Проинтегрируем линейное дифференциальное уравнение с начальными условиями
$y'' + 2y' + y = e$^$-x$
$a := -2;$
$b := 2;$
$a0 := -1;$
$a1 := 3;$
$a2 := 0;$
$b0 := 3;$
$b1 := 0;$
$b2 := -4;$

$$a := -2$$
$$b := 2$$
$$a0 := -1$$
$$a1 := 3$$
$$a2 := 0$$
$$b0 := 3$$
$$b1 := 0$$
$$b2 := -4 \quad \textbf{(1)}$$

$a0 \cdot y(a) + a1 \cdot y'(a) = a2 :$
$b0 \cdot y(b) + b1 \cdot y'(b) = b2 :$

$-y(-2) + 3\,y'(-2) = 0 :$
$3\,y(2) = -4 :$

Найдем решение как сумму частного и общего решения ДУ
Найдем общее решение однородного уравнения:
#$y'' + 2y' + y = 0$

Соответствующее ему характеристическое уравнение:
$\lambda^2 + 2 \cdot \mathrm{lambda} + 1 = 0$

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \quad \textbf{(2)}$$

$\lambda\_1 := -1$

$$\lambda\_1 := -1 \quad \textbf{(3)}$$

$\lambda\_2 := -1$

$$\lambda\_2 := -1 \quad \textbf{(4)}$$

Тогда имеем y_c(x) = y1_c(x) + y2_c(x), где y1(x) соответствует lambda_1, а y2(x) соответствует lambda_2
$y\_c(x) := C1 \cdot e^{\lambda\_1 \cdot x} + C2 \cdot e^{\lambda\_2 \cdot x} \cdot x :$
$y\_c(x)$

$$C1\,e^{-x} + C2\,e^{-x}\,x \quad \textbf{(5)}$$

#Теперь найдем частное решение неоднородного уравнения методом подбора:
$y\_p(x) := \frac{e^{-x}}{2} \cdot x^2 :$
$y\_p(x)$

$$\frac{e^{-x} x^2}{2} \qquad \textbf{(6)}$$

 # Тогда общее решение неоднородного уравнения:

$y(x) := y\_c(x) + y\_p(x)$:

$y(x)$

$$C1\, e^{-x} + C2\, e^{-x} x + \frac{e^{-x} x^2}{2} \qquad \textbf{(7)}$$

 # Подставим начальные условия для поиска констант

$-subs(x = -2, y(x)) + 3 \cdot subs\left(x = -2, \frac{d}{dx} y(x)\right) = 0;$

$3 \cdot subs(x = 2, y(x)) = -4$

$$-4\, C1\, e^2 + 11\, C2\, e^2 - 14\, e^2 = 0$$
$$3\, C1\, e^{-2} + 6\, C2\, e^{-2} + 6\, e^{-2} = -4 \qquad \textbf{(8)}$$

$sys1 := \{-4\, C1\, e^2 + 11\, C2\, e^2 - 14\, e^2 = 0,\ 3\, C1\, e^{-2} + 6\, C2\, e^{-2} + 6\, e^{-2} = -4\}$:

$sys1$

$$\{3\, C1\, e^{-2} + 6\, C2\, e^{-2} + 6\, e^{-2} = -4,\ -4\, C1\, e^2 + 11\, C2\, e^2 - 14\, e^2 = 0\} \qquad \textbf{(9)}$$

$simplify(solve(sys1, \{C1, C2\}))$

$$\left\{C1 = -\frac{50}{19} - \frac{44\, e^2}{57},\ C2 = \frac{6}{19} - \frac{16\, e^2}{57}\right\} \qquad \textbf{(10)}$$

$\xrightarrow{\text{at 10 digits}}$

$$\{C1 = -8.335411725,\ C2 = -1.758331536\} \qquad \textbf{(11)}$$

$C1 := -\frac{50}{19} - \frac{44\, e^2}{57}$:

$C2 := \frac{6}{19} - \frac{16\, e^2}{57}$:

$y(x)$

$$\left(-\frac{50}{19} - \frac{44\, e^2}{57}\right) e^{-x} + \left(\frac{6}{19} - \frac{16\, e^2}{57}\right) e^{-x} x + \frac{e^{-x} x^2}{2} \qquad \textbf{(12)}$$

 # Проверка

$\frac{d^2}{dx^2} y(x) + 2 \cdot \frac{d}{dx} y(x) + y(x)$

$$e^{-x} \qquad \textbf{(13)}$$

$evalf\left(-subs(x = -2, y(x)) + 3 \cdot subs\left(x = -2, \frac{d}{dx} y(x)\right),\ \right);$

$evalf(3 \cdot subs(x = 2, y(x)));$

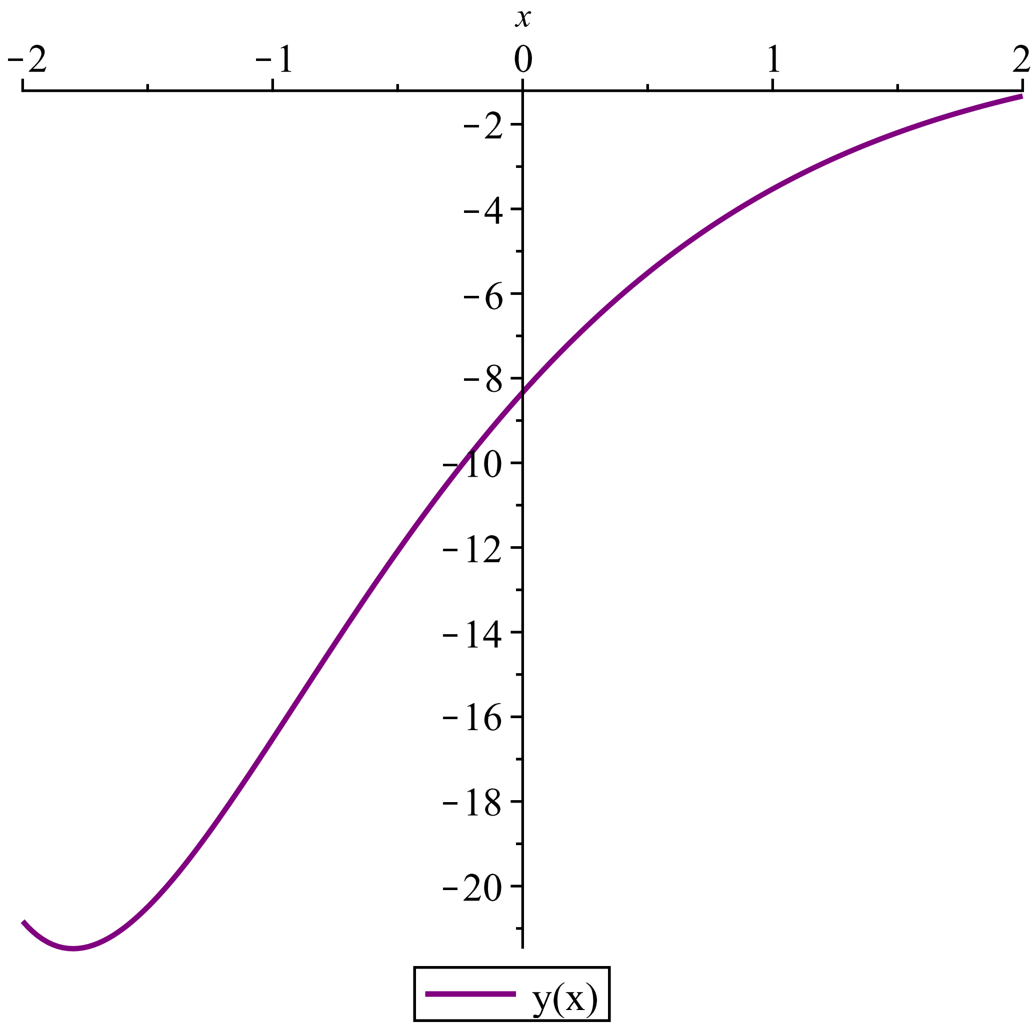
$$0.$$
$$-3.999999997 \qquad \textbf{(14)}$$

#Ответ:

$y(x)$

$$\left(-\frac{50}{19}-\frac{44\,e^{2}}{57}\right)e^{-x}+\left(\frac{6}{19}-\frac{16\,e^{2}}{57}\right)e^{-x}x+\frac{e^{-x}x^{2}}{2} \tag{15}$$

plot(y(x), x = *a* ..*b*, color = "Purple", *legend* = ["y(x)",], *thickness* = [2])



##

Найдем приближенное решение методом Галеркина
Постановка задачи:найти приближенное решение краевой задачи для лин. ОДУ 2-го порядка:
##$y'' + 2y' + y = e^{-x}$, удовлетворяющее условиям :
###$\begin{cases} a0\cdot y(a) + a1\cdot y'(a) = a2 \\ b0\cdot y(b) + b1\cdot y'(b) = b2 \end{cases}$

$yn(x) = u0(x) + \sum_{i=1}^{n} ui(x)\cdot Ci;$
u 0 (x) :
###$\begin{cases} a0\cdot u0(a) + a1\cdot u0'(a) = a2 \\ b0\cdot u0(b) + b1\cdot u0'(b) = b2 \end{cases}$

u i : ###$\begin{cases} a0\cdot ui(a) + a1\cdot ui'(a) = 0 \\ b0\cdot ui(b) + b1\cdot ui'(b) = 0 \end{cases}$

$L(y) := \frac{d^2}{dx^2}y + 2\cdot\frac{d}{dx}y + y$:###исходное ДУ

$fx := e^{-x}$:

