



Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования

**«Московский государственный технический  
университет  
имени Н.Э. Баумана  
(национальный исследовательский университет)»  
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)**

---

ФАКУЛЬТЕТ «Фундаментальные науки»

КАФЕДРА «Вычислительная математика и математическая физика» (ФН-11)

## **РАСЧЁТНО - ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА**

**к курсовой работе на тему:**

Дифференциальная геометрия и основы тензорного исчисления.

Дисциплина: Дифференциальная геометрия и основы тензорного исчисления

Студент

\_\_\_\_\_

(Подпись, дата)

А.А. Юн

(И.О.Фамилия)

Руководитель курсовой работы

\_\_\_\_\_

(Подпись, дата)

Е.В. Осипов

(И.О.Фамилия)

Москва, 2019

## СПИСОК ИСПОЛНИТЕЛЕЙ

Руководитель курсовой \_\_\_\_\_ Е.В. Осипов  
работы подпись, дата

Исполнитель \_\_\_\_\_ А.А. Юн  
подпись, дата

Нормоконтролер \_\_\_\_\_ С.С. Кудрявцева  
подпись, дата

## РЕФЕРАТ

Отчет 32 с., 1 ч., 5 источников.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ, РИМАННОВЫ  
ПРОСТРАНСТВА, ГАУССОВА КРИВИЗНА, СКАЛЯРНАЯ КРИВИЗНА,  
ГОСТ 7.32-2017.

Цель работы – исследование гауссовых и скалярных кривизн  
однополостного гиперболоида и мнимого однополостного гиперболоида .

В результате работы был произведена устная защита курсовой работы,  
а также выполнен письменный отчет в соответствии со стандартами  
оформления научно-технической документации.

ВВЕДЕНИЕ .....	5
1 Римановы пространства .....	6
1.1 Элементарное многообразие .....	6
1.2 Касательное пространство .....	7
1.3 Определение риманова пространства .....	9
2 Свойства римановых пространств .....	10
2.1 Коэффициенты связности в $\mathbb{V}^n$ .....	10
2.2 Определение аффинной связности .....	10
2.3 Тензоры в элементарном многообразии .....	11
2.4 Определение тензора в римановом пространстве .....	12
2.5 Ковариантное дифференцирование тензоров в $\mathbb{V}^n$ .....	13
2.6 Ковариантное дифференцирование тензоров в $\mathbb{L}^n$ .....	13
2.7 Риманово пространство с аффинной связностью .....	14
2.8 Тензор Римана-Кристоффеля .....	14
2.9 Тензор Риччи .....	16
2.10 Тензор Эйнштейна .....	17
3 Практическая часть .....	18
3.1 Гауссова кривизна однополостного гиперboloида .....	18
3.2 Гауссова кривизна мнимого однополостного гиперboloида .....	23
3.3 Скалярная кривизна однополостного гиперboloида .....	27
3.4 Пределы изменения гауссовой кривизны однополостного гиперboloида .....	28
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	30
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ .....	31
ПРИЛОЖЕНИЕ А .....	32

## ВВЕДЕНИЕ

Курсовая работа – вид учебной работы обучающегося, в которой присутствуют элементы самостоятельного научного исследования. Работа рассчитана на закрепление и применение полученных навыков в процессе учёбы.

Целью курсовой работы является исследование гауссовых и скалярных кривизн однополостного гиперболоида и мнимого однополостного гиперболоида .

Задачами курсовой работы являются:

- ознакомление с римановыми пространствами;
- нахождение гауссовых кривизн;
- нахождение скалярной кривизны;
- нахождение экстремумов гауссовой кривизны, максимального и минимального значений .

## 1 Римановы пространства

В механике и особенно в релятивистской физике тензоры широко применяют в  $n$ -мерных римановых пространствах, являющихся более общими, чем евклидовы [1]. Дадим определение этих пространств, а затем покажем, как конструируются тензоры в них. Начнём с основополагающего понятия римановых пространств - элементарного многообразия.

### 1.1 Элементарное многообразие

Определение 1. Элементарным  $n$ -мерным многообразием называют такое множество  $M^n$ , каждой точке которого взаимнооднозначно поставлен в соответствие упорядоченный набор чисел  $(X_1 \dots X_n)$  из некоторой связной области  $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^n$ , т.е, задано биективное отображение  $\varphi : M^n \longrightarrow \mathcal{D} \in \mathbb{R}^n$ .

Координатами точки  $\mathcal{M} \in M^n$  в системе координат  $\mathcal{D}$  называют координаты  $X^i \in \mathbb{R}^n$  ее образа  $\varphi(\mathcal{M})$ , изменяющиеся в области  $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^n$ . Если для множества  $M^n$  имеется другое биективное отображение  $\varphi' : M^n \longrightarrow \mathcal{D}' \in \mathbb{R}^n$ , то координаты точки  $\mathcal{M}$  в системах координат  $\mathcal{D}$  и  $\mathcal{D}'$ , связаны соотношениями:

$$X'^i = X'^i(X^j), \quad i, j = 1 \dots n, \quad (1)$$

которые предполагают достаточное число раз дифференцируемыми и невырожденными, т.е.  $\det\left(\frac{\partial X'^i}{\partial X^j}\right) \neq 0, \forall X^i \in \mathcal{D}$ . Введём обозначения для якобиевых матриц преобразования, а также для их производных:

$$Q^i_j \equiv \left(\frac{\partial X'^i}{\partial X^j}\right), \quad P^i_j \equiv \left(\frac{\partial X^i}{\partial X'^j}\right), \quad P^i_{jk} \equiv \frac{\partial^2 X^i}{\partial X'^j \partial X'^k}, \quad (2)$$

и кроме того будем использовать обозначения для частных производ-

ных:

$$\frac{\partial f}{\partial X^i} \equiv f_{,i}, \quad \frac{\partial f}{\partial X^{\bar{n}}} \equiv f_{|\bar{n}} = P^j_{\bar{n}} f_{,j}. \quad (3)$$

Примером двумерного ( $n = 2$ ) элементарного многообразия  $M^2$  являются поверхности в  $\mathbb{R}^3$ , на которых определены криволинейные координаты  $X_1, X_2$  и которые заданы тремя функциями:

$$x^i = x^i(X^1, X^2), \quad i = 1, 2, 3. \quad (4)$$

## 1.2 Касательное пространство

Определение 2. Кривой  $\mathcal{L}$  в многообразии  $M^n$  называют отображение  $\mathcal{L} : [\xi_1, \xi_2] \in \mathbb{R}^1 \longrightarrow M^n$ , которое записывают в виде функции:

$$X^i = X^i(\xi) \quad \forall \xi \in [\xi_1, \xi_2], \quad X^i \in M^n. \quad (5)$$

Здесь  $X^i$  - координаты точки  $\mathcal{M} \in M^n$ ,  $[\xi_1, \xi_2]$  - некоторый отрезок из  $\mathbb{R}^1$ , ( $\xi_1 < \xi_2$ ), а функции (5) предполагаем непрерывно дифференцируемыми, по крайней мере, два раза.

