#Постановка задачи :

#Рассматривается начально краевая задача в двумерном пространственно−временной области $D=\{\ (x, t) : o \le x \le l,\quad 0 \le t \le T\}$.

#Найти решение уравнения

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u = c1 \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} u :$$

#Удовлетворяющее условиям

$\#a0 \cdot u(0, t) := c2 = a2 :$

$\#b0 \cdot u(l, t) := c3 = b2 :$

$$\#u(x, 0) := c4 \cdot x^2 + \frac{c3 - c2 - c4 \cdot l^2}{l} \cdot x + c2 = f(x) :$$

$$\#\frac{\partial}{\partial t} u(x, 0) := 0 :$$

#Дано:

$l := 1 :$

$c1 := 9 :$

$c2 := -0.2 :$

$c3 := 0.1 :$

$c4 := 1 :$

$a := 0 :$

$b := l :$

$a0 := 1 :$

$b0 := 1 :$

$a1 := 0 :$

$b1 := 0 :$

$a2 := c2 :$

$b2 := c3 :$

#Получаем

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) = 9 \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) :$$

$u(0, t) := c2;$

$$u(0, t) := -0.2 \tag{1}$$

$u(1, t) := c3;$

$$u(1, t) := 0.1 \tag{2}$$

$$u(x, 0) := c4 \cdot x^2 + \frac{c3 - c2 - c4 \cdot l^2}{l} \cdot x + c2 :$$

$simplify(u(x, 0))$

$$x^2 - 0.7\, x - 0.2 \tag{3}$$

$f(x) := x^2 - 0.7\, x - 0.2 :$

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, 0) := 0 :$$

$\varphi(x) := 0;$

$$\varphi := x \to 0 \tag{4}$$

#Подставим в граничные условия

$f(0) = c2$

$$-0.2 = -0.2 \tag{5}$$

$f(l) = c3$

$$0.1 = 0.1 \tag{6}$$

#Верно!

#1.Методом Фурье разделения переменных найти точное решение U(x,t) задачи и построить совмещенные графики точного решения при T=0,1,2,3,4

#Решение ищем в виде U(x,t)=u1(x)+u2(x,t)

#Найдем функцию u1(x), которая удовлетворяет условиям

$u1(0) := c2;$

$$u1(0) := -0.2 \tag{7}$$

$u1(l) := c3;$

$$u1(1) := 0.1 \tag{8}$$

#Функцию ищем в виде полинома 1 степени

$u1(x) := A\cdot x + B:$

$solve\left(\left[subs\left(x = a,\ a0\cdot u1(x) + a1\frac{d}{dx}u1(x)\right) = a2,\ subs\left(x = b,\ b0\cdot u1(x) + b1\cdot\frac{d}{dx}u1(x)\right) = b2\right],\ [A, B]\right);$

$$[[A = 0.3000000000,\ B = -0.2000000000]] \tag{9}$$

$u1(x) := 0.3\cdot x - 0.2:$

#Перейдем к решению задачи относитльно функции u2(x,t)

#Рассмотрим уравнение $\frac{\partial^2}{\partial t^2}u2(x,t) = 3^2\cdot\frac{\partial^2}{\partial x^2}u2(x,t)$

#С однородными граничными условиями

$u2(0, t) := 0:$

$u2(2, t) := 0:$

#С начальными условиями

$u2(x, 0) := f(x) - u1(x)$

$$u2(x, 0) := x^2 - x \tag{10}$$

$f1(x) := x^2 - x:$

$\frac{\partial}{\partial t}u2(x, 0) := 0 = \varphi(x):$

#Ищем решение в виде $u2(x, t) = X(x)T(t)$

#Получаем $\frac{X''}{X} = \frac{T''}{9\cdot T}$ =-λ

$X'' + \lambda\cdot X = 0$

$$\frac{d^2}{dx^2}X(x) + \lambda X(x) = 0 \tag{11}$$

$T'' + 3^2\cdot\lambda\cdot T = 0$

$$\frac{d^2}{dx^2}T(x) + 9\lambda T(x) = 0 \tag{12}$$

$u(0,t) = X(0)T(t) = 0$
$u(l,t) = X(l)T(t) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad X(0) = X(l) = 0$

*#Задача Штурма-Лиувилля*
$X'' + \lambda \cdot X = 0$

$$\frac{d^2}{dx^2} X(x) + \lambda X(x) = 0 \tag{13}$$

$X(0) = X(l) = 0$

$\lambda n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 :$

$Xn(x) = \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right)$

$$Xn(x) = \sin(\pi n\, x) \tag{14}$$

$Tn(t) = An \cdot \cos\left(\frac{3\pi n}{l} t\right) + Bn \cdot \sin\left(\frac{3\pi n}{l} t\right) :$

$u2(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(An \cdot \cos\left(\frac{3\pi n}{l} t\right) + Bn \cdot \sin\left(\frac{3\pi n}{l} t\right)\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{l} \cdot x\right)$

*#Подставим в начальные условия*

$u2(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} An \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{l} \cdot x\right) = f1(x)$

