МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДАНИЕ

ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

«Московский государственный технический

университет имени Н.Э. Баумана»

(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ ________

КАФЕДРА

«ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА»

Направление: Математика и компьютерные науки

Дисциплина: Численные методы

Лабораторная работа №1

«Погрешности при решении СЛАУ»

Группа: ___________

Вариант №3

Студент: Петров А.А.

Преподаватель: Кутыркин В.А.

Оценка:

Москва 2019

Задание 1.1

Дана СЛАУ (N – номер студента в журнале):

$$\begin{cases} 100(1+0,5N)x^1 + 100(1+0,5N)x^2 + 100(1+0,5N)x^3 = 100(3+1,5N); \\ 100,1\cdot(1+0,5N)x^1 + 99,9\cdot(1+0,5N)x^2 + 100(1+0,5N)x^3 = 100(3+1,5N); \\ 99,9\cdot(1+0,5N)x^1 + 100\cdot(1+0,5N)x^2 + 100,1\cdot(1+0,5N)x^3 = 100(3+1,5N). \end{cases}$$

Предполагается, что ошибка в матрице этой СЛАУ достаточно мала и относительная ошибка в её правой части равна 0,01. Приближённая СЛАУ имеет вид:

$$\begin{cases} 100(1+0,5N)x^1 + 100(1+0,5N)x^2 + 100(1+0,5N)x^3 = 100(3+1,5N)(1+0,01); \\ 100,1\cdot(1+0,5N)x^1 + 99,9\cdot(1+0,5N)x^2 + 100(1+0,5N)x^3 = 100(3+1,5N)(1-0,01); \\ 99,9\cdot(1+0,5N)x^1 + 100\cdot(1+0,5N)x^2 + 100,1\cdot(1+0,5N)x^3 = 100(3+1,5N)(1+0,01). \end{cases}$$

Требуется найти число обусловленности матрицы рассматриваемой СЛАУ и относительную погрешность в решении приближённой СЛАУ. Затем, прокомментировать получившиеся результаты.

Решение ($N=3,\ n=51,\ \alpha=(n-50)/100=(51-50)/100=0.01$)

Исходная СЛАУ:

$$\begin{cases} 251x^1 + 250x^2 + 250x^3 = 751 \\ 250.25x^1 + 250.749x^2 + 250x^3 = 751 \\ 249.75x^1 + 250x^2 + 251.251x^3 = 751 \end{cases}.$$

Приближённая СЛАУ:

$$\begin{cases} 251x^1 + 250x^2 + 250x^3 = 758.51 \\ 250.25x^1 + 250.749x^2 + 250x^3 = 743.49 \\ 249.75x^1 + 250x^2 + 251.251x^3 = 758.51 \end{cases}.$$

Следовательно:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 251 & 250 & 250 \\ 250.25 & 250.749 & 250 \\ 249.75 & 250 & 251.251 \end{pmatrix}, \qquad {}^{>}b = \begin{pmatrix} 751 \\ 751 \\ 751 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0.711749 & -0.44437 & -0.26605 \\ -0.62241 & 0.890154 & -0.26641 \\ -0.08818 & -0.44401 & 0.533522 \end{pmatrix}, \qquad {}^{>}b + {}^{>}\Delta b = \begin{pmatrix} 758.51 \\ 743.49 \\ 758.51 \end{pmatrix},$$

$$\|\boldsymbol{A}\| = (751,\ 750.999,\ 751.001) = 751.001,\quad \|\boldsymbol{A}^{-1}\| = 1.778974$$

Отсюда, число обусловленности: $cond(\boldsymbol{A}) = \|\boldsymbol{A}\|\cdot\|\boldsymbol{A}^{-1}\| = 751.001\cdot1.778974 = 1336.01125$

Таким образом, матрица СЛАУ (1) плохо обусловлена.

