

#Найдем эволюту трактрисы:

$$x_0(t) := a \cdot \left( \cos(t) + \ln \left( \tan \left( \frac{t}{2} \right) \right) \right);$$

$$y_0(t) := \sin(t);$$

$$0 < t < \pi$$

$$x_0 := t \rightarrow {}^*(a, \cos(t) + \ln(\tan({}^*(t, {}^{(2, -1)})))$$

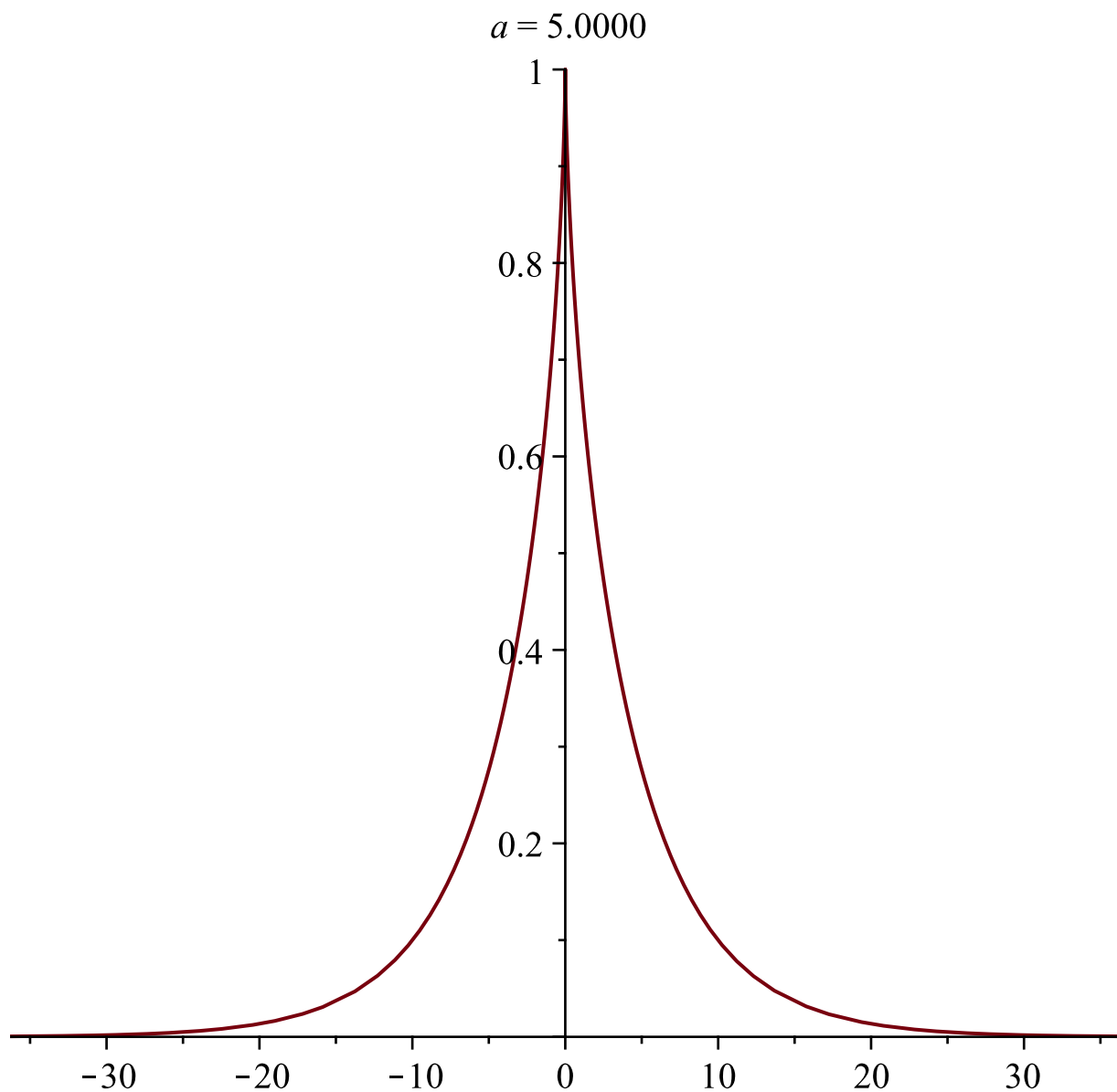
$$y_0 := t \rightarrow \sin(t)$$

$$0 < t < \pi$$

(1)

with(plots) :

plots[animate](plot, [[x\_0(t), y\_0(t), t=0..Pi]], a=0..5)