$\frac{\partial}{\partial t} u(x,0) := \sum_{n=1}^{\infty} Bn \cdot \frac{3\pi n}{l} \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{2} \cdot x\right) = \varphi(x)$

$An := \frac{2}{l} \cdot \int_0^l f1(x) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot n}{l} \cdot x\right) dx$

$$An := \frac{2\,(\pi\, n \sin(\pi\, n) + 2\cos(\pi\, n) - 2)}{\pi^3\, n^3} \tag{15}$$

$Bn := \frac{2}{l} \cdot \frac{2}{3 \cdot \pi \cdot n} \cdot \int_0^l \varphi(x) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot n}{2} \cdot x\right) dx$

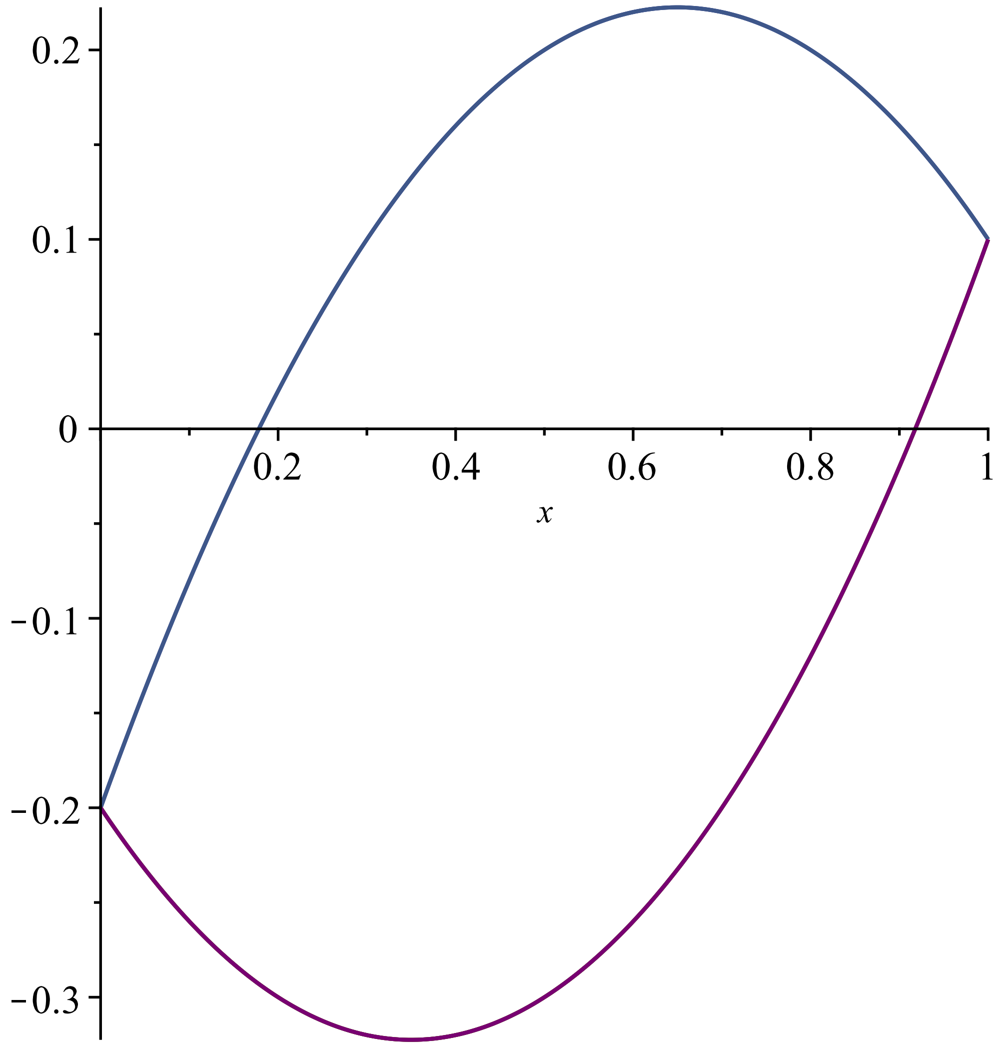
$$Bn := 0 \tag{16}$$

*#Получаем ответ:*

$U(x,t) := u1(x) + \sum_{n=1}^{100} \left(An \cdot \cos\left(\frac{3 \cdot \pi \cdot n}{l} \cdot t\right) + Bn \cdot \sin\left(\frac{3 \cdot \pi \cdot n}{l} \cdot t\right)\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot n}{l} \cdot x\right) :$

*#Построим совмещенные графики при T=0,1,2,3,4*

$plot\left(\left[U(x,t)\Big|_{t=0}, U(x,t)\Big|_{t=1}, U(x,t)\Big|_{t=2}, U(x,t)\Big|_{t=3}, U(x,t)\Big|_{t=4}\right], x=0..l\right)$




