> *Найти фундаментальное решение $E(t)$ указанного дифференциального оператора*

$L = \left(a_1 \cdot \frac{d}{dt} + b_1\right) \cdot \left(a_2 \cdot \frac{d}{dt} + b_2\right) \cdot \left(a_3 \cdot \frac{d}{dt} + b_3\right)$

С помощью свертки найти решение обыкновенного дифференциального уравнения

$Lu(t) = f(t)\eta\left(t - t_0\right)$

описывающего поведение линейной динамической системы при включении в *момент времени* t_0 *внешнего воздействия, характеризуемого функцией* $f(t)$

. *Построить совмещенные графики функций* $E(t)$, $f(t)\eta\left(t - t_0\right)$, $u(t)$

$a_1 := 1:$

$b_1 := 1:$

$a_2 := 1:$

$b_2 := 0:$

$a_3 := 1:$

$b_3 := 0:$

$f(t) := e^{-2 \cdot t}:$

$t_0 := 1:$

Получаем

$L = \left(1 \cdot \frac{d}{dt} + 1\right) \cdot \left(1 \cdot \frac{d}{dt} + 0\right) \cdot \left(1 \cdot \frac{d}{dt} + 0\right) = \left(1 \cdot \frac{d}{dt} + 1\right) \cdot \left(1 \cdot \frac{d}{dt}\right) \cdot \left(1 \cdot \frac{d}{dt}\right) = \frac{d^3}{dt^3} + \frac{d^2}{dt^2}$

1 *способ*

$E(t) = y(t)\eta(t)$, *где* $y(t)$ — *частное решение однородного дифференциального уравнения* $y''' + y'' = 0$ с *начальными условиями* $y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(0) = 1$ (*так как коэффициент перед высшей производной равен* 1)

Характеристическое уравнение $\lambda^3 + \lambda^2 = 0$

его корни $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,\,3} = -1$

Тогда получаем

$y(t) = C1 \cdot e^{-t} + C2 \cdot e^0 + C3 \cdot t:$

или

$y(t) := C1 \cdot e^{-t} + C2 + C3 \cdot t:$

Находим коэффициенты $C1$, $C2$ и $C3$ *из начальных условий*

$y(0)$

$$C1 + C2 \tag{1}$$

$\left.\frac{d}{dt} y(t)\right|_{t=0}$

$$-C1 + C3 \tag{2}$$

$\left.\frac{d^2}{dt^2} y(t)\right|_{t=0}$

$$C1 \tag{3}$$

$solve(\{C1 + C2 = 0, -C1 + C3 = 0, C1 = 1\}, \{C1, C2, C3\})$

$$\{C1 = 1, C2 = -1, C3 = 1\} \tag{4}$$

$C1 := 1:$
$C2 := -1:$
$C3 := 1:$
$y(t)$

$$e^{-t} - 1 + t \tag{5}$$

Следовательно, получаем фундаментальное решение дифференциального оператора
$E(t) := y(t) \cdot \mathrm{Heaviside}(t)$

$$E := t \to y(t)\ \mathrm{Heaviside}(t) \tag{6}$$

$E(t)$

$$\left(e^{-t} - 1 + t\right) \mathrm{Heaviside}(t) \tag{7}$$

2 способ
Решаем операционным методом уравнение

$$\frac{d^3}{dt^3}E + \frac{d^2}{dt^2}E = \delta(t)$$

Обозначим изображение искомой функции $E(t)$ *через* $E1(p)$, $E(t) \doteqdot E1(p)$

Для изображений получаем
$p^3 E1(p) + p^2 E1(p) = 1$
Отсюда

$$E1(p) = \frac{1}{p^3 + p^2} = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p}$$