Зафиксировав значение параметра  $\xi \in [\xi_1, \xi_2]$ , получим некоторую точку  $\mathcal{M} \in \mathcal{L}$ , в ней можно вычислить производные от функций (5):

$$a^i = \frac{dX^i}{d\xi}. \quad (6)$$

Определение 3. Упорядоченный набор  $(a_1 \dots a_n)$  производных (6) называют компонентами касательного вектора  $a^i$  в точке  $\mathcal{M}$  кривой  $\mathcal{L}$  в  $M^n$ .

Если перейти к координатам  $X^{\bar{n}}$  той же точки  $\mathcal{M} \in \mathcal{L}$ , то согласно (1)

получаем, что компоненты касательного вектора  $a'^i$  в этой системе координат будут иметь вид:  $a'^i = \frac{dX'^i}{d\xi}$  и связаны с  $a^i$  тензорным законом:

$$a'^i = Q^i_j a^j. \quad (7)$$

Поскольку через фиксированную точку  $\mathcal{M} \in M^n$  можно провести различные кривые  $\mathcal{L}$ , то, вообще говоря, в каждой точке  $\mathcal{M}$  имеется множество упорядоченных наборов  $(a_1 \dots a_n)$ . Определим операции с этими наборами.

Пусть имеется две кривые  $\mathcal{L}_1$  и  $\mathcal{L}_2$ , заданные в виде функций  $X_1^i(\xi)$ ,  $X_2^i(\xi)$ , проходящие через точку  $\mathcal{L}$ , тогда можно построить два набора компонент касательных векторов  $a_1^i = \frac{dX_1^i}{d\xi}$  и  $a_2^i = \frac{dX_2^i}{d\xi}$ .

Суммой компонент двух касательных векторов назовём набор

$$a_1^i + a_2^i = \frac{dX_1^i + X_2^i}{d\xi}, \quad (8)$$

который представляет собой компоненты касательного вектора к кривой  $(X_1^i + X_2^i)(\xi)$  в данной точке  $\mathcal{M}$ .

Аналогично определяем произведение компонент  $a^i$  на вещественное число  $\lambda$ :

$$\lambda a^i = \lambda \frac{dX^i}{d\xi} = \frac{d\lambda X^i}{d\xi}. \quad (9)$$

Поскольку набор чисел  $(a_1 \dots a_n)$  является элементом пространства  $\mathbb{R}$ , то, выбрав базис  $e_i$  в этом пространстве, можно построить сам касательный вектор  $a$  в точке  $\mathcal{M}$  кривой  $\mathcal{L}$ :  $a = a^i e_i = a'^i e'_i$ , где  $e'_i = P^j_i e_j$  - новый базис.

**Определение 4.** Касательным пространством в данной точке  $\mathcal{M}$  элементарного многообразия  $M^n$  называют множество касательных векторов  $= a^i e_i$ , построенных ко всевозможным кривым  $\mathcal{L}$ , проходящим через данную точку.

**Теорема 1.** Касательное пространство в любой точке  $\mathcal{M} \in M^n$  является  $n$ -мерным линейным пространством, которое обозначают как  $T_{\mathcal{M}} M^n$ ,



а векторы  $e$ , образуют базис в нем.

### 1.3 Определение риманова пространства

Определение 5. Элементарное  $n$ -мерное многообразие  $M^n$  называют римановым пространством  $\mathbb{V}^n$ , если в каждой точке  $\mathcal{M} \in M^n$  с координатами  $X^i$  задана матрица  $g_{ij}$   $n$ -го порядка, которая является

- 1) симметричной,
- 2) невырожденной:  $\det(\tilde{g}_{ij}) \neq 0, \quad \forall X^i$ ,
- 3) компоненты её являются непрерывно-дифференцируемыми функциями,
- 4) при переходе к другим координатам  $X'^l$  преобразуется по тензорному закону:

$$g_{ij} = Q^k_i Q^l_j g'_{kl}. \quad (10)$$

Двумерные поверхности в  $\mathbb{R}^3$ , очевидно, можно рассматривать как двумерные римановы пространства  $\mathbb{V}^2$  с метрической матрицей  $\tilde{g}_{IJ}$ .

Расстояние в римановом пространстве вводят для бесконечно близких точек  $\mathcal{M}$  и  $\mathcal{M}'$ , имеющих координаты  $X^i$  и  $X^i + dX^i$ , и определяют его как

$$ds^2 = \kappa g_{ij} dX^i dX^j, \quad (11)$$

где  $\kappa$  – знаковое число, которое выбирают так, чтобы форма (11) была положительной.

Риманово пространство называют собственно римановым, если метрическая матрица  $g_{ij}, \forall X^i \in \mathcal{D}$  является положительно-определённой, в противном случае говорят о псевдоримановых пространствах.

## 2 Свойства римановых пространств

Рассмотрим некоторые свойства римановых пространств, которые понадобятся нам для введения тензора Эйнштейна, чтобы указать связь римановых пространств с общей теорией относительности.

### 2.1 Коэффициенты связности в $\mathbb{V}^n$

Поскольку в каждой точке  $\mathcal{M}(X^i) \in \mathbb{V}^n$  введена метрическая матрица  $g_{ij}(X^i)$  компоненты которой, согласно п.3 определения 5, являются непрерывно дифференцируемыми функциями, то можно вычислить производные  $\frac{\partial g_{ij}}{\partial X^k}$  и образовать из них следующие объекты:

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2}(g_{ik,j} + g_{jk,i} - g_{ij,k}). \quad (12)$$

Определение 6. Функции  $\Gamma_{ijk}$  определённые по формулам (12), называют коэффициентами связности первого рода в  $\mathbb{V}^n$ . Коэффициенты связности второго рода вводим с помощью обратной матрицы  $g^{ij}$ :

$$\Gamma_{ij}^m = g^{mp}\Gamma_{ijp}. \quad (13)$$

### 2.2 Определение аффинной связности

Определение 7. Элементарное  $n$ -мерное многообразие  $M^n$  называют пространством аффинной связности  $\mathbb{L}^n$ , если в каждой точке  $\mathcal{M} \in M^n$  с координатами  $X^i$  задана система функций  $\Gamma_{ij}^{*m}$ , которые

- 1) являются непрерывно-дифференцируемыми функциями,
- 2) при переходе к другим координатам  $X'^i$  преобразуются следующим

образом:

$$\Gamma_{ij}^{*m} = P_i^l P_j^q Q_r^m \Gamma_{lq}^{*r} + Q_r^m P_{ij}^r. \quad (14)$$

Функции  $\Gamma_{ij}^{*m}$ , заданные в  $\mathbb{L}^n$ , называют коэффициентами аффинной связности (или просто аффинной связностью).