Найдем относительную погрешность в решении приближенной СЛАУ (2) задания 1.1 :

$$\boldsymbol{A}\cdot {}^{>}x = {}^{>}b,\ {}^{>}x = \boldsymbol{A}^{-1}\cdot {}^{>}b \ = \begin{pmatrix} 0.999822 \\ 1.001157 \\ 0.999022 \end{pmatrix}.$$

Ошибка ${}^{>}\Delta x = \boldsymbol{A}^{-1}\cdot {}^{>}\Delta b$ имеет вид: ${}^{>}\Delta x = \begin{pmatrix} 7.684197 \\ -12.3589 \\ 7.678055 \end{pmatrix}$, т.е.

$\left\|\Delta {}^{>}x\right\| = 12.3589$

$\left\|{}^{>}x\right\| = 1.001157$

Относительная погрешность приближённого решения: $\dfrac{\left\|\Delta {}^{>}x\right\|}{\left\|{}^{>}x\right\|} = 12.3446173$ и

$\left\|\Delta {}^{>}b\right\| = 7.51$, $\left\|{}^{>}b\right\| = 751$. Тогда

$$\frac{\left\|{}^{>}\Delta x\right\|}{\left\|{}^{>}x\right\|} = 12.3446173 \le cond(\boldsymbol{A})\cdot\frac{\left\|\Delta {}^{>}b\right\|}{\left\|{}^{>}b\right\|} = 1336.01125 * 0.01 = 13.3601125$$

Результаты

Число обусловленности $cond(\boldsymbol{A}) = \left\|\boldsymbol{A}\right\|\cdot\left\|\boldsymbol{A}^{-1}\right\| = 1336.01125 > 10^2$, значит, матрица СЛАУ плохо обусловлена.

Относительная погрешность решения $\dfrac{\left\|\Delta {}^{>}x\right\|}{\left\|{}^{>}x\right\|} = 12.3446173$ очень велика вследствие плохой обусловленности матрицы СЛАУ.

Задание 1.2

$$\alpha = 0.01$$
$$\lambda + \alpha = 0.6,\ \lambda = 0,59$$
$$a = -0,7854, \quad b = 0,785398$$
$$h = 0,15708$$
$$N = 3, \quad F(x) = \cos(x)$$

Согласно этим данным, на отрезке $[a;b]$ выбрана центрально равномерная сетка с десятью узлами.

Требуется решить приближённую СЛАУ:

$$\left(\boldsymbol{E} + \lambda\boldsymbol{A}\right){}^{>}x = {}^{>}b + {}^{>}\Delta b, \ (5)$$

где $\lambda \in \mathbb{R}$ - ненулевое число, $\boldsymbol{E} \in \mathrm{GL}\left(\mathbb{R};10\right)$ - единичная матрица, $\boldsymbol{A} = \left(a_j^i\right)_{10}^{10} \in \mathrm{GL}\left(\mathbb{R};10\right)$ и ${}^{>}b = [b^1,\ldots,b^{10}\rangle \in {}^{>}\mathbb{R}^{10}$ - матрица и вектор, соответственно, которые с помощью исходных данных определяются соотношениями:

$$a_j^i = F\left(s_i\cdot\tau_j\right)\frac{b-a}{10},\ \ {}^{>}b = \left(\boldsymbol{E} + \lambda\boldsymbol{A}\right)\cdot {}^{>}x \ \text{ и } \ {}^{>}x = [1,1,\ldots,1\rangle \in {}^{>}\mathbb{R}^{10}$$

Согласно СЛАУ (5) задания 1.2, приближённая СЛАУ с помощью ошибки ${}^{>}\Delta b = [\Delta b^1, ..., \Delta b^{10}\rangle = 0,01 \cdot [b^1, -b^2, b^3, -b^4, b^5, -b^6, b^7, -b^8, b^9, -b^{10}\rangle \in {}^{>}\mathbb{R}^{10}$ в правой части этой СЛАУ (3) задания 1.2..

