Лабораторная работа №1. Погрешности при решении СЛАУ

Погрешности при решении приближённо заданных систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

Рассмотрим заданную без погрешностей СЛАУ с квадратной невырожденной матрицей:

$$\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{b}} \quad (\sum_{j=1}^{n} a_j^i x^j = b^i,\ i = \overline{1,n}), \tag{1}$$

где $\boldsymbol{A} = (a_j^i)_n^n \in \mathrm{GL}(\mathbb{R};n)$ и $\vec{\boldsymbol{b}} = [b^1,\dots,b^n\rangle \in \vec{\mathbb{R}}^n$ – матрица и вектор-столбец правой части СЛАУ, соответственно, и $\vec{\boldsymbol{x}} = [x^1,\dots,x^n\rangle \in \vec{\mathbb{R}}^n$ – неизвестное решение этой СЛАУ в виде соответствующего вектора-столбца.

Понятия подчинённых норм матриц и векторов позволяют оценить погрешности, возникающие при численном решении СЛАУ. Здесь предполагается, что для векторов и матриц используются чебышевские нормы, т.е.

$$\|\vec{\boldsymbol{b}}\| = \max\{|b^1|,\dots,|b^n|\},\ \|\boldsymbol{A}\| = \max\{\sum_{j=1}^{n}|a_j^i| : i = \overline{1,n}\}.$$

Определение 1.1 (числа обусловленности матрицы). Число $cond(\boldsymbol{A}) = \|\boldsymbol{A}\|\cdot\|\boldsymbol{A}^{-1}\|$ называют *числом обусловленности матрицы* $\boldsymbol{A} \in \mathrm{GL}(\mathbb{R};n)$.►

Пусть матрица и правая часть системы заданы с некоторой погрешностью. Тогда наряду со СЛАУ (1) рассматривается приближённая СЛАУ:

$$(\boldsymbol{A} + \Delta\boldsymbol{A})(\vec{\boldsymbol{x}} + \vec{\Delta\boldsymbol{x}}) = \vec{\boldsymbol{b}} + \vec{\Delta\boldsymbol{b}}, \tag{2}$$

где $\Delta\boldsymbol{A} = (\Delta a_j^i)_n^n \in \mathrm{L}(\mathbb{R};n)$ и $\vec{\Delta\boldsymbol{b}} = [\Delta b^1,\dots,\Delta b^n\rangle \in \vec{\mathbb{R}}^n$ – погрешности в матрице и правой части СЛАУ (1), соответственно.

Теорема 1.1 (об относительной погрешности в решении приближённой СЛАУ). Пусть правая часть и невырожденная матрица СЛАУ (1) получили приращения $\vec{\Delta\boldsymbol{b}}$ и $\Delta\boldsymbol{A}$, соответственно. Если $cond(\mathbf{A})\dfrac{\|\Delta\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|} < 1$, то оценка для относительной погрешности $\dfrac{\|\vec{\Delta\boldsymbol{x}}\|}{\|\vec{\boldsymbol{x}}\|}$ решения СЛАУ (2) удовлетворяет неравенству

$$\frac{\|\vec{\Delta \boldsymbol{x}}\|}{\|\vec{\boldsymbol{x}}\|} \le \frac{cond(\mathbf{A})}{1-cond(\mathbf{A})\dfrac{\|\Delta\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|}}\left(\frac{\|\Delta\vec{\boldsymbol{b}}\|}{\|\vec{\boldsymbol{b}}\|}+\frac{\|\Delta\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|}\right).\blacktriangleright \tag{3}$$

Замечание 1.1. Число обусловленности $cond(\boldsymbol{A}) = \|\boldsymbol{A}\|\cdot\|\boldsymbol{A}^{-1}\|$ определяет, насколько погрешность входных данных может повлиять на решение СЛАУ (1).

Всегда $cond(\boldsymbol{A}) \ge 1$. Действительно: $1 = \|\mathbf{E}\| = \|\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}^{-1}\| \le \|\boldsymbol{A}\|\cdot\|\boldsymbol{A}^{-1}\| = cond(\boldsymbol{A})$.

Если $cond(\boldsymbol{A}) \approx 1 \div 10$, то ошибки входных данных слабо сказываются на приближённом решении и СЛАУ (2) считается *хорошо обусловленной*.

Если $cond(\boldsymbol{A}) > 10^2$, то СЛАУ (2) является *плохо обусловленной*.

Если погрешность в матрице СЛАУ (2) достаточно мала, то можно предполагать, что в СЛАУ (2) $\|\Delta\boldsymbol{A}\| = 0$. Тогда, согласно (3), для относительной погрешности $\dfrac{\|\vec{\Delta \boldsymbol{x}}\|}{\|\vec{\boldsymbol{x}}\|}$ решения СЛАУ (2) справедливо неравенство:

$$\frac{\|\vec{\Delta \boldsymbol{x}}\|}{\|\vec{\boldsymbol{x}}\|} \le cond(\mathbf{A})\frac{\|\Delta\vec{\boldsymbol{b}}\|}{\|\vec{\boldsymbol{b}}\|}. \tag{4}$$

Неравенство (4) ещё раз подчёркивает, что число обусловленности $cond(\boldsymbol{A}) = \|\boldsymbol{A}\|\cdot\|\boldsymbol{A}^{-1}\|$ определяет, насколько относительная погрешность в правой части СЛАУ влияет на относительную погрешность в решении приближённой СЛАУ.►

