

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

МГТУ им Н.Э.Баумана

Факультет ФН

Кафедра вычислительной математики и математической
физики

Соколов Арсений Андреевич

Курсовая работа по дифференциальной
геометрии

3 курс, группа ФН11-53Б

Вариант 8

Преподаватель

_____ Е. В. Осипов

«___» _____ 2019 г.

Москва, 2019 г.

Содержание

1	Римановы пространства	3
1.1	Элементарное многообразие	3
1.2	Касательное пространство	4
1.3	Определение риманова пространства	5
2	Свойства римановых пространств	6
2.1	Коэффициенты связности в \mathbb{V}^n	6
2.2	Определение аффинной связности	7
2.3	Тензоры в элементарном многообразии	7
2.4	Определение тензора в римановом пространстве	8
2.5	Ковариантное дифференцирование тензоров в \mathbb{V}^n	8
2.6	Ковариантное дифференцирование тензоров в \mathbb{L}^n	9
2.7	Риманово пространство с аффинной связностью	9
2.8	Тензор Римана-Кристоффеля	10
2.9	Тензор Риччи	11
2.10	Тензор Эйнштейна	12
	Список используемой литературы	13

1 Римановы пространства

В механике и особенно в релятивистской физике тензоры широко применяют в n -мерных римановых пространствах, являющихся более общими, чем евклидовы. Дадим определение этих пространств, а затем покажем, как конструируются тензоры в них. Начнём с основополагающего понятия римановых пространств - элементарного многообразия.

1.1 Элементарное многообразие

Определение 1. Элементарным n -мерным многообразием называют такое множество M^n , каждой точке которого взаимнооднозначно поставлен в соответствие упорядоченный набор чисел $(X_1 \dots X_n)$ из некоторой связной области $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^n$, т.е. задано биективное отображение $\varphi : M^n \longrightarrow \mathcal{D} \in \mathbb{R}^n$.

Координатами точки $\mathcal{M} \in M^n$ в системе координат \mathcal{D} называют координаты $X^i \in \mathbb{R}^n$ ее образа $\varphi(\mathcal{M})$, изменяющиеся в области $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^n$. Если для множества M^n имеется другое биективное отображение $\varphi' : M^n \longrightarrow \mathcal{D}' \in \mathbb{R}^n$, то координаты точки \mathcal{M} в системах координат \mathcal{D} и \mathcal{D}' , связаны соотношениями:

$$X'^i = X'^i(X^j), \quad i, j = 1 \dots n, \quad (1)$$

которые предполагают достаточное число раз дифференцируемыми и невырожденными, т.е. $\det\left(\frac{\partial X'^i}{\partial X^j}\right) \neq 0, \forall X^i \in \mathcal{D}$. Введём обозначения для якобиевых матриц преобразования, а также для их производных:

$$Q^i_j \equiv \left(\frac{\partial X'^i}{\partial X^j}\right), \quad P^i_j \equiv \left(\frac{\partial X^i}{\partial X'^j}\right), \quad P^i_{jk} \equiv \frac{\partial^2 X^i}{\partial X'^j \partial X'^k}, \quad (2)$$

и кроме того будем использовать обозначения для частных производных:

$$\frac{\partial f}{\partial X^i} \equiv f_{,i}, \quad \frac{\partial f}{\partial X'^i} \equiv f_{|i} = P^j_i f_{,j}. \quad (3)$$

Примером двумерного ($n = 2$) элементарного многообразия M^2 являются поверхности в \mathbb{R}^3 , на которых определены криволинейные координаты.

