

Ю.И. ДИМИТРИЕНКО

---

# Тензорное исчисление



ВЫСШАЯ ШКОЛА

Ю.И. ДИМИТРИЕНКО

---

# Тензорное исчисление

Рекомендовано учебно-методическим объединением вузов  
по университетскому политехническому образованию  
в качестве учебного пособия для студентов  
высших учебных заведений, обучающихся  
по физико-математическим и машиностроительным специальностям



Москва  
«Высшая школа» 2001

УДК 501  
ББК 22  
Д 46

**Р е ц е н з е н т ы:**

кафедра сопротивления материалов, динамики и  
прочности машин Московского авиационного института  
(зав.кафедрой, д-р физ.-мат.наук, профессор А.Г.Горшков);  
д-р физ.-мат.наук, профессор Д.В.Тарлаковский

**Димитриенко Ю.И.**

**Д46 Тензорное исчисление: Учеб.пособие для вузов. – М.: Высш.  
шк., 2001. - 575 с.; ил.**

**ISBN 5-06-004155-7**

Учебное пособие охватывает основные разделы тензорного исчисления, используемые в механике и электродинамике сплошных сред, механике композитов, кристаллофизике, квантовой химии: алгебру тензоров, тензорный анализ, тензорное описание кривых и поверхностей, основы тензорного интегрального исчисления. Изложена теория инвариантов, теория индифферентных тензоров, задающих физические свойства сред, теория анизотропных тензорных функций, а также основы тензорного исчисления в римановых пространствах и пространствах аффинной связности.

*Для студентов и аспирантов высших учебных заведений, обучающихся по физико-математическим и машиностроительным специальностям.*

УДК 501  
ББК 22

**ISBN 5-06-004155-7**

© «Издательство«Высшая школа», 2001

Оригинал-макет данного издания является собственностью издательства «Высшая школа», и его репродуцирование (воспроизведение) любым способом без согласия издательства запрещается.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	5
Истоки тензорного исчисления . . . . .	7
Введение . . . . .	13
<b>Глава 1. ТЕНЗОРНАЯ АЛГЕБРА . . . . .</b>	<b>17</b>
§ 1.1. Локальные векторы базиса. Якобиевы и метрические матрицы . . . . .	17
§ 1.2. Векторное произведение . . . . .	29
§ 1.3. Геометрическое определение тензора и алгебраические операции с тензорами . . . . .	35
§ 1.4. Алгебра тензорных полей . . . . .	52
§ 1.5. Собственные значения тензора . . . . .	59
§ 1.6. Симметричные, кососимметричные и ортогональные тензоры . . . . .	62
§ 1.7. Физические компоненты тензоров . . . . .	70
§ 1.8. Тензоры высших рангов . . . . .	73
§ 1.9. Псевдотензоры . . . . .	80
<b>Глава 2. ТЕНЗОРЫ НА ЛИНЕЙНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ . . . . .</b>	<b>87</b>
§ 2.1. Линейное $n$ -мерное пространство . . . . .	87
§ 2.2. Матрицы $n$ -ого порядка . . . . .	97
§ 2.3. Линейные преобразования $n$ -мерных пространств . . . . .	109
§ 2.4. Сопряженное пространство . . . . .	118
§ 2.5. Алгебра тензоров на $n$ -мерных линейных пространствах . . . . .	124
§ 2.6. Внешние формы . . . . .	143
<b>Глава 3. ГРУППЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ . . . . .</b>	<b>157</b>
§ 3.1. Линейные преобразования координат . . . . .	157
§ 3.2. Группы преобразований в трехмерном евклидовом пространстве . . . . .	171
§ 3.3. Симметрия конечных тел . . . . .	175
§ 3.4. Матричные представления групп преобразований . . . . .	195
<b>Глава 4. ИНДИФФЕРЕНТНЫЕ ТЕНЗОРЫ И ИНВАРИАНТЫ . . . . .</b>	<b>201</b>
§ 4.1. Индифферентные тензоры . . . . .	201
§ 4.2. Число независимых компонент индифферентного тензора . . . . .	214
§ 4.3. Симметричные индифферентные тензоры . . . . .	226
§ 4.4. Скалярные инварианты . . . . .	238
§ 4.5. Инварианты симметричного тензора второго ранга . . . . .	250
<b>Глава 5. ТЕНЗОРНЫЕ ФУНКЦИИ . . . . .</b>	<b>267</b>
§ 5.1. Линейные тензорные функции . . . . .	267
§ 5.2. Скалярные функции тензорного аргумента . . . . .	295

§ 5.3. Потенциальные тензорные функции . . . . .	308
§ 5.4. Квазилинейные тензорные функции . . . . .	317
§ 5.5. Спектральное представление тензоров второго ранга . . . . .	328
§ 5.6. Спектральные представления квазилинейных тензорных функций . . . . .	346
§ 5.7. Непотенциальные тензорные функции . . . . .	359
§ 5.8. Дифференцирование тензорных функций по тензорному аргументу . . . . .	376
§ 5.9. Скалярные функции нескольких тензорных аргументов . . . . .	379
§ 5.10. Тензорные функции нескольких тензорных аргументов . . . . .	395
<b>Глава 6. ТЕНЗОРНЫЙ АНАЛИЗ . . . . .</b>	<b>401</b>
§ 6.1. Ковариантное дифференцирование . . . . .	401
§ 6.2. Дифференцирование тензоров второго ранга . . . . .	410
§ 6.3. Свойства ковариантных производных . . . . .	414
§ 6.4. Ковариантные производные второго порядка . . . . .	419
§ 6.5. Дифференцирование в ортогональных криволинейных координатах . . . . .	424
<b>Глава 7. ГЕОМЕТРИЯ КРИВЫХ И ПОВЕРХНОСТЕЙ . . . . .</b>	<b>439</b>
§ 7.1. Кривые в трехмерном евклидовом пространстве . . . . .	439
§ 7.2. Поверхности в трехмерном евклидовом пространстве . . . . .	449
§ 7.3. Кривые на поверхности . . . . .	468
§ 7.4. Геометрия в окрестности поверхности . . . . .	483
§ 7.5. Уплощенные поверхности в $\mathbb{R}^3$ . . . . .	490
<b>Глава 8. ТЕНЗОРЫ В РИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ И ПРОСТРАНСТВАХ АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ . . . . .</b>	<b>495</b>
§ 8.1. Римановы пространства . . . . .	495
§ 8.2. Пространства аффинной связности . . . . .	507
§ 8.3. Риманово пространство с аффинной связностью . . . . .	515
§ 8.4. Тензор Римана-Кристоффеля . . . . .	522
<b>Глава 9. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ТЕНЗОРОВ . . . . .</b>	<b>535</b>
§ 9.1. Криволинейные интегралы от тензора . . . . .	535
§ 9.2. Поверхностные интегралы от тензора . . . . .	544
§ 9.3. Объемные интегралы от тензора . . . . .	550
<b>Приложение. Энергетические и квазиэнергетические пары тензоров . . . . .</b>	<b>554</b>
<b>Список литературы . . . . .</b>	<b>567</b>
<b>Предметный указатель . . . . .</b>	<b>569</b>

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Возникновению тензорного исчисления в современном его виде мы обязаны прежде всего Риччи, который в конце XIX века предложил математический аппарат для операций над "системами с индексами". Хотя сами эти "системы" были обнаружены раньше – при исследовании неевклидовых геометрий Гауссом, Риманом, Кристоффелем и при исследовании упругих тел Коши, Эйлером, Лагранжем, Пуассоном (см. об этом раздел "Истоки тензорного исчисления"), именно Риччи разработал удобную компактную систему обозначений и понятий, которая широко используется в настоящее время в самых различных областях механики, физики, химии, кристаллофизики и других науках.

В настоящее время тензорное исчисление продолжает развиваться, появляются новые направления, переосмысливаются некоторые ранее введенные понятия. Именно поэтому, несмотря на имеющуюся учебную литературу по тензорам (см. список литературы), потребность в изложении этих вопросов достаточно актуальна. Для иллюстрации сказанного приведем лишь один пример. Как это ни покажется странным, на вопросы: "Можно ли представить себе тензор второго ранга столь же наглядно, как и вектор в трехмерном пространстве?" и "Что такое диада?" – ответ скорее всего затрудняется дать многие искушенные читатели, знакомые с тензорами.

Данная книга предназначена читателю, начинающему знакомство с методами тензорного исчисления, именно поэтому в ней во введении изложено знакомое из школьной программы понятие вектора как геометрического объекта в трехмерном пространстве, на основе которого затем дано "геометрическое" же определение тензора. Это определение позволяет "увидеть" сам тензор и основные операции с ним. И лишь после такого знакомства дано формальное определение тензоров в абстрактных  $n$ -мерных пространствах.

Автор надеется, что книга будет полезна также и специалистам, прежде всего в области механики сплошных сред, физики твердого тела, кристаллофизики, квантовой химии, поскольку кроме указанных глав для начинающих, в ней содержатся многие недостаточно, на наш взгляд, освещенные в литературе вопросы теории тензоров, "здающих физические свойства" (в книге они названы индифферентными), теории инвариантов тензоров относительно кристаллографических групп, теории тензорных функций, теории интегрирования тензоров.

Книга построена по "математическому принципу": в ней имеются определения, теоремы, доказательства и упражнения в конце почти каждого параграфа. Начало и конец доказательств выделены значками  $\nabla$  и  $\Delta$  соответственно.

При изложении материала отдано предпочтение безиндексной форме записи тензоров, которая при определенных навыках позволяет быстро и компактно записывать различные соотношения в механике и физике, не заслоняя при этом физическую суть явлений. В то же время везде, где это уместно, даны соответствующие компонентная и матричная формы записи тензорных соотношений.

Автор считает своим приятным долгом поблагодарить заведующего кафедрой механики композитов МГУ им.М.В.Ломоносова, профессора Б.Е.Победрю, под влиянием идей которого в значительной степени возник замысел этой книги; заведующего кафедрой "Сопротивление материалов, динамика и прочность машин" МАИ, профессора А.Г.Горшкова и профессора Д.В.Тарлаковского за ряд ценных замечаний, высказанных при рецензировании книги, а также профессоров МГТУ им.Н.Э.Баумана В.В.Феоктистова, С.П.Ерковича и доцента А.Н.Щетинина, советы и рекомендации которых помогли автору при написании нескольких разделов книги.

Автор благодарен кандидату физико-математических наук И.Д.Димитриенко за подготовку оригинал-макета книги и ее редактирование.

*Автор*

## ИСТОКИ ТЕНЗОРНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ\*

Исторически тензорам предшествовали векторы, матрицы и "системы с индексами". Еще Архимед, живший в 287-212 гг до н.э., складывал силы, действующие на тело, по правилу параллелограмма, т.е. интуитивно вводил особые объекты, которые характеризуются не только величиной, но и направлением. Этот основополагающий шаг в сторону разработки векторного исчисления долго оставался единственным: голландский математик и инженер С.Стевин (1548-1620), который считается создателем понятия векторной величины, фактически переоткрыл еще раз закон сложения сил по правилу параллелограмма. Этот же закон формулировал и И.Ньютона (1642-1727) в своих "Началах" наряду с законами движения тел.

Следующий важнейший с современной точки зрения шаг был сделан только в XIX веке ирландским математиком У.Р.Гамильтоном (1805-1865), который, занимаясь теорией кватернионов-гиперкомплексных чисел, в 1845 году ввел сам термин "вектор" (от латинского "vector" – несущий), а также термины: "скаляр", "скалярное произведение", "векторное произведение", – и дал определение этих операций. В эти же годы Г.Грассманом (1809-1877) была создана теория внешних произведений (само понятие введено в 1844 году), известная в настоящее время как алгебра Грассмана. Англичанин У.Клиффорд (1845-1879) объединил подходы Гамильтона и Грассмана, окончательная же связь кватернионов, алгебры Грассмана и векторной алгебры была установлена только в конце XIX века Дж.У.Гиббсом (1839-1903). Само геометрическое изображение вектора как отрезка со стрелкой также устойчиво появилось впервые, по-видимому, у Гамильтона, а в 1853 году французский математик О.Коши (1789-1857) ввел в обращение понятие радиус-вектора и соответствующее ему обозначение  $\vec{r}$ .

В XIX веке математики стали активно использовать еще один объект – предшественник тензоров – матрицы. Первое появление матриц связывают с древнекитайскими математиками, которые во II веке до н.э. применяли их для записи систем линейных уравнений. Матричная запись алгебраических уравнений и само современное матричное исчисление было развито английским математиком А.Кэли (1821-

\*Этот краткий исторический очерк ни в коей мере не претендует на полноту изложения всей истории развития тензорного исчисления и связанных с ним наук, его целью является лишь знакомство начинающего читателя с этапами разработки и именами ученых, усилиями которых было создано современное тензорное исчисление.

1895), который, в частности, в 1841 году ввел используемое и сейчас обозначение для определителя:  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ . Многие основополагающие результаты в теории систем линейных алгебраических уравнений были получены немецким математиком Л.Кронекером (1823-1894).

В течение все того же XIX века в разных областях математики появляются "системы с индексами". В алгебре это, например, квадратичные формы, теорию которых разрабатывали А.Кэли, С.Ли (1842-1899) и другие, в геометрии – квадратичные дифференциальные формы, которые в настоящее время известны как первая и вторая квадратичная форма поверхности и квадрат длины элементарного отрезка. Основоположником теории поверхностей по праву считают выдающегося немецкого ученого К.Ф.Гаусса (1777-1855). Многие важнейшие результаты в этой области были установлены Б.Риманом (1826-1866), который развил теорию поверхностей на случай  $n$  измерений, Э.Бельтрами (1835-1900), Ф.Клейном (1849-1925), Г.Ламэ (1795-1870). Выдающаяся роль принадлежит Э.Б.Кристоффелю (1829-1900), который в 1869 году, рассматривая преобразования квадратичных форм  $ds^2 = \sum_{\mu,\nu} g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu$ , впервые обнаружил тензорный закон их преобразования, а также ввел понятие производных от векторных величин, которые преобразуются по тензорному закону (сейчас их называют ковариантными производными).

Возникшая еще в XVIII веке усилиями крупнейших математиков и механиков: Л.Эйлера (1707-1783), Ж.-Л.Лагранжа (1736-1813), П.Лапласа (1749-1827), С.Пуассона (1781-1840), О.Коши (1789-1857), М.В.Остроградского (1801-1861) – наука о движении и равновесии упругих тел (теория упругости), стала еще одним источником появления "систем с индексами" - компонент напряжений и деформаций. Компоненты напряжений обозначали как  $X_x, X_y, X_z, Y_x, Y_y, Y_z, Z_x, Z_y, Z_z$  и подразумевали под ними проекции сил, действующих на гранях элементарного кубика, на оси координат. Операции над такими системами с индексами были весьма громоздки, содержали многочисленные повторения с точностью до круговой замены обозначений. Однако только в конце XIX века удалось понять внутреннее единство формул, содержащих "системы с индексами", и найти новый математический аппарат, сделавший операции с ними компактными и удобными.

Впервые для векторных величин эту задачу удалось решить американскому физику и математику Дж.У.Гиббсу, который создал векторную алгебру с операциями сложения, скалярного и векторного умножения, показав ее связь с теорией кватернионов и алгеброй Грассмана. Кроме того Гиббс создал современный векторный анализ - теорию дифференциального исчисления векторных полей и сам "язык" векторного исчисления, в котором используется как компонентная, так и безиндексная форма записи соотношени. В частности, им были даны удобные представления для операций дивергенции и ротора вектор-

ных полей. Эти выдающиеся результаты Гиббса можно сравнить с введением алгебраической символики Ф.Виетом (1540-1603), которую используют вот уже 400 лет. Созданные Гиббсом векторная алгебра и анализ также прочно вошли в современную физику и механику, а его лекциям "Элементы векторного анализа в изложении для студентов", выпущенным в 1881-1884 гг. и представляющим, по сути, первый учебник по векторному исчислению, фактически следуют все соответствующие современные курсы.

Гиббс был большим энтузиастом в распространении векторного исчисления в различных областях точных наук, в частности, именно им была дана современная векторная запись уравнений электромагнетизма Дж.К.Максвелла (1831-1879), сам же Максвелл использовал метод кватернионов. Хотя не обошлось без критики сторонниками этого метода, векторное исчисление Гиббса было активно воспринято физиками, и с начала XX века теория Максвелла практически всеми используется в форме Гиббса.

Однако в тех областях науки, где возникают системы с большим числом индексов, чем у векторов (более одного): в геометрии, в теории упругости, в кристаллофизике, – векторное исчисление Гиббса оказалось бессильным, и он сам, например, при записи уравнений теории упругости в 1889 году использовал все те же обозначения  $X_x, X_y, X_z, Y_x$  и т.д.

Проблему обобщения векторного исчисления на системы с произвольным числом индексов удалось решить итальянскому математику Дж.Риччи (1853-1925), который в своих работах 1886-1901 гг. создал новый аппарат, названный им абсолютным дифференциальным исчислением, для алгебраических и дифференциальных операций с "ко-вариантными и контравариантными системами порядка  $\lambda$  (так Риччи называл компоненты тензоров  $x_{r_1 r_2 \dots r_\lambda}$  и  $x^{r_1 r_2 \dots r_\lambda}$ ). Самим Риччи с помощью этого аппарата были установлены основополагающие результаты в дифференциальной геометрии  $n$ -мерных пространств. Исчисление, созданное Риччи, оказало настолько сильное влияние на геометрию и физику, что некоторое время оно даже называлось "исчислением Риччи". С некоторыми изменениями оно широко используется и в настоящее время.

Применение теории абсолютного дифференцирования для римановых пространств было осуществлено другим выдающимся итальянским математиком Т.Леви-Чивита (1873-1942), коллегой и соавтором Риччи в нескольких основополагающих работах. Им, в частности, было введено правило свертывания индексов, введен символ  $\epsilon^{ijk}$ , носящий его имя и играющий наряду с символом Кронекера  $\delta_{ij}$  важнейшую роль в тензорном исчислении. Исключительно важную роль сыграло введение Леви-Чивитой понятия параллельного переноса векторов и тензоров в римановых пространствах.

Для зарождавшейся на рубеже XIX и XX веков теории относитель-

ности аппарат абсолютного дифференциального исчисления оказался весьма удобным и многообещающим, и в то же время дальнейшее развитие этого исчисления происходило совместно с разработкой физических основ этой теории. Так в 1913 году А.Эйнштейн (1879-1955) совместно с М.Гроссманом применяет абсолютное дифференциальное исчисление к теории относительности и теории гравитации, а в 1916 году в замечаниях к своей статье он предлагает "ради простоты" пропускать знак суммы в тех случаях, когда суммирование идет по дважды повторяющимся индексам. С тех пор это правило стало широко применяться и в настоящее время называется соглашением Эйнштейна о суммировании.

Новое исчисление примерно в тоже время начали применять в теории упругости и кристаллофизике для описания свойств кристаллов. Здесь прежде всего следует назвать немецкого ученого В.Фойгта, который и ввел в 1898 -1903 гг. сам термин "тензор" (от латинского "tensus" - напряженный) именно для описания механических напряжений. Фойгт одним из первых дал матричное представление компонент тензоров второго и четвертого рангов, задающих физические свойства различных типов кристаллов. Термин "тензор" был активно воспринят не только в теории упругости, но и в геометрии и физике, для обозначения ковариантных и контравариантных систем. Так, начиная с 1913 года, в своих работах Эйнштейн использует этот термин.

Дальнейшее развитие тензорного исчисления в начале XX века осуществлялось многими учеными, среди которых назовем уже упоминавшегося Т.Леви-Чивита, голландского математика Я.Схоутена, которые выпустили соответственно в 1927 и в 1924 гг. первые специализированные учебники по тензорному исчислению. Книга Я.Схоутена называлась "Исчисление Риччи" (Der Ricci-Kalkul). В ней и в последующих книгах он, в частности, упорядочил правила расстановки индексов у тензоров, а также предложил некоторые геометрические образы тензоров.

Тем не менее, как и в случае векторного анализа, не обходилось и без определенной критики появившегося тензорного исчисления, главным образом сводившейся к тому, что расшифровка тензорных формул требует дополнительных усилий при анализе тех или иных физических соотношений (заметим, что такая критика иногда высказывается и до сих пор). Однако затраты на овладение тензорным аппаратом с лихвой окупаются при дальнейшей работе с ним.

Важную роль сыграли работы выдающегося немецкого математика Г.Вейля (1885-1955), который вместе с О.Вебленом развил подход к определению тензора на основе рассмотрения квадратичных форм, тем самым оформив "алгебраический" способ введения тензоров. Много сделали для развития теории тензоров Е.Вильсон, выпустивший в 1913 году широко известный учебник по векторному анализу, Ф.Мурнаган, который, в частности, ввел обобщенные символы

Кронекера, Э.Картан, разработавший теорию внешних дифференциальных форм, Р.Вайценбек, Д.Витали, которые наряду с Э.Картаном и Я.Схоутеном разработали теорию пространства абсолютного параллелизма, Дж.Л.Синдж, Т.Томас, З.Аппель, Л.Эйзенхарт, Л.Витернбен, а также И.С.Сокольников и А.Дж.Мак.-Коннел, написавшие пре-восходные учебники по тензорному анализу. Успехам в применении тензоров для задач теории упругости мы во многом обязаны Л.Бриллюэну и А.Ляву.

Значительный вклад в развитие тензорного исчисления внесли российские ученые: П.К.Рашевский, А.П.Широков, В.Ф.Каган, Н.Е.Кочин, Н.Е.Ефимов, И.Н.Векуа, Б.Е.Победря, В.В.Лохин и многие другие. Так И.Н.Векуа разработал теорию ковариантного дифференцирования в комплексных криволинейных координатах, а Б.Е.Победря ввел спектральное представление тензоров и на его основе существенно развил теорию нелинейных тензорных функций.

Важным шагом стало введение безиндексной формы записи тензорных соотношений, которая появилась в середине XX века в исследованиях по механике сплошных сред Р.Ривлина, Дж.Эриксена, В.Нолла, Дж.Адкинса, А.Грина, Дж.Смита, К.Труслелла, А.И.Лурье. Безиндексная форма, введенная для векторов еще Гиббсом, позволила записать специальным математическим языком все физические законы в простой, компактной и объективной (т.е. независящей от выбора системы координат) форме, в которой индексы "не заслоняют" физической сути законов. Современное тензорное исчисление использует все три упоминавшиеся формы записи соотношений: компонентную, безиндексную и матричную.

Тензорное исчисление в настоящее время тесно связано с другими областями математики, в частности, с теорией инвариантов, теорией групп и теорией представлений, теорией индифферентных тензоров. Теория алгебраических инвариантов, возникшая еще в XIX веке, в настоящее время находит широкое применение в механике и физике. Теория групп, у истоков которой стоял Э.Галуа (1811-1832), в XIX активно применялась в естественных науках для описания свойств симметрии кристаллов. С ее помощью были установлены 32 кристаллографические группы, в 1848 году Бравэ нашел 14 трансляционных групп, соответствующих решеткам кристаллов, которые получили его имя. В 1890-1894 гг. российским ученым Е.С.Федоровым и независимо от него А.Шенфлисом были выведены 230 пространственных групп симметрии кристаллов. После создания теории представлений групп, разработанной, главным образом, Г.Фробениусом (1849-1918), И.Шуром (1885-1955), У.Бернсайдом (1852-1927), было установлено, что теория групп имеет фундаментальное значение для квантовой физики. В настоящее время теория представлений является одним из бурно развивающихся разделов математики. Некоторые методы теории представлений, используемые при описании свойств индиффе-

рентных тензоров, изложены в данной книге.

Теория индифферентных тензоров (или иначе тензоров с внешней симметрией – по А.В.Шубникову, или еще иначе материальных тензоров, задающих физические свойства: упругость, тепловое расширение, теплопроводность, пьезоэлектрический эффект, электропроводность и многие другие) активно начала развиваться в XX веке вслед за основополагающими работами Фойгта. Весомый вклад в эту область внесли российские ученые А.В.Шубников и его ученики, Ю.И.Сиротин, Н.В.Белов, И.С.Желудев, Ф.И.Федоров, П.Бехтерев, Н.Г.Ченцов, С.Г.Лехницкий, М.П.Шаскольская. Усилиями этих и многих других ученых теория описания линейных свойств анизотропных сред (кристаллов; монокристаллов, композиционных материалов, древесины и других) была в значительной степени завершена. Тем не менее многие важные вопросы остались до сих пор невыясненными, так только в 1983-1984 гг. польскому ученому Я.Рыхлевскому удалось привести тензор четвертого ранга модулей упругости к диагональному виду и исследовать его свойства.

Примерно с середины XX века была начата активная разработка теории нелинейных тензорных функций и функционалов, основы которой восходят к знаменитой теореме Гамильтона-Кэли. Эта теория позволяет описывать такие нелинейные свойства сред, как эффекты анизотропной пластичности, ползучести, нелинейной вязкости и вязкоупругости, нелинейной диффузии, диаграммы намагниченностей, нелинейные оптические свойства и др. Основополагающие результаты в этой еще только развивающейся области были получены Р.Ривлином, Ф.Смитом, А.Спенсером, А.Грином, Дж.Адкинсом. Ими были установлены представления, главным образом, скалярных или алгебраических функций от тензоров для различных групп симметрии. Иной более общий подход, основанный на построении тензорных базисов, был применен российскими учеными: Ю.И.Сиротиным, В.В.Лохиным, Б.Е.Победреем, Г.Н.Малолеткиным и В.Л.Фоминым. В настоящей книге этому перспективному направлению посвящена вся пятая глава.

В заключение подчеркнем, что тензорное исчисление является необходимым инструментом большинства новых развивающихся естественнонаучных направлений в физике, механике, квантовой химии, кристаллофизике. В частности, такие увлекательные проблемы современности, как разработка квантовой теории относительности, теории объединенных полей, теорииnanoструктур и другие, решаются главным образом методами тензорного исчисления.

## ВВЕДЕНИЕ

### A. Геометрическое определение вектора

Тензорное исчисление является развитием векторного исчисления, поэтому прежде всего напомним простейшие определения векторов и операций с ними.

Используя аксиоматику элементарной геометрии (в которой введены понятия точки, прямой, отрезка, длины, угла и др.), *вектором*  $a$  называют направленный отрезок, соединяющий некоторые две точки  $O$  и  $M$  пространства. Одну из точек ( $O$ ) называют началом, а другую ( $M$ ) – концом вектора. Графически векторы изображают стрелками (рис.0.1). Длиной вектора  $a$  называют расстояние между его началом и концом, которое обозначают как  $|a|$ . Прямую, проходящую через вектор  $a$ , называют *линией действия вектора*.

Данное выше определение называют геометрическим, так как оно вводит вектор  $a$  как некоторый геометрический объект. Существуют и другие определения вектора, которые будут рассмотрены далее.

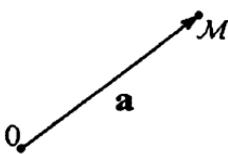


Рис. 0.1. Геометрическое определение вектора

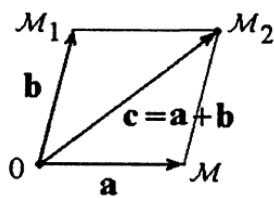


Рис. 0.2. Геометрическое представление операции сложения векторов

Используя геометрическое определение, можно ввести операцию *сложения двух векторов*  $a$  и  $b$ , имеющих общую точку начала  $O$ : суммой двух таких векторов называют вектор  $c = a + b$ , совпадающий с диагональю параллелограмма, построенного на векторах  $a$  и  $b$ , и началом которого является та же точка  $O$  (рис.0.2).

Важную роль играет *нулевой вектор*  $0$ , который при сложении с любым вектором  $a$  дает снова  $a$ :  $a + 0 = a$ .

Геометрически определяют и вторую операцию с вектором – *умножение вектора a на вещественное число ψ*: такое произведение  $\psi a$  есть вектор, лежащий на той же прямой, что и  $a$ , но имеющий длину  $|\psi|a|$  и направление, совпадающее с направлением  $a$ , если  $\psi > 0$ , и противоположное к нему, если  $\psi < 0$  (рис.0.3).

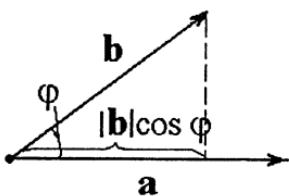
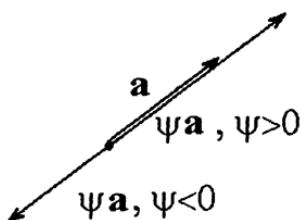


Рис. 0.3. Геометрическое представление умножения вектора на число

Рис. 0.4. Геометрическое представление скалярного умножения векторов

Третья основная операция с векторами – это *скалярное умножение* пары векторов  $a$  и  $b$ , которую определяют как вещественное число, равное произведению длины вектора  $a$ , длины вектора  $b$  и косинуса угла между ними (рис.0.4), и обозначают как

$$a \cdot b = |a||b|\cos\varphi. \quad (0.1)$$

Ненулевые векторы  $a$  и  $b$  называют *ортогональными*, если их скалярное произведение равно нулю:

$$a \cdot b = 0. \quad (0.2)$$

Из (0.1) и (0.2) следует, что угол  $\varphi$  между ортогональными векторами равен  $90^\circ$ , поэтому они геометрически изображаются так, как показано на рис.0.5.

Важную роль играет система трех взаимно ортогональных векторов  $e_1 e_2 e_3$  единичной длины, линии действия которых лежат на трех взаимно перпендикулярных прямых (рис.0.6). Эту систему называют *ортонормированным (декартовым) базисом*.

Произвольному вектору  $a$  всегда можно поставить в соответствие диагональ прямоугольного параллелепипеда, ребра которого лежат на линиях действия векторов  $e_i$ , имеющих общее начало с вектором  $a$  (рис. 0.7). Поэтому  $a$  всегда можно представить в виде суммы векторов базиса  $e_i$ :

$$a = a^1 e_1 + a^2 e_2 + a^3 e_3. \quad (0.3)$$

Это соотношение можно записать иначе:

$$a = a^i e_i, \quad (0.4)$$

здесь по повторяющимся индексам происходит суммирование (правило Эйнштейна).

Соотношения (0.3), (0.4) называют *разложением вектора по базису*, а числа  $a^i$  – *координатами вектора  $\mathbf{a}$  в базисе  $\mathbf{e}_i$* .

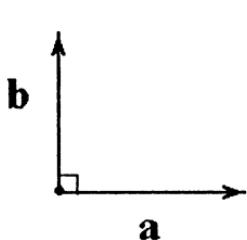


Рис. 0.5. Ортогональные векторы

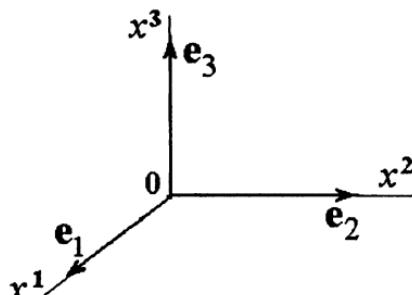


Рис. 0.6. Декартов базис

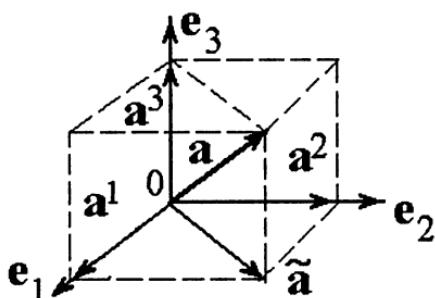


Рис. 0.7. Разложение вектора по декартову базису

Если выбрать другой ортонормированный базис  $\mathbf{e}'_i$  с общим началом в точке  $O$ , то относительно него можно построить свой параллелепипед с вектором  $\mathbf{a}$  по диагонали. Тогда  $\mathbf{a}$  можно представить в виде суммы векторов базиса  $\mathbf{e}'_i$ :

$$\mathbf{a} = a'^i \mathbf{e}'_i, \quad (0.5)$$

где числа  $a'^i$  являются компонентами вектора в базисе  $\mathbf{e}'_i$ , причем, вообще говоря,  $a'^i \neq a^i$ .

Из (0.4) и (0.5) следует важное свойство векторов – их *инвариантность* (т.е. независимость от выбора базиса), в то же время компоненты векторов могут изменяться.

## Б. Изображение физических величин векторами

Итак, вектор, введенный выше геометрическим способом, имеет три признака: точку начала, длину и направление. Многие величины, описывающие физические объекты, характеризуются теми же признаками и могут быть изображены векторами. При этом длина вектора равна числовому значению физической величины, измеренной в определенном масштабе. Таковы например: радиус-вектор, описывающий положение материальной частицы вещества относительно некоторой выделенной геометрической точки; скорость движения этой частицы; сила, действующая на нее, момент силы и многие другие. Говорят,

что множество всех векторов, изображающих какую-либо физическую величину, образует *векторное пространство*, если в этом множестве разрешены операции сложения и умножения на число. Если разрешена также и операция скалярного произведения, то такое множество образует *евклидово пространство* (более строгие определения будут даны далее).

## B. Три категории векторов

Векторы, изображающие физические величины, можно разделить на три категории: свободные, скользящие и закрепленные.

Если векторная физическая величина не меняется при переходе из одной точки пространства в другую, то она описывается *свободным вектором*. Свободные векторы можно складывать и умножать, даже если они не имеют общего начала. Для этого надо предварительно, не меняя длии и направлений этих векторов, совместить их точки начала. Свободными являются, например, векторы  $\vec{e}$ ; декартова базиса: за точку их начала можно выбрать произвольную точку  $O$ .

С помощью *скользящих векторов* изображают векторные физические величины, не изменяющиеся при переходе в любую точку прямой, совпадающей с направлением физической величины. Для осуществления операций сложения и умножения скользящие векторы можно переносить параллельным переносом только вдоль линии их действия. Скользящим является, например, вектор силы, действующей на материальную точку.

*Закрепленные векторы* изображают векторные физические величины, определенные только в данной конкретной точке пространства. Такими являются, например, вектор скорости движущейся материальной точки, момент силы, радиус-вектор  $x$ , описывающий положение материальной точки относительно некоторой геометрической точки  $O$  и др.

В дальнейшем мы будем рассматривать в основном свободные векторы.

# ГЛАВА 1

## ТЕНЗОРНАЯ АЛГЕБРА

---

### § 1.1. Локальные векторы базиса. Якобиевы и метрические матрицы

#### 1.1.1. Координаты и локальные векторы базиса

Введем в трехмерном пространстве прямоугольную декартову систему координат  $x^i$ ,  $i = 1, 2, 3$  с началом в точке  $O$ , тогда каждой точке пространства  $M$  будет взаимнооднозначно соответствовать радиус-вектор  $\mathbf{x}$  с началом в точке  $O$  и концом в точке  $M$  (рис.1.1). Выберем такой ортонормированный базис  $\hat{\mathbf{e}}_i$ , у которого линии действия векторов совпадают с осями  $Ox^i$ , а начало – с точкой  $O$  декартовой системы координат. Такой базис будем называть *декартовым*. Согласно соотношению (0.4), радиус-вектор  $\mathbf{x}$  всегда можно разложить по базису  $\hat{\mathbf{e}}_i$ :

$$\mathbf{x} = x^i \hat{\mathbf{e}}_i, \quad (1.1)$$

где  $x^i$  – координаты точки  $M$  в декартовой системе координат.

Трехмерное пространство, в котором существует единая для всех точек прямоугольная декартова система координат, называют *трехмерным евклидовым*.

Введем криволинейные координаты  $X^i$ , которые связаны с  $x^i$  функциями вида:

$$x^i = x^i(X^j). \quad (1.2)$$

Тогда радиус-вектор точки  $M$  может быть представлен как функция координат  $X^j$ :

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(X^j). \quad (1.3)$$

Будем далее предполагать, что функции (1.2) непрерывно дифференцируемы и взаимнооднозначны, тогда их можно обратить:

$$X^j = X^j(x_i). \quad (1.4)$$

Ввиду дифференцируемости функций (1.3) можно ввести производные:

$$\mathbf{R}_j = \partial \mathbf{x} / \partial X^j, \quad (1.5)$$

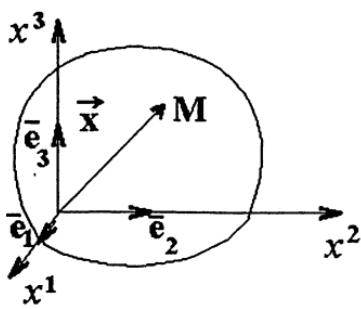


Рис. 1.1. Положение точки  $M$  в декартовой системе координат

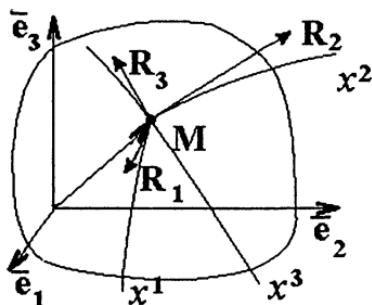


Рис. 1.2. Локальные векторы базиса в криволинейной системе координат

которые снова образуют векторы, называемые *локальными векторами базиса* (рис.1.2). Эти векторы  $R_j$  направлены по касательным к координатным линиям  $X_j = \text{const}$  в точке  $M$  с координатой (1.3).

В отличие от  $\bar{e}_i$ , векторы базиса  $R_i$  меняются при переходе от одной точки  $M$  к другой  $M'$ .

Заметим, что хотя формально  $\bar{e}_i$  и  $R_i$  определялись в разных точках, их можно привести к одной точке, так как векторы  $\bar{e}_i$  являются свободными.

### 1.1.2. Якобиевы матрицы

Можно связать векторы базисов  $R_i$  и  $\bar{e}_i$ .

Из (1.5) и (1.1) находим выражение:

$$R_i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial X^i} = \frac{\partial x^j}{\partial X^i} \bar{e}_j = \bar{Q}^j{}_i \bar{e}_j, \quad (1.6)$$

где введен объект с двумя индексами

$$\bar{Q}^j{}_i = \frac{\partial x^j}{\partial X^i}. \quad (1.7)$$

Такие объекты всегда можно записать в виде *матрицы*, т.е. упорядоченной таблицы  $3 \times 3$ :

$$\bar{Q}^j{}_i = \begin{pmatrix} \bar{Q}^1{}_1 & \bar{Q}^1{}_2 & \bar{Q}^1{}_3 \\ \bar{Q}^2{}_1 & \bar{Q}^2{}_2 & \bar{Q}^2{}_3 \\ \bar{Q}^3{}_1 & \bar{Q}^3{}_2 & \bar{Q}^3{}_3 \end{pmatrix}. \quad (1.7')$$

Матрицу (1.7) называют матрицей преобразования или *якобиевой матрицей*.

Заметим, что порядок расположения элементов в матрице существует: далее везде первый индекс у  $\bar{Q}^j_i$ , будем полагать меняющимся при переходе от одной строки к другой, а второй – от одного столбца к другому.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1.** *Определитем* (детерминантом) матрицы  $\bar{Q}^j_i$  (1.7') называют число

$$\det(\bar{Q}^j_i) = \bar{Q}^1_1 \bar{Q}^2_2 \bar{Q}^3_3 - \bar{Q}^1_1 \bar{Q}^2_3 \bar{Q}^3_2 - \bar{Q}^2_2 \bar{Q}^1_3 \bar{Q}^3_1 - \\ - \bar{Q}^3_3 \bar{Q}^1_2 \bar{Q}^2_1 + \bar{Q}^1_2 \bar{Q}^2_3 \bar{Q}^3_1 + \bar{Q}^2_1 \bar{Q}^3_2 \bar{Q}^1_3. \quad (1.8)$$

В силу взаимной однозначности функций (1.4), в любой точке  $X^i$  детерминант якобиевой матрицы всегда отличен от нуля:

$$\det(\bar{Q}^j_i) = \det\left(\frac{\partial x^j}{\partial X^i}\right) \neq 0. \quad (1.8')$$

Такие матрицы называют *невырожденными*.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2.** *Обратной* к  $\bar{Q}^i_j$  называют такую матрицу  $\bar{P}^i_j$ , которая удовлетворяет соотношениям:

$$\bar{P}^i_j \bar{Q}^j_k = \bar{Q}^i_j \bar{P}^j_k = \delta^i_k, \quad (1.9)$$

где  $\delta^i_k$  – смешанный символ Кронекера:

$$\delta^i_k = \begin{cases} 0, & i \neq k, \\ 1, & i = k. \end{cases} \quad (1.10)$$

Обратную матрицу будем также иногда обозначать как  $\bar{P}^i_j = (\bar{Q}^i_j)^{-1} = (\bar{Q}^{-1})^i_j$ . Для всякой невырожденной матрицы всегда существует обратная.

Введем также *ковариантный символ Кронекера*  $\delta_{ki}$  и *контравариантный символ Кронекера*  $\delta^{ki}$ , значения которых совпадают с  $\delta^i_k$ :

$$\delta_{ki} = \begin{cases} 0, & i \neq k, \\ 1, & i = k. \end{cases} \quad (1.10')$$

Для якобиевой матрицы  $\bar{Q}^i_j$  (1.7) обратная якобиева матрица имеет вид:

$$\bar{P}^i_j = \frac{\partial X^i}{\partial x^j}, \quad (1.11)$$

где  $X^i$  являются функциями (1.4). С помощью  $\bar{P}_j^i$  можно выразить векторы декартова базиса  $\bar{\mathbf{e}}_k$  через  $\mathbf{R}_i$ . Домножая (1.6) на  $\bar{P}_k^i$ , получаем

$$\bar{\mathbf{e}}_k = \bar{P}_k^i \mathbf{R}_i. \quad (1.12)$$

### 1.1.3. Метрические матрицы

В силу ортонормированности векторов  $\bar{\mathbf{e}}_i$ , их скалярное произведение можно записать с помощью символов Кронекера:

$$\bar{\mathbf{e}}_k \cdot \bar{\mathbf{e}}_j = \delta_{kj}. \quad (1.13)$$

Тогда скалярное произведение векторов  $\mathbf{R}_i$  с помощью уравнений (1.6) и (1.13) можно представить в виде:

$$\mathbf{R}_i \cdot \mathbf{R}_j = \bar{Q}_i^k \bar{Q}_j^l \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_l = \bar{Q}_i^k \bar{Q}_j^l \delta_{kl} = g_{ij}. \quad (1.14)$$

**Определение 1.3.** Матрица  $g_{ij}$ , введенная по формуле (1.14), называется *метрической* или *фундаментальной*.

Определитель метрической матрицы обозначим следующим образом:

$$g = \det(g_{ij}) = (\det(\bar{Q}_i^k))^2. \quad (1.15)$$

Метрическая матрица, очевидно, является симметричной по индексам  $i, j$ ; ее определитель можно записать через компоненты явным образом (согласно (1.8)):

$$\det(g_{ij}) = g_{11}g_{22}g_{33} - g_{11}g_{23}^2 - g_{22}g_{13}^2 - g_{33}g_{12}^2 + 2g_{12}g_{13}g_{23}. \quad (1.16)$$

В силу (1.8') всегда  $g \neq 0$ , поэтому для  $g_{ij}$  всегда существует *обратная метрическая матрица*  $g^{kl}$ :

$$g^{ki} g_{ij} = \delta_j^k, \quad g^{ij} = (g_{ij})^{-1}. \quad (1.17)$$

Непосредственной подстановкой выражения  $g_{ij} = \bar{Q}_i^k \bar{Q}_j^l \delta_{kl}$  в (1.17) можно убедиться в том, что обратная метрическая матрица  $g^{ij}$  выражается через обратную матрицу Якоби:

$$g^{ij} = \bar{P}_k^i \bar{P}_l^j \delta^{kl}. \quad (1.18)$$

### 1.1.4. Векторы взаимного базиса

С помощью  $g^{ij}$  определяем векторы *локального взаимного базиса*  $\mathbf{R}^i$ :

$$\mathbf{R}^i = g^{ik} \mathbf{R}_k. \quad (1.19)$$

Очевидно, что верны обратные соотношения:

$$\mathbf{R}_i = \delta_i^k \mathbf{R}_k = g^{kl} g_{li} \mathbf{R}_k = g_{li} \mathbf{R}^l. \quad (1.19')$$

### 1.1.5. Правила расстановки индексов

В тензорном исчислении существуют правила расстановки индексов у различных объектов, некоторые из них уже использовались выше.

**A.** Объекты могут иметь верхние (контравариантные), нижние (ко-вариантные) и смешанные индексы. Например, из уже введенных объектов нижними индексами обладают:

$$\bar{\mathbf{e}}_i, \quad \delta_{kj}, \quad g_{ij}, \quad \mathbf{R}_i,$$

верхними:

$$\delta^{kj}, \quad g^{ij}, \quad \mathbf{R}^i,$$

смешанными:

$$\bar{Q}_i^k, \quad \bar{P}_j^i, \quad \delta_j^i.$$

Число индексов, как будет показано в дальнейшем, может быть, в принципе, любым.

У объектов со смешанными индексами иногда используют обозначение  $\bar{Q}_i^k$  или  $\bar{Q}_i^k$ , чтобы подчеркнуть, что  $k$  - первый индекс, а  $i$  - второй (или наоборот -  $\bar{Q}_k^i$ ). Если порядок индексов не имеет значения, то применяется также запись индексов "один над другим", например,  $\delta_i^j$ .

**B.** Складывать, вычитать и приравнивать (т.е. подвергать действию операций со знаками "+", "-" и "=") можно только объекты с одинаковыми индексами, т.е. должны совпадать: число, обозначение и расположение (верхний-нижний) индексов у объектов. Порядок же расположения индексов может быть различным. Например, правильными записями являются:

$$a_i + b_i, \quad c^i_j - d_j^i, \quad k^{ij} = p^{ji} + r^{ij},$$

неправильными

$$a_i + b_j, \quad c^i_j - d_j^i, \quad k^{ij} = p^{jik} + r_{ij}.$$

В первом случае нарушено обозначение индексов, во втором – расположение, в третьем – число и расположение.

**B.** Во всех других операциях могут участвовать объекты с неодинаковыми индексами, например, в скалярном произведении (1.14) у  $\mathbf{R}_i$  и  $\mathbf{R}_j$  обозначения индексов разные, и их число у каждого объекта

не совпадает с числом индексов у  $g_{ij}$ . Однако объекты  $(R_i \cdot R_j)$  и  $g_{ij}$  уже связаны операцией " = ", поэтому индексы их должны быть согласованы с правилом  $B$ . В дальнейшем будут введены и другие операции.

*Г.* В операциях умножения, как обычного числового, так и скалярного (а также векторного и тензорного, которые будут введены ниже), повторяющиеся индексы должны располагаться следующим образом: один вверху – другой внизу, например:

$$x^i \bar{e}_i = \sum_{i=1}^3 x^i \bar{e}_i = x^1 \bar{e}_1 + x^2 \bar{e}_2 + x^3 \bar{e}_3,$$

$$a^i b_{ij} = \sum_{i=1}^3 a^i b_{ij},$$

причем считается, что по этим повторяющимся индексам идет суммирование от 1 до 3 (в трехмерном пространстве).

Повторяться могут и индексы у одного и того же многоиндексного объекта, например

$$Q^i{}_i = Q^1{}_1 + Q^2{}_2 + Q^3{}_3.$$

В этом случае также по этим индексам идет суммирование. Далее будет показано, что суммирование индексов у одного объекта – это частный случай операции скалярного умножения (свертки).

Повторяющиеся индексы "взаимно уничтожаются" в формулах с операциями сложения и приравнивания (см. правило  $B$ ), т.е. правильными будут, например, следующие записи:

$$a + b^i{}_i = c^j{}_j, \quad Q^i{}_j B^{jk} = A^{ik}, \quad a^i P^j{}_j + b^i = c^i,$$

поэтому повторяющиеся индексы еще иначе называют *немыми*, а не-повторяющиеся – *свободными* индексами.

*Д.* Умножение на метрические матрицы  $g_{ij}$  или  $g^{ij}$  приводит, соответственно, к "опусканию" или "подниманию" индексов. Это свойство называется "жонглированием индексов", оно, в частности, использовано при определении локальных векторов базиса (1.19), вообще же

$$A^{ik} g_{kj} = A^i{}_j, \quad B_i g^{ij} = B^j.$$

*Е.* Особый случай представляет декартовая прямоугольная система координат. Если в (1.14) в качестве  $R_i$  взять  $R_i = \bar{e}_i$ , то на основании (1.13) получим:

$$g_{ij} = \delta_{ij},$$

т.е. метрическая матрица в декартовом базисе – единичная, единичной же будет и обратная метрическая матрица:  $g^{ij} = \delta^{ij}$ .

Тогда векторы базиса, взаимного к  $\bar{\mathbf{e}}_i$ , можно вычислить согласно (1.19):

$$\bar{\mathbf{e}}^i = g^{ij} \bar{\mathbf{e}}_j = \delta^{ij} \bar{\mathbf{e}}_j, \quad (1.20)$$

т.е.  $\bar{\mathbf{e}}^1 = \delta^{1j} \bar{\mathbf{e}}_j = \bar{\mathbf{e}}_1$  и т.д., тогда  $\bar{\mathbf{e}}^i$  и  $\bar{\mathbf{e}}_i$  совпадают. Однако для того чтобы сохранить правило  $A$  расстановки индексов, будем для обозначения равенства этих векторов использовать формулу (1.20).

Точно также в дальнейшем будем поступать со всеми объектами, относящимися к декартовому базису: вводим верхние и нижние индексы согласно правилам  $A$ , понимая, что численное значение величины от этого не изменяется.

Этим объясняется необходимость использования различных символов Кронекера  $\delta_{ij}$ ,  $\delta^{ij}$  и  $\delta_j^i$ , значения которых одинаковы. Согласно этому же правилу можно определить ковариантные и контравариантные якобиевы матрицы:

$$\bar{Q}_{kj} = \delta_{kj} \bar{Q}_i^i, \quad \bar{Q}^{kj} = \bar{Q}_i^k \delta^{ij},$$

$$\bar{P}_{kj} = \delta_{kj} \bar{P}_i^i, \quad \bar{P}^{kj} = \bar{P}_i^k \delta^{ij},$$

численные значения компонент которых равны между собой ( $\bar{Q}_{11} = \bar{Q}_1^1$ ,  $\bar{Q}_{12} = \bar{Q}_1^2$  и т.д.).

Тогда выражения для метрических матриц (1.14) и (1.17) можно записать в виде:

$$g_{ij} = \bar{Q}_i^k \bar{Q}_{kj}, \quad g^{ij} = \bar{P}_i^k \bar{P}^{jk} = \bar{P}^{ik} \bar{P}_k^j.$$

Подставляя (1.17) и (1.6) в (1.19), находим связь  $R^i$  с  $\bar{e}^i$ :

$$R^i = \bar{P}_m^i \bar{P}^{km} \bar{Q}_k^j \bar{e}_j = \bar{P}_j^i \bar{e}^j, \quad \bar{e}^j = \bar{Q}_i^j R^i, \quad (1.21)$$

которая, очевидно, отличается от связи (1.6) векторов основного базиса  $R_i$  с  $\bar{e}_j$ .

Ж. В операциях дифференцирования считается, что производная по объекту с верхним индексом дает объект с нижним индексом и наоборот:

$$a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x^j}, \quad a_i^j = \frac{\partial f_i}{\partial x_j},$$

это правило использовано, например в (1.5), а обратное – в (1.18).

То же самое правило перемены индексов относится и к операции взятия обратной матрицы (см., например, (1.17)).

3. Для обозначения индексов применяются малые латинские буквы ( $i, j, k, l, m, n$  и др.). В этом случае, если не оговорено особо, предполагается, что индекс пробегает значения 1, 2, 3.

Иногда в качестве индексов используют также индексные объекты, например:  $i_1, i_2, i_3, \dots$ . В этом случае получаются многоярусные индексные объекты:

$$P_{i_2}^{i_1}, \quad g_{i_1 i_2}, \quad g^{j_1 j_2},$$

однако, как и в предыдущем случае, такая запись означает, что каждый из  $i_1, i_2$  и др. пробегает значения 1, 2, 3.

Если хотят подчеркнуть, что индексы пробегают только два значения, например, 1 и 2, то для них часто используют заглавные латинские буквы:

$$a_I, \quad b^I, \quad Q^I_J, \quad I, J = 1, 2.$$

Греческие буквы в качестве индексов часто используют для того, чтобы применять повторяющиеся индексы, по которым нет суммирования:

$$Q^\alpha_\alpha, \quad g_{\alpha\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, 3.$$

Кроме того, в целях придания компактности формулам греческие индексы используют в формулах с циклической перестановкой индексов, например, вместо трех формул

$$Q_3^{ij} = \delta_1^i \delta_2^j + \delta_2^i \delta_3^j, \quad Q_2^{ij} = \delta_3^i \delta_1^j + \delta_1^i \delta_3^j, \quad Q_1^{ij} = \delta_2^i \delta_3^j + \delta_3^i \delta_2^j,$$

можно применить одну

$$Q_\alpha^{ij} = \delta_\beta^i \delta_\gamma^j + \delta_\gamma^i \delta_\beta^j,$$

где предполагается, что  $\alpha, \beta, \gamma$  пробегают значения от 1 до 3, но все они не равны и меняются циклическим образом: если  $\alpha = 1$ , то  $\beta = 2$ ,  $\gamma = 3$ ; если  $\alpha = 2$ , то  $\beta = 3$ ,  $\gamma = 1$ ; если  $\alpha = 3$ , то  $\beta = 1$ ,  $\gamma = 2$ .

### 1.1.6. Векторное поле

Пусть теперь в каждой точке  $x$  пространства определен вектор  $a$ , меняющийся, вообще говоря, при переходе от одной точки  $x$  к другой  $x'$ . В этом случае говорят, что определено *векторное поле*  $a(x)$ . В каждой точке  $x$  вектор  $a$  можно представить разложением по декартовой базису в виде (1.1):

$$a = \bar{a}^i \bar{e}_i \tag{1.22}$$

где  $\bar{a}^i$  – компоненты вектора в базисе  $\bar{e}_i$ .

В силу инвариантности вектор  $a$  можно представить в локальном базисе  $R_i$ , определенном в данной точке  $x$ :

$$a = a^i R_i, \tag{1.23}$$

а также во взаимном базисе:

$$\mathbf{a} = a^i \mathbf{R}_i = a^i g_{li} \mathbf{R}^l = a_l \mathbf{R}^l, \quad (1.24)$$

при этом выполнены соотношения:

$$\mathbf{a} = \bar{a}^i \mathbf{e}_i = a^i \mathbf{R}_j = a_i \mathbf{R}^i = a^j \bar{Q}^i_j \mathbf{e}_i. \quad (1.25)$$

Отсюда получаем связь компонент вектора  $\mathbf{a}$  в различных системах координат  $x^i$  и  $X^i$ :

$$\bar{a}^i = \bar{Q}^i_j a^j, \quad a^j = \bar{P}^j_i \bar{a}^i. \quad (1.26)$$

Величины  $a_i$  называют *ковариантными компонентами* вектора в базисе  $\mathbf{R}^i$ . Они связаны с  $a^i$ , называемыми *контравариантными компонентами* в базисе  $\mathbf{R}_i$  (рис. 1.3), соотношениями:

$$a_l = g_{li} a^i. \quad (1.27)$$

Очевидны и обратные соотношения:

$$a^i = g^{il} a_l. \quad (1.27')$$

Рис. 1.3. Ковариантные и контравариантные компоненты вектора  $\mathbf{a}$

Подставляя (1.14) и (1.26) в (1.27), получаем связь ковариантных компонент  $a_i$  и  $\bar{a}_k$  в различных базисах:

$$a_i = \bar{Q}^k_i \bar{a}_k, \quad \bar{a}_k = \bar{P}^i_k a_i. \quad (1.28)$$

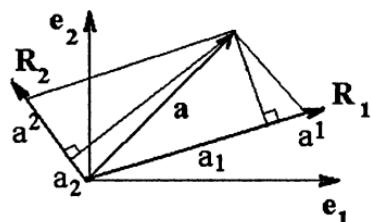
Заметим, что векторы базисов и компоненты векторов в этих базисах преобразуются различным образом (формулы (1.6), (1.26) и (1.21), (1.28)).

### 1.1.7. Операции с векторными полями

**ТЕОРЕМА 1.1.** *Сумма двух векторных полей  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ , определенных в одной точке  $x$ , образует векторное поле, причем*

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = a^i \mathbf{R}_i + b^i \mathbf{R}_i = (a^i + b^i) \mathbf{R}_i. \quad (1.29)$$

Доказательство очевидно, так как в каждой точке  $x$  векторные поля – это просто векторы, которые можно складывать.



**Теорема 1.2.** Скалярное произведение двух векторных полей  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  равно сумме произведений их компонент в основном и взаимном базисах:

$$a^i b_i = a_i b^i.$$

▼ В самом деле, используя представление (1.24) для  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ , а также определение метрической матрицы (1.14) и правило  $\Delta$ , получаем

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a^i \mathbf{R}_i \cdot b^j \mathbf{R}_j = a^i b^j g_{ij} = a^i b_i = a_i b^i. \quad \blacktriangle \quad (1.30)$$

**Теорема 1.3.** Скалярное произведение вектора самого на себя представляет собой длину вектора  $|a|$ :

$$|a| = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})^{1/2} = (a^i a_i)^{1/2} = (\bar{a}^i \bar{a}_i)^{1/2}. \quad (1.31)$$

▼ Так как  $\bar{a}^i$  и  $\bar{a}_i$  совпадают, то с помощью двукратного применения теоремы Пифагора убеждаемся, что  $\bar{a}^i \bar{a}_i = |a|^2$ . Но из (1.26) и (1.28) получаем:

$$a^i a_i = \bar{P}_k^i \bar{a}^k \bar{Q}_i^j \bar{a}_j = \bar{a}^i \bar{a}_i = |a|^2. \quad \blacktriangle$$

Косинус угла  $\psi$  между векторами  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  через координаты вычисляем следующим образом:

$$\cos \psi = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|a||b|} = \frac{a^i b_i}{(a^j a_j b^k b_k)^{1/2}}. \quad (1.32)$$

### Упражнения к § 1.1.

**Упражнение 1.1.1.** Показать, что

$$\mathbf{R}^i \cdot \mathbf{R}^j = g^{ij}.$$

**Упражнение 1.1.2.** Доказать формулы (1.15) и (1.18).

**Упражнение 1.1.3.** Показать истинность формулы

$$A^i_k \delta_i^l = A^l_k.$$

**Упражнение 1.1.4.** Доказать формулу (1.18).

**Упражнение 1.1.5.** Доказать, что  $\mathbf{R}^i \cdot \mathbf{R}_k = \delta_k^i$ .

**Упражнение 1.1.6.** Используя определение (1.8'), показать, что для двух произвольных матриц  $A^i_j$ ,  $B^j_k$  выполнено:

$$\det(A^i_j B^j_k) = \det(A^i_j) \det(B^j_k).$$

**Упражнение 1.1.7.** Используя результаты упр. 1.1.6 и (1.9), показать, что для матрицы  $Q^i_j$  и ее обратной  $P^i_j$  справедлива формула:

$$\det(Q^i_j) = 1/\det(P^i_j).$$

**Упражнение 1.1.8.** Показать, что при переходе из одной криволинейной системы координат  $X^i$  в новую криволинейную систему координат  $X'^j$ , определенную как

$$x^i = x^i(X'^j) \quad (x = x(X'^j)),$$

локальные векторы базисов  $\mathbf{R}_i$  и  $\mathbf{R}'_i = \partial x / \partial X'^j$  и компоненты произвольного вектора  $\mathbf{a}$  в этих базисах связаны соотношениями:

$$\mathbf{R}'_i = P^j_i \cdot \mathbf{R}_j, \quad \mathbf{R}_j = Q^i_j \cdot \mathbf{R}'_i, \quad a^i = P^i_j a'^j, \quad a'^j = Q^j_i a^i,$$

где  $Q^j_i = \partial X'^j / \partial X^i$  - матрица преобразования из  $X^i$  в  $X'^j$ , а  $P^i_m = \partial X^i / \partial X'^m$  - обратная матрица:

$$P^i_m Q^m_j = Q^i_m P^m_j = \delta^i_j.$$

Здесь  $a^i$  и  $a'^i$  - компоненты вектора  $\mathbf{a}$  в различных базисах:

$$\mathbf{a} = a^i \mathbf{R}_i = a'^i \mathbf{R}'_i = a_i \mathbf{R}^i = a'_i \mathbf{R}'^i.$$

**Упражнение 1.1.9.** Показать, что при переходе из системы координат  $X^i$  в  $X'^i$ , метрические матрицы преобразуются следующим образом:

$$g'_{ij} = \mathbf{R}'_i \cdot \mathbf{R}'_j = P^m_i P^l_j g_{ml}, \quad g'^{ij} = \mathbf{R}'^i \cdot \mathbf{R}'^j = Q^i_m Q^j_l g^{ml}.$$

**Упражнение 1.1.10.** Используя результаты упражнений 1.1.8 и 1.1.9, показать, что векторы взаимного базиса  $\mathbf{R}^i$ , ковариантные компоненты вектора  $\mathbf{a}$  преобразуются при переходе из одной криволинейной системы координат в другую следующим образом:

$$\mathbf{R}^i = Q^i_m \mathbf{R}^m, \quad \mathbf{R}^m = P^m_i \mathbf{R}^i, \quad a_i = Q^j_i a'_j, \quad a'_m = P^i_m a_i.$$

**Упражнение 1.1.11.** Для цилиндрической системы координат (см. рис. 1.4) определены соотношения (1.2) вида

$$x^1 = r \cos \phi, \quad x^2 = r \sin \phi, \quad x^3 = z,$$

где  $X^1 = r$  (полярный радиус точки  $M$  на плоскости  $Ox^1 x^2$ ),  $X^2 = \phi$  (полярный угол точки  $M$  на плоскости  $Ox^1 x^2$ ),  $X^3 = z$  (осевая координата) - цилиндрические криволинейные координаты; показать, что якобиевы матрицы  $\bar{Q}^i_j$  и  $\bar{P}^i_j$  имеют вид:

$$\bar{Q}^i_j = \begin{pmatrix} \cos \phi & -r \sin \phi & 0 \\ \sin \phi & r \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{P}^i_j = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\frac{1}{r} \sin \phi & \frac{1}{r} \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

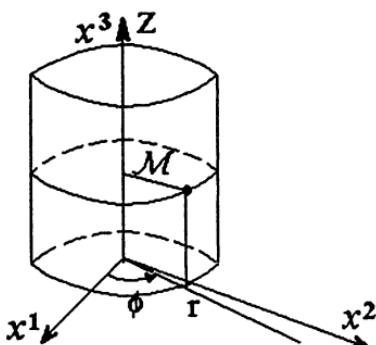


Рис. 1.4. Цилиндрическая система координат

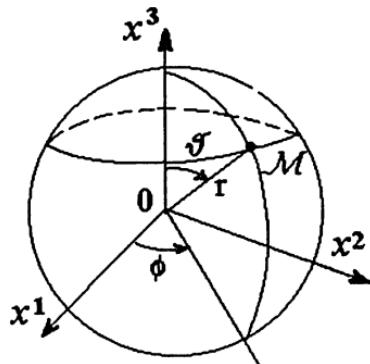


Рис. 1.5. Сферическая система координат

**Упражнение 1.1.12.** Для сферической системы координат (см. рис. 1.5) определены соотношения (1.2) вида

$$x^1 = r \sin \vartheta \cos \phi, \quad x^2 = r \sin \vartheta \sin \phi, \quad x^3 = r \cos \vartheta,$$

где \$X^1 = r\$ (радиус точки \$M\$), \$X^2 = \vartheta\$ (меридиональный угол), \$X^3 = \phi\$ (азимутальный угол) – сферические криволинейные координаты; показать, что якобиевы матрицы \$\bar{Q}\_j^i\$ и \$\bar{P}\_j^i\$ имеют вид:

$$\bar{Q}_j^i = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \phi & r \cos \vartheta \cos \phi & -r \sin \vartheta \sin \phi \\ \sin \vartheta \sin \phi & r \cos \vartheta \sin \phi & r \sin \vartheta \cos \phi \\ \cos \vartheta & -r \sin \vartheta & 0 \end{pmatrix},$$

$$\bar{P}_j^i = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \phi & \sin \vartheta \sin \phi & \cos \vartheta \\ (1/r) \cos \vartheta \cos \phi & (1/r) \cos \vartheta \sin \phi & -(1/r) \sin \vartheta \\ -(1/r)(\sin \phi / \sin \vartheta) & (1/r)(\cos \phi / \sin \vartheta) & 0 \end{pmatrix}.$$

**Упражнение 1.1.13.** Показать, что для цилиндрической системы координат векторы локального базиса имеют следующий вид:

$$\mathbf{R}_1 = \cos \phi \bar{\mathbf{e}}_1 + \sin \phi \bar{\mathbf{e}}_2, \quad \mathbf{R}_2 = -r \sin \phi \bar{\mathbf{e}}_1 + r \cos \phi \bar{\mathbf{e}}_2, \quad \mathbf{R}_3 = \bar{\mathbf{e}}_3;$$

а для сферической системы координат:

$$\mathbf{R}_1 = \sin \vartheta \cos \phi \bar{\mathbf{e}}_1 + \sin \vartheta \sin \phi \bar{\mathbf{e}}_2 + \cos \vartheta \bar{\mathbf{e}}_3,$$

$$\mathbf{R}_2 = r \cos \vartheta \cos \phi \bar{\mathbf{e}}_1 + r \cos \vartheta \sin \phi \bar{\mathbf{e}}_2 - r \sin \vartheta \bar{\mathbf{e}}_3,$$

$$\mathbf{R}_3 = (-\sin \phi \bar{\mathbf{e}}_1 + \cos \phi \bar{\mathbf{e}}_2) r \sin \vartheta.$$

**Упражнение 1.1.14.** Показать, что для цилиндрической системы координат метрические матрицы  $g_{ij}$ ,  $g^{ij}$  и детерминант  $g$  имеют вид:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g = r^2,$$

а для сферической системы координат:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \vartheta \end{pmatrix}, \quad g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/(r^2 \sin^2 \vartheta) \end{pmatrix},$$

$$g = r^4 \sin^2 \vartheta.$$

**Упражнение 1.1.15.** Показать, что для цилиндрической системы векторы взаимного локального базиса имеют вид:

$$\mathbf{R}^1 = \mathbf{R}_1 = \cos \phi \bar{\mathbf{e}}_1 + \sin \phi \bar{\mathbf{e}}_2,$$

$$\mathbf{R}^2 = \frac{1}{r^2} \mathbf{R}_2 = -\frac{1}{r} \sin \phi \bar{\mathbf{e}}_1 + \frac{1}{r} \cos \phi \bar{\mathbf{e}}_2, \quad \mathbf{R}^3 = \mathbf{R}_3 = \bar{\mathbf{e}}_3;$$

а для сферической системы координат:

$$\mathbf{R}^1 = \mathbf{R}_1 = \sin \vartheta \cos \phi \bar{\mathbf{e}}_1 + \sin \vartheta \sin \phi \bar{\mathbf{e}}_2 + \cos \vartheta \bar{\mathbf{e}}_3,$$

$$\mathbf{R}^2 = \frac{1}{r^2} \mathbf{R}_2 = \frac{1}{r} \cos \vartheta \cos \phi \bar{\mathbf{e}}_1 + \frac{1}{r} \cos \vartheta \sin \phi \bar{\mathbf{e}}_2 - \frac{1}{r} \sin \vartheta \bar{\mathbf{e}}_3,$$

$$\mathbf{R}^3 = \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \mathbf{R}_3 = \frac{1}{r \sin \vartheta} (-\sin \phi \bar{\mathbf{e}}_1 + \cos \phi \bar{\mathbf{e}}_2).$$

## § 1.2. Векторное произведение

### 1.2.1. Символы Леви-Чивиты

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4.** Векторное произведение векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ , обозначаемое как  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ , представляет собой следующий вектор:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \sqrt{g} \epsilon_{ijk} a^i b^j \mathbf{R}^k = \frac{1}{\sqrt{g}} \epsilon^{ijk} a_i b_j \mathbf{R}_k. \quad (1.33)$$

Здесь  $\epsilon_{ijk}, \epsilon^{ijk}$  – символы Леви-Чивиты:

$$\epsilon_{ijk}, \epsilon^{ijk} = \begin{cases} 0, & \text{если есть совпадающие индексы,} \\ 1, & \text{если индексы различны и образуют четную} \\ & \text{подстановку,} \\ -1, & \text{если индексы различны и образуют нечетную} \\ & \text{подстановку,} \end{cases} \quad (1.34)$$

а  $g = \det |g_{ij}|$ .

