если:

а) $K(x,t) = xt$, $0 \leqslant x,\, t \leqslant 1$; б) $K(x,t) = xt + x^2t^2$, $-1 \leqslant x,\, t \leqslant 1$;

в) $K(x,t) = \begin{cases} (x+1)\,t, & 0 \leqslant x \leqslant t, \\ (t+1)\,x, & t \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$

§ 11. Решение однородных интегральных уравнений с вырожденным ядром

Однородное интегральное уравнение с вырожденным ядром

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b \left[\sum_{k=1}^n a_k(x)\, b_k(t) \right] \varphi(t)\, dt = 0, \tag{1}$$

когда параметр λ не является его характеристическим числом (т. е. $\Delta(\lambda) \neq 0$), имеет единственное нулевое решение: $\varphi(x) \equiv 0$. Если же λ есть характеристическое число (т. е. $\Delta(\lambda) = 0$), то кроме нулевого решения уравнение (1) имеет и ненулевые решения, которыми являются собственные функции, соответствующие этому характеристическому числу. Общее решение однородного уравнения (1) получается как линейная комбинация этих собственных функций.

Пример. Решить уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^\pi (\cos^2 x \cos 2t + \cos^3 t \cos 3x)\, \varphi(t)\, dt = 0.$$

Решение. Характеристические числа данного уравнения суть $\lambda_1 = \dfrac{4}{\pi}$, $\lambda_2 = \dfrac{8}{\pi}$, а соответствующие им собственные функции имеют вид

$$\varphi_1(x) = \cos^2 x, \quad \varphi_2(x) = \cos 3x.$$

Общим решением уравнения будет

$$\varphi(x) = C \cos^2 x, \quad \text{если} \quad \lambda = \frac{4}{\pi};$$

$$\varphi(x) = C \cos 3x, \quad \text{если} \quad \lambda = \frac{8}{\pi};$$

$$\varphi(x) = 0, \quad \text{если} \quad \lambda \neq \frac{4}{\pi},\ \lambda \neq \frac{8}{\pi},$$

где C — произвольная постоянная. Последнее, нулевое, решение получается из общих решений при $C = 0$. ▷

Задачи для самостоятельного решения

Решить следующие однородные интегральные уравнения:

160. $\varphi(x) - \lambda \int\limits_0^{\pi} \cos(x+t)\, \varphi(t)\, dt = 0.$ **161.** $\varphi(x) - \lambda \int\limits_0^{1} \arccos x\, \varphi(t)\, dt = 0.$

162. $\varphi(x) - 2 \int\limits_0^{\pi/4} \frac{\varphi(t)}{1+\cos 2t}\, dt = 0.$ **163.** $\varphi(x) - \frac{1}{4} \int\limits_{-2}^{2} |x|\, \varphi(t)\, dt = 0.$

164. $\varphi(x) + 6 \int\limits_0^{1} (x^2 - 2xt)\, \varphi(t)\, dt = 0.$

§ 12. Неоднородные симметричные уравнения

Неоднородное интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода

$$\varphi(x) - \lambda \int\limits_a^b K(x,t)\, \varphi(t)\, dt = f(x) \qquad (1)$$

называется *симметричным*, если его ядро $K(x,t)$ симметрично: $K(x,t) \equiv K(t,x)$.

Если $f(x)$ непрерывна и параметр λ не совпадает с характеристическими числами λ_n $(n = 1, 2, \ldots)$ соответствующего однородного интегрального уравнения

$$\varphi(x) - \lambda \int\limits_a^b K(x,t)\, \varphi(t)\, dt = 0, \qquad (2)$$

то уравнение (1) имеет единственное непрерывное решение, которое дается формулой

$$\varphi(x) = f(x) - \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda - \lambda_n}\, \varphi_n(x), \qquad (3)$$

где $\varphi_n(x)$ — собственные функции уравнения (2),

$$a_n = \int\limits_a^b f(x)\, \varphi_n(x)\, dx. \qquad (4)$$

причем ряд, стоящий в правой части формулы (3), сходится абсолютно и равномерно в квадрате $a \leqslant x,\ t \leqslant b$.

