

Лабораторная работа №3

1. Методы простой итерации и Зейделя.

2. Методы касательных и секущих, метод деления отрезка пополам

1. Методы простой итерации и Зейделя для решения СЛАУ.

Теорема 3.1. Пусть $\vec{g} \in \mathbb{R}^n$ – вектор-столбец высоты n , $F \in L(\mathbb{R}; n)$ – квадратная матрица размера $n \times n$, чебышевская норма $\|F\| = \max \left\{ \sum_{j=1}^n |f_j^i| : i = \overline{1, n} \right\}$ которой удовлетворяет условию: $\|F\| < 1$. Тогда СЛАУ:

$$\vec{x} = F \cdot \vec{x} + \vec{g} \quad (1)$$

совместна и имеет единственное решение $\vec{x}_* \in \mathbb{R}^n$. ►

1.1. Метод простой итерации

Для решения СЛАУ (1) используется метод простой итерации $\text{itr}(F, \vec{g}; \vec{x}_{(0)})$, в котором:

1) выбирается произвольный вектор $\vec{x}_{(0)} \in \mathbb{R}^n$ (начальный вектор итераций);

2) если вектор $\vec{x}_{(k)} \in \mathbb{R}^n$, где $k \in \mathbb{Z}_+ = \{n \in \mathbb{Z} : n \geq 0\}$, – уже задан, то вычисляется вектор $\vec{x}_{(k+1)} \in \mathbb{R}^n$, для которого

$$\vec{x}_{(k+1)} = F \cdot \vec{x}_{(k)} + \vec{g}; \quad (2)$$

3) при достаточно большом $k \in \mathbb{N}$ вектор $\vec{x}_{(k)} \in \mathbb{R}^n$ считается приближённым решением СЛАУ (1).

Определение 3.1 (рабочей формулы метода простой итерации и его последовательности). Формула (2) называется *рабочей формулой метода простой итерации для решения СЛАУ (1)* и последовательность $\vec{x}_{(\bullet)} = (\vec{x}_{(k)})_{\mathbb{N}}$, индуцированная рабочей формулой (2) из фиксированного вектора $\vec{x}_{(0)} \in \mathbb{R}^n$, – *последовательностью приближённых решений СЛАУ (1) метода простой итерации*, для которого, в этом случае, используется обозначение: $\text{itr}(F, \vec{g}; \vec{x}_{(0)})$. ►

Теорема 3.2 (об оценке погрешности метода простой итерации). Пусть $\vec{x}_{(\bullet)} = (\vec{x}_{(k)})_{\mathbb{N}}$ – последовательность приближённых решений метода простой итерации $\text{itr}(F, \vec{g}; \vec{x}_{(0)})$ для СЛАУ (1). Тогда, если $\|F\| < 1$, эта последовательность $\vec{x}_{(\bullet)}$ сходится к решению $\vec{x}_* = (E + \sum_{k=1}^{+\infty} F^k) \cdot \vec{g} = (E - F)^{-1} \cdot \vec{g}$ СЛАУ (1). Кроме того, в этом случае при любом $k \in \mathbb{N}$ справедливы оценки:

$$\|\vec{x}_{(k)} - \vec{x}_*\| \leq \frac{\|F\|^k}{1 - \|F\|} \cdot \|\vec{g}\| + \|F\|^k \cdot \|\vec{x}_{(0)}\| \quad (3)$$

и

$$\|\vec{x}_{(k+1)} - \vec{x}_*\| \leq \|F\| \cdot \|\vec{x}_{(k)} - \vec{x}_*\|, \quad (4)$$

где $\|\vec{x}\| = \max\{|x^1|, \dots, |x^n|\}$ – чебышевская норма вектора $\vec{x} = [x^1, \dots, x^n] \in \mathbb{R}^n$, которой подчинена норма банаховой алгебры $L(\mathbb{R}; n)$. ►

Замечание 3.1 (о СЛАУ с диагональным преобладанием). Для любой матрицы $A = (a_j^i)_n^n \in GL(\mathbb{R}; n)$ существует такая диагональная матрица $D \in GL(\mathbb{R}; n)$, что $\|E - D \cdot A\| < 1$. Поэтому любая СЛАУ вида:

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b} \quad (A = (a_j^i)_n^n \in GL(\mathbb{R}; n) \text{ и } \vec{b} \in \mathbb{R}^n) - \quad (5)$$

может быть сведена к равносильной СЛАУ вида:

$$\vec{x} = F \cdot \vec{x} + \vec{g},$$

где $F = E - D \cdot A$, $\|F\| < 1$ и $\vec{g} = D \cdot \vec{b}$, для решения которой можно уже использовать метод простой итерации. В частности, если в СЛАУ (5) матрица A имеет *диагональное преобладание*, т.е. $|a_i^i| > |a_1^i| + \dots + |a_{i-1}^i| + |a_{i+1}^i| + \dots + |a_n^i|$, $i = \overline{1, n}$, то указанную выше диагональную матрицу D можно выбрать в виде:

$$D = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}, \text{ где } \alpha_i = \frac{1}{a_i^i} \text{ для } i = \overline{1, n}. \blacktriangleright$$

Теорема 3.3 (об устойчивости метода простой итерации). Пусть $\vec{x}_{(\bullet)} = (\vec{x}_{(k)})_{\mathbb{N}}$ – последовательность приближённых решений метода простой итерации $\text{itr}(F, \vec{g}; \vec{x}_{(0)})$ решения СЛАУ (1), где $\|F\| < 1$, $\vec{\varepsilon}_{(0)} \in \mathbb{R}^n$ и последовательность $(\vec{\varepsilon}_{(k)})_{\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^n$ такова, что $\|\vec{\varepsilon}_{(k)}\| \leq \|\vec{\varepsilon}_{(0)}\| = \varepsilon > 0$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Тогда, положив $\vec{x}_{(0)} = \vec{x}_{(0)} + \vec{\varepsilon}_{(0)}$ и $\vec{x}_{(k)} = F \cdot \vec{x}_{(k-1)} + \vec{\varepsilon}_{(k)}$, для любого $k \in \mathbb{N}$ получим:

$$\|\vec{x}_{(k)} - \vec{x}_{(k)}\| = \|F^k \cdot \vec{\varepsilon}_{(0)} + \dots + F \cdot \vec{\varepsilon}_{(k-1)} + \vec{\varepsilon}_{(k)}\| \leq (1 + \|F\| + \dots + \|F\|^k) \cdot \varepsilon \leq \frac{1}{1 - \|F\|} \cdot \varepsilon.$$

Таким образом, метод простой итерации $\text{itr}(F, \vec{g}; \vec{x}_{(0)})$ решения СЛАУ (1) устойчив к вычислительным погрешностям. \blacktriangleright

1.2. Метод Зейделя

Метод Зейделя для решения СЛАУ (1) является модификацией метода простой итерации и, как правило, он сходится быстрее метода простой итерации.

Пусть $\vec{y}_{(0)} \in \mathbb{R}^n$ – фиксированный вектор. Тогда для получения последовательности $\vec{y}_{(\bullet)} = (\vec{y}_{(k)})_{\mathbb{N}}$ приближённых решений СЛАУ (1) метод Зейделя предлагает следующую рабочую формулу:

$$\vec{y}_{(k)} = P \cdot \vec{y}_{(k-1)} + Q \cdot \vec{y}_{(k)} + \vec{g}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (6)$$

где

$$B = \begin{pmatrix} f_1^1 & 0 & \dots & 0 \\ f_1^2 & f_2^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ f_1^n & f_2^n & \dots & f_n^n \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} f_1^1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f_2^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & f_n^n \end{pmatrix}, \quad Q = B - D, \quad P = F - Q \text{ и } F = (f_j^i)_n^n. \quad (7)$$

При фиксированном $k \in \mathbb{N}$ из (6) и (7) получаем:

где $\mathbf{y}_{(k)} = [y_{(k)}^1, \dots, y_{(k)}^n]$, $\mathbf{y}_{(k-1)} = [y_{(k-1)}^1, \dots, y_{(k-1)}^n]$, $\mathbf{g} = [g^1, \dots, g^n] \in \mathbb{R}^n$.