###Предположим, что функця u0(x) имеет вид:
$u0(x) := A\cdot x + B$:

$solve\left(\left[subs\left(x = a, a0\cdot u0(x) + a1\frac{d}{dx}u0(x)\right) = a2, subs\left(x = b, b0\cdot u0(x) + b1\cdot\frac{d}{dx}u0(x)\right) = b2\right], [A, B]\right);$

$$\left[\left[A = -\frac{4}{21}, B = -\frac{20}{21}\right]\right] \tag{16}$$

###Таким образом, u0(x) имеет вид:
$u0(x) := -\frac{4}{21}\cdot x - \frac{20}{21};$

$$u0 := x \to -\frac{4}{21}x - \frac{20}{21} \tag{17}$$

###Проверка:
$a0\cdot subs(x = a, u0(x)) + a1\cdot subs\left(x = a, \frac{d}{dx}u0(x)\right) = a2;$
$b0\cdot subs(x = b, u0(x)) + b1\cdot subs\left(x = b, \frac{d}{dx}u0(x)\right) = b2;$

$$0 = 0$$
$$-4 = -4 \tag{18}$$

#Верно
###Поиск приближенного решения $yn(x)$, удовлетворяющего условию : $\max|y(x) - yn(x)| < \varepsilon$

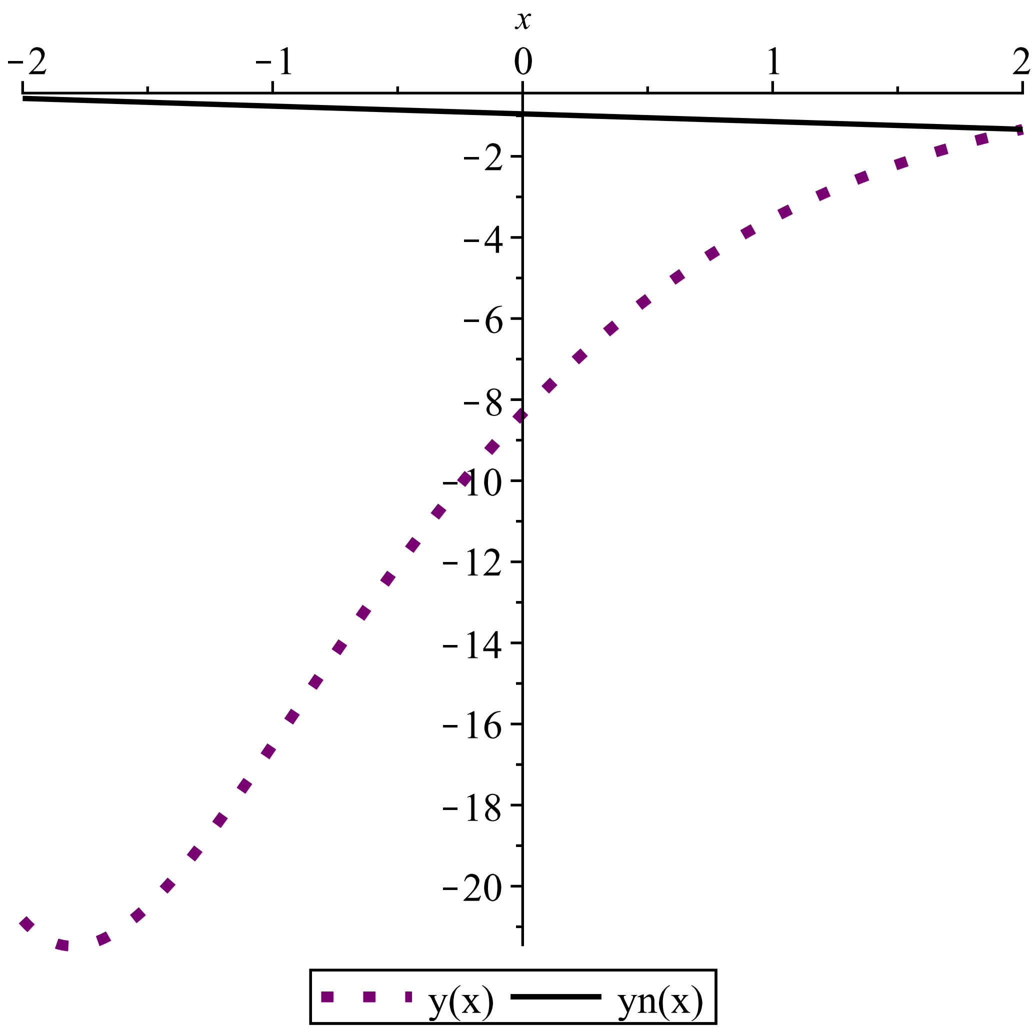
$= 0.001, x = a .. b:\ n := 0:$
with(*Optimization*) :
with(*linalg*) :
###*Номер_приближения = 0:*
$n := 0;$
$yn(x) := u0(x)\ :$
$Y[n] = yn;$
###*Вычисляем погрешность:*
$evalf(Maximize(\mathrm{abs}((y(x) - yn(x))), x = a..b));$

$$n := 0$$

$$Y_0 = yn$$

$$[20.8696016308950, [x = -1.80513225829742]] \tag{19}$$

$plot([y(x),\ yn(x)], x = a .. b, legend = [\text{"y(x)"}, \text{"yn(x)"}], linestyle = [dot, solid],\ \ thickness = [4, 2], color = [purple, black]);$



"ε_0 = 20.8696016308950";

"ε_0 = 20.8696016308950" **(20)**

#######################################

###*Номер_приближения = 1:*

$n := 1;$

$yn(x) := u0(x) + C1 \cdot u1(x)$:

###*Предположим, что функця u1(x) имеет вид:*

$u1(x) := A \cdot x^2 + B \cdot x + C$:

$solve\left(\left[subs\left(x = \mathrm{a}, \mathrm{a0} \cdot \mathrm{u1}(\mathrm{x}) + \mathrm{a1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} u1(x)\right) = 0, subs\left(x = \mathrm{b}, \mathrm{b0} \cdot \mathrm{u1}(\mathrm{x}) + b1 \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} u1(x)\right) = 0\right], [A, B, C]\right);$

$$n := 1$$

$$\left[\left[A = A, B = \frac{12\,A}{7}, C = -\frac{52\,A}{7}\right]\right] \quad \mathbf{(21)}$$

###*Предположим, что A=1, тогда* $B=\frac{12}{7}$, $C=-\frac{52}{7}$:

$u1(x) := x^2 + \frac{12}{7} \cdot x - \frac{52}{7};$

$$u1 := x \rightarrow x^2 + \frac{12}{7}\,x - \frac{52}{7} \quad \mathbf{(22)}$$

###*Проверка:*

$a0 \cdot subs(x = a, u1(x)) + a1 \cdot subs\left(x = a, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} u1(x)\right) = 0;$

$b0 \cdot subs(x = b, u1(x)) + b1 \cdot subs\left(x = b, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} u1(x)\right) = 0;$

$$0 = 0$$

$$0 = 0 \quad \mathbf{(23)}$$

#*Верно*

###*коэффициент C1 найдем из условия:* $\sum_{j=1}^{n} A[i,j] \cdot c_j = B_i$

for i **from** n **to** n **do**

$u_i(x) := x^2 + \frac{12}{7} \cdot x - \frac{52}{7};$

end do;

$$u_1(x) := x^2 + \frac{12}{7}\,x - \frac{52}{7} \quad \mathbf{(24)}$$

for i **from** 1 **to** n **do**

$C[i]$:='C';

end do:

###*найдем значения A[i,j] и B[j]:*

for i **from** 1 **to** n **do**

for k **from** 1 **to** n **do**

$A[i, k] := \int_a^b L(u_k(x)) \cdot u_i(x)\, \mathrm{d}x;$

$B[k] := \int_a^b (fx - L(u0(x))) \cdot u_i(x)\, \mathrm{d}x;$

end do:

$clmn[i] := \sum_{j=1}^{n} A[i,j] \cdot c_j = B_i$: ###*получим систему из 1-го уравнения с 1-мя неизвестным C1*

$k := 'k'$:

end do:

$C\_matr := seq(clmn[i], i = 1 .. n);$

$$C\_matr := \frac{18176\, c_1}{245} = -\frac{13568}{441} - \frac{50\, e^2}{7} - \frac{54\, e^{-2}}{7} \quad \textbf{(25)}$$

$C\_value := solve(\{C\_matr\});$ ###*поиск C1*

$$C\_value := \left\{ c_1 = -\frac{265}{639} - \frac{875\, e^2}{9088} - \frac{945\, e^{-2}}{9088} \right\} \quad \textbf{(26)}$$

for i **from** 1 **to** n **do**

$C[i] := evalf(rhs(C\_value[i]));$

end do:

for i **from** 1 **to** 1 **do**

$yn(x) := u0(x) + \sum_{k=1}^{n} C_k \cdot u_k(x)$:

end do:

