системе координат будут иметь вид: $a'^i = \frac{\mathrm{d}X'^i}{\mathrm{d}\xi}$ и связаны с a^i тензорным законом:

$$a'^i = Q^i_{\ j} a^j. \tag{7}$$

Поскольку через фиксированную точку$\mathcal{M} \in M^n$ можно провести различные кривые $\mathcal{L}$, то, вообще говоря, в каждой точке $\mathcal{M}$ имеется множество упорядоченных наборов $(a_1 \dots A_n)$. Определим операции с этими наборами.

Пусть имеется две кривые $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$, заданные в виде функций $X^i_1(\xi), X^i_2(\xi)$, проходящие через точку $\mathcal{L}$, тогда можно построить два набора компонент касательных векторов $a^i_1 = \frac{\mathrm{d}X^i_1}{\mathrm{d}\xi}$ и $a^i_2 = \frac{\mathrm{d}X^i_2}{\mathrm{d}\xi}$.

Суммой компонент двух касательных векторов назовём набор

$$a^i_1 + a^i_2 = \frac{\mathrm{d}X^i_1 + X^i_2}{\mathrm{d}\xi}, \tag{8}$$

который представляет собой компоненты касательного вектора к кривой $(X^i_1 + X^i_2)(\xi)$ в данной точке $\mathcal{M}$.

Аналогично определяем произведение компонент ^{i} на вещественное число λ:

$$\lambda a^i = \lambda \frac{\mathrm{d}X^i}{\mathrm{d}\xi} = \frac{\mathrm{d}\lambda X^i}{\mathrm{d}\xi}. \tag{9}$$

Поскольку набор чисел $(a_1 ... a_n)$ является элементом пространства $\mathbb{R}$, то, выбрав базис e_i в этом пространстве, можно построить сам касательный вектор a в точке $\mathcal{M}$ кривой $\mathcal{L} : a = a^i e_i = a'^i e'_i$, где $e'_i = P^j_{\ i} e_j$ - новый базис.

Определение 4. Касательным пространством в данной точке $\mathcal{M}$ элементарного многообразия M^n называют множество касательных векторов $= a^i e_i$, построенных ко всевозможным кривым $\mathcal{L}$, проходящим через данную точку.

Теорема 1. Касательное пространство в любой точке $\mathcal{M} \in M^n$ является n-мерным линейным пространством, которое обозначают как $T_{\mathcal{M}} M^n$, а векторы e, образуют базис в нем.

1.3 Определение риманова пространства

Определение 5. Элементарное n-мерное многообразие M^n называют римановым пространством $\mathbb{V}^n$, если в каждой точке $\mathcal{M} \in M^n$ с координатами X^i задана матрица g_{ij} n-го порядка, которая является

1. симметричной,
2. невырожденной: $\det(\tilde{g}_{ij}) \neq 0, \quad \forall X^i$,
3. компоненты её являются непрерывно-дифференцируемыми функциями,
4. при переходе к другим координатам X'^l преобразуется по тензорному закону:

$$g_{ij} = Q^k_{\ i} Q^l_{\ j} g'_{kl}. \tag{10}$$

Двумерные поверхности в $\mathbb{R}^3$, очевидно, можно рассматривать как двумерные римановы пространства $\mathbb{V}^2$ с метрической матрицей $\tilde{g}_{IJ}$.

Расстояние в римановом пространстве вводят для бесконечно близких точек $\mathcal{M}$ и $\mathcal{M}'$, имеющих кординаты X^i и $X^i + dX^i$, и определяют его как

$$ds^2 = \varkappa g_{ij} dX^i dX^j, \tag{11}$$

где κ – знаковое число, которое выбирают так, чтобы форма (11) была положительной.

Риманово пространство называют собственно римановым, если метрическая матрица $g_{ij}, \forall X^i \in \mathcal{D}$ является положительно-определённой, в противном случае говорят о псевдоримановых пространствах.

2 Свойства римановых пространств

Рассмотрим некоторые свойства римановых пространств, которые понадобятся нам для введения тензора Эйнштейна, чтобы указать связь римановых пространств с общей теорией относительности.