*#Проверка*

$U(x,t)\Big|_{x=0}$

$$-0.2 \tag{17}$$

$U(x,t)\Big|_{x=1}$

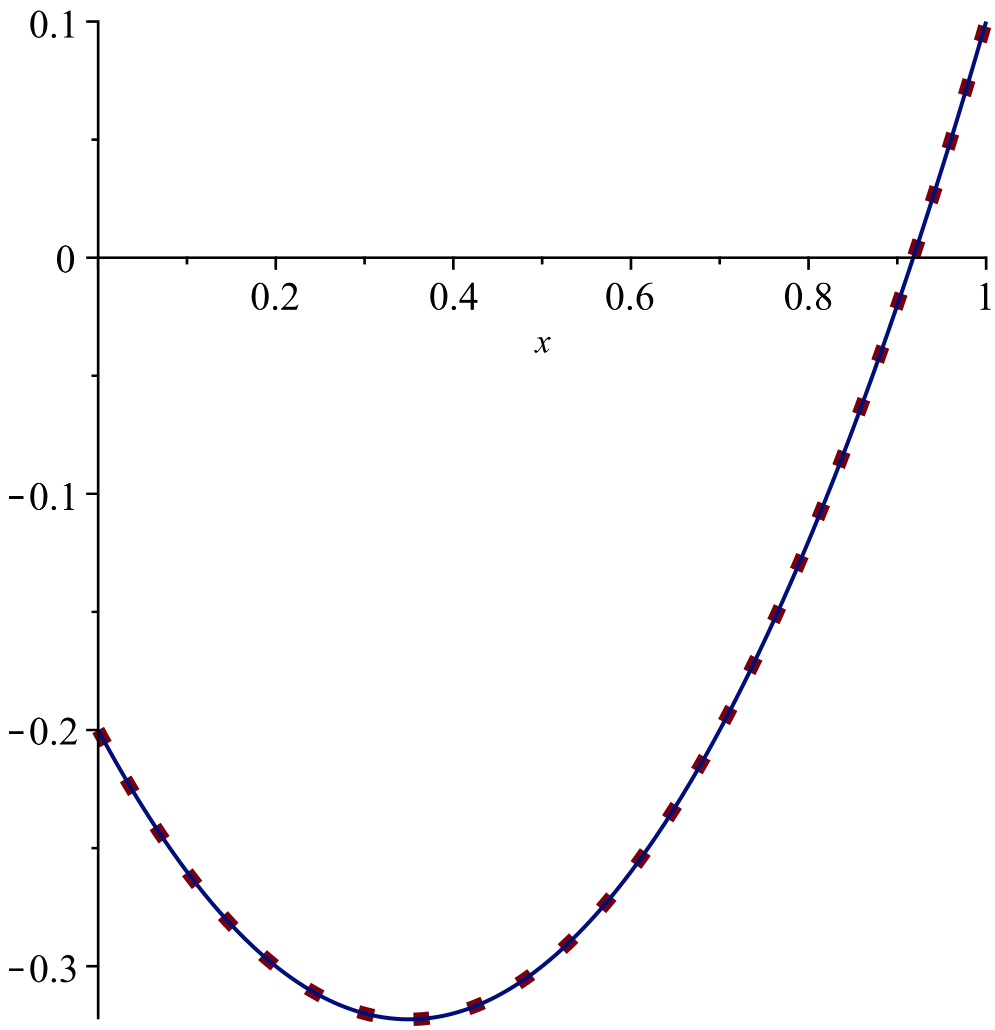
$$0.1 \tag{18}$$

$U(x,t)\Big|_{t=0}:$

*#Построим совмещенные графики, чтобы сделать проверку*

$with(plots):$

$plot\left(\left[f(x), U(x,t)\Big|_{t=0}\right], x=0..1, linestyle=[dot, solid],\ \ thickness=[5, 1]\right)$




*#Видим, что графики наложились. Следовательно, проверка сошлась*
*# Все условия сошлись. Ответ верный!*

$$\left.\frac{\partial}{\partial t} U(x, t)\right|_{t=0}$$

$$0 \tag{19}$$

*#2. Методом Галеркина найти пробные решения un(x,T), n=0,1,2,3, используя системы пробных un(x,t) и поверочных функций wn(x,t). Определить меры точности полученных решений. Сделать вывод о точности решений.*

*#Постановка задачи : Рассматривается начально краевая задача в двумерном пространственно-временной области D={ (x,t) : o ≤x≤l, 0≤t≤T}. Найти решение уравнения*

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u = 9 \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} u :$$

*#удовлетворяющее граничным условиям*

$\#a0 \cdot u(0,t) := -0.2 = a2 :$
$\#b0 \cdot u(1,t) := 0.1 = b2 :$
*#и начальным условиям*
$\#u(x,0) := x^2 - 0.7\,x - 0.2 = f(x) :$
$\#\frac{\partial}{\partial t} u(x,0) := 0 = \varphi(x) :$
*#Дано:*
$l := 1 :$
$c1 := 9 :$
$c2 := -0.2 :$
$c3 := 0.1 :$
$c4 := 1 :$
$a := 0 :$
$b := l :$
$a0 := 1 :$
$b0 := 1 :$
$a1 := 0 :$
$b1 := 0 :$
$a2 := c2 :$
$b2 := c3 :$