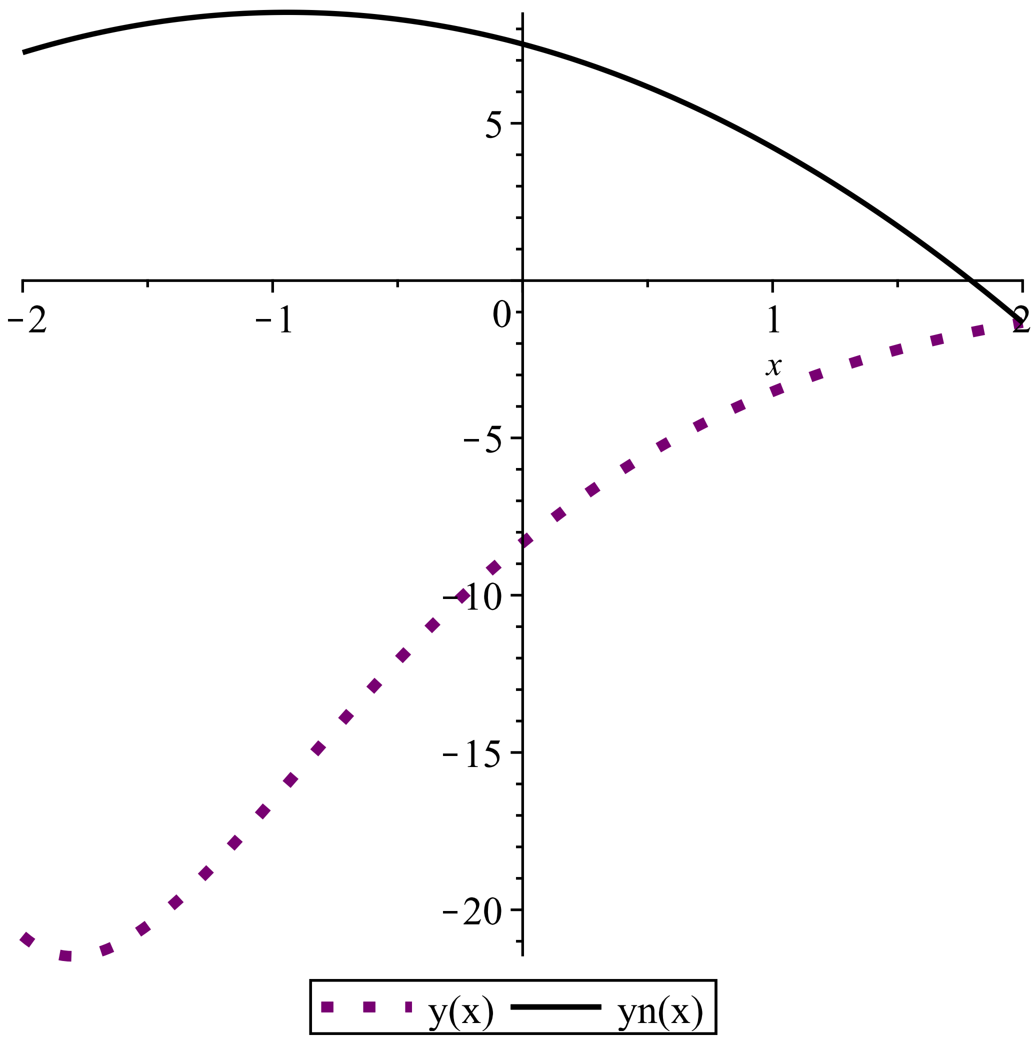
$Y[n] = yn(x);$

$evalf(Maximize(\mathrm{abs}((y(x) - yn(x))), x = a .. b));$

$$Y_1 = -2.145117440\, x + 7.517731133 - 1.140207396\, x^2$$

$$[29.2341587679434, [x = -1.72772676311411]] \quad \textbf{(27)}$$

$plot([y(x), yn(x)], x = a .. b, legend = [$"y(x)", "yn(x)"$], linestyle = [dot, solid], thickness = [4, 2], color = [purple, black]);$



"ε_1 = 29.2341587679434" ;

"ε_1 = 29.2341587679434" **(28)**

#####################################

###Следующие функции ui найдем методом неопределенных коэффициентов:
###так как n1=2, n2=1=>l=n1+n2=3, то есть, начиная со 2-й степени у x:
$u\_f(d,x) := (x-a)^2 \cdot (b-x)^{d-1};$

$$u\_f := (d,x) \rightarrow (x-a)^2 (b-x)^{d-1} \quad (29)$$

###Номер_приближения = 2:
$n := 2;$
###$yn(x) := u0(x) + C1 \cdot u1(x) + C2 \cdot u2(x)$:
###Функця $u2(x)$ имеет вид :
$u2(x) := u\_f(2,x)$:
$u2(x);$

$$n := 2$$

$$(x+2)^2 (-x+2) \quad (30)$$

###Проверка:
$a0 \cdot subs(x=a, u2(x)) + a1 \cdot subs\left(x=a, \frac{d}{dx} u2(x)\right) = 0;$
$b0 \cdot subs(x=b, u2(x)) + b1 \cdot subs\left(x=b, \frac{d}{dx} u2(x)\right) = 0;$

$$0 = 0$$

$$0 = 0 \quad (31)$$

#Верно

###коэффициенты C1, C2 найдем из условия: $\sum_{j=1}^{n} A[i,j] \cdot c_j = B_i$

for i **from** n **to** n **do**
$u_i(x) := (x+2)^2 (-x+2)$; ###также является и поверочной функцией
end do;

$$u_2(x) := (x+2)^2 (-x+2) \quad (32)$$

for i **from** 1 **to** n **do**
$C[i] :=$'C';
end do:
###найдем значения A[i,j] и B[j]:
for i **from** 1 **to** n **do**
for k **from** 1 **to** n **do**

$A[i,k] := \int_a^b L(u_k(x)) \cdot u_i(x)\, dx;$

$B[k] := \int_a^b (fx - L(u0(x))) \cdot u_i(x)\, dx;$

end do:

$clmn[i] := \sum_{j=1}^{n} A[i,j] \cdot c_j = B_i$: ###получим систему из 3−х уравнений с 3−мя неизвестными

$k :=$'k':

end do:

$C\_matr := seq(clmn[i], i=1..n);$

$$C\_matr := \frac{18176\,c_1}{245} - \frac{20096\,c_2}{105} = -\frac{13568}{441} - \frac{50\,e^2}{7} - \frac{54\,e^{-2}}{7}, \frac{2432\,c_1}{105} + \frac{2048\,c_2}{105} = \frac{9472}{315} + 2\,e^2 + 38\,e^{-2} \tag{33}$$

$C\_value := solve(\{C\_matr\});$ *###поиск C1 и C2*

$$C\_value := \left\{c_1 = \frac{24282}{27697} + \frac{73395\,e^2}{1772608} + \frac{2147145\,e^{-2}}{1772608}, c_2 = \frac{41594}{83091} + \frac{94605\,e^2}{1772608} + \frac{903735\,e^{-2}}{1772608}\right\} \tag{34}$$

for i **from** 1 **to** n **do**
$C[i] := evalf(rhs(C\_value[i]));$
end do:
for i **from** 1 **to** 1 **do**

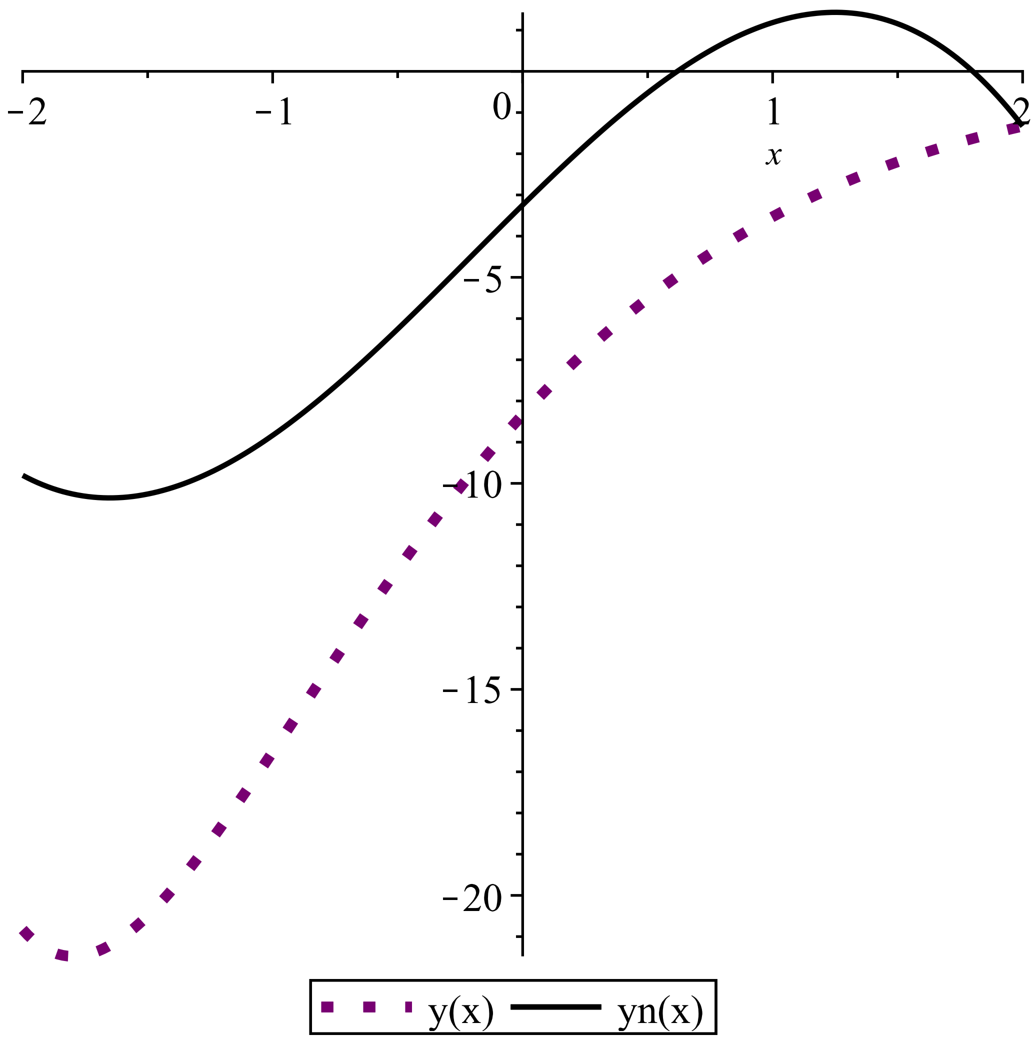
$$yn(x) := u0(x) + \sum_{k=1}^{n} C_k \cdot u_k(x) :$$

end do:
$Y[n] = yn(x);$
$evalf(Maximize(\mathrm{abs}((y(x) - yn(x))), x = a..b));$

$$Y_2 = 2.117940640\,x - 10.95552055 + 1.346576484\,x^2 + 0.9639398846\,(x+2)^2\,(-x+2)$$

$$[11.2606099048100, [x = -1.86223504943523]] \tag{35}$$

$plot([y(x), yn(x)], x = a..b, legend = [\text{"y(x)"}, \text{"yn(x)"}], linestyle = [dot, solid], thickness = [4, 2], color = [purple, black]);$