### 2.3 Тензоры в элементарном многообразии

Построим в каждой точке  $\mathcal{M} \in M^n$  множество наборов касательных векторов:

$$(a_1 b^{(1)} a_2 b^{(2)} \dots a_n b^{(n)}) \equiv (a_i b^{(i)}), \quad (15)$$

где  $a_i \in T_{\mathcal{M}} M^n$ ,  $b^{(i)} \in T_{\mathcal{M}}^* M^n$ , и введём на этом множестве операции сложения и умножения на вещественное число  $s$ :

$$(a_i b^{(i)}) + (a_i c^{(i)}) = (a_i (b^{(i)} + c^{(i)})), \quad (16)$$

$$(a_i b^{(i)}) + (d_i b^{(i)}) = ((a_i + d_i) b^{(i)}), \quad (17)$$

$$s(a_i b^{(i)}) = ((s a_i) b^{(i)}) = (a_i (s b^{(i)})). \quad (18)$$

Определение 8. Тензорным касательным пространством  $\mathcal{T}_n^{(pq)}(T_{\mathcal{M}} M^n)$  типа  $pq$ , где  $p+q = 2$ , в точке  $\mathcal{M}$  элементарного многообразия  $M^n$  называют тензорное произведение касательного пространства  $T_{\mathcal{M}} M^n$  на себя:

$$\mathcal{T}_n^{(pq)}(T_{\mathcal{M}} M^n) = T_{\mathcal{M}} M^n \otimes T_{\mathcal{M}} M^n \quad \forall \mathcal{M} \in M^n, \quad p+q = 2, \quad (19)$$

где тензорное произведение вводится как фактор-пространство  $n$ -ой степе-

ни декартова квадрата

$$T_{\mathcal{M}}M^n \otimes T_{\mathcal{M}}M^n = [(T_{\mathcal{M}}M^n \times T_{\mathcal{M}}M^n)^n] \quad (20)$$

Базисные диады в  $\mathcal{T}_n^{(pq)}(T_{\mathcal{M}}M^n)$  введём как

$$e_j \otimes e_k = [e_i(\delta_j^i e_k)], \quad (21)$$

где  $[ \ ]$  – классы эквивалентности соответствующих наборов касательных векторов. Очевидно, что если рассматриваемое многообразие  $M^2$  является поверхностью  $\Sigma \in \mathbb{R}^3$ , то базисные диады совпадают с соответствующими диадами  $\rho_I \otimes \rho_K$ .

Определение 9. Тензором второго ранга  $A(\mathcal{M})$  типа  $(pq)$  в точке  $\mathcal{M} \in M^n$  называют элемент тензорного произведения касательного пространства  $\mathcal{T}_n^{(pq)}(T_{\mathcal{M}}M^n)$ ,  $p + q = 2$ .

Тензор  $k$ -го ранга  ${}^k A(\mathcal{M})$  введём как

$${}^k A = A_{i_1 \dots i_p}{}^{j_1 \dots j_q} e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_q}, \quad p + q = k. \quad (22)$$

## 2.4 Определение тензора в римановом пространстве

Если в многообразии  $M^n$  введена метрическая матрица  $g_{ij}$  то оно становится римановым пространством  $\mathbb{V}$ , а касательное пространство в каждой точке  $\mathcal{M} \in \mathbb{V}^n$  – евклидовым (или псевдоевклидовым)  $T_{\mathcal{M}}\mathbb{V}^n$ . Тогда используя соглашение о совпадении пространств  $T_{\mathcal{M}}^* \mathbb{V}^n$  и  $T_{\mathcal{M}}\mathbb{V}^n$ , можно говорить о тензорном касательном пространстве  $\mathcal{T}_n^{(k)}(T_{\mathcal{M}}\mathbb{V}^n)$ , заданном на римановом пространстве  $\mathbb{V}^n$ .

## 2.5 Ковариантное дифференцирование тензоров в $\mathbb{V}^n$

Рассмотрим в  $\mathbb{V}^n$  произвольное поле тензора  $k$ -го ранга:

$${}^k\Omega(X^i) = \Omega^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} \mathbf{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i_p} \otimes \mathbf{e}^{j_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}^{j_q}, \quad p + q = k, \quad (23)$$

причём его компоненты  $\Omega^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$  будем считать непрерывно дифференцируемыми функциями координат  $X^i$  точки  $\mathcal{M} \in \mathbb{V}^n$

Определение 10. Ковариантной производной от компонент тензора  $\Omega^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$   $k$ -го ранга  ${}^k\Omega$ , определённого в  $\mathbb{V}^n$ , называют следующий объект:

$$\begin{aligned} \nabla_i \Omega^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} = & \frac{\partial}{\partial X^i} \Omega^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} + \sum_{s=1}^p \Gamma_{mi}^s \Omega^{i_1 \dots i_p = m \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} + \dots \\ & \dots - \sum_{s=1}^q \Gamma_{js}^m \Omega^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q = m \dots i_q}, \quad p + q = k. \end{aligned} \quad (24)$$

## 2.6 Ковариантное дифференцирование тензоров в $\mathbb{L}^n$

Наличие связности  $\Gamma_{ij}^m$  в  $\mathbb{L}^n$  означает, что в этом пространстве определена операция ковариантного дифференцирования.

Определение 11. Ковариантной производной от компонент тензора  ${}^k A \in \mathcal{T}_n^{pq}(T\mathcal{M}\mathbb{L}^n)$ ,  $k = p + q$ , (или иначе ковариантной производной относительно связности  $\Gamma_{ij}^m$ ) называют следующий объект:

$$\nabla_i^* A^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} + \sum_{s=1}^p \Gamma_{mi}^s A^{i_1 \dots i_s = m \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} - \sum_{s=1}^q \Gamma_{js}^m A^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_s = m \dots i_q}. \quad (25)$$

Теорема 2. Ковариантная производная от компонент тензора  $k$ -го ранга является компонентами тензора  $(k+1)$ -го ранга  $\nabla \otimes^k A$  в  $\mathbb{L}^n$ , называемого

градиентом тензора:

$$\nabla^* \otimes^k A = A^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} e^i \otimes e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_q}, \quad p + q = k. \quad (26)$$

## 2.7 Риманово пространство с аффинной связностью

В римановом пространстве  $\mathbb{V}^n$  у нас была определена метрика  $g_{ij}$  (ей соответствовала вполне определённая связность  $\Gamma_{ij}^m$ ). Можно однако построить такое пространство, в котором будет одновременно определена и метрика  $g_{ij}$ , и некоторая «самостоятельная» связность  $\Gamma_{ij}^{*m}$ , для которой уже не имеют места соотношения (12).

