Лабораторная работа № 7

Метод конечных сумм для решения интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода с симметричным, непрерывным и аналитически заданным ядром

Рассмотрим на квадрате $[a;b]\times[a;b]$ интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода с симметричным, непрерывным и аналитически заданным ядром:

$$x(s)-\lambda\int_a^b K(s,\tau)x(\tau)d\tau = y(s),\ s\in[a;b], \tag{1}$$

где $\lambda\in\mathbb{R}$ – фиксированное ненулевое число, не являющееся характеристическим числом интегрального оператора этого уравнения, $K\in C([a;b]\times[a;b],\mathbb{R})$ – заданное симметричное ядро этого оператора и $y\in \mathrm{C}^2([a;b],\mathbb{R})$ – известная функция.

Для построения дискретного аналога, аппроксимирующего уравнение (1), зададим на квадрате $[a;b]\times[a;b]$ двумерную центрально-равномерную сетку $B\times A=\langle(s_i,\tau_j): s_i\in B, \tau_j\in A\rangle$ типа $n\times n$ шага (h,τ). Следовательно, $B=\langle s_1,s_2,...,s_n\rangle$ и $A=\langle \tau_1,\tau_2,...,\tau_n\rangle$ центрально-равномерные сетки отрезка $[a;b]$ с шагами $h=\dfrac{b-a}{n}$ и $\tau=\dfrac{b-a}{n}$, соответственно.

Для любого узла $(s_i,\tau_j)\in B\times A$ $(i,j=\overline{1,n})$ и функций K, x и y из уравнения (1) приняты обозначения: $K_j^i=K(s_i;\tau_j)$, $x^j=x(\tau_j)=x(s_j)$ и $y^i=y(s_i)$. Используя эти обозначения и квадратурную формулу прямоугольников, из уравнения (1) получаем его дискретный аналог, аппроксимирующий уравнение (1) при $h,\tau\to 0$, в виде СЛАУ:

$$\begin{cases} x^i-\lambda\sum\limits_{j=1}^n K_j^i h\cdot x^j = y^i, \\ i=\overline{1,n}. \end{cases} \tag{2}$$

Введём обозначения:

$${}^{>}\boldsymbol{x}=[x^1,\dots,x^n\rangle,\ {}^{>}\boldsymbol{y}=[y^1,\dots,y^n\rangle\in{}^{>}\mathbb{R}^n,\ \boldsymbol{F}=(\delta_j^i-\lambda K_j^i\cdot h)_n^n=(f_j^i)_n^n\in \mathrm{L}(\mathbb{R},n), \tag{3}$$

где $\delta_j^i=\begin{cases}1,\ i=j;\\ 0,\ i\neq j.\end{cases}$

Используя эти обозначения (3), СЛАУ (2) перепишем в виде:

$$\boldsymbol{F}\cdot{}^{>}\boldsymbol{x}={}^{>}\boldsymbol{y}. \tag{4}$$

Решая СЛАУ (4), получаем сеточную функцию ${}^{>}\boldsymbol{x}=[x^1,\dots,x^n\rangle\in{}^{>}\mathbb{R}^{|A|}(A)$, индуцирующую с помощью интерполяции в виде ломаной приближённое решение уравнения (1). При $h,\tau\to 0$ $(n\to+\infty)$ такое приближённое решение в чебышёвской (равномерной) норме сходится к решению уравнения (1).

<u>ЗАДАНИЕ 1</u>

Используя дискретный аналог уравнения (1), индуцированный методом конечных сумм с квадратурными формулами прямоугольников (количество узлов в квадратурной формуле не менее 20), найти приближённое решение уравнения (1), которое имеет конкретный вид:

$$x(s) - \frac{1}{n - 49} \cdot \int_{0}^{\frac{N+5}{N}} K(s,\tau)x(\tau)dt = \frac{N+5}{N}(s^2 + n - 49), \;\; s \in [0; \frac{N+5}{N}],$$

где N − номер фамилии студента в журнале, n − номер группы и

$$K(s,\tau) = \begin{cases} s(2\dfrac{N+5}{N} - \tau), \;\; 0 \le s \le \tau \; ; \\ \tau(2\dfrac{N+5}{N} - s), \;\; \tau \le s \le \dfrac{N+5}{N}. \end{cases}$$

Оценить абсолютную погрешность приближённого решения, сравнив его с аналитическим решением, полученным сведением уравнения (1) к краевой задаче для обыкновенного линейного дифференциального уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами.▶