"ε_2 = 11.2606099048100" ;

"ε_2 = 11.2606099048100" **(36)**

##########################

###Номер_приближения = 3:
$n := 3;$
$yn(x) := u0(x) + C1 \cdot u1(x) + C2 \cdot u2(x) + C3 \cdot u3(x)$:
###Функця $u4(x)$ имеет вид :
$u3(x) := u\_f(3, x)$:
$u3(x);$

$$n := 3$$

$$(x+2)^2 (-x+2)^2 \quad \textbf{(37)}$$

###Проверка:

$a0 \cdot subs(x=a, u3(x)) + a1 \cdot subs\left(x=a, \frac{d}{dx} u3(x)\right) = 0;$

$b0 \cdot subs(x=b, u3(x)) + b1 \cdot subs\left(x=b, \frac{d}{dx} u3(x)\right) = 0;$

$$0 = 0$$

$$0 = 0 \quad \textbf{(38)}$$

#Верно

###коэффициенты C1, C2 и C3 найдем из условия: $\sum_{j=1}^{n} A[i,j] \cdot c_j = B_i$

for i **from** n **to** n **do**
$u_i(x) := (x+2)^2 (-x+2)^2$; ###также является и поверочной функцией
end do;

$$u_3(x) := (x+2)^2 (-x+2)^2 \quad \textbf{(39)}$$

for i **from** 1 **to** n **do**
$C[i] :=$'C';
end do:
###найдем значения A[i,j] и B[j]:
for i **from** 1 **to** n **do**
for k **from** 1 **to** n **do**

$A[i, k] := \int_a^b L(u_k(x)) \cdot u_i(x) \, dx;$

$B[k] := \int_a^b (fx - L(u0(x))) \cdot u_i(x) \, dx;$

end do:

$clmn[i] := \sum_{j=1}^{n} A[i,j] \cdot c_j = B_i$: ###получим систему из 4 −х уравнений с 4 −мя неизвестными

$k :=$'k':

end do:
$C\_matr := seq(clmn[i], i = 1 .. n);$

$$C\_matr := \frac{18176\, c_1}{245} - \frac{20096\, c_2}{105} - \frac{29696\, c_3}{105} = -\frac{13568}{441} - \frac{50\, e^2}{7} - \frac{54\, e^{-2}}{7}, \frac{2432\, c_1}{105} \quad \textbf{(40)}$$

$$+\frac{2048\,c_2}{105}-\frac{2048\,c_3}{35}=\frac{9472}{315}+2\,e^2+38\,e^{-2},\ -\frac{1024\,c_1}{21}+\frac{26624\,c_2}{105}+\frac{32768\,c_3}{315}$$
$$=\frac{2048}{45}+8\,e^2-104\,e^{-2}$$

```
C_value := solve({C_matr}); ###поиск C1,C2,C3, C4
```

$$C\_value:=\left\{c_1=\frac{112}{65}+\frac{1575\,e^2}{13312}+\frac{5145\,e^{-2}}{1024},\ c_2=\frac{10081}{25935}+\frac{21855\,e^2}{505856}+\frac{225\,e^{-2}}{38912},\ c_3=\frac{20591}{69160}+\frac{109485\,e^2}{4046848}+\frac{417555\,e^{-2}}{311296}\right\}\quad\mathbf{(41)}$$

for i **from** 1 **to** n **do**
$C[i] := evalf(rhs(C\_value[i]));$
end do:
for i **from** 1 **to** 1 **do**

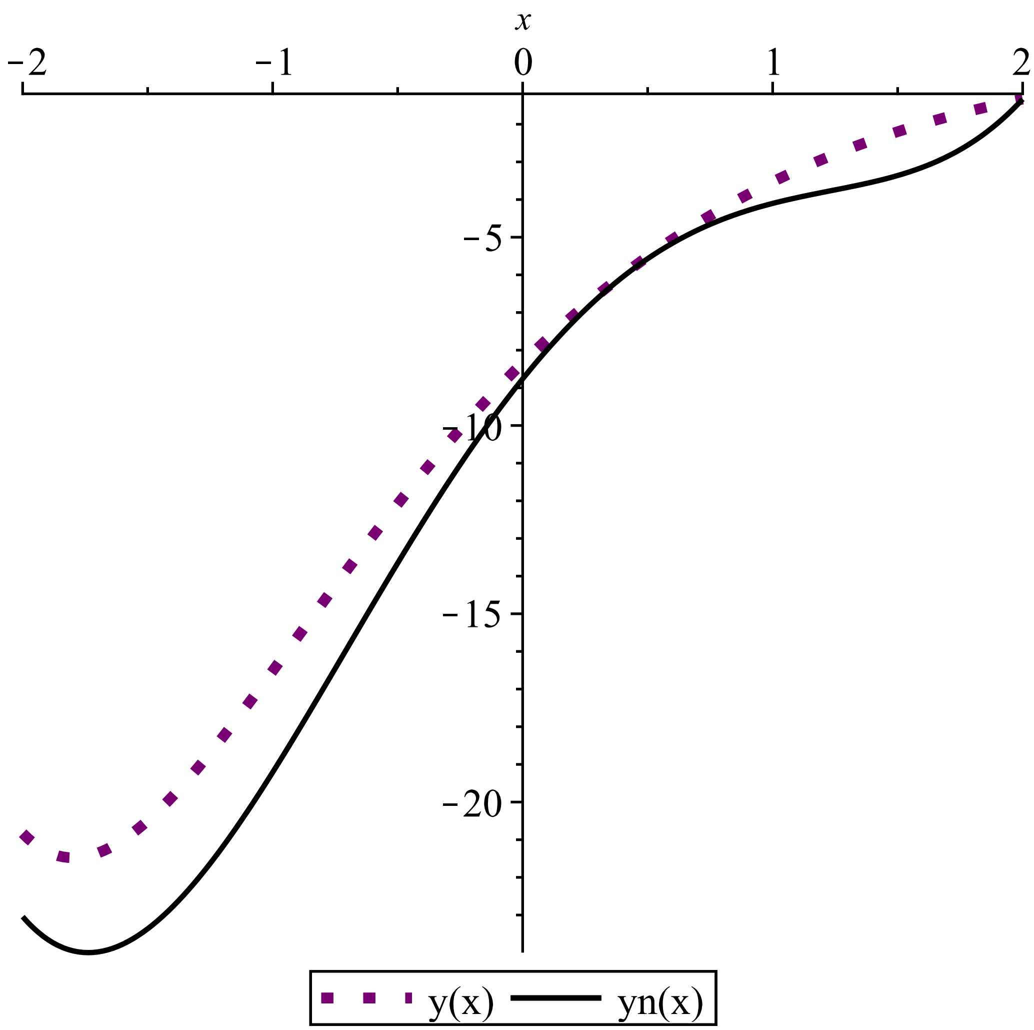
$$yn(x) := u0(x) + \sum_{k=1}^{n} C_k \cdot u_k(x) :$$

end do:
$Y[n]=yn(x);$
$evalf(Maximize(\mathrm{abs}((y(x)-yn(x))), x=a..b));$

$$Y_3=5.427732570\,x-25.29795225+3.277288444\,x^2+0.7087218131\,(x+2)^2\,(-x+2)+0.6791674603\,(x+2)^2\,(-x+2)^2$$

$$[2.94945439351926,\ [x=-1.32273701722510]]\quad\mathbf{(42)}$$

$plot([y(x),\ yn(x)], x=a..b, legend=["y(x)", "yn(x)"], linestyle=[dot, solid],\ \ thickness=[4, 2], color=[purple, black]);$



"ε_3 = 2.94945439351926" ;

"ε_3 = 2.94945439351926" **(43)**

###################################

###Номер_приближения = 4:
$n := 4;$
$yn(x) := u0(x) + C1 \cdot u1(x) + C2 \cdot u2(x) + C3 \cdot u3(x) + C4 \cdot u4(x):$
###Функця $u4(x)$ имеет вид:
$u4(x) := u\_f(4, x):$
$u4(x);$

$$n := 4$$

$$(x+2)^2 (-x+2)^3 \tag{44}$$

###Проверка:
$$a0 \cdot subs(x=a, u4(x)) + a1 \cdot subs\left(x=a, \frac{d}{dx} u4(x)\right) = 0;$$
$$b0 \cdot subs(x=b, u4(x)) + b1 \cdot subs\left(x=b, \frac{d}{dx} u4(x)\right) = 0;$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0 \tag{45}$$