Определение 12. Элементарное  $n$ -мерное многообразие  $M^n$  называют римановым пространством аффинной связностью  $\mathbb{W}^n$ , если в каждой точке  $\mathcal{M} \in M^n$  с координатами  $x^i$  заданы две системы функций  $g_{ij}$  и  $\Gamma_{ij}^{*m}$ , вообще говоря, не связанные никакими соотношениями и удовлетворяющие свойствам 1-4 из определения 5 и 1,2 из определения 7 соответственно.

Поскольку в  $\mathbb{W}^n$  определена метрическая матрица  $g_{ij}$ , то можно образовывать из неё символы  $\Gamma_{ij}^m$  по формуле (13)

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2} g^{mk} (g_{ik,j} + g_{jk,i} - g_{ij,k}). \quad (27)$$

Символы  $\Gamma_{ij}^{*m}$  уже не являются связностью:  $\Gamma_{ij}^{*m} \neq \Gamma_{ij}^m$ .

## 2.8 Тензор Римана-Кристоффеля

Рассмотрим в точке  $\mathcal{M} \in \mathbb{L}^n$  произвольный вектор  $b = b^k e_k$  из  $T_{\mathbb{L}^n}$  и вычислим его ковариантную производную относительно связности  $\Gamma_{ij}^{*m}$ :

$$\nabla_i^* b^k = \frac{\partial b^k}{\partial X^i} + \Gamma_{si}^k b^s. \quad (28)$$

Вычислим вторую ковариантную производную:

$$\begin{aligned} \nabla_j^* \nabla_i^* b^k &= \frac{\partial}{\partial X^j} + \Gamma_{mj}^* \nabla_i^* b^m - \Gamma_{ij}^m \nabla_m b^k = \frac{\partial^2 b^k}{\partial X^j \partial X^i} + \frac{\partial \Gamma_{si}^k}{\partial X^j} b^s + \Gamma_{si}^* \frac{\partial b^s}{\partial X^j} + \\ &+ \Gamma_{mj}^* \left( \frac{\partial b^m}{\partial X^i} + \Gamma_{mj}^* b^s \right) - \Gamma_{ij}^m \left( \frac{\partial b^k}{\partial X^m} + \Gamma_{sm}^* b^s \right). \end{aligned} \quad (29)$$

Поменяем теперь индексы  $i$  и  $j$  и образуем разность:

$$\nabla_j^* \nabla_i^* b^k - \nabla_i^* \nabla_j^* b^k = \left( \frac{\partial \Gamma_{si}^k}{\partial X^j} - \frac{\partial \Gamma_{sj}^k}{\partial X^i} + \Gamma_{mj}^* \Gamma_{si}^m - \Gamma_{mi}^* \Gamma_{sj}^m \right) b^s - (\Gamma_{ij}^m - \Gamma_{ji}^m) \nabla_m b^k. \quad (30)$$

Коэффициенты, стоящие в первой скобке, обозначим следующим образом:

$$R_{jis}^*{}^k = \Gamma_{si,j}^k - \Gamma_{sj,i}^k + \Gamma_{si}^* \Gamma_{mj}^* + \Gamma_{sj}^* \Gamma_{mi}^*. \quad (31)$$

Здесь, как и ранее,  $\Gamma_{si,j}^k = \partial \Gamma_{si}^k / \partial X^j$ .

Теорема 3. Система коэффициентов  $R_{jis}^*{}^k$ , образованная по формуле (31), представляет собой компоненты тензора  ${}^4_* R$  четвёртого ранга из пространства  $\mathcal{T}_n^{(31)}(T_M \mathbb{L}^n)$ :

$${}^4_* R = R_{jis}^*{}^k e^j \otimes e^i \otimes e^s \otimes e_k \quad (32)$$

Определение 13. Тензор (32) называют тензором кривизны пространства  $\mathbb{L}^n$  относительно связности  $\Gamma_{ij}^m$  (или тензором Римана-Кристоффеля).

## 2.9 Тензор Риччи

В пространстве  $\mathbb{W}^n$  из тензора Римана-Кристоффеля можно образовать несколько тензоров второго ранга. Свёртка транспонированного тензора Римана-Кристоффеля  ${}^4R$  с метрическим тензором образует тензор второго ранга:

$$\mathcal{R}^* = {}^4R^{(2314)} \cdot \cdot E, \quad (33)$$

называемый тензором Риччи. Компоненты этого тензора имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^* &= R_{ji}^* e^j \otimes R_{i_1 i_2 i_3 i_4}^* e^{i_2} \otimes e^{i_3} \otimes e^{i_1} \otimes e^{i_4} \cdot \cdot e^{i_4} \cdot \cdot e^k \otimes e_k = \\ &= R_{i_1 i_2 i_3 i_4}^* \delta_k^{i_1} g^{i_4 k} e^{i_2} \otimes e^{i_3} = R_{kji}^* e^j \otimes e^i, \end{aligned} \quad (34)$$

то есть

$$R_{ji}^* = R_{kji}^*{}^k = R_{nji}^*{}^k \delta_k^n. \quad (35)$$

Подставляя в (35) выражение (31) для компонент тензора Римана-Кристоффеля, получаем:

$$R_{ji}^* = \frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial X^k} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^k}{\partial X^j} + \Gamma_{ij}^* \Gamma_{nk}^* - \Gamma_{ik}^* \Gamma_{nj}^*. \quad (36)$$

Аналогичным образом можно ввести тензор Риччи относительно символов  $\Gamma_{ij}^k$ :

$$R_{ji} = R_{kji}{}^k = R_{nji}{}^k \delta_k^n, \quad (37)$$



и

$$R_{ji} = \Gamma_{ij,k}^k - \Gamma_{ik,j}^k + \Gamma_{ij}^m \Gamma_{mk}^k - \Gamma_{ik}^m \Gamma_{kj}^k. \quad (38)$$

## 2.10 Тензор Эйнштейна

Тензоры Эйнштейна  $\overset{*}{G}$  и  $G$  образуются из тензоров Риччи  $\overset{*}{\mathcal{R}}$  и  $\mathcal{R}$  следующим образом:

$$\overset{*}{G} = \overset{*}{\mathcal{R}} - \frac{1}{2} \overset{*}{\mathcal{R}} E, \quad G = \mathcal{R} - \frac{1}{2} \mathcal{R} E, \quad (39)$$

где  $\overset{*}{\mathcal{R}} = \overset{*}{R} \cdot \cdot E$  и  $\mathcal{R} = R \cdot \cdot E$  – свертки тензоров Риччи с метрическим тензором.

