МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

МГТУ им Н.Э.Баумана

Факультет ФН
Кафедра вычислительной математики и математической физики

Соколов Арсений Андреевич

Лабораторная работа №4 по численным методам

3 курс, группа ФН11-53Б
Вариант 6

Преподаватель
_____________ В. А. Кутыркин
«___» _______ 2019 г.

Москва, 2019 г.

Задание 1

Задание.
Используя метод Якоби, найти приближённое решение полной спектральной задачи для матрицы A, приведённой в таблицах ниже. Останов выбрать на том шаге итерации, когда максимальный по модулю внедиагональный элемент преобразованной матрицы станет меньше $\epsilon = 0.01$. Проверить найденные приближённые собственные векторы и отвечающие им собственные значения матрицы A.
Исходные данные.
$N = 6, n = 53$

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 12 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & 12 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 12 \end{pmatrix}$$

Решение.
Согласано методу Якоби будем составлять матрицы Q и A соответствующим образом:

$$\boldsymbol{Q}(\alpha, \beta; \varphi) = \langle \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{\alpha-1},^{>} \boldsymbol{s}(\alpha, \beta; \varphi), \boldsymbol{e}_{\alpha+1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{\beta-1},^{>} \boldsymbol{t}(\alpha, \beta; \varphi), \boldsymbol{e}_{\beta+1}, \ldots, \boldsymbol{e}_n] \,,$$

где

$$\begin{cases} \boldsymbol{s}(\alpha, \beta; \varphi) = \sum_{k=1}^{n} \left(\delta_\alpha^k \cos\varphi + \delta_\beta^k \sin\varphi \right) \boldsymbol{e}_k \\ \boldsymbol{t}(\alpha, \beta; \varphi) = \sum_{k=1}^{n} \left(-\delta_\alpha^k \sin\varphi + \delta_\beta^k \cos\varphi \right) \boldsymbol{e}_k \end{cases},$$

где

$$\varphi = \frac{1}{2} arcctg \frac{a_\alpha^\alpha[k] - a_\beta^\beta[k]}{2a_\alpha^\beta}$$

На i-ой итерации будем искать матрицу A как

$$A_i = {}^T Q_{i-1} \cdot A_{i-1} \cdot Q_{i-1},$$

для $i = 1, 2, \ldots$, где $A_0 = A, Q_0 = Q$.

Итерация 1.

$$\alpha = 1, \beta = 4$$

$$\varphi = 0.7853982$$

$$Q = \begin{pmatrix} 0.7071068 & 0 & 0 & -0.7071068 \\ 0.0000000 & 1 & 0 & 0.0000000 \\ 0.0000000 & 0 & 1 & 0.0000000 \\ 0.7071068 & 0 & 0 & 0.7071068 \end{pmatrix}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 15.00000 & -0.70711 & 2.12132 & 0.00000 \\ -0.70711 & 12.00000 & 3.00000 & -2.12132 \\ 2.12132 & 3.00000 & 12.00000 & -0.70711 \\ 0.00000 & -2.12132 & -0.70711 & 9.00000 \end{pmatrix}$$

Итерация 2.

$$\alpha = 2, \beta = 3$$

$$\varphi_1 = 0.7853982$$

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 1.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.70711 & -0.70711 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.70711 & 0.70711 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 1.00000 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 15.00000 & 1.00000 & 2.00000 & 0.00000 \\ 1.00000 & 15.00000 & 0.00000 & -2.00000 \\ 2.00000 & 0.00000 & 9.00000 & 1.00000 \\ 0.00000 & -2.00000 & 1.00000 & 9.00000 \end{pmatrix}$$

Итерация 3.

$$\alpha = 1, \beta = 3$$

$$\varphi_2 = 0.2940013$$

$$Q_2 = \begin{pmatrix} 0.95709 & 0.00000 & -0.28978 & 0.00000 \\ 0.00000 & 1.00000 & 0.00000 & 0.00000 \\ 0.28978 & 0.00000 & 0.95709 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 1.00000 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 15.60555 & 0.95709 & 0.00000 & 0.28978 \\ 0.95709 & 15.00000 & -0.28978 & -2.00000 \\ 0.00000 & -0.28978 & 8.39445 & 0.95709 \\ 0.28978 & -2.00000 & 0.95709 & 9.00000 \end{pmatrix}$$

Итерация 4.