Важную роль играют комбинации символов Леви-Чивиты с  $\sqrt{g}$ . Например, из (1.33) следует:

$$\sqrt{g}\epsilon_{ijk} = \frac{1}{\sqrt{g}}\epsilon^{mnl}g_{mi}g_{nj}g_{lk}. \quad (1.35)$$

Непосредственно можно проверить, что

$$\epsilon_{ijk}\epsilon^{ijk} = 6, \quad \epsilon_{ijk}\epsilon^{ilm} = \delta_j^l\delta_k^m - \delta_k^l\delta_j^m, \quad \epsilon_{ijk}\epsilon^{ijl} = 2\delta_i^l, \quad (1.36)$$

а также

$$\epsilon^{ijk}T_{ij} = 0, \quad (1.37)$$

где  $T_{ij}$  – компоненты произвольной симметричной матрицы, для которой  $T_{ij} = T_{ji}$ .

Умножая (1.35) на  $\epsilon^{ijk}$ , получаем явное выражение детерминанта  $g$  метрической матрицы через ее компоненты:

$$g = \frac{1}{6}\epsilon^{ijk}\epsilon^{mnl}g_{mi}g_{nj}g_{kl}. \quad (1.38)$$

Формулу (1.38) можно применить к любой матрице  $A^i{}_j$ , а не только к метрической, тогда получим:

$$\det (A^i{}_j) = \frac{1}{6}\epsilon_{ijk}\epsilon^{mnl}A^i{}_mA^j{}_nA^k{}_l. \quad (1.39)$$

Принимая за определение детерминанта  $\det (A^i{}_j)$  формулу (1.8'), в справедливости (1.39) можно убедиться непосредственно, расписывая покомпонентно суммы по всем индексам.

Формулу (1.39) можно представить в несколько ином виде, если расписать покомпонентно только один из символов Леви-Чивиты:

$$\begin{aligned} \det (A^i{}_j) = & \frac{1}{6}\epsilon_{ijk}(A_1^iA_2^jA_3^k - A_1^iA_3^jA_2^k + A_2^iA_3^jA_1^k - \\ & - A_2^iA_1^jA_3^k + A_3^iA_1^jA_2^k - A_3^iA_2^jA_1^k). \end{aligned} \quad (1.40)$$

Поскольку по индексам  $i, j, k$  справа идет суммирование, то меняя местами пары индексов, убеждаемся, что все шесть слагаемых в правой части равны между собой, поэтому

$$\det (A^i{}_j) = \epsilon_{ijk} A_\alpha^i A_\beta^j A_\gamma^k, \quad \alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha, \quad \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3, \quad (1.41)$$

где  $\alpha, \beta, \gamma$  образуют любую четную подстановку. При нечетной подстановке следует поменять знак.

Еще один способ записи этой формулы таков:

$$\det (A^i{}_j) \epsilon_{mnl} = \epsilon_{ijk} A_m^i A_n^j A_l^k. \quad (1.42)$$

В его справедливости также легко убедиться непосредственно расписав по индексам  $m, n, l$ .

Опускание или поднятие индексов приводит к объектам  $\epsilon^{ij}{}_k$ ,  $\epsilon_i{}^j{}_k$  и т.п., которые уже не являются константами:

$$\epsilon^{ij}{}_k = \epsilon^{ijm} g_{mk}, \quad \epsilon_i{}^j{}_k = \epsilon_{imk} g^{mj} \quad \text{и т.п.} \quad (1.43)$$

Покажем некоторые важные свойства векторного произведения.

### 1.2.2. Смешанное и двойное векторные произведения

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.5.** Последовательное применение операций векторного, а затем скалярного умножения для трех векторов

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \quad (1.44)$$

называется смешанным произведением.

Смешанное произведение, очевидно, приводит к образованию скаляра  $\varphi$ :

$$\varphi = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \sqrt{g} \epsilon_{ijk} a^i b^j c^k. \quad (1.45)$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.6.** Двойным векторным произведением называется вектор  $\mathbf{d}$ , образованный из трех векторов  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  следующим образом:

$$\mathbf{d} = \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}).$$

Используя определение (1.33), находим компоненты  $\mathbf{d}$ :

$$\mathbf{d} = \frac{1}{\sqrt{g}} \epsilon^{ijk} a_i (\sqrt{g} \epsilon_{lmj} b^l c^m) \mathbf{R}_k = (\epsilon^{ijk} \epsilon_{lmj} a_i b^l c^m) \mathbf{R}_k = d^k \mathbf{R}_k. \quad (1.46)$$

Используя вторую формулу в (1.36), преобразуем (1.46) к виду:

$$\begin{aligned} \mathbf{d} &= (-\delta_l^i \delta_m^k + \delta_m^i \delta_l^k) a_i b^l c^m \mathbf{R}_k = \\ &= (-a_l b^l c^k + a_m b^k c^m) \mathbf{R}_k = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c}. \end{aligned} \quad (1.47)$$

Таким образом, приходим к формуле:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c}. \quad (1.48)$$

### 1.2.3. Ортогональность $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ с $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$

**ТЕОРЕМА 1.4.** Вектор  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  ортогонален к  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  (рис. 1.6).

▼ В самом деле,

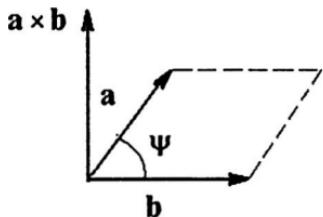


Рис. 1.6. К выводу свойств векторного произведения

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} &= \sqrt{g} \epsilon_{ijk} a^i b^j a^k = \\
 &= \sqrt{g} (\epsilon_{1j2} a^1 a^2 + \epsilon_{1j3} a^1 a^3 + \epsilon_{2j1} a^2 a^1 + \\
 &\quad + \epsilon_{2j3} a^2 a^3 + \epsilon_{3j1} a^3 a^1 + \epsilon_{3j2} a^3 a^2) b^j = \\
 &= \sqrt{g} ((\epsilon_{1j2} + \epsilon_{2j1}) a^1 a^2 + \\
 &\quad + (\epsilon_{1j3} + \epsilon_{3j1}) a^1 a^3 + \\
 &\quad + (\epsilon_{2j3} + \epsilon_{3j2}) a^2 a^3) b^j = \\
 &= 0 \cdot b^j = 0,
 \end{aligned} \tag{1.49}$$

т.к.  $\epsilon_{1j2} = -\epsilon_{2j1}$  и т.д. ▲

### 1.2.4. Длина $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$

**ТЕОРЕМА 1.5.** Длина вектора  $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$  равна площади  $S$  параллелограмма, построенного на векторах  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  (рис. 1.6):

$$S = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \psi = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|. \tag{1.50}$$

▼ Поскольку  $S$  является скалярным инвариантом, то его значение не зависит от выбора системы координат, в которой он рассчитывается. Выберем специальную систему координат  $\mathbf{R}'_i$ , в которой:

$$\mathbf{a} = a^1 \mathbf{R}'_1, \quad \mathbf{b} = b^2 \mathbf{R}'_2.$$

Тогда

$$|\mathbf{a}|^2 = g_{ij} a^i a^j = g_{11} a^1 a^1, \quad |\mathbf{b}| = g_{22} b^2 b^2,$$

и

$$S = \sqrt{g_{11} g_{22}} |a^1 b^2| \sin \psi = \sqrt{g_{11} g_{22}} |a^1 b^2| \sqrt{1 - \cos^2 \psi}.$$

Вычислим  $\cos \psi$  из определения скалярного произведения векторов (1.32):

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \psi.$$

Отсюда

$$\cos \psi = \frac{a^1 b^2 \mathbf{R}'_1 \cdot \mathbf{R}'_2}{\sqrt{g_{11} g_{22}} |a^1 b^2|} = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11} g_{22}}},$$

$$\sqrt{1 - \cos^2 \psi} = \sqrt{\frac{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}{g_{11}g_{22}}} = \sqrt{\frac{gg^{33}}{g_{11}g_{22}}}.$$

Здесь использовано определение коэффициента обратной матрицы

$$g^{33} = \frac{1}{g}(g_{11}g_{22} - g_{12}^2).$$

Тогда выражение для  $S$  принимает вид:

$$S = \sqrt{g_{11}g_{22}}|a^1b^2|\sqrt{\frac{gg^{33}}{g_{11}g_{22}}} = \sqrt{g}\sqrt{g^{33}}|a^1b^2|.$$

Вычислим  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  во введенной системе координат:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \sqrt{g}\epsilon_{12k}a^1b^2\mathbf{R}^{3'} = \sqrt{g}|a^1b^2|\sqrt{g^{33}},$$

таким образом утверждение (1.50) доказано. ▲

Если обозначить  $n$  – единичный вектор нормали ( $n \cdot n = 1$ ) к площадке  $S$  параллелограмма, то соотношения (1.49) и (1.50) можно представить в виде:

$$nS = \mathbf{a} \times \mathbf{b}. \quad (1.51)$$

Это соотношение будем часто использовать в дальнейшем.

### 1.2.5. Геометрический смысл векторов взаимного базиса

Рассмотрим векторное произведение векторов базиса  $\mathbf{R}_n \times \mathbf{R}_m$  и воспользуемся определением (1.33), в котором  $\mathbf{a} = \mathbf{R}_n \delta_n^i \mathbf{R}_i$  и  $\mathbf{b} = \mathbf{R}_m \delta_m^j \mathbf{R}_j$ :

$$\mathbf{R}_n \times \mathbf{R}_m = \sqrt{g}\epsilon_{ijk}\delta_n^i\delta_m^j\mathbf{R}^k = \sqrt{g}\epsilon_{nmk}\mathbf{R}^k, \quad (1.52)$$

в частности

$$\mathbf{R}_2 \times \mathbf{R}_3 = \sqrt{g}\mathbf{R}^1. \quad (1.53)$$

Отсюда следует геометрический смысл векторов взаимного базиса  $\mathbf{R}^\alpha$ : это векторы ортогональные к координатной плоскости, натянутой на векторы  $\mathbf{R}_\beta$ ,  $\mathbf{R}_\gamma$  ( $\alpha \neq \beta \neq \gamma$ ).

### 1.2.6. Вычисление объема

Умножим скалярно на  $\mathbf{R}_i$  обе части уравнения (1.52):

$$\mathbf{R}_i \cdot (\mathbf{R}_n \times \mathbf{R}_m) = \sqrt{g}\epsilon_{nmk}\mathbf{R}^k \cdot \mathbf{R}_i = \sqrt{g}\epsilon_{nmi} = \sqrt{g}\epsilon_{inm}. \quad (1.54)$$

Рассмотрим частный случай:

$$\mathbf{R}_1 \cdot (\mathbf{R}_2 \times \mathbf{R}_3) = \sqrt{g} \epsilon_{123} = \sqrt{g}. \quad (1.55)$$

Покажем, что  $\sqrt{g}$  это объем  $|V|$ , построенный на векторах  $\mathbf{R}_i$ . Используя свойства скалярного и векторного произведений, получаем:

$$\begin{aligned} \sqrt{g} &= \mathbf{R}_1 \cdot (\mathbf{R}_2 \times \mathbf{R}_3) = |\mathbf{R}_1| |\mathbf{R}_2 \times \mathbf{R}_3| \cos \psi_1 = \\ &= |\mathbf{R}_1| \cos \psi_1 S = hS = |V|, \end{aligned} \quad (1.56)$$

здесь  $S$  – площадь параллелограмма, лежащего в основании параллелепипеда, построенного на векторах  $\mathbf{R}_i$ , а  $h = |\mathbf{R}_i| \cos \psi$  – его высота.

Учитывая, что  $\mathbf{R}_i = \bar{Q}_i^j \mathbf{\bar{e}}_j$  и  $g_{ij} = \bar{Q}_i^k \bar{Q}_{jk}$ , имеем

$$g = \det(g_{ij}) = \det(\bar{Q}_i^k \bar{Q}_j^k) = \det(\bar{Q}_i^k) \det(\bar{Q}_j^k) = \left| \frac{\partial x^k}{\partial X^i} \right|^2. \quad (1.57)$$

Таким образом, имеем равноправные соотношения:

$$|V| = \sqrt{g} = \mathbf{R}_1 \cdot (\mathbf{R}_2 \times \mathbf{R}_3) = \left| \frac{\partial x^k}{\partial X^i} \right|. \quad (1.58)$$

### Упражнения к § 1.2.

**Упражнение 1.2.1.** Доказать формулы (1.36) и (1.37).

**Упражнение 1.2.2.** Доказать, что

$$\mathbf{R}^i = (1/(2\sqrt{g})) \epsilon^{n m k} \mathbf{R}_n \times \mathbf{R}_m.$$

**Упражнение 1.2.3.** Доказать, что

$$\mathbf{R}^i \times \mathbf{R}^j = (1/\sqrt{g}) \epsilon^{ijk} \mathbf{R}_k.$$

**Упражнение 1.2.4.** Доказать, что

$$\mathbf{R}_k = (\sqrt{g}/2) \epsilon^{k n m} \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m.$$

**Упражнение 1.2.5.** Показать, что

$$\mathbf{R}_i \times \mathbf{R}^i = 0.$$

**Упражнение 1.2.6.** Доказать, что циклическая перестановка не меняет результата смешанного произведения:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a}.$$

**Упражнение 1.2.7.** Показать, что

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}, \quad \mathbf{a} \times \mathbf{a} = 0.$$

**Упражнение 1.2.8.** Показать, что если  $\mathbf{e}_i$  – три ортогональных вектора единичной длины, то

$$\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_k, \quad i \neq j \neq k = i.$$

**Упражнение 1.2.9.** Используя определение (1.34), показать непосредственно, что из (1.38) следует (1.16).

### § 1.3. Геометрическое определение тензора и алгебраические операции с тензорами

#### 1.3.1. Графическое изображение векторов и операций с ними

Для векторов, называемых также тензорами первого ранга, существует наглядное графическое изображение.

Графически вектор  $\mathbf{a}$ , соединяющий точки  $O$  и  $M$ , изображен на рис. 0.1 (см. Введение). Наличие стрелки в точке  $M$  указывает на то, что точка  $O$  – начальная, а точка  $M$  – конечная.

Операции сложения векторов  $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$  "по правилу параллелограмма" и скалярного умножения  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \varphi$  также можно наглядно изобразить графически (см. рис.0.2 и 0.4).

То же самое относится и к умножению вектора на число (см. рис.0.3), а также к разложению вектора  $\mathbf{a}$  по базисным ортонормированным векторам  $\mathbf{e}_i$  (рис. 1.7 для векторов на плоскости), которое позволяет графически изобразить и компоненты вектора  $\bar{a}^i$  в базисе  $\bar{\mathbf{e}}_i$  как проекции вектора  $\mathbf{a}$  на  $\bar{\mathbf{e}}_i$ .

Можно также изобразить графически компоненты вектора  $\mathbf{a}$  в неортонормированном базисе  $\mathbf{R}_i$ :

$$\mathbf{a} = a^i \mathbf{R}_i = a_i \mathbf{R}^i. \quad (1.59)$$

Ковариантные компоненты  $a_i$  – это ортогональные проекции  $a_{R_i}$  вектора  $\mathbf{a}$  на  $\mathbf{R}_i$ , умноженные на длину  $R_i$ :

$$a_\alpha = \mathbf{a} \cdot \mathbf{R}_\alpha = |\mathbf{a}| |R_\alpha| \cos \psi_\alpha = a_{R_\alpha} |R_\alpha|. \quad (1.60)$$

Векторы взаимного базиса  $\mathbf{R}^\alpha$  можно изобразить графически с помощью свойства (см. упр.1.1.5) их скалярного произведения с вектором основного базиса. Для двумерного случая имеем:

$$\mathbf{R}_2 \cdot \mathbf{R}^1 = 0, \quad \mathbf{R}_1 \cdot \mathbf{R}^2 = 0, \quad \mathbf{R}_1 \cdot \mathbf{R}^1 = 1, \quad \mathbf{R}_2 \cdot \mathbf{R}^2 = 1, \quad (1.61)$$

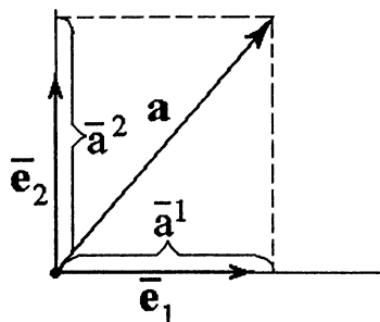


Рис. 1.7. Графическое изображение компонент вектора в ортонормированном базисе

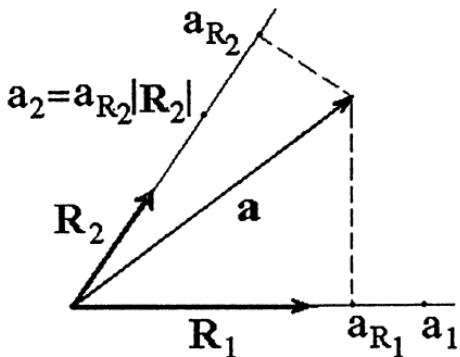


Рис. 1.8. Геометрическое представление ковариантных компонент вектора в ортонормированном базисе

т.е. вектор  $R^1$  ортогонален к  $R_2$ , а  $R^2$  – к  $R_1$ , а длины этих векторов вычислим по длинам  $|R_\alpha|$ :

$$|R_\alpha| = \frac{1}{|R_\alpha| \sin \varphi}, \quad \alpha = 1, 2, \quad (1.62)$$

где  $\varphi$  – угол между  $R_1$  и  $R_2$  ( $0 \leq \varphi \leq \pi$ ). Напомним, что в плоскости левый базис нумеруется по направлению против часовой стрелки, такая же ориентация сохраняется и для векторов взаимного базиса.

После построения векторов  $R^\alpha$ , ортогональными проекциями на них можно изобразить графически ковариантные компоненты  $a^\alpha$  вектора  $\mathbf{a}$ :

$$a^\alpha = \mathbf{a} \cdot R^\alpha = a^{R^\alpha} |R^\alpha|, \quad a^{R^\alpha} = |a| \cos \psi^\alpha, \quad (1.63)$$

где  $\psi^\alpha$  – угол между векторами  $\mathbf{a}$  и  $R^\alpha$ .

### 1.3.2. Геометрическое определение тензора

Дадим теперь подобное геометрическое определение для нового объекта – тензора второго ранга. Вначале рассмотрим для наглядности тензоры в двумерном евклидовом пространстве.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.7.** Тензором второго ранга  $T$  в двумерном евклидовом пространстве назовем упорядоченную совокупность четырех векторов, выпущенных из одной точки, два из которых фиксированы (одинаковы для всех тензоров), а два других произвольны (индивидуальны для каждого тензора).

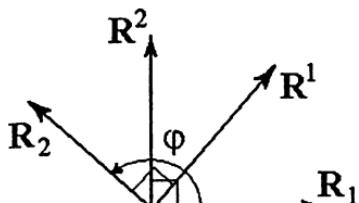


Рис. 1.9. Геометрическое представление векторов взаимного базиса

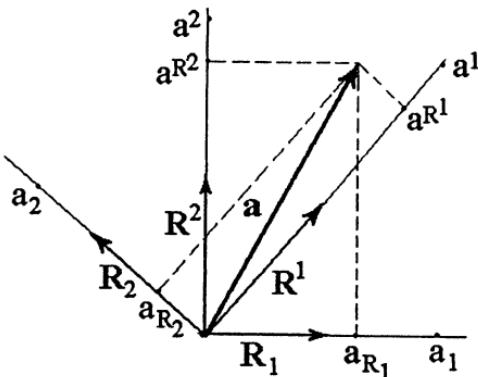


Рис. 1.10. Геометрическое представление ковариантных и контравариантных компонент вектора

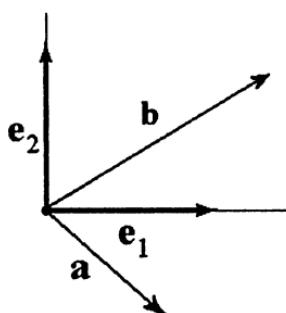


Рис. 1.11. Геометрическое представление тензора второго ранга

При графическом изображении фиксированные векторы выделяются жирными стрелками (рис. 1.11). Упорядочение четырех векторов, образующих тензор  $T$ , производится следующим образом: первым и третьим считаются два фиксированных вектора  $e_1$  и  $e_2$ , вторым и четвертым – два индивидуальных  $a$  и  $b$ . Для определенного таким образом тензора  $T$  введем специальное обозначение:

$$T = [e_1 a e_2 b]. \quad (1.64)$$

В евклидовом пространстве в качестве фиксированных векторов  $e_I$  удобно выбрать векторы базиса  $\bar{e}_I$ .

### 1.3.3. Операции с тензорами

Введем теперь операции с тензорами вида (1.64), т.е. графические правила вычисления суммы и скалярного произведения.

#### A. Сложение двух тензоров

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.8. Суммой двух тензоров**

$$T = [\bar{e}_1 a \bar{e}_2 b] \quad u \quad B = [\bar{e}_1 c \bar{e}_2 d] \quad (1.65)$$

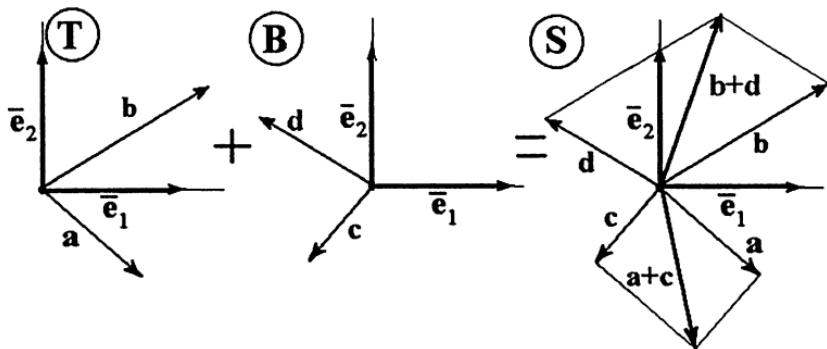


Рис. 1.12. Графическое вычисление суммы двух тензоров

называется тензор  $S$ , у которого индивидуальные векторы являются суммой соответствующих векторов от тензоров  $T$  и  $B$ :

$$S = T + B = [\bar{e}_1(a + c)\bar{e}_2(b + d)]. \quad (1.66)$$

Таким образом, графическое правило сложения двух тензоров заключается в сложении соответствующих индивидуальных векторов по правилу параллелограмма и неизменности двух фиксированных векторов, в результате снова образуется объект вида (1.64) (рис. 1.12).

### Б. Скалярное умножение тензора на вектор

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.9.** Скалярное умножение тензора  $T$  на вектор с справа представляет собой вектор  $d$ , образуемый путем сложения двух фиксированных векторов  $e_1$  и  $e_2$ , умноженных предварительно на скалярные произведения с с индивидуальными векторами  $a$  и  $b$ :

$$T \cdot c = [\bar{e}_1 a \bar{e}_2 b] \cdot c = \bar{e}_1(a \cdot c) + \bar{e}_2(b \cdot c) = d. \quad (1.67)$$

Графический способ построения такого вектора  $d$  вытекает из определения и показан на рис. 1.13.

Скалярное умножение тензора  $T$  на вектор  $c$  слева дает вектор  $f$ , представляющий собой сумму индивидуальных векторов  $a$  и  $b$ , предварительно умноженных на скалярное произведение  $c$  с фиксированными векторами  $\bar{e}_1$  и  $\bar{e}_2$ :

$$c \cdot T = c \cdot [\bar{e}_1 a \bar{e}_2 b] = (c \cdot \bar{e}_1)a + (c \cdot \bar{e}_2)b = f. \quad (1.68)$$

Графическое построение вектора  $f$  показано на рис. 1.14.

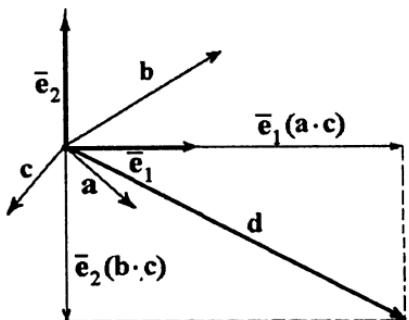


Рис. 1.13. Графическое вычисление скалярного произведения тензора на вектор

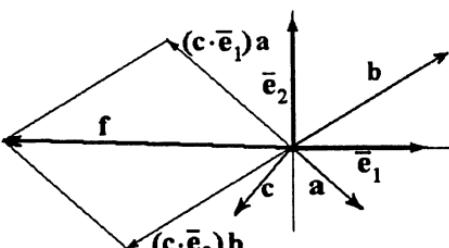


Рис. 1.14. Графическое вычисление скалярного произведения вектора на тензор

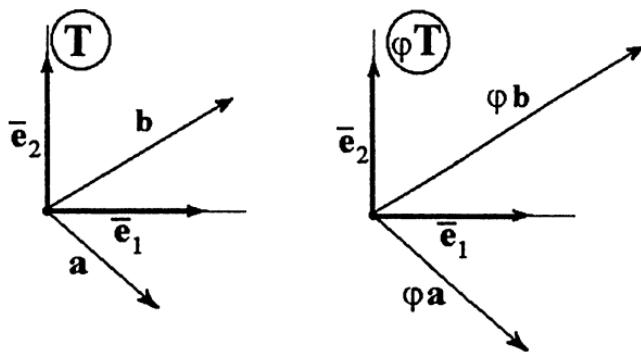


Рис. 1.15. Графическое вычисление произведения тензора на скаляр

## B. Умножение тензора на скаляр

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.10.** Умножение тензора  $T$  на скаляр  $\varphi$  представляет собой тензор  $\varphi T$ , индивидуальные векторы которого получаются умножением соответствующих векторов  $a$  и  $b$  тензора  $T$  на  $\varphi$ :

$$\varphi T = \varphi [\bar{e}_1 a \bar{e}_2 b] = [\bar{e}_1 (\varphi a) \bar{e}_2 (\varphi b)]. \quad (1.69)$$

Графическое изображение тензора  $\varphi T$  становится очевидным: надо просто умножить оба индивидуальных вектора  $a$  и  $b$  на число  $\varphi$  (рис. 1.15).

### 1.3.4. Компоненты тензора

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.11.** Компонентами тензора  $T$  называют

двойные скалярные произведения тензора  $\mathbf{T}$  слева и справа на векторы базиса  $\bar{\mathbf{e}}_I$ :

$$\bar{T}_{IJ} = \bar{\mathbf{e}}_I \cdot \mathbf{T} \cdot \bar{\mathbf{e}}_J = \bar{\mathbf{e}}_I \cdot [\bar{\mathbf{e}}_1 \mathbf{a} \bar{\mathbf{e}}_2 \mathbf{b}] \cdot \bar{\mathbf{e}}_J. \quad (1.70)$$

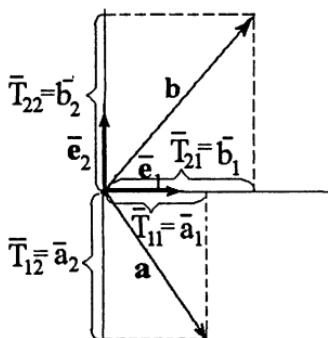


Рис. 1.16. Геометрическое представление компонент тензора второго ранга

Вычислим сначала скалярное произведение справа, пользуясь правилом (1.67), а затем скалярное произведение слева (1.68), в результате получаем:

$$\begin{aligned} \bar{T}_{11} &= \bar{\mathbf{e}}_1 \cdot (\bar{\mathbf{e}}_1(\mathbf{a} \cdot \bar{\mathbf{e}}_1) + \bar{\mathbf{e}}_2(\mathbf{b} \cdot \bar{\mathbf{e}}_1)) = \\ &= \bar{\mathbf{e}}_1 \cdot (\bar{a}_1 \bar{\mathbf{e}}_1 + \bar{b}_1 \bar{\mathbf{e}}_2) = \bar{a}_1. \end{aligned} \quad (1.71)$$

Здесь  $\bar{a}_I$  и  $\bar{b}_I$  – компоненты векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  в базисе  $\bar{\mathbf{e}}_I$ :

$$\mathbf{a} = \bar{a}^I \bar{\mathbf{e}}_I = \bar{a}_I \bar{\mathbf{e}}^I,$$

$$\mathbf{b} = \bar{b}^I \bar{\mathbf{e}}_I = \bar{b}_I \bar{\mathbf{e}}^I. \quad (1.72)$$

(Напомним, что поскольку базис  $\bar{\mathbf{e}}_I$  – декартов, то все  $\bar{a}_I$  и  $\bar{a}^I$  совпадают).

Аналогично получаем

$$\bar{T}_{12} = \bar{\mathbf{e}}_1 \cdot \mathbf{T} \cdot \bar{\mathbf{e}}_2 = \bar{\mathbf{e}}_1 \cdot (\bar{\mathbf{e}}_1(\mathbf{a} \cdot \bar{\mathbf{e}}_2) + \bar{\mathbf{e}}_2(\mathbf{b} \cdot \bar{\mathbf{e}}_2)) = \bar{\mathbf{e}}_1 \cdot (\bar{a}_2 \bar{\mathbf{e}}_1 + \bar{b}_2 \bar{\mathbf{e}}_2) = \bar{a}_2, \quad (1.73)$$

$$\bar{T}_{21} = \bar{\mathbf{e}}_2 \cdot \mathbf{T} \cdot \bar{\mathbf{e}}_1 = \bar{b}_1, \quad \bar{T}_{22} = \bar{\mathbf{e}}_2 \cdot \mathbf{T} \cdot \bar{\mathbf{e}}_2 = \bar{b}_2.$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

**ТЕОРЕМА 1.6.** Компоненты  $T_{IJ}$  тензора  $\mathbf{T}$  совпадают с соответствующими компонентами его индивидуальных векторов  $\bar{a}_I$  и  $\bar{b}_J$ .

Теорема позволяет графически изобразить компоненты тензора (рис. 1.16).

### 1.3.5. Компоненты тензора в новом базисе $\mathbf{e}'_I$

Выберем теперь произвольный базис  $\mathbf{R}_I$ , связанный с  $\mathbf{e}'_I$  якобиевой матрицей (см. (1.6)):

$$\mathbf{R}_I = \bar{Q}^J_I \bar{\mathbf{e}}_J, \quad (1.74)$$

и вычислим компоненты тензора  $\mathbf{T}$  в этом базисе по правилам (1.70);

$$\begin{aligned} T_{IJ} &= \mathbf{R}_I \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{R}_J = \mathbf{R}_I \cdot [\bar{\mathbf{e}}_1 \mathbf{a} \bar{\mathbf{e}}_2 \mathbf{b}] \cdot \mathbf{R}_J = \\ &= (\mathbf{R}_I \cdot \bar{\mathbf{e}}_1)(\mathbf{a} \cdot \mathbf{R}_I) + (\mathbf{R}_I \cdot \bar{\mathbf{e}}_2)(\mathbf{b} \cdot \mathbf{R}_J). \end{aligned} \quad (1.75)$$

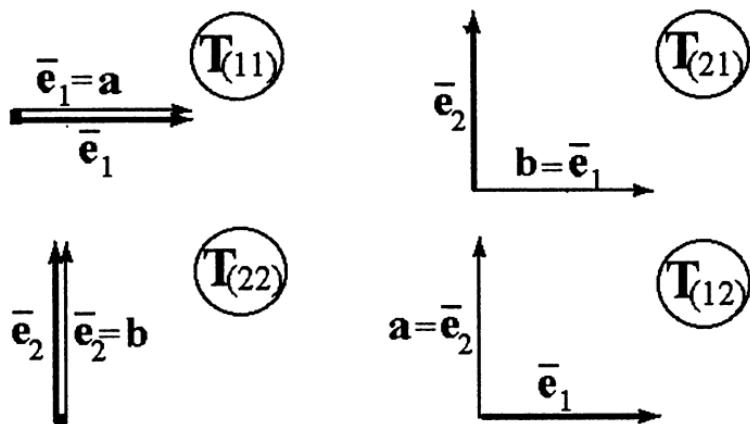


Рис. 1.17. Графическое изображение базисных тензоров

Здесь мы используем свойства:

$$\mathbf{R}_I \cdot \bar{\mathbf{e}}_L = \bar{Q}_I^J \bar{\mathbf{e}}_J \cdot \bar{\mathbf{e}}_L = \bar{Q}_{LI}, \quad (1.76)$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{R}_J = \bar{a}^K \bar{\mathbf{e}}_K \cdot \mathbf{R}_J = \bar{a}^K \bar{Q}_J^I \bar{\mathbf{e}}_I \cdot \bar{\mathbf{e}}_K = \bar{Q}_{KJ} \bar{a}^K,$$

тогда с учетом определения (1.73) компонент тензора в декартовом базисе из (1.75) получаем:

$$\begin{aligned} T_{IJ} &= \bar{Q}_{1I} \bar{Q}_{KJ} \bar{a}^K + \bar{Q}_{2I} \bar{Q}_{KJ} \bar{b}^K = \\ &= \bar{Q}_I^K \bar{Q}_J^K T_{1K} + \bar{Q}_I^K \bar{Q}_J^K T_{2K} = \bar{Q}_I^L \bar{Q}_J^K T_{LK}, \end{aligned} \quad (1.77)$$

т.е. компоненты тензора  $\mathbf{T}$  (1.70) преобразуются подобно компонентам вектора (1.28). Такое правило преобразования компонент называют *тензорным законом*.

### 1.3.6. Базисные тензоры

Произвольный тензор второго ранга может быть представлен в виде суммы некоторых фиксированных тензоров – базисных тензоров.

Такие базисные тензоры  $\mathbf{T}_{(IJ)}$  образуем, выбирая в качестве пары векторов ( $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ ) нуль-вектор  $\mathbf{0}$  и какой-либо базисный вектор  $\bar{\mathbf{e}}_I$ :

$$\mathbf{T}_{(11)} = [\bar{\mathbf{e}}_1 \bar{\mathbf{e}}_1 \bar{\mathbf{e}}_2 \mathbf{0}], \quad \mathbf{T}_{(21)} = [\bar{\mathbf{e}}_1 \mathbf{0} \bar{\mathbf{e}}_2 \bar{\mathbf{e}}_1], \quad (1.78)$$

$$\mathbf{T}_{(22)} = [\bar{\mathbf{e}}_1 \mathbf{0} \bar{\mathbf{e}}_2 \bar{\mathbf{e}}_2], \quad \mathbf{T}_{(12)} = [\bar{\mathbf{e}}_1 \bar{\mathbf{e}}_2 \bar{\mathbf{e}}_2 \mathbf{0}].$$

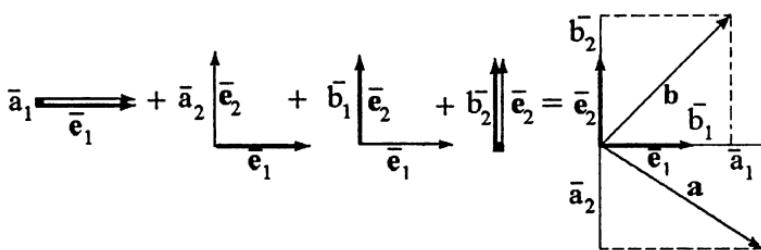


Рис. 1.18, а. Графическое разложение тензора второго ранга по базисным тензорам

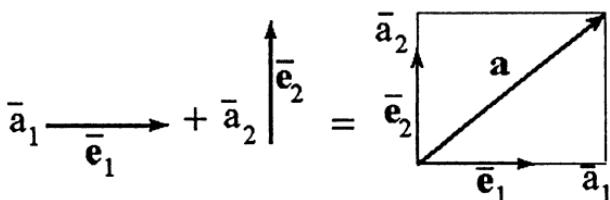


Рис. 1.18, б. Графическое разложение вектора по базисным векторам

Графически базисный тензор  $T_{(11)}$ , следуя общему правилу, естественно изобразить как "двойную стрелку" из векторов  $\bar{e}_1$ , одна из которых проведена "жирной" линией, а вторая, соответствующая вектору  $a$  – простой.

Действие же нуль-вектора  $0$  на вектор, стоящий слева, дает изображение "нуль", т.е. никак не изображается.

Тогда базисный тензор  $T_{(22)}$  будет изображен двойной стрелкой векторов  $\bar{e}_2$ , тензор  $T_{(12)}$  – совокупностью только двух векторов  $\bar{e}_1$  и  $\bar{e}_2 = a$ , причем  $\bar{e}_1$  изображается жирной стрелкой, а  $\bar{e}_2$  – простой, т.к. в данном случае он выступает в роли индивидуального вектора  $a$ . Тензор  $T_{(21)}$  также изображается совокупностью двух векторов  $\bar{e}_1 = b$  и  $\bar{e}_2$ , где  $\bar{e}_2$  показан жирной стрелкой, а  $\bar{e}_1$  – простой (рис. 1.17).

### 1.3.7. Разложение тензора по базисным тензорам

**ТЕОРЕМА 1.7.** С помощью операций сложения и умножения на число, введенных в п.1.3.3, можно всякий тензор  $T$  представить как сумму четырех базисных тензоров:

$$T = \bar{a}_1 T_{(11)} + \bar{a}_2 T_{(12)} + \bar{b}_1 T_{(21)} + \bar{b}_2 T_{(22)}. \quad (1.79)$$

▼ В самом деле, используя правила (1.66) и (1.69), получаем:

$$\begin{aligned} & [\bar{e}_1(\bar{a}_1\bar{e}_1)\bar{e}_20] + [\bar{e}_1(\bar{a}_2\bar{e}_2)\bar{e}_20] + [\bar{e}_10\bar{e}_2(\bar{b}_1\bar{e}_1)] + [\bar{e}_10\bar{e}_2(\bar{b}_2\bar{e}_2)] = \\ & = [\bar{e}_1(\bar{a}_1\bar{e}_1 + \bar{a}_2\bar{e}_2)\bar{e}_2(\bar{b}_1\bar{e}_1 + \bar{b}_2\bar{e}_2)] = [\bar{e}_1a\bar{e}_2b] = T. \quad \blacktriangle \end{aligned} \quad (1.80)$$

С помощью формулы (1.79) можно графически представить разложение тензора  $T$  по базисным тензорам: это есть сумма четырех описанных в п.1.3.6 базисных тензоров (рис. 1.18, а).

Это изображение является аналогом графического изображения для разложения вектора  $a$  по базисным векторам (рис. 1.18, б).

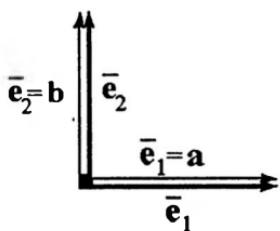
Используя теорему 1.6, разложение (1.79) можно записать с помощью компонент тензора  $\bar{T}^{IJ}$ :

$$T = \bar{T}^{IJ} T_{(IJ)}. \quad (1.81)$$

Здесь, как и всегда в декартовой системе координат,  $\bar{T}^{IJ}$  совпадают с  $\bar{T}_{IJ}$ .

### 1.3.8. Единичный тензор

Если в качестве индивидуальных векторов  $a$  и  $b$  выбрать базисные векторы  $\bar{e}_1$  и  $\bar{e}_2$ , то получим единичный тензор  $E$ :



$$E = [\bar{e}_1 \bar{e}_1 \bar{e}_2 \bar{e}_2]. \quad (1.82)$$

Графическое изображение этого тензора есть совокупность двух "двойных стрелок" из векторов  $\bar{e}_1$  и  $\bar{e}_2$  (рис. 1.19).

Учитывая свойство (1.80), единичный тензор всегда можно представить в виде суммы двух базисных тензоров:

$$E = T_{(11)} + T_{(22)}, \quad (1.83)$$

Рис. 1.19. Графическое изображение единичного тензора.

а скалярное умножение  $E$  на всякий вектор  $c$ , согласно (1.67) и (1.68), дает снова вектор  $c$ :

$$E \cdot c = [\bar{e}_1 \bar{e}_1 \bar{e}_2 \bar{e}_2] \cdot c = \bar{e}_1(\bar{e}_1 \cdot c) + \bar{e}_2(c \cdot \bar{e}_2) = c_1 \bar{e}_1 + c_2 \bar{e}_2 = c, \quad (1.84)$$

$$c \cdot E = (c \cdot \bar{e}_1) \bar{e}_1 + (c \cdot \bar{e}_2) \bar{e}_2 = c,$$

как и должно быть для единичного тензора.

### 1.9.12. Скалярное умножение тензоров

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.12.** Скалярное умножение тензора  $T$  на тензор  $B$  слева представляет собой тензор  $S$ , индивидуальные векторы которого образованы суммой индивидуальных векторов тензора  $B$ , умноженных предварительно на скалярное произведение векторов тензора  $T$  с базисными  $\bar{e}_I$ :

$$S = T \cdot B = [\bar{e}_1 a \bar{e}_2 b] \cdot [\bar{e}_1 c \bar{e}_2 d] = [\bar{e}_1 a' \bar{e}_2 b'], \quad (1.85)$$

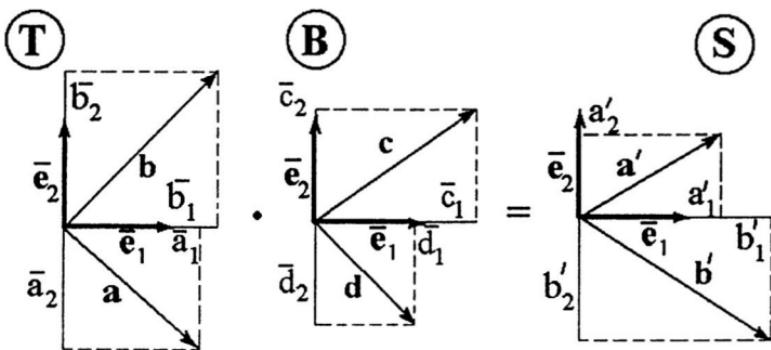


Рис. 1.20. Графическое изображение скалярного произведения тензоров

т.е.

$$\mathbf{a}' = (\mathbf{a} \cdot \bar{\mathbf{e}}_1)\mathbf{c} + (\mathbf{a} \cdot \bar{\mathbf{e}}_2)\mathbf{d}, \quad \mathbf{b}' = (\mathbf{b} \cdot \bar{\mathbf{e}}_1)\mathbf{c} + (\mathbf{b} \cdot \bar{\mathbf{e}}_2)\mathbf{d}.$$

Это определение и формула (1.85) дают способ графического изображения скалярного произведения тензоров, его пример приведен на рис. 1.20.

Компоненты векторов  $\mathbf{a}'$  и  $\mathbf{b}'$  связаны с компонентами векторов  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{d}$  соотношениями:

$$S_{11} = a'_1 = \bar{a}_1 \bar{c}_1 + \bar{a}_2 \bar{d}_1, \quad S_{12} = a'_2 = \bar{a}_1 \bar{c}_2 + \bar{a}_2 \bar{d}_2, \quad (1.86)$$

$$S_{21} = b'_1 = \bar{b}_1 \bar{c}_1 + \bar{b}_2 \bar{d}_1, \quad S_{22} = b'_2 = \bar{b}_1 \bar{c}_2 + \bar{b}_2 \bar{d}_2.$$

Если в качестве тензора  $\mathbf{B}$  (или  $\mathbf{T}$ ) выбрать единичный тензор, то получим, согласно (1.82) и (1.85), тензор  $\mathbf{T}$  (или  $\mathbf{B}$ ):

$$\begin{aligned} \mathbf{T} \cdot \mathbf{E} &= [\bar{\mathbf{e}}_1 \mathbf{a} \bar{\mathbf{e}}_2 \mathbf{b}] \cdot [\bar{\mathbf{e}}_1 \bar{\mathbf{e}}_1 \bar{\mathbf{e}}_2 \bar{\mathbf{e}}_2] = \\ &= [\bar{\mathbf{e}}_1 (\bar{a}_1 \bar{\mathbf{e}}_1 + \bar{a}_2 \bar{\mathbf{e}}_2) \bar{\mathbf{e}}_2 (\bar{b}_1 \bar{\mathbf{e}}_1 + \bar{b}_2 \bar{\mathbf{e}}_2)] = [\bar{\mathbf{e}}_1 \mathbf{a} \bar{\mathbf{e}}_2 \mathbf{b}] = \mathbf{T}, \end{aligned} \quad (1.87)$$

как и должно быть.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.13.** Двойным скалярным произведением тензоров  $\mathbf{T}$  и  $\mathbf{B}$  называют число  $\varphi$ , вычисляемое следующим образом:

$$\varphi = \mathbf{T} \cdot \cdot \mathbf{B} = [\bar{\mathbf{e}}_1 \mathbf{a} \bar{\mathbf{e}}_2 \mathbf{b}] \cdot [\bar{\mathbf{e}}_1 \mathbf{c} \bar{\mathbf{e}}_2 \mathbf{d}] = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{d}. \quad (1.88)$$

Двойное скалярное произведение обозначают двумя точками.

### 1.3.10. Транспонированный тензор

Рассмотрим теперь некоторые важные типы тензоров.

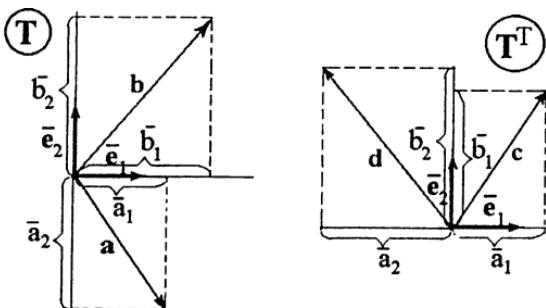


Рис. 1.21. Графическое изображение транспонированного тензора второго ранга

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.14.** Транспонированным к  $T$  называют тензор  $T'$ , который имеет в каком-либо базисе  $\bar{e}_I$  "перевернутые" компоненты:

$$\bar{T}'_{IJ} = \bar{T}_{JI}. \quad (1.89)$$

Транспонированный тензор обозначают как  $T' \equiv T^T$ .

Для графического изображения транспонированного тензора  $T'$  следует взять значение  $\bar{a}_2 = \bar{T}_{12}$  с его знаком и отложить по оси  $\bar{e}_1$ , – получим компоненту  $\bar{c}_1 = \bar{T}'_{21}$ . Затем следует взять значение  $\bar{T}_{21} = \bar{b}_2$  с его знаком и отложить по оси  $\bar{e}_2$  – получим компоненту  $\bar{T}'_{12} = \bar{d}_1$ . Далее строятся векторы  $c$  и  $d$  с компонентами:

$$\bar{c}_1 = \bar{a}_1, \quad \bar{c}_2 = \bar{b}_1, \quad \bar{d}_1 = \bar{a}_2, \quad \bar{d}_2 = \bar{b}_2, \quad (1.90)$$

которые и являются индивидуальными векторами транспонированного тензора  $T'$ :

$$T^T = T' = [e_1 c e_2 d]. \quad (1.91)$$

Пример построения транспонированного тензора  $T'$  показан на рис. 1.21.

### 1.3.11. Симметричный тензор

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.15.** Симметричным называют такой тензор, транспонированный к которому совпадает с исходным:

$$T' \equiv T^T = T. \quad (1.92)$$

Для того чтобы при графическом изображении  $T'$  выполнялось это свойство, необходимо у исходного тензора потребовать равенство компонент:

$$\bar{T}_{12} = \bar{T}_{21}, \quad (1.93)$$

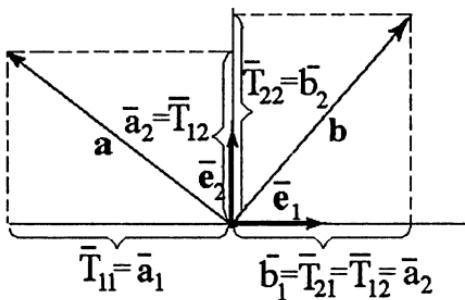


Рис. 1.22. Графическое изображение симметричного тензора второго ранга

т.е. чтобы проекция вектора  $\mathbf{a}$  на вектор  $\bar{\mathbf{e}}_2$  по абсолютной величине и знаку совпадала с проекцией вектора  $\mathbf{b}$  на  $\bar{\mathbf{e}}_1$ :

$$\bar{a}_2 = \bar{b}_1. \quad (1.94)$$

Пример такого симметричного тензора изображен на рис. 1.22.

### 1.3.12. Обратный тензор

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.16.** Тензор  $\mathbf{B}$  называют обратным к  $\mathbf{T}$ , если его скалярное произведение на  $\mathbf{T}$  дает единичный тензор. Такой тензор  $\mathbf{B}$  обозначают как  $\mathbf{T}^{-1}$ :

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}^{-1} = \mathbf{E}. \quad (1.95)$$

Если в формуле (1.85) тензор  $\mathbf{S}$  является единичным, то тензор  $\mathbf{B}$  представляет собой тензор, обратный к  $\mathbf{T}$ . Найдем его индивидуальные векторы  $\mathbf{c}$  и  $\mathbf{d}$ . Из (1.85) имеем:

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}^{-1} = [\bar{\mathbf{e}}_1 \mathbf{a} \bar{\mathbf{e}}_2 \mathbf{b}] \cdot [\bar{\mathbf{e}}_1 \mathbf{c} \bar{\mathbf{e}}_2 \mathbf{d}] = [\bar{\mathbf{e}}_1 \bar{\mathbf{e}}_1 \bar{\mathbf{e}}_2 \bar{\mathbf{e}}_2] = \mathbf{E}, \quad (1.96)$$

или

$$(\mathbf{a} \cdot \bar{\mathbf{e}}_1) \mathbf{c} + (\mathbf{a} \cdot \bar{\mathbf{e}}_2) \mathbf{d} = \bar{\mathbf{e}}_1, \quad (\mathbf{b} \cdot \bar{\mathbf{e}}_1) \mathbf{c} + (\mathbf{b} \cdot \bar{\mathbf{e}}_2) \mathbf{d} = \bar{\mathbf{e}}_2. \quad (1.97)$$

Переходя к компонентам, получаем систему четырех уравнений для нахождения  $\bar{c}_1, \bar{c}_2$  и  $\bar{d}_1, \bar{d}_2$ :

$$\begin{cases} \bar{a}_1 \bar{c}_1 + \bar{a}_2 \bar{d}_1 = 1, \\ \bar{a}_1 \bar{c}_2 + \bar{a}_2 \bar{d}_2 = 0, \\ \bar{b}_1 \bar{c}_1 + \bar{b}_2 \bar{d}_1 = 0, \\ \bar{b}_1 \bar{c}_2 + \bar{b}_2 \bar{d}_2 = 1 \end{cases}, \quad (1.98)$$

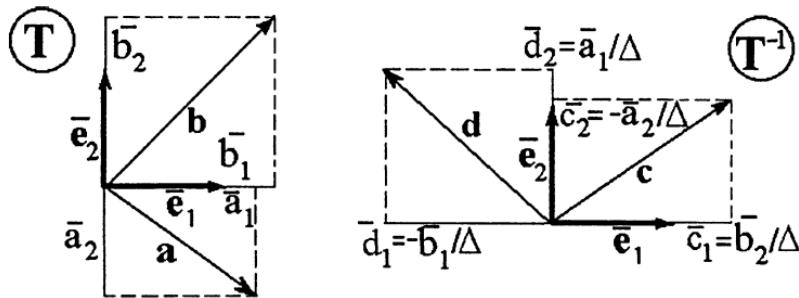


Рис. 1.23. Графическое изображение обратного тензора

решая которую, находим

$$\bar{c}_1 = \bar{b}_2 / \Delta, \quad \bar{c}_2 = -\bar{a}_2 / \Delta, \quad \bar{d}_1 = -\bar{b}_1 / \Delta, \quad \bar{d}_2 = \bar{a}_1 / \Delta, \quad \Delta = \bar{a}_1 \bar{b}_2 - \bar{a}_2 \bar{b}_1. \quad (1.99)$$

Формулы (1.96), (1.97) позволяют графически изобразить тензор  $T^{-1}$ . Для построения его индивидуальных векторов  $c$  и  $d$  необходимо их компоненты выбрать по (1.99), пример такого графического изображения приведен на рис. 1.23.

### 1.3.13. Ортогональный тензор

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.17.** *Ортогональным называют тензор  $T$ , обратный к которому тензор  $T^{-1}$  совпадает с транспонированным  $T^T$ .*

Пусть  $T^{-1}$  имеет вид:

$$T^{-1} = [\bar{e}_1 \bar{c} \bar{e}_2 \bar{d}], \quad (1.100)$$

где компоненты  $\bar{c}_1$ ,  $\bar{c}_2$  и  $\bar{d}_1$ ,  $\bar{d}_2$  вычисляем по (1.99). Но если он совпадает с транспонированным, то эти же компоненты должны удовлетворять уравнениям (1.90), т.е. должны выполняться соотношения:

$$\begin{cases} \bar{a}_1 = \bar{b}_2 / \Delta, & \bar{a}_2 = -\bar{b}_1 / \Delta, \\ \bar{b}_1 = -\bar{a}_2 / \Delta, & \bar{b}_2 = \bar{a}_1 / \Delta \end{cases}, \quad (1.101)$$

относительно компонент  $\bar{a}_1$ ,  $\bar{a}_2$  и  $\bar{b}_1$ ,  $\bar{b}_2$ .

Решение этой системы имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} \bar{a}_1 & \bar{a}_2 \\ \bar{b}_1 & \bar{b}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad (1.102)$$

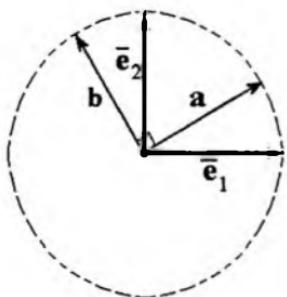


Рис. 1.24. Графическое изображение ортогонального тензора

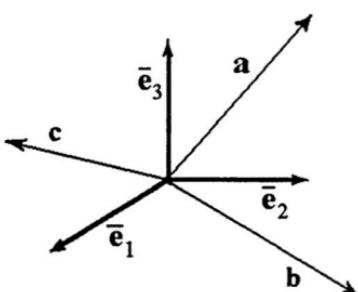


Рис. 1.25. Трехмерный тензор в графическом изображении

где  $\varphi$  – произвольное число.

Таким образом, если тензор  $T$  – ортогональный, то его индивидуальные векторы  $a$  и  $b$  имеют компоненты (1.102), т.е. длина этих векторов – единичная:  $|a| = |b| = 1$ , и они взаимно ортогональны:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \bar{a}_1 \bar{b}_1 + \bar{a}_2 \bar{b}_2 = 0. \quad (1.103)$$

Эти свойства позволяют дать графическое изображение ортогонального тензора  $T$ : все его четыре вектора  $\bar{e}_1$ ,  $a$ ,  $\bar{e}_2$  и  $b$  лежат на единичном круге и являются попарно ортогональными:  $\bar{e}_1 \perp \bar{e}_2$ ,  $a \perp b$  (рис.1.24).

### 1.3.14. Геометрическое определение тензора в трехмерном пространстве

Вернемся теперь к трехмерному пространству.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.18.** Тензором второго ранга  $T$  в трехмерном евклидовом пространстве назовем объект:

$$T = [\bar{e}_1 a_1 \bar{e}_2 a_2 \bar{e}_3 a_3], \quad (1.104)$$

представляющий собой упорядоченную совокупность шести векторов, из которых три  $\bar{e}_1$ ,  $\bar{e}_2$  и  $\bar{e}_3$  – фиксированы, а три другие:  $a_1$ ,  $a_2$  и  $a_3$  – индивидуальны для каждого трехмерного тензора.

Графическое изображение такого тензора  $T$  показано на рис. 1.25, где фиксированные векторы изображены жирными стрелками, а индивидуальные – простыми.

С объектами вида (1.107), очевидно, можно ввести такие же операции, как с двумерными тензорами: сложение двух тензоров и умножение тензора на число

$$\begin{aligned} T + B &= [\bar{e}_1 a_1 \bar{e}_2 a_2 \bar{e}_3 a_3] + [\bar{e}_1 b_1 \bar{e}_2 b_2 \bar{e}_3 b_3] = \\ &= [\bar{e}_1 (a_1 + b_1) \bar{e}_2 (a_2 + b_2) \bar{e}_3 (a_3 + b_3)], \end{aligned} \quad (1.105)$$

$$\varphi T = \varphi[\bar{e}_1 a_1 \bar{e}_2 a_2 \bar{e}_3 a_3] = [\bar{e}_1(\varphi a_1) \bar{e}_2(\varphi a_2) \bar{e}_3(\varphi a_3)],$$

скалярное умножение тензора  $T$  на вектор аналогично (1.67) и (1.68):

$$T \cdot c = [\bar{e}_1 a_1 \bar{e}_2 a_2 \bar{e}_3 a_3] \cdot c = \sum_{\alpha=1}^3 \bar{e}_\alpha (a_\alpha \cdot c),$$

$$c \cdot T = c \cdot [\bar{e}_1 a_1 \bar{e}_2 a_2 \bar{e}_3 a_3] = \sum_{\alpha=1}^3 (c \cdot \bar{e}_\alpha) a_\alpha, \quad (1.106)$$

скалярное умножение тензоров  $T$  и  $B$  аналогично (1.85):

$$T \cdot B = [\bar{e}_1 a_1 \bar{e}_2 a_2 \bar{e}_3 a_3] \cdot [\bar{e}_1 b_1 \bar{e}_2 b_2 \bar{e}_3 b_3] = [\bar{e}_1 c_1 \bar{e}_2 c_2 \bar{e}_3 c_3], \quad (1.107)$$

где

$$c_\alpha = \sum_{\beta=1}^3 (a_\alpha \cdot \bar{e}_\beta) b_\beta; \quad (1.108)$$

а также *двойное скалярное произведение* тензоров:

$$\varphi = T \cdot \cdot B = [\bar{e}_1 a_1 \bar{e}_2 a_2 \bar{e}_3 a_3] \cdot [\bar{e}_1 b_1 \bar{e}_2 b_2 \bar{e}_3 b_3] = \sum_{\alpha, \beta=1}^3 (a_\alpha \cdot \bar{e}_\beta) (b_\beta \cdot \bar{e}_\alpha). \quad (1.109)$$

Компоненты тензора  $T$  в базисе  $\bar{e}_i$  по аналогии с (1.70) вводим следующим образом:

$$\bar{T}_{ij} = \bar{e}_i \cdot T \cdot \bar{e}_j, \quad (1.110)$$

тогда из (1.104) и (1.110) получаем

$$\bar{T}_{ij} = a_i \cdot \bar{e}_j. \quad (1.111)$$

Единичный тензор в трехмерном пространстве по аналогии с (1.82) вводим следующим образом:

$$E = [\bar{e}_1 \bar{e}_1 \bar{e}_2 \bar{e}_2 \bar{e}_3 \bar{e}_3]. \quad (1.112)$$

### 1.3.15. Диады

По аналогии с (1.78) можно определить базисные тензоры  $T_{(ij)}$  и в трехмерном пространстве. Введем для них специальные обозначения:

$$\bar{e}_1 \otimes \bar{e}_j = T_{(1j)} = [\bar{e}_1 \bar{e}_j \bar{e}_2 0 \bar{e}_3 0],$$

$$\bar{e}_2 \otimes \bar{e}_j = T_{(2j)} = [\bar{e}_1 0 \bar{e}_2 \bar{e}_j \bar{e}_3 0], \quad (1.113)$$

$$\bar{e}_3 \otimes \bar{e}_j = T_{(3j)} = [\bar{e}_1 0 \bar{e}_2 0 \bar{e}_3 \bar{e}_j].$$

Знак  $\otimes$  называют знаком *тензорного произведения*.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.19.** Диадным базисом называют набор базисных тензоров, записанный в виде (1.113), а каждый тензор  $\bar{e}_i \otimes \bar{e}_j$  в отдельности называют базисной диадой.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.20.** Операцию, которая сопоставляет векторному базису  $e_i$  диадный базис  $\bar{e}_i \otimes \bar{e}_j$ , определенный по формулам (1.113), называют тензорным произведением базисных векторов.

Поскольку базисные диады являются тензорами, но только специального вида, их можно складывать и умножать на число, однако при этом будет получаться, вообще говоря, уже не новая диада, а какой-то новый тензор, например:

$$\bar{e}_1 \otimes \bar{e}_2 + \bar{e}_2 \otimes \bar{e}_2 = T' = [\bar{e}_1 \bar{e}_2 \bar{e}_2 \bar{e}_2 \bar{e}_3 0],$$

$$\varphi(\bar{e}_2 \otimes \bar{e}_j) = T'' = [\bar{e}_1 0 \bar{e}_2 (\varphi \bar{e}_j) \bar{e}_3 0].$$

Рассмотрим теперь операции скалярного умножения диад.

**ТЕОРЕМА 1.8.** Порядок выполнения операций тензорного и скалярного произведений векторов базиса можно менять местами:

$$(\bar{e}_i \otimes \bar{e}_j) \cdot \bar{e}_k = \bar{e}_i \otimes (\bar{e}_j \cdot \bar{e}_k) = \delta_{jk} \bar{e}_i, \quad (1.114)$$

$$\bar{e}_k \cdot (\bar{e}_i \otimes \bar{e}_j) = (\bar{e}_k \cdot \bar{e}_i) \otimes \bar{e}_j = \delta_{ki} \bar{e}_j.$$

▼ В самом деле, из определения (1.113) и формулы (1.67), обобщенной на трехмерный случай, следует, например, для  $i = 1$ :

$$\begin{aligned} (\bar{e}_1 \otimes \bar{e}_j) \cdot \bar{e}_k &= [\bar{e}_1 \bar{e}_j \bar{e}_2 0 \bar{e}_3 0] \cdot \bar{e}_k = \\ &= \bar{e}_1 (\bar{e}_j \cdot \bar{e}_k) + \bar{e}_2 (0 \cdot \bar{e}_k) + \bar{e}_3 (0 \cdot \bar{e}_k) = \bar{e}_1 \delta_{jk}, \end{aligned} \quad (1.115)$$

и аналогично из (1.68) получаем:

$$\begin{aligned} \bar{e}_i \cdot (\bar{e}_1 \otimes \bar{e}_j) &= \bar{e}_i \cdot [\bar{e}_1 \bar{e}_j \bar{e}_2 0 \bar{e}_3 0] = \\ &= (\bar{e}_i \cdot \bar{e}_1) \bar{e}_j + (\bar{e}_i \cdot \bar{e}_2) 0 + (\bar{e}_i \cdot \bar{e}_3) 0 = \delta_{i1} \bar{e}_j. \end{aligned} \quad (1.116)$$

Для  $i = 2$  и  $i = 3$  доказательство аналогично. ▲

**ТЕОРЕМА 1.9.** Скалярное и двойное скалярное произведения двух диадных базисов вычисляются следующим образом:

$$(\bar{e}_i \otimes \bar{e}_j) \cdot (\bar{e}_k \otimes \bar{e}_l) = \delta_{jk} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_l, \quad (1.117)$$

$$(\bar{e}_i \otimes \bar{e}_j) \cdot (\bar{e}_k \otimes \bar{e}_l) = \delta_{jk} \delta_{il}. \quad (1.118)$$

▼ Для доказательства первого соотношения используем определение (1.85), обобщенное на трехмерный случай, например, для  $i = 1, k = 2$ :

$$\begin{aligned} (\bar{e}_1 \otimes \bar{e}_j) \cdot (\bar{e}_2 \otimes \bar{e}_l) &= [\bar{e}_1 \bar{e}_j \bar{e}_2 0 \bar{e}_3 0] \cdot [\bar{e}_1 0 \bar{e}_2 \bar{e}_l \bar{e}_3 0] = \\ &= [\bar{e}_1 a'_{jl} \bar{e}_2 0 \bar{e}_3 0] = \delta_{2j} \bar{e}_1 \otimes \bar{e}_l, \end{aligned} \quad (1.119)$$

где

$$\mathbf{a}'_{jl} = (\bar{\mathbf{e}}_j \cdot \bar{\mathbf{e}}_l)0 + (\bar{\mathbf{e}}_j \cdot \bar{\mathbf{e}}_2)\bar{\mathbf{e}}_l + (\bar{\mathbf{e}}_j \cdot \bar{\mathbf{e}}_3)0 = \delta_{2j}\bar{\mathbf{e}}_l.$$

Для остальных  $i$  и  $k$  доказательство аналогично.