Требуется найти число обусловленности матрицы рассматриваемой СЛАУ и относительную погрешность в решении приближённой СЛАУ (5). Затем, прокомментировать получившиеся результаты. Кроме того, найти решение СЛАУ, которая получается из СЛАУ (5) делением каждого её i -го уравнения $\left(i = \overline{1,10}\right)$ на число $b^i + \Delta b^i$. После этого сравнить абсолютную погрешность в решении получившейся СЛАУ с абсолютной погрешностью в решении приближённой СЛАУ (5).

Решение

Матрица $\boldsymbol{A}$:

$$\begin{pmatrix}
0,149392 & 0,12708 & 0,092329 & 0,04854 & 9,62229E-18 & -0,04854 & -0,09233 & -0,12708 & -0,14939 & -0,15708 \\
0,15274 & 0,139959 & 0,119444 & 0,092329 & 0,060111773 & 0,024573 & -0,01232 & -0,04854 & -0,08207 & -0,11107 \\
0,155146 & 0,149392 & 0,139959 & 0,12708 & 0,111072073 & 0,092329 & 0,071313 & 0,04854 & 0,024573 & 9,62E-18 \\
0,156595 & 0,155146 & 0,15274 & 0,149392 & 0,145122658 & 0,139959 & 0,133932 & 0,12708 & 0,119444 & 0,111072 \\
0,15708 & 0,15708 & 0,15708 & 0,15708 & 0,157079633 & 0,15708 & 0,15708 & 0,15708 & 0,15708 & 0,15708 \\
0,156595 & 0,155146 & 0,15274 & 0,149392 & 0,145122658 & 0,139959 & 0,133932 & 0,12708 & 0,119444 & 0,111072 \\
0,155146 & 0,149392 & 0,139959 & 0,12708 & 0,111072073 & 0,092329 & 0,071313 & 0,04854 & 0,024573 & 9,62E-18 \\
0,15274 & 0,139959 & 0,119444 & 0,092329 & 0,060111773 & 0,024573 & -0,01232 & -0,04854 & -0,08207 & -0,11107 \\
0,149392 & 0,12708 & 0,092329 & 0,04854 & 9,62229E-18 & -0,04854 & -0,09233 & -0,12708 & -0,14939 & -0,15708 \\
0,145123 & 0,111072 & 0,060112 & 9,62E-18 & -0,06011177 & -0,11107 & -0,14512 & -0,15708 & -0,14512 & -0,11107
\end{pmatrix}$$

Матрица $\boldsymbol{E} + \lambda \boldsymbol{A}$:

$$\begin{pmatrix}
1,088141 & 0,074977 & 0,054474 & 0,028639 & 5,67715E-18 & -0,02864 & -0,05447 & -0,07498 & -0,08814 & -0,09268 \\
0,090116 & 1,082576 & 0,070472 & 0,054474 & 0,035465946 & 0,014498 & -0,00727 & -0,02864 & -0,04842 & -0,06553 \\
0,091536 & 0,088141 & 1,082576 & 0,074977 & 0,065532523 & 0,054474 & 0,042074 & 0,028639 & 0,014498 & 5,68E-18 \\
0,092391 & 0,091536 & 0,090116 & 1,088141 & 0,085622368 & 0,082576 & 0,07902 & 0,074977 & 0,070472 & 0,065533 \\
0,092677 & 0,092677 & 0,092677 & 0,092677 & 1,092676983 & 0,092677 & 0,092677 & 0,092677 & 0,092677 & 0,092677 \\
0,092391 & 0,091536 & 0,090116 & 0,088141 & 0,085622368 & 1,082576 & 0,07902 & 0,074977 & 0,070472 & 0,065533 \\
0,091536 & 0,088141 & 0,082576 & 0,074977 & 0,065532523 & 0,054474 & 1,042074 & 0,028639 & 0,014498 & 5,68E-18 \\
0,090116 & 0,082576 & 0,070472 & 0,054474 & 0,035465946 & 0,014498 & -0,00727 & 0,971361 & -0,04842 & -0,06553 \\
0,088141 & 0,074977 & 0,054474 & 0,028639 & 5,67715E-18 & -0,02864 & -0,05447 & -0,07498 & 0,911859 & -0,09268 \\
0,085622 & 0,065533 & 0,035466 & 5,68E-18 & -0,03546595 & -0,06553 & -0,08562 & -0,09268 & -0,08562 & 0,934467
\end{pmatrix}$$