####Если линия задана параметрически, то ее эволюта имеет уравнение:

$$X\_ev0(t) := x(t) - \frac{d}{dt}y(t) \cdot \frac{\left(\frac{d}{dt}x(t)\right)^2 + \left(\frac{d}{dt}y(t)\right)^2}{\frac{d}{dt}x(t) \cdot \frac{d^2}{dt^2}y(t) - \frac{d}{dt}y(t) \cdot \frac{d^2}{dt^2}x(t)}$$

$$X\_ev0 := t \rightarrow x(t) - \frac{\left(\frac{d}{dt}y(t)\right) \left(\left(\frac{d}{dt}x(t)\right)^2 + \left(\frac{d}{dt}y(t)\right)^2\right)}{\left(\frac{d}{dt}x(t)\right) \left(\frac{d^2}{dt^2}y(t)\right) - \left(\frac{d}{dt}y(t)\right) \left(\frac{d^2}{dt^2}x(t)\right)} \quad (2)$$

$$Y\_ev0(t) := y(t) + \frac{d}{dt}x(t) \cdot \frac{\left(\frac{d}{dt}x(t)\right)^2 + \left(\frac{d}{dt}y(t)\right)^2}{\frac{d}{dt}x(t) \cdot \frac{d^2}{dt^2}y(t) - \frac{d}{dt}y(t) \cdot \frac{d^2}{dt^2}x(t)}$$

$$Y\_ev0 := t \rightarrow y(t) + \frac{\left(\frac{d}{dt}x(t)\right) \left(\left(\frac{d}{dt}x(t)\right)^2 + \left(\frac{d}{dt}y(t)\right)^2\right)}{\left(\frac{d}{dt}x(t)\right) \left(\frac{d^2}{dt^2}y(t)\right) - \left(\frac{d}{dt}y(t)\right) \left(\frac{d^2}{dt^2}x(t)\right)} \quad (3)$$

$$X\_ev(t) := \text{simplify}(X\_ev0(t))$$

$$X\_ev := t \rightarrow \text{simplify}(X\_ev0(t)) \quad (4)$$

$$Y\_ev(t) := \text{simplify}(Y\_ev0(t))$$

$$Y\_ev := t \rightarrow \text{simplify}(Y\_ev0(t)) \quad (5)$$

$$X\_ev(t);$$

$$Y\_ev(t)$$

$$\frac{-\cos(t)^3 a^2 + \ln\left(\frac{1 - \cos(t)}{\sin(t)}\right) a^2 + \cos(t)^3 + \cos(t) a^2 - \cos(t)}{a}$$

$$\frac{1 + (a^2 - 1) \cos(t)^4}{\sin(t)} \quad (6)$$

$$\text{sys} := \{X\_ev(t), Y\_ev(t)\}$$

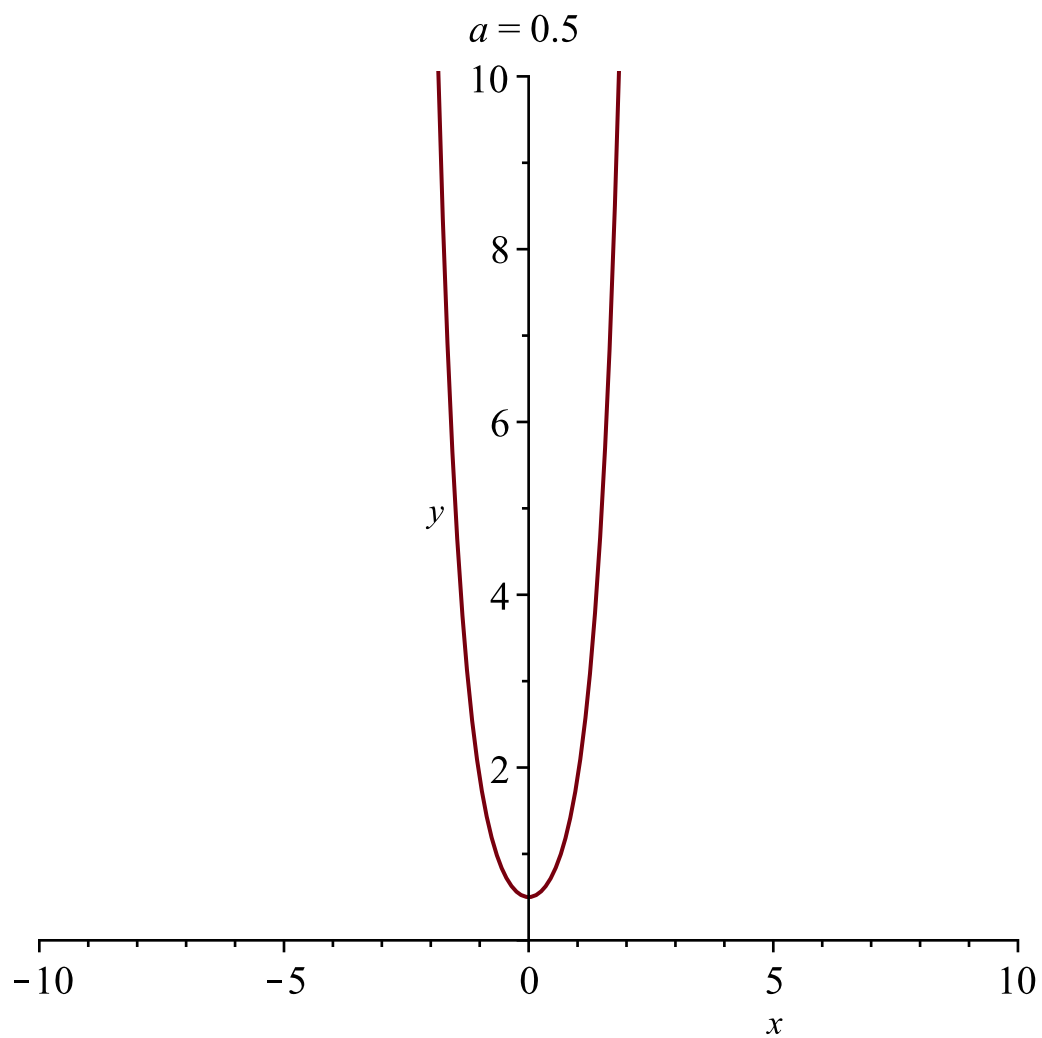
$$\text{sys} := \left\{ \frac{1 + (a^2 - 1) \cos(t)^4}{\sin(t)}, \right.$$