Если же параметр λ совпадает с одним из характеристических чисел, например $\lambda = \lambda_k$, ранга q (кратность числа λ_k), то уравнение (1), вообще говоря, не имеет решений. Решения существуют тогда и только тогда, когда выполняются q условий

$$\int_a^b f(x)\,\varphi_m(x)\,dx = 0 \quad (m = 1, 2, \ldots, q), \tag{5}$$

т. е. когда функция $f(x)$ ортогональна ко всем собственным функциям, принадлежащим характеристическому числу λ_k. В этом случае уравнение (1) имеет бесконечное множество решений, которые содержат q произвольных постоянных и даются формулой

$$\varphi(x) = f(x) - \lambda \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda - \lambda_n}\varphi_n(x) + \\ + C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x) + \ldots + C_q\varphi_q(x), \tag{6}$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_q$ — произвольные постоянные.

В случае вырожденного ядра

$$K(x,t) = \sum_{k=1}^{m} a_k(x)\,b_k(t),$$

формулы (3) и (6) будут содержать в правых частях вместо рядов конечные суммы.

Когда правая часть уравнения (1), т. е. функция $f(x)$, будет ортогональна ко всем собственным функциям $\varphi_n(x)$ уравнения (2), то решением уравнения (1) будет являться сама эта функция: $\varphi(x) = f(x)$.

Пример 1. Решить уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 K(x,t)\,\varphi(t)\,dt = x, \tag{7}$$

где

$$K(x,t) = \begin{cases} x(t-1), & \text{если} \quad 0 \leqslant x \leqslant t, \\ t(x-1), & \text{если} \quad t \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Решение. Характеристические числа и соответствующие им собственные функции имеют вид

$$\lambda_n = -\pi^2 n^2; \quad \varphi_n(x) = \sin \pi n x, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Если $\lambda \neq \lambda_n$, то решением уравнения (7) будет

$$\varphi(x) = x - \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda + n^2\pi^2} \sin n\pi x. \tag{8}$$

Находим коэффициенты Фурье a_n правой части уравнения:

$$a_n = \int_0^1 x \sin n\pi x \, dx = \int_0^1 x \, d\left(- \frac{\cos n\pi x}{n\pi} \right) = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}.$$

Подставляя в (8), получим

$$\varphi(x) = x - \frac{\lambda}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(\lambda + n^2\pi^2)} \sin n\pi x.$$

При $\lambda = -n^2\pi^2$ уравнение (7) не имеет решений, так как

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} \neq 0.$$

▷

Пример 2. Решить уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 K(x, t)\, \varphi(t) \, dt = \cos \pi x,$$

где

$$K(x, t) = \begin{cases} (x+1)\, t, & \text{если} \quad 0 \leqslant x \leqslant t, \\ (t+1)\, x, & \text{если} \quad t \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Решение. Характеристические числа:

$$\lambda_0 = 1, \quad \lambda_n = -n^2\pi^2 \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Соответствующие им собственные функции:

$$\varphi_0(x) = e^x, \quad \varphi_n(x) = \sin n\pi x + n\pi \cos n\pi x \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Если $\lambda \neq 1$ и $\lambda \neq -n^2\pi^2$, то решение данного уравнения будет иметь вид

$$\varphi(x) = \cos \pi x - \lambda \left[\frac{a_0 e^x}{\lambda - 1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda + n^2\pi^2} (\sin n\pi x + n\pi \cos n\pi x) \right],$$

и так как

$$a_0 = \int_0^1 e^x \cos \pi x \, dx = -\frac{1+e}{1+\pi^2},$$

$$a_n = \int_0^1 \cos \pi x (\sin n\pi x + n\pi \cos n\pi x) \, dx = \begin{cases} 0, & n \neq 1, \\ \dfrac{\pi}{2}, & n = 1, \end{cases}$$

то

$$\varphi(x) = \cos \pi x + \lambda \left[\frac{1+e}{1+\pi^2} \frac{e^x}{\lambda - 1} - \frac{\pi}{2(\lambda+\pi^2)} (\sin \pi x + \pi \cos \pi x) \right].$$