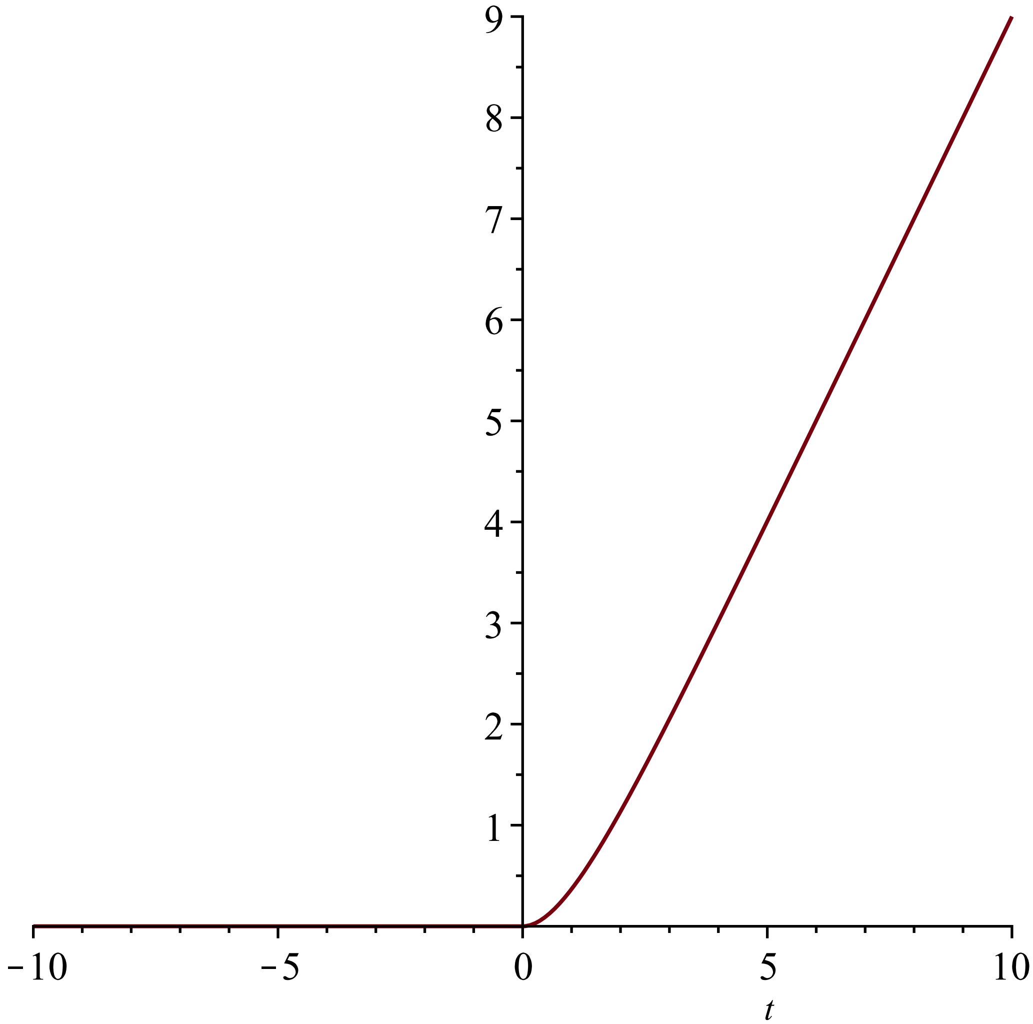
Восстановим оригинал
$E(t) := \mathrm{Heaviside}(t) \cdot \left(t - 1 + e^{-t}\right):$

Ответы сошлись!
Построим график $E(t)$
фцнкция Хевисайда имеет вид :

$$\mathrm{Heaviside}(t) := \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} :$$

Получаем следующий график фундаментального решения
$plot(E(t))$

$u(t)$



С помощью свертки найдем решение обыкновенного дифференциального уравнения
$Lu(t) = f(t)\eta(t - t_0)$

Формула свертки
$u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(t-\tau) f(\tau) \eta(\tau - t_0)\, \mathrm{d}\tau$

Получаем
$u(t) := \int_{-\infty}^{+\infty} E(t-\tau) \cdot f(\tau) \cdot \mathrm{Heaviside}(\tau - t_0)\, \mathrm{d}\tau$

$$u := t \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} E(t-\tau)\, f(\tau)\, \mathrm{Heaviside}(\tau - t_0)\, \mathrm{d}\tau \tag{8}$$