Соотношение (1.118) доказываем, используя определение (1.109) двойного скалярного произведения тензоров, например, для  $i = 1$ ,  $k = 1$ :

$$(\bar{\mathbf{e}}_1 \otimes \bar{\mathbf{e}}_j) \cdot (\bar{\mathbf{e}}_1 \otimes \bar{\mathbf{e}}_l) = [\bar{\mathbf{e}}_1 \bar{\mathbf{e}}_j \bar{\mathbf{e}}_2 0 \bar{\mathbf{e}}_3 0] \cdot [\bar{\mathbf{e}}_1 \bar{\mathbf{e}}_l \bar{\mathbf{e}}_2 0 \bar{\mathbf{e}}_3 0] = (\bar{\mathbf{e}}_j \cdot \bar{\mathbf{e}}_1)(\bar{\mathbf{e}}_l \cdot \bar{\mathbf{e}}_1) + (\bar{\mathbf{e}}_j \cdot \bar{\mathbf{e}}_2)(0 \cdot \bar{\mathbf{e}}_1) + (\bar{\mathbf{e}}_j \cdot \bar{\mathbf{e}}_3)(0 \cdot \bar{\mathbf{e}}_1) = \delta_{1j}\delta_{1l}, \quad (1.120)$$

и аналогично для остальных  $i$  и  $k$ . ▲

**Теорема 1.10.** *Всякий тензор Т второго ранга можно представить разложением по диадному базису:*

$$\mathbf{T} = \bar{T}^{ij}\bar{\mathbf{e}}_i \otimes \bar{\mathbf{e}}_j, \quad (1.121)$$

где  $\bar{T}^{ij}$  совпадают с  $T_{ij}$ .

▼ Учитывая, что базисные диады  $\bar{\mathbf{e}}_i \otimes \bar{\mathbf{e}}_j$  суть базисные тензоры (1.113), доказательство этой теоремы аналогично приведенному для теоремы 1.7. ▲

Разложение (1.121) поясняет смысл введения диадного базиса: сравнивая (1.121) и (0.4), нетрудно заметить, что диадный базис – это обобщение понятия векторного базиса на случай тензоров второго ранга.

Пусть теперь имеется два вектора  $\mathbf{a} = \bar{a}^i\bar{\mathbf{e}}_i$  и  $\mathbf{b} = \bar{b}^i\bar{\mathbf{e}}_i$ .

**Определение 1.21.** *Диадой векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  называется тензор, образованный суммированием базисных диад с коэффициентами  $\bar{a}^i\bar{b}^j$ :*

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \bar{a}^i\bar{b}^j\bar{\mathbf{e}}_i \otimes \bar{\mathbf{e}}_j. \quad (1.122)$$

Если в (1.122) подставить разложения векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  по базису  $\bar{\mathbf{e}}_i$ , то получим важное следствие о возможности вынесения коэффициентов из-под знака тензорного произведения:

$$\bar{a}^i\bar{b}^j\bar{\mathbf{e}}_i \otimes \bar{\mathbf{e}}_j = (\bar{a}^i\bar{\mathbf{e}}_i) \otimes (\bar{b}^j\bar{\mathbf{e}}_j). \quad (1.123)$$

Теоремы 1.9, 1.10 и формулы (1.122), (1.123) открывают возможность выполнения операций с тензорами в форме (1.121) без использования их явного вида (1.104). При этом от формы (1.121) всегда можно вернуться к (1.104).

Действительно, пусть имеется тензор  $\mathbf{T}$ , представленный в диадном базисе своими компонентами. Сгруппируем представление (1.121) следующим образом:

$$\mathbf{T} = \bar{\mathbf{e}}_1 \otimes \mathbf{a}_1 + \bar{\mathbf{e}}_2 \otimes \mathbf{a}_2 + \bar{\mathbf{e}}_3 \otimes \mathbf{a}_3, \quad (1.124)$$

где векторы  $\mathbf{a}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , определим как

$$\mathbf{a}_1 = \bar{T}^{11}\bar{\mathbf{e}}_1 + \bar{T}^{12}\bar{\mathbf{e}}_2 + \bar{T}^{13}\bar{\mathbf{e}}_3, \quad \mathbf{a}_2 = \bar{T}^{21}\bar{\mathbf{e}}_1 + \bar{T}^{22}\bar{\mathbf{e}}_2 + \bar{T}^{23}\bar{\mathbf{e}}_3,$$

$$\mathbf{a}_3 = \bar{T}^{31}\bar{\mathbf{e}}_1 + \bar{T}^{32}\bar{\mathbf{e}}_2 + \bar{T}^{33}\bar{\mathbf{e}}_3. \quad (1.125)$$

Сравнивая представления (1.124) и (1.104), заключаем, что индивидуальные векторы  $\mathbf{a}_i$  в (1.104) определяются формулами (1.125), а саму символическую запись (1.104) можно понимать как упорядоченную совокупность шести векторов  $\bar{\mathbf{e}}_1, \mathbf{a}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \mathbf{a}_2, \bar{\mathbf{e}}_3, \mathbf{a}_3$ , связанных последовательно операциями:  $\otimes, +, \otimes, +, \otimes$ .

Несложно проверить, что для такого представления (1.124) тензоры действительно складываются и скалярно перемножаются по правилам (1.66), (1.105) и (1.108).

## § 1.4. Алгебра тензорных полей

### 1.4.1. Поле тензора второго ранга

Пусть теперь в каждой точке  $x$  пространства имеется тензор второго ранга  $T$ , меняющийся, вообще говоря, при переходе от одной точки к другой. В этом случае говорят, что определено тензорное поле  $T(x)$ . Из определения 1.18 следует, что в каждой точке  $x$  тензор  $T(x)$ :

- является инвариантным, т.е. не изменяется относительно любых преобразований координат, порождаемых уравнениями (1.4),
- имеет в любом диадном базисе двухиндексные компоненты, например, в декартовом диадном базисе  $\bar{T}^{ij}$  (см. (1.121)).

В каждой точке  $x$  могут быть образованы следующие диадные базисы:

$$\bar{\mathbf{e}}_i \otimes \bar{\mathbf{e}}_j, \quad \mathbf{R}^i \otimes \mathbf{R}^j, \quad \mathbf{R}^i \otimes \mathbf{R}_j, \quad \mathbf{R}_i \otimes \mathbf{R}_j. \quad (1.126)$$

Например, локальный диадный базис  $\mathbf{R}_i \otimes \mathbf{R}_j$  можно образовать суммированием декартова диадного базиса  $\bar{\mathbf{e}}_k \otimes \bar{\mathbf{e}}_l$  с якобиевыми матрицами согласно определению 1.21 и соотношению (1.6):

$$\mathbf{R}_i \otimes \mathbf{R}_j = Q_i^k Q_j^l \bar{\mathbf{e}}_k \otimes \bar{\mathbf{e}}_l. \quad (1.127)$$

Из свойства инвариантности тензора  $T$  вытекает, что при переходе от декартовых координат  $x^i$  к произвольным криволинейным  $X^i$  тензор  $T$  не изменяется, поэтому его можно представить разложением по локальному диадному базису:

$$T = T^{ij} \mathbf{R}_i \otimes \mathbf{R}_j, \quad (1.128)$$

где  $T^{ij}$  называются контравариантными компонентами тензора  $T$ .

Из (1.121), (1.127) и (1.128) следует правило преобразования компонент тензора при переходе из декартова диадного базиса  $\bar{e}_i \otimes \bar{e}_j$  в локальный  $R_i \otimes R_j$  (т.е. при переходе из системы координат  $x^i$  в  $X^i$ ):

$$\bar{T}^{ij} = T^{kl} \bar{Q}_k^i \bar{Q}_l^j, \quad T^{kl} = \bar{T}^{ij} \bar{P}_i^k \bar{P}_j^l. \quad (1.129)$$

*Ковариантными компонентами* тензора  $T_{ij}$  называют его компоненты в базисе  $R^i \otimes R^j$ , они связаны с  $T^{ij}$  с помощью метрической матрицы:

$$T_{ij} = T^{nl} g_{ik} g_{jl}. \quad (1.130)$$

**ТЕОРЕМА 1.11.** Единичный (метрический) тензор  $E$  можно представить следующим образом:

$$E = \bar{e}^i \otimes \bar{e}_i = R^i \otimes R_i = g^{ij} R_i \otimes R_j = g_{ij} R^i \otimes R^j, \quad (1.131)$$

▼ Действительно, используя определения (1.112) и (1.113) для  $E$  и диадного базиса  $\bar{e}_i \otimes \bar{e}_j$ , в силу правила (1.105) сложения тензоров получаем первое равенство в (1.131). В справедливости второго равенства легко убедиться, если подставить вместо  $R_i$  и  $R^i$  выражения (1.6), (1.19) и воспользоваться формулой (1.18). Остальные равенства в (1.131) следуют из (1.19). ▲

Из (1.131) следует, что ковариантные компоненты метрического тензора  $E$  совпадают с матрицей  $g_{ij}$  в базисе  $R^i \otimes R^j$ , а контравариантные – с обратной матрицей  $g^{ij}$ .

Если тензор имеет в какой-либо системе координат нулевые компоненты, то из (1.129) и (1.130) следует, что будут нулевыми и компоненты в любой другой системе координат. Такой тензор называют *нулевым* и обозначают как 0 – нуль-тензор.

#### 1.4.2. Алгебраические операции с тензорными полями

Из определения (1.105) и представления (1.128) следует, что сумма двух тензоров есть тензор, компоненты которого равны сумме компонент этих тензоров в одном и том же диадном базисе:

$$T + B = (T^{ij} + B^{ij}) R_i \otimes R_j. \quad (1.132)$$

С помощью теорем 1.8, 1.9 и соотношений (1.127) легко доказать следующие правила скалярного умножения локальных диадных базисов:

$$(R_i \otimes R_j) \cdot R_k = R_i \otimes (R_j \cdot R_k) = g_{jk} R_i,$$

$$(R_i \otimes R_j) \cdot (R_k \otimes R_l) = g_{jk} R_i \otimes R_l, \quad (1.133)$$

$$(R_i \otimes R_j) \cdots (R_k \otimes R_l) = g_{jk} g_{il}.$$

Пусть имеется тензорное  $T(x)$  и векторное  $a(x)$  поля, тогда для каждой точки  $x$  операцию (1.106) скалярного умножения  $a$  на  $T$  согласно (1.133) можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{T} &= a^i \mathbf{R}_i \cdot T^{jk} \mathbf{R}_j \otimes \mathbf{R}_k = a^i T^{jk} \mathbf{R}_i \cdot \mathbf{R}_j \otimes \mathbf{R}_k = \\ &= a^i T^{jk} g_{ij} \mathbf{R}_k = a^i T^k_i \mathbf{R}_k = c^k \mathbf{R}_k = \mathbf{c}. \end{aligned} \quad (1.134)$$

Эта операция образует вектор  $\mathbf{c}$  с компонентами  $c^k = a^i T^k_i$  в локальном базисе  $\mathbf{R}_k$ .

В соотношениях (1.134) мы воспользовались тем, что сами компоненты тензора  $T^{jk}$  при фиксированных  $j$  и  $k$  являются скалярными объектами, и их можно переставлять в любое место, в данном случае их удобно перенести к  $a^i$ , чтобы явным образом появилось скалярное произведение  $\mathbf{R}_i \cdot \mathbf{R}_j = g_{ij}$ . Этот прием широко будет использоваться в дальнейшем. Заметим, что порядок следования векторов, связанных какими-либо операциями, вообще говоря, менять нельзя.

Скалярное и двойное скалярное умножение двух тензорных полей согласно (1.107), (1.109) и (1.133) можно представить в виде:

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{B} = T^{ij} \mathbf{R}_i \otimes \mathbf{R}_j \cdot B^{kl} \mathbf{R}_k \otimes \mathbf{R}_l = T^i_k B^{kl} \mathbf{R}_i \otimes \mathbf{R}_l, \quad (1.135)$$

$$\mathbf{T} \cdot \cdot \mathbf{B} = T^{ij} \mathbf{R}_i \otimes \mathbf{R}_j \cdot B^{kl} \mathbf{R}_k \otimes \mathbf{R}_l = T^{ij} \mathbf{R}_i \cdot g_{jk} B^{kl} \mathbf{R}_l = T_{lk} B^{kl}. \quad (1.136)$$

Скалярное умножение векторов или тензоров называют также операцией *свертки*.

Имеют место следующие правила перестановки порядка скалярного умножения трех тензоров второго ранга (см. упр. 1.4.3):

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{T}) \cdot \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \cdot \cdot \mathbf{T} = \mathbf{T} \cdot \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}. \quad (1.137)$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.22.** Векторным произведением вектора на тензор второго ранга (слева и справа соответственно) называют тензоры следующего вида:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{T} = a_i \mathbf{R}^i \times T_{jm} \mathbf{R}^j \otimes \mathbf{R}^m = \frac{1}{\sqrt{g}} \epsilon^{ijk} a_i T_{jm} \mathbf{R}_k \otimes \mathbf{R}^m, \quad (1.138)$$

$$\mathbf{T} \times \mathbf{a} = T_{jm} \mathbf{R}^j \otimes \mathbf{R}^m \times a_i \mathbf{R}^i = \frac{1}{\sqrt{g}} \epsilon^{mik} T_{jm} a_i \mathbf{R}^j \otimes \mathbf{R}_k.$$

Транспонированный тензор  $\mathbf{A}^T$  в трехмерном евклидовом пространстве вводят аналогично определению 1.14:

$$\mathbf{A} = A^{ij} \mathbf{R}_i \otimes \mathbf{R}_j, \quad \mathbf{A}^T = A^{ij} \mathbf{R}_j \otimes \mathbf{R}_i = A^{ji} \mathbf{R}_i \otimes \mathbf{R}_j. \quad (1.139)$$

Следствием (1.134) и (1.139) являются следующие многократно используемые соотношения с тензорами второго ранга:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{a}, \quad (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T. \quad (1.140)$$

*Квадратом* тензора, *кубом* тензора и вообще  $n$ -ой степенью тензора  $\mathbf{A}$  называют следующие тензоры:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}^2, \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}^3, \quad \underbrace{\mathbf{A} \cdots \mathbf{A}}_n = \mathbf{A}^n. \quad (1.141)$$

Из (1.122) и (1.127) следует, что векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  всегда можно разложить по любому диадному базису, т.е. представить в виде суммы диад векторов базиса:

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \bar{a}^i \bar{\mathbf{e}}_i \otimes \bar{b}^j \bar{\mathbf{e}}_j = a^i b^j \mathbf{R}_i \otimes \mathbf{R}_j = a^i b_j \mathbf{R}^i \otimes \mathbf{R}^j. \quad (1.142)$$

### 1.4.3. Детерминант тензора

Ранее в §1.1 было введено понятие детерминанта (определителя) матрицы  $A^i_j$  по формуле (1.8).

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.23.** *Детерминантом тензора  $\mathbf{T}$  называют детерминант его смешанных компонент, взятых в каком-либо базисе:*

$$\det \mathbf{T} = \det (T^i_j). \quad (1.143)$$

Детерминант тензора, определенный таким образом, не зависит от того, в каком именно базисе взяты компоненты  $T^i_j$ . В самом деле, пусть имеется две системы координат  $X^i$  и  $X'^i$  с локальными базисами  $\mathbf{R}_i$  и  $\mathbf{R}'_i$ , а  $T^i_j$  и  $T'^i_j$  – компоненты тензора  $\mathbf{T}$  в этих базисах:

$$\mathbf{T} = T^i_j \mathbf{R}_i \otimes \mathbf{R}^j = T'^i_j \mathbf{R}'_i \otimes \mathbf{R}'^j, \quad (1.144)$$

тогда, используя правила преобразования компонент тензора (см. упр.1.4.6), получаем

$$\begin{aligned} \det (T'^i_j) &= \det (P^i_k Q^l_j T'^k_l) = \\ &= \det (P^i_k) \det (Q^l_j) \det (T'^k_l) = \det (T'^k_l) \end{aligned} \quad (1.145)$$

– свойство инвариантности детерминанта, т.е. независимости его от системы координат (здесь использованы результаты упр.1.1.6, 1.1.7).

Используя теперь формулу (1.39), выражение для детерминанта тензора можно представить с помощью символов Леви-Чивиты:

$$\det \mathbf{T} = \frac{1}{6} \epsilon_{ijk} \epsilon^{mnl} T^i_m T^j_n T^k_l. \quad (1.146)$$

Алгебраическим дополнением для компоненты  $T^i_m$  называют матрицу  $A_i{}^m$  вида:

$$A_i{}^m = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \epsilon^{mn} T_n^j T_l^k. \quad (1.147)$$

Вычислим произведение  $T_\alpha^i$  и  $A_i{}^m$ :

$$A_i{}^m T_\alpha^i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \epsilon^{mn} T_\alpha^i T_n^j T_l^k. \quad (1.148)$$

Если  $\alpha \neq m$ , то по свойствам символа  $\epsilon^{mn}$  индекс  $\alpha$  должен совпадать с  $n$  или  $l$ . Пусть, например,  $\alpha = n$ , тогда в (1.148) возникает свертка  $\epsilon_{ijk}$  с симметричной матрицей  $T_\alpha^i T_\alpha^j$ , что по (1.37) неминуемо даст нуль:

$$\epsilon_{ijk} T_\alpha^i T_\alpha^j T_l^k = 0. \quad (1.149)$$

То же самое получаем при  $\alpha = l$ . Следовательно, произведение (1.148) при  $\alpha \neq m$  всегда равно нулю.

Вычислим теперь произведение (1.148) при  $\alpha = m$ , преобразуя его следующим образом:

$$A_i{}^\alpha T_\alpha^i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \epsilon^{\alpha\beta\gamma} T_\alpha^i (T_\beta^j T_\gamma^k - T_\gamma^j T_\beta^k), \quad \alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha. \quad (1.150)$$

Заметим, что по греческим индексам суммирования нет, и для  $\alpha, \beta, \gamma$  всегда соответствует четная подстановка индексов из  $\{1, 2, 3\}$ . Тогда  $\epsilon^{\alpha\beta\gamma} = 1$ , и можно расписать явным образом и свертку с другим символом Леви-Чивиты. В результате получим:

$$\begin{aligned} A_i{}^\alpha T_\alpha^i &= \frac{1}{2} \left( T_\alpha^\alpha (T_\beta^\beta T_\gamma^\gamma - T_\gamma^\beta T_\beta^\gamma) - T_\beta^\alpha T_\gamma^\beta + T_\gamma^\alpha T_\beta^\beta \right) + \\ &\quad + T_\alpha^\beta (T_\beta^\gamma T_\gamma^\alpha - T_\gamma^\gamma T_\beta^\alpha) - T_\beta^\alpha T_\gamma^\gamma + T_\gamma^\alpha T_\beta^\gamma + \\ &\quad + T_\alpha^\gamma (T_\beta^\alpha T_\gamma^\beta - T_\gamma^\alpha T_\beta^\beta) - T_\beta^\alpha T_\gamma^\alpha + T_\gamma^\alpha T_\beta^\alpha \Big) = \\ &= T_\alpha^\alpha (T_\beta^\beta T_\gamma^\gamma - T_\gamma^\beta T_\beta^\gamma) + T_\gamma^\beta (T_\beta^\gamma T_\alpha^\alpha - T_\gamma^\alpha T_\beta^\alpha) + \\ &\quad + T_\alpha^\gamma (T_\beta^\alpha T_\gamma^\beta - T_\gamma^\alpha T_\beta^\beta) = \det(T_j^i). \end{aligned} \quad (1.151)$$

Сравнивая формулы (1.151) и (1.8), нетрудно увидеть, что при любых значениях  $\alpha = 1, 2, 3$  выражения (1.151) действительно всегда образуют детерминант матрицы  $\det(T_j^i)$ .

Таким образом, объединяя оба случая  $\alpha = m$  и  $\alpha \neq m$ , получаем свойство алгебраического дополнения:

$$(A_i{}^m T_\alpha^i) = \delta_\alpha^m \det T. \quad (1.152)$$

Если тензор  $T$  является *неособенным*, т.е.  $\det T \neq 0$ , то для него существует обратный тензор  $T^{-1}$  (определенный по (1.96)):

$$T^{-1} \cdot T = E, \quad (1.153)$$

или в компонентной записи

$$(T^{-1})_{ij} R^i \otimes R^j \cdot T^{kl} R_k \otimes R_l = R^k \otimes R_k, \quad (1.154)$$

$$(T^{-1})_{ij} T^{jl} R^i \otimes R_l = R^k \otimes R_k,$$

отсюда

$$(T^{-1})_{ij} T^{jl} = \delta_i^l. \quad (1.155)$$

С помощью свойства (1.152) алгебраического дополнения могут быть вычислены компоненты обратного тензора (см. упр.1.4.1).

Используя результаты упр.1.4.1, можно показать, что для обратной матрицы  $g^{ij}$  имеет место формула:

$$g^{ij} = \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial g_{ij}}, \quad (1.156)$$

где частная производная  $\partial g / \partial g_{ij}$  совпадает с алгебраическим дополнением элемента  $g_{ij}$ .

Обращение скалярного произведения тензоров производится следующим образом (см. упр.1.4.3):

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}. \quad (1.157)$$

#### 1.4.4. Тензорные признаки

Пусть имеются компоненты  $T^{ij}$  некоторого объекта. Для того чтобы установить, являются ли они компонентами тензора, можно попытаться проверить выполнимость тензорного закона (1.129) при переходе из одной системы координат в другую. Такой способ называется *прямым тензорным признаком*.

Однако можно поступить по-другому, если компоненты  $T^{ij}$  участвуют в каком-либо алгебраическом тензорном уравнении с другими компонентами  $B^{ij}$ ,  $C^{ij}$  и др., про которые известно, что они являются компонентами тензора, например:

$$T^{ij} + B^{ij} = C^{ij},$$

или

$$T^{ij} B_j^k = C^{ik}. \quad (1.158)$$

Тогда без непосредственной проверки можно утверждать, что  $T^{ij}$  тоже являются компонентами тензора. Такой способ называется *обратным тензорным признаком*.

Справедливость обратного тензорного признака для операций сложения очевидна, проверим операцию свертки. Используя (1.129), перейдем в (1.158) в новую систему координат:

$$T^{ij} \bar{P}_l^k \bar{Q}_j^m \bar{B}^l_m = \bar{P}_s^i \bar{P}_p^k \bar{C}^{sp}. \quad (1.159)$$

Домножая на  $\bar{Q}_i^n \bar{Q}_k^t$ , получаем:

$$\bar{Q}_i^n \bar{Q}_k^t \bar{P}_l^k \bar{Q}_j^m T^{ij} \bar{B}^l_m = \bar{Q}_i^n \bar{Q}_j^m T^{ij} \bar{B}^t_m = \bar{C}^{nt}. \quad (1.160)$$

Отсюда находим, что действительно при переходе в новую систему координат:

$$\bar{T}^{nm} = \bar{Q}_i^n \bar{Q}_j^m T^{ij}, \quad (1.161)$$

таким образом,  $T^{ij}$  преобразуются по тензорному закону.

### Упражнения к § 1.4.

**Упражнение 1.4.1.** Показать, что если тензор  $\mathbf{T}$  имеет компоненты

$$\mathbf{T} = T_i^j \mathbf{R}^i \otimes \mathbf{R}_j,$$

то компоненты обратного тензора  $\mathbf{T}^{-1}$  имеют следующий вид:

$$\mathbf{T}^{-1} = (T^{-1})_i^j \mathbf{R}^i \otimes \mathbf{R}_j, \quad (T^{-1})_i^j = \frac{1}{2\det \mathbf{T}} \epsilon_{imn} \epsilon^{jsp} T_s^m T_p^n.$$

**Упражнение 1.4.2.** Показать, что

$$\det(\mathbf{T}^{-1}) = (\det \mathbf{T})^{-1}.$$

**Упражнение 1.4.3.** Доказать формулы (1.137), (1.140) и (1.157).

**Упражнение 1.4.4.** Показать, что для произвольного тензора  $\mathbf{T}$  второго ранга и вектора  $\mathbf{a}$  имеет место соотношение:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{a} \cdot \mathbf{T}.$$

**Упражнение 1.4.5.** Показать, что всякая диада  $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$  является особым тензором:

$$\det(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = 0.$$

**Упражнение 1.4.6.** Показать, что при переходе из одной криволинейной системы координат  $X^i$  в другую  $X'^i$  компоненты тензора  $\mathbf{T}$  преобразуются следующим образом:

$$T'_{ij} = P_i^k P_j^l T_{kl}, \quad T'^j_i = P_i^k Q_l^j T_k^l, \quad T'^{ij} = Q_k^i Q_l^j T^{kl}.$$

**Упражнение 1.4.7.** Показать, что векторное произведение тензора на вектор можно представить в виде:

$$\mathbf{T} \times \mathbf{a} = \sqrt{g} \epsilon_{ijk} T^{mj} a^k \mathbf{R}_m \otimes \mathbf{R}^i.$$

## § 1.5. Собственные значения тензора

### 1.5.1. Определение собственных значений тензора

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.24.** Собственными значениями  $\lambda_\alpha$ ,  $\lambda^\alpha$  и собственными векторами  $\overset{\circ}{\mathbf{e}}_\alpha$ ,  $\overset{\circ}{\mathbf{e}}^\alpha$  тензора второго ранга  $\mathbf{A}$  называют такие числа (вообще говоря, комплексные) и тройки векторов (вообще говоря, комплексно-значных), которые обеспечивают выполнение условий:

$$\mathbf{A} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{e}}_\alpha = \lambda_\alpha \overset{\circ}{\mathbf{e}}_\alpha, \quad \overset{\circ}{\mathbf{e}}^\alpha \cdot \mathbf{A} = \lambda^\alpha \overset{\circ}{\mathbf{e}}^\alpha, \quad \alpha = 1, 2, 3. \quad (1.162)$$

Если известны компоненты  $A^i_j$  тензора  $\mathbf{A}$  в некотором базисе  $\mathbf{R}_i$ :  $\mathbf{A} = A^i_j \mathbf{R}_i \otimes \mathbf{R}^j$ , а левый и правый собственный базисы  $\overset{\circ}{\mathbf{e}}^\alpha$ ,  $\overset{\circ}{\mathbf{e}}_\alpha$  представлены в виде разложения по этому базису:

$$\overset{\circ}{\mathbf{e}}_\alpha = \overset{\circ}{P}^i_\alpha \mathbf{R}_i, \quad \overset{\circ}{\mathbf{e}}^\alpha = \overset{\circ}{Q}^\alpha_i \mathbf{R}^i, \quad (1.163)$$

то уравнения (1.162) можно записать в компонентном виде:

$$(A^i_j - \lambda_\alpha \delta^i_j) \overset{\circ}{P}^j_\alpha = 0, \quad (A^i_j - \lambda^\alpha \delta^i_j) \overset{\circ}{Q}^\alpha_i = 0, \quad (1.164)$$

и представляют собой системы линейных уравнений для определения  $\overset{\circ}{P}^j_\alpha$  и  $\overset{\circ}{Q}^\alpha_i$  при фиксированном  $\alpha$ . Ненулевые решения этих систем существуют только при тех  $\lambda_\alpha$ ,  $\lambda^\alpha$ , которые обеспечивают равенство нулю определителей:

$$\det (A^i_j - \lambda_\alpha \delta^i_j) = 0, \quad \det (A^i_j - \lambda^\alpha \delta^i_j) = 0. \quad (1.165)$$

Поскольку  $\lambda_\alpha$  и  $\lambda^\alpha$  охватывают все множество корней этих уравнений, то, очевидно, что

$$\lambda^\alpha = \lambda_\alpha, \quad (1.166)$$

а единственное уравнение в (1.165) представляет собой уравнение третьей степени относительно  $\lambda_\alpha$ :

$$\mathcal{P}(\lambda_\alpha) = \det(A - \lambda_\alpha E) = \det(A^i_j - \lambda_\alpha \delta^i_j) = 0 \quad (1.167)$$

и называется *характеристическим уравнением*.

Так как  $(A - \lambda_\alpha E)$  - тензор, то его собственные значения  $\lambda_\alpha$  не зависят от того, в какой системе координат они определены, т.е. из (1.167) следует, в частности, что

$$\det(\bar{A}_{ij} - \lambda_\alpha \delta_{ij}) = 0, \quad \det(A^{ij} - \lambda_\alpha g^{ij}) = 0, \quad (1.168)$$

еще одно доказательство этого факта будет дано в п.4.5.3.

### 1.5.2. Свойства собственных векторов

Собственные векторы  $e_\alpha$  и  $e^\alpha$  определяются неоднозначно, действительно, если  $\overset{\circ}{e}_\alpha$  - собственный вектор, то  $k\overset{\circ}{e}_\alpha$  - тоже собственный вектор ( $k \neq 0$ ). Для устранения неоднозначности обычно собственные векторы нормируют:

$$\overset{\circ}{e}_\alpha \cdot \overset{\circ}{e}^\alpha = 1, \quad \alpha = 1, 2, 3. \quad (1.169)$$

Собственные векторы  $\overset{\circ}{e}_\alpha$  и  $\overset{\circ}{e}^\beta$  - взаимно ортогональны. В самом деле, умножая первое уравнение в (1.162) на  $\overset{\circ}{e}^\beta$  слева, а второе - справа на  $\overset{\circ}{e}_\beta$ :

$$\overset{\circ}{e}^\beta \cdot A \cdot \overset{\circ}{e}_\alpha = \lambda_\alpha \overset{\circ}{e}^\beta \cdot \overset{\circ}{e}_\alpha, \quad \overset{\circ}{e}^\beta \cdot A \cdot \overset{\circ}{e}_\alpha = \lambda_\beta \overset{\circ}{e}^\beta \cdot \overset{\circ}{e}_\alpha, \quad (1.170)$$

получаем, что должно выполняться соотношение

$$(\lambda_\alpha - \lambda_\beta) \overset{\circ}{e}^\beta \cdot \overset{\circ}{e}_\alpha = 0. \quad (1.171)$$

Откуда при некратных корнях  $\lambda_\alpha \neq \lambda_\beta$  следует, что

$$\overset{\circ}{e}^\beta \cdot \overset{\circ}{e}_\alpha = \delta_\alpha^\beta. \quad (1.172)$$

### 1.5.3. Разложение тензора по собственному базису

Тензор  $A$  может быть представлен разложением по собственному базису:

$$A = \overset{\circ}{A}{}^i_j \overset{\circ}{e}_i \otimes \overset{\circ}{e}{}^j. \quad (1.173)$$

Умножая (1.173) слева и справа на  $\overset{\circ}{e}{}^\alpha$  и  $\overset{\circ}{e}_\beta$ , на основании (1.170) и (1.172) получаем, что матрица  $\overset{\circ}{A}{}^i_j$  - диагональная, и ее ненулевые значения совпадают с собственными значениями:

$$\overset{\circ}{A}{}^\alpha_\beta = \lambda_\alpha \delta_\beta^\alpha, \quad A = \sum_{\alpha=1}^3 \lambda_\alpha \overset{\circ}{e}_\alpha \otimes \overset{\circ}{e}{}^\alpha. \quad (1.174)$$

### 1.5.4. Разложение обратного тензора по собственному базису

Пусть теперь  $A$  – неособенный тензор:  $\det A \neq 0$ , тогда для него имеет место формула (1.153):

$$A^{-1} \cdot A = E. \quad (1.175)$$

Умножим слева и справа это соотношение на собственный вектор  $\overset{\circ}{e}_\beta$ :

$$A^{-1} \cdot A \cdot \overset{\circ}{e}_\beta = E \cdot \overset{\circ}{e}_\beta = \overset{\circ}{e}_\beta,$$

а затем подставим сюда вместо  $A$  его разложение (1.174) по собственному базису:

$$A^{-1} \cdot \sum_{\alpha=1}^3 \lambda_\alpha \overset{\circ}{e}_\alpha \otimes \overset{\circ}{e}{}^\alpha \cdot \overset{\circ}{e}_\beta = A^{-1} \cdot \sum_{\alpha=1}^3 \lambda_\alpha \delta_\beta^\alpha \overset{\circ}{e}_\alpha = A^{-1} \cdot \lambda_\beta \overset{\circ}{e}_\beta = \overset{\circ}{e}_\beta. \quad (1.176)$$

Здесь мы использовали свойство ортонормированности (1.172).

Перенося  $\lambda_\beta$  в правую часть, получаем окончательно:

$$A^{-1} \cdot \overset{\circ}{e}_\beta = \lambda_\beta^{-1} \overset{\circ}{e}_\beta. \quad (1.177)$$

Из этого выражения следует, что собственные векторы обратного тензора  $A^{-1}$  совпадают с собственными векторами исходного тензора  $A$ , а собственными значениями у  $A^{-1}$  являются  $\lambda_\beta^{-1}$ . Тогда тензор  $A^{-1}$  также можно представить разложением по собственному базису в виде:

$$A^{-1} = \sum_{\alpha=1}^3 \lambda_\alpha^{-1} \overset{\circ}{e}_\alpha \otimes \overset{\circ}{e}{}^\alpha. \quad (1.178)$$

### 1.5.5. Разложение тензорных степеней по собственному базису

Рассмотрим теперь квадрат тензора  $A^2$  (1.141):

$$A^2 = A \cdot A = \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 \lambda_\alpha \overset{\circ}{e}_\alpha \otimes \overset{\circ}{e}^\alpha \cdot \lambda_\beta \overset{\circ}{e}_\beta \otimes \overset{\circ}{e}^\beta = \sum_{\alpha=1}^3 \lambda_\alpha^2 \overset{\circ}{e}_\alpha \otimes \overset{\circ}{e}^\alpha, \quad (1.179)$$

т.е. собственными значениями тензора  $A^2$  являются  $\lambda_\alpha^2$ , а собственные векторы совпадают с  $\overset{\circ}{e}_\alpha$ . Очевидно, что имеет место следующая теорема.

**ТЕОРЕМА 1.12.** Для любого целого  $n$ , как отрицательного, так и положительного, имеет место разложение  $n$ -ой степени для тензора второго ранга:

$$A^n = \sum_{\alpha=1}^3 \lambda_\alpha^n \overset{\circ}{e}_\alpha \otimes \overset{\circ}{e}^\alpha. \quad (1.180)$$

## § 1.6. Симметричные, кососимметричные и ортогональные тензоры

### 1.6.1. Симметричные и положительно-определенные тензоры

Согласно определению 1.15, тензор  $T$  называется *симметричным*, если

$$T = T^T. \quad (1.181)$$

Для симметричного тензора матрица его компонент в любом диадном базисе является симметричной:

$$T = T^{ij} R_i \otimes R_j, \quad T^{ij} = T^{ji}, \quad T_{ij} = T_{ji}. \quad (1.182)$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.25.** Положительно определенным называется тензор  $T$ , для которого

$$\mathbf{a} \cdot T \cdot \mathbf{a} = T^{ij} a_i a_j > 0 \quad (1.183)$$

для любого  $\mathbf{a} = a_i R^i \neq 0$ .

Для симметричного тензора  $T$  результат скалярного умножения на вектор  $\mathbf{a}$  слева и справа одинаков (см. (1.140)):

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{T}^T = \mathbf{a} \cdot \mathbf{T}, \quad (1.184)$$

в частности, если  $\mathbf{a} = \overset{\circ}{\mathbf{e}}_\alpha$  - левый собственный вектор, то для симметричного тензора он, очевидно, совпадает с правым:  $\overset{\circ}{\mathbf{e}}_\alpha = \overset{\circ}{\mathbf{e}}^\alpha$  (ср. с (1.162)). Таким образом, существует единственный собственный триэдр  $\overset{\circ}{\mathbf{e}}_\alpha$  всякого симметричного тензора, являющийся ортонормированным, в силу (1.172):

$$\overset{\circ}{\mathbf{e}}_\alpha \cdot \overset{\circ}{\mathbf{e}}_\beta = \delta_{\alpha\beta}. \quad (1.185)$$

**ТЕОРЕМА 1.13.** Собственные значения  $\lambda_\alpha$  симметричного тензора  $T$  всегда вещественны.

▼ Действительно, если бы  $\lambda_1$ , например, был бы комплексным:

$$\lambda_1 = \lambda'_1 + i\lambda''_1,$$

где  $i = \sqrt{-1}$ , то ему соответствовал бы комплексно-сопряженный корень  $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1 = \lambda'_1 - i\lambda''_1$ , а им соответствовали бы комплексно-сопряженные собственные векторы:

$$\overset{\circ}{\mathbf{e}}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\overset{\circ}{\mathbf{e}}'_1 + i\overset{\circ}{\mathbf{e}}''_1), \quad \overset{\circ}{\mathbf{e}}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\overset{\circ}{\mathbf{e}}'_1 - i\overset{\circ}{\mathbf{e}}''_1), \quad |\overset{\circ}{\mathbf{e}}'_1| = 1, \quad (1.186)$$

скалярно перемножая которые, получаем, что  $\overset{\circ}{\mathbf{e}}_1 \cdot \overset{\circ}{\mathbf{e}}_2 = 1$ , что противоречит взаимной ортогональности собственных векторов:  $\overset{\circ}{\mathbf{e}}_1 \cdot \overset{\circ}{\mathbf{e}}_2 = 0$ .

▲

Симметричный тензор  $T$ , подобно (1.174), можно представить разложенным по собственному базису:

$$T = T^{ij} \mathbf{R}_i \otimes \mathbf{R}_j = \sum_{\alpha=1}^3 \lambda_\alpha \overset{\circ}{\mathbf{e}}_\alpha \otimes \overset{\circ}{\mathbf{e}}_\alpha, \quad (1.187)$$

где компоненты в собственном и локальном базисах связаны следующим образом (см. (1.163)):

$$T^{ij} = \sum_{\alpha=1}^3 \lambda_\alpha \overset{\circ}{P}^i{}_\alpha \overset{\circ}{P}^j{}_\alpha. \quad (1.188)$$

**ТЕОРЕМА 1.14.** Для симметричного положительно-определенного тензора  $T$  все собственные значения положительны:

$$\lambda_\alpha > 0. \quad (1.189)$$

▼ Действительно, если  $T$  - положительно определен, то из (1.183) и (1.188) следует, что должно выполняться:

$$\sum_{\alpha=1}^3 \lambda_{\alpha} (a'_{\alpha})^2 > 0, \quad a'_{\alpha} = \overset{\circ}{P}{}^i{}_{\alpha} a_i \quad (1.190)$$

для всех  $a'_{\alpha}$ , а это возможно только при  $\lambda_{\alpha} > 0$ . ▲

Со всяким симметричным тензором  $T$  можно связать центральную поверхность второго порядка, называемую *тензорной поверхностью*. Для этого по компонентам  $T_{ij}$  составляется квадратичная форма:

$$\frac{1}{2} T_{ij} X^i X^j = f = \text{const}, \quad (1.191)$$

которая в трехмерном пространстве координат  $X^i$  образует либо эллипсоид, либо гиперболоид, либо их вырождение.

Подставляя (1.188) в (1.189), получим, что квадратичную форму можно привести к диагональному виду:

$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{2} g_{ik} g_{jm} T^{km} X^i X^j = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^3 \lambda_{\alpha} \overset{\circ}{P}{}^k{}_{\alpha} \overset{\circ}{P}{}^m{}_{\alpha} g_{ik} g_{jm} X^i X^j = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^3 \lambda_{\alpha} (X'_{\alpha})^2, \end{aligned} \quad (1.192)$$

если ввести новые - *собственные координаты*:

$$X'_{\alpha} = \overset{\circ}{P}{}_{i\alpha} X^i, \quad \overset{\circ}{P}{}_{i\alpha} = \overset{\circ}{P}{}^k{}_{\alpha} g_{ik}. \quad (1.193)$$

Если  $T$  - положительно-определеный, то в силу (1.189) все собственные значения положительны, и поверхность, описываемая уравнением

$$f = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^3 \lambda_{\alpha} (X'_{\alpha})^2 = \text{const}, \quad (1.194)$$

представляет собой эллипсоид, главные направления которого совпадают с направлениями осей собственных координат  $X'_{\alpha}$ .

Если все собственные значения совпадают:  $\lambda_{\alpha} = \lambda$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$ , то уравнение (1.194) является уравнением сферы, для которого все направления - главные.

Симметричные тензоры второго ранга  $A$  и  $B$  называются *соосными*, если их собственные базисы  $\overset{\circ}{e}_{\alpha}$  совпадают

$$A = \sum_{\alpha=1}^3 A_{\alpha} \overset{\circ}{e}_{\alpha} \otimes \overset{\circ}{e}_{\alpha}, \quad B = \sum_{\alpha=1}^3 B_{\alpha} \overset{\circ}{e}_{\alpha} \otimes \overset{\circ}{e}_{\alpha}, \quad (1.195)$$

при этом собственные значения  $A_\alpha$  и  $B_\alpha$  различны; если же  $A_\alpha = B_\alpha$ , то тензоры  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  совпадают  $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ .

Скалярное произведение соосных тензоров  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  образует симметричный тензор

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}, \quad (1.196)$$

поэтому это скалярное произведение - коммутативно, т.е. переставимо:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}. \quad (1.197)$$

### 1.6.2. Кососимметричные тензоры

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.26.** Тензор  $\Omega$  называют *кососимметричным*, если

$$\Omega = -\Omega^T. \quad (1.198)$$

Всякий произвольный тензор  $\mathbf{A}$  всегда можно представить в виде суммы симметричного и кососимметричного тензоров:

$$\mathbf{A} = \mathbf{T} + \Omega, \quad (1.199)$$

где

$$\mathbf{T} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T), \quad \Omega = \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T).$$

Обозначим компоненты кососимметричного тензора  $\Omega$  в базисе  $\mathbf{R}_i \otimes \mathbf{R}_j$  как

$$\Omega = \Omega^{ij} \mathbf{R}_i \otimes \mathbf{R}_j, \quad (1.200)$$

тогда

$$\Omega^{ij} = -\Omega^{ji}. \quad (1.201)$$

Из определения следует, что диагональные компоненты  $\Omega^{ii}$  равны нулю:  $\Omega^{\alpha\alpha} = 0$ , и тензор  $\Omega$  имеет только 3 независимые компоненты, поэтому на основе всякого кососимметричного тензора можно построить вектор  $\omega$ , называемый вектором, сопутствующим кососимметричному тензору (или *аксиальным* вектором):

$$\omega = \omega_i \mathbf{R}^i, \quad \omega_i = -\frac{1}{2}\sqrt{g}\epsilon_{ijk}\Omega^{jk}. \quad (1.202)$$

**ТЕОРЕМА 1.15.** Кососимметричный тензор и сопутствующий ему вектор связаны следующим соотношением:

$$\Omega = \omega \times \mathbf{E}. \quad (1.203)$$

▼ Действительно, по определению  $\omega$ :

$$\begin{aligned}\omega \times \mathbf{E} &= \omega \times \mathbf{R}_n \otimes \mathbf{R}^n = \frac{1}{\sqrt{g}} \epsilon^{ijk} \omega_j g_{nk} \mathbf{R}_i \otimes \mathbf{R}^n = \\ &= -\frac{\sqrt{g}}{2\sqrt{g}} \epsilon^{ijk} \epsilon_{j,sp} \Omega^{sp} \mathbf{R}_i \otimes \mathbf{R}_k = \frac{1}{2} \epsilon^{jik} \epsilon_{j,sp} \Omega^{sp} \mathbf{R}_i \otimes \mathbf{R}_k = \\ &= \Omega^{ik} \mathbf{R}_i \otimes \mathbf{R}_k = \Omega.\end{aligned}\quad (1.204)$$

Здесь использовано определение векторного произведения (1.33) и свойства (1.36). ▲

Найдем собственные значения кососимметричного тензора. Свойство кососимметричности (1.201), означает, что его компоненты  $\Omega^{ij}$  образуют следующую матрицу:

$$\Omega^{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \Omega^{12} & -\Omega^{13} \\ -\Omega^{12} & 0 & \Omega^{23} \\ \Omega^{13} & -\Omega^{23} & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.205)$$

Составляя характеристическое уравнение (1.167):

$$\mathcal{P}(\lambda) = \text{gdet } (\Omega^{ij} - \lambda g^{ij}) = -\lambda(\lambda^2 + \omega^2) = 0, \quad (1.206)$$

находим собственные значения:

$$\lambda_1 = -i\omega, \quad \lambda_2 = i\omega, \quad \lambda_3 = 0,$$

$$\omega^2 = 4 \left( \sum_{\alpha=1}^3 \omega_\alpha^2 g^{\alpha\alpha} + 2(\omega_1 \omega_2 g^{12} + \omega_2 \omega_3 g^{23} + \omega_3 \omega_1 g^{13}) \right). \quad (1.207)$$

### 1.6.3. Ортогональные тензоры

Согласно определению 1.17, тензор  $\mathbf{O}$  называется *ортогональным*, если

$$\mathbf{O}^T = \mathbf{O}^{-1}. \quad (1.208)$$

Для ортогонального тензора всегда выполнено соотношение:

$$\mathbf{O}^T \cdot \mathbf{O} = \mathbf{O} \cdot \mathbf{O}^T = \mathbf{E}. \quad (1.209)$$

Введем компоненты тензора  $\mathbf{O}$  в локальном диадном базисе:

$$\mathbf{O} = O^i{}_j \mathbf{R}_i \otimes \mathbf{R}^j, \quad (1.210)$$

тогда

$$\begin{aligned}\mathbf{O} \cdot \mathbf{O}^T &= O^i_j O_k^l \mathbf{R}_i \otimes \mathbf{R}_l \otimes \mathbf{R}_k = O^i_j O_k^j \mathbf{R}_i \otimes \mathbf{R}_k = \\ &= \mathbf{E} = \delta^i_k \mathbf{R}_i \otimes \mathbf{R}^k,\end{aligned}\quad (1.211)$$

или

$$O^i_j O_k^j = O^{ij} O_{kj} = \bar{O}^{ij} \bar{O}_{kj} = \delta^i_k. \quad (1.212)$$

Из (1.212) следует, что на девять компонент тензора  $\mathbf{O}$  наложены шесть связей, следовательно, произвольный ортогональный тензор имеет не более трех независимых компонент.

Определитель ортогонального тензора равен  $\pm 1$ , так как

$$1 = \det(\mathbf{E}) = \det(\mathbf{O}^T \cdot \mathbf{O}) = \det(\mathbf{O}^T) \cdot \det(\mathbf{O}) = (\det(\mathbf{O}))^2, \quad (1.213)$$

откуда

$$\det(\mathbf{O}) = \pm 1. \quad (1.214)$$

Если выбрать некоторый базисный триэдр  $\mathbf{R}_i$  и применить к нему преобразование с помощью ортогонального тензора  $\mathbf{O}$ , то получим новый базисный триэдр  $\mathbf{R}'_i$ :

$$\mathbf{R}'_i = \mathbf{R}_i \cdot \mathbf{O} = \mathbf{O}^T \cdot \mathbf{R}_i, \quad (1.215)$$

который обладает следующими свойствами.

- Метрические матрицы  $g'_{ij}$  и  $g_{ij}$  совпадают. В самом деле,

$$g'_{ij} = \mathbf{R}'_i \cdot \mathbf{R}'_j = \mathbf{R}_i \cdot \mathbf{O} \cdot \mathbf{O}^T \cdot \mathbf{R}_j = \mathbf{R}_i \cdot \mathbf{R}_j = g_{ij}. \quad (1.216)$$

- Углы  $\psi_{ij}$  между базисными векторами  $\mathbf{R}_i$  и соответствующие углы  $\psi'_{ij}$  между  $\mathbf{R}'_i$  одинаковы. Действительно, по (1.32) и (1.14):

$$\cos \psi'_{\alpha\beta} = \frac{\mathbf{R}'_\alpha \cdot \mathbf{R}'_\beta}{|\mathbf{R}'_\alpha| |\mathbf{R}'_\beta|} = \frac{g'_{\alpha\beta}}{\sqrt{g'_{\alpha\alpha} g'_{\beta\beta}}} = \frac{g_{\alpha\beta}}{\sqrt{g_{\alpha\alpha} g_{\beta\beta}}} = \cos \psi_{\alpha\beta}. \quad (1.217)$$

- Длины векторов не изменяются:

$$|\mathbf{R}'_\alpha| = \sqrt{g'_{\alpha\alpha}} = \sqrt{g_{\alpha\alpha}} = |\mathbf{R}_\alpha|. \quad (1.218)$$

Это означает, что преобразование (1.215) произвольного триэдра, осуществляемое с помощью ортогонального тензора, происходит "жестким" образом - без изменения углов и длин, т.е. это преобразование поворота вокруг некоторой оси с вектором  $\mathbf{c}_3$ , которое может сопровождаться зеркальным отражением относительно некоторой плоскости, если  $\det \mathbf{O} = -1$ . Если же  $\det \mathbf{O} = 1$ , то происходит собственно поворот.

Выберем два вектора  $\mathbf{c}_1$  и  $\mathbf{c}_2$  в плоскости, ортогональной вектору  $\mathbf{c}_3$ , для определенности положим  $|\mathbf{c}_\alpha| = 1$ . Поскольку тензор  $\mathbf{O}$  осуществляет поворот вокруг оси с вектором  $\mathbf{c}_3$ , то  $\mathbf{c}_3$  не изменяется:

$$\mathbf{c}'_3 = \mathbf{O}^T \cdot \mathbf{c}_3 = \mathbf{c}_3, \quad (1.219)$$

а векторы  $\mathbf{c}_1$  и  $\mathbf{c}_2$  поворачиваются в своей плоскости "жестким образом" на некоторый угол  $\varphi$ :

$$\mathbf{c}'_\alpha = \mathbf{O}^T \cdot \mathbf{c}_\alpha, \quad (1.220)$$

так что

$$\mathbf{c}'_1 = \mathbf{c}_1 \cos \varphi + \mathbf{c}_2 \sin \varphi, \quad \mathbf{c}'_2 = -\mathbf{c}_1 \sin \varphi + \mathbf{c}_2 \cos \varphi. \quad (1.221)$$

Очевидно, что  $\mathbf{c}'_\alpha$  также будут ортонормированы.

Тогда тензор  $\mathbf{O}$  можно представить в виде

$$\mathbf{O} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{O} = \sum_{\alpha=1}^3 \mathbf{c}_\alpha \otimes \mathbf{c}_\alpha \cdot \mathbf{O} = \sum_{\alpha=1}^3 \mathbf{c}_\alpha \otimes \mathbf{c}'_\alpha. \quad (1.222)$$

Подставляя сюда (1.221), получаем:

$$\begin{aligned} \mathbf{O} &= \mathbf{c}_1 \otimes (\mathbf{c}_1 \cos \varphi + \mathbf{c}_2 \sin \varphi) + \mathbf{c}_2 \otimes (-\mathbf{c}_1 \sin \varphi + \mathbf{c}_2 \cos \varphi) + \mathbf{c}_3 \otimes \mathbf{c}_3 = \\ &= (\mathbf{c}_1 \otimes \mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2 \otimes \mathbf{c}_2) \cos \varphi + (\mathbf{c}_1 \otimes \mathbf{c}_2 - \mathbf{c}_2 \otimes \mathbf{c}_1) \sin \varphi + \mathbf{c}_3 \otimes \mathbf{c}_3 = \\ &= \mathbf{E} \cos \varphi + \mathbf{c}_3 \otimes \mathbf{c}_3 (1 - \cos \varphi) - \mathbf{E} \times \mathbf{c}_3 \sin \varphi. \end{aligned} \quad (1.223)$$

Здесь мы воспользовались свойствами векторного произведения, приведенными в упр. 1.2.7, 1.2.8.

Таким образом, всякий ортогональный тензор  $\mathbf{O}$  всегда можно представить в виде (1.223).

Вычислим теперь собственные значения ортогонального тензора. Из (1.223) следует, что в базисе  $\mathbf{c}_\alpha$  тензор  $\mathbf{O}$  имеет компоненты:

$$(\overset{\circ}{O}{}^i{}_j) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.224)$$

Составляя характеристическое уравнение (1.167), получаем

$$\mathcal{P}(\lambda) = \det (\overset{\circ}{O}{}^i{}_j - \lambda \delta^i_j) = (1 - \lambda)(\lambda^2 - 2\lambda \cos \varphi + 1) = 0, \quad (1.225)$$

откуда

$$\lambda_3 = 1, \quad \lambda_1 = e^{-i\varphi}, \quad \lambda_2 = e^{i\varphi}, \quad (1.226)$$

таким образом, доказана следующая теорема.

**Теорема 1.16.** Ортогональный тензор всегда имеет одно действительное собственное значение, равное 1, и два, вообще говоря, комплексных.

Из (1.219) следует, что собственный вектор, соответствующий значению  $\lambda = 1$ , совпадает с  $\mathbf{c}_3$ , т.е.  $\overset{\circ}{\mathbf{e}}_3 = \overset{\circ}{\mathbf{e}}^3 = \mathbf{c}_3$ . Два других собственных вектора являются, вообще говоря, комплексными, их находим, записывая разложение (1.174) тензора  $\mathbf{O}$  по собственному базису:

$$\mathbf{O} = e^{-i\varphi} \overset{\circ}{\mathbf{e}}_1 \otimes \overset{\circ}{\mathbf{e}}^1 + e^{i\varphi} \overset{\circ}{\mathbf{e}}_2 \otimes \overset{\circ}{\mathbf{e}}^2 + \mathbf{c}_3 \otimes \mathbf{c}_3 = (\overset{\circ}{\mathbf{e}}_1 \otimes \overset{\circ}{\mathbf{e}}^1 + \overset{\circ}{\mathbf{e}}_2 \otimes \overset{\circ}{\mathbf{e}}^2) \cos \varphi - i(\overset{\circ}{\mathbf{e}}_1 \otimes \overset{\circ}{\mathbf{e}}^1 - \overset{\circ}{\mathbf{e}}_2 \otimes \overset{\circ}{\mathbf{e}}^2) \sin \varphi + \mathbf{c}_3 \otimes \mathbf{c}_3. \quad (1.227)$$

Сравнивая (1.227) и (1.223), находим

$$\overset{\circ}{\mathbf{e}}_1 = \overset{\circ}{\mathbf{e}}^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{c}_1 - i\mathbf{c}_2), \quad \overset{\circ}{\mathbf{e}}_2 = \overset{\circ}{\mathbf{e}}^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{c}_1 + i\mathbf{c}_2). \quad (1.228)$$

### Упражнения к § 1.6.

**Упражнение 1.6.1.** Показать, что если в двойном скалярном произведении двух тензоров  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  один из тензоров симметричен, то второй тоже можно симметризовать:

$$\mathbf{A} \cdot \cdot \mathbf{B} = \mathbf{T} \cdot \cdot \mathbf{B}, \quad \text{и} \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}^T, \quad \text{где} \quad \mathbf{T} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T).$$

**Упражнение 1.6.2.** Показать, что для кососимметричного тензора из (1.201) следует  $\Omega_{ij} = -\Omega_{ji}$ , но для смешанных компонент, вообще говоря, это соотношение не имеет места.

**Упражнение 1.6.3.** Показать, что скалярное умножение кососимметричного тензора  $\Omega$  на произвольный вектор  $\mathbf{a}$  можно представить в виде:

$$\Omega \cdot \mathbf{a} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}, \quad \mathbf{a} \cdot \Omega = \mathbf{a} \times \boldsymbol{\omega}.$$

**Упражнение 1.6.4.** Показать, что соотношение (1.203) для кососимметричного тензора можно также представить в виде:

$$\Omega = \mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{E}.$$

**Упражнение 1.6.5.** Показать, что собственные векторы  $\overset{\circ}{\mathbf{e}}_\alpha$ , соответствующие собственным значениям  $\lambda_\alpha$  кососимметричного тензора  $\Omega$ , могут быть представлены в виде:

$$\overset{\circ}{\mathbf{e}}_3 = \overset{\circ}{\mathbf{e}}^3 = \frac{\boldsymbol{\omega}}{|\boldsymbol{\omega}|}, \quad \overset{\circ}{\mathbf{e}}_1 = \overset{\circ}{\mathbf{e}}^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{c}_1 - i\mathbf{c}_2), \quad \overset{\circ}{\mathbf{e}}_2 = \overset{\circ}{\mathbf{e}}^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{c}_1 + i\mathbf{c}_2),$$

где  $\mathbf{c}_1$  и  $\mathbf{c}_2$  - некоторые вещественные нормированные векторы  $|\mathbf{c}_\alpha| = 1$ .

**Упражнение 1.6.6.** Показать, что всякий кососимметричный тензор  $\Omega$  является особым, т.е.  $\det(\Omega) = 0$ .

**Упражнение 1.6.7.** Показать, что если два векторных базиса  $\mathbf{R}_i$  и  $\mathbf{R}'_i$  связаны с помощью ортогонального тензора  $\mathbf{Q}$ :

$$\mathbf{R}'_i = \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{R}_i,$$

то тензор  $\mathbf{Q}$  можно представить в виде тензорного произведения векторов базиса - исходного  $\mathbf{R}_i$  и конечного  $\mathbf{R}'^i$ , полученного ортогональным преобразованием:  $\mathbf{Q} = \mathbf{R}_i \otimes \mathbf{R}'^i$ .

**Упражнение 1.6.8.** Показать, что если имеются два ортонормированных базиса  $\mathbf{c}'_\alpha$  и  $\mathbf{c}_\alpha$ , связанных соотношениями:

$$\mathbf{c}'_1 = \mathbf{c}_1 \cos \phi + \mathbf{c}_2 \sin \phi, \quad \mathbf{c}'_2 = -\mathbf{c}_1 \sin \phi + \mathbf{c}_2 \cos \phi, \quad \mathbf{c}'_3 = \mathbf{e}_3, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi,$$

то эти два базиса также можно связать с помощью некоторого ортогонального тензора  $\mathbf{Q}$ :  $\mathbf{c}'_\alpha = \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{c}_\alpha$ . Найти компоненты этого тензора в базисе  $\mathbf{c}_\alpha$ .

## § 1.7. Физические компоненты тензоров

### 1.7.1. Ортонормированный базис

В ортогональных системах координат  $OX^k$  метрическая матрица является диагональной:

$$g_{ij} = \mathbf{R}_i \cdot \mathbf{R}_j = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ g_{\alpha\alpha}, & i = j = \alpha, \end{cases}, \quad \text{т.е. } g_{ij} = \begin{pmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ 0 & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & g_{33} \end{pmatrix}. \quad (1.229)$$

Введем обозначения для ее компонент:

$$\sqrt{g_{\alpha\alpha}} = H_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad (1.230)$$

где  $H_\alpha$  называют *параметрами Ламе*.

Определитель  $g$  в ортогональных координатах имеет вид:

$$g = \det(g_{ij}) = (H_1 H_2 H_3)^2. \quad (1.231)$$

Обратная матрица  $g^{ij}$  тоже является диагональной, и ее коэффициенты вычисляются следующим образом:

$$\sqrt{g^{\alpha\alpha}} = 1/H_\alpha = 1/\sqrt{g_{\alpha\alpha}}. \quad (1.232)$$

Введем единичные векторы локальных базисов  $\mathbf{e}_\alpha$  и  $\mathbf{e}^\alpha$ :

$$\mathbf{e}_\alpha = \mathbf{R}_\alpha / |\mathbf{R}_\alpha| = \mathbf{R}_\alpha / \sqrt{g_{\alpha\alpha}}, \quad \mathbf{e}^\alpha = \mathbf{R}^\alpha / |\mathbf{R}^\alpha| = \mathbf{R}^\alpha / \sqrt{g_{\alpha\alpha}}, \quad (1.233)$$

где обозначены длины векторов базиса

$$\begin{aligned} |\mathbf{R}_\alpha| &= (\mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{R}_\alpha)^{1/2} = (g_{\alpha\alpha})^{1/2} = H_\alpha, \\ |\mathbf{R}^\alpha| &= (\mathbf{R}^\alpha \cdot \mathbf{R}^\alpha)^{1/2} = (g^{\alpha\alpha})^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{g_{\alpha\alpha}}} = \frac{1}{H_\alpha}. \end{aligned} \quad (1.234)$$

В силу

$$\mathbf{e}_\alpha = \frac{\mathbf{R}_\alpha}{\sqrt{g_{\alpha\alpha}}} = \frac{g_{\alpha\alpha}\mathbf{R}^\alpha}{\sqrt{g_{\alpha\alpha}}} = \sqrt{g_{\alpha\alpha}}\mathbf{R}^\alpha = \mathbf{e}^\alpha, \quad (1.235)$$

получаем, что единичные векторы базиса  $\mathbf{e}_\alpha$  и  $\mathbf{e}^\alpha$  совпадают.

Очевидно также, что  $\mathbf{e}_\alpha$  - ортогональны между собой:

$$\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta = \frac{\mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{R}_\beta}{\sqrt{g_{\alpha\alpha}g_{\beta\beta}}} = 0, \quad \alpha \neq \beta, \quad (1.236)$$

т.е. базис  $\mathbf{e}_\alpha$  является *ортонормированным*.

Векторы базиса  $\mathbf{e}_\alpha$  направлены по нормали к координатным поверхностям  $X^\alpha = \text{const}$  и по касательным к координатным линиям  $X^\alpha$  в сторону их возрастания.

## 1.7.2. Компоненты тензоров в ортонормированном базисе

Произвольные вектор  $\mathbf{a}$  и тензор  $T$  можно представить в ортонормированном базисе следующим образом:

$$\mathbf{a} = a^i \mathbf{R}_i = \sum_{\alpha=1}^3 a^\alpha \sqrt{g_{\alpha\alpha}} \mathbf{e}_\alpha = a_\Phi^i \mathbf{e}_i = a_i \mathbf{R}^i = \sum_{\alpha=1}^3 \frac{a_\alpha}{\sqrt{g_{\alpha\alpha}}} \mathbf{e}^\alpha = a_{\Phi i} \mathbf{e}^i, \quad (1.237)$$

$$\begin{aligned} T &= T^{ij} \mathbf{R}_i \otimes \mathbf{R}_j = \sum_{\alpha=1, \beta=1}^3 T^{\alpha\beta} \mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}_\beta \sqrt{g_{\alpha\alpha}} \sqrt{g_{\beta\beta}} = T_\Phi^{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = \\ &= T_{\Phi j} e^i \otimes e^k = T_{\Phi j}^i e_i \otimes e^j. \end{aligned}$$

Здесь введены компоненты вектора  $a_\Phi^i$ ,  $a_{\Phi i}$  и тензора  $T_\Phi^{ij}$ ,  $T_{\Phi i j}$ ,  $T_{\Phi j}^i$  в ортонормированном базисе  $\mathbf{e}_i$ :

$$a_\Phi^\alpha = a^\alpha \sqrt{g_{\alpha\alpha}}, \quad a_{\Phi\alpha} = \frac{a_\alpha}{\sqrt{g_{\alpha\alpha}}}, \quad (1.238)$$

$$T_\Phi^{\alpha\beta} = T^{\alpha\beta} \sqrt{g_{\alpha\alpha}} \sqrt{g_{\beta\beta}}, \quad T_{\Phi\alpha\beta} = \frac{T_{\alpha\beta}}{\sqrt{g_{\alpha\alpha}} \sqrt{g_{\beta\beta}}}, \quad T_{\Phi\beta}^\alpha = T_\beta^\alpha \sqrt{\frac{g_{\alpha\alpha}}{g_{\beta\beta}}},$$

или с использованием параметров Ламе:

$$a_\Phi^\alpha = a^\alpha H_\alpha, \quad a_{\Phi\alpha} = \frac{a_\alpha}{H_\alpha}, \quad T_\Phi^{\alpha\beta} = T^{\alpha\beta} H_\alpha H_\beta, \quad T_{\Phi\alpha\beta} = \frac{T_{\alpha\beta}}{H_\alpha H_\beta}. \quad (1.239)$$

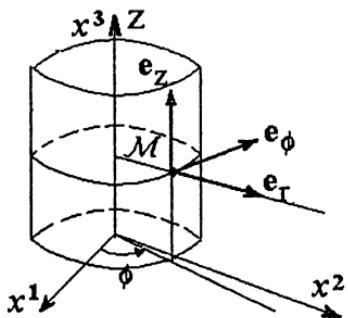


Рис. 1.26. Ортонормированный базис в цилиндрической системе координат

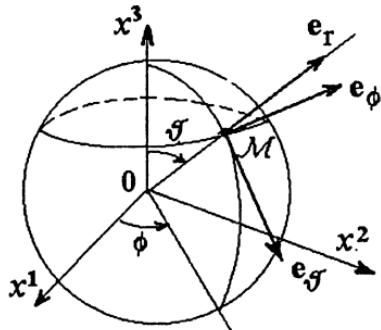


Рис. 1.27. Ортонормированный базис в сферической системе координат

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.27.** Компоненты тензора  $T_\Phi^{ij}$  и вектора  $a_\Phi^i$  в ортонормированном локальном базисе  $\mathbf{e}_i$  называются физическими.

Из (1.238) следует, что так же, как и в декартовом базисе  $\bar{\mathbf{e}}_i$ , все компоненты  $T_\Phi^{ij}$ ,  $T_{\Phi i j}$ ,  $T_{\Phi j}^i$  совпадают.

### Упражнения к § 1.7.

**Упражнение 1.7.1.** Показать, что для цилиндрической системы координат:

$$H_1 = 1, \quad H_2 = r, \quad H_3 = 1,$$

а для сферической:

$$H_1 = 1, \quad H_2 = r, \quad H_3 = r \sin \vartheta.$$

**Упражнение 1.7.2.** Показать, что для цилиндрической системы координат (см. упр. 1.1.11, 1.1.14) ортонормированный базис  $\mathbf{e}_\alpha$  имеет следующий вид:

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_r = \cos \phi \bar{\mathbf{e}}_1 + \sin \phi \bar{\mathbf{e}}_2, \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_\phi = -\sin \phi \bar{\mathbf{e}}_1 + \cos \phi \bar{\mathbf{e}}_2, \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_z,$$

причем в каждой точке  $M$  вектор  $\mathbf{e}_r$  направлен вдоль радиальной полупрямой, соединяющей ось  $Oz$  и точку  $M$ , вектор  $\mathbf{e}_\phi$  – по окружности вокруг оси  $Oz$ , а  $\mathbf{e}_z$  – вдоль прямой, параллельной  $Oz$  (см. рис. 1.26).

**Упражнение 1.7.3.** Показать, что для сферической системы координат (см. упр. 1.1.12, 1.1.13 и 1.1.15) ортонормированный базис  $\mathbf{e}_\alpha$  имеет следующий вид:

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_r = \sin \vartheta \cos \phi \bar{\mathbf{e}}_1 + \sin \vartheta \sin \phi \bar{\mathbf{e}}_2 + \cos \vartheta \bar{\mathbf{e}}_3,$$

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_2 &= \mathbf{e}_\vartheta = \cos \vartheta \cos \phi \bar{\mathbf{e}}_1 + \cos \vartheta \sin \phi \bar{\mathbf{e}}_2 - \sin \vartheta \bar{\mathbf{e}}_3, \\ \mathbf{e}_3 &= \mathbf{e}_\phi = -\sin \phi \bar{\mathbf{e}}_1 + \cos \phi \bar{\mathbf{e}}_2, \end{aligned}$$

причем в каждой точке  $\mathcal{M}$  вектор  $\mathbf{e}_r$  направлен вдоль радиальной полупрямой, исходящей из начала координат, вектор  $\mathbf{e}_\vartheta$  – по касательной к меридиану, а  $\mathbf{e}_\phi$  – по касательной к параллели (см. рис. 1.27).