<u>ЗАДАНИЕ 1.1</u>

Дана СЛАУ (N – номер студента в журнале, $\alpha = (n-50)/100$, где n – номер группы):

$$\begin{cases} 50(1+0{,}5N+\alpha)x^1 + 50(1+0{,}5N)x^2 + 50(1+0{,}5N)x^3 = 50(3+1{,}5N+\alpha); \\ 50{,}1\cdot(1+0{,}5N)x^1 + 49{,}9\cdot(1+0{,}5N+\alpha)x^2 + 50(1+0{,}5N)x^3 = 50(3+1{,}5N+\alpha); \\ 49{,}9\cdot(1+0{,}5N)x^1 + 50\cdot(1+0{,}5N)x^2 + 50{,}1\cdot(1+0{,}5N+\alpha)x^3 = 50(3+1{,}5N+\alpha). \end{cases}$$

Предполагается, что ошибка в матрице этой СЛАУ достаточно мала и относительная ошибка в её правой части равна $0{,}01$. Приближённая СЛАУ имеет вид:

$$\begin{cases} 50(1+0{,}5N+\alpha)x^1 + 50(1+0{,}5N)x^2 + 50(1+0{,}5N)x^3 = 50(3+1{,}5N+\alpha)(1+0{,}01); \\ 50{,}1\cdot(1+0{,}5N)x^1 + 49{,}9\cdot(1+0{,}5N+\alpha)x^2 + 50(1+0{,}5N)x^3 = 50(3+1{,}5N+\alpha)(1-0{,}01); \\ 49{,}9\cdot(1+0{,}5N)x^1 + 50\cdot(1+0{,}5N)x^2 + 50{,}1\cdot(1+0{,}5N+\alpha)x^3 = 50(3+1{,}5N+\alpha)(1+0{,}01). \end{cases}$$

Требуется найти число обусловленности матрицы рассматриваемой СЛАУ и относительную погрешность в решении приближённой СЛАУ. Затем, прокомментировать получившиеся результаты.►

<u>ЗАДАНИЕ 1.2</u>

Исходные данные в настоящем задании определяются параметрами, приведёнными в *таблице 1*, где вариант N – номер фамилии студента в журнале и $\alpha = (n - 50)/100$, где n – номер группы.

Таблица 1

N	$\lambda + \alpha$	F	a	b
1	0,6	sin	π/4	3π/4
2	-0,6	sin	π/4	3π/4
3	0,5	cos	-π/4	π/4
4	-0,5	cos	-π/4	π/4
5	0,5	sin	π/4	3π/4
6	-0,5	sin	π/4	3π/4
7	0,4	cos	-π/4	π/4
8	-0,4	cos	-π/4	π/4
9	0,6	arctg	0	1
10	-0,6	arctg	0	1
11	0,6	th	0	1
12	-0,6	th	0	1
13	0,5	arctg	0	1
14	-0,5	arctg	0	1
15	0,4	th	0	1
16	-0,4	th	0	1
17	0,4	arctg	0	1
18	-0,4	arctg	0	1
19	0,4	sin	π/4	3π/4
20	-0,4	sin	π/4	3π/4
21	0,6	cos	-π/4	π/4
22	-0,6	cos	-π/4	π/4
23	0,5	arctg	-1	0
24	-0,5	arctg	-1	0

Согласно этой таблице, на отрезке $[a;b]$ выбрана центрально равномерная сетка с десятью узлами $s_1 = \tau_1 = a + \dfrac{h}{2},\ s_2 = \tau_2 = \tau_1 + h,\ s_3 = \tau_3 = \tau_2 + h, \dots, s_{10} = \tau_{10} = \tau_9 + h$, имеющая шаг $h = \dfrac{b-a}{10}$.

Требуется решить приближённую СЛАУ:

$$(\boldsymbol{E} + \lambda \boldsymbol{A})\,{}^{>}\boldsymbol{x} = {}^{>}\boldsymbol{b} + {}^{>}\Delta\boldsymbol{b}, \tag{5}$$

где $\lambda \in \mathbb{R}$ – ненулевое число (см. *таблицу 1*), $\boldsymbol{E} \in \mathrm{GL}(\mathbb{R};10)$ – единичная матрица, $\boldsymbol{A} = (a^i_j)^{10}_{10} \in \mathrm{GL}(\mathbb{R};10)$ и ${}^{>}\boldsymbol{b} = [b^1, \dots, b^{10}\rangle \in {}^{>}\mathbb{R}^{10}$ – матрица и вектор, соответственно, которые с помощью *таблицы 1* определяются соотношениями:

$$a^i_j = F(s_i \cdot \tau_j)\frac{b-a}{10} \text{ для } i, j = \overline{1,10}, \quad {}^{>}\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{E} + \lambda \boldsymbol{A}) \cdot {}^{>}\boldsymbol{x}_* \text{ и } {}^{>}\boldsymbol{x}_* = [1,1,\dots,1\rangle \in {}^{>}\mathbb{R}^{10}.$$

Согласно СЛАУ (5), приближённая СЛАУ определяется только погрешностью ${}^{>}\Delta\boldsymbol{b} = [\Delta b^1, \dots, \Delta b^{10}\rangle = 0,01 \cdot [b^1, -b^2, b^3, -b^4, b^5, -b^6, b^7, -b^8, b^9, -b^{10}\rangle \in {}^{>}\mathbb{R}^{10}$ в правой части СЛАУ (5).

Требуется найти число обусловленности матрицы рассматриваемой СЛАУ и относительную погрешность в решении приближённой СЛАУ (5). Затем, прокомментировать получившиеся результаты. Коме того, найти решение СЛАУ, которая получается из СЛАУ (5) делением каждого её i-го уравнения ($i = \overline{1,10}$) на число $b^i + \Delta b^i$. После этого сравнить абсолютную погрешность в решении получившейся СЛАУ с абсолютной погрешностью в решении приближённой СЛАУ (5). ►