$f(x) := x^2 - 0.7\,x - 0.2 :$
$\varphi(x) := 0 :$
*#Найдем пробные функции*
$u0(x,t) := A \cdot x + B :$
$$solve\left(\left[subs\left(x = a,\ a0 \cdot u0(x,t) + a1 \frac{d}{dx} u0(x,t)\right) = a2,\ subs\left(x = b,\ b0 \cdot u0(x,t) + b1 \cdot \frac{d}{dx} u0(x,t)\right) = b2\right],\ [A, B]\right);$$

$$[[A = 0.3000000000,\ B = -0.2000000000]] \qquad \textbf{(20)}$$

$u0(x,t) := 0.3 \cdot x - 0.2 :$

**for** $k$ **from** 1 **to** 3 **do**:
$V1(k,x) := \sin\left((2 \cdot k - 1) \cdot \frac{\pi}{l} \cdot x\right)$
**end do**;

$$V1(1,x) := \sin(\pi x)$$
$$V1(2,x) := \sin(3\,\pi x)$$
$$V1(3,x) := \sin(5\,\pi x) \qquad \textbf{(21)}$$

**for** $k$ **from** 1 **to** 3 **do**:
$V\_norm(k,x) := \sqrt{\int_0^l (V1(k,x))^2\, dx}$
**end do**;

$$V\_norm(1,x) := \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$V\_norm(2,x) := \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$V\_norm(3,x) := \frac{\sqrt{2}}{2} \tag{22}$$

*# Получаем систему нормированных пробных функций*

**for** $k$ **from** 1 **to** 3 **do**:

$V(k,x) := \frac{V1(k,x)}{V\_norm(k,x)}$

**end do**;

$$V(1,x) := \sin(\pi x)\sqrt{2}$$
$$V(2,x) := \sin(3\pi x)\sqrt{2}$$
$$V(3,x) := \sin(5\pi x)\sqrt{2} \tag{23}$$

*#Найдем 1 и 2 производные пробных функций для дальнейшей подстановки*

**for** $k$ **from** 1 **to** 3 **do**:

$Vx(k,x) := \frac{d}{dx}V(k,x);$

$Vxx(k,x) := \frac{d^2}{dx^2}V(k,x);$

$V\_0x(x) := \frac{d}{dx}u0(x,t);$

$V\_0xx := \frac{d^2}{dx^2}u0(x,t)$

**end do**;

$$Vx(1,x) := \pi\cos(\pi x)\sqrt{2}$$
$$Vxx(1,x) := -\pi^2\sin(\pi x)\sqrt{2}$$
$$V\_0x(x) := 0.3$$
$$V\_0xx := 0$$
$$Vx(2,x) := 3\pi\cos(3\pi x)\sqrt{2}$$
$$Vxx(2,x) := -9\pi^2\sin(3\pi x)\sqrt{2}$$
$$V\_0x(x) := 0.3$$
$$V\_0xx := 0$$
$$Vx(3,x) := 5\pi\cos(5\pi x)\sqrt{2}$$
$$Vxx(3,x) := -25\pi^2\sin(5\pi x)\sqrt{2}$$
$$V\_0x(x) := 0.3$$
$$V\_0xx := 0 \tag{24}$$

*#Введем систему поверочных функций*

**for** $k$ **from** 1 **to** 3 **do**:

$W(k, x) := V(k, x)$
**end do**;

$$W(1, x) := \sin(\pi x)\sqrt{2}$$
$$W(2, x) := \sin(3\pi x)\sqrt{2}$$
$$W(3, x) := \sin(5\pi x)\sqrt{2} \tag{25}$$

*#Найдем коэффициенты системы дифференциальных уравнений*

$\#A \cdot \frac{d^2}{dt^2} H = M \cdot \frac{d}{dt} H + C \cdot H + B$, *чтобы найти функции* $Hk(t)$ *с начальными условиями* $A \cdot H(0) = D1,\ A \cdot \frac{d}{dt} H(0) = N1$

**for** $i$ **from** 1 **to** 3 **do**:
 **for** $j$ **from** 1 **to** 3 **do**:
 $A(i, j) := \int_a^b V(j, x) \cdot W(i, x)\, dx$;
$M(i, j) := 0$;
 $C(i, j) := \int_a^b c1 \cdot Vxx(j, x) \cdot W(i, x)\, dx$;
 **end do**;
 **end do**;

$$A := \begin{bmatrix} A(1,1) & A(1,2) & A(1,3) \\ A(2,1) & A(2,2) & A(2,3) \\ A(3,1) & A(3,2) & A(3,3) \end{bmatrix}$$

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{26}$$

$$M := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}:$$

$$C := \begin{bmatrix} C(1,1) & C(1,2) & C(1,3) \\ C(2,1) & C(2,2) & C(2,3) \\ C(3,1) & C(3,2) & C(3,3) \end{bmatrix}$$

$$C := \begin{bmatrix} -9\pi^2 & 0 & 0 \\ 0 & -81\pi^2 & 0 \\ 0 & 0 & -225\pi^2 \end{bmatrix} \tag{27}$$