#Верно

###коэффициенты C1, C2 и C3,C4 найдем из условия: $\sum_{j=1}^{n} A[i,j] \cdot c_j = B_i$

for i **from** n **to** n **do**
$u_i(x) := (x+2)^2 (-x+2)^3;$ ###также является и поверочной функцией
end do;

$$u_4(x) := (x+2)^2 (-x+2)^3 \tag{46}$$

for i **from** 1 **to** n **do**
$C[i] :='C';$
end do:
###найдем значения A[i,j] и B[j]:
for i **from** 1 **to** n **do**
for k **from** 1 **to** n **do**
$$A[i,k] := \int_a^b L(u_k(x)) \cdot u_i(x)\, dx;$$
$$B[k] := \int_a^b (fx - L(u0(x))) \cdot u_i(x)\, dx;$$
end do:
$clmn[i] := \sum_{j=1}^{n} A[i,j] \cdot c_j = B_i :$ ###получим систему из 5 уравнений с 5 неизвестными
$k :='k':$

end do:
$C\_matr := seq(clmn[i], i = 1 .. n);$

$$C\_matr := \frac{18176\, c_1}{245} - \frac{20096\, c_2}{105} - \frac{29696\, c_3}{105} - \frac{382976\, c_4}{735} = -\frac{13568}{441} - \frac{50\, e^2}{7} \tag{47}$$

$$-\frac{54\,e^{-2}}{7},\ \frac{2432\,c_1}{105}+\frac{2048\,c_2}{105}-\frac{2048\,c_3}{35}-\frac{65536\,c_4}{315}=\frac{9472}{315}+2\,e^2+38\,e^{-2},$$
$$-\frac{1024\,c_1}{21}+\frac{26624\,c_2}{105}+\frac{32768\,c_3}{315}-\frac{65536\,c_4}{315}=\frac{2048}{45}+8\,e^2-104\,e^{-2},\ -\frac{10240\,c_1}{49}$$
$$+\frac{32768\,c_2}{45}+\frac{65536\,c_3}{105}+\frac{524288\,c_4}{3465}=\frac{192512}{2205}+8\,e^2+408\,e^{-2}$$

$C\_value := solve(\{C\_matr\});$ ###поиск C1, C2, C3, C4

$$C\_value := \left\{c_1=\frac{16369642}{10299645}+\frac{1233365\,e^2}{58593536}+\frac{519350895\,e^{-2}}{58593536},\ c_2=\frac{12563786}{24032505}+\frac{16490445\,e^2}{117187072}-\frac{450385065\,e^{-2}}{117187072},\ c_3=\frac{2185783}{48065010}-\frac{146630895\,e^2}{937496576}+\frac{8046412515\,e^{-2}}{937496576},\ c_4=\frac{471229}{6866430}+\frac{46792515\,e^2}{937496576}-\frac{1846980135\,e^{-2}}{937496576}\right\} \quad \textbf{(48)}$$

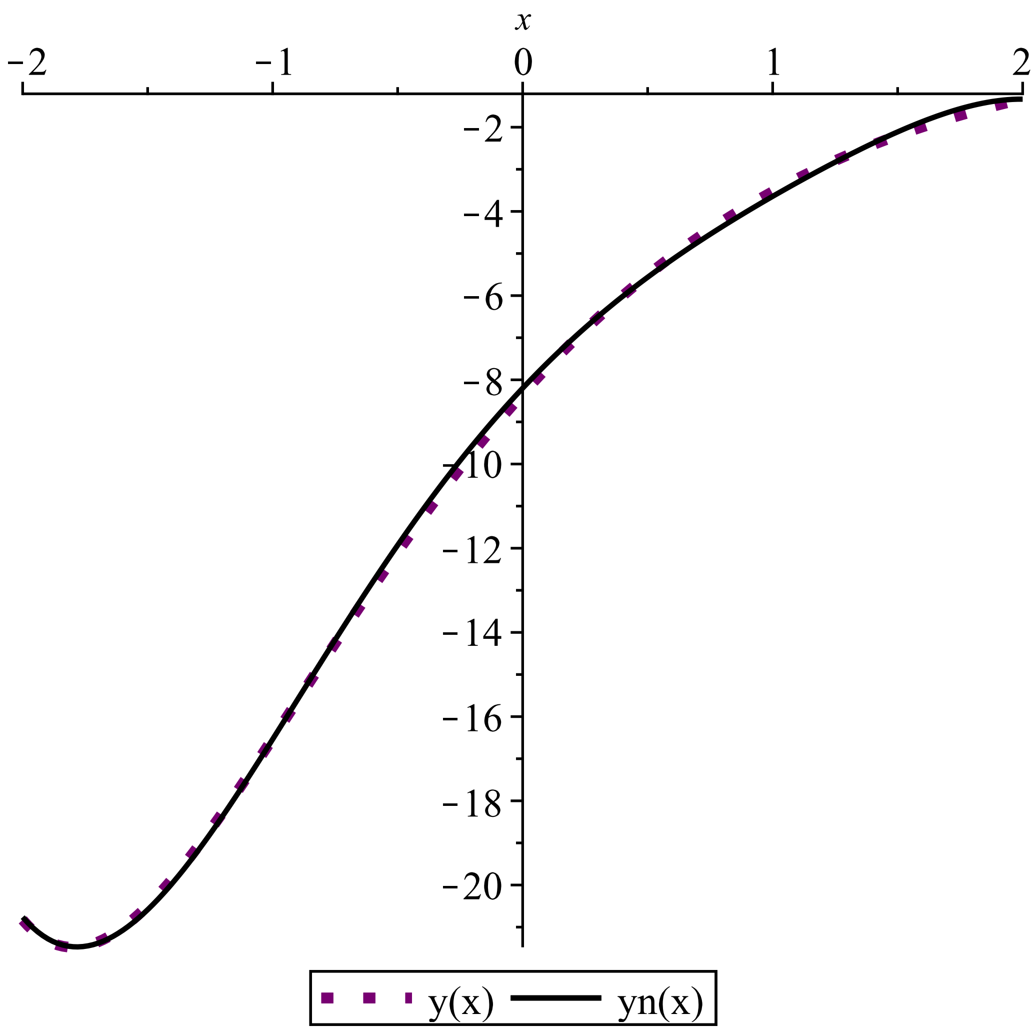
for i **from** 1 **to** n **do**
$C[i] := evalf(rhs(C\_value[i]));$
end do:
for i **from** 1 **to** 1 **do**

$$yn(x) := u0(x) + \sum_{k=1}^{n} C_k \cdot u_k(x):$$

end do:
$Y[n]=yn(x);$
$evalf(Maximize(\mathrm{abs}((y(x)-yn(x))), x=a..b));$

$$Y_4=4.857130176\,x-22.82534187+2.944437047\,x^2+1.042429377\,(x+2)^2\,(-x+2)+0.051341825\,(x+2)^2\,(-x+2)^2+0.1708053224\,(x+2)^2\,(-x+2)^3$$
$$[0.181267428273153,\ [x=-0.297989738495481]] \quad \textbf{(49)}$$

$plot([y(x),\ yn(x)], x=a..b, legend=["y(x)", "yn(x)"], linestyle=[dot, solid],\ \ thickness=[4, 2], color=[purple, black]);$



"ε_4 = 0.181267428273153" ;

"ε_4 = 0.181267428273153" **(50)**

####################

###*Номер_приближения = 5:*
$n := 5;$
$yn(x) := u0(x) + C1 \cdot u1(x) + C2 \cdot u2(x) + C3 \cdot u3(x) + C4 \cdot u4(x) + C5 \cdot u5(x) :$
###*Функця* $u5(x)$ *имеет вид* :
$u5(x) := u\_f(5, x) :$
$u5(x);$

$$n := 5$$

$$(x+2)^2 (-x+2)^4 \tag{51}$$

###*Проверка:*
$a0 \cdot subs(x = a, u5(x)) + a1 \cdot subs\left(x = a, \frac{d}{dx} u5(x)\right) = 0;$
$b0 \cdot subs(x = b, u5(x)) + b1 \cdot subs\left(x = b, \frac{d}{dx} u5(x)\right) = 0;$

$$0 = 0$$

$$0 = 0 \tag{52}$$

#*Верно*

###*коэффициенты C1, C2 и C3,C4,C5 найдем из условия:* $\sum_{j=1}^{n} A[i,j] \cdot c_j = B_i$

for i **from** n **to** n **do**
$u_i(x) := (x+2)^2 (-x+2)^4$; ###*также является и поверочной функцией*
end do;

$$u_5(x) := (x+2)^2 (-x+2)^4 \tag{53}$$

for i **from** 1 **to** n **do**
$C[i] :=$'C';
end do:
###*найдем значения A[i,j] и B[j]:*
for i **from** 1 **to** n **do**
for k **from** 1 **to** n **do**
$A[i, k] := \int_a^b L(u_k(x)) \cdot u_i(x) \, dx;$
$B[k] := \int_a^b (fx - L(u0(x))) \cdot u_i(x) \, dx;$
end do:
$clmn[i] := \sum_{j=1}^{n} A[i,j] \cdot c_j = B_i$: ###*получим систему из 6 уравнений с 6 неизвестными*
$k :=$'k':