$u(t)$

$$\begin{cases} 0 & t < 1 \\ \dfrac{\left(2\,e^{2t-2}\,t - 5\,e^{2t-2} + 4\,e^{-1+t} - 1\right)\,e^{-2t}}{4} & 1 \le t \end{cases} \tag{9}$$

Проверка склейки **:**

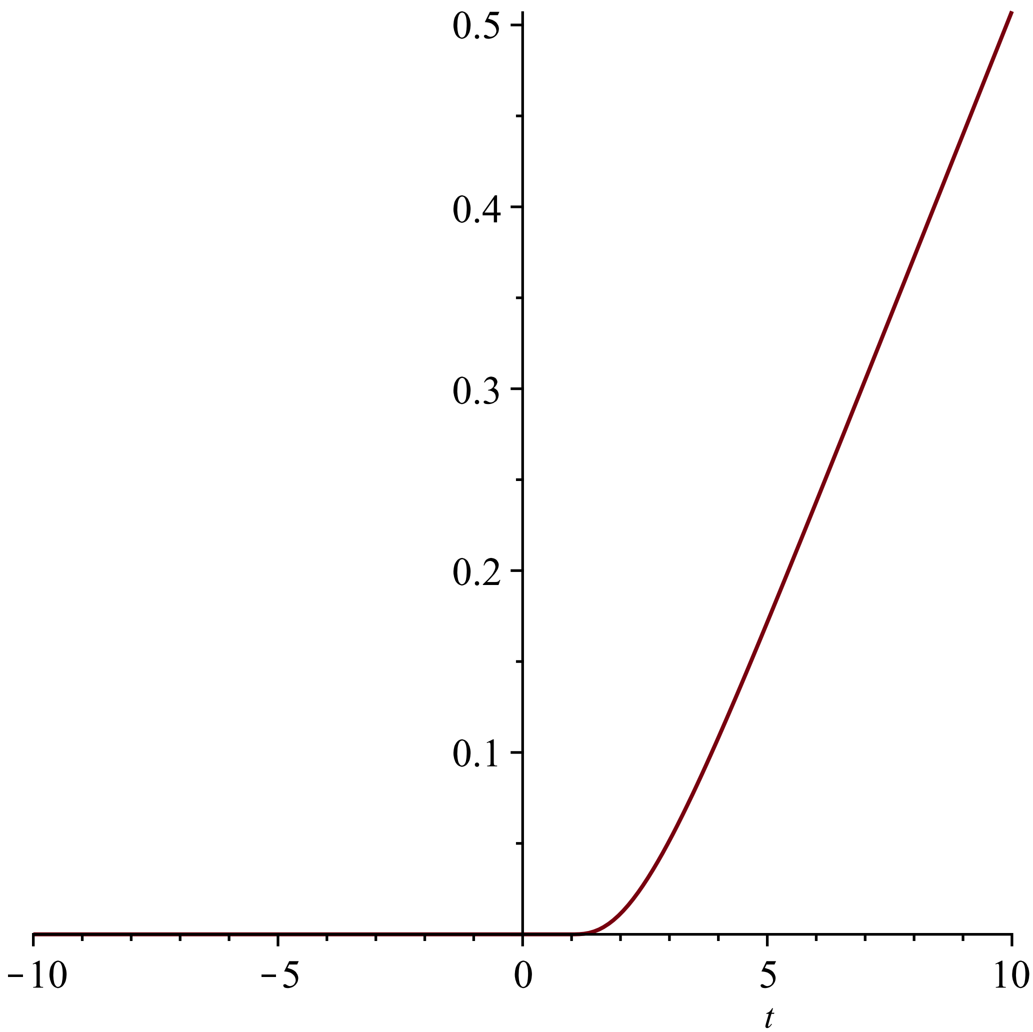
$u(t)\Big|_{t=1}$

$$0 \tag{10}$$

функция склеивается!

