

Лабораторная работа №6.

Интерполяционные сплайны 2-ой степени единичного дефекта

Определение 1

Пусть $A = \langle a = \tau_0, \tau_1, \dots, \tau_k = b \rangle$ – сетка отрезка $[a; b]$. Интерполяционным сплайном 2-ой степени дефекта 1 для A -сеточной функции $\mathbf{y} = \hat{A}(f) = [y_0, y_1, \dots, y_k] \in \mathbb{R}^{|A|}(A)$, называется функция $\varphi \in C^1([a, b], \mathbb{R})$, для которой на отрезке $[\tau_{i-1}; \tau_i]$, где $i = \overline{0, k}$, для $\tau \in [\tau_{i-1}; \tau_i]$ справедливо равенство $\varphi(\tau) = a_i + b_i(\tau - \tau_{i-1}) + c_i(\tau - \tau_{i-1})^2$, где $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}$, причем:

- а) этот сплайн на отрезке $[\tau_0; \tau_1]$ линеен ($c_1 = 0$);
- б) этот сплайн непрерывен и его значения в узлах сетки совпадают со значениями интерполируемой функции $\mathbf{y} = \hat{A}(f) = [y_0, y_1, \dots, y_k] \in \mathbb{R}^{|A|}(A)$;
- с) первая производная этого сплайна также непрерывна. ►

Если сетка $A = \langle a = \tau_0, \tau_1, \dots, \tau_k = b \rangle$ является равномерной и её шаг $h = \frac{b-a}{k} = stp(A)$, то из определения 1 для $i = \overline{1, k}$ на отрезке $[\tau_{i-1}; \tau_i]$ находятся значения коэффициентов полинома $p_i(\tau) = a_i + b_i(\tau - \tau_{i-1}) + c_i(\tau - \tau_{i-1})^2$:

$$\begin{aligned} 1) \quad & a_1 = y_0, \quad b_1 = \frac{y_1 - y_0}{h}, \quad c_1 = 0 \\ 2) \quad & a_2 = y_1, \quad b_2 = b_1 + 2c_1h, \quad c_2 = \frac{y_2 - y_1 - (b_1 + 2c_1h)h}{h^2} \\ & \dots \\ i) \quad & a_i = y_{i-1}, \quad b_i = b_{i-1} + 2c_{i-1}h, \quad c_i = \frac{y_i - y_{i-1} - (b_{i-1} + 2c_{i-1}h)h}{h^2}, \quad i = \overline{2, k} \end{aligned}$$

Задание

На отрезке $[0; 1]$ задана равномерная сетка $A = \langle \tau_0, \tau_1, \dots, \tau_k \rangle$, где $k = 40$, с шагом $h = \frac{b-a}{k} = 0,025 = stp(A)$ и определена функция $f(\tau) = 2 \sin(\pi\tau) \sqrt{55-n+N\tau} \sqrt{25-N}$, где n – номер группы и N – номер студента в журнале группы. Для A -сеточной функции $\mathbf{y} = \hat{A}(f) = [y_0, y_1, \dots, y_k] \in \mathbb{R}^{|A|}(A)$, где $y_i = f(\tau_i)$ для $i = \overline{0, k}$, решить задачу A -интерполяции сеточной функции \mathbf{y} с помощью сплайна $spl_2(A; \mathbf{y})$ 2-ой степени дефекта 1. Затем сравнить в узлах интерполяции равномерной сетки $A = \langle \tau_0, \tau_1, \dots, \tau_k \rangle$ отрезка $[0; 1]$ значения производных от функции $f(\tau)$ и сплайна $spl_2(A; \mathbf{y})$, т.е. значения функций $\frac{df}{d\tau}$ и $\frac{d spl_2(A; \mathbf{y})}{d\tau}$. Результаты проиллюстрировать графически. ►