**for** $i$ **from** 1 **to** 3 **do**:

$B(i) := 0;$

$D1(i) := \int_a^b (f(x) - u0(x,t)) \cdot W(i,x)\,\mathrm{d}x;$

$N1(i) := \int_a^b \varphi(x) \cdot W(i,x)\,\mathrm{d}x$

**end do**;

$$B(1) := 0$$
$$D1(1) := -0.1824422296$$
$$N1(1) := 0$$
$$B(2) := 0$$
$$D1(2) := -0.006757119615$$
$$N1(2) := 0$$
$$B(3) := 0$$
$$D1(3) := -0.001459537837$$
$$N1(3) := 0 \tag{28}$$

$D1 := \begin{bmatrix} D1(1) \\ D1(2) \\ D1(3) \end{bmatrix}$

$$D1 := \begin{bmatrix} -0.1824422296 \\ -0.006757119615 \\ -0.001459537837 \end{bmatrix} \tag{29}$$

$B := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}:$

$N1 := \begin{bmatrix} N1(1) \\ N1(2) \\ N1(3) \end{bmatrix}$

$$N1 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{30}$$

*#Приведем систему к виду* $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}H = M1 \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H + C1 \cdot H + B1$ с *начальными условиями* $H(0) = D2,$ $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H(0) + N2$

$M1 := A^{-1}.M$

$$M1 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{31}$$

$C1 := A^{-1}.C$

$$C1 := \begin{bmatrix} -9\,\pi^2 & 0 & 0 \\ 0 & -81\,\pi^2 & 0 \\ 0 & 0 & -225\,\pi^2 \end{bmatrix} \tag{32}$$

$B1 := A^{-1}.B$

$$B1 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{33}$$

$D2 := A^{-1}.D1$

$$D2 := \begin{bmatrix} -0.182442229600000 \\ -0.00675711961500000 \\ -0.00145953783700000 \end{bmatrix} \tag{34}$$

$N2 := A^{-1}.N1$

$$N2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{35}$$

*#Приведем к нормальной системе дифференциальных уравнений* $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t} H = AA \cdot H + BB$ с *начальными условиями* $H(0) = D2$

$n := 3$

$$n := 3 \tag{36}$$

**for** $i$ **from** 1 **to** 3 **do**:
$BB(3+i) := 0$;
$BB(i) := 0$;
$D2(3+i) := 0$;
**end do**;

$$BB(4) := 0$$

$$BB(1) := 0$$

$$D2 := \begin{bmatrix} -0.182442229600000 \\ -0.00675711961500000 \\ -0.00145953783700000 \\ 0. \end{bmatrix}$$

$$BB(5) := 0$$

$$BB(2) := 0$$

$$D2 := \begin{bmatrix} -0.182442229600000 \\ -0.00675711961500000 \\ -0.00145953783700000 \\ 0. \\ 0. \end{bmatrix}$$

$$BB(6) := 0$$

$$BB(3) := 0$$

$$D2 := \begin{bmatrix} -0.182442229600000 \\ -0.00675711961500000 \\ -0.00145953783700000 \\ 0. \\ 0. \\ 0. \end{bmatrix} \tag{37}$$

$BB := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}:$

$D2$

$$\begin{bmatrix} -0.182442229600000 \\ -0.00675711961500000 \\ -0.00145953783700000 \\ 0. \\ 0. \\ 0. \end{bmatrix} \tag{38}$$

```
for i from 1 to 3 do:
 for j from 1 to 3 do:
 AA(i,j) := 0;
 AA(n+i, n+j) := M1(i,j );
 AA(n+i,j) := C1(i,j);
 AA(i, n+j) := ifelse(i=j, 1, 0);
 end do;
 end do;
```

$$AA := \begin{bmatrix} AA(1,1) & AA(1,2) & AA(1,3) & AA(1,4) & AA(1,5) & AA(1,6) \\ AA(2,1) & AA(2,2) & AA(2,3) & AA(2,4) & AA(2,5) & AA(2,6) \\ AA(3,1) & AA(3,2) & AA(3,3) & AA(3,4) & AA(3,5) & AA(3,6) \\ AA(4,1) & AA(4,2) & AA(4,3) & AA(4,4) & AA(4,5) & AA(4,6) \\ AA(5,1) & AA(5,2) & AA(5,3) & AA(5,4) & AA(5,5) & AA(5,6) \\ AA(6,1) & AA(6,2) & AA(6,3) & AA(6,4) & AA(6,5) & AA(6,6) \end{bmatrix}$$

$$AA := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -9\,\pi^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -81\,\pi^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -225\,\pi^2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{39}$$

$with(LinearAlgebra)$ :
$ea(t) := simplify(MatrixExponential(AA, t))$

$$ea := t \rightarrow simplify(LinearAlgebra{:-}MatrixExponential(AA, t)) \tag{40}$$