наты X_1, X_2 и которые заданы тремя функциями:

$$x^i = x^i(X^1, X^2), \quad i = 1, 2, 3. \quad (4)$$

1.2 Касательное пространство

Определение 2. Кривой \mathcal{L} в многообразии M^n называют отображение $\mathcal{L} : [\xi_1, \xi_2] \in \mathbb{R}^1 \longrightarrow M^n$, которое записывают в виде функции:

$$X^i = X^i(\xi) \quad \forall \xi \in [\xi_1, \xi_2], \quad X^i \in M^n. \quad (5)$$

Здесь X^i - координаты точки $\mathcal{M} \in M^n$, $[\xi_1, \xi_2]$ - некоторый отрезок из \mathbb{R}^1 , ($\xi_1 < \xi_2$), а функции (5) предполагаем непрерывно дифференцируемыми, по крайней мере, два раза.

Зафиксировав значение параметра $\xi \in [\xi_1, \xi_2]$, получим некоторую точку $\mathcal{M} \in \mathcal{L}$, в ней можно вычислить производные от функций (5):

$$a^i = \frac{dX^i}{d\xi}. \quad (6)$$

Определение 3. Упорядоченный набор $(a_1 \dots a_n)$ производных (6) называют компонентами касательного вектора a^i в точке \mathcal{M} кривой \mathcal{L} в M^n .

Если перейти к координатам X'^i той же точки $\mathcal{M} \in \mathcal{L}$, то согласно (1) получаем, что компоненты касательного вектора a'^i в этой системе координат будут иметь вид: $a'^i = \frac{dX'^i}{d\xi}$ и связаны с a^i тензорным законом:

$$a'^i = Q^i_j a^j. \quad (7)$$

Поскольку через фиксированную точку $\mathcal{M} \in M^n$ можно провести различные кривые \mathcal{L} , то, вообще говоря, в каждой точке \mathcal{M} имеется множество упорядоченных наборов $(a_1 \dots a_n)$. Определим операции с этими наборами.

Пусть имеется две кривые \mathcal{L}_1 и \mathcal{L}_2 , заданные в виде функций $X_1^i(\xi)$, $X_2^i(\xi)$, проходящие через точку \mathcal{L} , тогда можно построить два набора компонент касательных векторов $a_1^i = \frac{dX_1^i}{d\xi}$ и $a_2^i = \frac{dX_2^i}{d\xi}$.

Суммой компонент двух касательных векторов назовём набор

$$a_1^i + a_2^i = \frac{dX_1^i + X_2^i}{d\xi}, \quad (8)$$

который представляет собой компоненты касательного вектора к кривой $(X_1^i + X_2^i)(\xi)$ в данной точке \mathcal{M} .

Аналогично определяем произведение компонент i на вещественное число λ :

$$\lambda a^i = \lambda \frac{dX^i}{d\xi} = \frac{d\lambda X^i}{d\xi}. \quad (9)$$

Поскольку набор чисел $(a_1 \dots a_n)$ является элементом пространства \mathbb{R} , то, выбрав базис e_i в этом пространстве, можно построить сам касательный вектор a в точке \mathcal{M} кривой $\mathcal{L} : a = a^i e_i = a'^i e'_i$, где $e'_i = P_i^j e_j$ - новый базис.

Определение 4. Касательным пространством в данной точке \mathcal{M} элементарного многообразия M^n называют множество касательных векторов $= a^i e_i$, построенных ко всевозможным кривым \mathcal{L} , проходящим через данную точку.

Теорема 1. Касательное пространство в любой точке $\mathcal{M} \in M^n$ является n -мерным линейным пространством, которое обозначают как $T_{\mathcal{M}}M^n$, а векторы e , образуют базис в нем.

1.3 Определение риманова пространства

Определение 5. Элементарное n -мерное многообразие M^n называют римановым пространством \mathbb{V}^n , если в каждой точке $\mathcal{M} \in M^n$ с координатами X^i задана матрица g_{ij} n -го порядка, которая является

1. симметричной,
2. невырожденной: $\det(\tilde{g}_{ij}) \neq 0, \quad \forall X^i$,
3. компоненты её являются непрерывно-дифференцируемыми функциями,
4. при переходе к другим координатам X'^l преобразуется по тензорному закону:

$$g_{ij} = Q_i^k Q_j^l g'_{kl}. \quad (10)$$

Двумерные поверхности в \mathbb{R}^3 , очевидно, можно рассматривать как двумерные римановы пространства \mathbb{V}^2 с метрической матрицей \tilde{g}_{IJ} .