При $\lambda = 1$ и $\lambda = -\pi^2$ $(n = 1)$ уравнение решений не имеет, так как его правая часть, т. е. функция $\cos \pi x$, не ортогональна к соответствующим собственным функциям

$$\varphi_0(x) = e^x, \quad \varphi_1(x) = \sin \pi x + \pi \cos \pi x.$$

Если же $\lambda = -n^2\pi^2$, где $n = 2, 3, \ldots$, то данное уравнение имеет бесконечное множество решений, которые даются формулой (6):

$$\varphi(x) = \cos \pi x + \lambda \left[\frac{1+e}{1+\pi^2} \frac{e^x}{\lambda - 1} - \frac{\pi}{2(\lambda+\pi^2)} (\sin \pi x + \pi \cos \pi x) \right] + \\ + C(\sin n\pi x + n\pi \cos n\pi x),$$

где C — произвольная постоянная. ▷

В некоторых случаях неоднородное симметричное интегральное уравнение можно свести к неоднородной краевой задаче. Это можно сделать тогда, когда ядро $K(x, t)$ интегрального уравнения является функцией Грина некоторого линейного дифференциального оператора. Покажем на примере, как это делается.

Пример 3. Решить уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 K(x, t)\, \varphi(t)\, dt = e^x, \tag{9}$$

где

$$K(x, t) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sh} x \operatorname{sh}(t-1)}{\operatorname{sh} 1}, & 0 \leqslant x \leqslant t, \\ \dfrac{\operatorname{sh} t \operatorname{sh}(x-1)}{\operatorname{sh} 1}, & t \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Решение. Данное уравнение перепишем в виде

$$\varphi(x) = e^x + \frac{\lambda \operatorname{sh}(x-1)}{\operatorname{sh} 1} \int_0^x \operatorname{sh} t\, \varphi(t)\, dt + \frac{\lambda \operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} 1} \int_x^1 \operatorname{sh}(t-1)\, \varphi(t)\, dt. \tag{10}$$

Дифференцируя дважды, найдем

$$\varphi'(x) = e^x + \frac{\lambda \operatorname{ch}(x-1)}{\operatorname{sh} 1} \int_0^x \operatorname{sh} t\, \varphi(t)\, dt + \lambda \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} 1} \int_x^1 \operatorname{sh}(t-1)\, \varphi(t)\, dt,$$

$$\varphi''(x) = e^x + \frac{\lambda \operatorname{sh}(x-1)}{\operatorname{sh} 1} \int_0^x \operatorname{sh} t\, \varphi(t)\, dt + \frac{\lambda \operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} 1} \int_x^1 \operatorname{sh}(t-1)\, \varphi(t)\, dt + \\ + \frac{\lambda \operatorname{ch}(x-1)}{\operatorname{sh} 1} \operatorname{sh} x\, \varphi(x) - \frac{\lambda \operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} 1} \operatorname{sh}(x-1)\, \varphi(x),$$

или

$$\varphi''(x) = \varphi(x) + \lambda\varphi(x).$$

Полагая в (10) $x = 0$ и $x = 1$, получим, что $\varphi(0) = 1$, $\varphi(1) = e$. Искомая функция $\varphi(x)$ является решением неоднородной краевой задачи

$$\varphi''(x) - (\lambda + 1)\varphi(x) = 0, \tag{11}$$

$$\varphi(0) = 1, \quad \varphi(1) = e. \tag{12}$$

Рассмотрим следующие случаи.

1) $\lambda + 1 = 0$, т.е. $\lambda = -1$. Уравнение (11) имеет вид $\varphi''(x) = 0$. Его общее решение

$$\varphi(x) = C_1 x + C_2.$$

Учитывая краевые условия (12), получим для нахождения постоянных C_1 и C_2 систему

$$\begin{cases} C_2 = 1, \\ C_1 + C_2 = e, \end{cases}$$

решая которую находим $C_1 = e - 1$, $C_2 = 1$, и, следовательно,

$$\varphi(x) = (e - 1)x + 1.$$

2) $\lambda + 1 > 0$, т.е. $\lambda > -1$ $(\lambda \neq 0)$. Общее решение уравнения (11)

$$\varphi(x) = C_1 \operatorname{ch} \sqrt{\lambda + 1}\, x + C_2 \operatorname{sh} \sqrt{\lambda + 1}\, x.$$