$$^{\triangleright}\mathbf{y}_{(k)} = (\mathbf{E} - \mathbf{Q})^{-1} \cdot \mathbf{P} \cdot ^{\triangleright}\mathbf{y}_{(k-1)} + (\mathbf{E} - \mathbf{Q})^{-1} \cdot ^{\triangleright}\mathbf{g}, k \in \mathbb{N}.$$

ЗАДАНИЕ 1.1

Используя метод простой итерации с нулевым начальным вектором, найти приближённое решение СЛАУ: $A \cdot x = b$, с матрицей, имеющей диагональное преобладание. Абсолютная погрешность приближённого решения не должна превышать величины 0,01. Предполагается, что все компоненты решения заданной СЛАУ равны единице. Матрица A этой СЛАУ приведена ниже в зависимости от варианта задания (см. *Таблицы 1а,б*). Кроме того, используя неравенство (3), найти в методе простой итерации число шагов, необходимое для того чтобы гарантировать абсолютную погрешность приближённого решения не более 0,01. Сравнить это расчётное количество шагов с реальным количеством шагов, обеспечившим заданную погрешность. ►

N	A	N	A
1	$\begin{pmatrix} 10\beta & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 10\beta & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 10\beta & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 10\beta \end{pmatrix}$	2	$\begin{pmatrix} 10\beta & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 10\beta & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 10\beta & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 10\beta \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 10\beta & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 10\beta & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 10\beta & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 10\beta \end{pmatrix}$	4	$\begin{pmatrix} 10\beta & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 10\beta & -3 & 2 \\ 2 & 3 & 10\beta & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 10\beta \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} 10\beta & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 10\beta & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 10\beta & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 10\beta \end{pmatrix}$	6	$\begin{pmatrix} 10\beta & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 10\beta & 3 & -2 \\ 2 & 3 & 10\beta & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 10\beta \end{pmatrix}$

7	$\begin{pmatrix} 10\beta & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 10\beta & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 10\beta & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 10\beta \end{pmatrix}$	8	$\begin{pmatrix} 10\beta & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 10\beta & 3 & 2 \\ -2 & 3 & 10\beta & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 10\beta \end{pmatrix}$
----------	---	----------	---

Таблица 1б

<i>N</i>	A	<i>N</i>	A
9	$\begin{pmatrix} 10\beta & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 10\beta & -3 & 2 \\ 2 & 3 & 10\beta & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 10\beta \end{pmatrix}$	10	$\begin{pmatrix} 10\beta & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 10\beta & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 10\beta & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 10\beta \end{pmatrix}$
11	$\begin{pmatrix} 10\beta & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 10\beta & -3 & 2 \\ 2 & 3 & 10\beta & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 10\beta \end{pmatrix}$	12	$\begin{pmatrix} 10\beta & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 10\beta & -3 & 2 \\ 2 & 3 & 10\beta & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 10\beta \end{pmatrix}$
13	$\begin{pmatrix} 10\beta & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 10\beta & 3 & -2 \\ 2 & -3 & 10\beta & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 10\beta \end{pmatrix}$	14	$\begin{pmatrix} 10\beta & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 10\beta & 3 & -2 \\ 2 & 3 & 10\beta & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 10\beta \end{pmatrix}$
15	$\begin{pmatrix} 10\beta & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 10\beta & -3 & 2 \\ -2 & -3 & 10\beta & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 10\beta \end{pmatrix}$	16	$\begin{pmatrix} 10\beta & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 10\beta & 3 & -2 \\ 2 & -3 & 10\beta & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 10\beta \end{pmatrix}$
17	$\begin{pmatrix} 10\beta & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 10\beta & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 10\beta & -2 \\ 3 & 2 & -4 & 10\beta \end{pmatrix}$	18	$\begin{pmatrix} 10\beta & 4 & 2 & 3 \\ -2 & 10\beta & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 10\beta & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 10\beta \end{pmatrix}$
19	$\begin{pmatrix} 10\beta & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 10\beta & -3 & -2 \\ 2 & -3 & 10\beta & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 10\beta \end{pmatrix}$	20	$\begin{pmatrix} 10\beta & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 10\beta & -4 & 2 \\ 2 & 4 & 10\beta & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 10\beta \end{pmatrix}$
21	$\begin{pmatrix} 10\beta & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 10\beta & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 10\beta & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 10\beta \end{pmatrix}$	22	$\begin{pmatrix} 10\beta & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 10\beta & 3 & -2 \\ 2 & 3 & 10\beta & 1 \\ 3 & 1 & 5 & 10\beta \end{pmatrix}$

