МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

МГТУ им Н.Э.Баумана

Факультет ФН
Кафедра вычислительной математики и математической физики

Соколов Арсений Андреевич

Лабораторная работа №8 по численным методам

3 курс, группа ФН11-53Б
Вариант 6

Преподаватель
______________ В. А. Кутыркин
«___» ________ 2019 г.

Москва, 2019 г.

Задание 1

Задание.
Для заданной на отрезке $[0;2]$ гладкой функции $f(x)=\frac{(a+52-n)x^4+(b-51+n)x^2+c}{(x+1)(x^2+1)}$, где N – номер студента в журнале, n – номер группы, и равномерной сетки $A=\langle \tau_0,\tau_1,\ldots,\tau_k\rangle$, где $k=20$, используя квадратурные формулы прямоугольников, трапеций и парабол, приближённо вычислить интеграл $\int_0^2 f(\tau)d\tau$. Прокомментировать приближённые результаты, сравнивая их с аналитически вычисленным значением интеграла

Исходные данные.
$N=6, n=53, a=3, b=6, c=1$

$$\frac{(3+52-53)x^4+(6-51+53)x^2+1}{(x+1)(x^2+1)}=\frac{1+8x^2+2x^4}{(1+x)(1+x^2)}$$

Решение.
На отрезке $[0;2]$ задана равномерная сетка $A=\langle \tau_0,\tau_1,\ldots,\tau_k\rangle$, где $k=20$, с шагом $\frac{b-a}{k}=0.1$.

Получаем:

$$A=\left\langle 0,\frac{1}{10},\frac{1}{5},\frac{3}{10},\frac{2}{5},\frac{1}{2},\frac{3}{5},\frac{7}{10},\frac{4}{5},\frac{9}{10},1,\frac{11}{10},\frac{6}{5},\frac{13}{10},\frac{7}{5},\frac{3}{2},\frac{8}{5},\frac{17}{10},\frac{9}{5},\frac{19}{10},2\right\rangle$$

Квадратурная формула прямоугольников:

$$\int_0^2 f(\tau)d\tau=h\left(f\left(\theta_1\right)+\ldots+f\left(\theta_20\right)\right)+O(h)\text{при } h\to 0,$$

где $\theta_1=\frac{\tau_0+\tau_1}{2},\ldots,\theta_{20}=\frac{\tau_{19}+\tau_{20}}{2}$ – центрально-равномерная сетка отрезка $[0;2]$.

Получаем:

$$\left\langle\frac{1}{20},\frac{3}{20},\frac{1}{4},\frac{7}{20},\frac{9}{20},\frac{11}{20},\frac{13}{20},\frac{3}{4},\frac{17}{20},\frac{19}{20},\frac{21}{20},\frac{23}{20},\frac{5}{4},\frac{27}{20},\frac{29}{20},\frac{31}{20},\frac{33}{20},\frac{7}{4},\frac{37}{20},\frac{39}{20}\right\rangle$$

$$\int_0^2 f(\tau)d\tau=h\left(f\left(\theta_1\right)+\ldots+f\left(\theta_20\right)\right)+O(h)=5.285262010,$$

Квадратурная формула трапеции:

$$\int_0^2 f(\tau)d\tau=h\left(\frac{1}{2}f\left(\tau_0\right)+f\left(\tau_1\right)+\ldots+f\left(\tau_{19}\right)+\frac{1}{2}f\left(\tau_{20}\right)\right)+O\left(h^2\right)\text{ при } h\to 0$$

Получаем:

$$\int_0^2 f(\tau)d\tau=h\left(\frac{1}{2}f\left(\tau_0\right)+f\left(\tau_1\right)+\ldots+f\left(\tau_{19}\right)+\frac{1}{2}f\left(\tau_{20}\right)\right)+O\left(h^2\right)=5.288360556$$

Квадратурная формула парабол:
Если k – чётное, то

$$\int_0^2 f(\tau)d\tau = \frac{h}{3}\left(f\left(\tau_0\right)+4f\left(\tau_1\right)+2f\left(\tau_2\right)+4f\left(\tau_3\right)+\ldots+2f\left(\tau_{18}\right)+4f\left(\tau_{19}\right)+f\left(\tau_{20}\right)\right)+O\left(h^3\right), \text{при } h \to 0$$

Получаем:

$$\int_0^2 f(\tau)d\tau = \frac{h}{3}\left(f\left(\tau_0\right)+4f\left(\tau_1\right)+2f\left(\tau_2\right)+4f\left(\tau_3\right)+\ldots+2f\left(\tau_{18}\right)+4f\left(\tau_{19}\right)+f\left(\tau_{20}\right)\right)+O\left(h^3\right) = 5.286319825$$

Вычислим аналитическое значение интеграла:

$$\int_0^2 \frac{2\,x^4+8\,x^2+1}{(x+1)\,(x^2+1)} = \frac{1}{4}(22\log(3)+5\log(5)-10\,\mathrm{atan}(2)) \approx 5.286293185$$

Результат.
Рассмотрим модули разностей полученных решений тремя способами со значением интеграла, вычисленного аналитически:

$\mathrm{abs}(res1-5.286293185),\ \mathrm{abs}(res2-5.286293185),\ \mathrm{abs}(res3-5.286293185)$

0.001031175, 0.002067371, 0.000026640

$\min(\mathrm{abs}(res1-5.286293185),\ \mathrm{abs}(res2-5.286293185),\ \mathrm{abs}(res3-5.286293185))$

0.000026640

$\max(\mathrm{abs}(res1-5.286293185),\ \mathrm{abs}(res2-5.286293185),\ \mathrm{abs}(res3-5.286293185))$

0.002067371

Видим, что наибольшую точность даёт квадратурная формула трапеции, а наименьшую точность – квадратурная формула парабол.