2.1 Коэффициенты связанности в $\mathbb{V}^n$

Поскольку в каждой точке $\mathcal{M}(X^i) \in \mathbb{V}^n$ введена метрическая матрица $g_{ij(X^i)}$ компоненты которой, согласно п.3 определения 5, являются непрерывно дифференцируемыми функциями, то можно вычислить производные $\frac{\partial g_{ij}}{\partial X^k}$ и образовать из них следующие объекты:

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2}(g_{ik,j} + g_{jk,i} - g_{ij,k}). \tag{12}$$

Определение 6. Функции Γ_{ijk} определённые по формулам (12), называют коэффициентами связности первого рода в $\mathbb{V}^n$. Коэффициенты связности второго рода вводим с помощью обратной матрицы g^{ij}:

$$\Gamma^m_{ij} = g^{mp}\Gamma_{ijp}. \tag{13}$$

2.2 Определение аффинной связности

Определение 7. Элементарное n-мерное многообразие M^n называют пространством аффинной связности $\mathbb{L}^n$, если в каждой точке $\mathcal{M} \in M^n$ с координатами X^i задана система функций $\overset{*}{\Gamma}{}^m_{ij}$, которые

1. являются непрерывно-дифференцируемыми функциями,
2. при переходе к другим координатам X'^i преобразуются следующим образом:

$$\overset{*}{\Gamma}{}'^m_{ij} = P^l_{\ i} P^q_{\ j} Q^m_{\ \ r} \overset{*}{\Gamma}{}^r_{lq} + Q^m_{\ \ r} P^r_{\ ij}\,. \tag{14}$$

Функции $\overset{*}{\Gamma}{}^m_{ij}$, заданные в $\mathbb{L}^n$, называют коэффициентами аффинной связности (или просто аффинной связностью).

2.3 Тензоры в элементарном многообразии

Построим в каждой точке $\mathcal{M} \in M^n$ множество наборов касательных векторов:

$$(a_1 b^{(1)} a_2 b^{(2)} \dots a_n b^{(n)} \equiv (a_i b^{(i)}),$$

где $a_i \in T_{\mathcal{M}} M^n$, $b^{(i)} T^*_{\mathcal{M}} M^n$, и введём на этом множестве операции сложения и умножения на вещественное число s:

$$(a_i b^{(i)}) + (a_i c^{(i)}) = (a_i (b^{(i)} + c^{(i)})), \tag{15}$$

$$(a_i b^{(i)}) + (d_i b^{(i)}) = ((a_i + d_i)) b^{(i)}), \tag{16}$$

$$s(a_i b^{(i)}) = ((s a_i) b^{(i)}) = (a_i (s b^{(i)})) \tag{17}$$

2.4 Ковариантное дифференцирование тензоров в $\mathbb{V}^n$

Рассмотрим в $\mathbb{V}^n$ произвольное поле тензора k-го ранга:

$$^k\Omega\left(X^i\right) = \Omega^{i_1 \dots i_p}{}_{j_1 \dots j_q} \mathbf{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i_p} \otimes \mathbf{e}^{j_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}^{j_q}, \quad p + q = k, \tag{18}$$

причём его компоненты $\Omega^{i_1 \dots i_p}{}_{j_1 \dots j_q}$ будем считать непрерывно дифференцируемыми функциями координат X^i точки $\mathcal{M} \in \mathbb{V}^n$

Определение 8. Ковариантной производной от компонент тензора $\Omega^{i_1\ldots i_p}{}_{j_1\ldots j_q}$ k-го ранга ${}^k\Omega$, определённого в $\mathbb{V}^n$, называют следующий объект:

$$\nabla_i \Omega^{i_1\ldots i_p}{}_{j_1\ldots j_q} = \frac{\partial}{\partial X^i}\Omega^{i_1\ldots i_p}{}_{j_1\ldots j_q} + \sum_{s=1}^{p} \Gamma^{i_s}_{mi}\Omega^{i_1\ldots i_p = m\ldots i_p}{}_{j_1\ldots j_q} + \ldots$$
$$\ldots - \sum_{s=1}^{q} \Gamma^{m}_{j_s i}\Omega^{i_1\ldots i_p}{}_{j_1\ldots j_q = m\ldots i_q}, p+q=k. \quad (19)$$