$$\left. \frac{-\cos(t)^3 a^2 + \ln\left(\frac{1 - \cos(t)}{\sin(t)}\right) a^2 + \cos(t)^3 + \cos(t) a^2 - \cos(t)}{a} \right\} \quad (7)$$

$$\text{evoluta}(x) := \text{eliminate}(\text{sys}, t)$$

$$a \cosh\left(\frac{x}{a}\right) \quad (8)$$

$$\text{plots}[\text{animate}](\text{plot}, [\text{evoluta}(x), x = -10..10, y = 0..10], a = 0.5..5)$$



*#Получили, что эволютой трактрисы является цепная линия*

*# Ее уравнение:*

$$y(x) = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$y(x) = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$$

**(9)**

#Вращая полученную эволюту вокруг оси  $OX$  получаем поверхность вращения, называемую катеноидом

#Катеноид можно задать параметрически:

$$\#x\_kat(u, v) := a \cdot \cosh\left(\frac{v}{a}\right) \cdot \cos(u);$$

$$\#y\_kat(u, v) := a \cdot \cosh\left(\frac{v}{a}\right) \cdot \sin(u);$$

$$\#z\_kat(u) := u;$$

$$\#-Pi \leq u < Pi;$$

$$\#v \in \mathbb{R}$$

$$x\_kat := (u, v) \rightarrow \cosh(u) \cos(v) \quad (10)$$

$$y\_kat := (u, v) \rightarrow \cosh(u) \sin(v) \quad (10)$$

$$z\_kat := u \rightarrow u \quad (10)$$

$$0 \leq v < 2\pi \quad (10)$$

$$u \in \text{real} \quad (10)$$

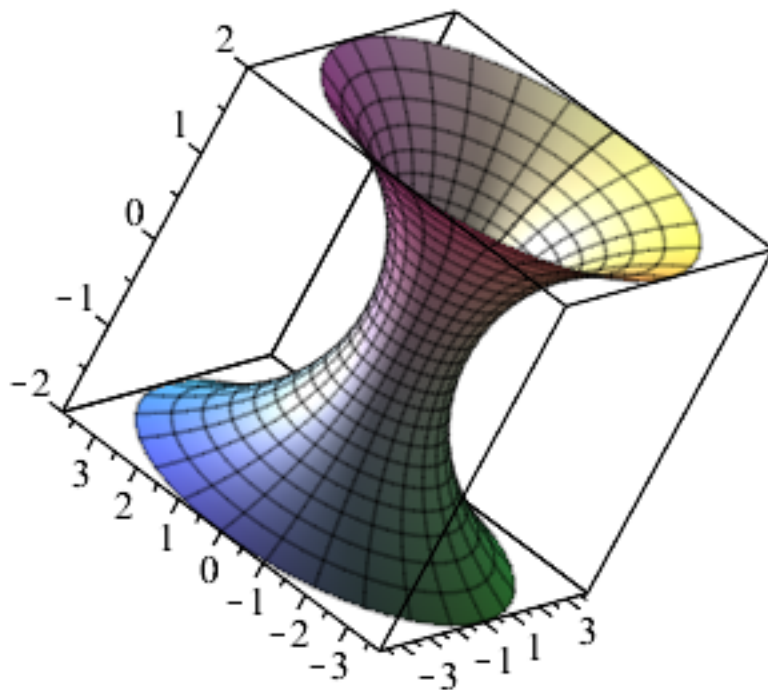
$$a := 2 \quad (11)$$

$$catenoid := \left[ u, a \cdot \cosh\left(\frac{u}{a}\right) * \cos(v), a \cdot \cosh\left(\frac{u}{a}\right) * \sin(v) \right];$$