## § 1.8. Тензоры высших рангов

### 1.8.1. Геометрическое определение тензора $n$ -го ранга

Кроме рассмотренных тензоров нулевого (скаляры), первого (векторы) и второго рангов, "геометрическим" способом, т.е. в форме (1.104), можно ввести тензоры произвольного  $n$ -го ранга (где  $n$  – натуральное число).

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.28.** *Тензором  $n$ -ого ранга  ${}^n\Omega$  в трехмерном евклидовом пространстве назовем объект*

$${}^n\Omega = [\bar{\mathbf{e}}_1 {}^{n-1}\Omega_1 \bar{\mathbf{e}}_2 {}^{n-1}\Omega_2 \bar{\mathbf{e}}_3 {}^{n-1}\Omega_3], \quad n \geq 2, \quad (1.240)$$

*представляющий собой упорядоченную совокупность трех фиксированных векторов базиса  $\bar{\mathbf{e}}_i$  и трех тензоров  $(n-1)$ -го ранга  ${}^{n-1}\Omega_i$ , индивидуальных для каждого тензора  ${}^n\Omega$ .*

Это определение, очевидно, является рекуррентным: тензор  $n$ -го ранга определяют через тензоры  $(n-1)$ -го ранга. Из (1.240) при  $n=2$  получаем определение (1.104) тензора второго ранга. При  $n=3$  получаем тензор третьего ранга:

$${}^3\Omega = [\bar{\mathbf{e}}_1 \Omega_1 \bar{\mathbf{e}}_2 \Omega_2 \bar{\mathbf{e}}_3 \Omega_3], \quad (1.241)$$

где  $\Omega_i$  – тензоры второго ранга.

Операции сложения и умножения на число для тензоров (1.240) вводим аналогично (1.105):

$$\begin{aligned} {}^n\Omega + {}^nT &= [\bar{\mathbf{e}}^i {}^{n-1}\Omega_i] + [\bar{\mathbf{e}}^i {}^{n-1}T_i] = [\bar{\mathbf{e}}^i ({}^{n-1}\Omega_i + {}^{n-1}T_i)] \equiv {}^nS, \\ \varphi {}^n\Omega &= \varphi [\bar{\mathbf{e}}^i {}^{n-1}\Omega_i] = [\bar{\mathbf{e}}^i (\varphi {}^{n-1}\Omega_i)]. \end{aligned} \quad (1.242)$$

Базисные тензоры также введем рекуррентным способом, используя знак тензорного произведения  $\otimes$ . Для  $n=3$  имеем:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{e}}_1 \otimes \bar{\mathbf{e}}_i \otimes \bar{\mathbf{e}}_j &= {}^3T_{(1ij)} = [\bar{\mathbf{e}}_1 T_{(ij)} \bar{\mathbf{e}}_2 0 \bar{\mathbf{e}}_3 0], \\ \bar{\mathbf{e}}_2 \otimes \bar{\mathbf{e}}_i \otimes \bar{\mathbf{e}}_j &= {}^3T_{(2ij)} = [\bar{\mathbf{e}}_1 0 \bar{\mathbf{e}}_2 T_{(ij)} \bar{\mathbf{e}}_3 0], \\ \bar{\mathbf{e}}_3 \otimes \bar{\mathbf{e}}_i \otimes \bar{\mathbf{e}}_j &= {}^3T_{(3ij)} = [\bar{\mathbf{e}}_1 0 \bar{\mathbf{e}}_2 0 \bar{\mathbf{e}}_3 T_{(ij)}]. \end{aligned} \quad (1.243)$$

Здесь  $T_{(ij)}$  – базисные тензоры (1.113) второго ранга, а  $0$  – это нулевой тензор второго ранга.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.29.** Набор (1.243) базисных тензоров третьего ранга называют *триадным базисом*.

Каждая базисная триада  $\bar{e}_k \otimes \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j$  при фиксированных  $k, i, j$ , как и всякий тензор третьего ранга, представляет собой совокупность 27 векторов.

Продолжая построение (1.243) рекуррентным способом, приходим к определению базисных тензоров  $n$ -го ранга, которые обозначим следующим образом:

$$\bar{e}_1 \otimes \bar{e}_{i_2} \otimes \dots \otimes \bar{e}_{i_n} = [\bar{e}_1^{n-1} T_{(i_2 \dots i_n)} \bar{e}_2^{n-1} 0 \bar{e}_3^{n-1} 0],$$

$$\bar{e}_2 \otimes \bar{e}_{i_2} \otimes \dots \otimes \bar{e}_{i_n} = [\bar{e}_1^{n-1} 0 \bar{e}_2^{n-1} T_{(i_2 \dots i_n)} \bar{e}_3^{n-1} 0], \quad (1.244)$$

$$\bar{e}_3 \otimes \bar{e}_{i_2} \otimes \dots \otimes \bar{e}_{i_n} = [\bar{e}_1^{n-1} 0 \bar{e}_2^{n-1} 0 \bar{e}_3^{n-1} T_{(i_2 \dots i_n)}].$$

Здесь  $T_{(i_2 \dots i_n)}$  – базисные тензоры  $(n - 1)$ -го ранга,  $0$  – нуль-тензор  $(n - 1)$ -го ранга.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.30.** Набор базисных тензоров (1.244) называют *полиадным базисом*, а сами тензоры  $\bar{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \bar{e}_{i_n}$  при фиксированных  $i_1 \dots i_n$  – *базисными полиадами*.

Имеет место аналог теоремы 1.7 и 1.10: всякий тензор  $n$ -го ранга  ${}^n\Omega$  можно разложить по полиадному базису:

$${}^n\Omega = \bar{\Omega}^{i_1 \dots i_n} \bar{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \bar{e}_{i_n}, \quad (1.245)$$

где  $\bar{\Omega}^{i_1 \dots i_n}$  – компоненты тензора в полиадном базисе.

Поскольку базисные полиады являются тензорами  $n$ -го ранга, то их можно складывать и умножать на число. Кроме того для них можно ввести обобщенную операцию скалярного произведения.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.31.** Скалярным  $k$ -кратным произведением двух базисных полиад  $n$ -го и  $m$ -го рангов называют базисную полиаду  $(m + n - 2k)$ -го ранга:

$$(\bar{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \bar{e}_{i_n}) \underbrace{\dots}_{k} (\bar{e}_{j_1} \otimes \dots \otimes \bar{e}_{j_m}) = \bar{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \bar{e}_{i_{n-k}} \otimes \bar{e}_{j_{k+1}} \otimes \dots \otimes \bar{e}_{j_m} \delta_{i_n j_1} \delta_{i_{n-1} j_2} \dots \delta_{i_{n-k+1} j_{n+k}}, \quad (1.246)$$

причем  $1 \leq k \leq n$  и  $k \leq m$ .

Заметим, что если бы мы также, как и в п.1.3.14, ввели скалярное произведение сначала для объектов (1.240), то формула (1.246) представляла бы собой уже теорему, обобщающую теоремы 1.8 и 1.9 (см. упр. 1.8.9).

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.32.** Тензорным произведением базисных полидад  $n$ -го и  $m$ -го рангов называют базисную полиаду  $(n+m)$ -го ранга:

$$(\bar{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \bar{e}_{i_n}) \otimes (\bar{e}_{i_{n+1}} \otimes \dots \otimes \bar{e}_{i_{n+m}}) = \bar{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \bar{e}_{i_{n+m}}. \quad (1.247)$$

### 1.8.2. Поле тензора $n$ -го ранга

Пусть теперь в каждой точке  $x$  трехмерного пространства определен тензор  $n$ -го ранга  ${}^n\Omega(x)$ .

По определению тензор  $n$ -го ранга является инвариантным объектом, тогда его можно представить разложением по локальному полидальному базису:

$${}^n\Omega = \Omega^{i_1 \dots i_n} R_{i_1} \otimes R_{i_2} \otimes \dots \otimes R_{i_n}, \quad n \geq 1, \quad (1.248)$$

где  $\Omega^{i_1 \dots i_n}$  - компоненты тензора  $n$ -го ранга в локальном полидальном базисе  $R_{i_1} \otimes \dots \otimes R_{i_n}$ .

Компоненты тензора  ${}^n\Omega$  при переходе из декартовой системы координат  $x^i$  в криволинейную систему  $X^i$  преобразуются следующим образом:

$$\Omega^{i_1 \dots i_n} = \bar{P}_{j_1}^{i_1} \dots \bar{P}_{j_n}^{i_n} \bar{\Omega}^{j_1 \dots j_n}, \quad (1.249)$$

а при переходе из криволинейной системы  $X^i$  в другую криволинейную  $X'^i$  таким образом:

$$\Omega^{i_1 \dots i_k}_{i_{k+1} \dots i_n} = P_{j_1}^{i_1} \dots P_{j_k}^{i_k} Q^{j_{k+1}}_{i_{k+1}} \dots Q^{j_n}_{i_n} \Omega'^{j_1 \dots j_k}_{j_{k+1} \dots j_n}. \quad (1.250)$$

Примером тензора третьего ранга является тензор Леви-Чивиты, определяемый как

$$\epsilon = \sqrt{g} \epsilon_{ijk} R^i \otimes R^j \otimes R^k = \frac{1}{\sqrt{g}} \epsilon^{ijk} R_i \otimes R_j \otimes R_k. \quad (1.251)$$

Заметим, что сами символы Леви-Чивиты  $\epsilon_{ijk}$ ,  $\epsilon^{ijk}$  не являются компонентами тензора, т.к. не преобразуются по тензорному закону (1.250).

Примером тензора четвертого ранга является единичный тензор четвертого ранга  $\Delta$ , определяемый как

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{2} (R_i \otimes R^l \otimes R^i \otimes R_l + R_i \otimes R^l \otimes R_l \otimes R^i) = \\ &= \Delta^{ijkl} R_i \otimes R_j \otimes R_k \otimes R_l. \end{aligned} \quad (1.252)$$

Компоненты этого тензора в ковариантном *тетрадном* базисе имеют вид:

$$\Delta^{ijkl} = \frac{1}{2}(g^{ik}g^{jl} + g^{il}g^{jk}). \quad (1.253)$$

### 1.8.3. Транспонирование тензора $n$ -го ранга

Обобщением операции транспонирования (1.139) на случай тензора  $n$ -го ранга является введение объекта

$${}^n\Omega^{(m_1 \dots m_n)} = \Omega^{i_1 \dots i_n} R_{i_{m_1}} \otimes R_{i_{m_2}} \otimes \dots \otimes R_{i_{m_n}}, \quad (1.254)$$

$$m_1 \dots m_n \in \{1, \dots, n\}, \quad i_1 \dots i_n \in \{1, 2, 3\},$$

где  $(m_1 \dots m_j \dots m_n)$  – некоторая подстановка. Индекс  $m_j$  в этой подстановке указывает на то, что вектор базиса  $R_{i_{m_j}}$  находится на  $j$ -ом месте в полиаде

$$R_{i_{m_1}} \otimes \dots R_{i_{m_j}} \dots \otimes R_{i_{m_n}}.$$

Таким образом, для тензора  $n$ -го ранга существует  $n!$  транспонированных тензоров.

Перенумеровав индексы у диадных векторов  $R_{i_{m_j}}$  в (1.254) так, чтобы эти векторы нумеровались по возрастающей, получим альтернативное представление транспонированного тензора  $n$ -го ранга:

$${}^n\Omega^{(m_1 \dots m_n)} = \Omega^{i_{w_1} \dots i_{w_n}} R_{i_1} \otimes R_{i_2} \otimes \dots \otimes R_{i_n}, \quad (1.255)$$

где  $(w_1 \dots w_j \dots w_n) \in \{1 \dots n\}$  – обратная к  $(m_1 \dots m_j \dots m_n)$  подстановка (поэтому для нее используем букву  $w$ , похожую на перевернутую  $m$ ). Число  $w_j$  в этой подстановке указывает на то, что индекс  $i_{w_j}$  компоненты тензора  ${}^n\Omega$  находится на  $j$ -ом месте, т.е.

$$\Omega^{i_{w_1} \dots i_{w_j} \dots i_{w_n}}.$$

Найти обратную подстановку можно, например, записав подстановку в матричном виде, поменяв затем верхнюю и нижнюю строки и переставив столбцы так, чтобы в верхней строке получился ряд  $1 \dots n$ :

$$\begin{aligned} & \left( \begin{array}{ccccc} 1 & \dots & j & \dots & n \\ m_1 & \dots & m_j & \dots & m_n \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccccc} m_1 & \dots & m_j & \dots & m_n \\ 1 & \dots & j & \dots & n \end{array} \right) \rightarrow \\ & \rightarrow \left( \begin{array}{ccccc} 1 & \dots & k & \dots & n \\ w_1 & \dots & w_k & \dots & w_n \end{array} \right). \end{aligned} \quad (1.256)$$

Элементы исходной и обратной подстановки, очевидно, связаны соотношениями:

$$j = w_{m_j} \quad \text{или} \quad k = m_{w_k} \quad \forall j, k \in \{1 \dots n\}. \quad (1.257)$$

Вообще же подстановку с элементами  $(m_{i_1} \dots m_{i_k} \dots m_{i_n})$  называют произведением подстановок с элементами:  $(m_1 \dots m_i \dots m_n)$  и  $(i_1 \dots i_k \dots i_n)$ .

Подстановка  $(m_1 \dots m_n)$  называется ортогональной, если она совпадает со своей обратной подстановкой  $(w_1 \dots w_m)$ :

$$w_j = m_j, \quad j = 1 \dots n \quad \text{или} \quad j = m_{m_j} \quad \forall j = 1 \dots n. \quad (1.258)$$

Для ортогональной подстановки формулу (1.255) можно записать в виде:

$${}^n\Omega^{(m_1 \dots m_n)} = \Omega^{i_1 \dots i_m \dots i_n} R_{i_1} \otimes \dots \otimes R_{i_n}. \quad (1.259)$$

Например, для тензора четвертого ранга  ${}^4\Omega$ :

$${}^4\Omega = \Omega^{i_1 \dots i_4} R_{i_1} \otimes R_{i_2} \otimes R_{i_3} \otimes R_{i_4} \quad (1.260)$$

можно ввести следующие обобщенные транспонированные тензоры:

$$\Omega^{(4321)} = \Omega^{i_1 i_2 i_3 i_4} R_{i_4} \otimes R_{i_3} \otimes R_{i_2} \otimes R_{i_1} = \Omega^{i_4 i_3 i_2 i_1} R_{i_1} \otimes R_{i_2} \otimes R_{i_3} \otimes R_{i_4}, \quad (1.261)$$

$$\Omega^{(3142)} = \Omega^{i_1 i_2 i_3 i_4} R_{i_3} \otimes R_{i_1} \otimes R_{i_4} \otimes R_{i_2} = \Omega^{i_2 i_4 i_1 i_3} R_{i_1} \otimes R_{i_2} \otimes R_{i_3} \otimes R_{i_4}, \quad (1.262)$$

и так далее. В первом случае подстановка (4321) является ортогональной, а во втором случае (3142) – нет.

#### 1.8.4. Симметрирование тензора $n$ -го ранга

Среди тензоров четвертого ранга важную роль играют тензоры, обладающие симметрией компонент следующего вида:

$$\Omega^{i_1 i_2 i_3 i_4} = \Omega^{i_2 i_1 i_3 i_4}, \quad \Omega^{i_1 i_2 i_3 i_4} = \Omega^{i_2 i_1 i_4 i_3}, \quad \Omega^{i_1 i_2 i_3 i_4} = \Omega^{i_3 i_4 i_1 i_2}, \quad (1.263)$$

т.е. удовлетворяющие соотношениям:

$${}^4\Omega^{(1234)} = {}^4\Omega^{(2134)}, \quad {}^4\Omega^{(1234)} = {}^4\Omega^{(1243)}, \quad {}^4\Omega^{(1234)} = {}^4\Omega^{(3412)}. \quad (1.264)$$

Такие тензоры являются аналогом симметричного тензора второго ранга, и поэтому называются симметричными тензорами четвертого ранга.

Из произвольного тензора второго ранга  $A$  можно образовать симметричный тензор  $T$  путем операции симметрирования:

$$T = \frac{1}{2}(A^T + A) = \frac{1}{2}(A^{(21)} + A^{(12)}). \quad (1.265)$$

Аналогичная операция симметрирования для произвольного тензора четвертого ранга имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} {}^4C = {}^4\Omega^{(\cdot)} \equiv & \frac{1}{8} (\Omega^{(1234)} + \Omega^{(2134)} + \Omega^{(1243)} + \Omega^{(2143)} + \\ & + \Omega^{(3412)} + \Omega^{(3421)} + \Omega^{(4312)} + \Omega^{(4321)}). \end{aligned} \quad (1.266)$$

Тензор

$${}^4C = C^{i_1 i_2 i_3 i_4} R_{i_1} \otimes \dots \otimes R_{i_4}, \quad (1.267)$$

очевидно, обладает симметрией компонент (1.263).

Симметричный тензор четвертого ранга может быть образован и другими перестановками, например, если тензор  ${}^4\Omega$  сам обладает двумя первыми условиями симметрии (1.264) (по индексам 1, 2, а также 3 и 4), то тензор

$${}^4\Omega^{[\cdot]} \equiv \frac{1}{4} ({}^4\Omega^{(2314)} + {}^4\Omega^{(3214)} + {}^4\Omega^{(1432)} + {}^4\Omega^{(4132)}) \quad (1.268)$$

обладает полной симметрией компонент (1.263).

Иногда применяется также *симметричный тензор шестого ранга*  ${}^6\Omega$ , обладающий симметрией индексов внутри каждой пары и по парам:

$${}^6\Omega^{(123456)} = {}^6\Omega^{(213456)} = {}^6\Omega^{(124356)} = {}^6\Omega^{(123465)}, \quad (1.269)$$

$${}^6\Omega^{(123456)} = {}^6\Omega^{(125634)} = {}^6\Omega^{(563412)} = {}^6\Omega^{(341256)} \text{ и т.д.}$$

Из произвольного тензора шестого ранга  ${}^6\Omega$  можно образовать симметричный тензор путем введения операции симметрирования, например, следующим образом:

$$\begin{aligned} {}^6C = {}^6\Omega^{\{\cdot\}} \equiv & \frac{1}{48} ({}^6\Omega^{(\cdot)56} + {}^6\Omega^{(\cdot)65} + {}^6\Omega^{(\cdot)12} + \\ & + {}^6\Omega^{(\cdot)21} + {}^6\Omega^{(\cdot)34} + {}^6\Omega^{(\cdot)43}). \end{aligned} \quad (1.270)$$

Здесь операция  ${}^6\Omega^{(\cdot)12}$  означает симметрирование вида (1.266) по четырем индексам  $i_3, i_4, i_5, i_6$  при фиксированных индексах  $i_1, i_2$ , стоящих на пятом и шестом местах и т.п.

Тензор  ${}^6C$  вида (1.270) обладает симметрией компонент типа (1.269).

### Упражнения к § 1.8.

**Упражнение 1.8.1.** Показать, что *операция свертки* двух тензоров четвертого ранга

$${}^4\Omega^{(1)} = \Omega^{(1)i_1 i_2 i_3 i_4} R_{i_1} \otimes \dots \otimes R_{i_4}, \quad {}^4\Omega^{(2)} = \Omega^{(2)j_1 \dots j_4} R_{j_1} \otimes \dots \otimes R_{j_4},$$

т.е. скалярное умножение по всем четырем индексам приводит к образованию следующего скаляра:

$${}^4\Omega^{(1)} \dots {}^4\Omega^{(2)} = \Omega_{i_4 i_3 i_2 i_1}^{(1)} \Omega^{(2)i_1 i_2 i_3 i_4}.$$

**Упражнение 1.8.2.** Показать, что для симметричного тензора второго ранга  $T$  имеет место соотношение:

$$T \otimes T \dots \Delta = T^2 \cdots E.$$

**Упражнение 1.8.3.** Показать, что для всякого тензора второго ранга  $T$  и четвертого ранга  ${}^4\Omega$  имеет место соотношение:

$$T \dots {}^4\Omega \dots T = T \otimes T \dots {}^4\Omega.$$

**Упражнение 1.8.4.** Показать, что для произвольных тензоров второго ранга  $A, B, C, D$  имеют место соотношения:

$$\begin{aligned} (A \cdot B) \dots (C \cdot D) &= (D \otimes B)^{(3214)} \dots (C \otimes A) = \\ &= (B \otimes D)^{(1432)} \dots (C \otimes A) = (D \otimes B)^{(1432)} \dots (A \otimes C) = \\ &= (B \otimes D) \dots (A \otimes C)^{(1432)}. \end{aligned}$$

**Упражнение 1.8.5.** Показать, что квадрат симметричного тензора  $T$  можно представить в виде:

$$T^2 = \Delta \cdot \Delta \dots T \otimes T.$$

**Упражнение 1.8.6.** Показать, что если тензор  ${}^4\Omega$  обладает двумя первыми условиями симметрии (1.264), то

$$2 {}^4\Omega^{[\cdot]} = {}^4\Omega^{(1432)(\cdot)}.$$

**Упражнение 1.8.7.** Показать, что векторное произведение вектора на произвольный тензор  $n$ -го ранга имеет вид:

$$a \times {}^n\Omega = \frac{1}{\sqrt{g}} \epsilon^{iji_1} a_i \Omega_{j i_2 \dots i_n} R_{i_1} \otimes R^{i_2} \otimes \dots \otimes R^{i_n}.$$

**Упражнение 1.8.8.** Показать, что имеет место следующая формула перестановки множителей в скалярном произведении:

$$\mathbf{a} \cdot {}^n\Omega = {}^n\Omega^{(2,3\dots n1)} \cdot \mathbf{a}.$$

**Упражнение 1.8.9.** Дать определение  $k$ -кратного скалярного произведения тензоров  $n$ -го ранга в форме (1.240), а затем вывести формулу (1.246) в качестве следствия.

### § 1.9. Псевдотензоры

#### 1.9.1. Общие замечания о псевдотензорах

Из общего определения тензора, данного в п.1.7.1, следует, что не всякий объект с индексами является тензором, а только обладающий свойством инвариантности, т.е. компоненты которого при переходе из одной системы координат в другую преобразуются специальным образом – по закону (1.129).

Выше мы уже встречались с объектами, которые не преобразуются по тензорному закону, и, следовательно, не являются компонентами каких-либо тензоров, в частности, это относится к символам Леви-Чивиты  $\epsilon_{ijk}$ .

Однако, оказывается, существует ряд объектов, которые преобразуются по закону, "близкому" к тензорному (1.129), но несколько от него отличающемуся. Такие объекты играют важную роль в тензорном исчислении, и их объединяют в отдельный класс – *псевдотензоров*.

Рассмотрим примеры псевдотензоров, а затем сформулируем общий закон преобразования их компонент.

#### 1.9.2. Определитель метрической матрицы

Метрические матрицы  $g_{ij}$  и  $g^{ij}$  являются компонентами тензора (см. упр.1.1.9), и поэтому преобразуются при переходе из одной криволинейной системы координат  $X^i$  в другую  $X'^i$  по закону (см. упр.1.1.9):

$$g'_{ij} = P^m_i \ P^l_j g_{ml}. \quad (1.271)$$

Вычислим определитель матрицы  $g'_{ij}$ :

$$g' = \det(g'_{ij}) = (\det(P^m_i))^2 \det(g_{ml}) = (\det(P^m_i))^2 g, \quad (1.272)$$

или, вводя обозначение для определителя якобиевой матрицы:

$$\Delta = \det(Q^m_i), \quad (1.273)$$

получаем, что

$$\sqrt{g} = \pm \Delta \sqrt{g'}. \quad (1.274)$$

Поскольку всегда должно выполняться условие  $\sqrt{g} > 0$ , то формула (1.274) имеет вид:

$$\sqrt{g} = |\Delta| \sqrt{g'}. \quad (1.275)$$

Таким образом, важнейший скаляр  $\sqrt{g}$  не является инвариантом при любых преобразованиях координат (1.2) (для инвариантов должно было бы выполняться равенство  $\sqrt{g'} = \sqrt{g}$ ) и, следовательно, не является тензором ранга 0.

### 1.9.3. Векторное произведение

Рассмотрим произвольный вектор  $c$ , образованный с помощью векторного произведения двух векторов  $a$  и  $b$ :

$$c = a \times b = \sqrt{g} \epsilon_{ijk} a^i b^j R^k = c^k R^k. \quad (1.276)$$

Всюду ранее мы использовали такие векторы как "истинные векторы", т.е. преобразующиеся по тензорному закону (1.26) ранга 1. Это действительно так, если только преобразование координат (1.2) не меняет ориентации координатных осей, т.е. может быть получено непрерывно из тождественного преобразования. Если же ориентация осей меняется, то нарушается непрерывность преобразований, и векторное произведение перестает быть тензором ранга 1. Покажем это.

Распишем векторное произведение (1.276) покомпонентно:

$$c_1 = \sqrt{g} (\epsilon_{123} a^2 b^3 + \epsilon_{132} a^3 b^2) = \sqrt{g} (a^2 b^3 - a^3 b^2) \quad \text{и т.д.} \quad (1.277)$$

В общем виде три такие формулы можно представить следующим образом:

$$c_\alpha = \sqrt{g} (a^\beta b^\gamma - a^\gamma b^\beta), \quad \alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha, \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad (1.278)$$

и индексы  $\alpha, \beta, \gamma$  образуют четную подстановку.

При переходе в новую систему координат  $X'^i$  это выражение примет вид:

$$c'_\alpha = \sqrt{g'} (a'^\beta b'^\gamma - a'^\gamma b'^\beta), \quad (1.279)$$

где  $c'_\alpha$ ,  $a'^\beta$ ,  $b'^\gamma$  – компоненты векторов  $c$ ,  $a$  и  $b$  в системе координат  $X'^i$ , которые связаны с  $a^\beta$ ,  $b^\gamma$  соотношениями:

$$a'^\beta = Q^\beta_i a^i, \quad b'^\gamma = Q^\gamma_j b^j \quad (1.280)$$

(для векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  мы предполагаем выполнение тензорного закона). Тогда, подставляя (1.280) и (1.275) в (1.279), получаем:

$$c'_\alpha = \frac{\sqrt{g}}{|\Delta|} (Q^\beta_i Q^\gamma_j - Q^\gamma_i Q^\beta_j) a^i b^j. \quad (1.281)$$

Очевидно, что выражение в скобках отлично от нуля только при  $i \neq j$  и меняет знак на противоположный при замене  $i$  на  $j$ , т.е. это компоненты кососимметричного тензора, тогда (1.281) можно представить следующим образом:

$$c'_\alpha = \frac{\sqrt{g}}{|\Delta|} \sum_{\rho=1}^3 (Q^\beta_\sigma Q^\gamma_\omega - Q^\gamma_\sigma Q^\beta_\omega) (a^\sigma b^\omega - a^\omega b^\sigma), \quad (1.282)$$

$$\alpha = 1, 2, 3; \quad \rho \neq \sigma \neq \omega \neq \rho, \quad \rho, \sigma, \omega = 1, 2, 3,$$

где индексы  $\rho, \sigma, \omega$  снова образуют четную подстановку.

Однако величины

$$Q^\beta_\sigma Q^\gamma_\omega - Q^\gamma_\sigma Q^\beta_\omega$$

являются дополнительными минорами для элементов  $P_\alpha^\rho$  обратной якобиевой матрицы, поэтому

$$\frac{1}{\Delta} (Q^\beta_\sigma Q^\gamma_\omega - Q^\gamma_\sigma Q^\beta_\omega) = P_\alpha^\rho, \quad \rho = 1, 2, 3; \quad \alpha = 1, 2, 3 \quad (1.283)$$

(формула для определения компонент обратной матрицы).

Тогда (1.282) принимает вид:

$$c'_\alpha = \frac{\sqrt{g}\Delta}{|\Delta|} \sum_{\rho=1}^3 P_\alpha^\rho (a^\sigma b^\omega - a^\omega b^\sigma), \quad (1.284)$$

или с учетом формулы (1.278), в которой индексы  $\alpha, \beta, \gamma$  следует заменить на  $\rho, \sigma, \omega$ , получаем

$$c'_\alpha = \frac{\Delta}{|\Delta|} \sum_{\rho=1}^3 P_\alpha^\rho c_\rho = \frac{\Delta}{|\Delta|} P_\alpha^i c_i \quad (1.285)$$

– искомую формулу для преобразования компонент векторного произведения. Из (1.285) следует, что векторное произведение двух "истинных" векторов (или их еще называют *полярными* векторами), является "истинным" вектором только при непрерывных преобразованиях, когда  $\Delta > 0$ . В общем случае формула преобразования компонент векторного произведения отличается коэффициентом  $\Delta/|\Delta|$ , т.е. знаком

от обычного тензорного закона. Такие векторы называются *аксиальными* или *псевдовекторами*.

#### 1.9.4. Символы Леви-Чивиты

Выше уже упоминалось, что символы Леви-Чивиты  $\epsilon_{ijk}$ ,  $\epsilon^{ijk}$  не являются компонентами тензора третьего ранга. Установим закон их преобразования при переходе из одной системы координат в другую. Для этого воспользуемся формулой (1.42), которую применим к якобиевой матрице  $Q^i_j$ :

$$\Delta \epsilon_{mnl} = Q^i_m Q^j_n Q^k_l \epsilon_{ijk}, \quad \Delta = \det(Q^i_j). \quad (1.286)$$

Эту формулу фактически можно рассматривать как закон преобразования символов Леви-Чивиты. Очевидно, что этот закон не совпадает с тензорным из-за наличия коэффициента  $\Delta$ .

Умножая (1.286) слева и справа на  $\sqrt{g}$ , с учетом (1.274) получаем формулу для преобразования компонент  $\sqrt{g}\epsilon_{ijk}$ :

$$\frac{\Delta}{|\Delta|} \sqrt{g} \epsilon_{mnl} = Q^i_m Q^j_n Q^k_l \sqrt{g'} \epsilon_{ijk}. \quad (1.287)$$

Совершенно аналогично можно получить обратную формулу:

$$\sqrt{g'} \epsilon_{ijk} = \frac{\Delta}{|\Delta|} P_i^m P_j^n P_k^l \sqrt{g} \epsilon_{mnl}, \quad (1.288)$$

а также формулу для компонент  $(1/\sqrt{g})\epsilon^{ijk}$ :

$$\frac{1}{\sqrt{g'}} \epsilon^{ijk} = \frac{\Delta}{|\Delta|} Q^i_m Q^j_n Q^k_l \frac{1}{\sqrt{g}} \epsilon^{mnl}. \quad (1.289)$$

Из соотношений (1.288) и (1.289) следует, что при непрерывных преобразованиях, когда  $\Delta > 0$ , компоненты  $\sqrt{g}\epsilon_{ijk}$  и  $(1/\sqrt{g})\epsilon^{ijk}$  преобразуются по тензорному закону, а при  $\Delta < 0$  – нет.

#### 1.9.5. Смешанное произведение

Смешанное произведение трех истинных векторов **a**, **b** и **c** можно представить в виде:

$$\varphi = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{d} \cdot \mathbf{c} = d_i c^i, \quad \mathbf{d} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = d_i \mathbf{R}^i. \quad (1.290)$$

Вычислим его в системе координат  $X^i$  и  $X'^i$ , используя формулу (1.285) для преобразования компонент векторного произведения:

$$\varphi' = d'_i c'^i = \frac{\Delta}{|\Delta|} P_i^j d_j Q^i_k c^k = \frac{\Delta}{|\Delta|} d_j c^j = \frac{\Delta}{|\Delta|} \varphi. \quad (1.291)$$

Таким образом, смешанное произведение, вообще говоря, не является "истинным" скалярным инвариантом относительно любых преобразований координат (1.2), его инвариантность имеет место только при непрерывных преобразованиях (1.2), когда  $\delta > 0$ .

Укажем на одно кажущееся противоречие. Если в качестве векторов  $a, b$  и  $c$  взять векторы базиса  $R_1, R_2$  и  $R_3$ , то получим объем

$$\varphi = (R_1 \times R_2) \cdot R_3 = \sqrt{g}, \quad (1.292)$$

и согласно (1.291)

$$\varphi' = \sqrt{g'} = \frac{\Delta}{|\Delta|} \sqrt{g}. \quad (1.293)$$

Но для преобразования  $\sqrt{g}$  при переходе из  $X^i$  в  $X'^i$  у нас имеется также формула (1.274), которая, очевидно, отличается от закона (1.291).

На самом же деле, противоречия между (1.293) и (1.274) нет. Формула (1.274) указывает связь смешанных произведений различных векторов базиса  $\sqrt{g'} = (R'_1 \times R'_2) \cdot R'_3$  и  $\sqrt{g} = (R_1 \times R_2) \cdot R_3$ ; в то время как формула (1.293) устанавливает связь между смешанными произведениями одних и тех же векторов, но вычисляемых в различных системах координат  $X^i$  и  $X'^i$ , т.е. формула (1.293) для связи  $\sqrt{g'}$  и  $\sqrt{g}$  неприменима, если только базисы  $R_i$  и  $R'_i$  не совпадают.

### 1.9.5. Общее определение относительных тензоров и псевдотензоров

Дадим теперь общее определение для объектов, преобразующихся по законам, "близким" к тензорному.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.33.** Относительным тензором  $n$ -го ранга называется объект " $\Omega$ ", имеющий в полиадном базисе представление вида:

$${}^n\Omega = \Omega^{i_1 \dots i_m}_{i_{m+1} \dots i_n} R_{i_1} \otimes \dots \otimes R_{i_m} \otimes R^{i_{m+1}} \otimes \dots \otimes R^{i_n}, \quad (1.294)$$

компоненты которого при переходе из одной системы координат  $X^i$  в другую  $X'^i$  преобразуются по закону:

$$\Omega^{i_1 \dots i_m}_{i_{m+1} \dots i_n} = \varkappa |\Delta|^w Q^{i_1}_{j_1} \dots Q^{i_m}_{j_m} P^{j_{m+1}}_{i_{m+1}} \dots P^{j_n}_{i_n} \Omega^{j_1 \dots j_m}_{j_{m+1} \dots j_n},$$

$$\varkappa = \Delta / |\Delta|. \quad (1.295)$$

Таким образом, в законе преобразования (1.295) участвуют два числа:  $\varkappa$  и  $w$ , причем  $\varkappa$  может принимать значения только 1 или -1, а  $w$  – некоторое целое число, которое может быть и отрицательным. При этом различают четыре класса:

- если  $\kappa = 1$ , а  $w \neq 0$ , то  ${}^n\Omega$  называется *относительным тензором  $n$ -го ранга веса  $w$* ;
- если  $\kappa = 1$ , а  $w = 0$ , то  ${}^n\Omega$  называется *тензором  $n$ -го ранга (или истинным тензором)*;
- если  $\kappa$  может принимать значение  $-1$ , а  $w = 0$ , то  ${}^n\Omega$  называется *псевдотензором  $n$ -го ранга*;
- если  $\kappa$  может принимать значение  $-1$ , а  $w \neq 0$ , то  ${}^n\Omega$  называется *относительным псевдотензором  $n$ -го ранга веса  $w$* .

Очевидно, что определение, данное выше, для истинного тензора  $n$ -го ранга совпадает с определением тензора  $n$ -го ранга в § 1.7.

Сравнивая теперь законы преобразования (1.275), (1.285), (1.289) и (1.291), получаем, что

- $\sqrt{g}$  является относительным тензором нулевого ранга (относительным скаляром) веса  $w = -1$ ;
- векторное произведение двух истинных векторов  $a \times b$  является псевдотензором первого ранга (т.е. псевдовектором);
- смешанное произведение трех истинных векторов  $a \cdot (b \times c)$  является псевдотензором нулевого ранга (т.е. псевдоскаляром);
- тензор Леви-Чивиты  $\epsilon$  с компонентами  $\sqrt{g}\epsilon_{ijk}$  является псевдотензором третьего ранга.

Обратные соотношения для компонент относительных тензоров, очевидно, имеют вид:

$$\begin{aligned} \Omega^{j_1 \dots j_m}_{\quad j_{m+1} \dots j_n} &= \\ &= \kappa |\Delta|^{-w} P^{j_1}_{i_1} \dots P^{j_m}_{i_m} Q^{i_{m+1}}_{j_{m+1}} \dots Q^{i_n}_{j_n} \Omega'^{i_1 \dots i_m}_{\quad i_{m+1} \dots i_n}. \end{aligned} \quad (1.296)$$

Если мы рассматриваем только непрерывные преобразования координат (1.2), то  $\Delta > 0$ ,  $\kappa = 1$ , и псевдотензоры преобразуются как истинные тензоры, а относительные псевдотензоры веса  $w$  как относительные тензоры веса  $w$ .

Это обстоятельство фактически всюду использовалось выше при операциях с векторными, смешанными произведениями и тензорами Леви-Чивиты.

В заключении этой главы приведем еще один показательный пример. В п.1.9.4 было показано, что объект  $\epsilon$ , у которого компоненты в любом базисе имеют вид  $\sqrt{g}\epsilon_{ijk}$  является псевдотензором. Если же мы введем объект  $\tilde{\epsilon}$ , компоненты которого определим равными  $\epsilon_{ijk}$  в любом базисе, то согласно (1.286) такой объект является относительным псевдотензором веса  $w = 1$ . Наконец, если ввести объект  $\tilde{\tilde{\epsilon}}$ , компоненты которого определить в любом базисе равными  $\Delta\epsilon_{ijk}$ , где  $\Delta = \det(Q^i_j)$ , а  $Q^i_j$  матрица преобразования из фиксированного базиса  $R^i$  в произвольный, то согласно той же формуле (1.286) объект  $\tilde{\tilde{\epsilon}}$  будет истинным тензором.

### Упражнения к § 1.9.

**Упражнение 1.9.1.** Показать, что двойное векторное произведение трех истинных векторов  $\mathbf{h} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$  является истинным вектором, используя при доказательстве представление:

$$\mathbf{h} = \mathbf{d} \times \mathbf{c} = \frac{1}{\sqrt{g}} \epsilon^{ijk} d_i c_j \mathbf{R}_k = h^k \mathbf{R}_k, \quad \mathbf{d} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$$

и формулы (1.285) и (1.289).

**Упражнение 1.9.2.** Показать, что для произвольного относительного вектора  $\mathbf{a}$  и относительного тензора  $\mathbf{T}$  формулы представления в различных базисах следует записывать в виде (ср. с упр. 1.1.8):

$$\mathbf{a} = a_i \mathbf{R}^i = \varkappa |\Delta|^w a'_i \mathbf{R}'^i, \quad \mathbf{T} = T_{ij} \mathbf{R}^i \otimes \mathbf{R}^j = \varkappa |\Delta|^w T'_{ij} \mathbf{R}'^i \otimes \mathbf{R}'^j,$$

где

$$\Delta = \det(Q^i{}_j), \quad Q^i{}_j = \partial X'^i / \partial X^j, \quad \varkappa = \Delta / |\Delta|,$$

или в виде:

$$\mathbf{a} = a'_i \mathbf{R}'^i = \varkappa' |\Delta|^{-w} a_i \mathbf{R}^i, \quad \mathbf{T} = T'_{ij} \mathbf{R}'^i \otimes \mathbf{R}'^j = \varkappa |\Delta|^{-w} T_{ij} \mathbf{R}^i \otimes \mathbf{R}^j.$$

## ГЛАВА 2

### ТЕНЗОРЫ НА ЛИНЕЙНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

---

В первой главе был дан геометрический способ введения тензора, основанный на аксиомах элементарной геометрии. Рассмотрим теперь несколько иной, "формальный", способ введения тензоров, используя теоретико-множественное понятие линейных пространств.

Оба подхода для трехмерных евклидовых пространств совершенно эквивалентны, в то же время геометрический способ, по-видимому, более нагляден при первом знакомстве с тензорами, а "формальный" является более общим, применимым даже в случаях, когда не определены понятия скалярного произведения и длины векторов.

#### § 2.1. Линейное $n$ -мерное пространство

##### 2.1.1. Определение линейного (векторного) пространства

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1.** *Линейным (или его еще называют векторным или аффинным) пространством  $\mathcal{L}$  называют некоторое множество, элементы которого объявляются как векторы и обозначаются также, как и обычные трехмерные векторы – малыми жирными буквами  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и т.п., и на котором заданы две операции: сложения и умножения на число.*

- A) Операция *сложения* однозначно каждой паре векторов  $a$ ,  $b$  из  $\mathcal{L}$  ставит в соответствие элемент  $a + b$ , также принадлежащий  $\mathcal{L}$  и называемый *суммой* векторов.
- Б) Операция *умножения на число*  $s$  каждому элементу  $a$  из  $\mathcal{L}$  ставит в соответствие элемент  $sa \in \mathcal{L}$ , который называется *произведением вектора на число*.

Если  $s$  принадлежит множеству комплексных чисел, то  $\mathcal{L}$  называется *комплексным линейным* пространством, если  $s$  принадлежит множеству действительных чисел, то  $\mathcal{L}$  – *действительное линейное* пространство.

Введенные операции сложения и умножения для любых векторов  $a$ ,  $b$ ,  $c$  из  $\mathcal{L}$  должны удовлетворять следующим аксиомам:

- 1°.  $a + b = b + a$ .
- 2°.  $(a + b) + c = a + (b + c)$ .
- 3°. Существует нулевой элемент  $0 \in \mathcal{L}$ , такой, что для каждого  $a \in \mathcal{L}$ :

$$a + 0 = a.$$

4°. Существует противоположный элемент  $(-\mathbf{a}) \in \mathcal{L}$  для каждого  $\mathbf{a} \in \mathcal{L}$ , такой, что

$$\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}.$$

5°.  $s(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = s\mathbf{a} + s\mathbf{b}$ .

6°.  $(s_1 + s_2)\mathbf{a} = s_1\mathbf{a} + s_2\mathbf{a}$ , где  $s_1$  и  $s_2$  – числа.

7°.  $s_1(s_2\mathbf{a}) = (s_1s_2)\mathbf{a}$ .

8°. Произведение любого элемента  $\mathbf{a} \in \mathcal{L}$  на число 1 равно  $\mathbf{a}$ , т.е.

$$1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}.$$

*Разностью* двух векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  называют сумму векторов  $\mathbf{a}$  и  $(-\mathbf{b})$ , и обозначают ее  $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ .

Из этих аксиом следует, что с векторами в  $n$ -мерном пространстве производятся те же действия и по тем же правилам, что и с обычными векторами трехмерного пространства.

Однако понятие "вектора" в линейном пространстве  $\mathcal{L}$  шире, чем обычного трехмерного вектора, как геометрического объекта. Например, множество всех полиномов от одной переменной, степень которых не выше заданного числа  $n$ , будет формально удовлетворять всем аксиомам 1°...8° и образует линейное пространство, если в качестве "векторов" (т.е. элементов пространства  $\mathcal{L}$ ) принять сами полиномы (см.упр. 2.1.3).

Несложно проверить, что множество всех тензоров " $\Omega$ " заданного ранга  $n$  в трехмерном евклидовом пространстве также удовлетворяет всем аксиомам 1°...8° и, следовательно, образует линейное пространство, "векторами" (т.е. элементами) которого являются тензоры " $\Omega$ ".

Другие примеры линейных пространств будут даны ниже, а пока рассмотрим некоторые их общие свойства.

### 2.1.2. Линейная зависимость

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2.** *Линейной комбинацией* векторов  $\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_n$  линейного пространства  $\mathcal{L}$  с коэффициентами  $s^1 \dots s^n$  называется сумма вида:

$$s^1\mathbf{a}_1 + \dots + s^n\mathbf{a}_n,$$

которая, очевидно, также образует элемент из  $\mathcal{L}$ .

Линейная комбинация – *тривиальная*, если все  $s^i$  равны нулю.

Система векторов  $\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_n$  из  $\mathcal{L}$  называется *линейно зависимой*, если существует равная нулю нетривиальная линейная комбинация этих векторов, т.е.

$$s^1\mathbf{a}_1 + \dots + s^n\mathbf{a}_n = 0, \quad (2.1)$$

где среди  $s^i$  существует хотя бы один ненулевой коэффициент.

Если же любая нетривиальная линейная комбинация этих векторов  $a_1 \dots a_n \in \mathcal{L}$  не равна нулю, то такая система векторов называется *линейно независимой*.

Некоторые из свойств линейно зависимых векторов приведены в упр. 2.1.3 – 2.1.5.

### 2.1.3. Базис в линейном пространстве

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3.** *Базисом в линейном пространстве  $\mathcal{L}$  называют упорядоченную конечную систему векторов  $e_1 \dots e_n$ , которая*

- *является линейно независимой;*
- *каждый элемент  $a \in \mathcal{L}$  есть линейная комбинация этой системы:*

$$a = a^i e_i, \quad i = 1 \dots n. \quad (2.2)$$

Коэффициенты  $a^i$  линейной комбинации называются *компонентами вектора  $a$  в базисе  $e_i$* .

Упорядоченность означает, что каждый вектор в базисе имеет определенный номер. Изменяя нумерацию векторов  $e_i$ , получаем различные базисы.

Часто, когда базис  $e_i$  в пространстве  $\mathcal{L}$  фиксирован, то вместо векторов  $a, b$  из  $\mathcal{L}$  используют *координатные столбцы* векторов в этом базисе:

$$a = \begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^n \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Иногда применяют также запись в виде *координатной строки*, тогда рядом с  $a$  ставят значок транспонирования  $T$ :

$$a^T = (a^1 \dots a^n). \quad (2.4)$$

Очевидно, что компоненты суммы (или разности) векторов равны сумме (или разности) компонент этих векторов:

$$a + b = (a^i + b^i)e_i. \quad (2.5)$$

То же самое утверждение справедливо для координатных столбцов векторов, поэтому координатные столбцы можно складывать, вычитать и составлять из них линейные комбинации.

**ТЕОРЕМА 2.1.** *Векторы  $a_1 \dots a_m$  – линейно зависимы тогда и только тогда, когда линейно зависимы их координатные столбцы.*

▼ В самом деле, если  $a_1 \dots a_m$  – зависимы, то для них существует нетривиальная линейная комбинация, равная нулю, которая с помощью определения (2.3) может быть переписана для координатных столбцов, откуда следует их линейная зависимость. В обратную сторону доказательство аналогично. ▲

Из этой теоремы, очевидно, следует, что векторы  $a_1 \dots a_m$  линейно независимы тогда и только тогда, когда линейно независимы их координатные столбцы.

**Теорема 2.2.** *Любые  $m$  координатных столбцов  $a_1 \dots a_m$  длиной  $n < m$  – линейно зависимы.*

▼ Будем далее полагать, что среди  $a_1 \dots a_m$  нет нулевых координатных столбцов, так как в противном случае, согласно упр. 2.1.4, столбцы были бы линейно зависимы и теорема была бы доказана.

Применим метод математической индукции. При  $n = 1$  координатные столбцы являются просто числами  $a_1^1 \dots a_m^1$ , и требуется найти не все нулевые коэффициенты  $s^1 \dots s^m$ , чтобы выполнялось условие (2.1):

$$s^1 a_1^1 + \dots + s^m a_m^1 = 0, \quad m > 1. \quad (2.6)$$

Так как среди  $a_i^1$  нет нулевых, то (2.6) будет выполнено, если выбрать коэффициенты  $s^2 \dots s^m$  произвольным образом (но чтобы хоть один из них был бы ненулевым), а  $s^1$  – следующим образом:

$$s^1 = -\frac{1}{a_1^1} (s^2 a_2^1 + \dots + s^m a_m^1) \neq 0. \quad (2.7)$$

Пусть теперь теорема 2.2 верна для случая  $n$  и  $m > n$ , докажем, что она справедлива и при  $n+1$  и  $m > n+1$ .

Условие (2.1) будет иметь вид:

$$s^1 \begin{pmatrix} a_1^1 \\ \vdots \\ a_1^n \\ a_1^{n+1} \end{pmatrix} + \dots + s^m \begin{pmatrix} a_m^1 \\ \vdots \\ a_m^n \\ a_m^{n+1} \end{pmatrix} = 0, \quad m > n+1. \quad (2.8)$$

Рассмотрим последнюю строку в (2.8). Среди чисел  $a_1^{n+1} \dots a_m^{n+1}$  имеется хотя бы одно ненулевое, так как в противном случае все столбцы имеют длину  $n$  ( $m > n+1 > n$ ), и теорема по индукции будет доказана.

Пусть ненулевым является, например,  $a_k^{n+1}$  ( $k \in \{1 \dots m\}$ ), тогда выберем коэффициент  $s^k$  следующим образом:

$$s^k = -\frac{1}{a_k^{n+1}} (s^1 a_1^{n+1} + \dots + s^{k-1} a_k^{n+1} + s^{k+1} a_k^{n+1} + \dots + s^m a_m^{n+1}), \quad (2.9)$$

где все остальные  $s^1 \dots s^m$  – произвольные.

Подставим теперь это значение  $s^k$  в (2.8) и соберем слагаемые при одинаковых  $s^1 \dots s^{k-1}, s^k, \dots, s^m$ . Если отбросить последние координаты  $a_i^{n+1}$ , то в результате этих операций получаем следующие столбцы:

$$s^1 \begin{pmatrix} b_1^1 \\ \vdots \\ b_1^n \end{pmatrix} + \dots + s^{k-1} \begin{pmatrix} b_k^1 \\ \vdots \\ b_k^n \end{pmatrix} + s^{k+1} \begin{pmatrix} b_{k+1}^1 \\ \vdots \\ b_{k+1}^n \end{pmatrix} + \dots + s^m \begin{pmatrix} b_m^1 \\ \vdots \\ b_m^n \end{pmatrix} = 0, \quad (2.10)$$

где

$$b_j^i = a_j^i - \frac{a_j^{n+1}}{a_k^{n+1}} a_k^i.$$

Длина этих столбцов равна  $n$ , а их число  $m_1 = m - 1 > n$  (т.к.  $m > n + 1$ ). По предыдущему шагу индукции эти столбцы всегда линейно зависимы, и можно найти ненулевые координаты  $s^1 \dots s^{k-1} s^k \dots s^m$ , обращающие (2.10) в нуль, что и доказывает теорему. ▲

**Теорема 2.3.** *Если в линейном пространстве имеется базис из  $n$  векторов, то все другие базисы в этом пространстве состоят также из  $n$  векторов.*

▼ Предположим противное. Пусть в пространстве  $\mathcal{L}$  имеется два базиса  $e_1 \dots e_n$  и  $e'_1 \dots e'_m$  разной размерности: примем для определенности  $m > n$ . Тогда можно векторы  $e'_i$  разложить по базису  $e_1 \dots e_n$ :

$$e'_i = \sum_{j=1}^n e'^j_i, \quad e_j = (e'^1_j \dots e'^n_j)^T, \quad i = 1 \dots m, \quad (2.11)$$

где  $e'^j_i$  – коэффициенты разложения.

В результате получим  $m$  координатных столбцов длиной  $n$  ( $n < m$ ), которые, в силу теоремы 2.2, являются линейно зависимыми. Тогда, в силу теоремы 2.1, будут линейно зависимыми и векторы  $e'_1 \dots e'_m$ , что невозможно, так как они образуют базис. Это противоречие и доказывает теорему. ▲

Используя эту теорему, можно ввести следующее определение.

**Определение 2.4.** *Линейное пространство  $\mathcal{L}$ , в котором существует базис из конечного числа векторов  $n$ , называют  $n$ -мерным, а число  $n$  – размерностью пространства.*

Размерность пространства обозначают либо формулой  $\dim \mathcal{L} = n$ , либо индексом:  $\mathcal{L}_n$ . Размерность нулевого пространства по определению полагают равной нулю, поскольку в нем нет базиса (нулевой вектор является линейно зависимым).

Бесконечномерным называют пространство, в котором для любого натурального числа  $n$  существует  $n$  линейно независимых векторов.

Далее будем рассматривать только  $n$ -мерные пространства.

**Теорема 2.4.** *В  $n$ -мерном пространстве всякая упорядоченная система  $n$  линейно независимых векторов является базисом.*

▼ Действительно, пусть в пространстве  $\mathcal{L}$  имеется  $n$  линейно независимых векторов  $a_1 \dots a_n$ , но эта система не образует базис, т.е., согласно определению, найдется вектор  $a \in \mathcal{L}$ , который не является линейной комбинацией  $a_1 \dots a_n$ . Тогда в  $\mathcal{L}$  существует система из  $n+1$  линейно независимых векторов  $a_1 \dots a_n, a$ , по которой можно образовать  $n+1$  координатных столбцов длиной  $n$ . Но, в силу теоремы

2.2, эти столбцы, а, следовательно, и система  $a_1 \dots a_n$  должны быть линейно зависимыми. Таким образом, наше предположение приводит к противоречию. ▲

**ТЕОРЕМА 2.4а.** В  $n$ -мерном пространстве всякая упорядоченная линейно независимая система из  $m < n$  векторов может быть дополнена до базиса.

▼ Для доказательства рассмотрим в пространстве  $\mathcal{L}$  линейно независимую систему  $a_1 \dots a_m$  ( $m < n$ ). Эта система не является базисом, так как пространство  $\mathcal{L}$  –  $n$ -мерное, значит, в нем существует базис из  $n$  векторов, и, согласно теореме 2.3, только из  $n$  векторов. Тогда найдется такой вектор  $a$ , который не выражается через  $a_1 \dots a_m$ , и значит можно образовать систему  $m + 1$  линейно независимых векторов  $a_1 \dots a_m a$ . Если  $m + 1 < n$ , то доказательство можно продолжать до тех пор, пока не получим  $n$  линейно независимых векторов, которые, согласно теореме 2.4, являются базисом и включают в себя векторы  $a_1 \dots a_m$ . ▲

#### 2.1.4. Линейные подпространства

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.5.** Непустое множество  $\mathcal{L}'$  элементов из линейного пространства  $\mathcal{L}$  называют линейным подпространством, если

- 1° для любых элементов  $a$  и  $b$  из  $\mathcal{L}'$  их сумма  $a + b$  также принадлежит  $\mathcal{L}'$ ;
- 2° произведение любого  $a \in \mathcal{L}'$  на произвольное число  $z$  также принадлежит  $\mathcal{L}'$ .

Каждое линейное пространство  $\mathcal{L}$  содержит, по крайней мере, два подпространства: нулевое, состоящее только из элемента 0, и само пространство  $\mathcal{L}$ . Эти подпространства называют несобственными, а все остальные – собственными.

Если выбрать в  $\mathcal{L}$  некоторую систему векторов  $a_1 \dots a_m$ , то множество  $\mathcal{L}'$  всех линейных комбинаций этих векторов называют линейной оболочкой системы векторов  $a_1 \dots a_m$ . Это множество  $\mathcal{L}'$  образует линейное подпространство в  $\mathcal{L}$ , так как любая сумма или произведение на число линейных комбинаций векторов  $a_1 \dots a_m$  снова даст некоторую их линейную комбинацию.

**ТЕОРЕМА 2.5.** Всякое подпространство  $\mathcal{L}'$   $n$ -мерного линейного пространства  $\mathcal{L}$  имеет размерность  $m \leq n$ , причем при  $m = n$  подпространство  $\mathcal{L}'$  совпадает с  $\mathcal{L}$ .

▼ Если  $\mathcal{L}'$  – нулевое пространство, то его размерность по определению равна нулю, и так как  $n \geq 0$ , то теорема будет доказана. Для ненулевого пространства  $\mathcal{L}'$ , начиная с любого ненулевого вектора  $a \in \mathcal{L}'$ , можем построить базис методом, изложенным в доказательстве теоремы 2.4а. Число векторов в этом базисе не может быть больше  $n$ , так как всякая система линейно независимых векторов из  $\mathcal{L}'$  будет

линейно независимой в  $\mathcal{L}$ , а значит, согласно теореме 2.2, может содержать не более  $n$  векторов. Если базис в  $\mathcal{L}'$  действительно содержит  $n$  векторов, то любой вектор из  $\mathcal{L}$  можно разложить по этому базису (в противном случае мы смогли бы построить базис из  $n+1$  вектора в  $\mathcal{L}$ , что невозможно), это и означает, что  $\mathcal{L}'$  совпадает с  $\mathcal{L}$ .  $\blacktriangle$

**ТЕОРЕМА 2.6.** *Если построить базис  $e_1 \dots e_n$  в  $n$ -мерном пространстве  $\mathcal{L}$  таким образом, чтобы векторы  $e_1 \dots e_m$  ( $m \leq n$ ) образовывали базис подпространства  $\mathcal{L}'$  в  $\mathcal{L}$ , то все векторы из  $\mathcal{L}'$  и только они будут иметь нулевые компоненты  $a^{m+1} = \dots = a^n = 0$  в этом базисе  $e_1 \dots e_n$ .*

▼ В самом деле, если вектор  $a \in \mathcal{L}$  имеет нулевые компоненты  $a^{m+1}, \dots, a^n$ , то он раскладывается по базису  $e_1 \dots e_m$ , и значит принадлежит  $\mathcal{L}'$ . Очевидно и обратное: если  $a$  принадлежит  $\mathcal{L}'$ , то он раскладывается по  $e_1 \dots e_m$ :

$$a = \sum_{i=1}^m a^i e_i,$$

тогда если ввести компоненты  $a^{m+1} = \dots = a_n = 0$ , то линейная комбинация  $a = \sum_{i=1}^n a^i e_i$  будет являться разложением  $a$  по базису  $e_1 \dots e_n$ , а в силу единственности разложения вектора по базису (см. упр. 2.1.6), это будут единственно возможные компоненты  $a^1 \dots a^n$ .  $\blacktriangle$

### 2.1.5. Сумма подпространств

Пусть имеется два подпространства  $\mathcal{L}'$  и  $\mathcal{L}''$  линейного пространства  $\mathcal{L}$ .

Множество всех векторов  $a$ , принадлежащих одновременно  $\mathcal{L}'$  и  $\mathcal{L}''$ , называют *пересечением линейных подпространств* и обозначают  $\mathcal{L}' \cap \mathcal{L}''$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.6.** *Множество всех векторов  $a$ , представляющих собой сумму  $a = a' + a''$ , где  $a' \in \mathcal{L}'$ ,  $a'' \in \mathcal{L}''$ , называют суммой линейных подпространств и обозначают как  $\mathcal{L}' + \mathcal{L}''$ .*

**ТЕОРЕМА 2.7.** *Пересечение  $\mathcal{L}' \cap \mathcal{L}''$  и сумма  $\mathcal{L}' + \mathcal{L}''$  двух линейных подпространств из  $\mathcal{L}$  сами являются линейными пространствами в  $\mathcal{L}$ .*

Доказательство теоремы оставим в качестве упражнения 2.1.14.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.7.** *Прямой суммой двух линейных подпространств  $\mathcal{L}'$  и  $\mathcal{L}''$  из  $\mathcal{L}$  называют их сумму  $\mathcal{L}' + \mathcal{L}''$ , в случае если пересечение подпространств  $\mathcal{L}' \cap \mathcal{L}''$  – нулевое подпространство.*

Прямую сумму обозначают как  $\mathcal{L}' \oplus \mathcal{L}''$ .

Каждый элемент  $a \in \mathcal{L}' \oplus \mathcal{L}''$  можно разложить единственным образом в виде суммы  $a = a' + a''$ , где  $a' \in \mathcal{L}'$ ,  $a'' \in \mathcal{L}''$ . В самом деле, пусть

существует еще одно разложение  $\mathbf{a} = \mathbf{b}' + \mathbf{b}''$ , где  $\mathbf{b}' \in \mathcal{L}'$ ,  $\mathbf{b}'' \in \mathcal{L}''$ . Тогда существует вектор  $(\mathbf{a}' - \mathbf{b}')$ , принадлежащий  $\mathcal{L}'$ , и одновременно, в силу  $\mathbf{a}' - \mathbf{b}' = \mathbf{b}'' - \mathbf{a}''$ , принадлежащий  $\mathcal{L}''$ , т.е.  $\mathbf{a}' - \mathbf{b}' \in \mathcal{L}' \cap \mathcal{L}''$ . Но поскольку  $\mathcal{L}' \cap \mathcal{L}''$  – нулевое подпространство, то  $\mathbf{a}' = \mathbf{b}'$  и  $\mathbf{a}'' = \mathbf{b}''$ .

### 2.1.6. Евклидовы $n$ -мерные пространства

Дадим теперь обобщение использованного ранее в первой главе понятия трехмерного евклидова пространства.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.8.** *Вещественное линейное пространство назовем евклидовым  $E_n$ , если в нем определена операция скалярного умножения, которая любой паре векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  сопоставляет вещественное число, обозначаемое как  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ , и которая обладает следующими свойствами:*

- 1°  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$ ;
  - 2°  $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$ ;
  - 3°  $(s\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = s(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ ;
  - 4°  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \geq 0$  (причем равенство достигается только если  $\mathbf{a} = 0$ );
- где  $s$  – произвольное действительное число.

Длиной вектора  $\mathbf{a}$  называют число:  $|\mathbf{a}| = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})^{1/2}$ .

Имеет место неравенство Коши-Буняковского:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \leq |\mathbf{a}| |\mathbf{b}|, \quad (2.12)$$

доказательство которого следует из соотношения:

$$(\mathbf{p}\mathbf{a} + \mathbf{q}\mathbf{b}) \cdot (\mathbf{p}\mathbf{a} + \mathbf{q}\mathbf{b}) = \mathbf{p}^2 |\mathbf{a}|^2 + 2\mathbf{p}\mathbf{q}\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{q}^2 |\mathbf{b}|^2 \geq 0. \quad (2.13)$$

Здесь  $p$  и  $q$  – произвольные числа, в качестве которых можно выбрать:  $p = |\mathbf{b}|^2$ ,  $q = -\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ , что и приведет к неравенству (2.12).

Векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  называют ортогональными, если  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ .

Систему векторов  $\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_m$  в евклидовом пространстве называют ортогональной, если любые два вектора этой системы ортогональны.

**ТЕОРЕМА 2.8.** *Любая ортогональная система ненулевых векторов линейно независима.*

▼ Для доказательства предположим противное, т.е. существует ортогональная линейно зависимая система векторов  $\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_m$ , для которой  $s^1\mathbf{a}_1 + \dots + s^m\mathbf{a}_m = 0$ . Умножая это соотношение скалярно на произвольный вектор  $\mathbf{a}_i$ , получим, в силу ортогональности, что все слагаемые в сумме обращаются в нуль, кроме  $s^i|\mathbf{a}_i| = 0$ . Так как  $\mathbf{a}_i$  – ненулевой, то, в силу аксиомы 4°,  $|\mathbf{a}_i| \neq 0$  и, следовательно,  $s^i = 0$ . Поскольку индекс  $i$  был произволен, то все коэффициенты  $s^i = 0$ , что противоречит условию (2.1) линейной зависимости. Это противоречие и доказывает теорему. ▲

Ортогональная система  $\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_n$ , все векторы которой имеют единичную длину  $|\mathbf{e}_i| = 1$ , называется ортонормированной.

**Теорема 2.9.** В  $n$ -мерном евклидовом пространстве существует ортонормированная система из  $n$  векторов.

▼ Докажем эту теорему по индукции. Если  $n = 1$ , то выбрав ненулевой вектор  $\mathbf{a}$ , образуем из него вектор единичной длины:  $\mathbf{e} = \mathbf{a}/|\mathbf{a}|$ . Тогда теорема будет справедлива. Предположим теперь, что в каждом  $(n - 1)$ -мерном евклидовом пространстве существует ортонормированный базис и перейдем к  $n$ -мерному евклидовому пространству  $\mathcal{E}_n$ . Выберем в нем произвольный базис  $\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_n$ , тогда линейная оболочка векторов  $\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{n-1}$ , согласно п.2.1.4, образует  $(n - 1)$ -мерное евклидово пространство  $\mathcal{E}'_{n-1}$ , и по индукции в  $\mathcal{E}'_{n-1}$  существует ортонормированный базис  $\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_{n-1}$ . Введем далее вектор  $\mathbf{a}'_n = \mathbf{a}_n - s_1 \mathbf{e}_1 - \dots - s_{n-1} \mathbf{e}_{n-1}$ , где коэффициенты  $s_1 \dots s_{n-1}$  определим по формулам:  $s_i = \mathbf{a}_n \cdot \mathbf{e}_i$ , и на его основе построим вектор  $\mathbf{e}_n = \mathbf{a}'_n / |\mathbf{a}'_n|$ . Длина этого вектора  $\mathbf{e}_n$  равна единице, и он ортогонален ко всем векторам  $\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_{n-1}$ , что легко проверяется непосредственно. Тогда система векторов  $\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_{n-1} \mathbf{e}_n$  будет ортонормированной. Теорема доказана. ▲

Метод построения, использованный при доказательстве, называют *методом ортогонализации Грама-Шмидта*.

Пусть теперь имеется  $n$ -мерное евклидово пространство, тогда в нем можно выбрать базис  $\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_n$  и ввести матрицу  $g_{ij}$  из попарных скалярных произведений:

$$g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j, \quad i, j = 1 \dots n, \quad (2.14)$$

эта матрица называется *фундаментальной* или *матрицей Грама*.

Если для базиса  $\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_n$  фундаментальная матрица является единичной:

$$g_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j, \end{cases} \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (2.15)$$

то такой базис называется *ортонормированным*, где  $\delta_{ij}$  —  $n$ -мерный символ Кронекера.

Из теорем 2.8 и 2.9 следует, что в  $n$ -мерном евклидовом пространстве  $\mathcal{E}_n$  существует линейно независимая ортонормированная система  $n$  векторов, которая, согласно теореме 2.4, является ортонормированным базисом в  $\mathcal{E}_n$ .

### Упражнения к § 2.1.

**Упражнение 2.1.1.** Доказать, что линейное пространство  $\mathcal{L}$  с аксиомами 1°...8° обладает единственным нулевым вектором  $\mathbf{0}$ , а противоположный элемент  $(-\mathbf{a})$  для всякого  $\mathbf{a} \in \mathcal{L}$  также является единственным.

**Упражнение 2.1.2.** Доказать, что для любого вектора  $\mathbf{a} \in \mathcal{L}$  и любого  $k$  имеют место соотношения:

$$0\mathbf{a} = \mathbf{0}, \quad (-1)\mathbf{a} = -\mathbf{a}, \quad k\mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

**Упражнение 2.1.3.** Функция  $P_m(x)$  называется *полиномом* или *целой рациональной функцией* от аргумента  $x$ , если она может быть представлена в виде

$$P_m(x) = \sum_{i=0}^m k_i \cdot x^i,$$

где  $x^i$  означает  $i$ -ую степень числа  $x$  из области определения функции,  $m$  – натуральное или 0,  $k_i$  – действительное (или комплексное) число ( $k_m \neq 0$ ). Доказать, что множество всех полиномов  $P_m(x)$  степени не выше заданной  $m \leq n$  образует линейное пространство.