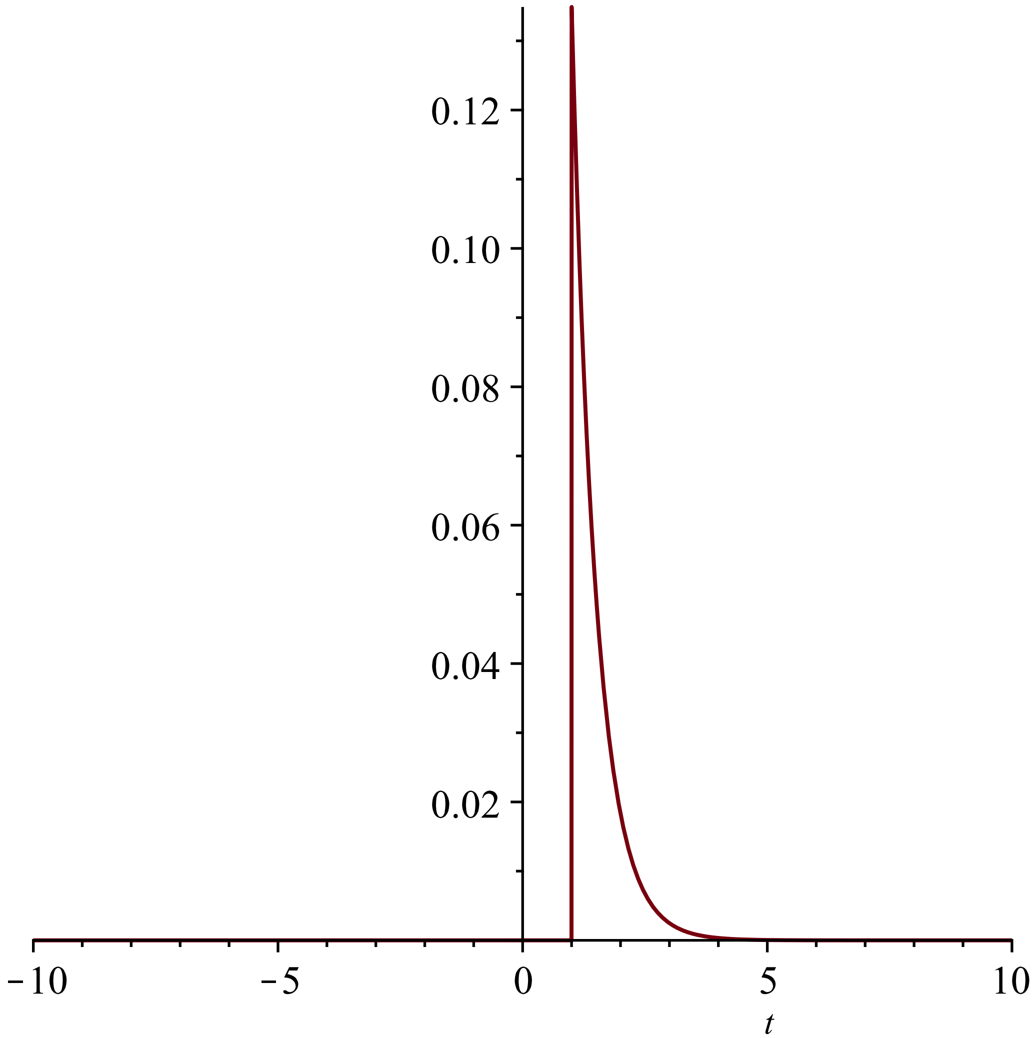
Построим решение обыкновенного дифференциального уравнения

$plot(u(t))$



Построим правую часть нашего обыкновенного дифференциального уравнения $Lu(t) = f(t)\,\eta\left(t - t_0\right)$