Тензор Эйнштейна играет важную роль в общей теории относительности (см., например, [2], [3], [4]).

### 3 Практическая часть

#### 3.1 Гауссова кривизна однополостного гиперboloида

Рассмотрим однополостный гиперboloид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (40)$$

Определение. Пусть  $\omega$ -открытая область в двумерном пространстве  $\mathbb{R}^2$ , тогда поверхностью  $\Sigma$  в трехмерном пространстве  $\mathbb{R}^3$  называют отображение  $\Sigma : \omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ , которое задаст с помощью вектор-функции  $x = x(X^1, X^2)$ ,  $(X^1, X^2) \in \omega \subset \mathbb{R}^2$  или с помощью трех числовых функций  $x^i = x^i(X^1, X^2)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , зависящих от двух аргументов  $X^1$  и  $X^2$ .

Зададим поверхность с трех числовых функций  $x^i = x^i(X^1, X^2)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , зависящих от двух аргументов  $X^1$  и  $X^2$ .

Пусть  $X^1 = u$ ,  $X^2 = v$ , тогда гиперboloид задается следующими тремя функциями:

$$\begin{cases} x = a \cdot chu \cdot \cos v, \\ y = b \cdot chu \cdot \sin v, \\ z = c \cdot shu. \end{cases} \quad (41)$$

Введем два локальных вектора базиса  $\rho_i = \frac{\partial x}{\partial X^i}$  на поверхности:

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_1 &= \frac{\partial x}{\partial X^1} = \frac{\partial x}{\partial X^1} \cdot \bar{e}_1 + \frac{\partial y}{\partial X^1} \cdot \bar{e}_2 + \frac{\partial z}{\partial X^1} \cdot \bar{e}_3 = \\ &= a \cdot shu \cdot \cos v \cdot \bar{e}_1 + b \cdot shu \cdot \sin v \cdot \bar{e}_2 + c \cdot chu \cdot \bar{e}_3, \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned}\bar{\rho}_2 &= \frac{\partial x}{\partial X^2} = \frac{\partial x}{\partial X^2} \cdot \bar{e}_1 + \frac{\partial y}{\partial X^2} \cdot \bar{e}_2 + \frac{\partial z}{\partial X^2} \cdot \bar{e}_3 = \\ &= -a \cdot chu \cdot \sin v \cdot \bar{e}_1 + b \cdot chu \cdot \cos v \cdot \bar{e}_2.\end{aligned}\quad (43)$$

Введем метрическую матрицу поверхности:

$$g_{ij} = \rho_i \cdot \rho_j, \quad (44)$$

$$g_{11} = \rho_1 \cdot \rho_1 = a^2 \cdot sh^2 u \cdot \cos^2 v + b^2 \cdot sh^2 u \cdot \sin^2 v + c^2 \cdot ch^2 u, \quad (45)$$

$$\begin{aligned}g_{12} = \rho_1 \cdot \rho_2 &= -a^2 \cdot sh u \cdot chu \cdot \cos v \cdot \sin v + \\ &+ b^2 \cdot sh u \cdot chu \cdot \cos v \cdot \sin v,\end{aligned}\quad (46)$$

$$\begin{aligned}g_{21} = \rho_2 \cdot \rho_1 &= -a^2 \cdot sh u \cdot chu \cdot \cos v \cdot \sin v + \\ &+ b^2 \cdot sh u \cdot chu \cdot \cos v \cdot \sin v,\end{aligned}\quad (47)$$

$$g_{22} = \rho_2 \cdot \rho_2 = a^2 \cdot ch^2 u \cdot \sin^2 v + b^2 \cdot ch^2 u \cdot \cos^2 v. \quad (48)$$

Определитель метрической матрицы  $g_{ij}$ :

$$\begin{aligned}g &= \det(g_{ij}) = g_{11} \cdot g_{22} - g_{12}^2 = \\ &= ((c^2(-a^2 + b^2))\cos^2 v + a^2(b^2 + c^2))ch^2 u - a^2 \cdot b^2 ch^2 u.\end{aligned}\quad (49)$$

Обозначим вторую производную от радиус-вектора как:

$$\rho_{ij} = \frac{\partial \rho_i}{\partial X^j} = \frac{\partial^2 x}{\partial X^i \partial X^j}, \quad (50)$$

$$\bar{\rho}_{11} = \frac{\partial \rho_1}{\partial X^1} = \frac{\partial^2 x}{\partial X^1 \partial X^1} = \frac{\partial^2 x}{\partial X^1 \partial X^1} \cdot \bar{e}_1 + \frac{\partial^2 y}{\partial X^1 \partial X^1} \cdot \bar{e}_2 + \frac{\partial^2 z}{\partial X^1 \partial X^1} \cdot \bar{e}_3 = \quad (51)$$

$$= a \cdot chu \cdot \cos v \cdot \bar{e}_1 + b \cdot chu \cdot \sin v \cdot \bar{e}_2 + c \cdot shu \cdot \bar{e}_3,$$

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_{12} &= \frac{\partial \rho_1}{\partial X^2} = \frac{\partial^2 x}{\partial X^1 \partial X^2} = \frac{\partial^2 x}{\partial X^1 \partial X^2} \cdot \bar{e}_1 + \frac{\partial^2 y}{\partial X^1 \partial X^2} \cdot \bar{e}_2 + \frac{\partial^2 z}{\partial X^1 \partial X^2} \cdot \bar{e}_3 = (52) \\ &= -a \cdot shu \cdot \sin v \cdot \bar{e}_1 + b \cdot shu \cdot \cos v \cdot \bar{e}_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_{21} &= \frac{\partial \rho_2}{\partial X^1} = \frac{\partial^2 x}{\partial X^2 \partial X^1} = \frac{\partial^2 x}{\partial X^2 \partial X^1} \cdot \bar{e}_1 + \frac{\partial^2 y}{\partial X^2 \partial X^1} \cdot \bar{e}_2 + \frac{\partial^2 z}{\partial X^2 \partial X^1} \cdot \bar{e}_3 = (53) \\ &= -a \cdot shu \cdot \sin v \cdot \bar{e}_1 + b \cdot shu \cdot \cos v \cdot \bar{e}_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_{22} &= \frac{\partial \rho_2}{\partial X^2} = \frac{\partial^2 x}{\partial X^2 \partial X^2} = \frac{\partial^2 x}{\partial X^2 \partial X^2} \cdot \bar{e}_1 + \frac{\partial^2 y}{\partial X^2 \partial X^2} \cdot \bar{e}_2 + \frac{\partial^2 z}{\partial X^2 \partial X^2} \cdot \bar{e}_3 = (54) \\ &= -a \cdot chu \cdot \cos v \cdot \bar{e}_1 - b \cdot chu \cdot \sin v \cdot \bar{e}_2. \end{aligned}$$