**Упражнение 2.1.4.** Доказать, что любая система  $\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_n$  векторов линейного пространства  $\mathcal{L}$ , включающая в себя нулевой вектор, является линейно зависимой.

**Упражнение 2.1.5.** Доказать, что каждая подсистема линейно независимой системы из  $\mathcal{L}$  сама является линейно независимой.

**Упражнение 2.1.6.** Показать, что компоненты  $a^i$  вектора  $\mathbf{a} \in \mathcal{L}$  в базисе  $\mathbf{e}_i$  определяются однозначно.

**Упражнение 2.1.7.** Доказать, что множество всех тензоров второго ранга, введенных геометрическим способом по формуле (1.104) с операциями (1.105), образует линейное пространство.

**Упражнение 2.1.8.** Доказать, что множество всех квадратных  $n$ -мерных матриц образует линейное  $n$ -мерное пространство.

**Упражнение 2.1.9.** Показать, что скалярное произведение векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  из  $\mathcal{E}_n$  можно представить в виде:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = g_{ij} a^i b^j,$$

где  $a^i$  и  $b^j$  – их компоненты в некотором базисе  $\mathbf{e}_i$ . Если же этот базис ортонормированный, то

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \delta_{ij} a^i b^j = \sum_{\alpha=1}^n a^\alpha b^\alpha.$$

**Упражнение 2.1.10.** Доказать, что в  $n$ -мерном пространстве любая линейно независимая система из  $n$  векторов является базисом.

**Упражнение 2.1.11.** Доказать, что множество всех непрерывных функций одной независимой переменной  $x$ , определенных на отрезке  $[0, 1]$ , образует линейное пространство.

**Упражнение 2.1.12.** Доказать, что пространство всех непрерывных функций одной переменной, определенных на отрезке  $[0, 1]$ , является бесконечномерным.

**Упражнение 2.1.13.** Множество  $\mathbb{R}^n$ , элементами которого являются упорядоченные совокупности  $n$  произвольных действительных чисел  $(x^1, \dots, x^n)$ , называется *арифметическим пространством*. Доказать, что  $\mathbb{R}^n$  является  $n$ -мерным линейным пространством.

**Упражнение 2.1.14.** Доказать теорему 2.7.

**Упражнение 2.1.15.** Пусть  $\mathcal{L}'$  и  $\mathcal{L}''$  – два линейных пространства размерности  $n$  и  $m$ . Доказать, что

$$\dim (\mathcal{L}' + \mathcal{L}'') = \dim \mathcal{L}' + \dim \mathcal{L}'' - \dim (\mathcal{L}' \cap \mathcal{L}'').$$

## § 2.2. Матрицы $n$ -го порядка

### 2.2.1. Определение матриц $n$ -го порядка

В трехмерном пространстве в первой главе мы использовали только квадратные матрицы размером  $3 \times 3$ , например, для обозначения компонент тензора:  $A^i_j$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ . Действия с  $n$ -мерными векторами требуют введения матриц большей размерности.

*Матрицей* размером  $m \times n$  называется совокупность из  $mn$  чисел, расположенных в виде таблицы из  $m$  строк и  $n$  столбцов:

$$\begin{pmatrix} A^1_1 & A^1_2 & \dots & A^1_n \\ A^2_1 & A^2_2 & \dots & A^2_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A^m_1 & A^m_2 & \dots & A^m_n \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

Далее будем рассматривать в основном *квадратные* матрицы, для которых  $m = n$ :

$$A = (A^i_j) = \begin{pmatrix} A^1_1 & \dots & A^1_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A^n_1 & \dots & A^n_n \end{pmatrix}. \quad (2.17)$$

Будем также говорить, что эти матрицы имеют порядок  $n$  и использовать для них обозначение  $A^i_j$ , где  $i, j$  пробегают значения  $1 \dots n$ , либо просто обозначение  $A$  (с помощью заглавной нежирной буквы). Числа  $A^i_j$ , составляющие матрицу, называют *элементами матрицы*.

Две матрицы одинакового размера  $m \times n$  называют *равными*, если равны их соответствующие элементы.

Заметим, что матрицы  $n$ -го порядка могут быть составлены из элементов и с другой структурой индексов:

$$(A^{ij}) = \begin{pmatrix} A^{11} & \dots & A^{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A^{n1} & \dots & A^{nn} \end{pmatrix}, \quad (A_{ij}) = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

$$(A_i^j) = \begin{pmatrix} A_1^1 & \dots & A_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_n^1 & \dots & A_n^n \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

Вообще говоря, все эти матрицы различны, однако если имеется информация о том, что значения элементов матрицы не зависит от расположения индексов  $i, j$  (верхний или нижний), то все четыре матрицы (2.17), (2.18) равны между собой. Так, например, обстоит дело, когда  $A^i_j$  – компоненты тензора в трехмерном декартовом базисе.

Будем далее, если это не оговорено особо, полагать, что такая информация у нас имеется.

### 2.2.2. Основные операции с матрицами

С матрицами  $n$ -го порядка можно определить те же самые операции, что и с трехмерными, например, транспонирование матрицы  $A^T$ :

$$A^T = (A^j_i) = \begin{pmatrix} A^1_1 & \dots & A^n_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A^1_n & \dots & A^n_n \end{pmatrix}. \quad (2.19)$$

Сумма двух матриц  $n$ -го порядка  $A$  и  $B$  есть матрица  $C$   $n$ -го порядка с компонентами:  $C^i_j = A^i_j + B^i_j$ .

Нулевая матрица – это матрица с нулевыми компонентами. Противоположная матрица  $(-A)$  – это матрица с компонентами  $(-A^i_j)$ . Умножение матрицы на число  $s$  образует матрицу  $n$ -го порядка с компонентами  $(sA^i_j)$ .

Перечисленные свойства позволяют сделать вывод о том, что множество всех квадратных матриц порядка  $n$  образует линейное пространство  $\mathcal{L}$ , "векторами" которого являются сами матрицы (см. упр. 2.1.8).

Матрица  $A$  является *симметричной*, если она совпадает со своей транспонированной:  $A = A^T$ .

Матрица  $A$  называется *кососимметричной*, если  $A = -A^T$ .

Единичная  $n$ -мерная матрица  $E_n$  имеет единицу на главной диагонали и нулевые остальные компоненты:

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.20)$$

Матрица  $A$  называется *ортогональной*, если ее умножение на свою транспонированную матрицу  $A^T$  дает  $E_n$ :

$$A \cdot A^T = E_n. \quad (2.21)$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.9.** Скалярным произведением (или просто произведением) матриц  $A$  и  $B$   $n$ -го порядка называется матрица  $C$   $n$ -го порядка с компонентами  $C^i_j = A^i_k B^k_j$ , где  $i, j, k = 1 \dots n$ , а по  $k$  идет суммирование.

Произведение матриц  $A$  и  $B$  можно записать и таким образом:

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{pmatrix} A^1_1 & \dots & A^1_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A^n_1 & \dots & A^n_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B^1_1 & \dots & B^1_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B^n_1 & \dots & B^n_n \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} A^1_k B^k_1 & \dots & A^1_k B^k_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A^n_k B^k_1 & \dots & A^n_k B^k_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C^1_1 & \dots & C^1_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C^n_1 & \dots & C^n_n \end{pmatrix} = C, \quad (2.22) \end{aligned}$$

т.е. каждый элемент матрицы  $C^i_j$  есть результат умножения координатной строки  $(A^i_1 \dots A^i_n)$  на координатный столбец  $(B^1_j \dots B^n_j)^T$ .

*Скалярным произведением* матрицы  $A$  размером  $m \times n$  на координатный столбец  $\mathbf{a} = (a^1 \dots a^n)^T$  называется координатный столбец  $\mathbf{b} = (b^1 \dots b^m)^T$ , компоненты которого вычисляются по формуле:

$$b^i = \sum_{j=1}^n A^i_j a^j, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.23)$$

или

$$\begin{pmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^1_1 & \dots & A^1_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A^n_1 & \dots & A^n_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^n \end{pmatrix}, \quad (2.24)$$

или иначе

$$\mathbf{b} = A \cdot \mathbf{a}. \quad (2.25)$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.10.** Скалярное умножение квадратной матрицы  $A$   $n$ -го порядка на координатную строку  $\mathbf{b}^T = (b^1 \dots b^n)$  слева и на координатный столбец  $\mathbf{a} = (a^1 \dots a^n)^T$  справа образует билинейную форму (скаляр):

$$\varphi(\mathbf{b}, \mathbf{a}) = \mathbf{b}^T \cdot A \cdot \mathbf{a}, \quad (2.26)$$

Иначе ее можно записать следующим образом:

$$\varphi = \sum_{i,j=1}^n A_{ij} a^i b^j, \quad (2.27)$$

или

$$\varphi = (\mathbf{b}^1 \dots \mathbf{b}^n) \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^n \end{pmatrix}. \quad (2.28)$$

Если матрица  $A$  – симметричная, то билинейная форма также симметрична:  $\varphi(\mathbf{b}, \mathbf{a}) = \varphi(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  (верно и обратное утверждение).

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.11.** Квадратичной формой называется выражение вида (2.26) – (2.28) при  $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ , т.е.  $\psi(\mathbf{a}) = \mathbf{a}^T \cdot A \cdot \mathbf{a}$ .

Матрица  $A$   $n$ -го порядка называется положительно определенной, если ее квадратичная форма всегда положительна:

$$\psi(\mathbf{a}) = \mathbf{a}^T \cdot A \cdot \mathbf{a} = \sum_{i,j=1}^n A_{ij} a^i a^j > 0 \quad (2.29)$$

для любого ненулевого вектора  $\mathbf{a}$  из рассматриваемого пространства  $\mathcal{L}_n$ .

### 2.2.3. Детерминант и обратная матрица

Детерминант (определитель) матрицы  $A$   $n$ -го порядка введем рекуррентным способом: детерминантом матрицы первого порядка, состоящим из одного числа  $A^1$ , назовем само это число; детерминантом матрицы  $n$ -го порядка  $n > 1$  назовем число

$$\det A = \sum_{\alpha=1}^n (-1)^{\alpha+1} A_\alpha^1 M_\alpha^1, \quad (2.30)$$

где  $M_\alpha^1$  – детерминант матрицы размерности  $(n - 1)$ , получаемой из  $A$  вычеркиванием первой строки и второго столбца ( $\alpha = 1 \dots n$ ). Вообще, такой детерминант  $M_{ij}^i$  матрицы, полученной из  $A$  вычеркиванием  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца называется минором элемента  $A_{ij}^i$ .

Нетрудно убедиться, что введенный ранее детерминант трехмерной матрицы (1.8) полностью удовлетворяет определению (2.30).

Формула (2.30) называется разложением детерминанта по первой строке, вообще же детерминант может быть представлен разложением по  $i$ -й строке или по  $j$ -ому столбцу (см. упр. 2.2.1).

Детерминант может быть непосредственно выражен через элементы матрицы (см. упр. 2.2.2):

$$\det A = \sum_{(i_1 \dots i_n)} (-1)^{|i_1 \dots i_n|} A_{i_1}^1 A_{i_2}^2 \dots A_{i_n}^n, \quad (2.31)$$

где сумма определяется по всем подстановкам  $(i_1 \dots i_n)$  из  $n$  чисел  $(1 \dots n)$ .

Число  $N = |i_1 \dots i_n|$  называется знаком перестановки и равно общему числу элементарных перестановок (при которых меняются местами два соседних числа), приводящих подстановку  $i_1 \dots i_n$  к тождественной  $(1 \dots n)$ .

Если детерминант матрицы  $A$  отличен от нуля:  $\det A \neq 0$ , то можно определить *обратную матрицу*  $A^{-1}$ , которая при умножении на  $A$  дает единичную матрицу:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E_n. \quad (2.32)$$

Если рассматривать матрицу  $A$   $n$ -го порядка как совокупность координатных столбцов или координатных строк, то можно сформулировать следующую теорему.

**ТЕОРЕМА 2.10.** Система координатных столбцов или строк матрицы  $A$  линейно независима тогда и только тогда, когда  $\det A \neq 0$ .

Доказательство можно найти, например, в [4].

Для матрицы  $A$  размером  $m \times n$  самый большой порядок, для которого существуют отличные от нуля миноры, называют *рангом матрицы* и обозначают  $\text{rang } A$ .

Имеет место следующая теорема, доказательство которой приводится в курсе линейной алгебры, например, в [4].

**ТЕОРЕМА 2.10А.** Ранг матрицы  $A$  равен максимальному числу линейно независимых строк или столбцов этой матрицы.

## 2.2.4. Блочные матрицы

Любую матрицу  $A$  размером  $m \times n$  можно разбить на матрицы меньшего размера (блоки) с помощью горизонтальных и вертикальных "перегородок", идущих вдоль всей матрицы. Например, для матрицы  $3 \times 3$ :

$$A = \left( \begin{array}{c|cc} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{array} \right), \quad (2.33)$$

где  $A_{ij}$  – элементы матрицы ( $i, j = 1, 2, 3$ ), а  $\tilde{A}_{ut}$  ( $u, t = 1, 2$ ) – это уже блоки-матрицы меньшего размера:

$$\tilde{A}_{11} = (A_{11}), \quad \tilde{A}_{12} = (A_{12}, A_{13}),$$

$$\tilde{A}_{21} = \begin{pmatrix} A_{21} \\ A_{31} \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}_{22} = \begin{pmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}. \quad (2.34)$$

Вообще же разбиение произвольной матрицы  $A$  на блоки  $A_{ut}^B$  ( $u = 1 \dots p$ ) можно записать следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & \dots & A_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \dots & \dots & \dots & \tilde{A}_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \tilde{A}_{ut} & \dots & \dots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{A}_{p1} & \dots & \dots & \dots & \tilde{A}_{pq} \end{pmatrix}, \quad (2.35)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{11} &= \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m_1 1} & \dots & A_{m_1 n_1} \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}_{1q} = \begin{pmatrix} A_{1n_{q-1}+1} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m_1 n_{q-1}+1} & \dots & A_{m_1 n} \end{pmatrix}, \\ \tilde{A}_{ut} &= \begin{pmatrix} A_{m_{u-1}+1, n_{t-1}+1} & \dots & A_{m_{u-1}+1, n_t} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m_u n_{t-1}+1} & \dots & A_{m_u n_t} \end{pmatrix}, \quad (2.35') \\ \tilde{A}_{p1} &= \begin{pmatrix} A_{m_{p-1}+1, 1} & \dots & A_{m_{p-1}+1, n_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & \dots & A_{mn_1} \end{pmatrix}, \\ \tilde{A}_{pq} &= \begin{pmatrix} A_{m_{p-1}+1, n_{q-1}+1} & \dots & A_{m_{p-1}+1, n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{mn_{q-1}+1} & \dots & A_{mn} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Блочная форма матрицы задается двумя *массивами перегородок*:

$$(m_1 \dots m_{p-1} | p), \quad (n_1 \dots n_{q-1} | q), \quad (2.36)$$

где  $m_1 \dots m_{p-1}$  – индексы элементов матрицы  $A_{ij}$ , соответствующие горизонтальным "перегородкам", а  $n_1 \dots n_{q-1}$  – вертикальные перегородки блоков,  $p$  и  $q$  – число блоков в столбце и в строке.

Для рассмотренного выше примера матрицы  $3 \times 3$  имеем:

$$(1|2) \quad \text{и} \quad (1|2).$$

Наиболее эффективно введение блочной формы для матрицы, когда отдельные ее блоки имеют существенно различные элементы. Таковы, например, блоки из нулевых элементов, или блоки в виде единичных матриц.

**ТЕОРЕМА 2.11.** Операции сложения и умножения с блочными матрицами формально совершаются по тем же правилам, что и действия с обычными матрицами.

▼ А) Сумма двух матриц  $A$  и  $B$  размером  $m \times n$  одинаковой блочной формы, т.е. с одинаковыми массивами перегородок:

$$A = \left( \begin{array}{c|c|c} \tilde{A}_{11} & \dots & \tilde{A}_{1q} \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline \tilde{A}_{p1} & \dots & \tilde{A}_{pq} \end{array} \right), \quad B = \left( \begin{array}{c|c|c} \tilde{A}_{11} & \dots & \tilde{B}_{1q} \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline \tilde{B}_{p1} & \dots & \tilde{B}_{pq} \end{array} \right). \quad (2.37)$$

является матрица  $C$  размером  $m \times n$  с той же блочной формой:

$$C = A + B = \left( \begin{array}{c|c|c} \tilde{A}_{11} + \tilde{B}_{11} & \dots & \tilde{A}_{1q} + \tilde{B}_{1q} \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline \tilde{A}_{p1} + \tilde{B}_{p1} & \dots & \tilde{A}_{pq} + \tilde{B}_{pq} \end{array} \right). \quad (2.38)$$

Б) Произведением двух блочных матриц  $A$  и  $B$  с размерами  $m \times n$  и  $n \times k$  соответственно:

$$A = \left( \begin{array}{c|c|c|c|c} \tilde{A}_{11} & \dots & \dots & \dots & \tilde{A}_{1q} \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline \dots & \dots & \tilde{A}_{ut} & \dots & \dots \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline \tilde{A}_{p1} & \dots & \dots & \dots & \tilde{A}_{pq} \end{array} \right),$$

$$B = \left( \begin{array}{c|c|c|c|c} \tilde{B}_{11} & \dots & \dots & \dots & \tilde{B}_{1s} \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline \dots & \dots & \tilde{B}_{tv} & \dots & \dots \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline \tilde{B}_{q1} & \dots & \dots & \dots & \tilde{B}_{qs} \end{array} \right), \quad (2.39)$$

блочная форма которых имеет массивы перегородок:

$$A : (m_1 \dots m_u m_{p-1} | p) (n_1 \dots n_t n_{q-1} | q), \quad (2.40)$$

$$B : (n_1 \dots n_t n_{q-1} | q) (k_1 \dots k_v k_{s-1} | s),$$

(т.е. число столбцов в каждом блоке  $\tilde{A}_{ut}$  равняется числу строк в блоке  $\tilde{B}_{tv}$ , а также совпадают число  $q$  блоков в строке матрицы  $A$

и число блоков  $r = q$  в столбце матрицы  $B$ ), является матрица  $C$  размером  $m \times k$ :

$$C = \left( \begin{array}{c|ccc|c} \tilde{C}_{11} & \dots & \dots & \dots & \tilde{C}_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline \dots & \dots & \tilde{C}_{uv} & \dots & \dots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline \tilde{C}_{p1} & \dots & \dots & \dots & \tilde{C}_{ps} \end{array} \right) \quad (2.41)$$

с массивом перегородок

$$(m_1 \dots m_u m_{p-1} | p) \ (k_1 \dots k_v k_{s-1} | s), \quad (2.42)$$

причем каждый блок  $\tilde{C}_{uv}$  ( $u = 1 \dots p$ ,  $v = 1 \dots s$ ) вычисляется по формуле:

$$\tilde{C}_{uv} = \sum_{t=1}^q \tilde{A}_{ut} \cdot \tilde{B}_{tv}. \quad (2.43)$$

(Умножение блоков происходит по обычному правилу умножения матриц).

Доказательство утверждения А) очевидно, так как матрицы  $A$  и  $B$  складываются поэлементно независимо от той или иной блочной формы.

Для доказательства утверждения Б) достаточно расписать выражение для элемента матрицы  $C_{ik}$ , выделив из него суммы элементов, принадлежащих блокам:

$$\begin{aligned} C_{ik} &= \sum_{j=1}^n A_{ij} B_{jk} = (A_{i1} B_{1k} + \dots + A_{in_1} B_{n_1 k}) + \dots + \\ &+ (A_{in_{q-1}+1} B_{n_{q-1}+1 k} + \dots + A_{in} B_{nk}) = \\ &= \sum_{t=1}^q (A_{in_{q-1}+1} B_{n_{t-1}+1 k} + \dots + A_{in} B_{nt k}). \end{aligned} \quad (2.44)$$

Если элементы  $C_{ik}$  соответствуют блоку  $\tilde{C}_{uv}$  (т.е.  $i = m_{u-1} + 1 \dots m_u$ ,  $k = n_{v-1} + 1 \dots n_v$ ), то в скобках в последнем выражении будет в точности стоять произведение элементов блоков  $\tilde{A}_{ut} \cdot \tilde{B}_{tv}$ , а суммирование будет идти по числу блоков:  $t = 1 \dots q$ . Здесь принято, что  $n_0 = 1$ ,  $n_q = n$ . Утверждение доказано. ▲

Если матрица  $A$  имеет отличными от нулевых только блоки  $\tilde{A}_{11} \dots \tilde{A}_{pp}$ , а  $p = q$ , то она называется *квазидиагональной*. Такая матрица

содержит блоки только на главной диагонали:

$$A = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{A}_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{A}_{pp} \end{pmatrix}. \quad (2.45)$$

При умножении квазидиагональных матриц перемножаются соответствующие блоки, т.е. в суммах (2.43) имеется по одному слагаемому, и будет снова образована квазидиагональная матрица.

## 2.2.5. Треугольные матрицы

Матрица  $L$   $n$ -ого порядка называется *верхней треугольной*, если все ее элементы  $L^i_j$  ниже главной диагонали равны нулю:  $L^i_j = 0$ ,  $i > j$ . Такая матрица имеет вид:

$$L = \begin{pmatrix} L^1_1 & L^1_2 & \dots & L^1_n \\ 0 & L^2_2 & \dots & L^2_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & L^n_n \end{pmatrix}. \quad (2.46)$$

Квадратная матрица  $L$  называется *нижней треугольной*, если равны нулю все ее элементы выше главной диагонали:  $L^i_j = 0$ ,  $i < j$ , т.е.

$$L = \begin{pmatrix} L^1_1 & 0 & \dots & 0 \\ L^2_1 & L^2_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L^n_1 & L^n_2 & \dots & L^n_n \end{pmatrix}. \quad (2.46')$$

**ТЕОРЕМА 2.12 (ТЕОРЕМА ХОЛЕЦКОГО).** *Всякая симметричная, положительно определенная матрица  $A$   $n$ -ого порядка может быть единственным образом представлена в виде произведения двух матриц:*

$$A = L \cdot L^T, \quad (2.47)$$

где  $L$  – *нижняя треугольная матрица с положительными диагональными элементами*, а  $L^T$  – *верхняя треугольная матрица*.

▼ Доказательство проведем методом математической индукции. Для  $n = 1$  матрица  $A$  имеет один положительный элемент  $A_{11}$ , поэтому матрица  $L$  также состоит из одного элемента:  $L_{11} = \sqrt{A_{11}}$ .

Предположим, что теорема верна для матриц  $(n - 1)$ -го порядка, и рассмотрим симметричную, положительно определенную матрицу  $A$   $n$ -го порядка. Ее всегда можно представить в блочной форме:

$$A = \left( \begin{array}{c|c} A_{11} & \mathbf{b}^T \\ \hline \mathbf{b} & \tilde{A}_{22} \end{array} \right), \quad \text{где } \tilde{A}_{22} = \left( \begin{array}{ccc} A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{array} \right), \quad (2.48)$$

где  $A_{11} = \tilde{A}_{11}$  – положительный элемент,  $\mathbf{b} = \tilde{A}_{12} = (A_{12} \dots A_{1n})^T$  – координатный столбец длины  $(n - 1)$ ,  $\tilde{A}_{22}$  – симметричная, положительно определенная матрица  $(n - 1)$ -го порядка.

Блочную матрицу (2.48) можно записать в виде произведения трех новых блочных матриц:

$$A = \left( \begin{array}{c|c} \sqrt{A_{11}} & 0 \\ \hline (1/\sqrt{A_{11}})\mathbf{b} & E_{n-1} \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & H \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|c} \sqrt{A_{11}} & (1/\sqrt{A_{11}})\mathbf{b}^T \\ \hline 0 & E_{n-1} \end{array} \right), \quad (2.49)$$

где  $E_{n-1}$  – единичная матрица порядка  $(n - 1)$ , а

$$H = \tilde{A}_{22} - \frac{1}{A_{11}}\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}^T \quad (2.50)$$

– симметричная матрица, т.к.  $A_{22}$  – симметрична и  $\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}^T$  – симметричная матрица  $(n - 1)$ -го порядка (см.упр. 2.2.5).

Справедливость соотношения легко установить непосредственным перемножением блочных матриц по правилу (2.43).

Выберем теперь некоторый ненулевой координатный столбец  $\mathbf{a}$   $(n - 1)$ -го порядка, образуем по нему столбец  $n$ -го порядка:

$$\mathbf{c} = \left( \begin{array}{c} -\frac{1}{\sqrt{A_{11}}}\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b} \\ \mathbf{a} \end{array} \right) \quad (2.51)$$

(заметим, что  $\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b}$  – скаляр (см.упр. 2.2.5)), а затем составим квадратичную форму:

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^T \cdot A \cdot \mathbf{c} &= \left( -\frac{1}{\sqrt{A_{11}}}\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b}, \mathbf{a}^T \right) \left( \begin{array}{c|c} \sqrt{A_{11}} & \mathbf{b}^T \\ \hline \mathbf{b} & \tilde{A}_{22} \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} -\frac{1}{\sqrt{A_{11}}}\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b} \\ \mathbf{a} \end{array} \right) = \\ &= \mathbf{a}^T \cdot \left( \tilde{A}_{22} - \frac{1}{A_{11}}\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}^T \right) \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}^T \cdot H \cdot \mathbf{a}. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Так как  $A$  – положительно определена, то из (2.52) следует, что и  $H$  будет также положительно определенной. Тогда по предположению

индукции она имеет треугольное представление  $H = L_H \cdot L_H^T$ , где  $L_H^T$  – треугольная матрица  $(n-1)$ -го порядка с положительной диагональю. Подставляя это представление в (2.52), получаем:

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{A_{11}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{A_{11}}} \mathbf{b} & E_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & L_H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & L_H^T \end{pmatrix} \times \\ \times \begin{pmatrix} \sqrt{A_{11}} & \frac{1}{\sqrt{A_{11}}} \mathbf{b}^T \\ 0 & E_{n-1} \end{pmatrix} = L \cdot L^T, \quad (2.53)$$

где  $L$  – треугольная матрица  $n$ -го порядка с положительной диагональю:

$$L = \begin{pmatrix} \sqrt{A_{11}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{A_{11}}} \mathbf{b} & L_H \end{pmatrix}. \quad (2.54)$$

Существование представления (2.47) доказано.

Предположим, что существуют две различные матрицы  $L$  и  $L'$ , удовлетворяющие представлению (2.47), которое может быть записано в элементном виде:

$$A_{ij} = \sum_{\alpha=1}^j L_{i\alpha} L_{j\alpha} = \sum_{\alpha=1}^j L'_{i\alpha} L'_{j\alpha} \quad \text{для } i \geq j. \quad (2.55)$$

Выразим из этой формулы отдельно диагональные элементы матрицы  $L$ , а затем остальные ее элементы:

$$L_{\beta\beta}^2 = A_{\beta\beta} - \sum_{\alpha=1}^{\beta-1} L_{\beta\alpha}^2, \quad \beta = 1 \dots n,$$

$$L_{i\beta} = \left( A_{i\beta} - \sum_{\alpha=1}^{\beta-1} L_{i\alpha} L_{\beta\alpha} \right) \frac{1}{L_{\beta\beta}}, \quad i = \beta + 1 \dots n. \quad (2.56)$$

Эти формулы позволяют найти элементы матрицы  $L$ , причем единственным образом:

$$L_{11} = \sqrt{A_{11}}, \quad L_{21} = \frac{A_{21}}{A_{11}}, \quad L_{22} = (A_{22} - L_{21}^2)^{1/2}, \quad (2.57)$$

$$L_{31} = \frac{A_{31}}{A_{11}}, \quad L_{32} = \frac{1}{A_{11}} (A_{32} - L_{31} L_{11}), \quad L_{33} = (A_{33} - L_{31}^2 - L_{32}^2)^{1/2} \text{ и т.д.}$$

Знак "+" перед корнем выбираем из-за положительности  $L_{\beta\beta}$  по условию.

В силу единственности решения уравнений (2.56), проводя аналогичное построение для матрицы  $L'$ , получим те же самые выражения для ее элементов  $L'_{ij}$ , что и доказывает теорему. ▲

Приведенное доказательство является конструктивным: формулы (2.56) позволяют найти матрицу  $L$  по матрице  $A$ .

### Упражнения к § 2.2.

**Упражнение 2.2.1.** Используя определение (2.30), методом математической индукции доказать, что детерминант  $n$ -мерной матрицы можно представить в виде:

$$\det A = \sum_{\alpha=1}^n (-1)^{\alpha+1} A_\alpha^\beta M_\alpha^\beta,$$

или

$$\det A = \sum_{\beta=1}^n (-1)^{\beta+1} A_\alpha^\beta M_\alpha^\beta,$$

где  $\alpha + \beta = 1 \dots n$ .

**Упражнение 2.2.2.** Методом математической индукции доказать формулу (2.31).

**Упражнение 2.2.3.** Методом математической индукции доказать, что для  $n$ -мерных матриц выполнено равенство:

$$\det A = \det A^T.$$

**Упражнение 2.2.4.** Показать, что из (2.25) следует формула умножения матрицы на координатную строку:

$$\mathbf{b}^T = \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{A}^T.$$

**Упражнение 2.2.5.** Доказать, что скалярное умножения координатной строки на столбец дает скаляр, а столбца на строку – матрицу  $n$ -го порядка:

$$\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b} = \sum_{\alpha=1}^n a^\alpha b^\alpha, \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}^T = \begin{pmatrix} a^1 b^1 & \dots & a^1 b^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a^n b^1 & \dots & a^n b^n \end{pmatrix}.$$

**Упражнение 2.2.6.** Методом математической индукции доказать, что матрица, обратная к верхней (нижней) невырожденной треугольной матрице, является также верхней (нижней) треугольной.

**Упражнение 2.2.7.** Показать, что для матриц  $n$ -го порядка имеют место соотношения:

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T, \quad A \cdot (B + C) = AB + AC.$$

**Упражнение 2.2.8.** Используя теорему 2.10, доказать, что для фундаментальной матрицы, определенной в (2.14) всегда выполнено соотношение:

$$\det g_{ij} \neq 0.$$

### § 2.3. Линейные преобразования $n$ -мерных пространств

#### 2.3.1. Определение отображения и линейного преобразования

Вернемся к рассмотрению линейных пространств.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.12.** Если имеет место закон, который каждому элементу  $a \in M$  ставит в соответствие единственный элемент  $b \in N$ , то говорят, что имеется отображение  $A$  множества  $M$  в множество  $N$ , которое обозначают как  $A: M \rightarrow N$ , или в виде зависимости:

$$b = A(a), \quad a \in M, \quad b \in N. \quad (2.58)$$

Отображение (2.58) называют *сюръективным*, если для каждого  $b \in N$  существует  $a \in M$  такой, что  $f(a) = b$ . Отображение (2.58) называют *инъективным*, если из  $a_1 \neq a_2$  следует, что  $f(a_1) \neq f(a_2)$ , где  $a_1, a_2 \in M$ . Если отображение одновременно сюръективно и инъективно, то его называют *взаимнооднозначным* (*биективным*).

Если  $\mathcal{L}$  и  $\mathcal{L}'$  – два линейных пространства  $\mathcal{L}$  и  $\mathcal{L}'$  размерности  $n$  и  $m$ , оба вещественные или оба комплексные, то (2.58) определяет отображение  $A: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}'$  пространства  $\mathcal{L}$  в  $\mathcal{L}'$ . В этом случае отображение (2.58) называют также *оператором*, действующим из  $\mathcal{L}$  в  $\mathcal{L}'$ . Если  $\mathcal{L}'$  есть пространство вещественных (или комплексных) чисел, то (2.58) называют *функционалом*. Вектор  $b$ , определяемый по (2.58), называют *образом*  $a$ , а вектор  $a$  – *прообразом*  $b$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.13.** Если отображение (2.58) удовлетворяет следующим условиям:

- 1º  $A(a_1 + a_2) = A(a_1) + A(a_2)$ , для любых  $a_1, a_2 \in \mathcal{L}$ ,
  - 2º  $A(sa_1) = sA(a)$ , для любого  $s \in \mathbb{R}$  и любого вещественного (или комплексного)  $s$  (однородность степени 1),
- то его называют *линейным* (или *линейным оператором*).

Если  $\mathcal{L}$  и  $\mathcal{L}'$  совпадают, то линейное отображение (2.58) называют *линейным преобразованием*.

#### 2.3.2. Матрица линейного преобразования

Пусть имеется линейное  $n$ -мерное пространство  $\mathcal{L}_n$ , тогда в нем можно выбрать базис из  $n$  векторов:  $e_1 \dots e_n$ . Если над  $\mathcal{L}_n$  осуществляется линейное преобразование  $A: \mathcal{L}_n \rightarrow \mathcal{L}_n$ , то выбранному базису будет соответствовать единственный набор из  $n$  векторов:  $A(e_1) \dots A(e_n)$ . Поскольку векторы  $A(e_i)$  также принадлежат  $\mathcal{L}_n$ , то их можно разложить по базису  $e_1 \dots e_n$ :

$$A(e_j) = \sum_{i=1}^n A^i{}_j e_i, \quad j = 1 \dots n, \quad (2.59)$$

где  $A^i_j$  – коэффициенты разложения. Эти коэффициенты образуют  $n$ -мерную квадратную матрицу, называемую *матрицей линейного преобразования*.

Так как при фиксированном  $i$  коэффициенты  $A^j_i$  образуют координатные столбцы  $(A^1_i \dots A^n_i)^T$  векторов  $A(e_i)$ , то можно также сказать, что матрица линейного преобразования имеет в качестве столбцов координатные столбцы векторов  $A(e_i)$  в базисе  $e_i$ .

Выберем теперь произвольный элемент  $a \in \mathcal{L}_n$ , ему будет соответствовать образ  $b = A(a)$ , также принадлежащий  $\mathcal{L}_n$ . Разложим  $a$  и  $b$  по базису  $e_1 \dots e_n$ , в котором мы ввели матрицу линейного преобразования  $A^j_i$ :

$$b = b^j e_j, \quad a = a^i e_i. \quad (2.60)$$

Согласно свойствам 1°, 2° линейного преобразования, имеем:

$$b = A(a) = A(a^i e_i) = a^i A(e_i) = a^i A^j_i e_j = b^j e_j, \quad (2.61)$$

откуда получаем:

$$b^j = A^j_i a^i, \quad (2.62)$$

т.е. компоненты любого вектора  $a$  и его образа  $b$  всегда связаны линейно с помощью матрицы линейного преобразования. Поэтому говорят, что линейное преобразование полностью определено своей матрицей.

### 2.3.3. Замена базиса

Очевидно, что матрица линейного преобразования определена неоднозначно: выбирая различные базисы в (2.59), будем получать, вообще говоря, различные матрицы  $A^j_i$ . Однако все такие матрицы будут обладать некоторыми общими свойствами. Укажем их.

Пусть имеется два базиса  $e_i$  и  $e'_i$  в пространстве  $\mathcal{L}_n$ , тогда каждый из векторов одного базиса можно разложить по другому базису:

$$e'_i = S^j_i e_j, \quad i = 1 \dots n. \quad (2.63)$$

Компоненты разложения  $S^j_i$  представляют собой матрицу  $n$ -го порядка:

$$S = \begin{pmatrix} S^1_1 & \dots & S^1_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ S^n_1 & \dots & S^n_n \end{pmatrix}, \quad (2.64)$$

столбцы которой являются координатными столбцами векторов  $e'_i$  в базисе  $e_i$ . В силу теоремы 2.1, столбцы такой матрицы  $S$  линейно независимы и по теореме 2.10 имеем:

$$\det S \neq 0,$$

т.е. матрица  $S$  – невырожденная.

Тогда существует обратная матрица  $S^{-1}$ , и, умножая (2.63) на  $S^{-1}$ , получим:

$$\mathbf{e}_j = (S^{-1})^i_j \mathbf{e}'_i. \quad (2.65)$$

Если имеется произвольный элемент  $\mathbf{a} \in \mathcal{L}_n$ , тогда его можно разложить как по базису  $\mathbf{e}_i$ , так и по  $\mathbf{e}'_i$ :

$$\mathbf{a} = a^i \mathbf{e}_i = a'^i \mathbf{e}'_i = a'^i S^k_j \mathbf{e}_k = a^i (S^{-1})^k_j \mathbf{e}'_k. \quad (2.66)$$

В силу единственности разложения вектора по базису, получаем

$$a^i = S^i_j a'^j, \quad a'^i = (S^{-1})^i_j a^j, \quad i = 1 \dots n. \quad (2.67)$$

Заметим, что полученные ранее для трехмерного евклидова пространства аналогичные формулы преобразования компонент и векторов базиса (см. упр. 1.1.8) представляют собой частный случай соотношений (2.65), (2.67), так как эти соотношения, вообще говоря, не предполагают введения систем координат.

Пусть теперь имеется линейное преобразование  $\mathcal{A}: \mathcal{L}_n \rightarrow \mathcal{L}_n$ . Выберем снова два базиса  $\mathbf{e}_i$  и  $\mathbf{e}'_i$  и построим по (2.59) для каждого матрицу линейного преобразования:  $A^i_j$  и  $A'^i_j$ . Эти матрицы связывают компоненты  $a^i$  вектора  $\mathbf{a} \in \mathcal{L}_n$  и его образа  $\mathbf{b}$  согласно (2.62):

$$b^j = A^j_i a^i, \quad b'^j = A'^j_i a'^i. \quad (2.68)$$

Но  $a^i$  и  $a'^i$ , а также  $b^j$  и  $b'^j$  связаны матрицей перехода  $S$ , тогда получаем:

$$b'^j = (S^{-1})^j_i b^i = (S^{-1})^j_i A^i_k a^k = (S^{-1})^j_i A^i_k S^k_l a'^l. \quad (2.69)$$

Сравнивая со второй формулой в (2.68), получаем формулу изменения матрицы линейного преобразования при замене базиса:

$$A'^j_i = (S^{-1})^j_l A^l_k S^k_i \quad (2.70)$$

или

$$A' = S^{-1} \cdot A \cdot S. \quad (2.71)$$

### 2.3.4. Инвариантные подпространства

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.14.** Если имеется линейное преобразование  $A$  линейного пространства  $\mathcal{L}$ , то в  $\mathcal{L}$  можно выделить подпространство  $\mathcal{L}'$ , называемое *инвариантным* относительно  $A$ , для каждого элемента которого  $a \in \mathcal{L}'$  образ  $A(a)$  также принадлежит  $\mathcal{L}'$ .

Очевидно, что нулевое подпространство, а также само  $\mathcal{L}$  являются инвариантными относительно любых линейных преобразований. Каждое же подпространство будет инвариантным относительно тождественного преобразования.

Пусть имеется  $n$ -мерное линейное пространство  $\mathcal{L}_n$ , задано линейное преобразование  $A$ , относительно которого инвариантно некоторое  $m$ -мерное подпространство  $\mathcal{L}_m$  в  $\mathcal{L}_n$  ( $m \leq n$ ). Тогда можно выбрать базис  $e_1 \dots e_m$  в  $\mathcal{L}_m$ , а затем дополнить его векторами  $e_{m+1} \dots e_n$ , не принадлежащими  $\mathcal{L}_m$ , до базиса в  $\mathcal{L}_n$ . Разделим теперь матрицу линейного преобразования  $A$  на четыре матрицы:

$$A = \left( \begin{array}{ccc|ccc} A^1_1 & \dots & A^1_m & A^1_{m+1} & \dots & A^1_n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A^m_1 & \dots & A^m_m & A^m_{m+1} & \dots & A^m_n \\ \hline A^{m+1}_1 & \dots & A^{m+1}_m & A^{m+1}_{m+1} & \dots & A^{m+1}_n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A^n_1 & \dots & A^n_m & A^n_{m+1} & \dots & A^n_n \end{array} \right) = \\ = \left( \begin{array}{c|c} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ \hline \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{array} \right), \quad (2.72)$$

где  $\tilde{A}_{11}$  имеет размерность  $m \times m$ ,  $\tilde{A}_{12} — m \times (n-m)$ ,  $\tilde{A}_{21} — (n-m) \times m$ , а  $\tilde{A}_{22} — (n-m) \times (n-m)$ . Покажем, что матрица  $\tilde{A}_{21}$  — нулевая. В самом деле, матрицы  $\tilde{A}_{11}$ ,  $\tilde{A}_{21}$  образованы первыми  $m$  столбцами матрицы  $A$ , которая представляет собой, согласно (2.59), координатные столбцы векторов  $A(e_1) \dots A(e_m)$ . Но так как  $\mathcal{L}_m$  — инвариантное подпространство, а  $e_1 \dots e_m \in \mathcal{L}_m$ , то  $A(e_1) \dots A(e_m)$  также принадлежит  $\mathcal{L}_m$  и, следовательно, согласно (2.59) их компоненты разложения  $A^i_j$  ( $j = 1 \dots m$ ,  $i = m+1 \dots n$ ) по базисным векторам  $e_{m+1} \dots e_n$  равны нулю. Таким образом, матрица  $A$  имеет вид:

$$A = \left( \begin{array}{c|c} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ \hline 0 & \tilde{A}_{22} \end{array} \right). \quad (2.73)$$

Верно и обратное утверждение: если матрица  $A$  линейного преобразования в каком-нибудь базисе  $e_1 \dots e_n$  имеет вид (2.73), то линейная

оболочка векторов  $e_1 \dots e_m$  образует инвариантное подпространство. Действительно, из определения (2.59) и (2.73) следует, что

$$A(e_j) = \sum_{i=1}^m A^i{}_j e_i, \quad (2.74)$$

т.е. образы  $A(e_1) \dots A(e_m)$  векторов  $e_1 \dots e_m$  есть линейная комбинация этих же векторов, а значит и образ любой линейной комбинации векторов  $e_1 \dots e_m$  будет снова их линейной комбинацией.

Таким образом, доказана следующая теорема.

**ТЕОРЕМА 2.13.** *Матрица  $A$  линейного преобразования  $\mathcal{A}$  имеет блочный вид (2.73) в базисе  $e_1 \dots e_n$  тогда и только тогда, когда линейная оболочка векторов  $e_1 \dots e_m$ ,  $m \leq n$ , является инвариантным подпространством относительно  $\mathcal{A}$ .*

### 2.3.5. Собственные векторы

Если инвариантное подпространство  $\mathcal{L}_m$  имеет размерность  $m = 1$ , то его базис состоит из одного вектора не равного нулю (обозначим его  $\overset{\circ}{e}$ ), а всякий элемент  $a$  из  $\mathcal{L}_1$  имеет вид  $a^1 \overset{\circ}{e}$ , где  $a^1$  – число. В силу инвариантности  $\mathcal{L}_1$ , образ вектора  $\overset{\circ}{e}$  также принадлежит  $\mathcal{L}_1$  и, следовательно, для  $A(\overset{\circ}{e})$  существует такое число  $\lambda$ , что

$$A(\overset{\circ}{e}) = \lambda \overset{\circ}{e}. \quad (2.75)$$

Имеет место обратное утверждение: если для некоторого вектора  $\overset{\circ}{e}$  выполнено условие (2.75), то оно будет выполнено для любого вектора  $a$  из подпространства  $\mathcal{L}_1$ , образованного линейной оболочкой  $\overset{\circ}{e}$ , поэтому  $\mathcal{L}_1$  инвариантное подпространство.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.15.** *Ненулевой вектор  $\overset{\circ}{e}$ , удовлетворяющий (2.75), называется собственным вектором преобразования  $\mathcal{A}$ , а число  $\lambda$  – собственным значением.*

Выбирая в  $\mathcal{L}_n$  некоторый базис  $e_i$ , вектор  $\overset{\circ}{e}$  и его образ  $A(\overset{\circ}{e})$  можно разложить по этому базису:

$$\overset{\circ}{e} = \sum_{j=1}^n \overset{\circ}{e}{}^j e_j, \quad A(\overset{\circ}{e}) = \sum_{j=1}^n \overset{\circ}{e}{}^j A(e_j) = \sum_{i,j=1}^n \overset{\circ}{e}{}^j A^i{}_j e_i. \quad (2.76)$$

Подставляя (2.76) в (2.75), получаем матричную запись этого условия:

$$A^i{}_j \overset{\circ}{e}{}^j = \lambda \overset{\circ}{e}{}^i. \quad (2.77)$$

С использованием обозначений для координатных столбцов  $\overset{\circ}{\mathbf{e}} = (\overset{\circ}{e}^1 \dots \overset{\circ}{e}^n)^T$  можно также переписать (2.77) в виде:

$$A \cdot \overset{\circ}{\mathbf{e}} = \lambda \overset{\circ}{\mathbf{e}}. \quad (2.78)$$

Условие (2.78) при  $n = 3$  естественно совпадает с условиями (1.162). Также как и в трехмерном пространстве, рассматривая (2.77) как линейную комбинацию линейно зависимых столбцов матрицы  $A^i_j$  с нетривиальными коэффициентами  $\overset{\circ}{e}^j$ , из теоремы 2.10 получаем:

$$\mathcal{P}(\lambda) = \det (A^i_j - \lambda \delta^i_j) = 0 \quad (2.79)$$

– характеристическое уравнение для нахождения собственных значений  $\lambda$ .

Характеристическое уравнение представляет собой полином  $n$ -ой степени относительно  $\lambda$ , который обычно записывают в виде:

$$\mathcal{P}(\lambda) = \sum_{i=1}^n (-1)^i b_i \lambda^i, \quad (2.80)$$

где  $b_i$  – коэффициенты полинома, причем

$$b_n = 1, \quad b_{n-1} = \sum_{i=1}^n A^i_i, \quad b_0 = \det (A^i_j). \quad (2.81)$$

В трехмерном случае константы  $b_0$ ,  $b_1$  и  $b_2$  (см. далее формулу (4.156) в гл.4) совпадают, соответственно, с третьим, вторым и первым инвариантами  $I_3(A)$ ,  $I_2(A)$ ,  $I_1(A)$ , построенными из компонент матрицы  $A^i_j$ .

В случае произвольного  $n$ , константы  $b_i$  также являются инвариантами – они не зависят от выбора базиса в пространстве  $\mathcal{L}_n$ . Действительно, если записать матрицу линейного преобразования в базисе  $e'_i$ , а затем найти характеристическое уравнение  $\mathcal{P}'(\lambda)$ , то получим согласно (2.71):

$$\begin{aligned} \mathcal{P}'(\lambda) &= \det (A' - \lambda E) = \det (S^{-1} \cdot A \cdot S - \lambda E) = \\ &= \det (S^{-1} \cdot (A - \lambda E) \cdot S) = \\ &= \det S^{-1} \cdot \det (A - \lambda E) \cdot \det S = \mathcal{P}(\lambda), \end{aligned} \quad (2.82)$$

т.е. характеристический полином  $\mathcal{P}(\lambda)$  не зависит от выбора базиса, а значит являются инвариантами и его коэффициенты  $b_i$ .

### 2.3.6. Приведение матрицы преобразования к блочному виду

Сформулируем теперь теорему, которая потребуется нам в дальнейшем.

**Теорема 2.14.** Пусть существуют  $m$  линейно независимых собственных векторов  $\overset{\circ}{e}_1 \dots \overset{\circ}{e}_m$  линейного преобразования  $A$ , соответствующих собственному значению  $\lambda$ , тогда матрицу преобразования  $A^i_j$ , определенную в произвольном базисе  $e_1 \dots e_n$ , с помощью невырожденного преобразования  $S$  можно привести к блочному виду  $A'$ :

$$A' = S^{-1} \cdot A \cdot S = (A^i_j) = \left( \begin{array}{ccc|c} \lambda & & 0 & \tilde{A}'_{12} \\ & \ddots & & \\ 0 & & \lambda & \\ \hline & 0 & & \tilde{A}'_{22} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} \lambda E_m & \tilde{A}'_{12} \\ 0 & \tilde{A}'_{22} \end{array} \right), \quad (2.83)$$

где  $A'^i_j$  – матрица линейного преобразования  $A$  в базисе  $e'_1 \dots e'_n$ , а  $e'_i = S^j_i e_j$ ; здесь также обозначены:  $E_m$  – единичная матрица размера  $m \times m$ ,  $\tilde{A}'_{12}$  – матрица  $m \times (n-m)$ ,  $\tilde{A}'_{22}$  – матрица  $(n-m) \times (n-m)$ .

▼ В самом деле, так как  $\overset{\circ}{e}_1 \dots \overset{\circ}{e}_m$  – линейно независимы, то их можно выбрать в качестве первых  $m$  векторов базиса  $e'_i$ :  $e'_i = \overset{\circ}{e}_i$  ( $i = 1 \dots m$ ). Дополнив их векторами  $e'_{m+1} \dots e'_n$  до базиса в  $\mathcal{L}_n$ , запишем матрицу  $A'$  преобразования  $A$  в этом базисе. Найдем первые  $m$  координатных столбцов этой матрицы:

$$A(e'_i) = A(\overset{\circ}{e}_i) = \lambda \overset{\circ}{e}_i = \lambda e'_i, \quad i = 1 \dots m; \quad A(e'_i) = \sum_{j=1}^n A'^j{}_i e'_j. \quad (2.84)$$

В силу единственности разложения вектора по базису, находим:

$$A'^j{}_i = \begin{cases} \lambda \delta_i^j, & j = 1 \dots m, \\ 0, & j = m + 1 \dots n, \end{cases} \quad i = 1, \dots, m. \quad (2.85)$$

Откуда получаем вид (2.83) матрицы  $A'$  в базисе  $e'_i$ . Этот базис, как следует из (2.63), связан некоторой невырожденной матрицей  $S$  с базисом  $e_i$ . Но тогда, в силу (2.71), матрицы  $A$  и  $A'$  линейного преобразования  $A$  в базисах  $e_i$  и  $e'_i$  действительно связаны соотношением (2.83), что и доказывает теорему. ▲

**Теорема 2.15.** Если две матрицы  $A'$  и  $A''$  двух линейных преобразований имеют одинаковые собственные векторы  $\overset{\circ}{e}_1 \dots \overset{\circ}{e}_m$ , соответствующие одному и тому же собственному значению  $\lambda$ , то они могут быть приведены к блочному виду (2.83) с помощью одного и того же преобразования  $S$ .

▼ Действительно, обе матрицы  $A'$  и  $A''$ , согласно теореме 2.14, можно привести к виду (2.83) в базисах  $e'_i$  и  $e''_i$  ( $i = 1 \dots n$ ). Причем  $m$  первых векторов в этих базисах совпадают:  $e'_i = e''_i = \overset{\circ}{e}_i$ . Если мы выберем совпадающими и остальные векторы  $e'_i = e''_i$  ( $i = m+1 \dots n$ ), то матрицы  $A_a$  и  $A_b$  изменятся только в блоках  $\tilde{A}'_{22}$  и  $\tilde{A}''_{22}$ , сохранив в целом блочный вид. Но тогда оба базиса  $e'_i$  и  $e''_i$  полностью совпадают, и они будут связаны с исходным базисом  $e_i$  одним и тем же преобразованием  $S$ , что и требовалось доказать. ▲

### 2.3.7. Свойства собственных векторов

Характеристический полином (2.80) имеет  $n$  корней  $\lambda$ , среди которых могут быть и комплексные, и кратные корни. Каждый собственный вектор соответствует только одному собственному значению.

**Теорема 2.16.** Каждому собственному значению  $\lambda$  матрицы  $A$  линейного преобразования может соответствовать несколько линейно независимых векторов, при этом их число  $t$  не может превышать кратности  $s$  собственного значения  $\lambda = \lambda_0$ .

▼ Для доказательства этого факта воспользуемся теоремой 2.14, согласно которой матрицу  $A$  в данных условиях можно привести к блочному виду (2.83) в некотором базисе  $e'_1 \dots e'_n$ . Поскольку характеристический полином  $P(\lambda)$  не зависит от базиса, вычислим его в базисе  $e'_1 \dots e'_n$ :

$$P(\lambda) = \det(A' - \lambda E) = (\lambda_0 - \lambda)^m \det(\tilde{A}'_{22} - \lambda E_{n-m}). \quad (2.86)$$

Здесь мы для вычисления детерминанта воспользовались формулой разложения по первому столбцу, а  $E_{n-m}$  – единичная матрица размером  $(n-m) \times (n-m)$ . Поскольку  $\det(\tilde{A}'_{22} - \lambda E_{n-m})$  также может иметь корень  $\lambda_0$ , то из (2.86) следует, что общая кратность  $s$  корня  $\lambda_0$ , вообще говоря, больше, чем число  $m$ . ▲

Сформулируем в конце этого раздела еще две теоремы.

**Теорема 2.17.** Все собственные векторы, принадлежащие одному и тому же собственному значению, вместе с нулевым вектором образуют линейное инвариантное подпространство  $\overset{\circ}{\mathcal{L}}$ .

▼ Действительно, нетрудно проверить, что для таких векторов аксиомы линейного пространства выполняются, например, если  $A \cdot \overset{\circ}{e}_i = \lambda \overset{\circ}{e}_i$ .

( $i = 1, 2$ ), то  $A \cdot (\overset{\circ}{e}_1 + \overset{\circ}{e}_2) = \lambda(\overset{\circ}{e}_1 + \overset{\circ}{e}_2)$ , а также  $A \cdot (s\overset{\circ}{e}_i) = \lambda(s\overset{\circ}{e}_i)$ . Инвариантность этого подпространства также очевидна, так как образ собственного вектора  $A(e_i) = \lambda e_i$  также является собственным вектором  $A(\lambda e_i) = \lambda(\lambda e_i)$ . ▲

**ТЕОРЕМА 2.18.** *Если в линейном подпространстве  $\overset{\circ}{L}$  выбрать базис  $\overset{\circ}{e}_1 \dots \overset{\circ}{e}_m$ , то линейная оболочка любой системы ( $k \leq m$ ) векторов  $\overset{\circ}{e}'_1 \dots \overset{\circ}{e}'_k$ , составленной из векторов базиса  $\overset{\circ}{e}_1 \dots \overset{\circ}{e}_m$ , также образует инвариантное подпространство  $\overset{\circ}{L}'$  в  $\overset{\circ}{L}$ .*

▼ В самом деле, пусть вектор  $a$  является линейной комбинацией вида:  $a = \sum_{i=1}^k a^i \overset{\circ}{e}'_i$ , тогда его образ  $A(a) = A(a^i \overset{\circ}{e}'_i) = \lambda a^i \overset{\circ}{e}'_i = \lambda a$  также является линейной комбинацией векторов  $\overset{\circ}{e}'_1 \dots \overset{\circ}{e}'_k$  и, следовательно, принадлежит  $\overset{\circ}{L}'$ . ▲

### 2.3.8. Изоморфные пространства

Между разными линейными пространствами возможны определенные соответствия.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.16.** *Два линейных пространства  $L$  и  $L'$  называются изоморфными, если существует линейное взаимнооднозначное отображение  $A: L \rightarrow L'$ .*

Следующая теорема дает условие существования изоморфных пространств.

**ТЕОРЕМА 2.19.** *Два конечномерных линейных пространства изоморфны тогда и только тогда, когда совпадают их размерности.*

▼ Пусть пространства  $L$  и  $L'$  имеют одинаковую размерность. Выберем в них базисы  $e_i$  и  $e'_i$  соответственно. Построим отображение  $A: L \rightarrow L'$  — следующим образом. Всякому элементу  $a = a^i e_i$  из  $L$  поставим в соответствие элемент  $b = a^i e'_i$ , имеющий те же координаты  $a^i$ , но только в базисе  $e'_i$ . Очевидно, что всегда  $b \in L'$ , так как он представляет собой линейную комбинацию векторов  $e'_i$  из  $L'$ . Это отображение  $b = A(a) = A(a^i e_i) = a^i e'_i$  является линейным и инъективным, так как если  $A(a_1) = A(a_2)$ , то  $A(a_1) - A(a_2) = (a_1^i - a_2^i)e'_i = 0$ , и в силу линейной независимости  $e'_i$  неминуемо следует  $a_1^i = a_2^i$ , а значит  $a_1 = a_2$ . Кроме того, отображение  $b = A(a)$  сюръективно ввиду того, что, наоборот, по всякому вектору  $b = a^i e'_i \in L'$  всегда можно найти вектор  $a = a^i e_i$  из  $L$ . Таким образом, построено взаимнооднозначное отображение  $A: L \rightarrow L'$ , что по определению 2.16 означает изоморфность пространств  $L$  и  $L'$ .

В обратную сторону. Пусть пространство  $L$  имеет размерность  $n$  и существует взаимнооднозначное отображение  $A: L \rightarrow L'$ . Выберем

в  $\mathcal{L}$  базис  $e_i$  ( $i = 1 \dots n$ ) и покажем, что система  $e'_i = \mathcal{A}(e_i)$  ( $i = 1 \dots n$ ) линейно независима. Пусть противное: существуют ненулевые коэффициенты  $s^i$ :  $s^i e'_i = s^i \mathcal{A}(e_i) = 0'$ . Но тогда, так как  $0'$  – нулевой вектор из  $\mathcal{L}'$ , являющийся образом нулевого вектора  $0$  из  $\mathcal{L}$ , в силу линейности  $\mathcal{A}$  получаем:  $\mathcal{A}(s^i e_i) = \mathcal{A}(0)$ . Поскольку отображение  $\mathcal{A}$  – инъективно, это возможно только если  $s^i e_i = 0$ , что противоречит тому, что  $e_i$  – базис в  $\mathcal{L}$ . Следовательно,  $e'_i$  – линейно независимы.

Поскольку отображение  $\mathcal{A}$  сюръективно, всякий элемент  $b \in \mathcal{L}'$  является образом некоторого вектора  $a = a^i e_i \in \mathcal{L}$ , но тогда  $b = \mathcal{A}(a) = \mathcal{A}(a^i e_i) = a^i \mathcal{A}(e_i) = a^i e'_i$ , т.е. он может быть всегда представлен в виде линейной комбинации векторов  $e'_i$ . Таким образом, построен базис  $e'_i$  в  $\mathcal{L}'$ , состоящий из  $n$  векторов. Следовательно, размерности  $\mathcal{L}$  и  $\mathcal{L}'$  совпадают. ▲

### Упражнения к § 2.3.

**Упражнение 2.3.1.** Методом математической индукции доказать, что система собственных векторов, принадлежащих попарно различным собственным значениям, является линейно независимой.

## § 2.4. Сопряженное пространство

### 2.4.1. Линейные функционалы

Рассмотрим два линейных пространства  $\mathcal{L}_n$  и  $\mathcal{L}'$ , одно из которых ( $\mathcal{L}'$ ) совпадает с пространством вещественных чисел  $\mathbb{R}$ , и предположим, что задано линейное отображение  $f: \mathcal{L}_n \rightarrow \mathbb{R}$ , обозначаемое как

$$b = f(a), \quad a \in \mathcal{L}_n, \quad b \in \mathbb{R} \quad (2.87)$$

и называемое, согласно п. 2.3.1, линейным функционалом на  $\mathcal{L}_n$ . Согласно определению 2.13, линейный функционал удовлетворяет двум аксиомам:

- 1°  $f(a_1 + a_2) = f(a_1) + f(a_2)$ , для любых  $a_1, a_2 \in \mathcal{L}_n$ ,
- 2°  $f(sa_1) = sf(a)$ , для любого  $a \in \mathcal{L}_n$  и любого  $s \in \mathbb{R}$ .

Выберем некоторый базис  $e_1 \dots e_n$  в  $\mathcal{L}_n$  и разложим по нему произвольный элемент  $a$  из  $\mathcal{L}_n$ :  $a = a^i e_i$ . Тогда значение функционала  $f$  (т.е. образ  $a$ ) можно представить следующим образом:

$$f(a) = f(a^i e_i) = a^i f(e_i) = a^i f_i, \quad (2.88)$$

где обозначены  $f_i = f(e_i)$  – образы векторов  $e_i$ . Эти числа  $f_i \in \mathbb{R}$  не зависят от элемента  $a$ , а определяются только базисом  $e_i$  и функционалом  $f$ , поэтому назовем их компонентами функционала  $f$ .

Формула (2.88) составляет содержание следующей теоремы.

**ТЕОРЕМА 2.20.** Любой линейный функционал на  $\mathcal{L}_n$  можно представить в виде разложения (2.88), где  $f_i$  – компоненты функционала, являющиеся значениями функционала на некотором базисе  $\mathcal{L}_n$ .

Согласно п. 2.3.2, каждому линейному отображению  $A : \mathcal{L}_n \rightarrow \mathcal{L}_m$  соответствует матрица отображения  $A$  размером  $m \times n$ . Для линейного функционала эта матрица имеет размеры  $1 \times n$ , т.е. представляет собой координатную строку длиной  $n$ . Согласно определению, эта строка состоит из значений функционала на базисных векторах из  $\mathcal{L}_n$ , т.е. это строка компонент функционала:

$$\mathbf{f}^T = (f_1 \dots f_n) = (f(\mathbf{e}_1) \dots f(\mathbf{e}_n)). \quad (2.89)$$

Согласно теореме 2.20, каждому линейному функционалу  $f$  на  $\mathcal{L}_n$  соответствует координатная строка  $\mathbf{f}^T$ . С другой стороны, каждая строка  $\mathbf{f}^T$ , умноженная на координатный столбец  $\mathbf{a}$  произвольного вектора  $\mathbf{a}$  из  $\mathcal{L}_n$ , согласно формуле (2.88) образует функционал, который можно записать в виде

$$f(\mathbf{a}) = \mathbf{f}^T \cdot \mathbf{a} = f_i a^i, \quad (2.90)$$

где компоненты  $a^i$  для всех  $\mathbf{a} \in \mathcal{L}_n$  берутся в одном и том же базисе  $\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_n$ . Несложно установить, что такой функционал (2.89) будет линейным. Таким образом доказана следующая теорема.

**ТЕОРЕМА 2.21.** Множество  $\mathcal{L}^*$  всех линейных функционалов на  $\mathcal{L}_n$  изоморфно множеству координатных строк длиной  $n$ .

Введем на множестве  $\mathcal{L}^*$  следующие операции.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.17.** Суммой линейных функционалов  $f$  и  $g$  на  $\mathcal{L}_n$  называют линейный функционал  $h$ , который всякому  $\mathbf{a} \in \mathcal{L}_n$  ставит в соответствие число  $h(\mathbf{a}) = f(\mathbf{a}) + g(\mathbf{a})$ , а произведением функционала  $f$  на число  $s \in \mathbb{R}$  называют функционал  $g$ , который каждому  $\mathbf{a} \in \mathcal{L}_n$  ставит в соответствие число  $g(\mathbf{a}) = sf(\mathbf{a})$ .

**ТЕОРЕМА 2.22.** Множество  $\mathcal{L}^*$  всех линейных функционалов на  $\mathcal{L}_n$  с введенными на нем по определению 2.17 операциями сложения и умножения на число образует  $n$ -мерное линейное пространство.

▼ Согласно теореме 2.21, существует взаимнооднозначное отображение множества  $\mathcal{L}^*$  во множество координатных строк длиной  $n$ . При этом из представления (2.90) и определения 2.17 следует, что для всякого  $\mathbf{a} \in \mathcal{L}_n$  сумма двух функционалов  $h = f + g$  соответствует сумме координатных строк  $\mathbf{f}^T + \mathbf{g}^T$ , так как

$$h(\mathbf{a}) = \mathbf{f}^T \cdot \mathbf{a} + \mathbf{g}^T \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{f}^T + \mathbf{g}^T) \cdot \mathbf{a},$$

а произведение  $g = sf$  соответствует строке  $s\mathbf{f}^T$ , так как

$$g(\mathbf{a}) = s(\mathbf{f}^T \cdot \mathbf{a}) = (sf)^T \cdot \mathbf{a}.$$

Поскольку множество координатных строк длиной  $n$  является линейным  $n$ -мерным пространством (см. упр. 2.1.13) и для него выполнены все аксиомы  $1^{\circ} \dots 8^{\circ}$ , то они будут выполнены и для операций в  $\mathcal{L}^*$ , следовательно,  $\mathcal{L}^*$  является линейным пространством. В силу теоремы 2.21, оно изоморфно  $n$ -мерному пространству координатных строк, и по теореме 2.19  $\mathcal{L}^*$  имеет размерность  $n$ . ▲

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.18.** *Линейное пространство  $\mathcal{L}^*$  всех линейных функционалов на  $\mathcal{L}_n$  называют сопряженным пространством по отношению к  $\mathcal{L}_n$ .*

#### 2.4.2. Базис сопряженного пространства

Выберем теперь в пространстве  $\mathcal{L}_n$  некоторый базис  $e_1 \dots e_n$ , тогда для всякого вектора  $a$  из  $\mathcal{L}_n$  имеет место разложение  $a = a^i e_i$ . Введем набор  $n$  линейных функционалов на  $\mathcal{L}_n$  специального типа

$$e^i(a) = a^i, \quad (2.91)$$

т.е. каждый  $i$ -ый функционал  $e^i(a)$  сопоставляет всякому  $a$  из  $\mathcal{L}_n$  его  $i$ -ую компоненту (число).

Очевидно, что функционалы (2.91) действительно обладают свойствами линейности. Если в качестве  $a$  в (2.91) выбирать векторы базиса  $e_i$ , то получим, что

$$e^i(e_j) = \delta^i_j, \quad (2.92)$$

так как компоненты векторов  $e_j$  в том же базисе равны  $\delta^i_j$ .

По аналогии с (2.89) образуем координатные столбцы, состоящие из значений функционалов  $e^i(a)$  на векторах  $e_j$  при фиксированном  $i$ :

$$e^i = (e^i(e_1), \dots, e^i(e_n))^T. \quad (2.93)$$

Тогда произвольный функционал  $f$  из  $\mathcal{L}^*$ , согласно (2.88) и (2.91), можно представить в виде разложения по функционалам  $e^1 \dots e^n$ :

$$f = e^i f_i = f^T \cdot e,$$

а соответствующий ему координатный столбец  $f$  – в виде разложения по координатным столбцам  $e^i$ :

$$f = f_i e^i.$$

Таким образом,  $e^1, \dots, e^n$  действительно образуют базис в пространстве координатных столбцов, а функционалы  $e^1, \dots, e^n$  – базис в  $\mathcal{L}^*$ .

Заметим, что построенный базис  $e^1, \dots, e^n$  зависит от выбора базиса  $e_1, \dots, e_n$  в  $\mathcal{L}_n$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.19.** Базисы  $e'_i$  в  $\mathcal{L}_n$  и  $e'^i$  в  $\mathcal{L}^*$  называют взаимными (или биортогональными), если они удовлетворяют соотношению

$$e'^i(e'_j) = \delta^i_j. \quad (2.94)$$

Очевидно, что построенные выше базисы  $e^i$  и  $e_i$  являются взаимными в силу соотношения (2.92).