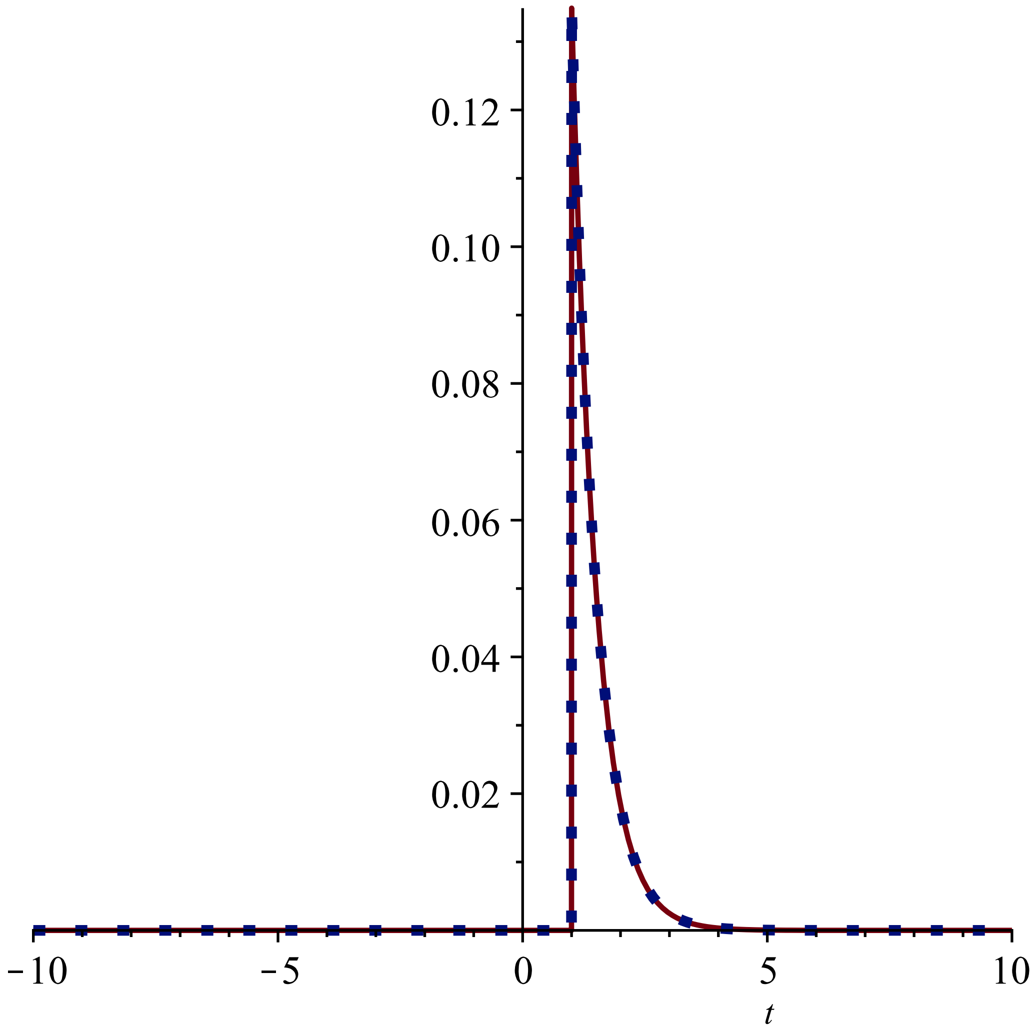
$plot\left(f(t) \cdot \text{Heaviside}\left(t - t_0\right)\right)$



Проверим действие нашего оператора на полученное решение дифференциального уравнения и получим правую часть уравнения $\boldsymbol{Lu(t) = f(t)\,\eta(t - t_0)}$

Построим совмещенные графики правой и *левой частей уравнения*

$$plot\left(\left[\frac{d^3}{dt^3}u(t) + \frac{d^2}{dt^2}u(t), f(t)\cdot \mathrm{Heaviside}(t - t_0)\right], linestyle = [solid, dot], thickness = [2, 4]\right)$$