Расстояние в римановом пространстве вводят для бесконечно близких точек \mathcal{M} и \mathcal{M}' , имеющих координаты X^i и $X^i + dX^i$, и определяют его как

$$ds^2 = \kappa g_{ij} dX^i dX^j, \quad (11)$$

где κ – знаковое число, которое выбирают так, чтобы форма (11) была положительной.

Риманово пространство называют собственно римановым, если метрическая матрица g_{ij} , $\forall X^i \in \mathcal{D}$ является положительно-определённой, в противном случае говорят о псевдоримановых пространствах.

2 Свойства римановых пространств

Рассмотрим некоторые свойства римановых пространств, которые понадобятся нам для введения тензора Эйнштейна, чтобы указать связь римановых пространств с общей теорией относительности.

2.1 Коэффициенты связности в \mathbb{V}^n

Поскольку в каждой точке $\mathcal{M}(X^i) \in \mathbb{V}^n$ введена метрическая матрица $g_{ij}(X^i)$ компоненты которой, согласно п.3 определения 5, являются непрерывно дифференцируемыми функциями, то можно вычислить производные $\frac{\partial g_{ij}}{\partial X^k}$ и образовать из них следующие объекты:

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2}(g_{ik,j} + g_{jk,i} - g_{ij,k}). \quad (12)$$

Определение 6. Функции Γ_{ijk} определённые по формулам (12), называют коэффициентами связности первого рода в \mathbb{V}^n . Коэффициенты связности второго рода вводим с помощью обратной матрицы g^{ij} :

$$\Gamma_{ij}^m = g^{mp} \Gamma_{ijp}. \quad (13)$$

2.2 Определение аффинной связности

Определение 7. Элементарное n -мерное многообразие M^n называют пространством аффинной связности \mathbb{L}^n , если в каждой точке $\mathcal{M} \in M^n$ с координатами X^i задана система функций Γ_{ij}^m , которые

1. являются непрерывно-дифференцируемыми функциями,
2. при переходе к другим координатам X'^i преобразуются следующим образом:

$$\Gamma_{ij}^{\prime m} = P_i^l P_j^q Q_r^m \Gamma_{lq}^r + Q_r^m P_r^i P_j^q. \quad (14)$$

Функции Γ_{ij}^m , заданные в \mathbb{L}^n , называют коэффициентами аффинной связности (или просто аффинной связностью).

2.3 Тензоры в элементарном многообразии

Построим в каждой точке $\mathcal{M} \in M^n$ множество наборов касательных векторов:

$$(a_1 b^{(1)} a_2 b^{(2)} \dots a_n b^{(n)}) \equiv (a_i b^{(i)}), \quad (15)$$

где $a_i \in T_{\mathcal{M}} M^n$, $b^{(i)} \in T_{\mathcal{M}}^* M^n$, и введём на этом множестве операции сложения и умножения на вещественное число s :

$$(a_i b^{(i)}) + (a_i c^{(i)}) = (a_i (b^{(i)} + c^{(i)})), \quad (16)$$

$$(a_i b^{(i)}) + (d_i b^{(i)}) = ((a_i + d_i) b^{(i)}), \quad (17)$$

$$s(a_i b^{(i)}) = ((s a_i) b^{(i)}) = (a_i (s b^{(i)})). \quad (18)$$

Определение 8. Тензорным касательным пространством $\mathcal{T}_n^{(pq)}(T_{\mathcal{M}} M^n)$ типа pq , где $p + q = 2$, в точке \mathcal{M} элементарного многообразия M^n называют тензорное произведение касательного пространства $T_{\mathcal{M}} M^n$ на себя:

$$\mathcal{T}_n^{(pq)}(T_{\mathcal{M}} M^n) = T_{\mathcal{M}} M^n \otimes T_{\mathcal{M}} M^n \quad \forall \mathcal{M} \in M^n, \quad p + q = 2, \quad (19)$$