Элементы  $f$  пространства координатных столбцов, соответствующего пространству  $\mathcal{L}^*$ , сопряженному к  $\mathcal{L}_n$ , называют также ковариантными векторами или ковекторами (поэтому в соответствии с общими правилами индексы у ковариантного базиса  $e^i$  стоят вверху).

### 2.4.3. Замена базиса в сопряженном пространстве

Пусть в пространстве  $\mathcal{L}_n$  имеется два базиса  $e_i$  и  $e'_i$ , связанных соотношениями (2.63). Построим для каждого из них соответствующие функционалы  $e^i$  и  $e'^i$  по формуле (2.91):

$$e^i(\mathbf{a}) = a^i, \quad e'^i(\mathbf{a}) = a'^i, \quad (2.95)$$

где  $\mathbf{a} = a^i e_i = a'^i e'_i$  – произвольный вектор из  $\mathcal{L}_n$ . Используя формулу (2.67) связи компонент  $a'^i = (S^{-1})^i_j a^j$ , получаем:

$$e'^i(\mathbf{a}) = (S^{-1})^i_j a^j = (S^{-1})^i_j e^j(\mathbf{a}). \quad (2.96)$$

Если ввести координатный столбец, состоящий из значений функционалов  $e'^i(\mathbf{a})$  на векторах  $e_j$ :

$$\mathbf{e}'^i = (e'^i(e_1) \dots e'^i(e_n))^T, \quad (2.97)$$

то из (2.96) получим следующие соотношения между  $\mathbf{e}'^i$  и  $\mathbf{e}^i$ :

$$\mathbf{e}'^i = (S^{-1})^i_j \mathbf{e}^j, \quad \mathbf{e}^j = S^j_i \mathbf{e}'^i. \quad (2.98)$$

Компоненты произвольного функционала  $f$  из  $\mathcal{L}^*$  в базисах  $\mathbf{e}^i$  и  $\mathbf{e}'^i$  вводим по формулам (2.88):

$$f_i = f(\mathbf{e}_i), \quad f'_i = f(\mathbf{e}'_i). \quad (2.99)$$

Тогда из соотношений

$$f(\mathbf{a}) = f(a^j \mathbf{e}_j) = a^j f_j = f(a'^i \mathbf{e}'_i) = a'^i f'_i = a^j (S^{-1})^i_j f'_i, \quad (2.100)$$

получаем

$$f_j = (S^{-1})^i_j f'_i, \quad f'_i = S^j_i f_j \quad (2.101)$$

связь компонент функционала  $f$  в различных базисах  $e^i$  и  $e^{i'}$ .

Таким образом, координатные столбцы базисов  $e^{i'}$  и  $e^i$  сопряженного пространства  $\mathcal{L}^*$ , взаимных к базисам  $e'_i$  и  $e_i$  пространства  $\mathcal{L}_n$ , связаны между собой соотношениями (2.98), а координаты произвольного функционала  $f$  из  $\mathcal{L}^*$  в этих базисах  $e^{i'}$  и  $e^i$  связаны формулами (2.101).

#### 2.4.4. Пространство, сопряженное с евклидовым пространством

Между элементами  $\mathcal{L}_n$  и  $\mathcal{L}^*$  можно установить взаимнооднозначное соответствие (изоморфизм), которое будет зависеть от выбора базиса. Однако если  $\mathcal{L}_n$  является евклидовым пространством  $\mathcal{E}_n$ , то изоморфизм может быть установлен независимо от базиса, что позволяет отождествить пространства  $\mathcal{E}_n$  и  $\mathcal{E}_n^*$ .

В самом деле, поскольку в  $\mathcal{E}_n$  определено скалярное произведение, то зафиксировав некоторый элемент  $b \in \mathcal{E}_n$ , получим линейный функционал

$$f(a) = b \cdot a, \quad \forall a \in \mathcal{E}_n. \quad (2.102)$$

Меняя  $b$ , будем получать различные функционалы  $f$ . Следовательно, можно ввести отображение  $\psi: \mathcal{E}_n \rightarrow \mathcal{E}_n^*$ , где  $f = \psi(b) = b \cdot a$ ,  $b \in \mathcal{E}_n$ ,  $f \in \mathcal{E}_n^*$ . Следующая теорема позволяет установить, что это отображение взаимнооднозначно.

**ТЕОРЕМА 2.23 (ТЕОРЕМА РИССА).** *Всякий линейный функционал  $f$  на евклидовом пространстве  $\mathcal{E}_n$  можно однозначно представить в виде скалярного произведения (2.102), где  $b$  – некоторый элемент из  $\mathcal{E}_n$ .*

▼ Выберем некоторый базис  $e_i$  в  $\mathcal{E}_n$ , тогда, согласно теореме 2.20, всякий линейный функционал  $f$  можно представить в виде (2.88), где  $a = a^i e_i$  – произвольный вектор из  $\mathcal{E}_n$ , а  $f_i$  – компоненты функционала  $f$ . С помощью этих компонент всегда можно образовать вектор  $b = b^i e_i$ , выбирая  $b^i = g^{ij} f_j$ , где  $g^{ij}$  – матрица, обратная к фундаментальной (2.14):

$$g^{ij} g_{jk} = \delta^i_k. \quad (2.103)$$

(Эта матрица всегда существует, так как  $\det(g_{ij}) \neq 0$  (см. упр. 2.2.8)).

Этот вектор  $b$  и будет искомым элементом из  $\mathcal{E}_n$ , обеспечивающим возможность представления (2.102), так как для всякого  $a \in \mathcal{E}_n$  (см. упр. 2.1.9):

$$b \cdot a = g_{ij} a^i b^j = a^i g_{ij} g^{jk} f_k = a^i f_i = f(a).$$

Для доказательства единственности представления (2.102) предположим противное, что существуют два различных вектора  $b_1, b_2 \in \mathcal{E}_n$ , такие, что  $f(a) = b_1 \cdot a$  и  $f(a) = b_2 \cdot a$ . Тогда можно образовать разность  $f(a) - f(a) = (b_1 - b_2) \cdot a = 0$ . Поскольку это соотношение

выполнено для любого  $\mathbf{a} \in \mathcal{E}_n$ , то, следовательно, должно выполняться равенство  $\mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_2$ , что противоречит сделанному допущению. ▲

Согласно определению 2.12 и теореме 2.23, введенное отображение  $\psi: \mathcal{E}_n \rightarrow \mathcal{E}_n^*$  является взаимнооднозначным и не зависит от базиса в  $\mathcal{E}_n$ . Следовательно,  $\mathcal{E}_n$  и  $\mathcal{E}_n^*$  – изоморфны, и их можно отождествить:  $\mathcal{E}_n^* = \mathcal{E}_n$ , в этом смысле  $\mathcal{E}_n$  называют "самосопряженным".

Ввиду отождествления  $\mathcal{E}_n$  и  $\mathcal{E}_n^*$  можно не делать различия между вектором  $\mathbf{b}$ , однозначно определяющим функционал  $f$  и координатным столбцом функционала  $f$ . Тогда соотношение (2.90) можно представить в виде (2.102):

$$f(\mathbf{a}) = \mathbf{f} \cdot \mathbf{a}, \quad (2.104)$$

где  $\mathbf{f}$  уже элемент из  $\mathcal{E}_n$ .

В частности, формула (2.92), связывающая векторы базисов  $\mathbf{e}_i$  и  $\mathbf{e}^i$  в форме (2.104), запишется следующим образом:

$$\mathbf{e}^i(\mathbf{e}_j) = \mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}_j = \delta^i_j, \quad (2.105)$$

т.е.  $\mathbf{e}_i$  и  $\mathbf{e}^j$  взаимно ортогональны.

После отождествления  $\mathcal{E}_n$  и  $\mathcal{E}_n^*$  всякий элемент из  $\mathcal{E}_n^*$  можно разложить по базису из  $\mathcal{E}_n$ , например:  $\mathbf{e}^i = e^{ij}\mathbf{e}_j$ . Подставляя эту формулу в (2.105), получаем

$$\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}_j = e^{ik}\mathbf{e}_k \mathbf{e}_j = e^{ik}g_{kj} = \delta^i_j,$$

т.е.  $e^{ik}$  – это матрица, обратная фундаментальной:  $e^{ij} = g^{ij}$ . Таким образом, в евклидовом пространстве сопряженный базис связан с исходным с помощью соотношений:

$$\mathbf{e}^i = g^{ij}\mathbf{e}_j, \quad \mathbf{e}_j = g_{ij}\mathbf{e}^i. \quad (2.106)$$

Соотношение (2.106) позволяет переходить от разложения произвольного элемента  $\mathbf{a} \in \mathcal{E}_n$  в основном базисе  $\mathbf{e}_i$  к разложению во взаимном и наоборот:

$$\mathbf{a} = a^i\mathbf{e}_i = a^i g_{ik}\mathbf{e}^k = a_k\mathbf{e}^k. \quad (2.107)$$

Ковариантные  $a_i$  и контравариантные  $a^i$  компоненты связаны соотношениями:

$$a^i = g^{ik}a_k, \quad a_k = g_{ki}a^i. \quad (2.107a)$$

Формулы (2.106), (2.107) и (2.107a) при  $n = 3$  полностью эквивалентны соответствующим соотношениям из §1.1 для трехмерного евклидова пространства.

## § 2.5. Алгебра тензоров на $n$ -мерных линейных пространствах

### 2.5.1. Отношение эквивалентности

Далее нам потребуются некоторые сведения из теории множеств. Приведем их.

Рассмотрим два некоторых множества  $M$  и  $N$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.20.** Декартовым произведением множеств  $M$  и  $N$  называется множество, состоящее из всех возможных упорядоченных пар элементов  $(ab)$ , где  $a \in M$  и  $b \in N$ . Такое множество обозначим как  $M \times N$ .

Аналогично вводят понятие декартова произведения  $n$  множеств  $M_1 \dots M_n$  и обозначают его  $M_1 \times \dots \times M_n$ , а также  $n$ -ую декартову степень множества  $M$ , которую обозначают следующим образом:

$$M^n = M \times \dots \times M \quad (n \text{ штук}).$$

Примером является арифметическое пространство  $\mathbb{R}^n$ , элементы которого представляют собой упорядоченные наборы вещественных чисел  $(x^1 \dots x^n)$ , и которое можно рассматривать как  $n$ -ую декартову степень:  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 \times \dots \times \mathbb{R}^1$ .

В множестве  $M$  часто необходимо найти эквивалентные в некотором смысле элементы.

Говорят, что на множестве  $M$  задано *отношение эквивалентности* между его элементами, если определено некоторое правило, устанавливающее эквивалентность (неразличимость) элементов  $a, b \in M$  между собой. Отношение эквивалентности обозначают знаком " $\sim$ ", а элементы  $a, b$ , связанные отношением эквивалентности, обозначают как  $a \sim b$  и называют *эквивалентными*.

Отношение эквивалентности удовлетворяет следующим аксиомам для любых  $a, b, c \in M$ :

- 1º  $a \sim a$  (рефлексивность);
- 2º если  $a \sim b$ , то  $b \sim a$  (симметричность);
- 3º если  $a \sim b$  и  $b \sim c$ , то  $a \sim c$  (транзитивность).

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.21.** Подмножество всех элементов из  $M$ , эквивалентных фиксированному элементу  $a \in M$  называют *классом эквивалентности*, содержащим  $a$  и обозначают его как  $[a]$ . Всякий элемент из класса эквивалентности  $[a]$  называют *представителем класса  $[a]$* .

**ТЕОРЕМА 2.24.** Любой класс  $[a]$ , где  $a \in M$  однозначно определяется любым своим представителем; иначе говоря, для любых  $a, b \in M$  их эквивалентность  $a \sim b$  равносильно совпадению их классов:  $[a] = [b]$ .

▼ В одну сторону: пусть  $a \sim b$ , тогда выберем произвольный элемент  $c \in [a]$ . Из определения 2.21 следует, что  $c \sim a$ , но тогда в силу 3º

должно быть  $c \sim b$ , т.е.  $c \in [b]$ . Таким образом, любой элемент, принадлежащий  $[a]$ , принадлежит и  $[b]$ , значит  $[a] \subset [b]$ . Однако если выбрать произвольный элемент  $d \in [b]$  то  $d \sim b$ , а, следовательно, в силу транзитивности  $d \sim a$ , поэтому  $[b] \subset [a]$ . Это означает, что  $[a]$  и  $[b]$  совпадают:  $[a] = [b]$ .

В обратную сторону: пусть  $[a] = [b]$ , тогда  $a \in [b]$ , по определению 2.21 это означает, что  $a \sim b$ .  $\blacktriangleleft$

Имеет место еще одна важная теорема.

**Теорема 2.25.** *Множество  $\pi_{\sim}(\mathcal{M})$  всех классов эквивалентности по отношению  $\sim$  разбивает все множество  $\mathcal{M}$  на непересекающиеся подмножества.*

▼ В самом деле, пусть имеется множество  $\pi_{\sim}(\mathcal{M})$  всех классов эквивалентности, но какой-либо элемент  $a \in \mathcal{M}$  не попадает в  $\pi_{\sim}(\mathcal{M})$ . Тогда можно образовать еще один класс эквивалентности, состоящий из одного этого элемента:  $[a] = a$ ; аксиомы  $1^{\circ} - 3^{\circ}$  для него будут выполнены. Так как по предположению  $a \notin \pi_{\sim}(\mathcal{M})$ , то и  $[a]$  не принадлежит  $\pi_{\sim}(\mathcal{M})$ . Но это противоречит условию теоремы, что  $\pi_{\sim}(\mathcal{M})$  содержит все классы из  $\mathcal{M}$ . Полученное противоречие доказывает, что все элементы  $\mathcal{M}$  входят в  $\pi_{\sim}(\mathcal{M})$ .

Покажем теперь, что различные классы эквивалентности не пересекаются. Пусть противное: имеются различные классы  $[a]$  и  $[b]$  такие, что  $[a] \cap [b] \neq \emptyset$ . Тогда можно выбрать элемент  $c$  такой, что  $c \in [a]$  и  $c \in [b]$ . Но тогда  $c \sim a$  и  $c \sim b$ , а значит в силу  $3^{\circ}$   $a \sim b$  и по теореме 2.24  $[a] = [b]$ , что противоречит допущению о различии этих классов.

▲

## 2.5.2. Фактор – пространство

Пусть теперь отношение эквивалентности задано на линейном пространстве  $\mathcal{L}$ , при этом аксиомы  $1^{\circ} - 3^{\circ}$  дополним еще двумя: для любых  $a, b$  и  $c \in \mathcal{L}$

$4^{\circ}$  если  $a \sim b$ , то  $a + c \sim b + c$ ;

$5^{\circ}$  если  $a \sim b$ , то  $aa \sim ab$ .

Применяя теорему 2.25, получим, что пространство  $\mathcal{L}$  можно разбить на непересекающиеся классы эквивалентности:

$$\mathcal{L} = \bigcup_{a \in \mathcal{L}} [a]. \quad (2.108)$$

Между этими классами можно определить операции сложения и умножения на число:

- суммой классов  $[a] + [b]$  называют класс  $[a + b]$  элементов, эквивалентных сумме  $a + b$ ;
- произведением класса  $[a]$  на число  $s$  называют класс  $[sa]$  элементов, эквивалентных элементу  $sa$ , т.е.

$$[a] + [b] = [a + b], \quad s[a] = [sa]. \quad (2.109)$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.22.** *Множество всех классов эквивалентности линейного пространства  $\mathcal{L}$  называют фактор-пространством  $[\mathcal{L}]$  пространства  $\mathcal{L}$ .*

Очевидно, что имеет место следующая теорема.

**ТЕОРЕМА 2.26.** *Фактор-пространство  $[\mathcal{L}]$  линейного пространства  $\mathcal{L}$  само является линейным пространством по отношению к операциям (2.109).*

Заметим, что хотя согласно (2.108) объединение элементов всех классов  $[a]$  тоже образует все пространство  $\mathcal{L}$ , фактор-пространство  $[\mathcal{L}]$  не совпадает с  $\mathcal{L}$ , так как его элементами являются сами классы. В силу эквивалентности элементов в классе, класс можно отождествлять только с одним из его представителей, что мы и будем делать в дальнейшем.

### 2.5.3. Тензорное произведение линейных пространств

Рассмотрим два линейных пространства  $\mathcal{L}_n$  и  $\mathcal{L}_m$ . Образуем из них множество  $\mathcal{L}_{nm}$ , представляющее собой  $n$ -ую декартову степень от декартова произведения  $\mathcal{L}_n \times \mathcal{L}_m$ , т.е.

$$\mathcal{L}_{nm} = (\mathcal{L}_n \times \mathcal{L}_m)^n. \quad (2.110)$$

Согласно определению 2.20, элементами множества  $\mathcal{L}_{nm}$  являются упорядоченные наборы  $A$  длиной  $(2n)$ , составленные из элементов пространств  $\mathcal{L}_n$  и  $\mathcal{L}_m$ , т.е.

$$A \equiv (a_i b^{[i]}) = \left( a_1 b^{[1]} a_2 b^{[2]} \dots a_n b^{[n]} \right), \quad (2.111)$$

где  $a_i \in \mathcal{L}_n$ ,  $b^{[i]} \in \mathcal{L}_m$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Индекс у векторов  $b^{[i]}$  взят в скобки, чтобы не путать их с элементами сопряженного пространства. Наборы вида (2.111) будем далее называть *векторными наборами*.

Введем операции сложения и умножения на число векторных наборов  $(a_i b^{[i]})$  из множества  $\mathcal{L}_{nm}$ .

Два векторных набора назовем *однотипными*, если они имеют одинаковые векторы  $a_i \in \mathcal{L}_n$  или  $b^{[i]} \in \mathcal{L}_m$  ( $i = 1, \dots, n$ ).

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.23.** *Суммой двух однотипных элементов множества  $\mathcal{L}_{nm}$  называют следующие наборы:*

$$(a_i b^{[i]}) + (a_i c^{[i]}) = (a_i (b^{[i]} + c^{[i]})), \quad (2.112a)$$

$$(a_i b^{[i]}) + (d_i b^{[i]}) = ((a_i + d_i) b^{[i]}).$$

*Произведением элемента множества  $\mathcal{L}_{nm}$  на число  $s$  называют наборы вида:*

$$s(a_i b^{[i]}) = ((s a_i) b^{[i]}) = (a_i (s b^{[i]})). \quad (2.112b)$$

Из определений (2.111) и (2.112а) для однотипных элементов следует, что

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}_i \mathbf{b}^{[i]}) = (\mathbf{a}_i \mathbf{c}^{[i]}) &\iff \mathbf{b}^{[i]} = \mathbf{c}^{[i]}, \quad i = 1 \dots n, \\ (\mathbf{a}_i \mathbf{b}^{[i]}) = (\mathbf{d}_i \mathbf{b}^{[i]}) &\iff \mathbf{a}_i = \mathbf{d}_i. \end{aligned} \quad (2.113)$$

Введем на множестве  $\mathcal{L}_{nm}$  отношение эквивалентности следующим образом.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.24.** Элементы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  множества  $\mathcal{L}_{nm}$  называют эквивалентными, если выполнено хотя бы одно из условий:

- элементы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  состоят из одних и тех же пар векторов  $\mathbf{a}_1 \mathbf{b}^{[1]}, \dots, \mathbf{a}_n \mathbf{b}^{[n]}$ , но упорядоченных, вообще говоря, различным образом;
- один элемент может быть получен из другого с помощью операции (2.112б);
- все пары векторов  $\mathbf{a}_1 \mathbf{b}^{[1]}, \dots, \mathbf{a}_n \mathbf{b}^{[n]}$  и порядок их расположения у элементов  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  совпадают, кроме тех пар, у которых один из векторов – нулевой вектор 0.

Приведем примеры элементов  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  пространства  $\mathcal{L}_{33}$  ( $n = 3$ ), эквивалентных согласно правилам а), б) и в) соответственно:

$$\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1 \mathbf{b}^{[1]} \mathbf{a}_2 \mathbf{b}^{[2]} \mathbf{a}_3 \mathbf{b}^{[3]}) \sim (\mathbf{a}_3 \mathbf{b}^{[3]} \mathbf{a}_2 \mathbf{b}^{[2]} \mathbf{a}_1 \mathbf{b}^{[1]}) = \mathbf{B}, \quad (2.114)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= (\mathbf{a}_1 \mathbf{b}^{[1]} \mathbf{a}_2 \mathbf{b}^{[2]} \mathbf{a}_3 \mathbf{b}^{[3]}) \sim \\ &\sim \left( (s\mathbf{a}_1) \left(\frac{1}{s}\mathbf{b}^{[1]}\right) (s\mathbf{a}_2) \left(\frac{1}{s}\mathbf{b}^{[2]}\right) (s\mathbf{a}_3) \left(\frac{1}{s}\mathbf{b}^{[3]}\right) \right) = \mathbf{B}, \quad s \neq 0, \end{aligned}$$

$$\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1 0 \mathbf{a}_2 \mathbf{b}^{[2]} 0 \mathbf{b}^{[3]}) \sim (0 \mathbf{b}^{[1]} \mathbf{a}_2 \mathbf{b}^{[2]} \mathbf{a}_3 0) = \mathbf{B}.$$

Несложно убедиться, что введенное отношение эквивалентности удовлетворяет аксиомам 1° – 3° (см. упр. 2.5.1).

Выбирая некоторый элемент  $\mathbf{A} \in \mathcal{L}_{nm}$  с помощью правил а) – в), находим все эквивалентные ему элементы, в результате получаем класс эквивалентности  $[\mathbf{A}]$  элемента  $\mathbf{A}$ .

Перебирая все элементы  $\mathbf{A} \in \mathcal{L}_{nm}$ , получаем множество всех классов эквивалентности множества  $\mathcal{L}_{nm}$ , которое, аналогично определению 2.22, назовем фактор-пространством  $[\mathcal{L}_{nm}]$  множества  $\mathcal{L}_{nm}$ .

Для  $[\mathcal{L}_{nm}]$  вводят специальное обозначение.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.25.** Тензорным произведением линейных пространств  $\mathcal{L}_n$  и  $\mathcal{L}_m$  размерности  $n$  и  $m$  называют фактор-пространство  $n$ -ой декартовой степени от декартова произведения пространств  $\mathcal{L}_n \times \mathcal{L}_m$  по отношению к введенной в определении 2.24 эквивалентности и обозначают его как

$$\mathcal{L}_n \otimes \mathcal{L}_m = [\mathcal{L}_{nm}] = [(\mathcal{L}_n \times \mathcal{L}_m)^n], \quad (2.115)$$

где  $\otimes$  – знак тензорного произведения.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.26.** Элементы Т множества  $\mathcal{L}_n \otimes \mathcal{L}_m$  называют тензорами на линейных пространствах  $\mathcal{L}_n$  и  $\mathcal{L}_m$  и обозначают следующим образом:

$$\mathbf{T} = [\mathbf{A}] = [\mathbf{a}_i \mathbf{b}^{[i]}], \quad (2.115a)$$

где  $\mathbf{a}_i \in \mathcal{L}_n$ ,  $\mathbf{b}^{[i]} \in \mathcal{L}_m$ ,  $\mathbf{A} \in \mathcal{L}_{nm}$ .

#### 2.5.4. Диадный базис

Построим теперь в множестве  $\mathcal{L}_n \otimes \mathcal{L}_m$  специальную систему элементов (т.е. классов). Для этого выберем некоторый базис  $\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_n$  в  $\mathcal{L}_n$  и базис  $\mathbf{h}_1 \dots \mathbf{h}_m$  в  $\mathcal{L}_m$ , и построим на их основе следующие системы векторов в  $\mathcal{L}_n$  и  $\mathcal{L}_m$ :

$$\mathbf{a}_i = \mathbf{e}_i, \quad (2.116)$$

$$\mathbf{b}_{jk}^{[i]} = \delta_{j,k}^i \mathbf{h}_k, \quad i, j = 1 \dots n, \quad k = 1 \dots m.$$

Подставляя эти векторы при фиксированных  $j$  и  $k$  в наборы (2.111), получим систему из  $nm$  элементов пространства  $\mathcal{L}_{nm}$ :

$$\mathbf{A}_{(jk)} = (\mathbf{e}_i \mathbf{b}_{jk}^{[i]}) = (\mathbf{e}_i (\delta_{j,k}^i \mathbf{h}_k)), \quad j = 1 \dots n, \quad k = 1 \dots m. \quad (2.117)$$

Укажем свойства этой системы.

**ТЕОРЕМА 2.27.** Все элементы системы (2.117) принадлежат различным классам эквивалентности  $[\mathbf{A}_{(jk)}]$  пространства  $\mathcal{L}_{nm}$  по отношениям а), б) и в).

Доказательство теоремы рекомендуем проделать в качестве упражнения 2.5.2.

Введем для классов эквивалентности элементов  $\mathbf{A}_{(jk)}$  специальное обозначение:

$$\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{h}_k = [\mathbf{e}_i (\delta_{j,k}^i \mathbf{h}_k)]. \quad (2.118)$$

Назовем эти классы базисными диадами (сравните с (1.113)).

Важную роль играет следующая теорема.

**ТЕОРЕМА 2.28.** Класс эквивалентности  $[\mathbf{a}_i \mathbf{b}^{[i]}]$  любого элемента  $\mathbf{a}_i \mathbf{b}^{[i]}$  из  $\mathcal{L}_{nm}$  можно представить в виде линейной комбинации классов элементов системы (2.117):

$$[\mathbf{A}] = [\mathbf{a}_i \mathbf{b}^{[i]}] = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m T^{jk} [\mathbf{A}_{(jk)}], \quad (2.119)$$

где  $T^{jk}$  – коэффициенты.

Поскольку классы  $[\mathbf{A}]$  и  $[\mathbf{A}_{(jk)}]$ , согласно определениям 2.25 и 2.26, являются тензорами второго ранга, то с учетом обозначения (2.118) получим еще одну формулировку теоремы 2.28.

**Теорема 2.28А.** Любой тензор  $T = [A]$  на линейных пространствах  $\mathcal{L}_n$  и  $\mathcal{L}_m$  можно представить в виде линейной комбинации базисных диад:

$$T = T^{jk} e_j \otimes h_k. \quad (2.120)$$

Прежде чем доказать теорему 2.28, сделаем два замечания. Во-первых, согласно (2.109) и теореме 2.26 нами определены три вида действий с классами: их сложение, умножение на число и переход к новому классу, содержащему элемент из данного класса. Во-вторых, по определению (2.109) сложение классов – это класс элементов, эквивалентных сумме элементов из  $\mathcal{L}_{nm}$ , которая, в свою очередь, определена правилами (2.112) не для всех элементов из  $\mathcal{L}_{nm}$ , а только для однотипных. Следовательно, складывать можно только классы, содержащие однотипные элементы из  $\mathcal{L}_{nm}$ . В частности, все элементы системы (2.117) однотипные, поэтому сложение их классов в формуле (2.119) правомерно.

▼ Выберем произвольный элемент  $(a_i b^{[i]})$  из  $\mathcal{L}_{nm}$  и представим его класс в виде суммы классов однотипных элементов:

$$\begin{aligned} [a_i b^{[i]}] &= [a_1 b^{[1]} a_2 0 \dots a_n 0] + \dots + [a_1 0 \dots a_\alpha b^{[\alpha]} \dots a_n 0] + \\ &\quad + \dots + [a_1 0 \dots a_{n-1} 0 a_n b^{[n]}]. \end{aligned} \quad (2.121)$$

В этих классах элементы имеют только по одной, вообще говоря, ненулевой паре векторов  $a_\alpha b^{[\alpha]}$ , а остальные – это пары вида  $a_\alpha 0$ .

Разложим теперь векторы  $a_\alpha$  и  $b^{[\alpha]}$  по базисам:  $a_\alpha = a_\alpha^j e_j$ ,  $b^{[\alpha]} = b^{\alpha k} h_k$ , тогда каждый класс в сумме (2.121) можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} [a_1 0 \dots a_\alpha b^{[\alpha]} \dots a_n 0] &= \sum_{k=1}^m b^{\alpha k} [a_1 0 \dots a_\alpha h_k \dots a_n 0] = \\ &= \sum_{k=1}^m b^{\alpha k} [0 h_1 \dots (a_\alpha^j e_j) h_k \dots 0 h_n] = \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n b^{\alpha k} a_\alpha^j [e_1 0 \dots e_j h_k \dots e_n 0] = \\ &= \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n b^{\alpha k} a_\alpha^j e_j \otimes h_k. \end{aligned} \quad (2.122)$$

Здесь мы применили теорему 2.24 для замены элемента в классе на эквивалентный (фактически поменяли пары  $a_i 0$  на  $0 h_i$ , а затем пары  $0 h_i$  на  $e_i 0$ ).

Подставляя (2.122) в (2.121), получаем

$$T = [a_i b^{[i]}] = \sum_{k=1}^m \sum_{j,\alpha=1}^n a_\alpha^j b^{\alpha k} e_j \otimes h_k, \quad (2.123)$$

что совпадает с выражением (2.120), причем

$$T^{jk} = \sum_{\alpha=1}^n a_\alpha^j b^{\alpha k}. \quad \blacktriangle \quad (2.124)$$

Следствием этой теоремы является еще одно важное утверждение.

**Теорема 2.29.** Тензорное произведение  $\mathcal{L}_n \otimes \mathcal{L}_m$  линейных пространств  $\mathcal{L}_n$  и  $\mathcal{L}_m$  размерности  $n$  и  $m$  само является линейным пространством размерности  $nm$ .

▼ Действительно, с помощью теоремы 2.28 появляется возможность складывать классы неоднотипных элементов из  $\mathcal{L}_{nm}$ : для этого надо предварительно эти классы представить в виде (2.123), а затем уже складывать, используя правила сложения (2.112) для классов однотипных элементов:

$$\begin{aligned} [a_i b^{[i]}] + [d_i c^{[i]}] &= a_j^i b^{ik} e_j \otimes h_k + d_j^i c^{ik} e_j \otimes h_k = \\ &= (a_j^i b^{ik} + d_j^i c^{ik}) e_j \otimes h_k = [e_j ((a_j^i b^{ik} + d_j^i c^{ik}) h_k)] \end{aligned} \quad (2.125)$$

и

$$s[a_i b^{[i]}] = [sa_i b^{[i]}].$$

Несложно проверить, что эти операции с элементами пространства  $\mathcal{L}_n \otimes \mathcal{L}_m$  удовлетворяют аксиомам  $1^\circ - 8^\circ$  линейного пространства, откуда следует, что  $\mathcal{L}_n \otimes \mathcal{L}_m$  – линейное пространство. Установим теперь его размерность.

Для этого заметим, что базисные диады (2.218) являются элементами пространства  $\mathcal{L}_n \otimes \mathcal{L}_m$ , а набор всех базисных диад  $e_j \otimes h_k$  ( $j = 1 \dots n$ ,  $k = 1 \dots m$ ) образует линейно независимую систему в этом пространстве. В самом деле, предположим, что нашлась такая ненулевая система коэффициентов  $T^{jk}$ , для которой выполнено соотношение

$$T^{jk} e_j \otimes h_k = 0. \quad (2.126)$$

Выбирая некоторых представителей классов, получаем из (2.126) и (2.118):

$$0 = T^{jk} (e_i (\delta_j^i h_k)) = (e_i (T^{ik} h_k)) = (e_i b^{(i)}). \quad (2.127)$$

Откуда на основании (2.115) получаем  $b^{(i)} = T^{ik} h_k = 0$ , но это противоречит тому, что  $h_1 \dots h_m$  – базис в  $\mathcal{L}_m$ . Таким образом, базисные диады  $e_j \otimes h_k$  образуют линейно независимую систему в  $\mathcal{L}_n \otimes \mathcal{L}_m$ . Кроме того, на основании теоремы 2.28а, любой элемент из  $\mathcal{L}_n \otimes \mathcal{L}_m$  линейно выражается через них, а значит, на основании определения 2.3,  $e_j \otimes h_k$  – базис в пространстве  $\mathcal{L}_n \otimes \mathcal{L}_m$ , называемый *диадным базисом*. Число элементов в диадном базисе равно  $nm$ , откуда на основании определения 2.4 получаем, что

$$\dim (\mathcal{L}_n \otimes \mathcal{L}_m) = nm. \quad \blacktriangle \quad (2.128)$$

Поскольку  $e_j \otimes h_k$  – базис, то естественно назвать коэффициенты  $T^{jk}$  в (2.120) компонентами тензора в этом диадном базисе.

### 2.5.5. Тензоры высших рангов

Построим теперь рекуррентную последовательность тензорных произведений линейных пространств.

Шаг  $r = 1$ . Выберем пространства  $\mathcal{L}_m$  и  $\mathcal{L}_n$  совпадающими:  $\mathcal{L}_m = \mathcal{L}_n$  ( $n = m$ ), тогда из определения 2.25 получаем тензорное произведение  $\mathcal{L}_n \otimes \mathcal{L}_n$ , элементами которого являются тензоры  $T$ , которые на основании (2.120) можно представить в виде:

$$T = T^{ik} e_i \otimes e_k, \quad i, k = 1 \dots n, \quad (2.129)$$

так как в данном случае базисы  $e_i$  и  $h_k$  совпадают. Такие тензоры называют *тензорами второго ранга* на линейном пространстве  $\mathcal{L}_n$ .

Шаг  $r = 2$ . Поскольку, на основании теоремы 2.29,  $\mathcal{L}_m \otimes \mathcal{L}_n$  также является линейным пространством, то его можно выбрать в качестве пространства  $\mathcal{L}_m$  в определении 2.25. Базис  $h_1 \dots h_m$  этого пространства  $\mathcal{L}_m$  состоит из  $m = n^2$  элементов, в качестве которых можно взять базисные диады  $e_i \otimes e_j$  ( $i, j = 1 \dots n$ ). Обозначим их следующим образом:

$$h_{j(n-1)+k} = e_j \otimes e_k, \quad j, k = 1 \dots n. \quad (2.130)$$

Тогда из определения 2.25 получим

$$\mathcal{L}_n \otimes \mathcal{L}_m = \mathcal{L}_n \otimes \mathcal{L}_n \otimes \mathcal{L}_n \quad (2.131)$$

снова линейное пространство, элементами которого являются *тензоры третьего ранга*, которые на основании (2.120) можно представить в виде:

$${}^3T = T^{ik} e_i \otimes h_k, \quad i = 1 \dots n, \quad k = 1 \dots m, \quad m = n^2. \quad (2.132)$$

Вводя трехиндексные компоненты

$$T^{ijl} = T^{i,j(n-1)+l}, \quad i, j, l = 1, \dots, n, \quad (2.133)$$

с учетом (2.130) получаем:

$${}^3T = T^{ijl} e_i \otimes e_j \otimes e_l. \quad (2.134)$$

Тензоры  $e_i \otimes e_j \otimes e_l$ , как и ранее в главе 1, назовем *базисными триадами*. Выстраивая далее аналогичным образом рекуррентную последовательность, на шаге  $r = k - 1$  приедем к  $k$ -кратному тензорному произведению линейных пространств

$$\mathcal{T}_n^{(0k)} = \mathcal{L}_n \otimes \mathcal{L}_n \otimes \dots \otimes \mathcal{L}_n, \quad m = n^{k-1}. \quad (2.135)$$

Элементами пространства  $CT_n^{(0k)}$  являются контравариантные тензоры  $k$ -го ранга, которые можно представить в следующем виде:

$${}^k T = T^{i_1 \dots i_k} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_k}, \quad (2.136)$$

где  $e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_k}$  – базисные полиады, а  $T^{i_1 \dots i_k}$  – компоненты тензора в этом полиадном базисе.

### 2.5.6. Тензоры на сопряженном пространстве

Выберем теперь в определении 2.25 в качестве  $\mathcal{L}_n$  и  $\mathcal{L}_m$  сопряженные к ним пространства  $\mathcal{L}_n^*$  и  $\mathcal{L}_m^*$  с базисами  $e^1 \dots e^n$  и  $h^1 \dots h^m$ . Элементами тензорного произведения  $\mathcal{L}_n^* \otimes \mathcal{L}_m^*$  являются тензоры вида:

$$T = [a^i b_{[i]}], \quad a^i \in \mathcal{L}_n^*, \quad b_{[i]} \in \mathcal{L}_m^*, \quad (2.137)$$

где  $(a^i b_{[i]})$  – векторные наборы вида (2.111), а  $[ ]$  – класс эквивалентности по отношениям, аналогичным к приведенным в определении 2.24.

Для тензоров типа (2.137) остаются справедливыми теоремы 2.27 – 2.29, в частности, сопряженные базисные диады имеют вид:

$$e^j \otimes h^k = [e^i (\delta^j_i h^k)], \quad (2.138)$$

и разложение произвольного тензора (2.137) по базисным диадам принимает вид:

$$T = T_{i;l} e^i \otimes h^l, \quad (2.139)$$

где

$$T_{i;l} = a^j_i b_{jl} \quad (2.140)$$

– компоненты тензора  $T$  в сопряженном диадном базисе, причем

$$a^i = a^i_j e^j, \quad b_{[j]} = b_{jl} h^l. \quad (2.141)$$

Если построить рекуррентную последовательность тензорных произведений, аналогично построенной в п.2.5.5, то на шаге  $r = k - 1$  придем к линейному пространству вида:

$$\mathcal{T}_n^{(k0)} = \underbrace{\mathcal{L}_n^* \otimes \dots \otimes \mathcal{L}_n^*}_k, \quad (2.142)$$

элементами которого являются

$${}^k T = T_{i_1 \dots i_n} e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_n} \quad (2.143)$$

– тензоры  $k$ -го ранга, называемые *ковариантными тензорами*.

Если же, начиная с шага  $r = p$  (где  $p < k$ ) данной рекуррентной последовательности в качестве пространства  $\mathcal{L}_m$  снова выбирать  $\mathcal{L}_n$ , то на шаге  $r = k - 1$  придем к следующему линейному пространству:

$$\mathcal{T}_n^{(pq)} = \underbrace{\mathcal{L}_n^* \otimes \dots \otimes \mathcal{L}_n^*}_{p} \otimes \underbrace{\mathcal{L}_n \otimes \dots \otimes \mathcal{L}_n}_{q}; \quad q = k - p, \quad (2.144)$$

элементами которого являются

$${}^k T = T_{i_1 \dots i_p} {}^{i_{p+1} \dots i_k} e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_p} \otimes e_{i_{p+1}} \otimes \dots \otimes e_{i_k}, \quad (2.145)$$

$$1 \leqslant p < k$$

– тензоры  $k$ -го ранга, называемые *смешанными* или *ко-контравариантными* тензорами.

На основании теоремы 2.29 заключаем, что размерность пространства  $\mathcal{T}_n^{(pq)}$  определяется по формуле:

$$\dim \mathcal{T}_n^{(pq)} = n^{p+q}. \quad (2.146)$$

Для всех трех типов тензоров (2.136), (2.143) и (2.145) вводят единую классификацию.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.27.** Тензорами типа  $(p, q)$  называют элементы линейного пространства  $\mathcal{T}_n^{(pq)}$ , где  $p \geq 0, q \geq 0$  (целые числа).

Таким образом, ковариантные тензоры (2.136) – это тензоры типа  $(k, 0)$ , где  $p = k, q = 0$ ; контравариантные тензоры (2.143) – это тензоры типа  $(0, k)$ , где  $p = 0, q = k$ ; а смешанные (2.145) – это тензоры типа  $(p, q)$  с  $p > 0, q = k - p > 0$ .

### 2.5.7. Изменение компонент тензоров при замене базиса

Пусть теперь в пространстве  $\mathcal{L}_n$  выбран новый базис  $e'_i$ , связанный с базисом  $e_i$  матрицей преобразования  $S^j{}_i$  (см. (2.63) и (2.65)).

Поскольку  $e'_i \in \mathcal{L}_n$ , то на его основе можно образовать базисные диады  $e'_i \otimes e'_k$ , которые, очевидно, также являются тензорами, т.е. элементами из  $\mathcal{T}_n^{(02)}$ .

Установим связь между  $e'_j \otimes e'_k$  и  $e_j \otimes e_k$ . Для этого воспользуемся формулой (2.116), в которой в качестве векторов  $a_i$  и  $b^{[i]}$  выберем:

$$a_i = e'_i = S^l{}_i e_l, \quad (2.147a)$$

$$b^{[i]}_{jk} = \delta^i{}_j e'_k = (\delta^i{}_j S^l{}_k) e_l, \quad i, j, k = 1 \dots n. \quad (2.147b)$$

Тогда из (2.118) находим:

$$\mathbf{e}'_j \otimes \mathbf{e}'_k = [\mathbf{e}'_i (\delta^i{}_j \mathbf{e}'_k)] = S^l{}_r \delta^r_j S^i{}_k \mathbf{e}_l \otimes \mathbf{e}_r. \quad (2.147)$$

Откуда получаем

$$\mathbf{e}'_j \otimes \mathbf{e}'_k = S^l{}_j S^i{}_k \mathbf{e}_l \otimes \mathbf{e}_i. \quad (2.148)$$

Очевидно, что имеют место обратные соотношения:

$$\mathbf{e}_l \otimes \mathbf{e}_i = (S^{-1})^j{}_l (S^{-1})^k{}_i \mathbf{e}'_j \otimes \mathbf{e}'_k. \quad (2.149)$$

Произвольный тензор  $\mathbf{T}$  из  $\mathcal{T}_n^{(02)}$ , согласно теореме 2.28а, можно разложить по всякому диадному базису, проделаем это для базисов  $\mathbf{e}'_j \otimes \mathbf{e}'_k$  и  $\mathbf{e}_l \otimes \mathbf{e}_i$ :

$$\mathbf{T} = T'^{jk} \mathbf{e}'_j \otimes \mathbf{e}'_k = T'^{jk} S^i{}_j S^l{}_k \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_l = T^{il} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_l. \quad (2.150)$$

Отсюда получаем связь компонент  $T'^{jk}$  и  $T^{il}$  в разных базисах:

$$T^{il} = T'^{jk} S^i{}_j S^l{}_k. \quad (2.151)$$

Выберем теперь в сопряженном пространстве  $\mathcal{L}_n^*$  два базиса  $\mathbf{e}'^i$  и  $\mathbf{e}^i$ , связанные матрицей преобразования  $S^i{}_j$  по формулам (2.98). Образуем на основе этих базисов базисные диады  $\mathbf{e}^j \otimes \mathbf{e}^k$  и  $\mathbf{e}'^j \otimes \mathbf{e}'^k$ , являющиеся элементами пространства  $\mathcal{T}_n^{(20)}$ .

Разложим тензор  $\mathbf{e}'^i \otimes \mathbf{e}'^k$  по диадному базису  $\mathbf{e}^j \otimes \mathbf{e}^k$  с помощью формул (2.137) – (2.141), в которых в качестве ковекторов  $\mathbf{a}^i$  и  $\mathbf{b}_{[i]}$  выбираем

$$\mathbf{a}^i = \mathbf{e}'^i = (S^{-1})^i{}_j \mathbf{e}^j, \quad (2.152)$$

$$\mathbf{b}_{[i]}^{jk} = \delta_i^j \mathbf{e}'^k = \delta_i^j (S^{-1})^k{}_l \mathbf{e}^l, \quad i, j, k, l = 1 \dots n.$$

Тогда получим

$$\mathbf{e}'^j \otimes \mathbf{e}'^k = [\mathbf{e}'^i (\delta_i^j \mathbf{e}'^k)] = (S^{-1})^\alpha{}_i \delta_\alpha^j (S^{-1})^k{}_l \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^l. \quad (2.153)$$

В результате приходим к соотношению между сопряженными базисными диадами:

$$\mathbf{e}'^j \otimes \mathbf{e}'^k = (S^{-1})^j{}_i (S^{-1})^k{}_l \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^l. \quad (2.154)$$

Если выбрать произвольный тензор  $\mathbf{T}$  из пространства  $\mathcal{T}_n^{(20)}$ , то его можно разложить по формуле (2.139) как по диадному базису  $\mathbf{e}'^i \otimes \mathbf{e}'^k$ , так и по  $\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^k$ , тогда с учетом (2.143) получим:

$$\mathbf{T} = T'_{jk} \mathbf{e}'^j \otimes \mathbf{e}'^k = T'_{jk} (S^{-1})^j{}_i (S^{-1})^k{}_l \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^l = T_{il} \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^l. \quad (2.155)$$

В силу единственности разложения по базису элементов линейного пространства, в итоге имеем:

$$T_{il} = T'_{jk} (S^{-1})^j_i (S^{-1})^k_l \quad (2.156)$$

соотношение между компонентами тензора из  $\mathcal{T}_n^{(20)}$  в различных сопряженных диадных базисах.

Вообще же для тензоров из пространства  $\mathcal{T}_n^{(pq)}$  имеет место следующая теорема.

**Теорема 2.30.** *Базисные полиады в пространстве  $\mathcal{T}_n^{(pq)}$  ( $p \geq 0, q \geq 0$ ) при замене базиса в порождающем их пространстве  $\mathcal{L}_n$ :  $e'^i = S^l_i e_l$  и сопряженном к нему пространстве  $\mathcal{L}_n^*$ :  $e'^i = (S^{-1})^i_j e^j$  преобразуются следующим образом:*

$$\begin{aligned} e'^{i_1} \otimes \dots \otimes e'^{i_p} \otimes e'_{i_{p+1}} \otimes \dots \otimes e'_{i_k} &= (S^{-1})^{i_1}_{j_1} \dots (S^{-1})^{i_p}_{j_p} S^{j_{p+1}}_{i_{p+1}} \dots \\ &\dots S^{j_k}_{i_k} e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_p} \otimes e^{j_{p+1}} \otimes \dots \otimes e^{j_k}. \end{aligned} \quad (2.157)$$

Компоненты произвольного тензора  ${}^k T$  типа  $(p, q)$  при такой замене базисов преобразуются следующим образом:

$$T_{i_1 \dots i_p} {}^{i_{p+1} \dots i_k} = (S^{-1})^{j_1}_{i_1} \dots (S^{-1})^{j_p}_{i_p} S^{i_{p+1}}_{j_{p+1}} \dots S^{i_k}_{j_k} T'_{j_1 \dots j_p} {}^{j_{p+1} \dots j_k}. \quad (2.158)$$

Идея доказательства аналогична приведенной выше для случаев  $p = 2, q = 0$  и  $p = 0, q = 2$ , детали доказательства оставляем в качестве упр. 2.5.4.

## 2.5.8. Операции с тензорами

### A) Сложение

Поскольку все введенные выше тензоры являются элементами соответствующего линейного пространства  $\mathcal{T}_n^{(pq)}$  ( $p \geq 0, q \geq 0$ ), то их можно складывать с себе подобными и умножать на число, например

$$\begin{aligned} {}^k T + {}^k B &= T^{i_1 \dots i_k} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_k} + B^{i_1 \dots i_k} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_k} = \\ &= (T^{i_1 \dots i_k} + B^{i_1 \dots i_k}) e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_k}, \\ s {}^k T &= (s T^{i_1 \dots i_k}) e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_k}. \end{aligned} \quad (2.159)$$

### B) Транспонирование

Для каждого тензора  ${}^k T$   $k$ -го ранга можно ввести транспонированные тензоры подобно тому, как это было сделано в евклидовом пространстве (см. п. 1.8.2):

$${}^k T^{(m_1 \dots m_k)} = T^{i_1 \dots i_k} e_{i_{m_1}} \otimes \dots \otimes e_{i_{m_k}}, \quad (2.160)$$

$$m_1 \dots m_k \in \{1 \dots k\}, \quad i_1 \dots i_k \in \{1 \dots n\},$$

где  $(m_1 \dots m_k)$  – некоторая подстановка.

### B) Тензорное произведение

Для тензоров из  $\mathcal{T}_n^{(pq)}$  можно определить операцию тензорного произведения.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.28.** Тензорным произведением двух тензоров  ${}^m T$   $m$ -го ранга и  ${}^k B$   $k$ -го ранга из пространств  $\mathcal{T}_n^{(pq)}$  и  $\mathcal{T}_n^{(p'q')}$  ( $p + q = m$ ,  $p' + q' = k$ ):

$${}^m T = T_{i_1 \dots i_p} e^{i_{p+1} \dots i_m} e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_p} \otimes e_{i_{p+1}} \otimes \dots \otimes e_{i_m}, \quad (2.161)$$

$${}^k B = B_{i_1 \dots i_{p'}} e^{i_{p'+1} \dots i_k} e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_{p'}} \otimes e_{i_{p'+1}} \otimes \dots \otimes e_{i_k},$$

называется тензор  $(k+m)$ -го ранга

$$\begin{aligned} {}^{m+k} C &= {}^m T \otimes {}^k B = \\ &= T_{i_1 \dots i_p} e^{i_{p+1} \dots i_m} B_{i_{m+1} \dots i_{m+p'}} e^{i_{m+p'+1} \dots i_{m+k}} e^{i_1} \otimes \dots \\ &\quad \dots \otimes e^{i_p} \otimes e_{i_{p+1}} \otimes \dots \otimes e_{i_m} \otimes e^{i_{m+1}} \otimes \dots \\ &\quad \dots \otimes e^{i_{m+p'}} \otimes e_{i_{m+p'+1}} \otimes \dots \otimes e_{i_{k+m}}, \end{aligned} \quad (2.162)$$

являющийся элементом пространства  $\mathcal{T}_n^{(pq)} \otimes \mathcal{T}_n^{(p'q')}$ .

### Г) Симметрирование

Если для тензора  ${}^k T$  типа  $(p, q)$  выбрать группу из  $r$  верхних (или только нижних) индексов, причем  $r \leq p$ , то с помощью транспонирования в этой группе индексов можно получить  $r!$  тензоров  ${}^k T^{(\sigma)}$  с учетом исходного. Здесь  $\sigma = (m_1 \dots i \dots m_i \dots l \dots m_k)$  – соответствующая подстановка, полученная из тождественной  $(1 \dots i \dots j \dots l \dots k)$ , в которой  $i, l \dots$  (всего  $k - r$  штук) не меняются. Тогда суммированием этих тензоров получим новый тензор типа  $(p, q)$

$${}^k T^{[s]} = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma} {}^k T^{(\sigma)}. \quad (2.163)$$

Очевидно, что применение операций транспонирования в группе из тех же  $r$  индексов к самому тензору  ${}^k T^{[s]}$  не изменяет его:

$${}^k T^{[s]} = ({}^k T^{[s]})^{(\sigma)}.$$

Такие тензоры называют *симметризованными по группе индексов*. Примеры операций симметрирования приведены в 1.8.3.

Если же сам тензор  ${}^k T$  типа  $(p, q)$  совпадает с любым из своих транспонированных тензоров в группе из  $r$  индексов, т.е.

$${}^k T = {}^k T^{(\sigma)},$$

то его называют *симметричным тензором по группе индексов  $\sigma$* .

**Теорема 2.31.** *Множество всех тензоров  ${}^k T$  типа  $(p, q)$ , симметричных по одной и той же группе  $\sigma$  из  $r$  индексов, образует линейное пространство  $S_{n\sigma}^{(pq)}$ , причем  $S_{n\sigma}^{(pq)} \subset T_n^{(pq)}$ .*

▼ Действительно, поскольку операции транспонирования и сложения (или умножения на число) тензоров переставимы, то для любых двух тензоров  ${}^k T$  и  ${}^k B$ , симметричных относительно группы индексов  $\sigma$ , их сумма (и произведение на число) тоже является симметричной относительно той же группы  $\sigma$ :

$$({}^k T + {}^k B)^{(\sigma)} = {}^k T^{(\sigma)} + {}^k B^{(\sigma)} = {}^k T + {}^k B,$$

$$(s {}^k T)^{(\sigma)} = s {}^k T^{(\sigma)} = s {}^k T.$$

Так как все симметричные тензоры  ${}^k T \in S_{n\sigma}^{(pq)}$  являются также и просто тензорами типа  $(p, q)$ , то, очевидно, что  $S_{n\sigma}^{(pq)} \subset T_n^{(pq)}$ . ▲

#### Д) Альтернирование

Обозначим через  $|\sigma|$  количество инверсий в каждой подстановке и образуем сумму, аналогичную (2.163), но меняя знак перед каждым  ${}^k T^{(\sigma)}$ , в результате получим

$${}^k T^{[a]} = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma} (-1)^{|\sigma|} {}^k T^{(\sigma)} \quad (2.164)$$

– тензор, который изменяет знак при любых перестановках в группе индексов  $\sigma$ :

$$({}^k T^{[a]})^{(\sigma)} = (-1)^{|\sigma|} {}^k T^{[a]}. \quad (2.165)$$

Такие тензоры  ${}^k T^{[a]}$  называют *кососимметричными по группе индексов  $\sigma$* , а операцию преобразования  ${}^k T \rightarrow {}^k T^{[a]}$  называют *альтернированием*. Примеры кососимметричных тензоров приведены в п.1.6.2.

#### 2.5.9. Скалярное произведение тензоров в евклидовых пространствах

Если пространство евклидово ( $\mathcal{L}_n = \mathcal{E}_n$ ), то в силу его самосопряженности ( $\mathcal{E}_n = \mathcal{E}_n^*$ ) все линейные пространства  $T_n^{(pq)} = \mathcal{E}_n^{(pq)}$  совпадают для  $p$  и  $q$  таких, что  $p + q = k$ . Поэтому можно рассматривать, например, только пространства  $\mathcal{E}_n^{(0k)} = \mathcal{E}_n^{(k)}$ .

Для тензоров из этого пространства  $\mathcal{E}_n^{(k)}$  можно ввести дополнительно операцию жонглирования индексами (опускания или поднятия).

## Е) Опускание или поднятие индексов

Всякий тензор  ${}^k\mathbf{T}$  можно представить различными способами в основном  $\mathbf{e}_i$  и взаимном  $\mathbf{e}^i$  базисах с помощью фундаментальной матрицы  $g_{ij}$  и ее обратной  $g^{ij}$ :

$$\begin{aligned} {}^k\mathbf{T} &= T^{i_1 \dots i_k} \mathbf{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i_k} = \\ &= T^{i_1 \dots i_p}_{\quad \quad \quad i_{p+1} \dots i_k} \mathbf{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i_p} \otimes \mathbf{e}^{i_{p+1}} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}^{i_k}, \end{aligned} \quad (2.166)$$

где

$$T^{i_1 \dots i_k} = T^{i_1 \dots i_p}_{\quad \quad \quad j_{p+1} \dots j_k} g^{i_{p+1} j_{p+1}} \dots g^{i_k j_k}.$$

Кроме того, поскольку в  $\mathcal{E}_n$  определено скалярное произведение, тензоры из  $\mathcal{E}_n^{(k)}$  можно скалярно перемножать.

## Ж) Скалярное умножение

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.29.** Скалярным  $k$ -кратным произведением тензоров  ${}^m\mathbf{T}$  и  ${}^l\mathbf{B}$  из пространств  $\mathcal{E}_n^{(m)}$  и  $\mathcal{E}_n^{(l)}$  называют тензор  ${}^{m+l-k}\mathbf{C}$  из пространства  $\mathcal{E}_n^{(m+l-k)}$ :

$$\begin{aligned} {}^{m+l-k}\mathbf{C} &= {}^m\mathbf{T} \underbrace{\dots}_{k} {}^l\mathbf{B} = T^{i_1 \dots i_m} \mathbf{e}_{i_1} \otimes \dots \\ &\quad \dots \otimes \mathbf{e}_{i_m} \cdot \dots \cdot B^{j_1 \dots j_l} \mathbf{e}_{j_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{j_l} = \\ &= T^{i_1 \dots i_{m-k}}_{\quad \quad \quad j_k \dots j_1} B^{j_1 \dots j_k i_{m-k+1} \dots i_{m-k+l}} \mathbf{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i_{m-k+l}}, \end{aligned}$$

где  $1 \leq k \leq m$  и  $k \leq l$ .

## 2.5.10. Независимые компоненты тензоров

Рассмотрим произвольный тензор  ${}^k\mathbf{T}$  из некоторого подпространства  $\mathcal{T}'_n \subset \mathcal{T}_n^{(pq)}$ ,  $k = p + q$ , который в некотором полиадном базисе имеет вид:

$${}^k\mathbf{T} = T_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} \mathbf{e}^{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}^{i_p} \otimes \mathbf{e}_{j_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{j_q}.$$

Образуем из компонент  $T_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}$  этого тензора каким-либо образом координатный столбец  $(T^1 \dots T^i \dots T^{k_0})^T$ . Один из способов образования такого столбца приведен далее в п. 4.2.1. Число  $k_0 = n^{p+q}$  – это общее число компонент тензора  $k$ -го ранга,  $k_0 = \dim \mathcal{T}_n^{(pq)}$ .

Говорят, что среди компонент  $T_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}$  тензора имеется только  $k'_0$  независимых, если существует матрица  $D^i_j$  размером  $(k_0 - k'_0) \times$

$k_0$ , ранг которой равен  $(k_0 - k'_0)$ , такая, что имеют место  $(k_0 - k'_0)$  соотношений:

$$D^i_j T^j = 0, \quad i = 1 \dots (k_0 - k'_0). \quad (2.167)$$

Числом независимых компонент тензора  ${}^k T$  из  $\mathcal{T}'_n$  называют число  $k'_0$  для тензора с максимально возможным количеством ненулевых компонент.

**Теорема 2.32.** Число  $k'_0$  независимых компонент тензора  ${}^k T$  из некоторого подпространства  $\mathcal{T}'_n \subset \mathcal{T}_n^{(pq)}$  равно размерности этого подпространства:

$$k'_0 = \dim \mathcal{T}'_n \leq k_0.$$

▼ Рассмотрим произвольный тензор  ${}^k T$  из  $\mathcal{T}'_n$ . Так как  $\mathcal{T}'_n$  – линейное пространство, то в нем можно выбрать базис  ${}^k A_{(s)}$ ,  $s = 1 \dots N$ , из  $N$  тензоров, где  $N = \dim \mathcal{T}'_n$ , и разложить  ${}^k T$  по этому базису:

$${}^k T = \sum_{s=1}^N T^{(s)} {}^k A_{(s)}, \quad (2.168)$$

где  $T^{(s)}$  – коэффициенты разложения. Если образовать координатный столбец  $(T^1 \dots T^{k_0})^T$  из компонент  $T_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}$  тензора  ${}^k T$  в некотором базисе  $e^i$  и столбцы  $(A_{(s)}^1 \dots A_{(s)}^{k_0})^T$  из компонент  $A_{(s)i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}$  базисных тензоров  ${}^k A_{(s)}$ , то (2.168) можно записать в виде:

$$T^i = \sum_{s=1}^N A_{(s)}^i T^{(s)}, \quad i = 1 \dots k_0. \quad (2.168a)$$

Столбцы  $A_{(s)}^i$  образуют матрицу размером  $k_0 \times N$ , причем  $\text{rang}(A_{(s)}^i) = N$ , так как это координатные столбцы из компонент  $N$  базисных тензоров. Тогда существует квадратная матрица  $\widehat{A}_{(s)}^i$  порядка  $N$ , образованная из  $A_{(s)}^i$  вычеркиванием  $k_0 - N$  строк и перенумерацией оставшихся строк, у которой  $\det \widehat{A}_{(s)}^i \neq 0$ . Из вычеркнутых строк образуем матрицу  $\check{A}_{(s)}^i$  размером  $(k_0 - N) \times N$ . Обозначим  $(\check{T}^1 \dots \check{T}^{k_0})^T$  координатный столбец, образованный из  $(T^1 \dots T^{k_0})^T$  вычеркиванием элементов с теми же номерами, что и при формировании матрицы  $\widehat{A}_{(s)}^i$ . Из вычеркнутых же элементов образуем столбец  $(\check{T}^1 \dots \check{T}^{k_0})^T$ . Тогда соотношение (2.168a) можно разбить на две группы:

$$\widehat{T}^i = \sum_{s=1}^N \widehat{A}_{(s)}^i T^{(s)}, \quad s = 1 \dots N; \quad \check{T}^i = \sum_{s=1}^N \check{A}_{(s)}^i T^{(s)}, \quad i = 1 \dots (k_0 - N).$$

В силу невырожденности матрицы  $\widehat{A}_{(s)}^i$  из первой группы найдем:  $T^{(s)} = \sum_{j=1}^N \widehat{A}_j^{(s)} T^j$ , где  $\widehat{A}_j^{(s)}$  – матрица, обратная к  $\widehat{A}_{(s)}^i$ . Подставляя  $T^{(s)}$  во вторую группу соотношений, получаем:

$$\check{T}^i - \sum_{s=1}^N \sum_{j=1}^N \check{A}_{(s)}^i \widehat{A}_j^{(s)} \widehat{T}^j = 0, \quad i = 1 \dots (k_0 - N). \quad (2.169)$$

Если снова образовать единый координатный столбец

$$(\tilde{T}^1 \dots \tilde{T}^i \dots \tilde{T}^{k_0})^T = (\check{T}^1 \dots \check{T}^{k_0-N} \widehat{T}^1 \dots \widehat{T}^N)^T,$$

то соотношение (2.169) можно переписать как

$$D^i_j \tilde{T}^j = 0, \quad i = 1 \dots (k_0 - N), \quad (2.169a)$$

где  $D^i_j$  – блочная матрица размером  $(k_0 - N) \times k_0$  вида  $D = (E_{k_0-N} | \tilde{A})$ , а  $\tilde{A}^i_j = \sum_{s=1}^N \sum_{j=1}^N \check{A}_{(s)}^i \widehat{A}_j^{(s)}$ ,  $i = 1 \dots (k_0 - N)$ ,  $j = 1 \dots N$ , и  $E_{k_0-N}$  – единичная матрица порядка  $k_0 - N$ . Так как матрица  $D^i_j$  имеет, очевидно, ранг  $(k_0 - N)$ , то из (2.169a) и (2.167) следует, что среди компонент  $T_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}$  независимых не более  $N$  штук, т.е.  $k'_0 \leq N$  (случай  $k'_0 < N$  возможен, если существуют и другие соотношения кроме (2.169a), связывающие компоненты тензоров из  $\mathcal{T}'_n$ ). Однако тензор  ${}^k T$  с максимальным числом компонент  $k'_0$ , который удовлетворяет только условиям (2.169a), будет обладать и разложением (2.168), т.е. также принадлежит пространству  $\mathcal{T}'_n$ . Для этого тензора существует только  $k'_0 = N$  независимых компонент, что и доказывает теорему. ▲

В качестве примера подсчитаем число независимых компонент  $k'_0$  тензоров, симметричных только по первым двум индексам, т.е. принадлежащих подпространству  $S_{n\sigma}^{(pq)}$ , где  $\sigma = (21345 \dots k)$ ,  $k = p + q$ . Так как компоненты тензоров этого подпространства связаны соотношением:  $T_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} = T_{i_2 i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}$ , в которых только  $(1/2)(n^2 + n)n^{p-2+q}$  различных, то получаем, что

$$k'_0 = \frac{1}{2}(n^2 + n)n^{p+q-2}.$$

### 2.5.11. Полилинейные формы

С понятием тензора типа  $(p, q)$  связан еще один часто используемый объект, обобщающий понятие линейного функционала.

Пусть  $\mathcal{L}_n$  – линейное пространство, а  $\mathcal{L}_n^*$  – сопряженное к нему пространство. Рассмотрим декартово произведение пространств вида:

$$\mathcal{M}_{pq} = \underbrace{\mathcal{L}_n \times \dots \times \mathcal{L}_n}_p \times \underbrace{\mathcal{L}_n^* \times \dots \times \mathcal{L}_n^*}_q.$$

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.30. Функционал

$$f = f(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_p, \mathbf{b}^1, \dots, \mathbf{b}^q) \quad (2.170)$$

от  $p$  векторов  $\mathbf{a}_i$  и  $q$  векторов  $\mathbf{b}^i$ , осуществляющий отображение  $f: \mathcal{M}_{pq} \rightarrow \mathbb{R}^1$ , называют полилинейной формой типа  $(p, q)$  на  $\mathcal{L}_n$ , если он является линейным по каждому из аргументов.

Полилинейная форма типа (10) – это линейный функционал, т.е. ковектор, а полилинейная форма типа (01) – это по определению вектор из  $\mathcal{L}_n$ .

На множестве полилинейных форм обычным образом можно определить операцию сложения: суммой двух форм  $f$  и  $\varphi$  одного типа  $(p, q)$  называют функционал  $\psi = f + \varphi$ , значения которого равны сумме значений  $f$  и  $\varphi$  при каждом значении набора аргументов из  $\mathcal{M}_{pq}$ . Аналогично определяется умножение полилинейной формы на число.

**ТЕОРЕМА 2.33.** *Множество всех полилинейных форм типа  $(p, q)$  на  $\mathcal{L}_n$  является линейным пространством.*

Доказательство, заключающееся в проверке того, что операции сложения форм и умножения их на число сохраняют тип формы, оставляем в качестве упр. 2.5.4.

Выберем теперь базис  $e_i$  в пространстве  $\mathcal{L}_n$ , и взаимный к нему базис  $e^i$  в  $\mathcal{L}_n^*$ . Тогда, раскладывая произвольные векторы  $\mathbf{a}_i$  и ковекторы  $\mathbf{b}^i$ , являющиеся аргументами формы (2.170), по этим базисам, в силу линейности  $f$  по аргументам, получаем

$$\begin{aligned} f &= f(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_p, \mathbf{b}^1, \dots, \mathbf{b}^q) = f(a_1^{i_1} e_{i_1}, \dots, a_p^{i_p} e_{i_p}, b_1^{j_1} e^{j_1}, \dots, b_q^{j_q} e^{j_q}) = \\ &= a_1^{i_1} \dots a_p^{i_p} b_1^{j_1} \dots b_q^{j_q} f_{i_1 \dots i_p}{}^{j_1 \dots j_q}, \end{aligned} \quad (2.171)$$

где обозначены коэффициенты

$$f_{i_1 \dots i_p}{}^{j_1 \dots j_q} = f(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}, e^{j_1}, \dots, e^{j_q}), \quad (2.172)$$

называемые по аналогии с линейными функционалами (см. (2.88)) компонентами полилинейной формы.

Имеет место следующая теорема.