$H(t) := ea(t).D2$

$$H := t \rightarrow Typesetting{:-}delayDotProduct(ea(t), D2) \tag{41}$$

$H(t)$

$$[[-0.182442229600000 \cos(3\,\pi\,t)], [-0.0270284784600000 \cos(3\,\pi\,t)^3 + 0.0202713588450000 \cos(3\,\pi\,t)], [-0.0233526053920000 \cos(3\,\pi\,t)^5 + 0.0291907567400000 \cos(3\,\pi\,t)^3 - 0.00729768918500000 \cos(3\,\pi\,t)], [0.547326688800000\,\pi \sin(3\,\pi\,t)], [0.0608140765350000\,\pi\,(4\cos(3\,\pi\,t)^2 - 1) \sin(3\,\pi\,t)], [0.0218930675550000\,\pi\,(16\cos(3\,\pi\,t)^4 - 12\cos(3\,\pi\,t)^2 + 1) \sin(3\,\pi\,t)]] \tag{42}$$

$\#U1(x, t) := u0(x, t) + \sum_{p=1}^{n} (V(p, x) \cdot (H(t)[p]))$
$U1(x, t) := u0(x, t) + V(1, x) \cdot H(t)[1] + V(2, x) \cdot H(t)[2] + V(3, x) \cdot H(t)[3]$

$$U1 := (x, t) \rightarrow u0(x, t) + V(1, x)\,H(t)_1 + V(2, x)\,H(t)_2 + V(3, x)\,H(t)_3 \tag{43}$$

$U1\_1(x, t) := u0(x, t) + V(1, x) \cdot H(t)[1]$ :
$U1\_2(x, t) := u0(x, t) + V(1, x) \cdot H(t)[1] + V(2, x) \cdot H(t)[2]$ :

$U1\_3(x,t) := U1(x,t):$

*#Проверка*

$simplify\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} U1(x,t) - 9 \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} U1(x,t)\right)$

$$-1.51468526610188\ 10^{-9} \left(1.\ \sin(5\pi x)\cos(3\pi t)^4 + (0.416661584722268\sin(3\pi x) - 1.24999413621800\sin(5\pi x))\cos(3\pi t)^2 - 0.312495015785301\sin(3\pi x) + 0.312497361298101\sin(5\pi x)\right)\cos(3\pi t) \quad \textbf{(44)}$$

*#Видим, что полученный ответ близится к 0, что и требовалось получить*

$U1(x,t)\Big|_{x=0}$

$$-0.200000000000000 \quad \textbf{(45)}$$

$U1(x,t)\Big|_{x=1}$

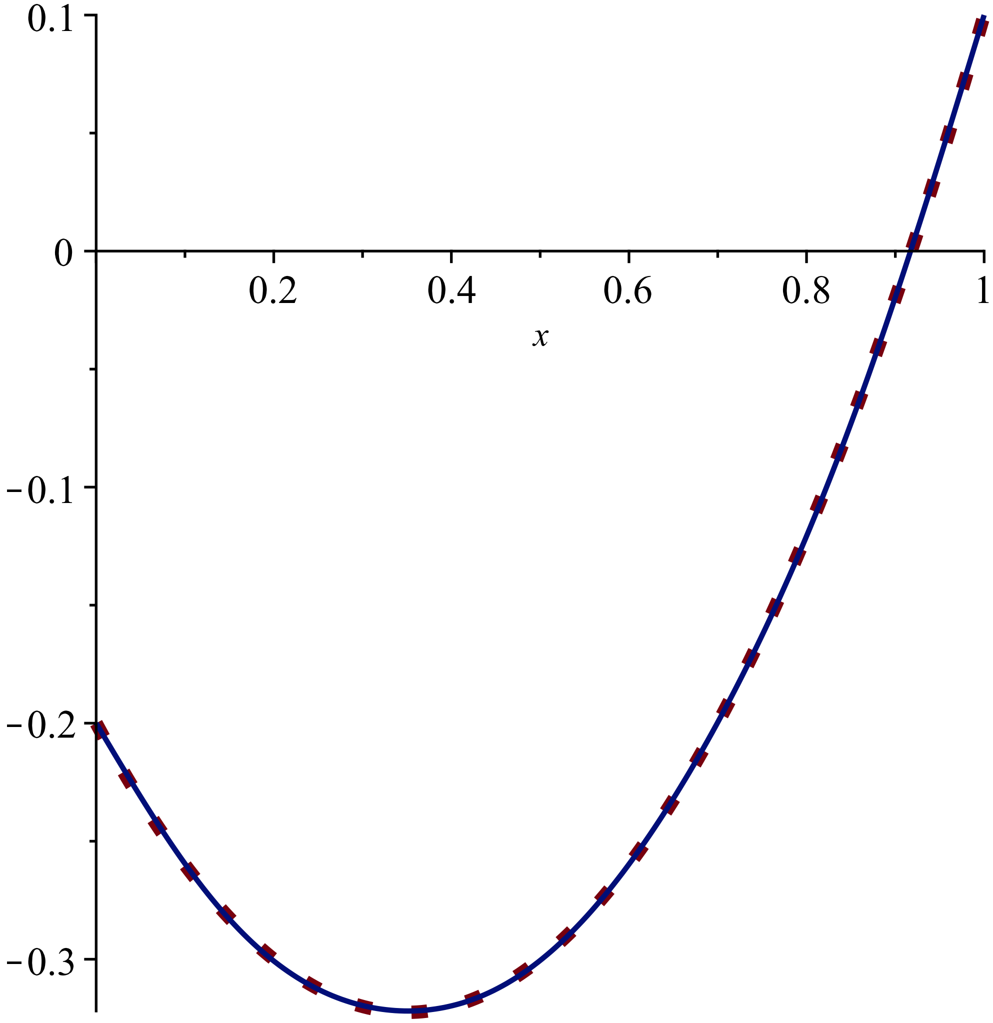
$$0.100000000000000 \quad \textbf{(46)}$$