end do:
$C\_matr := seq(clmn[i], i = 1 .. n);$

$$C\_matr := \frac{18176\, c_1}{245} - \frac{20096\, c_2}{105} - \frac{29696\, c_3}{105} - \frac{382976\, c_4}{735} - \frac{2424832\, c_5}{2205} = -\frac{13568}{441} \tag{54}$$

$$-\frac{50\,e^2}{7}-\frac{54\,e^{-2}}{7},\ \frac{2432\,c_1}{105}+\frac{2048\,c_2}{105}-\frac{2048\,c_3}{35}-\frac{65536\,c_4}{315}-\frac{180224\,c_5}{315}=\frac{9472}{315}+2\,e^2+38\,e^{-2},\ -\frac{1024\,c_1}{21}+\frac{26624\,c_2}{105}+\frac{32768\,c_3}{315}-\frac{65536\,c_4}{315}-\frac{3801088\,c_5}{3465}=\frac{2048}{45}+8\,e^2-104\,e^{-2},\ -\frac{10240\,c_1}{49}+\frac{32768\,c_2}{45}+\frac{65536\,c_3}{105}+\frac{524288\,c_4}{3465}-\frac{6029312\,c_5}{3465}=\frac{192512}{2205}+8\,e^2+408\,e^{-2},\ -\frac{1441792\,c_1}{2205}+\frac{606208\,c_2}{315}+\frac{7733248\,c_3}{3465}+\frac{1310720\,c_4}{693}-\frac{8388608\,c_5}{5005}=\frac{425984}{2205}+80\,e^2-2064\,e^{-2}$$

C_value := *solve*({*C_matr*}); ###*поиск C1 и C2 и C3, C4,C5*

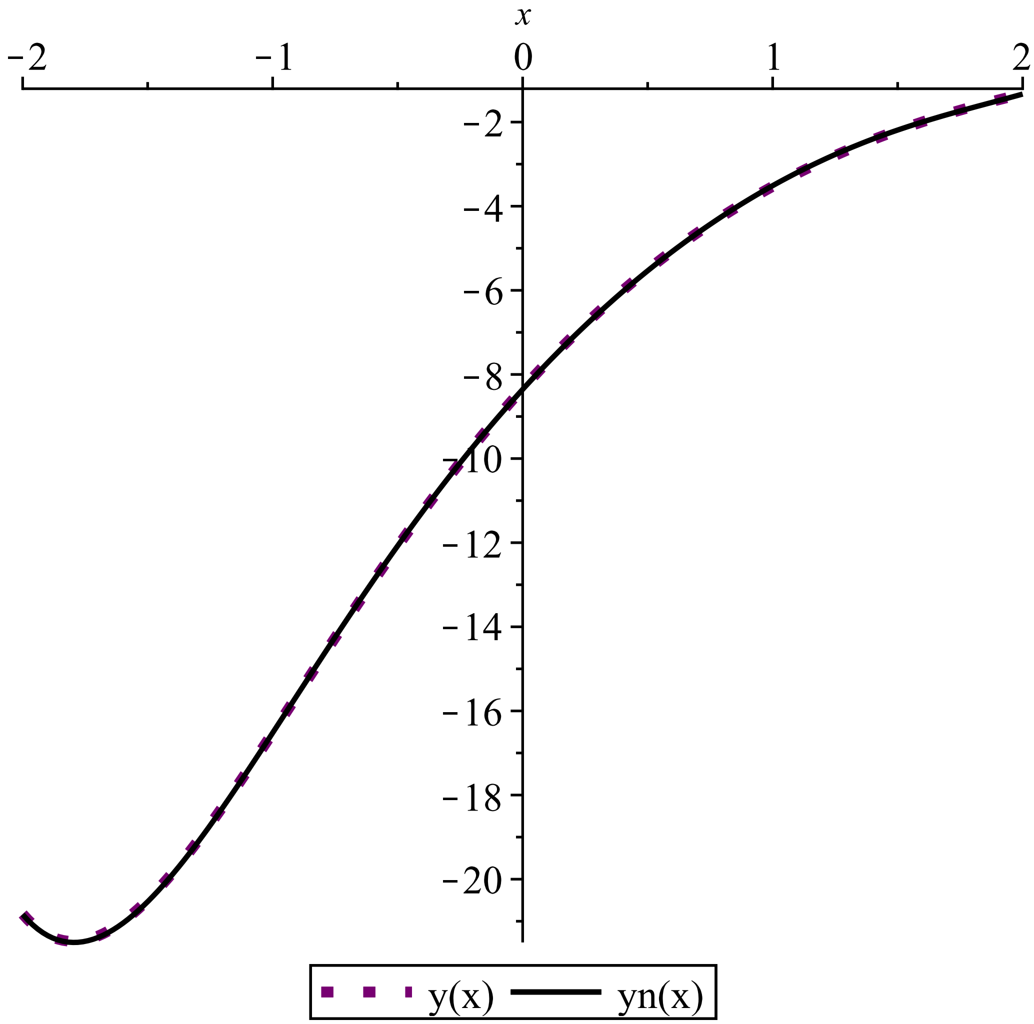
$$C\_value:=\left\{c_1=\frac{4826110066}{3028744889}-\frac{267297854985\,e^2}{6202869532672}+\frac{77025898237365\,e^{-2}}{6202869532672},\ c_2=\frac{1468473210}{3028744889}+\frac{4558618030365\,e^2}{6202869532672}-\frac{228070068436665\,e^{-2}}{6202869532672},\ c_3=\frac{889973843}{6057489778}-\frac{86607532820655\,e^2}{49622956261376}+\frac{4794833380113315\,e^{-2}}{49622956261376},\ c_4=-\frac{8061141}{6057489778}+\frac{14212622596095\,e^2}{12405739065344}-\frac{777662819048115\,e^{-2}}{12405739065344},\ c_5=\frac{337689781}{24229959112}-\frac{173313441326025\,e^2}{793967300182016}+\frac{9603429866155125\,e^{-2}}{793967300182016}\right\} \tag{55}$$

```
for i from 1 to n do
 C[i] := evalf(rhs(C_value[i]));
 end do:
for i from 1 to 1 do
 yn(x) := u0(x) + sum(C[k]·u[k](x), k = 1..n) :
 end do:
Y[n] = yn(x);
evalf(Maximize(abs((y(x) − yn(x))), x = a..b));
```

$$Y_5=4.876243212\,x-22.90816503+2.955586318\,x^2+0.939144401\,(x+2)^2\,(-x+2)+0.32752746\,(x+2)^2\,(-x+2)^2-0.019657146\,(x+2)^2\,(-x+2)^3+0.037943098\,(x+2)^2(-x+2)^4$$

$$[0.0283854575875924,\ [x=0.271507895408060]] \tag{56}$$

```
plot([y(x), yn(x)], x = a..b, legend = ["y(x)", "yn(x)"], linestyle = [dot, solid], thickness = [4, 2],
   color = [purple, black]);
```



"ε_5 = 0.0283854575875924" ;

"ε_5 = 0.0283854575875924" **(57)**

#############################

###Номер_приближения = 6:
$n := 6;$
$\#\#\# yn(x) := u0(x) + C1 \cdot u1(x) + C2 \cdot u2(x) + C3 \cdot u3(x) + C4 \cdot u4(x) + C5 \cdot u5(x) + C6 \cdot u6(x):$
###Функця $u6(x)$ *имеет вид* :
$u6(x) := u\_f(6, x):$
$u6(x);$

$$n := 6$$

$$(x+2)^2 (-x+2)^5 \quad (58)$$

###Проверка:

$a0 \cdot subs(x = a, u6(x)) + a1 \cdot subs\left(x = a, \frac{d}{dx} u6(x)\right) = 0;$

$b0 \cdot subs(x = b, u6(x)) + b1 \cdot subs\left(x = b, \frac{d}{dx} u6(x)\right) = 0;$

$$0 = 0$$

$$0 = 0 \quad (59)$$

#Верно

###коэффициенты C1, C2, C3,C4,C5, C6 найдем из условия: $\sum_{j=1}^{n} A[i,j] \cdot c_j = B_i$

for i **from** n **to** n **do**
$u_i(x) := (x+2)^2 (-x+2)^5$; *###также является и поверочной функцией*
end do;

$$u_6(x) := (x+2)^2 (-x+2)^5 \quad (60)$$

for i **from** 1 **to** n **do**
$C[i] :=$'C';
end do:
###найдем значения A[i,j] и B[j]:
for i **from** 1 **to** n **do**
for k **from** 1 **to** n **do**

$A[i,k] := \int_a^b L(u_k(x)) \cdot u_i(x)\, dx;$

$B[k] := \int_a^b (fx - L(u0(x))) \cdot u_i(x)\, dx;$

end do:

$clmn[i] := \sum_{j=1}^{n} A[i,j] \cdot c_j = B_i$: *###получим систему из 6 уравнений с 6 неизвестными*