ЗАДАНИЕ 1.2

Используя метод Зейделя с нулевым начальным вектором, найти приближённое решение СЛАУ: $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$, с матрицей, имеющей диагональное преобладание. Абсолютная погрешность приближённого решения не должна превышать величины 0,01. Предполагается, что все компоненты решения заданной СЛАУ равны единице. Матрица **A** этой СЛАУ приведена в *Таблицах 1а,б*. Сравнить в методах простой итерации и

Зейделя количество шагов для достижения абсолютной погрешности, не превышающей величины 0,01. ►

2. Методы касательных и секущих, метод деления отрезка пополам (N – номер студента в журнале, вариант)

Пусть $f \in C^2([a; b], \mathbb{R}^1)$, $f' > 0$ ($f' < 0$) на отрезке $[a; b]$, $f'' \geq 0$ на отрезке $[a; b]$ и уравнение $f(x) = 0$ имеет на отрезке $[a; b]$ единственный корень $x_* \in (a; b)$, не являющийся кратным, т.к. $f'(x) \neq 0$ для любой точки $x \in [a; b]$. Тогда метод простой итерации $\text{itr}(\varphi, x_0)$, где $x_0 \in [x_*, b]$ ($x_0 \in [a, x_*]$) и $\varphi(x) = x - (f'(x))^{-1} \cdot f(x)$ для любого $x \in [a; b]$, сходится к этому корню x_* уравнения $f(x) = 0$. Такой метод $\text{itr}(\varphi, x_0)$ называется методом Ньютона или методом касательных. Его рабочая формула при любом $k \in \mathbb{N}$ имеет вид:

$$x_k = x_{k-1} - (f'(x_{k-1}))^{-1} \cdot f(x_{k-1}), \quad (9)$$

т.е. $f(x_{k-1}) + f'(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) = 0$ для $k \in \mathbb{N}$ и, следовательно, точка $x_k \in [x_*, b]$ ($x_k \in [a, x_*]$) является абсциссой точки пересечения касательной к графику функции $y = f(x)$, проведённой в точке $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$, с осью абсцисс, что иллюстрирует рис. 1.

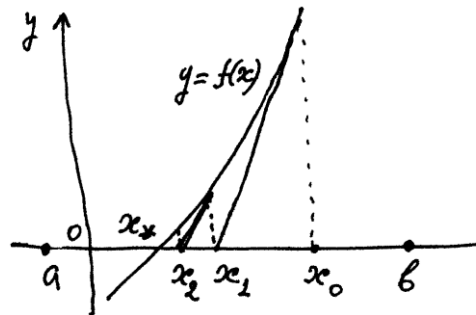


Рис. 1

Скорость сходимости метода Ньютона с рабочей формулой (9) достаточно велика (квадратична), т.к.

$$\varphi'(x) = \frac{f''(x)}{(f'(x))^2} \cdot f(x) \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow x_*.$$

Но преимущества метода Ньютона сказываются только в достаточно малой окрестности корня x_* , где значение φ' – мало. Поэтому, прежде, следует «хорошо» локализовать корень x_* каким-либо другим методом (например, графически или методом деления отрезка пополам), а, затем, использовать уже метод Ньютона для достижения высокой точности результата.

В многомерном случае рабочая формула (9), где f' – матрица Якоби, приведет к многомерному (n -мерному) методу Ньютона.