$$catenoid := \left[ u, a \cosh\left(\frac{u}{a}\right) \cos(v), a \cosh\left(\frac{u}{a}\right) \sin(v) \right] \quad (12)$$

$$plots[animate](plot3d, [catenoid, u=-2..2, v=0..2 * Pi], a=1..3);$$

$$a = 1.$$



```

#Найдем Гауссову, среднюю и скалярные кривизны
with(plots) :
dp := proc(X, Y) #dot product == скалярное произведение
X[1]*Y[1]+X[2]*Y[2]+X[3]*Y[3];
end:

```

```

nrm := proc(X) #norm == норма
sqrt(dp(X, X) );
end:

```

```

xp := proc(X, Y) #cross product == векторное произведение
local a, b, c;
a := X[2]*Y[3]-X[3]*Y[2];
b := X[3]*Y[1]-X[1]*Y[3];
c := X[1]*Y[2]-X[2]*Y[1];
[a, b, c];
end:

```

```

#####
# Вычислим метрики  $E = x_u \cdot x_u$ ,  $F = x_u \cdot x_v$ ,  $G = x_v \cdot x_v$ 
#####
EFG := proc(X)
local Xu, Xv, E, F, G;
Xu := [diff(X[1], u), diff(X[2], u), diff(X[3], u)];
Xv := [diff(X[1], v), diff(X[2], v), diff(X[3], v)];
E := dp(Xu, Xu);
F := dp(Xu, Xv);
G := dp(Xv, Xv);
simplify([E, F, G]);
end:

```

```

#####
#Найдем единичный вектор нормали к поверхности
#####
UN := proc(X)
local Xu, Xv, Z, s;
Xu := [diff(X[1], u), diff(X[2], u), diff(X[3], u)];
Xv := [diff(X[1], v), diff(X[2], v), diff(X[3], v)];
Z := xp(Xu, Xv);
s := nrm(Z);
simplify([Z[1]/s, Z[2]/s, Z[3]/s], sqrt, symbolic);
end:

```

```

#####
#Найдем соответствующие частные производные
#####
lmn := proc(X)
local Xu, Xv, Xuu, Xuv, Xvv, U, l, m, n;
Xu := [diff(X[1], u), diff(X[2], u), diff(X[3], u)];
Xv := [diff(X[1], v), diff(X[2], v), diff(X[3], v)];

```

```

Xuu := [diff(Xu[1], u), diff(Xu[2], u), diff(Xu[3], u)];
Xuv := [diff(Xu[1], v), diff(Xu[2], v), diff(Xu[3], v)];
Xvv := [diff(Xv[1], v), diff(Xv[2], v), diff(Xv[3], v)];
U := UN(X);
l := dp(U, Xuu);
m := dp(U, Xuv);
n := dp(U, Xvv);
simplify([l, m, n]);
end;

```

```

#####
# Итак, найдем Гауссову кривизну:
#####

```

```

GK := proc(X)
local E, F, G, l, m, n, S, T;
S := EFG(X);
T := lmn(X);
E := S[1];
F := S[2];
G := S[3];
l := T[1];
m := T[2];
n := T[3];
simplify((l*n - m^2) / (E*G - F^2));
end;

```

```

#####
# A также среднюю кривизну:
#####

```

```

MK := proc(X)
local E, F, G, l, m, n, S, T;
S := EFG(X);
T := lmn(X);
E := S[1];
F := S[2];
G := S[3];
l := T[1];
m := T[2];
n := T[3];
simplify((G*l + E*n - 2*F*m) / (2*E*G - 2*F^2));
end;

```

#Итого:  
 #Средняя кривизна  
 МК(catenoid)

$$0 \quad (13)$$

#Гауссова кривизна  
 GK(catenoid)

$$-\frac{1}{\cosh\left(\frac{u}{a}\right)^4 a^2} \quad (14)$$

#####

# Скалярная кривизна равняется удвоенной Гауссовой кривизне, то есть:

#####

SK :=**proc**(X)  
 simplify(2· GK(X) )  
**end**;  
 SK(catenoid)

$$-\frac{2}{\cosh\left(\frac{u}{a}\right)^4 a^2} \quad (15)$$