Найдем коэффициенты  $b_{ij}$  второй квадратичной формы по формуле:

$$b_{ij} = \frac{1}{\sqrt{g}} \rho_{ij} \cdot \rho_1 \times \rho_2, \quad (55)$$

$$b_{11} = \frac{1}{\sqrt{g}} \rho_{11} \cdot \rho_1 \times \rho_2 = \quad (56)$$

$$= - \frac{a \cdot b \cdot c \cdot chu}{\sqrt{((c^2(-a^2 + b^2))\cos^2 v + a^2(b^2 + a^2))ch^2 u - a^2 \cdot b^2)ch^2 u}},$$

$$b_{12} = \frac{1}{\sqrt{g}} \rho_{12} \cdot \rho_1 \times \rho_2 = b_{21} = \frac{1}{\sqrt{g}} \rho_{21} \cdot \rho_1 \times \rho_2 = 0, \quad (57)$$

$$b_{22} = \frac{1}{\sqrt{g}} \rho_{22} \cdot \rho_1 \times \rho_2 = \tag{58}$$

$$= \frac{a \cdot b \cdot c \cdot ch^3 u}{\sqrt{((c^2(-a^2 + b^2))\cos^2 v + a^2(b^2 + a^2))ch^2 u - a^2 \cdot b^2)ch^2 u}}.$$

Если известны коэффициенты квадратичных форм  $g_{ij}$  и  $b_{ij}$  в каком-либо базисе  $\rho^i$ , то собственные значения  $k_i$  тензора  $B$  находим из характеристического уравнения:

$$\det(b_{ij} - k_i \cdot g_{ij}) = 0, i = 1, 2; \tag{59}$$

или в матричной записи

$$\begin{vmatrix} b_{11} - k_i \cdot g_{11} & b_{12} - k_i \cdot g_{12} \\ b_{12} - k_i \cdot g_{12} & b_{22} - k_i \cdot g_{22} \end{vmatrix} = 0. \tag{60}$$

Определение. Собственные значения  $k_i$  тензора  $B$   $k_1$  и  $k_2$  называют главными кривизнами поверхности.

Раскроем определитель (60) и получим квадратное уравнение:

$$k_i^2(g_{11} \cdot g_{22} - g_{12}^2) - k_i(b_{11} \cdot g_{22} + b_{22} \cdot g_{11}) + b_{11} \cdot b_{22} = 0. \tag{61}$$

Решим квадратное уравнение (61):

$$D = (b_{11} \cdot g_{22} + b_{22} \cdot g_{11})^2 - 4 \cdot (g_{11} \cdot g_{22} - g_{12}^2)b_{11} \cdot b_{22} = \tag{62}$$

$$= \frac{(ch^4 u \cdot b^2(((a^2 - b^2)\cos^2 v + b^2 + c^2)^2 ch^4 u - 2((a^2 + b^2 + 2c^2)\cos^2 v - ((-a^2 c^2 + b^2 c^2)\cos^2 v + a^2(b^2 + c^2))ch^2 u -$$

$$\frac{-b^2 - c^2)(a - b)(a + b)ch^2u + (a - b)^2(a + b)^2c^2a^2)}{-a^2b^2)}.$$

Получаем главные кривизны:

$$k_1 = \frac{b_{11} \cdot g_{22} + b_{22} \cdot g_{11} + \sqrt{D}}{2(g_{11} \cdot g_{22} - g_{12}^2)}, \quad (63)$$

$$k_2 = \frac{b_{11} \cdot g_{22} + b_{22} \cdot g_{11} - \sqrt{D}}{2(g_{11} \cdot g_{22} - g_{12}^2)}. \quad (64)$$

Определение. Произведение главных кривизн называется полной или гауссовой кривизной:

$$K = k_1 \cdot k_2 = - \frac{a^2b^2c^2}{((( -a^2c^2 + b^2c^2) \cos^2 v + a^2(b^2 + c^2))ch^2u - a^2b^2)^2} \quad (65)$$

или

$$\begin{aligned} K &= \det \frac{b_{ij}}{g_{ij}} = \frac{b}{g} = \frac{b_{11} \cdot b_{22}}{g} = \\ &= - \frac{a^2b^2c^2}{((( -a^2c^2 + b^2c^2) \cos^2 v + a^2(b^2 + c^2))ch^2u - a^2b^2)^2}. \end{aligned} \quad (66)$$

Перейдем к декартовой системе координат и получим гауссову кривизну гиперboloида:

$$K = - \frac{1}{a^2b^2c^2 \left( \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} \right)^2} \quad (67)$$

### 3.2 Гауссова кривизна мнимого однополостного гиперboloида

Рассмотрим мнимый однополостный гиперboloид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1. \quad (68)$$

Пусть  $X^1 = u$ ,  $X^2 = v$ , тогда гиперboloид задается следующими тремя функциями:

$$\begin{cases} x = a \cdot shu \cdot cosv, \\ y = b \cdot shu \cdot sinv, \\ z = c \cdot chu. \end{cases} \quad (69)$$

Введем два локальных вектора базиса  $\rho_i = \frac{\partial x}{\partial X^i}$  на поверхности:

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_1 &= \frac{\partial x}{\partial X^1} = \frac{\partial x}{\partial X^1} \cdot \bar{e}_1 + \frac{\partial y}{\partial X^1} \cdot \bar{e}_2 + \frac{\partial z}{\partial X^1} \cdot \bar{e}_3 = \\ &= a \cdot chu \cdot cosv \cdot \bar{e}_1 + b \cdot chu \cdot sinv \cdot \bar{e}_2 + c \cdot shu \cdot \bar{e}_3, \end{aligned} \quad (70)$$

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_2 &= \frac{\partial x}{\partial X^2} = \frac{\partial x}{\partial X^2} \cdot \bar{e}_1 + \frac{\partial y}{\partial X^2} \cdot \bar{e}_2 + \frac{\partial z}{\partial X^2} \cdot \bar{e}_3 = \\ &= -a \cdot shu \cdot sinv \cdot \bar{e}_1 + b \cdot shu \cdot cosv \cdot \bar{e}_2. \end{aligned} \quad (71)$$

