МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

МГТУ им Н.Э.Баумана

Факультет ФН
Кафедра вычислительной математики и математической физики

Соколов Арсений Андреевич

Домашнее задание №2 по математической статистике

3 курс, группа ФН11-53Б
Вариант 9

Преподаватель
____________ Т. В. Облакова
«___» _______ 2019 г.

Москва, 2019 г.

1 Моделирование выборки из заданного закона распределения

Смоделируем выборку из дискретного закона распределения. Получим ряд распределения, принимая во внимание, что наша случайная величина подчинена биномиальному закону распределения с плотностью:

$$B(n, p) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k (1-p)^{n-k},$$

$p = 0.7$ – вероятность успеха в одном испытании;
$n = 140$ – объем выборки;
$k = 8$ – число испытаний.

```
> k <- 8
> p1 <- 0.7
> n <- 140
>
> distr_series_table <- as.data.frame(rbind(c(0:k),
+             dbinom(c(0:k), k, p1)),
+             row.names = c("Random Value", "Probability"))
> colnames(distr_series_table) <- c(0:k)
> sum(distr_series_table[2,])
[1] 1
```

$$\begin{bmatrix} Random\,Value & 0.000 & 1.000 & 2.000 & 3.000 & 4.000 & 5.000 & 6.000 & 7.000 & 8.000 \\ Probability & 0.000 & 0.001 & 0.010 & 0.047 & 0.136 & 0.254 & 0.296 & 0.198 & 0.058 \end{bmatrix}$$

Причём:

$$\sum_{i=0}^{k} P_i = \sum_{i=0}^{8} P_i = 1$$

Для моделирования такой дискретной случайной величины разобьём отрезок $[0; 1]$ на $k+1 = 8+1 = 9$ последовательных отрезков $\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_k$, длины которых равны соответствующим вероятностям $P_0, P_1, \dots, P_k$.

Тогда длины отрезков будут равными: $\Delta_0 = P_0 - 0, \qquad \Delta_1 = (P_0+P_1) - P_0 = P_1 \qquad \dots \qquad \Delta_n = 1 - (P_0 + P_1 + \dots + P_{n-1}) = P_n$

Видно, что длина частичного интервала с индексом i равна вероятности с тем же индексом. Длина $\Delta_i = P_i$.

Процедура получения конца $i-$го частичного интервала называется кумулятивным суммированием.

Далее, генерируем случайную величину R, равномерно распределенную на интервале $[0; 1]$. При попадании случайной величины r_i в частичный интервал Δ_i случайная величина X принимает значение x_i с вероятностью P_i согласно теореме:
Теорема. Если каждому случайному числу $r_i (0 \leq r_i < 1)$, которое попало в интервал Δ_i, поставить в соответствие возможное значение x_i, то разыгрываемая случайная величина будет иметь заданный закон распределения.

Добавим к нашей таблице распределения третью строчку, соответствующую координатам концов интервалов разбиения отрезка $[0; 1]$:

```
> distr_series_table <- rbind(distr_series_table,
+                             cumsum(dbinom(c(0:k), k, p1)))
> row.names(distr_series_table)[3] <- "Delta"
```

Имеем:

$$\begin{bmatrix} RandomValue & 0.000 & 1.000 & 2.000 & 3.000 & 4.000 & 5.000 & 6.000 & 7.000 & 8.000 \\ Probability & 0.000 & 0.001 & 0.010 & 0.047 & 0.136 & 0.254 & 0.296 & 0.198 & 0.058 \\ Delta & 0.000 & 0.001 & 0.011 & 0.058 & 0.194 & 0.448 & 0.745 & 0.942 & 1.000 \end{bmatrix}$$

Сгенерируем программным путём $n = 140$ случайных чисел:

```
> set.seed(1337)
> rand_unif <- runif(n, 0, 1)
> head(rand_unif)
[1] 0.576321 0.564742 0.073990 0.453865 0.373279 0.331317
```

При установке параметра, такого же, как в первой строчке вышеприведённого кода, случайные величины будут сгенерированы на любом компьютере в точности равными тем, что получены в данной работе.