$k :=$'k':

end do:
$C\_matr := seq(clmn[i], i = 1 .. n);$

$$C\_matr := \frac{18176\, c_1}{245} - \frac{20096\, c_2}{105} - \frac{29696\, c_3}{105} - \frac{382976\, c_4}{735} - \frac{2424832\, c_5}{2205} - \frac{114688\, c_6}{45} = \quad (61)$$

$$-\frac{13568}{441}-\frac{50\,e^{2}}{7}-\frac{54\,e^{-2}}{7},\ \frac{2432\,c_{1}}{105}+\frac{2048\,c_{2}}{105}-\frac{2048\,c_{3}}{35}-\frac{65536\,c_{4}}{315}-\frac{180224\,c_{5}}{315}-\frac{1048576\,c_{6}}{693}=\frac{9472}{315}+2\,e^{2}+38\,e^{-2},\ -\frac{1024\,c_{1}}{21}+\frac{26624\,c_{2}}{105}+\frac{32768\,c_{3}}{315}-\frac{65536\,c_{4}}{315}-\frac{3801088\,c_{5}}{3465}-\frac{1835008\,c_{6}}{495}=\frac{2048}{45}+8\,e^{2}-104\,e^{-2},$$

$$-\frac{10240\,c_{1}}{49}+\frac{32768\,c_{2}}{45}+\frac{65536\,c_{3}}{105}+\frac{524288\,c_{4}}{3465}-\frac{6029312\,c_{5}}{3465}-\frac{375390208\,c_{6}}{45045}=\frac{192512}{2205}+8\,e^{2}+408\,e^{-2},\ -\frac{1441792\,c_{1}}{2205}+\frac{606208\,c_{2}}{315}+\frac{7733248\,c_{3}}{3465}+\frac{1310720\,c_{4}}{693}-\frac{8388608\,c_{5}}{5005}-\frac{788529152\,c_{6}}{45045}=\frac{425984}{2205}+80\,e^{2}-2064\,e^{-2},$$

$$-\frac{4308992\,c_{1}}{2205}+\frac{17825792\,c_{2}}{3465}+\frac{4980736\,c_{3}}{693}+\frac{77594624\,c_{4}}{9009}+\frac{16777216\,c_{5}}{5005}-\frac{134217728\,c_{6}}{4095}=\frac{622592}{1323}-112\,e^{2}+12720\,e^{-2}$$

```
C_value := solve({C_matr}); ###поиск C1 и C2 и C3, C4,C5, C6
```

$$C\_value := \left\{c_{1}=\frac{39196876887158}{24606323057667}-\frac{2546321698042605\,e^{2}}{8398958270350336}+\frac{17192471508149805\,e^{-2}}{646073713103872},\ c_{2}=\frac{4038093621210}{8202107685889}+\frac{5060428136798265\,e^{2}}{1049869783793792}-\frac{20973236844680505\,e^{-2}}{80759214137984},\ c_{3}=\frac{5697630681589}{49212646115334}-\frac{12604272375274999 65\,e^{2}}{67191666162802688}+\frac{52981815514300769 25\,e^{-2}}{5168589704830976},\ c_{4}=\frac{133353252989}{3785588162718}+\frac{1364202046787233 5\,e^{2}}{646073713103872}-\frac{7445745617320360 35\,e^{-2}}{646073713103872},\ c_{5}=-\frac{16529691937}{7571176325436}-\frac{746259630180250725\,e^{2}}{82697435277295616}+\frac{4073976083365558870 5\,e^{-2}}{82697435277295616},\ c_{6}=\frac{17885774665}{7571176325436}+\frac{1067165386113692 25\,e^{2}}{82697435277295616}-\frac{5823696709483818165\,e^{-2}}{82697435277295616}\right\} \quad (62)$$

```
for i from 1 to n do
 C[i] := evalf(rhs(C_value[i]));
 end do:
for i from 1 to 1 do
```

$$yn(x) := u0(x) + \sum_{k=1}^{n} C_{k}\cdot u_{k}(x) :$$

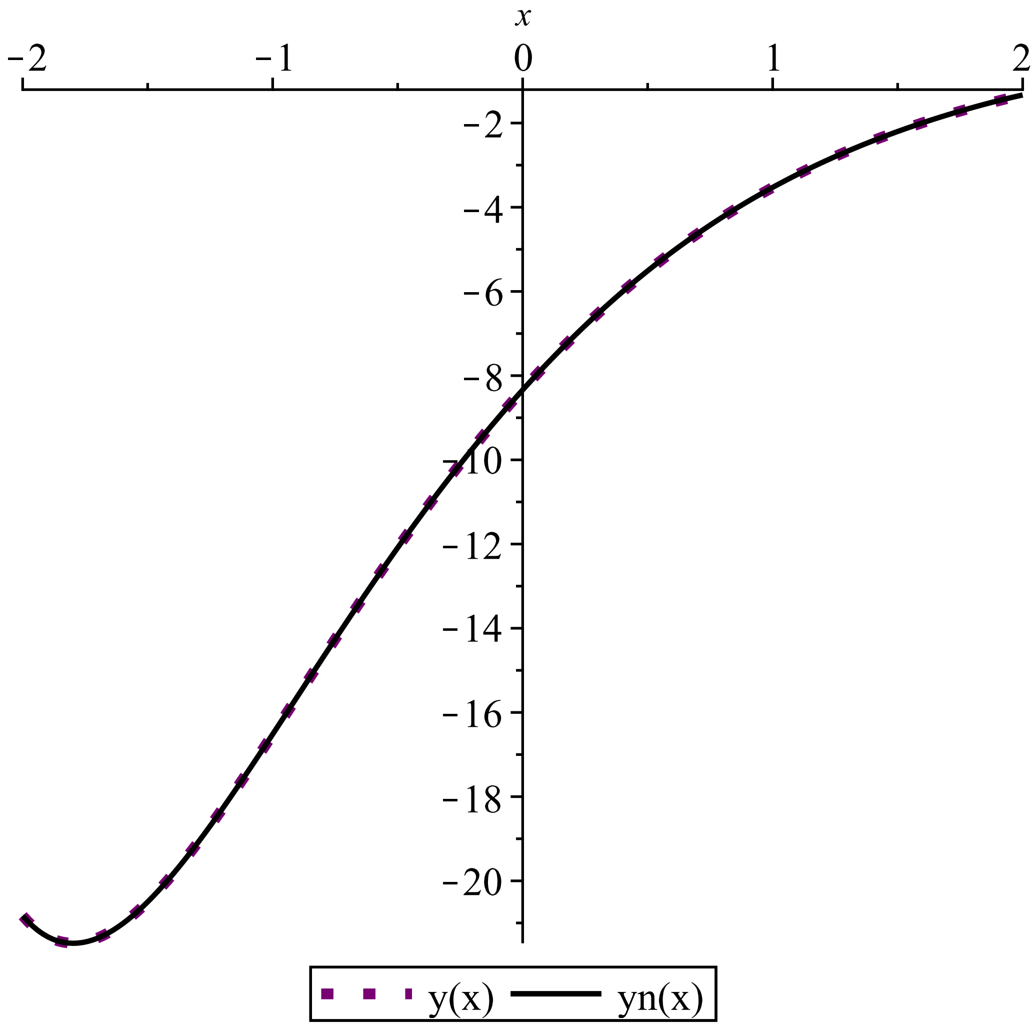
```
 end do:
Y[n]=yn(x);
evalf(Maximize(abs((y(x) - yn(x))), x = a..b));
```

$$Y_{6}=4.873827532\,x-22.89769708+2.954177171\,x^{2}+0.96127830\,(x+2)^{2}\,(-x+2)+0.2353463\,(x+2)^{2}\,(-x+2)^{2}+0.0885415\,(x+2)^{2}\,(-x+2)^{3}-0.00976754\,(x$$

$+2)^2 \ (-x+2)^4 + 0.006991840 \ (x+2)^2 \ (-x+2)^5$

$$[0.00401677716398918, [x = -0.162994881717409]] \quad \textbf{(63)}$$

$plot([y(x),\ yn(x)], x = a .. b, legend = [\text{"y(x)"}, \text{"yn(x)"}], linestyle = [dot, solid], \ \ thickness = [4, 2], color = [purple, black]);$



"ε_6 = 0.00401677716398918" ;

"ε_6 = 0.00401677716398918" **(64)**

####################################

###Номер_приближения = 7:
$n := 7;$
$yn(x) := u0(x) + C1\cdot u1(x) + C2\cdot u2(x) + C3\cdot u3(x) + C4\cdot u4(x) + C5\cdot u5(x) + C6\cdot u6(x) + C7\cdot u7(x)$:
###Функция $u7(x)$ имеет вид :
$u7(x) := u\_f(7, x)$:
$u7(x);$

$$n := 7$$

$$(x+2)^2 (-x+2)^6 \quad \textbf{(65)}$$

###Проверка:

$a0\cdot subs(x=a, u7(x)) + a1\cdot subs\left(x=a, \frac{d}{dx}u7(x)\right) = 0;$

$b0\cdot subs(x=b, u7(x)) + b1\cdot subs\left(x=b, \frac{d}{dx}u7(x)\right) = 0;$

$$0 = 0$$

$$0 = 0 \quad \textbf{(66)}$$

#Верно

###коэффициенты C1, C2, C3,C4,C5, C6, C7 найдем из условия: $\sum_{j=1}^{n} A[i,j]\cdot c_j = B_i$

for i **from** n **to** n **do**
$u_i(x) := (x+2)^2 (-x+2)^6$; ###также является и поверочной функцией
end do;

$$u_7(x) := (x+2)^2 (-x+2)^6 \quad \textbf{(67)}$$

for i **from** 1 **to** n **do**
$C[i] :=$'C';
end do:
###найдем значения A[i,j] и B[j]:
for i **from** 1 **to** n **do**
for k **from** 1 **to** n **do**

$A[i,k] := \int_a^b L(u_k(x))\cdot u_i(x)\,dx;$

$B[k] := \int_a^b (fx - L(u0(x)))\cdot u_i(x)\,dx;$

end do:

$clmn[i] := \sum_{j=1}^{n} A[i,j]\cdot c_j = B_i$: ###получим систему из 6 уравнений с 6 неизвестными