**ТЕОРЕМА 2.34.** *Компоненты полилинейной формы  $f$  (2.170) типа  $(p, q)$ , определенные в базисе  $e_i$  из  $\mathcal{L}_n$  связаны с компонентами в другом базисе  $e'_i = S^j{}_i e_j$  следующими соотношениями:*

$$f'_{i_1 \dots i_p}{}^{j_1 \dots j_q} = S^{k_1}{}_{i_1} \dots S^{k_p}{}_{i_p} (S^{-1})^{j_1}{}_{l_1} (S^{-1})^{j_q}{}_{l_q} f_{k_1 \dots k_p}{}^{l_1 \dots l_q}. \quad (2.173)$$

▼ Определяя координаты формы  $f$  в новом базисе  $e'_i$  согласно правилу (2.172), получаем в силу линейности формы по аргументам:

$$\begin{aligned} f'_{i_1 \dots i_p}{}^{j_1 \dots j_q} &= f(e'_{i_1}, \dots, e'_{i_p}, e'^{j_1}, \dots, e'^{j_q}) = \\ &= f\left(S^{k_1}_{i_1} e_{k_1}, \dots, S^{k_p}_{i_p} e_{k_p}, (S^{-1})^{j_1}_{l_1} e^{l_1}, \dots, (S^{-1})^{j_q}_{l_q} e^{l_q}\right) = \\ &= S^{k_1}_{i_1} \dots S^{k_p}_{i_p} (S^{-1})^{j_1}_{l_1} (S^{-1})^{j_q}_{l_q} f(e_{k_1}, \dots, e_{k_p}, e^{l_1}, \dots, e^{l_q}), \end{aligned}$$

что и доказывает теорему. ▲

Сравнивая соотношение (2.173) с формулой (2.158), заключаем, что компоненты  $f'_{i_1 \dots i_p}{}^{j_1 \dots j_q}$  являются компонентами тензора типа  $(p, q)$ , заданного на пространстве  $\mathcal{L}_n$ . Таким образом, полилинейной форме  $f$  типа  $(p, q)$  на  $\mathcal{L}_n$  соответствует тензор типа  $(p, q)$  на  $\mathcal{L}_n$ :

$${}^k F = f_{i_1 \dots i_p}{}^{j_1 \dots j_q} e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_q}, \quad p + q = k.$$

### 2.5.12. Сравнение геометрического и алгебраического определений тензора

Сравним теперь два подхода к определению тензора: "геометрический" (определение 1.18) и "алгебраический" (определение 2.25). В основе первого лежит аксиоматика элементарной геометрии в трехмерном евклидовом пространстве, а второго – теоретико-множественные аксиомы линейного пространства. Формальные выражения для тензоров (1.104) и (2.115а) в этих подходах практически совпадают для случая  $i = 1, 2, 3$ . Введенные в (1.104) скобки "[ ]" как простое обозначение, в рамках алгебраического подхода получили свое обоснование – это класс эквивалентности на введенном множестве векторных наборов  $a, b^{[i]}$ . Более того, если пространство  $\mathcal{L}_n$  является евклидовым  $\mathcal{E}_3$ , то определения (1.104) и (2.115а) вводят один и тот же объект.

Тензорные законы преобразования компонент тензоров (1.250) и (2.158) при замене базисов  $R'_j = P^i_j R_i$  (упр. 1.1.8) и  $e'_i = S^j_i e_j$  (соотношение (2.62)) соответственно также совпадают, если положить

$$P^i_j = S^i_j, \quad Q^i_j = (P^{-1})^i_j = (S^{-1})^i_j, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

### Упражнения к § 2.5.

**Упражнение 2.5.1.** Доказать, что введенные в определении 2.24 отношения эквивалентности удовлетворяют аксиомам 1<sup>0</sup> – 3<sup>0</sup> из п. 2.5.1.

**Упражнение 2.5.2.** Доказать теорему 2.27, непосредственно образуя для каждого элемента  $A_{(jk)}$  его класс эквивалентности  $[A_{(jk)}]$  с помощью правил а) – в) из определения 2.24 и показывая, что никакие другие элементы системы (2.117) не принадлежат этому классу.

**Упражнение 2.5.3.** Используя определение 2.30, показать, что полилинейную форму типа  $(1, 1)$  можно отождествить с линейным оператором, действующим из  $\mathcal{L}_n$  в  $\mathcal{L}_n$ .

**Упражнение 2.5.4.** Доказать теоремы 2.30 и 2.33.

## § 2.6. Внешние формы

### 2.6.1. Свойства операции альтернирования

Если операция альтернирования (2.164) осуществляется по всем индексам тензора, то будем ее обозначать следующим образом:

$${}^k T^{[A]} = \frac{1}{k!} \sum_{(m_1 \dots m_k)} (-1)^{|m_1 \dots m_k|} T^{(m_1 \dots m_k)}. \quad (2.174)$$

**Теорема 2.35.** Операция альтернирования (2.174) тензоров  ${}^k T$  из  $T_n^{(k,0)}$  или  $T_n^{(0,k)}$  обладает следующими свойствами:

$$({}^k T^{[A]})^{(m_1 \dots m_k)} = (-1)^{|m_1 \dots m_k|} {}^k T^{[A]}, \quad (2.175)$$

$$({}^k T^{(m_1 \dots m_k)})^{[A]} = (-1)^{|m_1 \dots m_k|} {}^k T^{[A]}, \quad (2.176)$$

$$({}^k T^{[a]})^{[A]} = {}^k T^{[A]}, \quad (2.177)$$

где альтернирование  $T^{[a]}$  осуществляется по (2.164) в группе первых  $r \leq k$  индексов, т.е.  $\sigma = (m_1 \dots m_r r + 1 \dots k)$ .

▼ Используя определение (2.174), получаем

$$\begin{aligned} ({}^k T^{[A]})^{(m_1 \dots m_k)} &= \frac{1}{k!} \sum_{(i_1 \dots i_k)} (-1)^{|i_1 \dots i_k|} T^{(i_{m_1} \dots i_{m_k})} = \\ &= \frac{(-1)^{|m_1 \dots m_k|}}{k!} \sum_{(i_1 \dots i_k)} (-1)^{|i_{m_1} \dots i_{m_k}|} T^{(i_{m_1} \dots i_{m_k})} = \\ &= (-1)^{|m_1 \dots m_k|} T^{[A]}. \end{aligned} \quad (2.178)$$

Здесь мы применили два свойства подстановок:

- если суммирование идет по всем возможным подстановкам  $(i_1 \dots i_k)$ , то подстановка каждого слагаемого может быть умножена на одну и ту же некоторую подстановку  $m_1 \dots m_k$ ;
- знаки трех перестановок  $i_1 \dots i_k$ ,  $m_1 \dots m_k$  и  $i_{m_1} \dots i_{m_k}$  связаны соотношениями:

$$|i_{m_1} \dots i_{m_k}| = |i_1 \dots i_k| |m_1 \dots m_k|. \quad (2.179)$$

Доказательство соотношения (2.176) проводится аналогично. Соотношение (2.177) доказываем следующим образом:

$$\begin{aligned} (^k T^{[a]})^{[A]} &= \frac{1}{r!} \sum_{m_1 \dots m_r} (-1)^{|m_1 \dots m_r|} (^k T^{(m_1 \dots m_r)})^{[A]} = \\ &= \frac{1}{r!} \sum_{(m_1 \dots m_r)} (-1)^{|m_1 \dots m_r|} (-1)^{|m_1 \dots m_r| k} T^{[A]} = {}^k T^{[A]}. \end{aligned} \quad (2.180)$$

Здесь было использовано свойство линейности операции альтернирования, а также свойство (2.176). ▲

Из (2.177), в частности, следует, что

$$\left( {}^k T^{[A]} \right)^{[A]} = {}^k T^{[A]}. \quad (2.181)$$

## 2.6.2. Свойства кососимметричных тензоров

Рассмотрим тензоры  ${}^k T \in \mathcal{T}_n^{(k0)}$  или  $\mathcal{T}_n^{(0k)}$ , кососимметричные по всем индексам, т.е. удовлетворяющие соотношению:

$${}^k T^{(m_1 \dots m_k)} = (-1)^{|m_1 \dots m_k|} {}^k T. \quad (2.182)$$

для всех подстановок индексов  $\sigma = (m_1 \dots m_k)$ .

Такие тензоры называют *кососимметричными*.

Перейдем в (2.182) к компонентам тензора типа  $(0, k)$ :

$$T^{i_1 \dots i_k} e_{i_{m_1}} \otimes \dots \otimes e_{i_{m_k}} = (-1)^{|m_1 \dots m_k|} T^{i_1 \dots i_k} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_k}. \quad (2.183)$$

Применяя правило (1.255) перемены индексов у полиадного базиса

$$T^{i_{w_1} \dots i_{w_k}} = (-1)^{|m_1 \dots m_k|} T^{i_1 \dots i_k}, \quad (2.184)$$

затем меняя еще раз индексы согласно (1.257) и умножая правую и левую части на  $(-1)^{|m_1 \dots m_k|}$ , получаем окончательно

$$T^{i_{m_1} \dots i_{m_k}} = (-1)^{|m_1 \dots m_k|} T^{i_1 \dots i_k}. \quad (2.185)$$

Аналогичную формулу можно установить для тензоров типа  $(k, 0)$ :

$$T_{i_{m_1} \dots i_{m_k}} = (-1)^{|m_1 \dots m_k|} T_{i_1 \dots i_k}. \quad (2.186)$$

Формулы (2.185) и (2.186) представляют собой содержание следующей теоремы.

**Теорема 2.36.** Тензоры  ${}^k\mathbf{T}$  типа  $(0, k)$  и  $(k, 0)$  кососимметричны тогда и только тогда, когда кососимметричны их соответствующие компоненты, т.е. выполнены условия (2.185) и (2.186).

Сравнивая (2.185) и (2.184), заключаем, что для кососимметричных тензоров любая подстановка индексов совпадает со своей обратной:

$$T^{i_{w_1} \dots i_{w_k}} = T^{i_{m_1} \dots i_{m_k}}. \quad (2.187)$$

Операция альтернирования не изменяет кососимметричного тензора  ${}^k\mathbf{T}$ , так как

$$\begin{aligned} {}^k\mathbf{T}^{[A]} &= \frac{1}{k!} \sum_{m_1 \dots m_k} (-1)^{|m_1 \dots m_k|} \mathbf{T}^{(m_1 \dots m_k)} = \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{m_1 \dots m_k} (-1)^{|m_1 \dots m_k|} (-1)^{|w_1 \dots w_k|} \mathbf{T} = \\ &= \left( \frac{1}{k!} \sum_{(m_1 \dots m_k)} \right) (-1)^{|m_1 \dots m_k|} (-1)^{|w_1 \dots w_k|} {}^k\mathbf{T} = {}^k\mathbf{T}. \end{aligned} \quad (2.188)$$

**Теорема 2.37.** Множество всех кососимметричных тензоров типа  $(p, q)$  на  $\mathcal{L}_n$  образует линейное пространство  $\Lambda_n^{(pq)}$ , причем  $\Lambda_n^{(pq)} \subset \mathcal{T}_n^{(pq)}$ .

▼ Действительно, если  ${}^k\mathbf{T}$  и  ${}^k\mathbf{B}$  являются кососимметричными, то любая их линейная комбинация тоже кососимметрична, так как

$$\begin{aligned} (s_1 {}^k\mathbf{T} + s_2 {}^k\mathbf{B})^{(m_1 \dots m_k)} &= s_1 {}^k\mathbf{T}^{(m_1 \dots m_k)} + s_2 {}^k\mathbf{B}^{(m_1 \dots m_k)} = \\ &= s_1 (-1)^{|\sigma| k} \mathbf{T} + s_2 (-1)^{|\sigma| k} \mathbf{B} = (-1)^{|\sigma|} (s_1 {}^k\mathbf{T} + s_2 {}^k\mathbf{B}). \end{aligned} \quad (2.189)$$

Но поскольку все кососимметричные тензоры – это тоже тензоры, то  $\Lambda_n^{(pq)} \subset \mathcal{T}_n^{(pq)}$ . ▲

### 2.6.3. Внешние произведения векторов

Для кососимметричных тензоров удобно использовать специальную операцию – внешнее произведение.

**Определение 2.31.** Внешним произведением векторов  $\mathbf{a}_i \in \mathcal{L}_n$  ( $i = 1 \dots q$ ) называют альтернирование их тензорного произведения и обозначают его следующим образом:

$$\mathbf{a}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{a}_q = (\mathbf{a}_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{a}_q)^{[A]}. \quad (2.190)$$

Аналогично определяют внешнее произведение ковекторов  $b^i \in \mathcal{L}_n^*$  ( $i = 1 \dots p$ ):

$$b^1 \wedge \dots \wedge b^p = (b^1 \otimes \dots \otimes b^p)^{[A]}. \quad (2.191)$$

Выражения, стоящие в левой части (2.190) и (2.191), называют *внешними формами* типа  $(0, q)$  и  $(p, 0)$  соответственно (используют также название *поливекторы* или  $q$ -векторы и  $p$ -векторы).

Из (2.190), например, при  $k = 2$  получаем

$$\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 = \frac{1}{2}(\mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_2 \otimes \mathbf{a}_1), \quad (2.192)$$

а при  $k = 3$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 \wedge \mathbf{a}_3 = & \frac{1}{6}(\mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{a}_2 \otimes \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_2 \otimes \mathbf{a}_3 \otimes \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_3 \otimes \mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{a}_2 - \\ & - \mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{a}_3 \otimes \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3 \otimes \mathbf{a}_2 \otimes \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 \otimes \mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{a}_3). \end{aligned}$$

Из свойства (2.175) следует, что внешние формы (2.190) и (2.191) являются кососимметричными тензорами типа  $(0, q)$  и типа  $(p, 0)$  соответственно. Заметим, что обратное, вообще говоря, неверно (см. упр. 2.6.1).

Внешние формы являются линейными по каждому из векторов:

$$\mathbf{a}_1 \wedge \dots \wedge (s_j^k \mathbf{b}_k) \wedge \dots \wedge \mathbf{a}_q = \sum_{k=1}^n s_j^k (\mathbf{a}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{b}_k \wedge \dots \wedge \mathbf{a}_q), \quad (2.193)$$

где  $s_j^k$  – коэффициенты, что немедленно следует из линейности  $q$ -кратного тензорного произведения по каждому вектору:

$$\mathbf{a}_1 \otimes \dots \otimes (s_j^i \mathbf{b}_i) \otimes \dots \otimes \mathbf{a}_q = s_j^k (\mathbf{a}_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{b}_k \otimes \dots \otimes \mathbf{a}_q)$$

и линейности операции альтернирования (2.174).

Напомним, что согласно определению (2.161) тензорное произведение векторов и ковекторов вводят следующим образом:

$$\mathbf{a}_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{a}_q = a_1^{i_1} \dots a_q^{i_q} \mathbf{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i_q}, \quad (2.194)$$

$$\mathbf{b}^1 \otimes \dots \otimes \mathbf{b}^p = b_{j_1}^1 \dots b_{j_p}^p \mathbf{e}^{j_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}^{j_p},$$

где  $\mathbf{a}_i = a_{i_k}^{i_k} \mathbf{e}_k$  и  $\mathbf{b}^j = b_{j_k}^j \mathbf{e}^{j_k}$ , а  $\mathbf{e}_i$  и  $\mathbf{e}^j$  базисы в  $\mathcal{L}_n$  и  $\mathcal{L}_n^*$ .

Подставляя (2.194) в (2.190) и (2.191), с учетом свойства линейности (2.193) приходим к следующей теореме.

**Теорема 2.38.** Внешнее произведение векторов  $\mathbf{a}_i \in \mathcal{L}_n$  и ковекторов  $\mathbf{b}^j \in \mathcal{L}_n^*$  можно представить в виде разложения по внешним произведениям базисных векторов  $\mathbf{e}_i$  и  $\mathbf{e}^i$  соответственно:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{a}_q &= a_1^{i_1} \dots a_q^{i_q} \mathbf{e}_{i_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{i_q}, \\ \mathbf{b}^1 \wedge \dots \wedge \mathbf{b}^p &= b_{j_1}^1 \dots b_{j_p}^p \mathbf{e}^{j_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}^{j_p}.\end{aligned}\quad (2.195)$$

Используя явное выражение (2.174) для операции альтернирования, из (2.190) и (2.191) получаем разложение внешней формы по полиадному базису:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{a}_q &= \frac{1}{q!} \sum_{(m_1 \dots m_q)} (-1)^{|(m_1 \dots m_q)|} (\mathbf{a}_{m_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{a}_{m_q}) = \\ &= a^{i_1 \dots i_q} \mathbf{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i_q},\end{aligned}\quad (2.196)$$

где коэффициенты  $a^{i_1 \dots i_q}$  имеют вид:

$$\begin{aligned}a^{i_1 \dots i_q} &= \frac{1}{q!} \sum_{(m_1 \dots m_q)} (-1)^{|(m_1 \dots m_q)|} a_{m_1}^{i_1} \dots a_{m_q}^{i_q} = \\ &= \frac{1}{q!} \det \begin{pmatrix} a_1^{i_1} & \dots & a_q^{i_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{i_q} & \dots & a_q^{i_q} \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (2.197)$$

Здесь мы использовали определение (2.31) детерминанта матрицы размером  $q \times q$ .

Для внешнего произведения ковекторов получаем аналогично:

$$\mathbf{b}^1 \wedge \dots \wedge \mathbf{b}^p = b_{j_1 \dots j_p} \mathbf{e}^{j_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}^{j_p}, \quad (2.198)$$

где

$$b_{j_1 \dots j_p} = \frac{1}{p!} \det \begin{pmatrix} b_{j_1}^1 & \dots & b_{j_p}^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{j_1}^p & \dots & b_{j_p}^p \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим внешние произведения векторов базиса  $\mathbf{e}_i$ , тогда так как  $\mathbf{e}_i = \delta_i^j \mathbf{e}_j$ , из (2.186) получаем

$$\mathbf{e}_{j_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{j_p} = \frac{1}{p!} \delta_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_p} \mathbf{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i_p},$$

где в соответствии с (2.197) обозначены коэффициенты:

$$\delta_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_p} = \det \begin{pmatrix} \delta_{j_1}^{i_1} & \dots & \delta_{j_p}^{i_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{j_1}^{i_p} & \dots & \delta_{j_p}^{i_p} \end{pmatrix}.$$

Этот символ называют *обобщенным символом Кронекера*.

Докажем еще одно важное свойство внешних форм.

**Теорема 2.39.** Векторы  $\mathbf{a}_i \in \mathcal{L}_n$  ( $i = 1 \dots q$ ) линейно зависимы тогда и только тогда, когда их внешнее произведение равно нулю:

$$\mathbf{a}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{a}_q = \mathbf{0}. \quad (2.199)$$

Такое же утверждение имеет место и для линейно зависимых векторов  $\mathbf{b}^j \in \mathcal{L}_n^*$ :

$$\mathbf{b}^1 \wedge \dots \wedge \mathbf{b}^p = \mathbf{0}. \quad (2.200)$$

▼ В одну сторону. Пусть выполнено условие (2.199), тогда в силу (2.197) определители матриц, составленные из их коэффициентов равны нулю. Но тогда в силу теоремы 2.10 координатные столбцы каждой из этих матриц линейно зависимы, а, следовательно, один из них с номером  $j$  можно выразить через все остальные:

$$(a_j^{i_1} \dots a_j^{i_q})^T = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^q s^i (a_i^{i_1} \dots a_i^{i_q})^T, \quad \forall i_1 \dots i_q \in \{1 \dots n\},$$

где не все  $s^i$  нулевые. Поскольку это соотношение выполнено для всевозможных значений  $i_1 \dots i_q$ , то оно будет выполнено и для набора  $(a_j^1 \dots a_j^n)^T$ . Но это означает, что

$$a_j^k e_k = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^q s^i a_i^k e_k, \quad (2.201)$$

т.е. векторы  $\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_q$  – линейно зависимы.

В обратную сторону. Пусть  $\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_q$  линейно зависимы, тогда найдутся не все нулевые  $s^i$  такие, что для некоторого  $\mathbf{a}_j$  имеет место соотношение (2.201). Подставляя это выражение во внешнюю форму (2.199), в силу ее линейности по каждому из векторов, приходим к  $(q - 1)$  внешним формам, у которых имеется по два одинаковых вектора, т.е.  $\mathbf{a}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{a}_j \wedge \mathbf{a}_j \wedge \dots \wedge \mathbf{a}_q$ . Но поскольку каждая внешняя форма является кососимметричным тензором, то она должна менять знак при любых перестановках ее векторов. Однако если поменять местами у полученных форм одинаковые векторы  $\mathbf{a}_i$  и  $\mathbf{a}_j$ , то, очевидно, что знак формы не изменится, значит все эти формы есть нулевой тензор.

Доказательство утверждения (2.200) проводится аналогично. ▲

#### 2.6.4. Представление кососимметричных тензоров с помощью внешних форм

Рассмотрим теперь кососимметричные тензоры  ${}^k T$  и  ${}^k B$  типа  $(0, q)$  и типа  $(p, 0)$ . Имеет место следующая теорема.

**Теорема 2.40.** *Всякий кососимметричный тензор  ${}^k T$  типа  $(0, k)$  на  $\mathcal{L}_n$  можно разложить по внешним формам базисных векторов  $e_i \in \mathcal{L}_n$ :*

$${}^k T = T^{i_1 \dots i_k} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_k} = k! \sum_{i_1 < \dots < i_k} T^{i_1 \dots i_k} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}, \quad (2.202)$$

*а всякий кососимметричный тензор  ${}^k B$  типа  $(k, 0)$  на  $\mathcal{L}_n$  – разложить по внешним формам базисных векторов  $e^i \in \mathcal{L}_n^*$ :*

$${}^k B = B_{i_1 \dots i_k} e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_k} = k! \sum_{i_1 < \dots < i_k} B_{i_1 \dots i_k} e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k}. \quad (2.203)$$

Здесь суммирование идет лишь по тем комбинациям индексов  $i_1 \dots i_k$ , которые расположены в порядке возрастания, например, для тензора типа  $(0, 2)$  на  $\mathcal{L}_3$  имеем:

$$T = T_{i_1 i_2} e_{i_1} \otimes e_{i_2} = 2(T^{12} e_1 \wedge e_2 + T^{13} e_1 \wedge e_3 + T^{23} e_2 \wedge e_3). \quad (2.204)$$

▼ Прежде всего заметим, что если тензор  ${}^k T$  – кососимметричен, то в силу (2.188) и определения (2.190) его можно представить в виде:

$${}^k T = T^{i_1 \dots i_k} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_k} = {}^k T^{[A]} = T^{i_1 \dots i_k} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}, \quad (2.205)$$

то же самое справедливо и для тензора  ${}^k B$ .

Согласно теореме 2.39 в суммах в правой части соотношения (2.205) отличны от нуля только слагаемые с различными индексами  $i_1 \dots i_k$ . Зафиксируем одно такое слагаемое, у которого индексы располагаются в порядке возрастания:

$$T^{i_1 \dots i_k} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}, \quad i_1 < \dots < i_k \text{ нет суммирования.} \quad (2.206)$$

Но тогда все остальные слагаемые с такими значениями индексов  $i_1 \dots i_k$  (а их  $k!$ ), но взятыми в другом порядке, отличаются от слагаемого (2.206) двойной перестановкой: у коэффициентов  $T^{i_1 \dots i_k}$  и у формы  $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}$ . В силу кососимметричности и формы, и коэффициентов (см. (2.185)), при таких двойных перестановках знак слагаемого (2.206) не будет меняться. Таким образом, в суммах (2.202) действительно находится  $k!$  различных сумм (2.206). ▲

Из теоремы 2.40 следует, что если ранг кососимметричного тензора  ${}^k T$  больше размерности пространства  $k > n$ , то такой тензор всегда нулевой. Действительно, при  $k > n$  в формах (2.202) всегда будут повторяющиеся векторы, что в силу теоремы 2.39 влечет за собой обнуление всей правой части соотношения (2.202).

Если же  $k = n$ , то упорядочение индексов  $i_1 < \dots < i_n$  возможно только одним способом, поэтому в (2.202) остается только одно слагаемое:

$${}^n T = n! T^{1 \dots n} e_1 \wedge \dots \wedge e_n. \quad (2.207)$$

**ТЕОРЕМА 2.41.** *Внешние формы*

$$\mathbf{e}_{i_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{i_q}, \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_q \leq n \quad (2.208)$$

образуют базис пространства  $\Lambda_n^{(0q)}$  кососимметричных тензоров типа  $(0, q)$  на  $\mathcal{L}_n$ , а внешние формы

$$\mathbf{e}^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}^{i_p}, \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n. \quad (2.209)$$

образуют базис пространства  $\Lambda_n^{(p0)}$ .

▼ Поскольку из теоремы 2.40 следует, что всякий кососимметричный тензор можно представить в виде разложения по соответствующей системе форм (2.208) или (2.209), то нам остается показать только линейную независимость систем (2.208) и (2.209).

Предположим противное: система (2.208) линейно зависима, тогда найдутся такие не все нулевые коэффициенты  $T^{i_1 \dots i_q}$ , определенные только при  $1 \leq i_1 < \dots < i_q \leq n$ , что

$$\sum_{i_1 < \dots < i_q} T^{i_1 \dots i_q} \mathbf{e}_{i_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{i_q} = 0. \quad (2.210)$$

Тогда переходя с помощью формулы (2.196) к тензорному произведению векторов, получаем

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{q!} \sum_{i_1 < \dots < i_q} T^{i_1 \dots i_q} \sum_{(m_1 \dots m_q)} (-1)^{|m_1 \dots m_q|} \mathbf{e}_{i_{m_1}} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i_{m_q}} = \\ &= \frac{1}{q!} \sum_{i_1 < \dots < i_q} \sum_{(m_1 \dots m_q)} \left( (-1)^{|m_1 \dots m_q|} T^{i_1 \dots i_q} \right) \mathbf{e}_{i_{m_1}} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i_{m_q}}. \end{aligned} \quad (2.211)$$

Поскольку все  $i_1 \dots i_q$  не равны между собой, то, очевидно, что в суммах (2.211) все полиады  $\mathbf{e}_{i_{m_1}} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i_{m_q}}$  различны между собой. Но тогда условие (2.211) означает, что эти полиады линейно зависимы, что неверно, так как они входят в полиадный базис  $\mathbf{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i_n}$ . ▲

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.32.** *Формы (2.208) и (2.209) называют базисными внешними формами в  $\Lambda_n^{(0q)}$  и  $\Lambda_n^{(p0)}$  соответственно.*

### 2.6.5. Изменение компонент кососимметричных тензоров при замене базиса

Выберем два базиса  $\mathbf{e}_i$  и  $\mathbf{e}'_i$  в  $\mathcal{L}_n$ , связанные соотношением (2.62):  $\mathbf{e}'_i = S^j_i \mathbf{e}_j$ .

Образуем из векторов  $e'_i$  базисную форму  $e'_{i_1} \wedge \dots \wedge e'_{i_k}$  и воспользуемся формулой (2.196):

$$\begin{aligned} e'_{i_1} \wedge \dots \wedge e'_{i_k} &= \frac{1}{k!} \sum_{(m_1 \dots m_k)} (-1)^{|m_1 \dots m_k|} (e'_{i_{m_1}} \otimes \dots \otimes e'_{i_{m_k}}) = \\ &= k! S_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_k} e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_k}, \end{aligned} \quad (2.212)$$

где обозначены коэффициенты:

$$S_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_k} = \det \begin{pmatrix} S_{i_1}^{j_1} & \dots & S_{i_k}^{j_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{i_1}^{j_k} & \dots & S_{i_k}^{j_k} \end{pmatrix}. \quad (2.213)$$

Поскольку слева в (2.212) стоит внешняя форма при фиксированном наборе  $i_1 \dots i_k$ , то выражение справа является кососимметричным тензором типа  $(0, k)$ , и к нему можно применить теорему 2.40, тогда получаем окончательно формулу преобразования внешних форм типа  $(0, k)$  на  $\mathcal{L}_n$  при замене базиса в  $\mathcal{L}_n$ :

$$e'_{i_1} \wedge \dots \wedge e'_{i_k} = \sum_{j_1 < \dots < j_k} S_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_k} e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_k}. \quad (2.214)$$

Аналогичным образом можно установить соотношение между внешними формами ковекторов  $e'^i$  и  $e^i$  из  $\mathcal{L}_n^*$ :

$$e'^{i_1} \wedge \dots \wedge e'^{i_k} = \sum_{j_1 < \dots < j_k} S^{i_1 \dots i_k}_{j_1 \dots j_k} e^{j_1} \wedge \dots \wedge e^{j_k}, \quad (2.215)$$

где

$$S^{i_1 \dots i_k}_{j_1 \dots j_k} = \det \begin{pmatrix} (S^{-1})^{i_1}_{j_1} & \dots & (S^{-1})^{i_1}_{j_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (S^{-1})^{i_k}_{j_1} & \dots & (S^{-1})^{i_k}_{j_k} \end{pmatrix}. \quad (2.216)$$

Рассмотрим теперь кососимметричный тензор  ${}^k T$  типа  $(0, k)$  на  $\mathcal{L}_n$  и представим его в виде разложения (2.202) по базисным внешним формам  $e'_{i_1} \wedge \dots \wedge e'_{i_k}$  и  $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}$ , а затем воспользуемся соотношением (2.214):

$$\begin{aligned} {}^k T &= k! \sum_{i_1 < \dots < i_k} T^{i_1 \dots i_k} e'_{i_1} \wedge \dots \wedge e'_{i_k} = \\ &= k! \sum_{i_1 < \dots < i_k} \sum_{j_1 < \dots < j_k} T^{i_1 \dots i_k} S_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_k} e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_k} = \\ &= k! \sum_{j_1 < \dots < j_k} T^{j_1 \dots j_k} e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_k}. \end{aligned} \quad (2.217)$$

Отсюда получаем соотношение между компонентами кососимметричного тензора:

$$T^{j_1 \dots j_k} = \sum_{i_1 < \dots < i_k} T'^{i_1 \dots i_k} S_{i_1 \dots i_k}{}^{j_1 \dots j_k}. \quad (2.218)$$

Аналогично устанавливаем связь между компонентами тензора  ${}^k T \in \Lambda_n^{(k0)}$  на  $\mathcal{L}_n$ :

$$T_{j_1 \dots j_k} = \sum_{i_1 < \dots < i_k} T'_{i_1 \dots i_k} S^{i_1 \dots i_k}{}_{j_1 \dots j_k}. \quad (2.219)$$

Таким образом, мы доказали следующую теорему.

**ТЕОРЕМА 2.42.** *Базисные внешние формы типа  $(0, k)$ , определенные на  $\mathcal{L}_n$ , преобразуются при замене базиса в  $\mathcal{L}_n$  по соотношениям (2.214), а формы типа  $(k, 0)$  – по (2.215). Кососимметричные тензоры  ${}^k T \in \Lambda_n^{(0k)}$  преобразуются при такой замене по формулам (2.218), а тензоры  ${}^k T \in \Lambda_n^{(k0)}$  – по формулам (2.219).*

Заметим, что соотношение (2.219) не противоречит тензорному закону преобразования (2.158), а является только иной формой его записи для кососимметричных тензоров.

### 2.6.6. Случай $k = n$

Рассмотрим кососимметричные тензоры  ${}^k T$  из пространств  $\Lambda_n^{(0n)}$  и  $\Lambda_n^{(n0)}$  на  $\mathcal{L}_n$ , ранг которых равен размерности пространства  $\mathcal{L}_n$ .

Тогда из теоремы 2.40 получаем:

$${}^n T = T^{i_1 \dots i_n} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_n} = n! T^{12 \dots n} e_1 \wedge \dots \wedge e_n, \quad (2.220)$$

так как возможна только одна комбинация индексов  $1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq n$  – это тождественная подстановка. Таким образом, такие кососимметричные тензоры  ${}^n T$  определяются только одной компонентой  $T^{12 \dots n}$ , все остальные, получающиеся перестановкой индексов, на основании (2.185) выражаются следующим образом:

$$T^{i_{m_1} \dots i_{m_n}} = (-1)^{|m_1 \dots m_n|} T^{12 \dots n}. \quad (2.221)$$

Это соотношение можно записать иначе, если ввести компоненты  $n$ -мерных символов Леви-Чивиты:

$$\begin{aligned} \epsilon_{i_1 \dots i_n} \text{ и } \epsilon^{i_1 \dots i_n} = \\ = \begin{cases} (-1)^{|i_1 \dots i_n|}, & \text{если все индексы } i_1 \dots i_n \text{ различны;} \\ 0, & \text{если имеются совпадающие индексы.} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.222)$$

Тогда (2.221) будет эквивалентно следующему соотношению:

$$T^{i_1 \dots i_n} = \epsilon^{i_1 \dots i_n} T^{12\dots n}. \quad (2.223)$$

Кососимметричный тензор  ${}^n\mathbf{T}$  типа  $(n, 0)$  на  $\mathcal{L}_n$  также имеет только одну независимую компоненту  $T_{12\dots n}$ , а все остальные выражаются следующим образом:

$$T_{i_1 \dots i_n} = \epsilon_{i_1 \dots i_n} T_{12\dots n}, \quad (2.224)$$

и, следовательно,

$${}^n\mathbf{T} = n! T_{12\dots n} \mathbf{e}^1 \wedge \dots \wedge \mathbf{e}^n. \quad (2.225)$$

Из формул (2.220) и (2.225) следует, что для тензоров из  $\Lambda_n^{(0n)}$  и  $\Lambda_n^{(n0)}$  существует только по одной базисной внешней форме:  $\mathbf{e}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_n$  и  $\mathbf{e}^1 \wedge \dots \wedge \mathbf{e}^n$ .

В силу формул (2.214) и (2.215) эти внешние формы преобразуются по следующему закону при замене базиса в  $\mathcal{L}_n$  и  $\mathcal{L}_n^*$  соответственно:

$$\mathbf{e}'_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{e}'_n = \Delta \mathbf{e}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_n, \quad \mathbf{e}'^1 \wedge \dots \wedge \mathbf{e}'^n = \frac{1}{\Delta} \mathbf{e}^1 \wedge \dots \wedge \mathbf{e}^n, \quad (2.226)$$

где

$$\Delta = \det (S^i_j). \quad (2.227)$$

Действительно, так как при  $k = n$  в суммах соотношений (2.214) и (2.215) остается только по одному слагаемому  $S_{1\dots n}^{1\dots n}$  и  $S^{1\dots n}_{1\dots n}$ , то вычисляя по (2.213) и (2.216) эти коэффициенты:

$$S_{1\dots n}^{1\dots n} = \det \begin{pmatrix} S^1_1 & \dots & S^1_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ S^n_1 & \dots & S^n_n \end{pmatrix}, \quad (2.228)$$

убеждаемся в истинности формул (2.226).

Единственные независимые компоненты  $T_{1\dots n}$  и  $T^{1\dots n}$  кососимметричных тензоров согласно теореме 2.30 преобразуются при замене базиса следующим образом:

$$T_{1\dots n} = \Delta T'_{1\dots n}, \quad T^{1\dots n} = \frac{1}{\Delta} T'^{1\dots n}. \quad (2.229)$$

### 2.6.7. Внешнее произведение кососимметричных тензоров

Рассмотрим обобщение операции (2.190) внешнего произведения векторов.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.33.** Внешним произведением кососимметричных тензоров  ${}^p\mathbf{T} \in \Lambda_n^{(p0)}$  и  ${}^k\mathbf{B} \in \Lambda_n^{(k0)}$  назовем альтернирование их тензорного произведения:

$${}^p\mathbf{T} \wedge {}^k\mathbf{B} = ({}^p\mathbf{T} \otimes {}^k\mathbf{B})^{[A]}. \quad (2.230)$$

Так как  ${}^p\mathbf{T} \otimes {}^k\mathbf{B}$  является тензором  $(p+k)$ -го ранга, то мы можем записать выражение (2.230) в компонентах, используя определение (2.174):

$$\begin{aligned} {}^p\mathbf{T} \wedge {}^k\mathbf{B} &= \\ &= \frac{1}{(p+k)!} \sum_{m_1 \dots m_{p+k}} (-1)^{|m_1 \dots m_{p+k}|} T^{i_1 \dots i_p} B^{j_1 \dots j_k} e_{i_{m_1}} \otimes \dots \\ &\dots \otimes e_{i_{m_p}} \otimes e_{j_{m_{p+1}}} \otimes \dots \otimes e_{j_{m_{p+k}}}, \end{aligned} \quad (2.231)$$

где

$$\begin{aligned} {}^p\mathbf{T} &= T^{i_1 \dots i_p} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p}, \\ {}^k\mathbf{B} &= B^{j_1 \dots j_k} e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_k}, \end{aligned} \quad (2.232)$$

Поскольку в правой части (2.230) стоит альтернированный тензор, то согласно (2.175)  ${}^p\mathbf{T} \wedge {}^k\mathbf{B}$  будет кососимметричным. Тогда в правой части выражения (2.230) можно переобозначить индексы с учетом формул (2.187):

$$\begin{aligned} {}^p\mathbf{T} \wedge {}^k\mathbf{B} &= \\ &= \frac{1}{(p+k)!} \sum_{m_1 \dots m_{p+k}} (-1)^{|m_1 \dots m_{p+k}|} T^{i_{m_1} \dots i_{m_p}} B^{i_{m_{p+1}} \dots i_{m_{p+k}}} e_{i_1} \otimes \dots \\ &\dots \otimes e_{i_p} \otimes e_{i_{p+1}} \otimes \dots \otimes e_{i_{p+k}}. \end{aligned} \quad (2.233)$$

Ввиду кососимметричности этого тензора, его можно преобразовать согласно теореме 2.40:

$${}^p\mathbf{T} \wedge {}^k\mathbf{B} = \sum_{i_1 < \dots < i_{p+k}} T^{[i_1 \dots i_p} B^{i_{p+1} \dots i_{p+k}]} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_{p+k}}, \quad (2.234)$$

здесь введено обозначение для коэффициентов:

$$\begin{aligned} T^{[i_1 \dots i_p} B^{i_{p+1} \dots i_{p+k}]} &= \\ &= \sum_{(m_1 \dots m_{p+k})} (-1)^{|m_1 \dots m_{p+k}|} T^{i_{m_1} \dots i_{m_p}} B^{i_{m_{p+1}} \dots i_{m_{p+k}}}. \end{aligned} \quad (2.235)$$

**Теорема 2.43.** Введенная операция (2.230) внешнего умножения кососимметричных тензоров обладает следующими свойствами: однородность

$$(s^p \mathbf{T} \wedge {}^k \mathbf{B}) = ({}^p \mathbf{T} \wedge s^k \mathbf{B}) = s({}^p \mathbf{T} \wedge {}^k \mathbf{B}), \quad s \in \mathbb{R}^1, \quad (2.236)$$

дистрибутивность

$$({}^p \mathbf{T}_1 + {}^p \mathbf{T}_2) \wedge {}^k \mathbf{B} = {}^p \mathbf{T}_1 \wedge {}^k \mathbf{B} + {}^p \mathbf{T}_2 \wedge {}^k \mathbf{B}, \quad (2.237)$$

$${}^p \mathbf{T} \wedge ({}^k \mathbf{B}_1 + {}^k \mathbf{B}_2) = {}^p \mathbf{T} \wedge {}^k \mathbf{B}_1 + {}^p \mathbf{T} \wedge {}^k \mathbf{B}_2, \quad (2.238)$$

ассоциативность

$$({}^p \mathbf{T} \wedge {}^k \mathbf{B}) \wedge {}^q \mathbf{C} = {}^p \mathbf{T} \wedge ({}^k \mathbf{B} \wedge {}^q \mathbf{C}), \quad (2.239)$$

косокоммутативность

$${}^p \mathbf{T} \wedge {}^k \mathbf{B} = (-1)^{p+k} {}^k \mathbf{B} \wedge {}^p \mathbf{T}. \quad (2.240)$$

▼ Свойства (2.236) – (2.238) непосредственно вытекают из определения (2.230).

Для доказательства (2.239) представим левую часть этого выражения в виде:

$$({}^p \mathbf{T} \wedge {}^k \mathbf{B}) \wedge {}^q \mathbf{C} = (({}^p \mathbf{T} \wedge {}^k \mathbf{B}) \otimes {}^q \mathbf{C})^{[A]}, \quad (2.241)$$

и рассмотрим тензор под знаком альтернирования:

$$\begin{aligned} &({}^p \mathbf{T} \wedge {}^k \mathbf{B}) \otimes {}^q \mathbf{C} = \\ &= \frac{1}{r!} \sum_{(m_1 \dots m_r)} (-1)^{|m_1 \dots m_r|} ({}^p \mathbf{T} \otimes {}^k \mathbf{B})^{(m_1 \dots m_r)} \otimes {}^q \mathbf{C} = \\ &= ({}^p \mathbf{T} \otimes {}^k \mathbf{B} \otimes {}^q \mathbf{C})^{[a]}, \end{aligned} \quad (2.242)$$

где  $r = p + k$ .

Здесь альтернирование ”[a]” берется по группе из первых  $r$  индексов тензора  ${}^p \mathbf{T} \otimes {}^k \mathbf{B} \otimes {}^q \mathbf{C}$  согласно определению (2.164).

Но тогда, подставляя (2.242) в (2.241), с учетом свойства (2.177) получаем

$$({}^p \mathbf{T} \wedge {}^k \mathbf{B}) \wedge {}^q \mathbf{C} = ({}^p \mathbf{T} \otimes {}^k \mathbf{B} \otimes {}^q \mathbf{C})^{[A]}. \quad (2.243)$$

Совершенно аналогично можно доказать, что

$${}^p \mathbf{T} \wedge ({}^k \mathbf{B} \wedge {}^q \mathbf{C}) = ({}^p \mathbf{T} \otimes {}^k \mathbf{B} \otimes {}^q \mathbf{C})^{[A]}. \quad (2.244)$$

Сравнивая (2.243) и (2.244), убеждаемся в истинности соотношения (2.239).

Для доказательства утверждения (2.240) заметим, что

$$\begin{aligned} {}^p T \otimes {}^k B &= \\ &= T^{i_{k+1} \dots i_{p+k}} B^{i_1 \dots i_k} e_{i_{k+1}} \otimes \dots \otimes e_{i_{k+p}} \otimes e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_k} = \\ &= ({}^k B \otimes {}^p T)^{(k+1, \dots, k+p, 1, \dots, k)}. \end{aligned} \quad (2.245)$$

Тогда согласно свойству (2.176) получаем:

$$\begin{aligned} ({}^p T \wedge {}^k B)^{[A]} &= \left( ({}^k B \otimes {}^p T)^{(k+1, \dots, k+p, 1, \dots, k)} \right)^{[A]} = \\ &= (-1)^{|k+1, \dots, k+p, 1, \dots, k|} {}^k B \wedge {}^p T, \end{aligned} \quad (2.246)$$

но так как

$$(-1)^{|k+1, \dots, k+p, 1, \dots, k|} = (-1)^{kp},$$

то от (2.246) приходим к (2.240).  $\blacktriangle$

Операции внешнего умножения и сложения кососимметричных тензоров, удовлетворяющих свойствам (2.236) – (2.240), позволяют построить на пространствах  $\Lambda_n^{(k0)}$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) или  $\Lambda_n^{(0k)}$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) алгебраический объект, называемый *алгеброй Грасмана*. Заметим, что в п.2.6.4 было установлено, что ненулевых кососимметричных тензоров в пространствах  $\Lambda_n^{(k0)}$  и  $\Lambda_n^{(0k)}$  при  $k > n$  нет, т.е.

$$\Lambda_n^{(k0)} = 0, \quad \Lambda_n^{(0k)} = 0, \quad k > n. \quad (2.247)$$

### Упражнения к § 2.6.

**Упражнение 2.6.1.** Доказать, что кососимметричный тензор из  $\Lambda_4^{(02)}$  на  $\mathcal{L}_4$

$$T = e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4$$

не может быть представлен в виде внешней формы типа  $(0, 2)$ , т.е. в виде  $T = a \wedge b$ , где  $a, b \in \mathcal{L}_4$ .

**Упражнение 2.6.2.** Доказать, что

$$(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p}) \wedge (e_{i_{p+1}} \wedge \dots \wedge e_{i_{p+q}}) = (e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_{p+k}}).$$

**Упражнение 2.6.3.** Показать, что обобщенный символ Кронекера обладает следующими свойствами в  $\mathcal{L}_n$ :

$$\delta_{i_1 \dots i_m}^{i_1 \dots i_m} = \begin{cases} n(n-1)\dots(n-m+1), & m < n, \\ n!, & m = n, \\ 0, & m > n, \end{cases} \quad \delta_{i_1 \dots i_m}^{j_1 \dots j_m} = \epsilon^{j_1 \dots j_m} \epsilon_{i_1 \dots i_m}.$$

## ГЛАВА 3

### ГРУППЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

---

Вернемся теперь в трехмерное евклидово пространство  $\mathbb{R}^3$ , и рассмотрим линейные преобразования координат в нем. Множество таких преобразований может образовывать особую алгебраическую структуру – группу. Вообще теория групп, у истоков которой стоял блистательный французский математик XIX века Э. Галуа, в настоящее время является одним из важнейших разделов алгебры. Группы широко применяются не только в математике, но и в механике, физике, квантовой химии, кристаллофизике и др. В данной главе мы познакомимся с понятием группы на примере групп линейных преобразований в  $\mathbb{R}^3$ .

#### § 3.1. Линейные преобразования координат

##### 3.1.1. Формы представления линейных преобразований координат

В евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^3$  рассмотрим частный случай преобразований координат (1.4).

*Линейное преобразование координат* определим как

$$X^j = A^j_i x^i + A^j, \quad x^i = B^i_j X^j + B^i, \quad (3.1)$$

где  $A^j_i$  и  $A^j$ ,  $B^i_j$  и  $B^i$  не зависят от  $x^i$  и  $X^j$ . Преобразование (3.1) называют также *аффинным*.

В случае *центральных преобразований*:  $A^i = B^i = 0$ . Каждому линейному центральному преобразованию соответствует матрица  $A^i_j$ , являющаяся обратной к  $B^i_j$ :

$$A^i_j B^j_k = A^j_k B^i_j = \delta^i_k. \quad (3.2)$$

Будем далее также использовать *матричное представление преобразований* (3.1) с помощью матриц  $3 \times 3$ :

$$(A^i_j) = \begin{pmatrix} A^1_1 & A^1_2 & A^1_3 \\ A^2_1 & A^2_2 & A^2_3 \\ A^3_1 & A^3_2 & A^3_3 \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

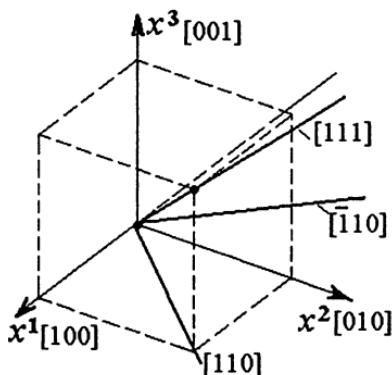


Рис. 3.1. Обозначения кристаллографических осей

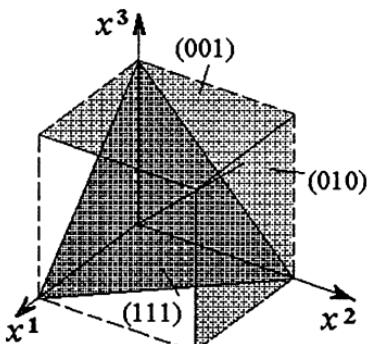


Рис. 3.2. Обозначения кристаллографических плоскостей

Кроме того для описания линейных преобразований иногда удобно использовать *кристаллографические оси*, проходящие через начало координат  $O$  и вектор  $\mathbf{h}$ :

$$\mathbf{h} = h^i \bar{\mathbf{e}}_i.$$

Для таких осей используют обозначения:  $[h^1 h^2 h^3]$ , а *кристаллографические плоскости*, ортогональные к этим осям  $\mathbf{h}$ , обозначают круглыми скобками:  $(h^1 h^2 h^3)$ . Например, сами координатные оси  $Ox^\alpha$  в этих символах будут обозначены как  $[100]$ ,  $[010]$  и  $[001]$ . Ось, проходящую через главную диагональ куба, обозначим как  $[111]$  и т.п. (рис.3.1). Если  $h^i$  принимают отрицательные значения, то в этом случае над ними сверху ставится черта, например  $[\bar{1}10]$ . Примеры кристаллографических плоскостей приведены на рис.3.2.

Рассмотрим важные частные случаи центральных преобразований.

### 3.1.2. Важнейшие линейные преобразования

1) *Унимодулярными* называют преобразования, определитель матрицы которых  $A^i_j$  не меняет знака:

$$\det (A^i_j) = 1 \quad (\text{или } -1). \quad (3.4)$$

2) *Ортогональными* называют преобразования, которым соответствует *ортогональная матрица*  $A^i_j$  (для нее выполняются условия (1.212)):

$$A^i_j A_i^k = \delta_j^k \quad \text{и} \quad B^i_j B_i^k = \delta_j^k, \quad (3.5)$$

согласно результатам п.1.6.3, ортогональное преобразование – это поворот вокруг какой-либо оси или отражение относительно какой-либо плоскости.

3) Собственно ортогональными называют преобразования, для которых одновременно выполнены условия (3.4) и (3.5).

4) Преобразованием трансверсальной изотропии называют преобразование поворота вокруг оси  $Ox_3$  на произвольный угол  $\phi$ , матрица  $A^i{}_j$ , которого имеет вид:

$$(A^i{}_j) = Q_3^\phi = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{где } 0 \leq \phi \leq \pi. \quad (3.6)$$

Для этой матрицы выполнены соотношения:

$$A^i{}_j A_i{}^k = \delta_j^k, \quad A^3{}_i = \delta_i^3, \quad A^i{}_3 = \delta_3^i.$$

Ось  $Ox_3$  в этом случае называют осью бесконечного порядка (или осью трансверсальной изотропии).

Подставляя (3.6) в (3.1), получаем соотношения между "старыми"  $x^i$  и "новыми"  $X^i$  координатами (рис.3.3):

$$X^1 = \cos \phi x^1 + \sin \phi x^2, \quad X^2 = -\sin \phi x^1 + \cos \phi x^2, \quad X^3 = x^3. \quad (3.7)$$

Рассмотрим далее частные случаи преобразования трансверсальной изотропии.

5) Тождественное преобразование, которому соответствует единичная матрица:

$$(A^i{}_j) = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.8)$$

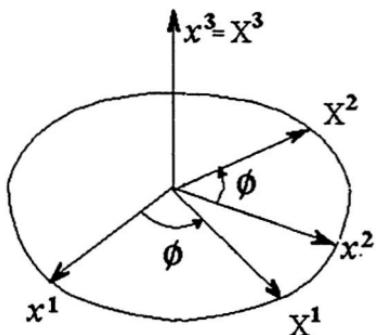
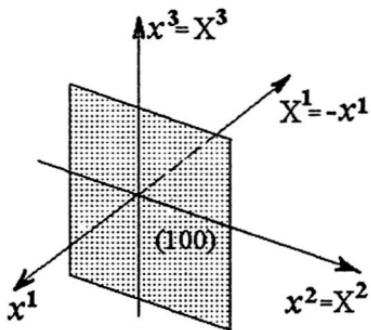
означает поворот на угол  $\phi = 0$  или  $2\pi$ .

6) Преобразование поворота на угол  $\phi = \pi/2$  вокруг оси  $Ox_3$ :

$$(A^i{}_j) = Q_3^{\pi/2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

Преобразование поворота на угол  $\phi = \pi/2$  вокруг осей  $Ox_1$  и  $Ox_2$  определяется аналогично:

$$Q_1^{\pi/2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_2^{\pi/2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Рис. 3.3. Преобразования  $Q_3^\phi$ Рис. 3.4. Преобразование зеркального отражения  $R_1$ 

7) Преобразование поворота на угол  $\phi = 2\pi/3$  и  $\phi = -2\pi/3$  вокруг оси  $Ox_3$ :

$$(A^i{}_j) = S_1 = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

8) Преобразование зеркального отражения относительно плоскостей  $Ox_2x_3$ ,  $Ox_1x_3$  и  $Ox_1x_2$  определяется, соответственно, матрицами:

$$(A^i{}_j) = R_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.12)$$

$$R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

при этом одна из осей меняет свое направление на противоположное, а две другие не изменяются (рис.3.4).

Девять независимых преобразований

$$E, \quad Q_\alpha^{\pi/2}, \quad R_\alpha, S_\gamma \quad \alpha = 1, 2, 3; \quad \gamma = 1, 2 \quad (3.13)$$

играют ключевую роль в описании свойств симметрии тел (см. далее §3.3): кристаллов, композиционных материалов и т.п. Суперпозицией

этих девяти преобразований можно построить еще двенадцать важнейших преобразований:

$$Q_{\alpha}^{-\pi/2} = (Q_{\alpha}^{\pi/2})^T, \quad D_{\alpha} \equiv Q_{\alpha}^{\pi} = Q_{\alpha}^{\pi/2} \cdot Q_{\alpha}^{\pi/2},$$

$$T_{\beta} = R_{\alpha} \cdot Q_{\beta}^{\pi/2}, \quad M_1 = Q_3^{\pi/2} \cdot Q_2^{\pi/2}, \quad M_2 = Q_3^{-\pi/2} \cdot Q_1^{-\pi/2},$$

$$C = R_1 \cdot R_2 \cdot R_3 \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3; \quad \beta \neq \alpha, \quad (3.13a)$$

где индексы  $\alpha, \beta$  выбираем круговой перестановкой:  $(\alpha, \beta) = (1, 2), (2, 3)$  и  $(3, 1)$ , т.е.

$$T_1 = R_3 Q_1^{\pi/2}, \quad T_2 = R_1 Q_2^{\pi/2}, \quad T_3 = R_2 Q_3^{\pi/2}.$$

Здесь и далее операции транспонирования  $(\cdot)^T$  и умножения  $(\cdot)$  матриц соответствуют операциям действий с тензорами второго ранга (1.135) и (1.139):

$$(A_j^i) = (A^i_j)^T = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_1^2 & A_1^3 \\ A_2^1 & A_2^2 & A_2^3 \\ A_3^1 & A_3^2 & A_3^3 \end{pmatrix}, \quad (3.14)$$

а также

$$(R_1 \cdot R_2)^i_j = (R_1)^i_k (R_2)^k_j. \quad (3.15)$$

Напомним, что в декартовой системе координат  $x^i$  матрицы  $A^i_k$  и  $A_i^k$  совпадают (см. п.1.1.5.Е), т.е.  $A_1^2 = A_2^1$  и т.д.

Запишем матрицы преобразований (3.13а) явным образом.

9) Матрицы  $Q_{\alpha}^{-\pi/2}$  определяют преобразование поворота на угол  $-\pi/2$  вокруг оси  $Ox_{\alpha}$ :

$$(A^i_j) = Q_1^{-\pi/2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.16)$$

$$Q_2^{-\pi/2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_3^{-\pi/2} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

10) Матрицы  $D_{\alpha}$  определяют преобразование поворота на угол  $\pi$  вокруг оси  $Ox_{\alpha}$ :

$$(A^i_j) = D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

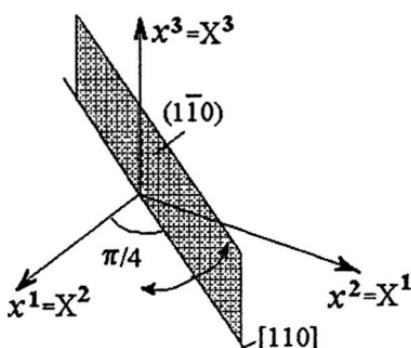


Рис. 3.5. Преобразование отражения  $T_3$

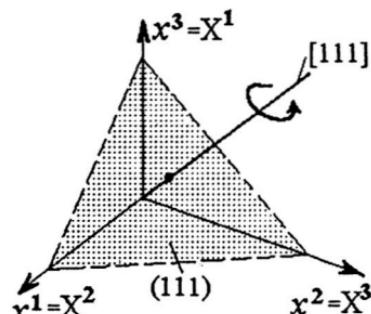


Рис. 3.6. Преобразование поворота  $M_2$

$$D_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad D_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.17)$$

11) Каждая матрица  $T_\beta$  определяет преобразование отражения относительно плоскости, проходящей через ось  $Ox^\beta$  и равнонаклоненной к двум другим координатным осям  $Ox^\alpha$ ,  $Ox^\gamma$ :

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.18)$$

Ось  $Ox^\beta$  при этом преобразовании остается на месте, а оси  $Ox^\alpha$  и  $Ox^\gamma$  меняются местами (рис. 3.5).

12) Матрицы  $M_\gamma$  определяют преобразования поворота на угол  $\mp 2\pi/3$  вокруг оси [111], при этом изменяется нумерация всех трех координатных осей  $Ox^i$ :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.19)$$

Поворот всех координатных осей происходит в плоскости (111) (рис. 3.6).

13) Матрица  $C$  определяет преобразование инверсии (т.е. центрального отражения) относительно начала координат:

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.20)$$

Все перечисленные матрицы  $E$ ,  $Q_\alpha^{\pi/2}$ ,  $R_\alpha$ ,  $Q_\alpha^{-\pi/2}$ ,  $D_\alpha$ ,  $T_\beta$ ,  $M_\gamma$ ,  $C$  образованы из элементов  $\{0, 1 \text{ и } -1\}$ . Всего же ортогональных матриц с такими элементами имеется только 50 штук. Оставшиеся 29 матриц образуются суперпозицией из матриц (3.13а):

$$R_\alpha T_\alpha, \quad D_\alpha T_\beta, \quad D_\alpha M_\gamma, \quad R_\alpha M_\gamma, \quad CT_\alpha, \quad CM_\gamma \quad (3.21)$$

$$\alpha, \beta = 1, 2, 3, \quad \gamma = 1, 2.$$

(Три матрицы  $R_\alpha T_\beta = Q_\beta^{\pi/2}$  при  $\alpha \neq \beta$  уже учтены при введении матрицы  $Q_\beta^{\pi/2}$ , а три матрицы  $R_\beta T_\alpha = Q_\alpha^{-\pi/2}$  – при введении поворотов  $Q_\beta^{-\pi/2}$ . Далее для обозначения поворотов на  $\pm\pi/2$  будем использовать именно эти матрицы:  $R_\alpha T_\beta$  и  $R_\beta T_\alpha$ ).

С помощью же матриц  $S_\gamma$  можно образовать еще 14 матриц:

$$CS_\gamma, \quad R_\alpha S_\gamma, \quad D_\alpha S_\gamma, \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad \gamma = 1, 2. \quad (3.22)$$

Итого имеется множество из 64 матриц (3.13), (3.13а), (3.21) и (3.22).

### 3.1.3. Тензоры линейных преобразований

С точки зрения теории линейных пространств, изложенной во второй главе, центральное преобразование координат (3.1) соответствует замене декартова базиса  $\bar{e}_i$  на новый ортонормированный базис  $e_i$ :

$$e_i = B^j_i \bar{e}_j, \quad \bar{e}_j = A^i_j e_i, \quad (3.23a)$$

где  $B^j_i$  – обратная к  $A^i_j$  матрица.

Якобиевы матрицы  $Q^j_i$ ,  $P^i_j$  на основании формул (1.7) и (1.11), а локальные векторы базиса  $R_i$  и  $R^j$  на основании (1.6) и (1.19) вычисляются для линейных преобразований (3.1) следующим образом:

$$\bar{Q}^i_j = B^i_j, \quad \bar{P}^i_j = A^i_j, \quad R_i \equiv e_i = B^j_i \bar{e}_j, \quad R^i \equiv e^i = A^i_j \bar{e}^j. \quad (3.23b)$$

Векторы локальных базисов  $R_i$  и  $R^i$  для случая линейных ортогональных преобразований координат обозначим далее как  $e_i$  и  $e^i$ .

Если матрица  $A^i_j$  ортогональна, то базисы  $e^i$  и  $e_i$  также ортогональны и совпадают, и

$$g_{ij} = B^k_i B_{kj} = \delta_{ij}, \quad g^{ij} = A^i_s A^{js} = \delta^{ij}.$$

В самом деле, если выбрать в пространстве  $\mathbb{R}^3$  вектор  $x$  с координатами  $x^i$  в базисе  $\bar{e}_i$ , то в новом базисе  $e_i$  он будет иметь координаты  $X^i$ , так как согласно (3.1) и (3.23) имеем:  $x = x^i \bar{e}_i = x^i A^i_j e_j = X^j e_j$ .

Сравнивая формулы (3.23) с (2.63), устанавливаем, что в рассматриваемом случае матрица  $S^i_j$  при переходе от одного базиса к другому, введенная в п.2.3.3, суть

$$S^i_j = A^i_j, \quad (S^{-1})^i_j = B^i_j,$$

причем  $\bar{e}_i = e'_i$ . Однако если  $S^i_j$  была введена нами для произвольных базисов, то в данной главе и в последующих матрица  $A^i_j$  связывает специальный фиксированный декартов базис  $\bar{e}_i$  с ортогональным базисом  $e_i$ .

Тогда можно образовать тензор второго ранга

$$Q = A^i_j \bar{e}^j \otimes \bar{e}_i, \quad (3.24)$$

который называется *тензором линейных преобразований*.

Если матрица  $A^i_j$  – ортогональная, то в силу (3.5) и (1.70) тензор  $Q$  – тоже ортогональный. Для него транспонированная матрица совпадает с обратной, поэтому получаем:

$$Q^T = B^i_j \bar{e}_i \otimes \bar{e}^j. \quad (3.25)$$

Таким образом, каждой из 64 ортогональных матриц преобразований (3.8) - (3.22) соответствует тензор линейных преобразований. Будем эти тензоры обозначать той же буквой, что и матрицы, т.е.

$$E, \quad O_3^{-\pi/2}, \quad R_\alpha, \quad S_\alpha \text{ и т.д.}$$

Тензор  $E$ , определенный таким образом, очевидно, действительно является метрическим тензором.

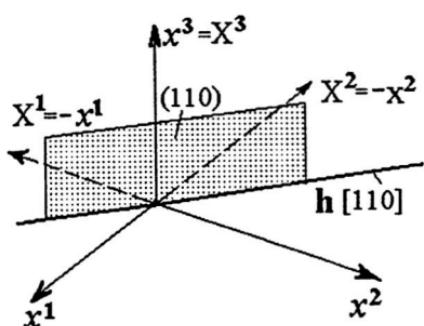
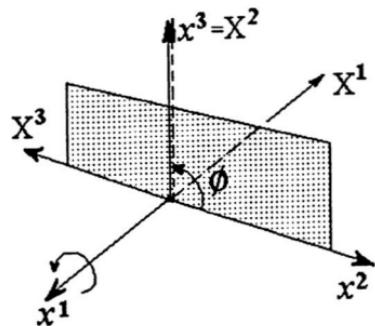
### 3.1.4. Изомерные тензоры

В формулах (3.1) в качестве исходных для линейных преобразований были выбраны декартовы прямоугольные координаты  $x^i$  в базисе  $\bar{e}_i$ . Однако это необязательное условие, линейное преобразование с матрицами  $A^i_j$  вида (3.4) - (3.22) можно построить для произвольных прямоугольных координат  $X'^i$ :

$$X^j = A^j_i X'^i, \quad X'^i = B^i_j X^j.$$

Пусть линии действия ортогональных векторов  $e'_i$  совпадают с осями системы координат  $X'^i$ , а векторы  $e_i$  – с  $X^i$ . Тогда с помощью базиса  $e'_i$  можно образовать тензор линейных преобразований  $Q'$ :

$$Q' = A^i_j e'^j \otimes \bar{e}'_i. \quad (3.25a)$$

Рис. 3.7. Преобразование отражения  $D_3 T_3$ Рис. 3.8. Преобразование  $D_2 T_1$  по-вращению с отражением

Вообще говоря, тензоры  $\mathbf{Q}'$  и  $\mathbf{Q}$  – различные, хотя компоненты у них одинаковые.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1.** Тензоры, обладающие одинаковыми компонентами, но относенные к различным базисам, называют изомерными.

Таким образом, каждый тензор линейных преобразований  $\mathbf{Q}$  связан с конкретной системой координат  $x^i$ , в то время как матрица преобразований  $A^i_j$  может связывать различные пары систем координат. Везде далее, если не оговорено специальным образом, будем считать, что  $A^i_j$  относится к декартовой системе координат  $Ox^i$  с базисом  $\hat{e}_i$ , т.е. полагаем, что имеет место формула (3.1).

### Упражнения к § 3.1.

**Упражнение 3.1.1.** Показать, что матрицы  $D_\alpha T_\alpha$  имеют вид:

$$D_1 T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_2 T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D_3 T_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и определяют преобразование отражения относительно плоскости, проходящей через ось  $Ox^\alpha$  и ось  $h$  с  $h_\alpha = 1$ ,  $h_\beta = h_\gamma = -1$  (рис. 3.7). Здесь и далее во всех упражнениях  $\alpha, \beta, \gamma$  меняются циклическим образом.

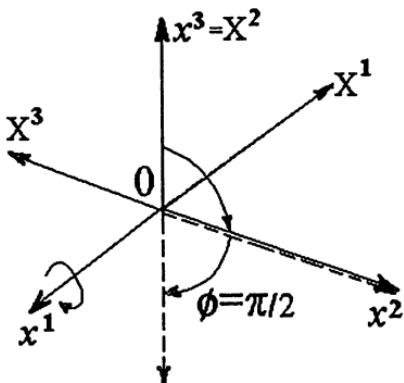


Рис. 3.9. Преобразование  $D_2T_1$  по-воворота с инверсией

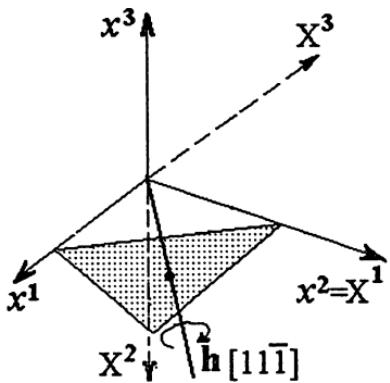


Рис. 3.10. Преобразование поворота  $D_1M_1$

**Упражнение 3.1.2.** Показать, что матрицы  $D_\beta T_\alpha$  имеют вид:

$$D_2T_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_3T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D_1T_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

и определяют преобразование поворота на угол  $\phi = \pi/2$  вокруг оси  $Ox^\alpha$  с последующим зеркальным отражением относительно плоскости, ортогональной к  $Ox^\alpha$  (рис.3.8), а матрицы  $D_\alpha T_\beta$  имеют вид:

$$D_1T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_2T_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$D_3T_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

и определяют аналогичные преобразования с углом  $\phi = -\pi/2$ .

**Упражнение 3.1.3.** Показать, что матрицы  $D_\beta T_\alpha$  и  $D_\alpha T_\beta$  определяют одновременно и преобразование поворота на угол  $\phi = \mp\pi/2$  соответственно вокруг оси  $Ox^\alpha$  с последующей инверсией относительно точки  $O$  (рис.3.9).