$$\alpha = 2, \beta = 4$$

$$\varphi_3 = -0.2940013$$

$$Q_3 = \begin{pmatrix} 1.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.95709 & 0.00000 & 0.28978 \\ 0.00000 & 0.00000 & 1.00000 & 0.00000 \\ 0.00000 & -0.28978 & 0.00000 & 0.95709 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 15.60555 & 0.83205 & 0.00000 & 0.55470 \\ 0.83205 & 15.60555 & -0.55470 & 0.00000 \\ 0.00000 & -0.55470 & 8.39445 & 0.83205 \\ 0.55470 & 0.00000 & 0.83205 & 8.39445 \end{pmatrix}$$

Итерация 5.

$$\alpha = 3, \beta = 4$$

$$\varphi_4 = 0.7853982$$

$$Q_4 = \begin{pmatrix} 1.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 \\ 0.00000 & 1.00000 & 0.00000 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.00000 & 0.70711 & -0.70711 \\ 0.00000 & 0.00000 & 0.70711 & 0.70711 \end{pmatrix}$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} 15.60555 & 0.83205 & 0.39223 & 0.39223 \\ 0.83205 & 15.60555 & -0.39223 & 0.39223 \\ 0.39223 & -0.39223 & 9.22650 & 0.00000 \\ 0.39223 & 0.39223 & 0.00000 & 7.56240 \end{pmatrix}$$

Итерация 6.

$$\alpha = 1, \beta = 2$$

$$\varphi_5 = 0.7853982$$

$$Q_5 = \begin{pmatrix} 0.70711 & -0.70711 & 0.00000 & 0.00000 \\ 0.70711 & 0.70711 & 0.00000 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.00000 & 1.00000 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 1.00000 \end{pmatrix}$$

$$A_6 = \begin{pmatrix} 16.43760 & 0.00000 & 0.00000 & 0.55470 \\ 0.00000 & 14.77350 & -0.55470 & -0.00000 \\ 0.00000 & -0.55470 & 9.22650 & 0.00000 \\ 0.55470 & -0.00000 & 0.00000 & 7.56240 \end{pmatrix}$$

Итерация 7.

$$\alpha = 1, \beta = 4$$

$$\varphi_6 = 0.0621775$$

$$Q_6 = \begin{pmatrix} 0.99807 & 0.00000 & 0.00000 & -0.06214 \\ 0.00000 & 1.00000 & 0.00000 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.00000 & 1.00000 & 0.00000 \\ 0.06214 & 0.00000 & 0.00000 & 0.99807 \end{pmatrix}$$

$$A_7 = \begin{pmatrix} 16.47214 & -0.00000 & 0.00000 & 0.00000 \\ -0.00000 & 14.77350 & -0.55470 & -0.00000 \\ 0.00000 & -0.55470 & 9.22650 & -0.00000 \\ 0.00000 & -0.00000 & -0.00000 & 7.52786 \end{pmatrix}$$

Итерация 8.

$$\alpha = 2, \beta = 3$$

$$\varphi_7 = -0.09869778$$

$$Q_7 = \begin{pmatrix} 1.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.99513 & 0.09854 & 0.00000 \\ 0.00000 & -0.09854 & 0.99513 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 1.00000 \end{pmatrix}$$

$$A_8 = \begin{pmatrix} 16.47214 & -0.00000 & 0.00000 & 0.00000 \\ -0.00000 & 14.82843 & 0.00000 & -0.00000 \\ 0.00000 & 0.00000 & 9.17157 & -0.00000 \\ 0.00000 & -0.00000 & -0.00000 & 7.52786 \end{pmatrix}$$

Получили, что на восьмой итерации достигнута заданная точность. Проверим полученные собственные значения с помощью функции *eigen*, встроенной в пакет *R*, в котором выполнялась данная работа:

```
> print(eigen(A)$values, digits = 6)
[1] 16.47214 14.82843  9.17157  7.52786
```

Получили, что решения совпадают.

Соответствующие собственные вектора:

$$v_1 = \begin{pmatrix} -0.601501 \\ -0.371748 \\ -0.601501 \\ -0.371748 \end{pmatrix}; v_2 = \begin{pmatrix} 0.2705981 \\ -0.6532815 \\ -0.2705981 \\ 0.6532815 \end{pmatrix}; v_3 = \begin{pmatrix} 0.6532815 \\ 0.2705981 \\ -0.6532815 \\ -0.2705981 \end{pmatrix}; v_4 = \begin{pmatrix} -0.371748 \\ 0.601501 \\ -0.371748 \\ 0.601501 \end{pmatrix}.$$