Случайное число $r_i = 0.57632155$ принадлежит шестому частичному интервалу, поэтому разыгрываемая случайная величина приняла возможное значение $x_6 = 6$. Аналогично получим остальные возможные значения дискретной случайной величины X:

```
>y <- rand_unif #tmp var for decreasing code
> emp_sample <- ifelse(y < distr_series_table[3,2], 0,
+  ifelse(y < distr_series_table[3,3] & y >= distr_series_table[3,3-1], 1,
+  ifelse(y < distr_series_table[3,4] & y >= distr_series_table[3,4-1], 2,
+  ifelse(y < distr_series_table[3,5] & y >= distr_series_table[3,5-1], 3,
+  ifelse(y < distr_series_table[3,6] & y >= distr_series_table[3,6-1], 4,
+  ifelse(y < distr_series_table[3,7] & y >= distr_series_table[3,7-1], 5,
+  ifelse(y < distr_series_table[3,8] & y >= distr_series_table[3,8-1], 6,
+  ifelse(y < distr_series_table[3,9] & y >= distr_series_table[3,9-1], 7,
+  ifelse(y < distr_series_table[3,10] & y >= distr_series_table[3,10-1],
+                                                            8,NA))))))))
```

Итого, последовательность смоделированных возможных значений дискретной случайной величины X такова:

```
> emp_sample
[1] 6 6 4 6 5 5 8 5 5 4 8 8 7 4 8 3 8 7 5 5 7
[22] 6 3 4 6 8 7 7 6 8 7 4 6 5 7 6 8 7 5 5 6 7
[43] 6 6 5 4 5 5 3 5 8 6 6 5 7 5 4 6 6 6 7 5 7
[64] 7 4 4 8 6 5 6 5 7 5 4 6 5 4 5 6 6 8 7 3 4
[85] 6 7 6 6 5 8 7 6 6 6 6 5 6 5 5 8 6 6 7 7 5
[106] 4 4 4 5 6 7 4 2 4 6 4 6 6 7 6 4 7 6 6 7 4
[127] 6 7 7 6 7 6 7 5 8 6 5 5 4 5
```

2 Статистический ряд. Эмпирическая функция распределения

Запишем группированный статистический ряд:

```
> stat_series <- as.data.frame(rbind(c(0:k),
+        c(0, hist_tmp$counts),
+       (c(0, hist_tmp$counts) / n) ),
+       row.names = c("Simulated values",
+                     "Frequencies",
+                     "Relative frequencies"))
> colnames(stat_series) <- c(0:k)
```

Имеем:

$$\begin{bmatrix} Simulated\,values & 0.000 & 1.000 & 2.000 & 3.000 & 4.000 & 5.000 & 6.000 & 7.000 & 8.000 \\ Frequencies & 0.000 & 0.000 & 1.000 & 4.000 & 21.000 & 31.000 & 42.000 & 27.000 & 14.000 \\ Relative\,frequencies & 0.000 & 0.000 & 0.007 & 0.029 & 0.150 & 0.221 & 0.300 & 0.193 & 0.100 \end{bmatrix}$$

Здесь $Simulated\,values$ – уникальные значения из выборки; $Frequencies$ – частота значения, то есть количество исходов, в которых случайная величина приняла данное значение; $Relative\ frequencies$ – относительная частота данного значения по отношению к общему объёму выборки. Очевидно, что:

$$\sum_{j=0}^{k} Freq_j = n,$$

$$\sum_{j=0}^{k} Rel\_freq_j = 1$$

Совокупность пар (Sim_val_i, Rel_freq_i), $i = (\overline{0,k})$ называют иногда *эмпирическим законом распределения*, а вышеприведённую таблицу – *таблицей частот*.