где тензорное произведение вводится как фактор-пространство n -ой степени декартова квадрата

$$T_{\mathcal{M}} M^n \otimes T_{\mathcal{M}} M^n = [(T_{\mathcal{M}} M^n \times T_{\mathcal{M}} M^n)^n] \quad (20)$$

Базисные диады в $\mathcal{T}_n^{(pq)}(T_{\mathcal{M}}M^n)$ введём как

$$e_j \otimes e_k = [e_i(\delta_j^i e_k)], \quad (21)$$

где $[\]$ – классы эквивалентности соответствующих наборов касательных векторов. Очевидно, что если рассматриваемое многообразие M^2 является поверхностью $\Sigma \in \mathbb{R}^3$, то базисные диады совпадают с соответствующими диадами $\rho_I \otimes \rho_K$.

Определение 9. Тензором второго ранга $A(\mathcal{M})$ типа (pq) в точке $\mathcal{M} \in M^n$ называют элемент тензорного произведения касательного пространства $\mathcal{T}_n^{(pq)}(T_{\mathcal{M}}M^n)$, $p + q = 2$.

Тензор k -го ранга ${}^k A(\mathcal{M})$ введём как

$${}^k A = A_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_q}, \quad p + q = k. \quad (22)$$

2.4 Определение тензора в римановом пространстве

Если в многообразии M^n введена метрическая матрица g_{ij} то оно становится римановым пространством \mathbb{V} , а касательное пространство в каждой точке $\mathcal{M} \in \mathbb{V}^n$ – евклидовым (или псевдоевклидовым) $T_{\mathcal{M}}\mathbb{V}^n$. Тогда используя соглашение о совпадении пространств $T_{\mathcal{M}}^*\mathbb{V}^n$ и $T_{\mathcal{M}}\mathbb{V}^n$, можно говорить о тензорном касательном пространстве $\mathcal{T}_n^{(k)}(T_{\mathcal{M}}\mathbb{V}^n)$, заданном на римановом пространстве \mathbb{V}^n .

2.5 Ковариантное дифференцирование тензоров в

\mathbb{V}^n

Рассмотрим в \mathbb{V}^n произвольное поле тензора k -го ранга:

$${}^k \Omega(X^i) = \Omega^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} \mathbf{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i_p} \otimes \mathbf{e}^{j_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}^{j_q}, \quad p + q = k, \quad (23)$$

причём его компоненты $\Omega^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$ будем считать непрерывно дифференцируемыми функциями координат X^i точки $\mathcal{M} \in \mathbb{V}^n$

Определение 10. Ковариантной производной от компонент тензора $\Omega^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$ k -го ранга ${}^k\Omega$, определённого в \mathbb{V}^n , называют следующий объект:

$$\begin{aligned} \nabla_i \Omega^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} &= \frac{\partial}{\partial X^i} \Omega^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} + \sum_{s=1}^p \Gamma_{mi}^{i_s} \Omega^{i_1 \dots i_p=m \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} + \dots \\ &\dots - \sum_{s=1}^q \Gamma_{js}^m \Omega^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q=m \dots i_q}, p+q=k. \end{aligned} \quad (24)$$

2.6 Ковариантное дифференцирование тензоров в

\mathbb{L}^n

Наличие связности Γ_{ij}^m в \mathbb{L}^n означает, что в этом пространстве определена операция ковариантного дифференцирования.