Матрица $(\boldsymbol{E}+\lambda\boldsymbol{A})^{-1}$:

$$\begin{pmatrix} 0,902512 & -0,08234 & -0,05888 & -0,02954 & 0,002605573 & 0,03423 & 0,062079 & 0,083327 & 0,09586 & 0,098497 \\ -0,08099 & 0,927222 & -0,05974 & -0,0428 & -0,02311984 & -0,00201 & 0,01915 & 0,039069 & 0,056591 & 0,07078 \\ -0,05772 & -0,05625 & 0,946245 & -0,05014 & -0,04532598 & -0,03923 & -0,0318 & -0,02303 & -0,01298 & -0,00181 \\ -0,03767 & -0,04123 & -0,04667 & 0,94666 & -0,06042509 & -0,06706 & -0,07243 & -0,07586 & -0,07687 & -0,07526 \\ -0,02981 & -0,03522 & -0,04363 & -0,05417 & 0,934217728 & -0,07737 & -0,08788 & -0,09645 & -0,1025 & -0,10578 \\ -0,03767 & -0,04123 & -0,04667 & -0,05334 & -0,06042509 & 0,932939 & -0,07243 & -0,07586 & -0,07687 & -0,07526 \\ -0,05772 & -0,05625 & -0,05375 & -0,05014 & -0,04532598 & -0,03923 & 0,968205 & -0,02303 & -0,01298 & -0,00181 \\ -0,08099 & -0,07278 & -0,05974 & -0,0428 & -0,02311984 & -0,00201 & 0,01915 & 1,039069 & 0,056591 & 0,07078 \\ -0,09749 & -0,08234 & -0,05888 & -0,02954 & 0,002605573 & 0,03423 & 0,062079 & 0,083327 & 1,09586 & 0,098497 \\ -0,10085 & -0,07949 & -0,0475 & -0,00973 & 0,02811456 & 0,060325 & 0,082062 & 0,090095 & 0,083293 & 1,062794 \end{pmatrix}$$

Найдём число обусловленности матрицы:

$\|\boldsymbol{E}+\lambda\boldsymbol{A}\|$=1,92677 , $\|\boldsymbol{E}+\lambda\boldsymbol{A}\|^{-1}=1,644847$, $cond(\boldsymbol{E}+\lambda\boldsymbol{A})$=3,169242

Таким образом, матрица СЛАУ (3) задания 1.2 хорошо обусловлена.

Решение СЛАУ: $\left(\boldsymbol{E}+\lambda\boldsymbol{A}\right)\cdot {}^{>}x = {}^{>}b$, согласно условию задания, имеет вид:

$${}^{>}x=[1,1,...,1\rangle \in {}^{>}\mathbb{R}^{10}.$$

Поэтому

$${}^{>}b=\begin{pmatrix} 0,907323 \\ 1,197736 \\ 1,542448 \\ 1,820385 \\ 1,92677 \\ 1,820385 \\ 1,542448 \\ 1,197736 \\ 0,907323 \\ 0,756168 \end{pmatrix}$$