Краевые условия (12) дают для нахождения C_1 и C_2 систему

$$\begin{cases} C_1 = 1, \\ C_1 \operatorname{ch} \sqrt{\lambda + 1} + C_2 \operatorname{sh} \sqrt{\lambda + 1} = e, \end{cases}$$

откуда

$$C_1 = 1, \quad C_2 = \frac{e - \operatorname{ch} \sqrt{\lambda + 1}}{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda + 1}}.$$

Искомая функция $\varphi(x)$ после несложных преобразований приведется к виду

$$\varphi(x) = \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda + 1}(1 - x) + e \operatorname{sh} \sqrt{\lambda + 1}\, x}{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda + 1}}.$$

3) $\lambda + 1 < 0$, т.е. $\lambda < -1$. Обозначим $\lambda + 1 = -\mu^2$. Общим решением уравнения (11) будет $\varphi(x) = C_1 \cos \mu x + C_2 \sin \mu x$. Краевые условия (12) дают систему

$$\begin{cases} C_1 = 1, \\ C_1 \cos \mu + C_2 \sin \mu = e. \end{cases} \tag{13}$$

Здесь, в свою очередь, возможны два случая.

а) μ не является корнем уравнения $\sin \mu = 0$. Тогда

$$C_1 = 1, \quad C_2 = \frac{e - \cos \mu}{\sin \mu},$$

и, следовательно,

$$\varphi(x) = \cos\mu x + \frac{e - \cos\mu}{\sin\mu}\sin\mu x,$$

где $\mu = \sqrt{-\lambda - 1}$.

б) μ является корнем уравнения $\sin\mu = 0$, т. е. $\mu = n\pi$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Система (13) несовместна, а следовательно, данное уравнение (9) не имеет решений. В этом случае соответствующее однородное интегральное уравнение

$$\varphi(x) + \left(1 + n^2\pi^2\right)\int_0^1 K(x, t)\,\varphi(t)\,dt = 0 \tag{14}$$

имеет нетривиальные решения, т. е. числа $\lambda_n = -\left(1 + n^2\pi^2\right)$ являются характеристическими числами, а функции $\varphi_n(x) = \sin n\pi x$ — собственными функциями уравнения (14). ▷

Задачи для самостоятельного решения

Решить следующие неоднородные интегральные симметричные уравнения:

165. $\varphi(x) - \dfrac{\pi^2}{4}\displaystyle\int_0^1 K(x, t)\,\varphi(t)\,dt = \dfrac{x}{2}$, $\quad K(x, t) = \begin{cases} \dfrac{x(2-t)}{2}, & 0 \leqslant x \leqslant t, \\ \dfrac{t(2-x)}{2}, & t \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$

166. $\varphi(x) + \displaystyle\int_0^1 K(x, t)\,\varphi(t)\,dt = xe^x$, $\quad K(x, t) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sh} x \operatorname{sh}(t-1)}{\operatorname{sh} 1}, & 0 \leqslant x \leqslant t, \\ \dfrac{\operatorname{sh} t \operatorname{sh}(x-1)}{\operatorname{sh} 1}, & t \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$

167. $\varphi(x) - \lambda\displaystyle\int_0^1 K(x, t)\,\varphi(t)\,dt = x - 1$, $\quad K(x, t) = \begin{cases} x - t, & 0 \leqslant x \leqslant t, \\ t - x, & t \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$

168. $\varphi(x) - 2\displaystyle\int_0^{\pi/2} K(x, t)\,\varphi(t)\,dt = \cos 2x$, $\quad K(x, t) = \begin{cases} \sin x \cos t, & 0 \leqslant x \leqslant t, \\ \sin t \cos x, & t \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

169. $\varphi(x) - \lambda\displaystyle\int_0^{\pi} K(x, t)\,\varphi(t)\,dt = 1$, $\quad K(x, t) = \begin{cases} \sin x \cos t, & 0 \leqslant x \leqslant t, \\ \sin t \cos x, & t \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$

170. $\varphi(x) - \lambda\displaystyle\int_0^1 K(x, t)\,\varphi(t)\,dt = x$, $\quad K(x, t) = \begin{cases} (x+1)(t-3), & 0 \leqslant x \leqslant t, \\ (t+1)(x-3), & t \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$