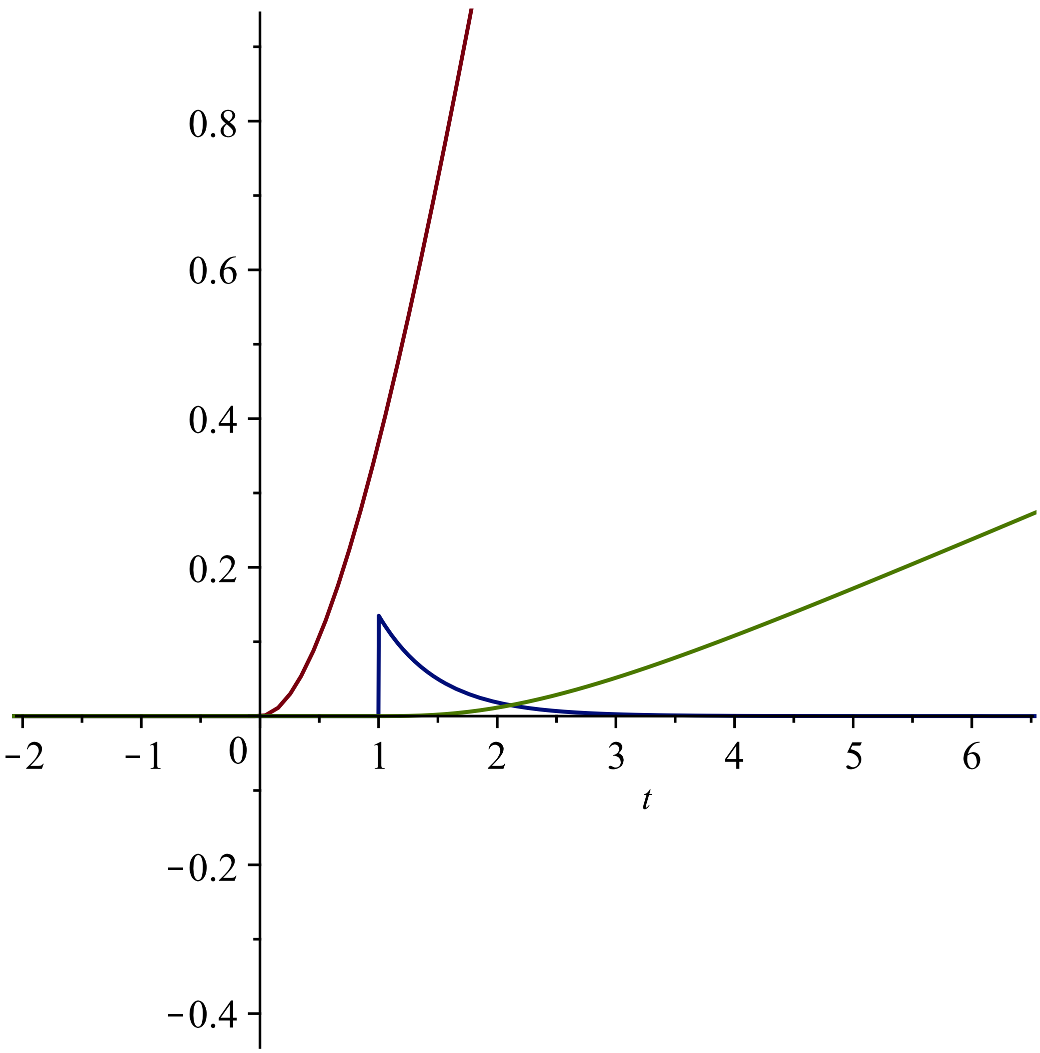


графики наложились друг на друга, следовательно, решение найдено верно!

Построим совмещенные графики функций $E(t)$, $f(t)\,\eta(t-t_0)$, $u(t)$

$with(plots):$

$plot([E(t), f(t)\cdot \mathrm{Heaviside}(t-t_0), u(t)])$ *# Красным выделена функция $E(t)$, синим $-f(t)$ $\cdot \mathrm{Heaviside}(t-t_0)$, зеленым $-u(t)$*


0.8
0.6
0.4
0.2
−0.2
−0.4
−2
−1
0
1
2
3
4
5
6
t