Определение 11. Ковариантной производной от компонент тензора ${}^k A \in \mathcal{T}_n^{pq}(T_M \mathbb{L}^n)$, $k = p + q$, (или иначе ковариантной производной относительно связности Γ_{ij}^m) называют следующий объект:

$$\nabla_i^* A^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} + \sum_{s=1}^p \Gamma_{mi}^{i_s} A^{i_1 \dots i_s=m \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} - \sum_{s=1}^q \Gamma_{i,j_s}^m A^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_s=m \dots j_q}. \quad (25)$$

Теорема 2. Ковариантная производная от компонент тензора k -го ранга является компонентами тензора $(k+1)$ -го ранга $\nabla \otimes {}^k A$ в \mathbb{L}^n , называемого градиентом тензора:

$$\nabla \otimes {}^k A = A^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} e^i \otimes e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_q}, \quad p+q=k. \quad (26)$$

2.7 Риманово пространство с аффинной связностью

В римановом пространстве \mathbb{V}^n у нас была определена метрика g_{ij} (ей соответствовала вполне определённая связность Γ_{ij}^m). Можно однако построить такое пространство, в котором будет одновременно определена и метрика g_{ij} , и некоторая «самостоятельная» связность Γ_{ij}^{*m} , для которой уже не имеют места соотношения (12).

Определение 12. Элементарное n -мерное многообразие M^n называют римановым пространством аффинной связностью \mathbb{W}^n , если в каждой

точке $\mathcal{M} \in M^n$ с координатами x^i заданы две системы функций g_{ij} и Γ_{ij}^* , вообще говоря, не связанные никакими соотношениями и удовлетворяющие свойствам 1-4 из определения 5 и 1,2 из определения 7 соответственно.

Поскольку в \mathbb{W}^n определена метрическая матрица g_{ij} , то можно образовать из неё символы Γ_{ij}^m по формуле (??)

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2} g^{mk} (g_{ik,j} + g_{jk,i} - g_{ij,k}). \quad (27)$$

Символы Γ_{ij}^m уже не являются связностью: $\Gamma_{ij}^* \neq \Gamma_{ij}^m$.

2.8 Тензор Римана-Кристоффеля

Рассмотрим в точке $\mathcal{M} \in \mathbb{L}^n$ произвольный вектор $b = b^k e_k$ из $T_{\mathbb{L}^n}$ и вычислим его ковариантную производную относительно связности Γ_{ij}^* :

$$\nabla_i^* b^k = \frac{\partial b^k}{\partial X^i} + \Gamma_{si}^* b^s. \quad (28)$$

Вычислим вторую ковариантную производную:

$$\begin{aligned} \nabla_j^* \nabla_i^* b^k &= \frac{\partial}{\partial X^j} + \Gamma_{mj}^* \nabla_i^* b^m - \Gamma_{ij}^* \nabla_m^* b^k = \frac{\partial^2 b^k}{\partial X^j \partial X^i} + \frac{\partial \Gamma_{si}^*}{\partial X^j} b^s + \Gamma_{si}^* \frac{\partial b^s}{\partial X^j} + \\ &+ \Gamma_{mj}^* \left(\frac{\partial b^m}{\partial X^i} + \Gamma_{mi}^* b^s \right) - \Gamma_{ij}^* \left(\frac{\partial b^k}{\partial X^m} + \Gamma_{sm}^* b^s \right). \end{aligned} \quad (29)$$

Поменяем теперь индексы i и j и образуем разность:

$$\nabla_j^* \nabla_i^* b^k - \nabla_i^* \nabla_j^* b^k = \left(\frac{\partial \Gamma_{si}^*}{\partial X^j} - \frac{\partial \Gamma_{sj}^*}{\partial X^i} + \Gamma_{mj}^* \Gamma_{si}^* - \Gamma_{mi}^* \Gamma_{sj}^* \right) b^s - (\Gamma_{ij}^* - \Gamma_{ji}^*) \nabla_m^* b^k. \quad (30)$$

Коэффициенты, стоящие в первой скобке, обозначим следующим образом:

$$R_{jis}^*{}^k = \Gamma_{si,j}^* - \Gamma_{sj,i}^* + \Gamma_{si}^* \Gamma_{mj}^* - \Gamma_{sj}^* \Gamma_{mi}^*. \quad (31)$$

Здесь, как и ранее, $\Gamma_{si,j}^* = \partial \Gamma_{si}^* / \partial X^j$.