Эмпирической функцией распределения, соответствующей выборке $X = x_1, \ldots, x_n$ называется функция:

$$F_n^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(x_i < x) = \frac{1}{n}\nu_n(x),$$

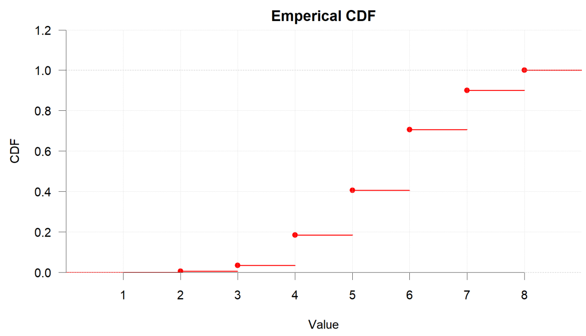
$I(A)$ – индикатор множества A,
$\nu_n(x)$ – число выборочных значений, не превосходящих x.

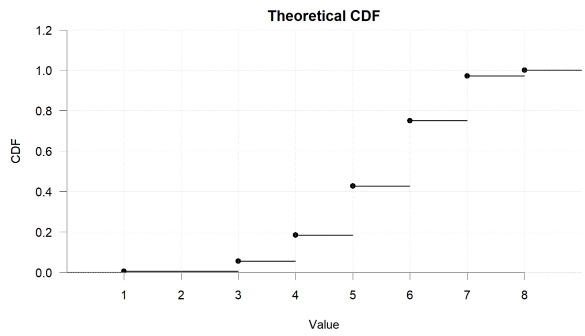
Эмпирическая функция распределения $F_n^*(x)$ служит статистическим аналогом (оценкой) неизвестной функции распределения $F(x)$, которую называют при этом *теоретической*.