$k :=$'k':

end do:
$C\_matr := seq(clmn[i], i = 1 .. n);$

$$C\_matr := \frac{18176\,c_1}{245} - \frac{20096\,c_2}{105} - \frac{29696\,c_3}{105} - \frac{382976\,c_4}{735} - \frac{2424832\,c_5}{2205} - \frac{114688\,c_6}{45} \quad \textbf{(68)}$$

$$-\frac{153485312\,c_7}{24255}=-\frac{13568}{441}-\frac{50\,e^2}{7}-\frac{54\,e^{-2}}{7},\ \frac{2432\,c_1}{105}+\frac{2048\,c_2}{105}-\frac{2048\,c_3}{35}-\frac{65536\,c_4}{315}-\frac{180224\,c_5}{315}-\frac{1048576\,c_6}{693}-\frac{13893632\,c_7}{3465}=\frac{9472}{315}+2\,e^2+38\,e^{-2},$$

$$-\frac{1024\,c_1}{21}+\frac{26624\,c_2}{105}+\frac{32768\,c_3}{315}-\frac{65536\,c_4}{315}-\frac{3801088\,c_5}{3465}-\frac{1835008\,c_6}{495}-\frac{511705088\,c_7}{45045}=\frac{2048}{45}+8\,e^2-104\,e^{-2},\ -\frac{10240\,c_1}{49}+\frac{32768\,c_2}{45}+\frac{65536\,c_3}{105}$$

$$+\frac{524288\,c_4}{3465}-\frac{6029312\,c_5}{3465}-\frac{375390208\,c_6}{45045}-\frac{448790528\,c_7}{15015}=\frac{192512}{2205}+8\,e^2+408\,e^{-2},\ -\frac{1441792\,c_1}{2205}+\frac{606208\,c_2}{315}+\frac{7733248\,c_3}{3465}+\frac{1310720\,c_4}{693}-\frac{8388608\,c_5}{5005}$$

$$-\frac{788529152\,c_6}{45045}-\frac{1140850688\,c_7}{15015}=\frac{425984}{2205}+80\,e^2-2064\,e^{-2},\ -\frac{4308992\,c_1}{2205}+\frac{17825792\,c_2}{3465}+\frac{4980736\,c_3}{693}+\frac{77594624\,c_4}{9009}+\frac{16777216\,c_5}{5005}-\frac{134217728\,c_6}{4095}$$

$$-\frac{134217728\,c_7}{715}=\frac{622592}{1323}-112\,e^2+12720\,e^{-2},\ -\frac{47316992\,c_1}{8085}+\frac{4456448\,c_2}{315}+\frac{92274688\,c_3}{4095}+\frac{12582912\,c_4}{385}+\frac{67108864\,c_5}{2145}-\frac{134217728\,c_6}{3003}-\frac{113816633344\,c_7}{255255}$$

$$=\frac{8126464}{6615}+2048\,e^2-92160\,e^{-2}$$

$C\_value := solve(\{C\_matr\});$ ###поиск C1 и C2 и C3, C4,C5, C6, C7

$$C\_value := \left\{c_1=\frac{4286663299886}{2691055139791}+\frac{19102155029783595\,e^2}{44090247410335744}-\frac{599498547177024495\,e^{-2}}{44090247410335744},\right. \tag{69}$$

$$c_2=\frac{11892934420070}{24219496258119}+\frac{326041443497387293 5\,e^2}{88180494820671488}-\frac{17770886759268009823 5\,e^{-2}}{88180494820671488},\ c_3=\frac{5965104543541}{48438992516238}-\frac{14427246742755701497 5\,e^2}{705443958565371904}+\frac{78777175745381724532 35\,e^{-2}}{705443958565371904},$$

$$c_4=\frac{1081577008369}{48438992516238}+\frac{2441904294391698943 95\,e^2}{705443958565371904}-\frac{13332215625721160692095\,e^{-2}}{705443958565371904},\ c_5=\frac{1391639715323}{193755970064952}$$

$$-\frac{276585108101776663975 5\,e^2}{1128710333370459504 64}+\frac{151011437272418416463055\,e^{-2}}{112871033370459504 64},\ c_6=-\frac{239114117957}{387511940129904}+\frac{172406739903357393505 5\,e^2}{2257420667409190092 8}$$

$$-\frac{94131211062342755084355\,e^{-2}}{22574206674091900928},\ c_7=\frac{1064002853771}{3100095521039232}$$

$$- \frac{15620044913164194295 65\,e^{2}}{18059365339273520 7424} + \frac{852835626169681266877 05\,e^{-2}}{18059365339273520 7424} \Big\}$$

for i **from** 1 **to** n **do**

$C[i] := evalf(rhs(C\_value[i]));$

end do:

for i **from** 1 **to** 1 **do**

$$yn(x) := u0(x) + \sum_{k=1}^{n} C_k \cdot u_k(x) :$$

end do:

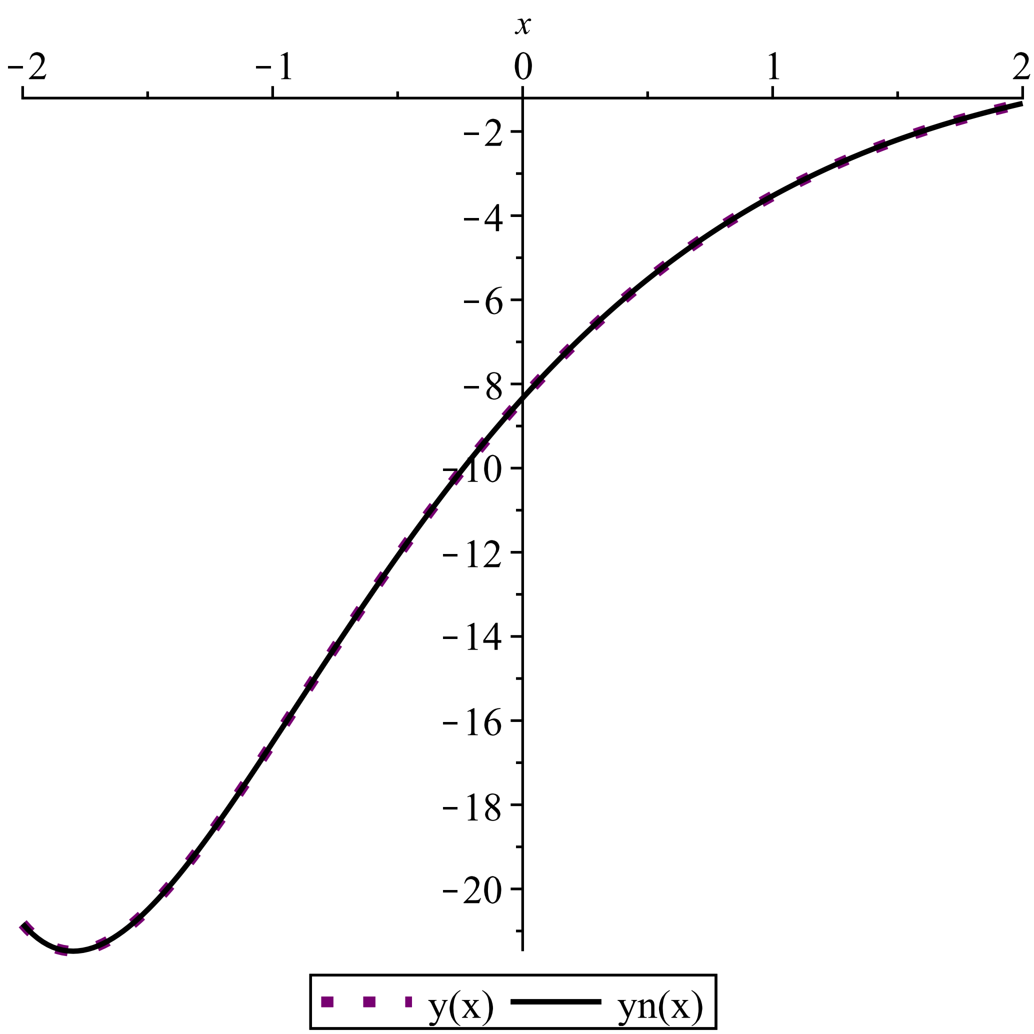
$Y[n] = yn(x);$

$evalf(Maximize(\text{abs}((y(x) - yn(x))), x = a..b));$

$$Y_7 = 4.873667286\,x - 22.89700268 + 2.954083695\,x^2 + 0.9571969\,(x+2)^2(-x+2) + 0.258924\,(x+2)^2(-x+2)^2 + 0.047286\,(x+2)^2(-x+2)^3 + 0.020191\,(x+2)^2(-x+2)^4 - 0.0025385\,(x+2)^2(-x+2)^5 + 0.00109788\,(x+2)^2(-x+2)^6$$

$$[0.000477347116420779, [x = -0.495900698882092]] \quad \textbf{(70)}$$

$plot([y(x), yn(x)], x = a..b, legend = [\text{"y(x)"}, \text{"yn(x)"}], linestyle = [dot, solid], thickness = [4, 2], color = [purple, black]);$



"ε_7 = 0.000477347116420779" ;

"ε_7 = 0.000477347116420779" **(71)**

\###########################

\#*При седьмом приближении погрешноть "max*$|y(x) - yn(x)|$, $x = a .. b$*"* = 0.000477347116420446 < 0.001

\###*Следовательно, приближенное решение* $Y[7](x)$ *достигает погрешность, меньшую* ε = 0.001