Теорема 3. Система коэффициентов $R_{jis}^*{}^k$, образованная по формуле (31), представляет собой компоненты тензора $\overset{4}{R}^*$ четвёртого ранга из

пространства $\mathcal{T}_n^{(31)}(T_M \mathbb{L}^n)$:

$${}^4_* R = R_{jis}^* e^j \otimes e^i \otimes e^s \otimes e_k \quad (32)$$

Определение 13. Тензор (32) называют тензором кривизны пространства \mathbb{L}^n относительно связности Γ_{ij}^* (или тензором Римана-Кристоффеля).

2.9 Тензор Риччи

В пространстве \mathbb{W}^n из тензора Римана-Кристоффеля можно образовать несколько тензоров второго ранга. Свёртка транспонированного тензора Римана-Кристоффеля ${}^4 R$ с метрическим тензором образует тензор второго ранга:

$$\mathcal{R} = {}^4_* R^{(2314)} \cdot E, \quad (33)$$

называемый тензором Риччи. Компоненты этого тензора имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= R_{ji}^* e^j \otimes R_{i_1 i_2 i_3 i_4}^* e^{i_2} \otimes e^{i_3} \otimes e^{i_1} \otimes e^{i_4} \cdot e^{i_4} \cdot e^k \otimes e_k = \\ &= R_{i_1 i_2 i_3 i_4}^* \delta_k^{i_1} g^{i_4 k} e^{i_2} \otimes e^{i_3} = R_{kji}^* e^j \otimes e^i, \end{aligned} \quad (34)$$

то есть

$$R_{ji}^* = R_{kji}^* = R_{nji}^* \delta_k^n. \quad (35)$$

Подставляя в (35) выражение (31) для компонент тензора Римана-Кристоффеля, получаем:

$$R_{ji}^* = \frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial X^k} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^k}{\partial X^j} + \Gamma_{ij}^* \Gamma_{nk}^* - \Gamma_{ik}^* \Gamma_{nj}^*. \quad (36)$$

Аналогичным образом можно ввести тензор Риччи относительно символов Γ_{ij}^k :

$$R_{ji} = R_{kji}^k = R_{nji}^k \delta_k^n, \quad (37)$$

и

$$R_{ji} = \Gamma_{ij,k}^k - \Gamma_{ik,j}^k + \Gamma_{ij}^m \Gamma_{mk}^k - \Gamma_{ik}^m \Gamma_{mj}^k. \quad (38)$$

2.10 Тензор Эйнштейна

Тензоры Эйнштейна $\overset{*}{G}$ и G образуются из тензоров Риччи $\overset{*}{\mathcal{R}}$ и \mathcal{R} следующим образом:

$$\overset{*}{G} = \overset{*}{\mathcal{R}} - \frac{1}{2}\overset{*}{\mathcal{R}}E, \quad G = \mathcal{R} - \frac{1}{2}\mathcal{R}E, \quad (39)$$

где $\overset{*}{\mathcal{R}} = \overset{*}{R} \cdot \cdot E$ и $\mathcal{R} = R \cdot \cdot E$ – свертки тензоров Риччи с метрическим тензором.

Тензор Эйнштейна играет важную роль в общей теории относительности (см., например, [1], [2], [3]).

Список литературы

- [1] Петров А.З. Пространства Эйнштейна. М.: Физматгиз, 1961, 464 с.
- [2] Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Наука, 1967, 664 с.
- [3] Шипов Г.И. Теория физического вакуума. НТ-Центр, 1993, 362 с.