Вычислим погрешность решения СЛАУ:

$${}^{>}\Delta b=[\Delta b^1,...,\Delta b^{10}\rangle = 0,01\cdot[b^1,-b^2,b^3,-b^4,b^5,-b^6,b^7,-b^8,b^9,-b^{10}\rangle \in {}^{>}\mathbb{R}^{10},$$

$${}^{>}\Delta b=\begin{pmatrix} 0,009073 \\ -0,01198 \\ 0,015424 \\ -0,0182 \\ 0,019268 \\ -0,0182 \\ 0,015424 \\ -0,01198 \\ 0,009073 \\ -0,00756 \end{pmatrix},\ \left\|\Delta {}^{>}b\right\| = 0,01927,\ {}^{>}b+{}^{>}\Delta b=\begin{pmatrix} 0,916396 \\ 1,185759 \\ 1,557872 \\ 1,802181 \\ 1,946038 \\ 1,802181 \\ 1,557872 \\ 1,185759 \\ 0,916396 \\ 0,748606 \end{pmatrix},\ \left\|{}^{>}b\right\| = 1,92677$$

Решение приближенной СЛАУ:

$${}^{>}x+{}^{>}\Delta x=\left(\boldsymbol{E}+\lambda\boldsymbol{A}\right)^{-1}\cdot\left({}^{>}b+{}^{>}\Delta b\right)$$

$$
{}^{>}x + {}^{>}\Delta x = \begin{pmatrix} 1,008316 \\ 0,987414 \\ 1,01518 \\ 0,981919 \\ 1,019543 \\ 0,981919 \\ 1,01518 \\ 0,987414 \\ 1,008316 \\ 0,991831 \end{pmatrix}, \quad {}^{>}\Delta x = \begin{pmatrix} 0,008316 \\ -0,01259 \\ 0,01518 \\ -0,01808 \\ 0,019543 \\ -0,01808 \\ 0,01518 \\ -0,01259 \\ 0,008316 \\ -0,00817 \end{pmatrix}, \quad \left\| {}^{>}x \right\| = 1, \quad \left\| {}^{>}\Delta x \right\| = 0,019543
$$

Относительная погрешность: $\dfrac{\left\| {}^{>}\Delta x \right\|}{\left\| {}^{>}x \right\|} = 0,019543$

Действительно, $\dfrac{\left\| {}^{>}\Delta x \right\|}{\left\| {}^{>}x \right\|} = 0,019543 \le cond(\boldsymbol{E} + \lambda \boldsymbol{A}) \dfrac{\left\| {}^{>}\Delta b \right\|}{\left\| {}^{>}b \right\|} = 3,169242 \cdot 0,01 = 0,03169242$

Так как СЛАУ хорошо обусловлена, то и погрешность небольшая.

Найдем СЛАУ, которая получается делением каждой компоненты *i*-ой строки исходной матрицы на $b^i + \Delta b^i \ \left(i = \overline{1,10}\right)$. Получим матрицу $\boldsymbol{B}$:

$$
\begin{pmatrix}
1,187413 & 0,081818 & 0,059444 & 0,031252 & 6,19509E-18 & -0,03125 & -0,05944 & -0,08182 & -0,09618 & -0,10113 \\
0,075999 & 0,912982 & 0,059432 & 0,04594 & 0,02990992 & 0,012227 & -0,00613 & -0,02415 & -0,04084 & -0,05527 \\
0,058757 & 0,056578 & 0,694907 & 0,048128 & 0,0420654 & 0,034967 & 0,027008 & 0,018383 & 0,009306 & 3,64E-18 \\
0,051266 & 0,050792 & 0,050004 & 0,603791 & 0,047510416 & 0,04582 & 0,043847 & 0,041604 & 0,039104 & 0,036363 \\
0,047623 & 0,047623 & 0,047623 & 0,047623 & 0,561488135 & 0,047623 & 0,047623 & 0,047623 & 0,047623 & 0,047623 \\
0,051266 & 0,050792 & 0,050004 & 0,048908 & 0,047510416 & 0,600703 & 0,043847 & 0,041604 & 0,039104 & 0,036363 \\
0,058757 & 0,056578 & 0,053005 & 0,048128 & 0,0420654 & 0,034967 & 0,668909 & 0,018383 & 0,009306 & 3,64E-18 \\
0,075999 & 0,06964 & 0,059432 & 0,04594 & 0,02990992 & 0,012227 & -0,00613 & 0,81919 & -0,04084 & -0,05527 \\
0,096182 & 0,081818 & 0,059444 & 0,031252 & 6,19509E-18 & -0,03125 & -0,05944 & -0,08182 & 0,995049 & -0,10113 \\
0,114376 & 0,087539 & 0,047376 & 7,58E-18 & -0,04737596 & -0,08754 & -0,11438 & -0,1238 & -0,11438 & 1,248276
\end{pmatrix}
$$