Введем метрическую матрицу поверхности:

$$g_{ij} = \rho_i \cdot \rho_j, \quad (72)$$

$$g_{11} = \rho_1 \cdot \rho_1 = a^2 \cdot ch^2u \cdot cos^2v + b^2 \cdot ch^2u \cdot sin^2v + c^2 \cdot sh^2u, \quad (73)$$

$$g_{12} = \rho_1 \cdot \rho_2 = -a^2 \cdot shu \cdot chu \cdot cosv \cdot sinv + \quad (74)$$

$$+ b^2 \cdot shu \cdot chu \cdot cosv \cdot sinv,$$

$$g_{21} = \rho_2 \cdot \rho_1 = -a^2 \cdot shu \cdot chu \cdot cosv \cdot sinv + \quad (75)$$

$$+ b^2 \cdot shu \cdot chu \cdot cosv \cdot sinv,$$

$$g_{22} = \rho_2 \cdot \rho_2 = a^2 \cdot sh^2u \cdot sin^2v + b^2 \cdot sh^2u \cdot cos^2v. \quad (76)$$

Определитель метрической матрицы  $g_{ij}$ :

$$g = det(g_{ij}) = g_{11} \cdot g_{22} - g_{12}^2 = \quad (77)$$

$$= (((c^2(-a^2 + b^2))cos^2v + a^2(b^2 + c^2))ch^2u + c^2((a^2 -$$

$$- b^2)cos^2v - a^2))sh^2u.$$

Обозначим вторую производную от радиус-вектора как:

$$\rho_{ij} = \frac{\partial \rho_i}{\partial X^j} = \frac{\partial^2 x}{\partial X^i \partial X^j}, \quad (78)$$

$$\bar{\rho}_{11} = \frac{\partial \rho_1}{\partial X^1} = \frac{\partial^2 x}{\partial X^1 \partial X^1} = \frac{\partial^2 x}{\partial X^1 \partial X^1} \cdot \bar{e}_1 + \frac{\partial^2 y}{\partial X^1 \partial X^1} \cdot \bar{e}_2 + \frac{\partial^2 z}{\partial X^1 \partial X^1} \cdot \bar{e}_3 = \quad (79)$$

$$= a \cdot shu \cdot cosv \cdot \bar{e}_1 + b \cdot shu \cdot sinv \cdot \bar{e}_2 + c \cdot chu \cdot \bar{e}_3,$$

$$\bar{\rho}_{12} = \frac{\partial \rho_1}{\partial X^2} = \frac{\partial^2 x}{\partial X^1 \partial X^2} = \frac{\partial^2 x}{\partial X^1 \partial X^2} \cdot \bar{e}_1 + \frac{\partial^2 y}{\partial X^1 \partial X^2} \cdot \bar{e}_2 + \frac{\partial^2 z}{\partial X^1 \partial X^2} \cdot \bar{e}_3 = \quad (80)$$

$$= -a \cdot chu \cdot sinv \cdot \bar{e}_1 + b \cdot chu \cdot cosv \cdot \bar{e}_2,$$

$$\bar{\rho}_{21} = \frac{\partial \rho_2}{\partial X^1} = \frac{\partial^2 x}{\partial X^2 \partial X^1} = \frac{\partial^2 x}{\partial X^2 \partial X^1} \cdot \bar{e}_1 + \frac{\partial^2 y}{\partial X^2 \partial X^1} \cdot \bar{e}_2 + \frac{\partial^2 z}{\partial X^2 \partial X^1} \cdot \bar{e}_3 = \quad (81)$$



$$= -a \cdot chu \cdot \sin v \cdot \bar{e}_1 + b \cdot chu \cdot \cos v \cdot \bar{e}_2,$$

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_{22} &= \frac{\partial \rho_2}{\partial X^2} = \frac{\partial^2 x}{\partial X^2 \partial X^2} = \frac{\partial^2 x}{\partial X^2 \partial X^2} \cdot \bar{e}_1 + \frac{\partial^2 y}{\partial X^2 \partial X^2} \cdot \bar{e}_2 + \frac{\partial^2 z}{\partial X^2 \partial X^2} \cdot \bar{e}_3 = (82) \\ &= -a \cdot shu \cdot \cos v \cdot \bar{e}_1 - b \cdot shu \cdot \sin v \cdot \bar{e}_2. \end{aligned}$$

Найдем коэффициенты  $b_{ij}$  второй квадратичной формы по формуле

$$b_{ij} = \frac{1}{\sqrt{g}} \rho_{ij} \cdot \rho_1 \times \rho_2, \quad (83)$$

$$b_{11} = \frac{1}{\sqrt{g}} \rho_{11} \cdot \rho_1 \times \rho_2 = \quad (84)$$

$$= \frac{a \cdot b \cdot c \cdot shu}{\sqrt{((c^2(-a^2 + b^2))\cos^2 v + a^2(b^2 + c^2))ch^2 u + c^2((a^2 - b^2)\cos^2 v - a^2))sh^2 u}},$$

$$b_{12} = \frac{1}{\sqrt{g}} \rho_{12} \cdot \rho_1 \times \rho_2 = b_{21} = \frac{1}{\sqrt{g}} \rho_{21} \cdot \rho_1 \times \rho_2 = 0, \quad (85)$$

$$b_{22} = \frac{1}{\sqrt{g}} \rho_{22} \cdot \rho_1 \times \rho_2 = \quad (86)$$

$$= \frac{a \cdot b \cdot c \cdot sh^3 u}{\sqrt{((c^2(-a^2 + b^2))\cos^2 v + a^2(b^2 + c^2))ch^2 u + c^2((a^2 - b^2)\cos^2 v - a^2))sh^2 u}}.$$

Раскроем определитель (60) и получим квадратное уравнение (61).