$U1(x,t)\Big|_{t=0}$

$$0.3\,x - 0.2 - 0.182442229600000\sin(\pi x)\sqrt{2} - 0.00675711961500000\sin(3\pi x)\sqrt{2} - 0.00145953783700000\sin(5\pi x)\sqrt{2} \quad \textbf{(47)}$$

*#Построим совмещенные графики для подтверждения проверки*

$plot\left(\left[f(x),\ U1(x,t)\Big|_{t=0}\right], x = 0..1,\ linestyle = [dot, solid],\ \ thickness = [5, 2]\right)$



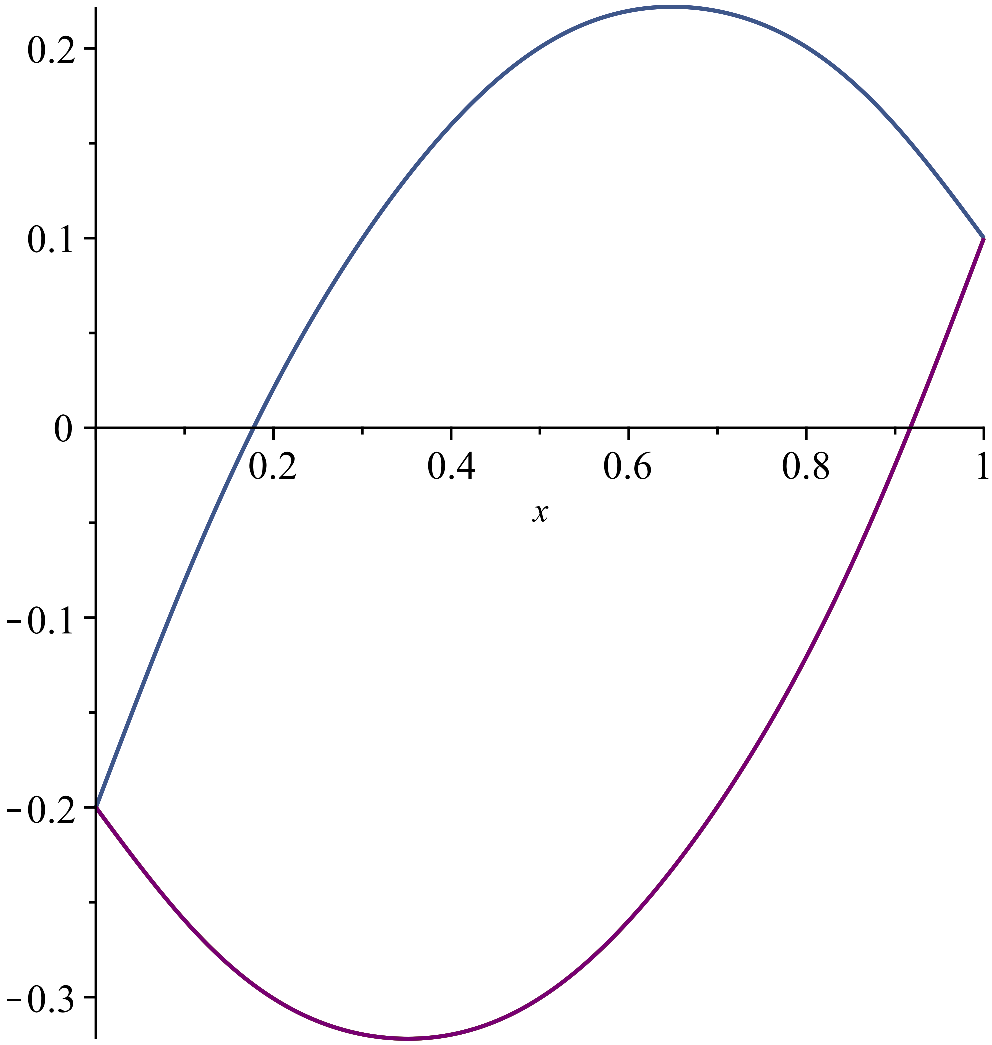

$$\left.\frac{\partial}{\partial t} U1(x, t)\right|_{t=0}$$

$$0. \tag{48}$$

*#Графики наложились друг на друга. Решение верное*

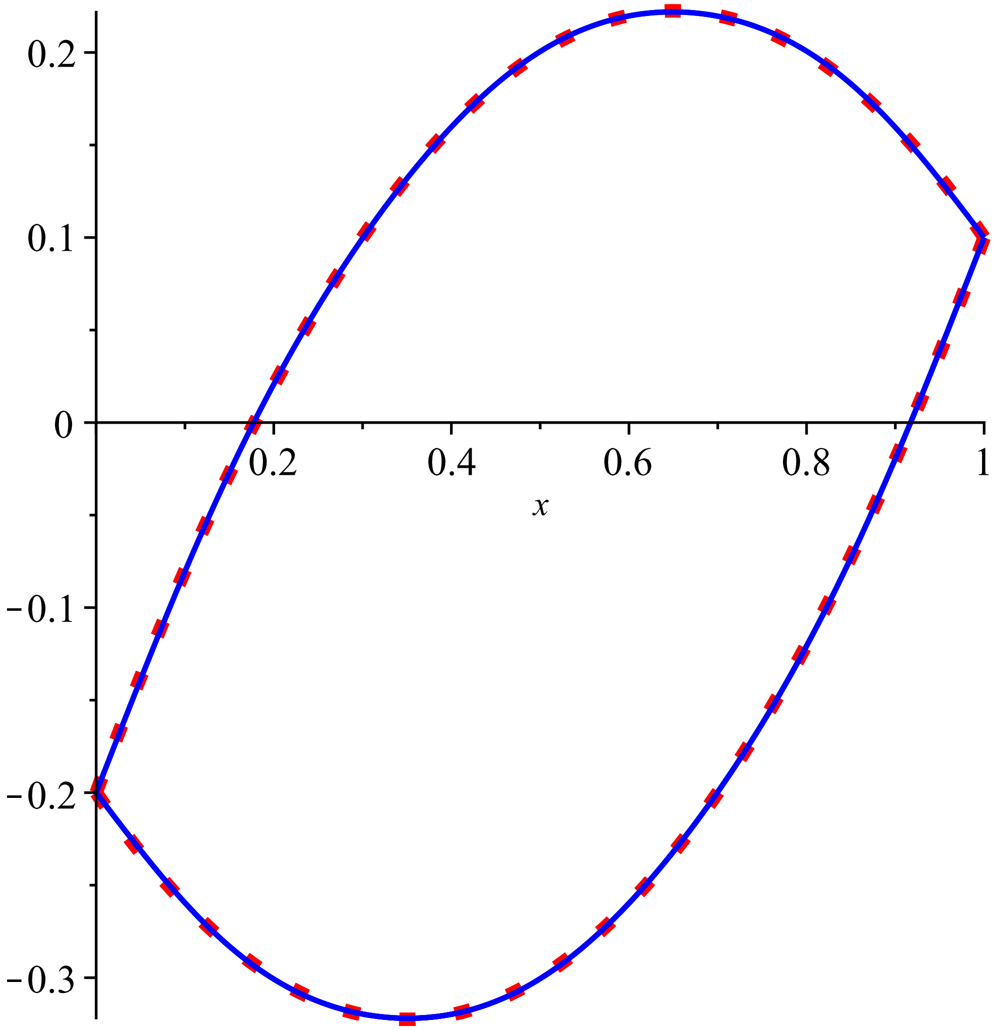
*#Построим график решения, полученного методом галеркина в моменты времени T=0,1,2,3,4*

$$plot\left(\left[\left.U1(x,t)\right|_{t=0}, \left.U1(x,t)\right|_{t=1}, \left.U1(x,t)\right|_{t=2}, \left.U1(x,t)\right|_{t=3}, \left.U1(x,t)\right|_{t=4}\right], x=0..l\right)$$




*#Построим совмещенные графики при T=0,1,2,3,4 двух решений, полученных разными методами*