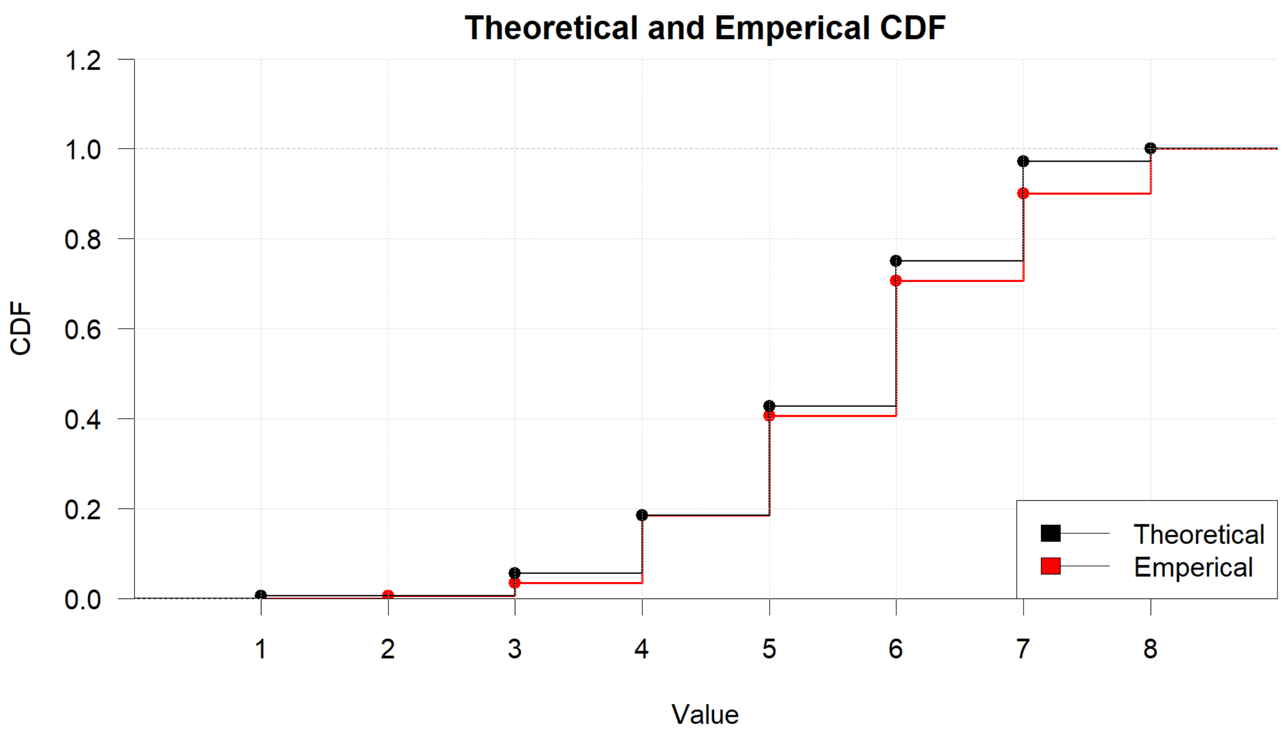
Построим эмпирический и теоретические функции распределения:

```
> library(fitdistrplus)
>
> theor_distr <- rbinom(n, k, p1)
>
> png(filename = "../img/theor_ecdf.png",
+     width = 1920, height = 1080,
+     pointsize = 24, res = 96 * 1.25)
> par(mar = c(4, 4, 2, 1), xaxs = "i", yaxs = "i")
> plot(ecdf(x = theor_distr),
+      col = "black", lwd = 3, verticals = F, axes = F,
+      xlim = c(0,k+1), ylim = c(0,1.2),
+      xlab = "Value", ylab = "CDF", main = "Theoretical CDF")
> axis(1, c(1:k))
> axis(2, seq(0.0, 1.2, 0.2), las = 1)
> grid(nx = k+1, ny = 1.2 / 0.2)
> dev.off()
RStudioGD
2
>
>
> png(filename = "../img/emp_ecdf.png",
+     width = 1920, height = 1080,
+     pointsize = 24, res = 96 * 1.25)
> par(mar = c(4, 4, 2, 1), xaxs = "i", yaxs = "i")
> plot(ecdf(emp_sample),
+      col = "red", lwd = 3, verticals = F, axes = F,
```

```
+      xlim = c(0,k+1), ylim = c(0,1.2),
+      xlab = "Value", ylab = "CDF", main = "Emperical CDF")
> axis(1, c(1:k))
> axis(2, seq(0.0, 1.2, 0.2), las = 1)
> grid(nx = k+1, ny = 1.2 / 0.2)
> dev.off()
RStudioGD
2
>
> png(filename = "../img/emp_and_theor_ecdf.png",
+     width = 1920, height = 1080,
+     pointsize = 24, res = 96 * 1.25)
> par(mar = c(4, 4, 2, 1), xaxs = "i", yaxs = "i")
> plot(ecdf(emp_sample),
+      col = "red", lwd = 3, verticals = T, axes = F,
+      xlim = c(0,k+1), ylim = c(0,1.2),
+      xlab = "Value", ylab = "CDF",
+      main = "Theoretical and Emperical CDF")
> plot(ecdf(theor_distr),
+      col = "black", lwd = 2, verticals = T, add = T)
> axis(1, c(1:k))
> axis(2, seq(0.0, 1.2, 0.2), las = 1)
> grid(nx = k+1, ny = 1.2 / 0.2)
> legend("bottomright", c("Theoretical", "Emperical"),
+        lty=c(1,1),
+        fill=c("black", "red"))
> dev.off()
RStudioGD
2
```







3 Статистика Колмогорова. Меры

Вычислим статистику Колмогорова для данного распределения по формуле:

$$D_n = \sup_x |F_n(x) - F(x)|$$

```
> kolm_stat <-
+    max(abs((cumsum(as.numeric(stat_series[3,]))
+    - pbinom(c(0:k), k, p1))))
> kolm_stat
[1] 0.04235199
```

Определим две меры для нашей выборки: стандартное отклонение и среднее:

```
> theor_distr_mean <- mean(theor_distr)
> theor_distr_mean
[1] 5.464286
>
> emp_sample_mean <- mean(emp_sample)
> emp_sample_mean
[1] 5.757143
>
>
> theor_distr_sd <- sd(theor_distr)
> theor_distr_sd
[1] 1.32171
>
> emp_sample_sd <- sd(emp_sample)
> emp_sample_sd
[1] 1.318771
```