Решим квадратное уравнение (61):

$$D = (b_{11} \cdot g_{22} + b_{22} \cdot g_{11})^2 - 4 \cdot (g_{11} \cdot g_{22} - g_{12}^2) b_{11} \cdot b_{22} = \frac{(a^2 c^2 (((a^2 - b^2) \cos^2 v + b^2 + c^2)^2 ch^4 u + (-2(a - b)^2 (a + b)^2 \cos^4 v + 2(a - b)^2 (a + b^2 c^2) \cos^2 v + a^2 (b^2 + c^2)) ch^2 u + (a^2 - b^2)^2 \cos^2 v - -2(b^2 + c^2)(a^2 + c^2) ch^2 u + ((a^2 - b^2) \cos^2 u - a^2 - c^2)^2 sh^4 b^2) + c^2((a^2 - b^2) \cos^2 v - a^2))}{(((-a^2 c^2 + b^2) \cos^2 v + b^2 + c^2)^2 ch^4 u + (-2(a - b)^2 (a + b)^2 \cos^4 v + 2(a - b)^2 (a + b^2 c^2) \cos^2 v + a^2 (b^2 + c^2)) ch^2 u + (a^2 - b^2)^2 \cos^2 v - -2(b^2 + c^2)(a^2 + c^2) ch^2 u + ((a^2 - b^2) \cos^2 u - a^2 - c^2)^2 sh^4 b^2) + c^2((a^2 - b^2) \cos^2 v - a^2))}. \quad (87)$$

Получаем главные кривизны (63), (64), с помощью которых по формуле (65) и (66) получаем гауссову кривизну:

$$K = k_1 \cdot k_2 = \frac{a^2 b^2 c^2}{((( -a^2 + b^2) c^2 \cos^2 u + a^2 (b^2 + c^2)) ch^2 u + c^2 ((a^2 - b^2) \cos^2 v - a^2))^2} \quad (88)$$

или

$$K = \det \frac{b_{ij}}{g_{ij}} = \frac{b}{g} = \frac{b_{11} \cdot b_{22}}{g} = \frac{a^2 b^2 c^2}{((( -a^2 + b^2) c^2 \cos^2 u + a^2 (b^2 + c^2)) ch^2 u + c^2 ((a^2 - b^2) \cos^2 v - a^2))^2}. \quad (89)$$

Перейдем к декартовой системе координат:

$$K = \frac{1}{a^2 b^2 c^2 \left( \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} \right)^2} \quad (90)$$

### 3.3 Скалярная кривизна однополостного гиперboloида

Символы Кристоффеля второго рода вычислим по следующей формуле:

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2} g^{mk} \left( \frac{\partial g_{ik}}{\partial X^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial X^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial X^k} \right). \quad (91)$$

Получаем ненулевые символы Кристоффеля:

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{shu \cdot chu(\cos^2 v(-a^2 c^2 + b^2 c^2) + a^2(b^2 + c^2))}{((-a^2 c^2 + b^2 c^2)\cos^2 v + a^2(b^2 + c^2))ch^2 u - a^2 b^2}, \quad (92)$$

$$\Gamma_{22}^1 = - \frac{shu \cdot chu \cdot a^2 b^2}{((-a^2 c^2 + b^2 c^2)\cos^2 v + a^2(b^2 + c^2))ch^2 u - a^2 b^2}, \quad (93)$$

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{(-a^2 c^2 + b^2 c^2)\sin v \cdot \cos v}{((-a^2 c^2 + b^2 c^2)\cos^2 v + a^2(b^2 + c^2))ch^2 u - a^2 b^2}, \quad (94)$$

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{shu}{chu}, \quad (95)$$

$$\Gamma_{22}^2 = \frac{(a^2 c^2 - b^2 c^2)ch^2 u \cdot \sin v \cdot \cos v}{((-a^2 c^2 + b^2 c^2)\cos^2 v + a^2(b^2 + c^2))ch^2 u - a^2 b^2}. \quad (96)$$

Вычислим скалярную кривизну по формуле :

$$R = g^{ij} R_{ji} = g^{ij} \left( \frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial X^k} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^k}{\partial X^j} + \Gamma_{ik}^n \Gamma_{nk}^k - \Gamma_{ik}^n \Gamma_{nj}^k \right) = \quad (97)$$

$$= - \frac{2a^2b^2c^2}{((( -a^2c^2 + b^2c^2) \cos^2 v + a^2(b^2 + c^2))ch^2u - a^2b^2)^2}.$$

Получили, что скалярная кривизна равна двум гауссовым кривизнам.

### 3.4 Пределы изменения гауссовой кривизны однополостного гиперболоида

Найдем условные экстремумы гауссовой кривизны с помощью функции Лагранжа[5]:

$$F(x, y, z) = - \frac{1}{a^2b^2c^2 \left( \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} \right)^2} + \lambda \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 \right). \quad (98)$$

Определим стационарные точки из системы:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{4x}{a^6b^2c^2 \left( \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} \right)^3} + \frac{2\lambda x}{a^2} = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{4y}{a^2b^6c^2 \left( \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} \right)^3} + \frac{2\lambda y}{b^2} = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{4z}{a^2b^2c^6 \left( \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} \right)^3} - \frac{2\lambda z}{c^2} = 0, \\ \varphi(x, y, x) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0. \end{array} \right. \quad (99)$$

Получили стационарные точки, которые находятся на границах гиперболоида:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = a, y = 0, z = 0, \\ x = -a, y = 0, z = 0, \\ x = 0, y = b, z = 0, \\ x = 0, y = -b, z = 0, \\ x = 0, y = 0, z = ic, \\ x = 0, y = 0, z = -ic. \end{array} \right. \quad (100)$$

Значения гауссовой кривизны в этих точках:

$$\begin{aligned} K \Big|_{x=\pm a} &= -\frac{a^2}{b^2 c^2} \\ K \Big|_{y=\pm b} &= -\frac{b^2}{a^2 c^2} \\ K \Big|_{z=\pm ic} &= -\frac{c^2}{a^2 b^2} \end{aligned} \quad (101)$$

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение хотелось бы сказать, что в ходе курсовой работы было проведено исследование гауссовых и скалярных кривизн однополосного гиперboloида и мнимого однополостного гиперboloида .

Также были решены следующие задачи:

- ознакомление с римановыми пространствами;
- нахождение гауссовых кривизн;
- нахождение скалярной кривизны;
- нахождение экстремумов гауссовой кривизны, максимального и минимального значений .

В результате исследований гауссова кривизна однополостного гиперboloида получилась отрицательной, что и требовалось получить. Скалярная кривизна равна двум гауссовым кривизнам. Максимальное и минимальное значения гауссовой кривизны достигаются на концах однополостного гиперboloида.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Димитриенко Ю.И. Тензорное исчисление: Учеб.пособие для вузов. М.:Высш, шк., 2001, 575 с.
2. Петров А.З. Пространства Эйнштейна. М.: Физматгиз, 1961, 464 с.
3. Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Наука, 1967, 664 с.
4. Шипов Г.И. Теория физического вакуума. НТ-Центр, 1993, 362 с.
5. Функции нескольких переменных : методические указания к выполнению домашних заданий по курсу «Линейная алгебра и функции нескольких переменных» / С.Н. Ефремова, А.В. Косова, Т.А. Ласковая. — М. : Издательство МГТУ Н.Э. Баумана, 2015. — 48 с.

## ПРИЛОЖЕНИЕ А