$$plot\left(\left[U(x,t)\Big|_{t=0}, U(x,t)\Big|_{t=1}, U(x,t)\Big|_{t=2}, U(x,t)\Big|_{t=3}, U(x,t)\Big|_{t=4}, U1(x,t)\Big|_{t=0}, U1(x,t)\Big|_{t=1}, U1(x,t)\Big|_{t=2}, U1(x,t)\Big|_{t=3}, U1(x,t)\Big|_{t=4}\right], x=0..l, linestyle=[dot, dot, dot, dot, dot, solid, solid, solid, solid, solid], thickness=[5,5,5,5,5,2,2,2,2,2], color=[red, red, red, red, red, blue, blue, blue, blue, blue]\right)$$




*#Определим меры точности полученных решений в момет времени T=2*

*with*(*Optimization*) :

*with*(*linalg*) :

*evalf* (*Maximize*(abs( (*U*(*x*, 2) − *U1_1*( *x*, 2)) ), *x* = *a* ..*b*) )

[0.0106386984713434, [*x* = 0.126205082394457]] **(49)**

*evalf* (*Maximize*(abs( (*U*(*x*, 2) − *U1_2*( *x*, 2)) ), *x* = *a* ..*b*) )

[0.00181220218808425, [*x* = 0.725834310530426]] **(50)**

*evalf* (*Maximize*(abs( (*U*(*x*, 2) − *U1_3*( *x*, 2)) ), *x* = *a* ..*b*) )

[0.000775428910063987, [*x* = 0.813865513878907]] **(51)**

*#Видим, что погрешность уменьшается с большим приближением*

*#Видим, что погрешность мала, из чего можем сделать вывод, что решение верное!*