Матрица $\boldsymbol{B}^{-1}$:

$$
\begin{pmatrix}
0,827059 & -0,09764 & -0,09172 & -0,05324 & 0,005070542 & 0,061688 & 0,096712 & 0,098806 & 0,087846 & 0,073735 \\
-0,07422 & 1,099461 & -0,09307 & -0,07714 & -0,04499207 & -0,00363 & 0,029833 & 0,046327 & 0,05186 & 0,052987 \\
-0,05289 & -0,0667 & 1,47413 & -0,09036 & -0,08820607 & -0,07069 & -0,04953 & -0,0273 & -0,0119 & -0,00135 \\
-0,03452 & -0,04889 & -0,07271 & 1,706052 & -0,11758949 & -0,12086 & -0,11284 & -0,08995 & -0,07044 & -0,05634 \\
-0,02731 & -0,04177 & -0,06797 & -0,09762 & 1,818022761 & -0,13943 & -0,1369 & -0,11436 & -0,09393 & -0,07919 \\
-0,03452 & -0,04889 & -0,07271 & -0,09613 & -0,11758949 & 1,681325 & -0,11284 & -0,08995 & -0,07044 & -0,05634 \\
-0,05289 & -0,0667 & -0,08374 & -0,09036 & -0,08820607 & -0,07069 & 1,50834 & -0,0273 & -0,0119 & -0,00135 \\
-0,07422 & -0,0863 & -0,09307 & -0,07714 & -0,04499207 & -0,00363 & 0,029833 & 1,232085 & 0,05186 & 0,052987 \\
-0,08934 & -0,09764 & -0,09172 & -0,05324 & 0,005070542 & 0,061688 & 0,096712 & 0,098806 & 1,004242 & 0,073735 \\
-0,09242 & -0,09426 & -0,074 & -0,01754 & 0,05471199 & 0,108717 & 0,127842 & 0,106831 & 0,076329 & 0,795615
\end{pmatrix}
$$

$$
{}^{>}x' = \boldsymbol{B}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1,008316\\0,987414\\1,01518\\0,981919\\1,019543\\0,981919\\1,01518\\0,987414\\1,008316\\0,991831\end{pmatrix},\ {}^{>}\Delta x' = \begin{pmatrix}0,008316\\-0,01259\\0,01518\\-0,01808\\0,019543\\-0,01808\\0,01518\\-0,01259\\0,008316\\-0,00817\end{pmatrix},\ \left\|{}^{>}\Delta x\right\| = 0,019543
$$

Результаты

Число обусловленности $cond(\boldsymbol{A}) = \|\boldsymbol{A}\|\cdot\|\boldsymbol{A}^{-1}\| = 3,169242 < 10^2$, значит, матрица СЛАУ хорошо обусловлена. Следствие этого является малая относительная погрешность при решении приближённой СЛАУ :

$$
\frac{\left\|{}^{>}\Delta x\right\|}{\left\|{}^{>}x\right\|} = 0,019543 \le cond(\boldsymbol{E} + \lambda\boldsymbol{A})\frac{\left\|{}^{>}\Delta b\right\|}{\left\|{}^{>}b\right\|} = =0,03169242
$$

Кроме того, при делении каждого i -го уравнения $\left(i = \overline{1,10}\right)$ исходной СЛАУ на число $b^i + \Delta b^i$, абсолютная погрешность не изменилась: $\left\|{}^{>}\Delta x\right\| = 0,019543$