д) *Метод секущих.*

На каждом шаге метода Ньютона приходится вычислять не только значение функции f , но значение и её производной, что создаёт дополнительные практические трудности. Поэтому, заменив в рабочей формуле (9) метода Ньютона значение производной $f'(x_{k-1})$ на величину $\frac{1}{(x_{k-1} - x_{k-2})} (f(x_{k-1}) - f(x_{k-2}))$ получаем рабочую формулу:

$$x_k = x_{k-1} - \frac{(x_{k-1} - x_{k-2})f(x_{k-1})}{f(x_{k-1}) - f(x_{k-2})} \quad (10)$$

двухшагового метода секущих, где $k \in \mathbb{N}$.

Приближение x_k при заданных $k \in \mathbb{N}$ является, согласно формуле (10), абсциссой точки пересечения секущей прямой, проведённой через точки $(x_{k-1} + h_{k-1}, f(x_{k-1} + h_{k-1}))$ и $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$, с осью абсцисс, что иллюстрирует рис. 2.

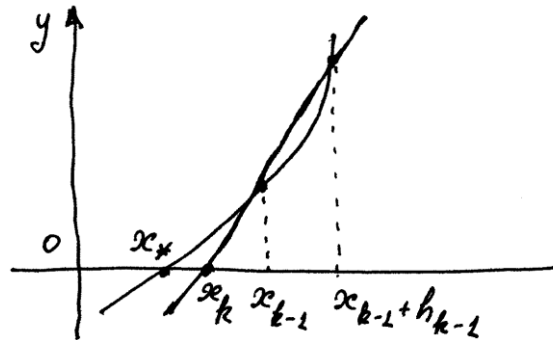


Рис. 2

Если $f(a) \cdot f(b) < 0$ и $f(b) \cdot f'' > 0$ на $[a; b]$, то целесообразно использовать метод, не выпускающий корень $x_* \in (a; b)$ из найденной «вилки» и использующий рабочую формулу:

$$x_k = x_{k-1} - \frac{(b - x_{k-1})f(x_{k-1})}{f(b) - f(x_{k-1})} \quad (k \in \mathbb{N}),$$

что иллюстрирует рис. 3, где $x_0 = a$.

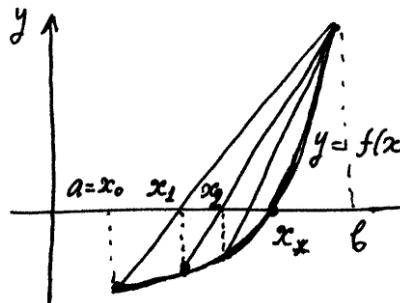


Рис. 3

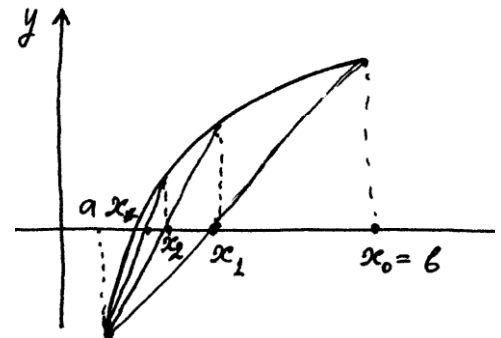


Рис. 4

Если же $f(a) \cdot f(b) < 0$ и $f(a) \cdot f'' > 0$ на $[a; b]$, то, полагая $x_0 = b$, целесообразно использовать рабочую формулу:

$$x_k = x_{k-1} - \frac{(x_{k-1} - a)f(x_{k-1})}{f(x_{k-1}) - f(a)} \quad (k \in \mathbb{N}),$$

что иллюстрирует рис. 4.

ЗАДАНИЕ 2 (N – номер фамилии студента в журнале, $\alpha = 0,005 \cdot (n - 50)$, n – номер группы)

С погрешностью, не превосходящей величину $\varepsilon = 0,0001$, найти все корни уравнения:

$$[N + 5, 2 + (-1)^N \alpha] \cdot x^3 - [2N^2 + 10, 4N + (-1)^{N+1} \alpha] \cdot x^2 - N^2(N + 5, 2)(x - 2N) + (-1)^N \alpha = 0.$$

Нарисовать график функции, стоящей в левой части уравнения. Используя этот график отделить корни уравнения. Для определения левого корня использовать метод касательных, правого – метод секущих. Для определения срединного корня использовать метод деления отрезка пополам.