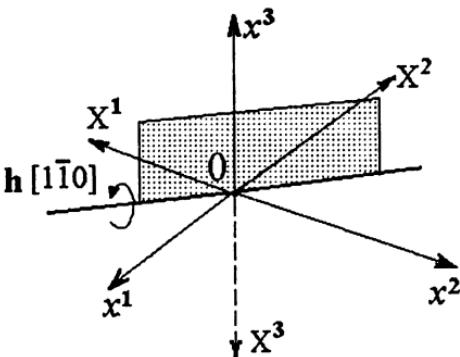
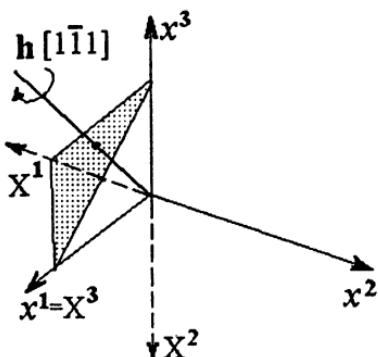


Рис. 3.11. Преобразование поворота  $D_3 M_1$

Рис. 3.12. Преобразование поворота  $CT_3$

**Упражнение 3.1.4.** Показать, что матрицы  $D_\alpha M_\alpha$  имеют вид:

$$D_1 M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_2 M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

и определяют преобразование поворота на угол  $\phi = \mp 2\pi/3$  вокруг наклонной оси  $h [1\bar{1}\bar{1}]$  (рис.3.10)

**Упражнение 3.1.5.** Показать, что матрицы  $D_\alpha M_\beta$  имеют вид:

$$D_1 M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_3 M_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и определяют преобразование поворота на угол  $\phi = \pm 2\pi/3$  вокруг оси  $h [1\bar{1}1]$ , а матрицы  $D_\beta M_\alpha$  имеют вид:

$$D_2 M_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_3 M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

и определяют преобразование поворота на угол  $\phi = \mp 2\pi/3$  вокруг оси  $h [\bar{1}11]$  (рис.3.11).

**Упражнение 3.1.6.** Показать, что матрицы  $CT_\alpha$  имеют вид:

$$CT_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad CT_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

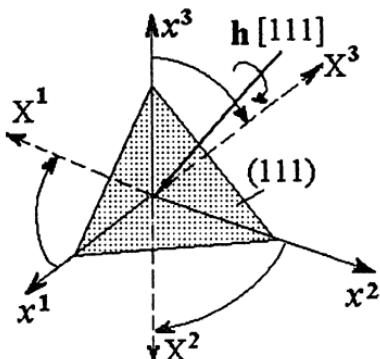


Рис. 3.13. Преобразование  $CM_1$  по-вращению с отражением

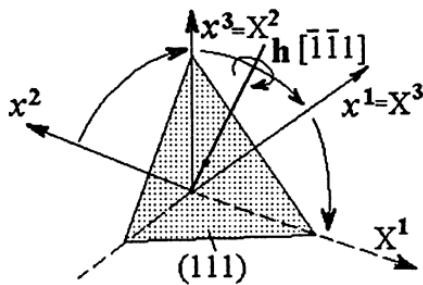


Рис. 3.14. Преобразование  $R_1M_1$  по-вращению с отражением

$$CT_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

и определяют преобразование поворота на угол  $\phi = \pi$  вокруг оси  $h$  с  $h_\alpha = 0$ ,  $h_\beta = 1$ ,  $h_\gamma = -1$  (рис.3.12).

**Упражнение 3.1.7.** Показать, что матрицы  $CM_\alpha$  имеют вид:

$$CM_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad CM_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

и определяют преобразование поворота на угол  $\phi = \mp\pi/3$  вокруг оси  $h[111]$  с последующим зеркальным отражением относительно плоскости  $(111)$  (рис.3.13).

**Упражнение 3.1.8.** Показать, что матрицы  $R_\alpha M_\alpha$  имеют вид:

$$R_1M_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_2M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

и определяют преобразование поворота на угол  $\phi = \mp\pi/3$  вокруг оси  $h[\bar{1}\bar{1}1]$  с последующим зеркальным отражением относительно плоскости  $(\bar{1}\bar{1}1)$  (рис.3.14).

**Упражнение 3.1.9.** Показать, что матрицы  $R_\alpha M_\beta$  имеют вид:

$$R_1M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_3M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

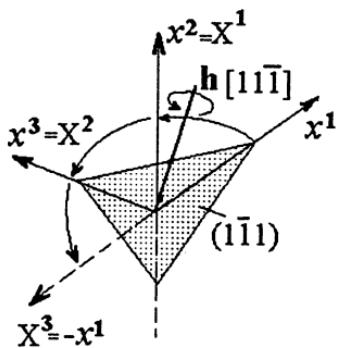


Рис. 3.15. Преобразование  $R_3 M_1$   
поворота с отражением

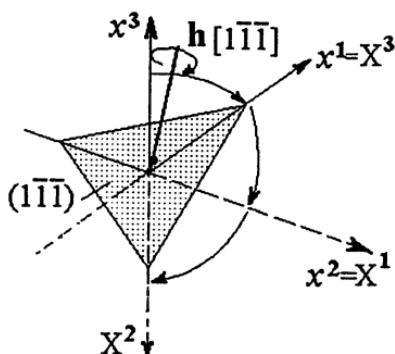


Рис. 3.16. Преобразование  $R_2 M_1$   
поворота с отражением

и определяют преобразование поворота на угол  $\phi = \pm\pi/3$  вокруг оси  $h[\bar{1}\bar{1}\bar{1}]$  с последующим зеркальным отражением относительно плоскости  $(\bar{1}\bar{1}\bar{1})$  (рис.3.15), а матрицы  $R_\beta M_\alpha$  имеют вид:

$$R_2 M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_3 M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

и определяют преобразование поворота на угол  $\phi = \mp\pi/3$  вокруг оси  $h[1\bar{1}\bar{1}]$  с последующим зеркальным отражением относительно плоскости  $(1\bar{1}\bar{1})$  (рис.3.16).

**Упражнение 3.1.10.** Показать, что матрицы  $R_\alpha T_\alpha$  имеют вид:

$$R_1 T_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_2 T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_3 T_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

и определяют преобразование поворота на угол  $\phi = \pi$  вокруг оси  $h$  с  $h_\alpha = 0$ ,  $h_\beta = h_\gamma = 1$  (рис.3.17).

**Упражнение 3.1.11.** Показать, что матрицы  $R_3 S_\gamma$  определяют преобразование поворота вокруг оси  $Ox^3$  на угол  $\phi = \pm 2\pi/3$  с последующим отражением относительно плоскости поворота  $(001)$ .

**Упражнение 3.1.12.** Показать, что матрицы  $R_1 S_1$ ,  $R_1 S_2$ ,  $R_2 S_1$  и  $R_2 S_2$  определяют преобразование зеркального отражения относительно плоскостей  $(1\sqrt{3}0)$ ,  $(\bar{1}\sqrt{3}0)$ ,  $(\sqrt{3}\bar{1}0)$ ,  $(\sqrt{3}10)$ , соответственно (рис.3.18).

**Упражнение 3.1.13.** Показать, что матрицы  $D_3 S_\gamma$  определяют преобразование поворота вокруг оси  $Ox^3$  на угол  $\phi = \pm\pi/3$ .

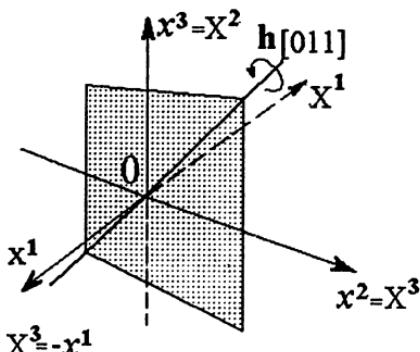


Рис. 3.17. Преобразование поворота  $R_1T_1$

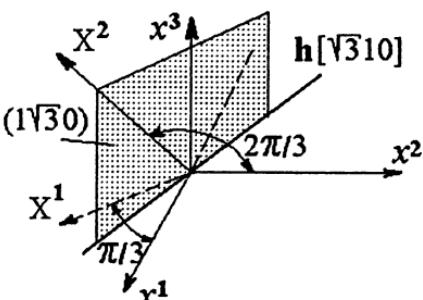


Рис. 3.18. Преобразование отражения  $R_1S_1$

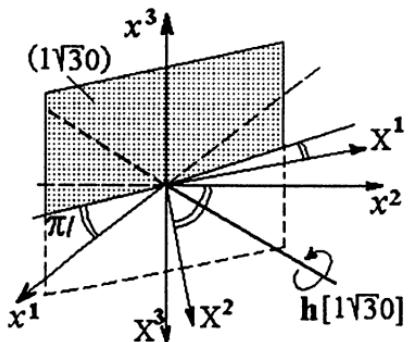


Рис. 3.19. Преобразование поворота  $D_1S_1$

**Упражнение 3.1.14.** Показать, что матрицы  $D_1S_1$ ,  $D_1S_2$ ,  $D_2S_1$  и  $D_2S_2$  определяют преобразование поворота на угол  $\phi = \pi/2$  вокруг осей  $h$ :  $[1\sqrt{3}0]$ ,  $[\bar{1}\sqrt{3}0]$ ,  $[\sqrt{3}\bar{1}0]$  и  $[\sqrt{3}10]$ , соответственно (рис. 3.19).

**Упражнение 3.1.15.** Показать, что матрицы  $CS_\gamma$  определяют преобразование поворота на угол  $\phi = \pm 2\pi/3$  вокруг оси  $Ox^3$  с последующей инверсией относительно точки  $O$ .

**Упражнение 3.1.16.** Показать, что матрицы  $CS_\gamma$  определяют также преобразование поворота на угол  $\phi = \mp\pi/3$  вокруг оси  $Ox^3$  с последующим зеркальным отражением относительно плоскости поворота  $(001)$ ,  $\gamma = 1, 2$ .

**Упражнение 3.1.17.** Показать, что матрица поворота  $Q_3^\phi$  (3.6) имеет следующие собственные значения:

$$\lambda_1 = e^{i\phi}, \quad \lambda_2 = e^{-i\phi}, \quad \lambda_3 = 1.$$

**Упражнение 3.1.18.** Показать, что матрицы  $T_\alpha$  имеют следующие собственные значения:

$$\lambda_{\alpha,\beta} = 1, \quad \lambda_\gamma = -1, \quad \alpha = 1, 2, 3.$$

**Упражнение 3.1.19.** Показать, что матрицы  $M_\beta$  имеют следующие собственные значения:

$$\lambda_\beta = 1, \quad \lambda_{\gamma,\alpha} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

## § 3.2. Группы преобразований в трехмерном евклидовом пространстве

### 3.2.1. Определение группы

Рассмотрим теперь не одно, а множество преобразований координат (3.1). Оказывается, что эти множества могут обладать определенной симметрией, например, образовывать группу.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2.** Множество  $M$  называют группой  $G$ , если в нем определена операция умножения

$$a, b \in M \longrightarrow c = a \cdot b \in M, \quad (3.26)$$

которая обладает следующими свойствами:

1° ассоциативность

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c),$$

2° существует левая единица, т.е. такой элемент  $e \in M$ , что

$$e \cdot a = a,$$

3° для любого  $a$  существует левый обратный элемент  $a^{-1} \in M$  такой, что

$$a^{-1} \cdot a = e.$$

Группу  $G$  называют коммутативной (или Абелевой), если

$$a \cdot b = b \cdot a. \quad (3.27)$$

Если группа имеет конечное число элементов, то ее называют точечной (или конечной); если бесконечное, то - непрерывной.

### 3.2.2. Сингонии, классы и группы симметрии

Поскольку у нас определено произведение двух матриц  $A^i{}_j$  и  $B^j{}_k$  – это матрица  $C^i{}_k$  с компонентами  $C^i{}_k = A^i{}_j B^j{}_k$ , определена единичная матрица  $\delta^i_j$ :  $A^i{}_j \delta^j_k = A^i{}_k$ , и для всякой невырожденной матрицы существует обратная:  $A^i{}_j (A^{-1})^j_k = \delta^i_k$ , то множества матриц могут образовывать группы.

Оказывается, что из 64 преобразований, описываемых матрицами (3.13), (3.13а), (3.21) и (3.22), можно образовать 32 точечные группы преобразований, эти группы объединяют в 7 систем (сингоний), сингонии состоят из одного или двух классов.

*I. Триклинная сингония* (триклининый класс  $E$ ):  
группы:  $G_1 = \{E\}$ ,  $G_2 = \{E, C\}$ .

*II. Моноклинная сингония* (моноклиниальный класс  $(M)$ ):  
группы:  $G_3 = \{E, R_3\}$ ,  $G_4 = \{E, D_3\}$ ,  $G_5 = \{E, C, R_3, D_3\}$ .

*III. Ромбическая сингония* (класс ортотропии  $(O)$ ):  
группы:  $G_6 = \{E, R_1, R_2, D_3\}$ ,  $G_7 = \{E, D_\alpha\}$ ,  
 $G_8 = \{E, C, R_\alpha, D_\alpha\}$ .

*IV. Тетрагональная сингония*:

тетрагональный класс  $(T)$ :

группы:  $G_9 = \{E, D_3, D_\gamma T_3\}$ ,  $G_{10} = \{E, D_3, R_\gamma T_3\}$ ,  $\gamma = 1, 2$ ;  
 $G_{11} = \{E, C, R_3, D_3, R_\gamma T_3, D_\gamma T_3\}$ ;

класс квазитрансверсальной изотропии  $(K_3)$ :

группы:  $G_{12} = \{E, D_\alpha, T_3, D_\alpha T_3\}$ ,  $G_{13} = \{E, R_\gamma, D_3, T_3, R_\gamma T_3, D_3 T_3\}$ ,  $G_{14} = \{E, D_\alpha, CT_3, R_\alpha T_3\}$ ,  $G_{15} = \{E, C, R_\alpha, D_\alpha, T_3, CT_3, R_\alpha T_3, D_\alpha T_3\}$   $\alpha = 1, 2, 3$ .

*V. Ромбоэдрическая (тригональная) сингония*:

*A*-ромбоэдрический класс  $(A)$ :

группы:  $G_{16} = \{E, S_\gamma\}$ ,  $G_{17} = \{E, S_\gamma, C, CS_\gamma\}$ ;

*B*-ромбоэдрический класс  $(B)$ :

группы:  $G_{18} = \{E, S_\gamma, R_1, R_1 S_\gamma\}$ ,  $G_{19} = \{E, S_\gamma, D_1, D_1 S_\gamma\}$ ;  
 $G_{20} = \{E, S_\gamma, C, CS_\gamma, R_1, R_1 S_\gamma, D_1, D_1 S_\gamma\}$ .

*VI. Гексагональная сингония* (гексагональный класс  $(H)$ ):

$G_{21} = \{E, S_\gamma, R_3 R_3 S_\gamma\}$ ,  $G_{22} = \{E, S_\gamma, D_3, D_3 S_\gamma\}$ ;  
 $G_{23} = \{E, S_\gamma, C, CS_\gamma, R_3, R_3 S_\gamma, D_3, D_3 S_\gamma\}$ ,  
 $G_{24} = \{E, S_\gamma, R_2, R_2 S_\gamma, R_3, R_3 S_\gamma, D_2, D_2 S_\gamma\}$ ,  
 $G_{25} = \{E, S_\gamma, D_\alpha, D_\alpha S_\gamma\}$ ,  
 $G_{26} = \{E, S_\gamma, R_1, R_1 S_\gamma, R_2, R_2 S_\gamma, D_3, D_3 S_\gamma\}$ ,  
 $G_{27} = \{E, S_\gamma, C, CS_\gamma, R_\alpha, R_\alpha S_\gamma, D_\alpha, D_\alpha S_\gamma\}$ ,  
 $\gamma = 1, 2$ ;  $\alpha = 1, 2, 3$ .

*VII. Кубическая сингония* (класс квазизотропии  $(K)$ ):

$G_{28} = \{E, D_\alpha, M_\gamma, D_\alpha M_\gamma\}$ ,  
 $G_{29} = \{E, C, R_\alpha, D_\alpha, M_\gamma, CM_\alpha, R_\alpha M_\gamma, D_\alpha M_\gamma\}$ ,  
 $G_{30} = \{E, D_\alpha, T_\alpha, D_\alpha T_\beta, M_\gamma, D_\alpha M_\gamma\}$ ,  
 $G_{31} = \{E, D_\alpha, CT_\alpha, R_\alpha T_\beta, M_\gamma, D_\alpha M_\gamma\}$ ,  
 $G_{32} = \{E, C, R_\alpha, D_\alpha, T_\alpha, CT_\alpha, R_\alpha T_\beta, D_\alpha T_\beta,$   
 $M_\gamma, CM_\gamma, R_\alpha M_\gamma, D_\alpha M_\gamma\}$ .

В скобках указано обозначение класса  $E, M, O, T, K_3, K, A_3, B_3, H$ .

Непрерывных групп, называемых также *текстурами*, существует 7 штук, объединенных в 2 класса.

*Класс трансверсальной изотропии* ( $T_3$ ):

$$\begin{aligned} G_{33} &= \{Q_3^\phi, 0 \leq \phi \leq 2\pi\}; \quad G_{34} = \{Q_3^\phi, 0 \leq \phi \leq 2\pi; Q_3^\phi R_3\}; \\ G_{35} &= \{Q_3^\phi, 0 \leq \phi \leq 2\pi; R_\gamma Q_3^\phi\}; \\ G_{36} &= \{Q_3^\phi, 0 \leq \phi \leq 2\pi; D_\gamma Q_3^\phi\}; \\ G_{37} &= \{Q_3^\phi, 0 \leq \phi \leq 2\pi; D_\gamma Q_3^\phi, R_\alpha Q_3^\phi\} \quad \gamma = 1, 2. \end{aligned}$$

*Класс изотропии* ( $I$ ):

$$\begin{aligned} G_{38} &= \{Q_{\phi\chi\theta}, 0 \leq \phi, \chi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \pi\}; \\ G_{39} &= \{Q_{\phi\chi\theta}, 0 \leq \phi, \chi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \pi; R_\alpha Q_{\phi\chi\theta}\}. \end{aligned}$$

Здесь обозначена матрица поворота  $Q_{\phi\chi\theta}$  на углы  $\phi, \chi$  и  $\theta$  вокруг осей  $Ox_i$ ; ее компоненты имеют вид:

$$(Q_{\phi\chi\theta})_j^i = \begin{pmatrix} c\phi c\chi - s\phi s\chi c\theta & -c\phi s\chi - s\phi s\chi c\theta & s\phi s\theta \\ s\phi c\chi + c\phi s\chi c\theta & -s\phi s\chi + c\phi s\chi c\theta & -c\phi s\theta \\ s\chi s\theta & c\chi s\theta & c\theta \end{pmatrix}, \quad (3.28)$$

где  $c = \cos$ ,  $s = \sin$ .

Матрица  $Q_3^\phi$  поворота на угол  $\phi$  вокруг оси  $Ox_3$  определяется по (3.6).

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3.** Подгруппой  $S_s$  группы  $G_s$  называется подмножество элементов группы  $G_s$ , которое само образует группу относительно той же операции умножения, которая определена в  $G_s$ .

Отношение групп  $S_s$  и  $G_s$  в этом случае обозначают  $S_s \subset G_s$ .

Максимальной группой в классе называют такую  $G_s$ , для которой выполняется соотношение  $G_i \subset G_s$  для всех групп из данного класса. Максимальные группы в классах показаны в табл. 3.1.

Таблица 3.1

Класс	$E$	$M$	$O$	$T$	$K_3$
Максимальная группа	$G_3$	$G_5$	$G_8$	$G_{11}$	$G_{15}$

Класс	$A_3$	$B_3$	$K$	$T_3$	$I$
Максимальная группа	$G_{17}$	$G_{20}$	$G_{32}$	$G_{34}$	$G_{39}$

Эти группы иногда называют соответственно названию класса:  $G_5$  - моноклинная группа,  $G_8$  - группа ортотропии,  $G_{34}$  - группа трансверсальной изотропии и т.д.

Группа изотропии  $G_{39}$  совпадает с полной группой ортогональных преобразований  $I$ , содержащей все ортогональные матрицы (3.5) (см. упр.3.2.8).

### 3.2.3. Оси анизотропии

Поскольку с каждым преобразованием координат (3.1) можно связать как матрицу преобразований  $A_i^j$ , так и тензор  $\mathbf{Q}$  линейного преобразования, то введенным выше группам преобразований  $G_s$  ( $s = 1, \dots, 39$ ) соответствуют не только группы матриц  $A_i^j$ , но также группы, составленные из соответствующих тензоров преобразований. Буквенные обозначения для элементов этих групп одинаковы и соответствуют обозначениям п.3.2.2.

Так как тензоры линейных преобразований определены нами по формуле (3.24) в некотором фиксированном базисе, например  $\bar{\mathbf{e}}_i$ , то и группы тензоров преобразований будут отнесены к тому же базису, который называют *кристаллофизическими базисом*, а линии действия векторов этого базиса называют *осами анизотропии*.

Далее, если не оговорено специальным образом, подразумевается, что группы тензоров преобразований отнесены к декартову базису  $\bar{\mathbf{e}}_i$ .

### 3.2.4. Симметрическая группа

Множество всех подстановок  $(m_1 \dots m_n)$  длиной  $n$  также образует группу, поскольку в этом множестве имеется единичный элемент – тождественная подстановка  $(12 \dots n)$ , определены произведение подстановок (см. п.1.8.2):  $(m_1 \dots m_n)(i_1 \dots i_n) = (m_{i_1} \dots m_{i_n})$  и обратная подстановка  $(m_1 \dots m_n)(w_1 \dots w_n) = (12 \dots n)$ . Эту группу называют *симметрической*.

### Упражнения к § 3.2.

**Упражнение 3.2.1.** Показать, что множества преобразований, представленных в п.3.2.2, действительно являются группами, т.е. удовлетворяют определению 3.2.

**Упражнение 3.2.2.** Показать, что внутри классов имеют место следующие отношения групп:

$$\forall i \quad G_1 \subset G_i, \quad i = 1, \dots, 32; \quad G_i \subset G_5, \quad i = 3, 4, 5;$$

$$G_i \subset G_8, \quad i = 6, 7, 8; \quad G_i \subset G_{11}, \quad i = 9, 10, 11;$$

$$G_i \subset G_{15}, \quad i = 9, \dots, 15; \quad G_{16} \subset G_{17}, \quad G_i \subset G_{20} \quad i = 16, \dots, 20;$$

$$G_i \subset G_{27}, \quad i = 21, \dots, 27; \quad G_i \subset G_{32}, \quad i = 28, \dots, 32;$$

$$G_i \subset G_{37}, \quad i = 33, \dots, 37; \quad G_{38} \subset G_{39}.$$

**Упражнение 3.2.3.** Показать, что

$$G_5 \subset G_{34}, \quad G_6 \subset G_{35}, \quad G_7 \subset G_{36}, \quad G_8 \subset G_{37}.$$

**Упражнение 3.2.4.** Показать, что группа  $G_{34}$  является максимальной по отношению ко всем группам точечных классов, а  $G_{37}$  является максимальной по всем группам  $G_i$ ,  $i = 1, \dots, 37$ .

**Упражнение 3.2.5.** Показать, что все линейные невырожденные ( $\det A^i{}_j \neq 0$ ) преобразования, определяемые по (3.1) образуют группу линейных преобразований.

**Упражнение 3.2.6.** Показать, что все нелинейные невырожденные преобразования координат, определяемые формулами (1.4), образуют группу криволинейных преобразований.

**Упражнение 3.2.7.** Показать, что множество всех унимодулярных преобразований (3.4) образуют группу, называемую *собственной унимодулярной* ( $U_0$ ).

**Упражнение 3.2.8.** Показать, что все ортогональные преобразования (3.5) образуют группу, называемую *полной группой ортогональных преобразований*. Показать, что эта группа совпадает с группой изотропии  $G_{39} = I$ .

**Упражнение 3.2.9.** Показать, что собственно-ортогональные преобразования образуют группу, которая называется *группой собственно-ортогональных преобразований* ( $I_0$ ). Показать, что эта группа совпадает с группой  $G_{38} = I_0$ .

**Упражнение 3.2.10.** Показать, что множество всех преобразований (3.4), в которых допускается как  $+1$ , так и  $-1$ , образуют группу, называемую *полной унимодулярной* ( $U$ ).

**Упражнение 3.2.11.** Показать, что из определения 3.2 следует, что левая единица является также и правой единицей, а левый обратный элемент является также и правым обратным.

### § 3.3. Симметрия конечных тел

#### 3.3.1. Симметричные тела

До сих пор мы рассматривали свойства только самих преобразований координат (3.1). Пусть теперь в пространстве  $\mathbb{R}^3$  определена некоторая ограниченная замкнутая область  $V$ . Будем называть ее далее *конечным телом*  $\mathcal{V}$ .

Тело  $\mathcal{V}$  называют *неоднородным* (составным или кусочно-однородным), если для него введено разбиение на конечное число замкнутых областей  $V_i$ , общими точками которых могут быть только точки на их границах. Если же для области  $V$  такое разбиение не введено, то будем называть тело  $\mathcal{V}$  *геометрически однородным* или просто *однородным*.

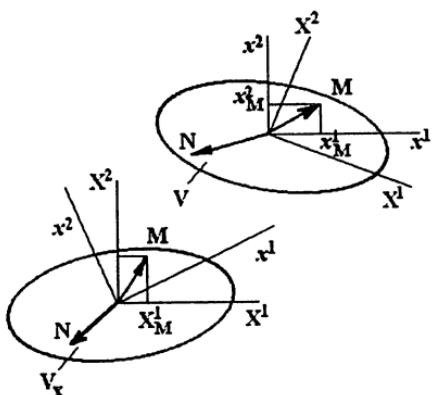


Рис. 3.20. Преобразование тел при ортогональных преобразованиях координат

Без ограничения общности будем рассматривать далее тела, образующие связные множества. Если введена некоторая система координат  $x^i$ , то каждой точке тела  $M \in \mathcal{V}$  можно взаимнооднозначно поставить в соответствие координаты  $x^i \in V$ , т.е. ввести биективное отображение

$$\varphi : \mathcal{V} \rightarrow V \subset \mathbb{R}^3.$$

Однако такое отображение не единственно возможное. Переходя к новой системе координат  $X^i$ , получим другое отображение  $\varphi_X : \mathcal{V} \rightarrow V_X \subset \mathbb{R}^3$ , где  $V_X$  – область изменения координат  $X^i$  точек  $M \in \mathcal{V}$  (рис.3.20).

Исследуем как связаны между собой образы тел  $V$  и  $V_X$ , если системы координат  $x^i$  и  $X^i$  связаны ортогональными преобразованиями (3.1).

При таких преобразованиях каждая точка  $M$  тела с координатами  $x_M^i$  в области  $V$  имеет координаты  $X_M^j$  в области  $V_X$ , причем расстояние  $s$  между любыми двумя точками  $M$  и  $N$ , принадлежащими  $\mathcal{V}$ , в областях  $V$  и  $V_X$  не меняется, так как

$$\begin{aligned} s &= \sum_{\alpha=1}^3 (x_M^\alpha - x_N^\alpha)^2 = \sum_{\alpha=1}^3 B_j^\alpha (X_M^j - X_N^j) B_i^\alpha (X_M^\alpha - X_N^\alpha) = \\ &= \delta_{ij} (X_M^j - X_N^j) (X_M^i - X_N^i) = \sum_{\alpha=1}^3 (X_M^\alpha - X_N^\alpha)^2, \end{aligned} \quad (3.29)$$

согласно свойству (3.5). Это означает, что при ортогональных преобразованиях область  $V$  преобразуется в область  $V_X$  как жесткое целое в пространстве  $\mathbb{R}^3$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.4.** Будем говорить, что тело  $\mathcal{V}$  обладает симметрией (является симметричным) относительно ортогонального преобразования (3.1), если образ тела  $\mathcal{V}$  до и после такого преобразования неотличим (т.е. области  $V$  и  $V_X$  совпадают).

Если тело  $\mathcal{V}$  – неоднородное, то для его симметрии необходимо, чтобы области  $V_i$  и  $V_{iX}$  совпадали.

Тело может быть симметричным относительно нескольких преобразований.

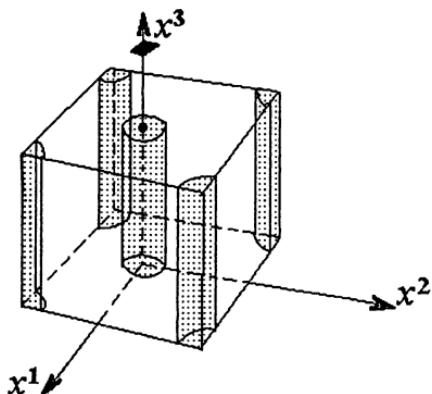


Рис. 3.21. Пример оси симметрии четвертого порядка

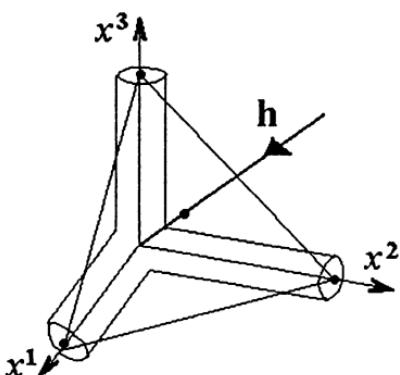


Рис. 3.22. Пример оси симметрии третьего порядка

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.5.** Будем говорить, что тело является симметричным относительно группы  $G_s$ , если оно симметрично относительно каждого преобразования в этой группе.

### 3.3.2. Оси симметрии

При ортогональных преобразованиях, как было показано в п.1.6.3, образ тела  $\mathcal{V}$  может либо поворачиваться вокруг некоторой оси, либо зеркально отражаться относительно некоторой плоскости или центра. В первом случае  $\det(A^i_j) = 1$ , во втором –  $\det(A^i_j) = -1$ . Возможно также совместное действие этих преобразований.

Анализируя приведенные в п.3.1.2 матрицы  $A^i_j$  ортогональных преобразований, нетрудно заключить, что в рассмотренных выше точечных группах присутствуют повороты только на углы:  $\pi/3$ ,  $\pi/2$ ,  $(2/3)\pi$ ,  $\pi$  и  $2\pi$ , т.е. на  $2\pi/n$ , где  $n = 1, 2, 3, 4$  и  $6$ . Поворот на  $0^\circ$  эквивалентен повороту на  $2\pi$ . Вообще же для конечных тел возможны повороты и на другие углы, при которых имеет место симметрия. Обоснование, почему в группах  $G_s$ ,  $s = 1 \dots 32$ , присутствуют только указанные повороты, мы дадим в п.3.3.11.

Поворот на углы  $2\pi$  и  $0^\circ$  является тождественным преобразованием и описывается матрицей  $E$ . Матрицы  $A^i_j$ , соответствующие другим углам поворота, указаны в п.3.1.2.

Если тело  $\mathcal{V}$  – симметрично относительно преобразования поворота на угол  $2\pi/n$ , то говорят, что оно обладает осью симметрией  $n$ -ого порядка.

На рис.3.21 изображено неоднородное тело, имеющее вертикальную ось симметрии четвертого порядка. Тело, изображенное на рис.3.22, имеет ось симметрии третьего порядка  $h[111]$ , равнонаклоненную к

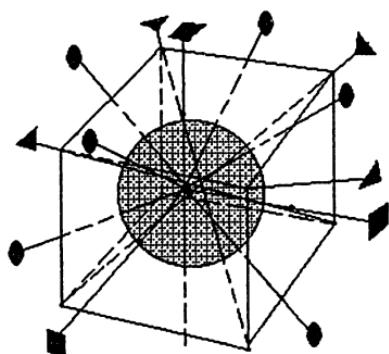


Рис. 3.23. Оси симметрии для куба с шаром внутри

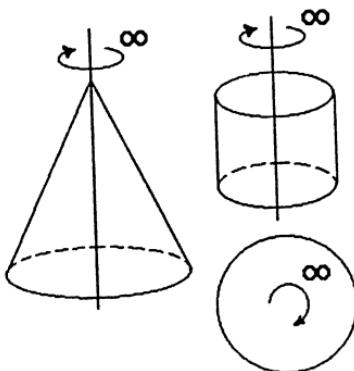


Рис. 3.24. Оси симметрии бесконечного порядка для конуса, цилиндра и шара

координатным осям  $Ox^i$ .

Одно и то же тело может иметь несколько осей симметрии. Так куб с шаром внутри имеет четыре оси третьего порядка, направленные по главным диагоналям куба, три оси четвертого порядка, нормальные к каждой паре параллельных граней, и шесть осей второго порядка, проходящих через середины ребер, противолежащих по отношению к центру куба (рис.3.23). Символически эти оси изображены следующим образом:

- |   |  |
|---|--|
| $\bullet \quad - - \quad n = 2,$<br>$\blacksquare \quad - - \quad n = 4,$ | $\blacktriangle \quad - - \quad n = 3,$<br>$\blacksquare \quad - - \quad n = 6.$ |
|---|--|

Для них также используют название *главные оси симметрии*.

В непрерывных группах  $T_3$ -класса возможны повороты на произвольный угол относительно оси  $Ox^3$ , а в группах изотропного класса – относительно любой оси. Такие оси называют *осами бесконечного порядка*. На рис.3.24 показано, что, например, тело  $V$  в виде конуса имеет одну ось бесконечного порядка, а шар – бесконечное число таких осей.

### 3.3.3. Плоскости симметрии и центр симметрии

Если тело  $V$  является симметричным при преобразованиях отражения относительно некоторой плоскости, то говорят, что оно обладает *плоскостью симметрии*.

Преобразование отражения относительно плоскостей  $Ox^\beta x^\gamma$  описывается матрицами  $R_\alpha$  (см. §3.1).

Последовательное отражение относительно трех координатных плоскостей приводит к преобразованию инверсии, являющейся отражением относительно точки  $O$  – центра симметрии. Это преобразование описывает матрица  $C$ .

Если тело  $\mathcal{V}$  является симметричным при преобразованиях инверсии, то его называют *центрально-симметричным*. На рис.3.21 изображено тело, имеющее плоскость симметрии, а на рис.3.23 – центрально-симметричное тело.

### 3.3.4. Зеркально-поворотные и инверсионно-поворотные оси

Комбинация поворота на угол  $2\pi/p$  вокруг какой-либо оси и отражения относительно плоскости поворота называется *зеркально-поворотным преобразованием*. Если тело  $\mathcal{V}$  является симметричным относительно такого преобразования, то говорят, что оно обладает *зеркально-поворотной осью  $p$ -ого порядка*. Комбинацию оси бесконечного порядка и ортогональной к ней плоскости зеркального отражения называют *зеркально-поворотной осью бесконечного порядка*.

Если тело  $\mathcal{V}$  является симметричным при преобразованиях поворота на угол  $2\pi/p$  вокруг какой-либо оси с последующим отражением относительно центра  $O$ , то говорят, что тело обладает *инверсионно-поворотной осью  $p$ -ого порядка*.

### 3.3.5. Соответствие между элементами симметрии и матрицами преобразований

Оси и центр симметрии, а также плоскости отражения называются *элементами симметрии*. Каждую матрицу  $A^i_j$  ортогонального преобразования можно отнести к одному из элементов симметрии. Ниже, на основании результатов п.3.1.2 и упражнений к §3.1, приведена таблица 3.2 соответствия между матрицами преобразований  $A^i_j$ , точечных групп  $G_s$  и элементами симметрии, здесь  $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \rho$ ,  $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ ,  $\gamma, \rho = 1, 2$ .

### 3.3.6. Классы сопряженных элементов

Рассмотрим теперь вопрос о том, какие из элементов симметрии входят в каждую группу  $G_s$ . Для этого вначале выясним возможность переставимости операций умножения матриц в группах или, что то же самое, о переставимости операций симметрии. Если для любой пары матриц преобразований  $A^i_j, K^i_j$  из группы  $G_s$  их произведение переставимо:

$$A \cdot K = K \cdot A, \quad \forall A, K \in G_s, \quad (3.30)$$

то такая группа, как было отмечено в п.3.2.1, называется *коммутативной*.

Однако свойством коммутативности обладают только некоторые группы преобразований  $G_s$  (какие именно будет указано ниже). Для некоммутативных групп  $G_s$  целесообразно ввести некоторое разделение элементов группы на *классы сопряженных элементов*. Покажем как это можно осуществить.

Таблица 3.2.

Элемент симметрии	Матрицы преобразований $A_j^i$
1. Ось симметрии $n$ -ого порядка (поворот): $n = 1$ (тождественное преобразование)	$E$
$n = 2$	$D_\alpha, CT_\alpha, R_\alpha T_\alpha$
$n = 3$	$S_\gamma, M_\gamma, D_\alpha M_\beta, D_\alpha M_\alpha$
$n = 4$	$R_\alpha T_\beta, D_\gamma S_\rho$
$n = 6$	$D_3 S_\gamma$
2. Плоскость симметрии (зеркальное отражение), $m$	$R_\alpha, T_\alpha, D_\alpha T_\alpha, R_\gamma S_\rho$
3. Зеркально-поворотные оси $n$ -ого порядка: $n = 3$	$R_3 S_\gamma$
$n = 4$	$D_\alpha T_\beta$
$n = 6$	$CM_\alpha, R_\alpha M_\alpha, R_\alpha M_\beta, CS_\gamma$
4. Инверсионно-поворотные оси $n$ -ого порядка: $n = 1$	$C$
$n = 3$	$CS_\gamma$
$n = 4$	$D_\beta T_\alpha$
5. Центр симметрии $c$	$C$

Перепишем операцию коммутативности (3.30) в виде:

$$K^{-1} \cdot A \cdot K = A, \quad (3.31)$$

или, учитывая, что  $A$  и  $K$  – ортогональные матрицы, получим:

$$K^T \cdot A \cdot K = A. \quad (3.32)$$

Проверку коммутативности группы  $G$ , можно проводить следующим образом: выбирать поочередно элементы  $A$  из группы (для непрерывных групп надо указать некоторое правило перебора всех элементов) и составлять произведения  $K^T \cdot A \cdot K$  со всеми остальными элементами группы.

Если окажется, что для некоторого  $K \in G$ , выполнено

$$K^T \cdot A \cdot K = P, \quad P \neq A, \quad P \in G, \quad (3.33)$$

то группа  $G_s$  является некоммутативной. Однако, поскольку результат произведения –  $P$ , очевидно, всегда будет принадлежать группе  $G_s$ ; после того как К пробежит всю группу  $G_s$ , можно объединить все получившиеся значения  $P$  в одно множество  $\mathcal{E}$  вместе с  $A$ . Это множество называют *классом сопряженных элементов* группы. Если теперь менять сам элемент  $A$ , пробегая всю группу  $G_s$ , то эта группа окажется разбитой на несколько классов  $\mathcal{E}_i$ .

Оказывается, что в каждый класс сопряженных элементов попадают только однотипные матрицы  $A$ , т.е. те, которым соответствуют, например, повороты на угол  $\pi/2$  или только на угол  $\pi/3$ , или только плоскости симметрии, поэтому разбиение группы на классы полезно при рассмотрении симметрии тел.

### 3.3.7. Пример нахождения класса сопряженных элементов

Рассмотрим пример построения классов сопряженных элементов (не следует их путать с классами симметрии  $E, M, O$  и др.) для  $B$ -ромбоздрической группы  $G_{18}$ . Эта группа (см. п.3.2.2) состоит из шести элементов:

$$G_{18} = \{E, S_1, S_2, R_1, R_1S_1, R_1S_2\}. \quad (3.34)$$

Зафиксируем элемент  $S_1$  и вычислим его произведение  $R_1^T \cdot S_1 \cdot R_1$ . Умножая матрицы, получим:

$$\begin{aligned} R_1^T \cdot S_1 \cdot R_1 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = S_2, \end{aligned} \quad (3.35)$$

т.е. группа  $G_{18}$  удовлетворяет условию (3.33) и является некоммутативной. Продолжим перебор элементов группы, учитывая при этом, что  $S_1 = S_2^T$ :

$$S_2^T \cdot S_1 \cdot S_2 = S_1 \cdot S_2^T \cdot S_2 = S_1. \quad (3.36)$$

Здесь учтена ортогональность всех матриц в группах  $G_s$ . Используя результат (3.35), получаем:

$$(R_1 \cdot S_1)^T \cdot S_1 \cdot (R_1 \cdot S_1) = S_1^T \cdot (R_1^T \cdot S_1 \cdot R_1) \cdot S_1 = S_2 \cdot S_2 \cdot S_2^T = S_2,$$

$$(R_1 \cdot S_2)^T \cdot S_1 \cdot (R_1 \cdot S_2) = S_2^T \cdot (R_1^T \cdot S_1 \cdot R_1) \cdot S_2 = S_2, \quad E \cdot S_1 = S_1. \quad (3.37)$$

Таким образом, все произведения вида (3.33), где  $A = S_1$  для всех  $K$  из группы  $G_{18}$  дают только две матрицы: снова  $S_1$  или  $S_2$ . Следовательно, класс сопряженных элементов, порождаемый элементом  $S_1$  состоит из двух элементов:  $\mathcal{E}_1 = \{S_1, S_2\}$ .

Аналогичным способом несложно проверить, что класс, порожденный элементом  $S_2$ , совпадает с  $\mathcal{E}_1$ .

Зафиксируем теперь элемент  $R_1$  и вычислим для него произведение (3.33):

$$\begin{aligned} S_1^T \cdot R_1 \cdot S_1 &= \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \\ &\times \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = R_1 S_2. \quad (3.38) \end{aligned}$$

Используя этот результат, далее находим:

$$S_2^T \cdot R_1 \cdot S_2 = S_2^T \cdot S_1^T \cdot R_1 \cdot S_1 = R_1 \cdot S_1,$$

$$(R_1 \cdot S_1)^T \cdot R_1 \cdot (R_1 \cdot S_1) = S_1^T \cdot R_1 \cdot R_1 \cdot R_1 \cdot S_1 = R_1 \cdot S_2, \quad (3.39)$$

$$(R_1 \cdot S_2)^T \cdot R_1 \cdot (R_1 \cdot S_2) = S_2^T \cdot R_1 \cdot R_1 \cdot R_1 \cdot S_2 = R_1 \cdot S_1,$$

$$R_1 \cdot E = R_1.$$

Таким образом, все произведения вида (3.33) для  $A = R_1$  в группе  $G_{18}$  дают либо  $R_1$ , либо  $R_1 S_2$ , либо  $R_1 S_1$ . Следовательно, класс сопряженных элементов  $\mathcal{E}_2$ , порожденный элементом  $R_1$ , имеет вид:  $\mathcal{E}_2 = \{R_1, R_1 S_1, R_1 S_2\}$ . Несложно проверить, что для элементов  $R_1 S_1$  и  $R_1 S_2$  классы сопряженных элементов будут совпадать с  $\mathcal{E}_2$ .

Хотя единичный элемент  $E$  всегда в тройном произведении даст самого себя:

$$K^T \cdot E \cdot K = K^T \cdot K = E,$$

его тоже можно отнести в самостоятельный класс —  $\mathcal{E}_3$ .

Итак, мы установили, что группа  $G_{18}$  состоит из трех классов. Запишем этот факт следующим образом:

$$G_{18} = \{\mathcal{E}_3 / \mathcal{E}_1 / \mathcal{E}_2\} = \{E / S_1, S_2 / R_1, R_1 S_1, R_1 S_2\},$$

отделяя классы сопряженных элементов наклонными чертами.

Посмотрим теперь, какие элементы попали в классы  $\mathcal{E}_i$ . Обеим матрицам  $S_1$  и  $S_2$ , как следует из табл. 3.2, соответствует ось симметрии третьего порядка  $Ox^3$ . Обозначим такой класс  $\mathcal{E}_1 = 2\bar{C}_{3z}$ . Трем матрицам  $R_1$ ,  $R_1 S_1$  и  $R_1 S_2$  из класса  $\mathcal{E}_2$ , как следует из табл. 3.2 и упражнения 3.1.12, соответствуют плоскости симметрии  $(100)$ ,  $(1/\sqrt{3}0)$

и  $(\bar{1}\sqrt{3}0)$ , пересекающиеся друг с другом под углом  $\pi/3$  и параллельные одной и той же оси  $Ox^3$ . Такой класс обозначим как  $\mathcal{E}_2 = 3\sigma_h$ .

### 3.3.8. Разбиение групп на классы

Для всех групп  $G_s$  ( $s = 1 \dots 39$ ) можно произвести разбиение на классы сопряженных элементов указанным выше способом. Если в какой-то группе  $G_s$  все классы  $\mathcal{E}_i$  окажутся состоящими только из одного элемента, то это означает, что данная группа является коммутативной. Тем не менее, ради общности для коммутативных групп также используют одноэлементные классы  $\mathcal{E}_i$ .

Многие классы  $\mathcal{E}_i$  встречаются в разных группах  $G_s$ , поэтому для классов вводят специальные обозначения, по которым можно восстановить соответствующие элементы симметрии. Эти обозначения приведены в табл. 3.3, где  $C_{nx}$ ,  $C_{ny}$ ,  $C_{nz}$  – ось симметрии  $Ox^1$ ,  $Ox^2$ ,  $Ox^3$ , соответственно, имеющая  $n$ -ый порядок.

Таблица 3.3.

Обозначение класса сопряженных элементов	Элементы группы в классе	Элементы симметрии	Характер матричного представления $\chi(A)$ класса
$/C_{2x}/C_{2y}/C_{2z}/$	$/D_1/D_2/D_3/$	одна ось симметрии второго порядка в каждом классе $Ox^\alpha$ , $\alpha = 1, 2, 3$	-1
$/C_{3z}/C_{3z}^2/$	$/S_1/S_2/$	одна ось симметрии третьего порядка $Ox^3$	0
$/C_{4z}/C_{4z}^3/$	$/R_2T_3/R_1T_3/$	одна ось симметрии четвертого порядка $Ox^3$	1
$/C_{6z}/C_{6z}^5/$	$/D_3S_1/D_3S_2/$	одна ось симметрии шестого порядка $Ox^3$	2
$/S_{3z}/S_{3z}^2/$	$/R_3S_1/R_3S_2/$	одна зеркально-поворотная ось третьего порядка $Ox^3$	-2
$/S_{4z}/S_{4z}^3/$	$/D_1T_3/D_2T_3/$	одна зеркально-поворотная ось четвертого порядка $Ox^3$	-1
$/S_{6z}/S_{6z}^5/$	$/CS_2/CS_1/$	одна зеркально-поворотная ось шестого порядка $Ox^3$	0

Таблица 3.3. (продолжение)

$3C_2$	$D_1, D_2, D_3$	три оси второго порядка $Ox^\alpha$ , $\alpha = 1, 2, 3$	-1
$2\bar{C}_{2z}$	$D_1, D_2$	две оси второго порядка $Ox^1, Ox^2$	-1
$2\bar{C}_{2d}$	$R_3T_3, CT_3$	две диагональные оси второго порядка $[111], [1\bar{1}0]$	-1
$6C_{2d}$	$R_\alpha T_\alpha, CT_\alpha$	шесть диагональных осей второго порядка по две в каждой координатной плоскости $[011], [01\bar{1}], [101], [10\bar{1}], [110], [1\bar{1}0]$	-1
$3\bar{C}_{2h}$	$D_2, D_2S_\gamma$	три оси симметрии второго порядка в одной плоскости под углом $\pi/3$ : $[010], [\sqrt{3}\bar{1}0], [\sqrt{3}10]$	-1
$3C_{2h}$	$D_1, D_1S_\gamma$	три оси симметрии второго порядка в одной плоскости под углом $\pi/3$ : $[100], [1\sqrt{3}0], [\bar{1}\sqrt{3}0]$	-1
$4C_{3h}$ $4C_{3h}^2$	$M_2, D_\alpha M_2$ $M_1, D_\alpha M_1$	четыре оси симметрии четвертого порядка $[111], [\bar{1}\bar{1}1], [\bar{1}\bar{1}1], [1\bar{1}\bar{1}]$	0
$8C_3$	$M_\gamma, D_\alpha M_\gamma$	четыре оси симметрии четвертого порядка	0
$2\bar{C}_{3z}$	$S_\gamma$	одна ось симметрии второго порядка $Ox^3$	0
$2\bar{C}_{4z}$	$R_1T_3, R_2T_3$	одна ось четвертого порядка $Ox^3$	1
$6C_{4d}$	$R_\alpha T_\beta$	три оси четвертого порядка $Ox^\alpha$	1
$4S_{6h}$ $4S_{6h}^5$	$CM_2, R_\alpha M_2$ $CM_1, R_\alpha M_1$	четыре зеркально-поворотные оси третьего порядка $[111], [\bar{1}\bar{1}1], [1\bar{1}\bar{1}], [\bar{1}\bar{1}\bar{1}]$	0
$8S_6$	$CM_\gamma, R_\alpha M_\gamma$	четыре зеркально-поворотные оси третьего порядка	0

Таблица 3.3. (продолжение)

$2\bar{S}_{4z}$	$D_1T_3, D_2T_3$	две зеркально-поворотные оси четвертого порядка $Ox^1, Ox^2$	-1
$6S_4$	$D_\alpha T_\beta$	три зеркально-поворотные оси четвертого порядка $Ox^\alpha$	-1
$2\bar{S}_{3z}$	$R_3S_\gamma$	одна зеркально-поворотная ось $Ox^3$	-1
$/\sigma_x/\sigma_y/\sigma_z/$	$/R_1/R_2/R_3/$	одна плоскость симметрии, ортогональная $Ox^\alpha$	1
$3\sigma_h$	$R_1, R_1S_\gamma$	три плоскости симметрии под углами $\pi/3$ , параллельные оси $Ox^3$ : $(100), (1\sqrt{3}0), (\bar{1}\sqrt{3}0)$	1
$3\bar{\sigma}_h$	$R_2, R_2S_\gamma$	три плоскости симметрии под углами $\pi/3$ , параллельные оси $Ox^3$ : $(010), (\sqrt{3}\bar{1}0), (\sqrt{3}10)$	1
$3\sigma$	$R_\alpha$	три плоскости симметрии, ортогональные $Ox^\alpha$	1
$2\bar{\sigma}_z$	$R_1, R_2$	две плоскости симметрии, ортогональные $Ox^1, Ox^2$	1
$2\bar{\sigma}_d$	$T_3, D_3T_3$	две диагональные плоскости симметрии $(110), (\bar{1}\bar{1}0)$	1
$6\sigma_d$	$T_\alpha, D_\alpha T_\alpha$	шесть диагональных плоскостей симметрии	1

В табл.3.4 приведены элементы симметрии для непрерывных групп.

Здесь индексы  $\alpha, \beta$  пробегают значения 1, 2, 3, причем всюду  $\alpha \neq \beta$ ; индекс  $\gamma$  принимает значения 1, 2. Буквы  $C$  означают оси симметрии,  $S$  – зеркально-поворотные оси,  $\sigma$  – плоскости симметрии. Цифра в нижнем индексе означает порядок оси, буквы  $x, y, z$  в индексе означают координатные оси  $Ox^\alpha$ , буква  $h$  – признак гексагональной системы, индекс  $d$  указывает на диагональные плоскости. Цифры перед буквами  $C, S$  и  $\sigma$  означают число элементов в классе. Цифры в верхнем индексе, например,  $C_{4z}^3$  указывают на то, что преобразования симметрии, описываемые матрицами данного класса, также можно получить

трехкратным применением операции  $C_{4z}$  (повороты на  $-\pi/2$  и  $\pi/2$ , соответственно).

Наклонные черты отделяют один класс от другого. Разъяснение объекта  $\chi(A)$  будет дано в §3.7.

Заметим, что одни и те же матрицы в разных группах могут образовывать классы сопряженных элементов, а могут – нет.

Таблица 3.4.

Класс сопряженных элементов	Элементы группы в классе	Элементы симметрии	Характер матричного представления $\chi(A)$ класса
$C_{3\infty}$	$Q_3^\phi$	одна ось $Ox^3$ бесконечного порядка	$2 \cos \phi + 1$
$\sigma_{3\phi}$	$Q_2^\phi R_3$	одна зеркально-поворотная ось $Ox^3$ бесконечного порядка	$2 \cos \phi - 1$
$\sigma_\phi$	$R_\gamma Q_3^\phi$	одна плоскость симметрии	1
$C_2^\phi$	$D_\gamma Q_3^\phi$	одна ось второго порядка	-1
$C_\infty$	$Q_{\phi\chi\theta}$	одна произвольная ось бесконечного порядка	$\cos \theta + (1 + \cos \theta) \cos(\phi + \chi)$
$\sigma_\infty$	$R_\alpha Q_{\phi\chi\theta}$	одна произвольная плоскость симметрии	

В табл.3.5 представлены классы всех групп  $G_s$ , ( $s = 1 \dots 32$ ), при этом использованы обозначения классов из табл.3.3.

В этой же табл.3.5 приведены обозначения для групп симметрии, часто используемые в литературе, – это международные (по Герману-Могену) и по Шубникову. В этих обозначениях цифры указывают порядок осей симметрии,  $m$  – наличие плоскостей симметрии, знаки "/" или ":" означают, что плоскость симметрии перпендикулярна оси симметрии, а отсутствие этих знаков означает, что она параллельна.

Таблица 3.5.

Сингония	Класс симметрии	Группа симметрии $G_s$			Классы сопряженных элементов в группе
		но- мер $s$	междуна- родные обозна- чения	обозна- чение по Шуб- никову	
I. Триклинная	$E$ Триклинный	1.	1	1	$/E/$ $/E/I/$
		2.	$\bar{1}$	$\bar{2}$	
II. Моноклинная	$M$ Моноклинный	3.	m	m	$/E/\sigma_z/$ $/E/C_{2z}/$ $/E/I/$ $/C_{2z}/\sigma_z/$
		4.	2	2	
		5.	$2/m$	$2:m$	
III. Ромбическая	$O$ Ортотропный	6.	mm2	$2 \cdot m$	$/E/C_{2z}/$ $ \sigma_x/\sigma_y $ $/E/C_{2x}/$ $/C_{2y}/C_{2z}/$ $/E/I/$ $/C_{2x}/C_{2y}/$ $C_{2z}/\sigma_x/$ $ \sigma_y/\sigma_z $
		7.	222	2:2	
		8.	mmm	$m \cdot 2 \cdot m$	
IV. Тетрагональная	$T$ Тетрагональный	9.	$\bar{4}$	$\bar{4}$	$/E/C_{2z}/$ $/S_{4z}/S_{4z}^3/$ $/E/C_{2z}/$ $/C_{4z}/C_{4z}^3/$ $/E/I/C_{2z}/$ $/C_{4z}/C_{4z}^3/$ $S_{4z}/S_{4z}^3/\sigma_z/$
		10.	4	4	
		11.	$4/m$	4:m	
	$K_3$ квазитрансверсальноизотропный	12.	$\bar{4} 2m$	$\bar{4} \cdot m$	$/E/2\bar{S}_{4z}/C_{2z}/$ $2\bar{C}_{2z}/2\sigma_d/$ $/E/C_{2z}/2\bar{C}_{4z}/$ $2\bar{\sigma}_d/2\bar{\sigma}_z/$ $/E/C_{2z}/2\bar{C}_{2z}/$ $2\bar{C}_{2d}/2\bar{C}_{4z}/$ $/E/I/C_{2z}/$ $/2\bar{C}_{2z}/2\bar{C}_{2d}/$ $/2\bar{C}_{4z}/2\bar{S}_{4z}/$ $\sigma_z/2\bar{\sigma}_z/2\bar{\sigma}_d/$
		13.	4mm	4:2	
		14.	422	4:2	
		15.	$4/mmm$	$m \cdot 4:m$	

Таблица 3.5. (продолжение)

V. Ромбоэд- рическая (триго- нальная)	<i>A</i>	16.	3	3	$/E/C_{3z}/C_{3z}^2/$
	<i>A</i> -ромбо- эдрический	17.	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$/E/I/C_{3z}/C_{3z}^2/$
	<i>B</i>	18.	3m	3· m	$\bar{S}_6/S_6/$ $/E/2\bar{C}_{3z}/3\sigma_h/$
	<i>B</i> -ромбо- эдрический	19.	32	3:m	$/E/2\bar{C}_{3z}/3C_{2h}/$
VI. Гексаго- нальная	<i>H</i>	20.	$\bar{3}$ m	$\bar{6}$ · m	$/E/I/2\bar{C}_{3z}/$ $3C_{2h}/2S_6/3\sigma_h/$
		21.	$\bar{6}$	3:m	$/E/C_{3z}/C_{3z}^2/$
		22.	6	6	$S_{3z}/S_{3z}^2/\sigma_z/$
		23.	6/m	6:m	$/E/C_{3z}/C_{3z}^2/$ $C_{2z}/C_{6z}/C_{6z}^5/$
		24.	$\bar{6}$ m2	m·3:m	$/E/I/C_{3z}/C_{3z}^2/$ $/C_{2z}/C_{6z}/C_{6z}^5/$ $/S_{6z}^5/S_{6z}/S_{3z}/$ $/S_{3z}^2/\sigma_z/$ $/E/2\bar{C}_{3z}/3\bar{C}_{2h}/$
		25.	622	6:2	$/3\bar{S}_{3z}/\sigma_z/3\sigma_h/$ $/E/2\bar{C}_{3z}/$ $/2C_{6z}/C_{2z}/$ $/3C_{2h}/3\bar{C}_{2h}/$
		26.	6mm	6·m	$/E/2C_{3z}/2C_{6z}/$ $/C_{2z}/3\sigma_h/3\bar{\sigma}_h/$ $/E/I/2\bar{C}_{3z}/$ $/2C_{6z}/C_{2z}/$
VII. Куби- чес- кая	<i>K</i>	27.	6/mmm	m·6:m	$/3C_{2h}/3\bar{C}_{2h}/$ $/2C_{6z}/2S_{3z}/$ $/\sigma_z/3\sigma_h/3\bar{\sigma}_h/$
		28.	23	3/2	$/E/3C_2/$
		29.	$m\bar{3}$	$\bar{6}/2$	$/4C_{3h}^2/4C_{3h}/$ $/E/I/$
		30.	$\bar{4}3m$	3/4	$/3C_2/4C_{3h}^2/$ $4C_{3h}/4S_{6h}^5/$ $/4S_{6h}/3\sigma/$ $/E/2C_2/8C_3/$ $/6S_4/6\sigma_d/$
		31.	432	3/4	$/E/3C_2/8C_3/$ $/6C_{4d}/6C_{2d}/$

Таблица 3.5. (продолжение)

		32.	m3m	$\bar{6}/4$	$/E/I/3C_2/$ $/8C_3/6C_{4d}/$ $/6C_{2d}/8S_6/$ $/6S_4/6\sigma_d/3\sigma/$
	$T_3$ трансвер- сально- изотроп- ный	33. 34. 35. 36. 37.	$\infty$ $\infty/m$ $\infty m$ $\infty 2$ $\infty/mm$	$\infty$ $\infty:m$ $\infty \cdot m$ $\infty : 2$ $m \cdot \infty : m$	$/C_{3\infty}/$ $/C_{3\infty}/\sigma_{3\phi}/$ $/C_{3\infty}/\sigma_\phi/$ $/C_{3\infty}/C_2^\phi/$ $/C_{3\infty}/C_2^\infty/$ $/\sigma_\phi/\sigma_{3\phi}/$
	$I$ изот- ропный	38. 39.	$\infty/\infty$ $\infty\infty m$	$\infty/\infty$ $\infty/\infty:m$	$/C_\infty/$ $/C_\infty/\sigma_\infty/$

Результат представленного выше разбиения групп на классы сопряженных элементов можно оформить в виде следующей теоремы.

**ТЕОРЕМА 3.1.** Тело  $V$  симметрично относительно группы  $G$ , тогда и только тогда, когда оно обладает элементами симметрии, входящими в соответствующую группу  $G_s$ .

▼ Доказательство очевидно, так как выше мы установили взаимно-однозначное соответствие между группами  $G_s$  матриц преобразований из п.3.2.2 и группами из элементов симметрии, приведенных в табл.3.5. ▲

### 3.3.9. Тела с периодической структурой

В механике и физике важную роль играют такие конечные тела  $V$ , которые, периодически повторяясь, заполняют собой все пространство  $\mathbb{R}^3$ . Рассмотрим их.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.6.** Периодической структурой  $P_V$  называют объединение всех образов  $V_{n^\alpha}$  некоторого тела  $V$ , полученных с помощью отображений  $\psi_{n^\alpha}: V \rightarrow V_{n^\alpha} \subset \mathbb{R}^3$ , обладающих следующими свойствами:

1º каждое  $\psi_{n^\alpha}$  задается трансляционным преобразованием координат:

$$X^\alpha = X'^\alpha + n^\alpha a_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad (3.40)$$

где  $X'^i \in V$ ,  $X^i \in V_{n^\alpha}$ ,  $a_\alpha$  – числа, называемые периодами,  $n^\alpha$  – целые числа ( $n^1, n^2, n^3$ );

2º замкнутые области  $V_{n^\alpha}$  и  $V_{n^\beta}$  при  $n^\alpha \neq n^\beta$  могут иметь общими только граничные точки;

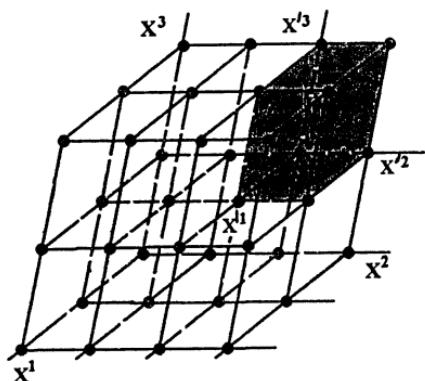


Рис. 3.25. Периодическая структура  $P_V$  кристалла с примитивной решеткой

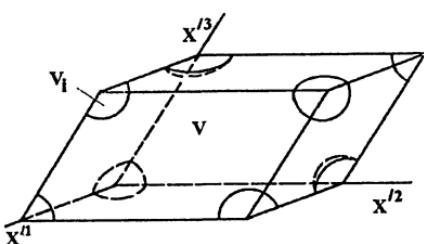


Рис. 3.26. Ячейка периодичности дисперсно армированного композиционного материала с примитивной решеткой

$\exists^\alpha$  объединение всех  $V_{n^\alpha}$  покрывает  $\mathbb{R}^3$ , т.е.  $\forall X^i \in \mathbb{R}^3 \exists V_{n^\alpha}: X^i \in V_{n^\alpha}$ .

Координаты  $X^{i'}$  могут быть, вообще говоря, криволинейными, в этом случае говорят, что  $P_V$  является *криволинейной периодической структурой*. Если же  $X^{i'}$  – прямолинейные (не обязательно ортогональные), то их называют *кристаллографическими координатами*.

Числа  $a_\alpha$  полагают фиксированными, а  $n^\alpha$  – переменными, меняя которые, получаем различные отображения  $\psi_{n^\alpha}$  тела  $V$ . Трансляционные преобразования (3.40) представляют собой частный случай линейных преобразований (3.1), когда  $A^i_j = \delta^i_j$  и  $A^\alpha = n^\alpha a_\alpha$ . Тело  $V$ , образующее периодическую структуру, называют *ячейкой периодичности*.

Очевидно, что не всякое конечное тело  $V$  может образовывать периодическую структуру. В физике и механике чаще всего рассматривают ячейки периодичности в виде выпуклых многогранников. Если в вершины такого многогранника  $V$  поместить атомы кристалла (рис.3.25), полагая, что геометрически они соответствуют точкам пространства, а все остальное пространство считать "пустотой", то соответствующую периодическую структуру  $P_V$  называют *кристаллом с примитивной решеткой*. Из таких ячеек периодичности (решеток) состоят реальные кристаллы различных веществ. Аналогом кристаллической решетки является периодическая структура, в которой многогранник  $V$  представляет собой неоднородное тело со сферообразными подобластями  $V_i$ , центры которых располагаются в вершинах многогранника (рис.3.26). Если эти подобласти  $V_i$  рассматривать как наполнитель, а остальное пространство многогранника  $V$  как матрицу, то такую периодическую структуру называют *дисперс-*

но армированным композиционным материалом также с примитивной решеткой.

### 3.3.10. Решетки Бравэ

Существует всего только семь различных примитивных решеток, представляющих собой параллелепипеды, длины ребер которых равны периодам  $a_1, a_2, a_3$ , а углы между ними –  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ . Все они изображены на рис.3.27, там же указаны соответствующие значения периодов  $a_i$  и осевых углов  $\theta_i$ . Названия этих решеток являются производными от формы образованных ими тел, например, три различных угла  $\theta_i$  в каждой вершине дали основание для названия *триклининой решетки*; решетка с одним только из  $\theta_i$  непрямым углом названа *моноклинной* и т.п.

Кроме примитивных, существуют более сложные решетки, содержащие "точечные" атомы (или сферообразный наполнитель) в центре пары противолежащих граней (*базоцентрированные решетки*), или в центре всех граней (*гранецентрированные решетки*), или в центре симметрии решетки (*объемноцентрированные решетки*). Оказывается, что различных решеток, обладающих соответствующими симметриями, существует еще семь штук: базоцентрированные моноклинная и ромбическая; объемноцентрированные ромбическая, тетрагональная и кубическая, и гранецентрированные ромбическая и кубическая. Все они показаны на рис.3.27.

Совокупность из четырнадцати примитивных и перечисленных не-примитивных решеток называют *решетками Бравэ*.

Заметим, что для гексагональной и ромбоэдрической сингоний существуют дополнительные часто используемые решетки. Объединив три примитивные решетки гексагональной сингонии, получим новую уже непримитивную решетку, в основании которой лежит шестиугольник.

Для ромбоэдрической сингонии существует дополнительная непримитивная решетка с соотношением параметров как у гексагональной ( $a_1 = a_2 \neq a_3, \theta_1 = \theta_2 = 90^\circ, \theta_3 = 120^\circ$ ), но с двумя дополнительными внутренними "точечными" атомами, расположенными на главной диагонали с координатами  $X'^3 = a_3/3$  и  $2a_3/3$  (рис.3.28,б). Объединив три такие решетки, получим, как и для гексагональной сингонии, еще одну решетку, имеющую в основании шестиугольник (рис.3.28,в).

### 3.3.11. Симметрии решеток Бравэ

Совпадение названий семи примитивных решеток с названиями групп  $G_s$ , объединенных в семь сингоний, объясняет следующая теорема.

**ТЕОРЕМА 3.2.** *Решетки Бравэ каждой сингонии являются симметричными относительно групп  $G_s$  из одноименной сингонии.*

▼ Очевидно, что доказательство достаточно провести только для мак-

Сингония	Решетки			
	Примитивная	Базоцентрированная	Объемно-центрированная	Гранецентрированная
I Триклиниальная $a_1 \neq a_2 \neq a_3 \neq a_1$ $\theta_1 \neq \theta_2 \neq \theta_3 \neq \theta_1$				
II Моноклиническая $a_1 \neq a_2 \neq a_3 \neq a_1$ $\theta_1 = \theta_2 = 90^\circ \neq \theta_3$				
III Ромбическая $a_1 \neq a_2 \neq a_3 \neq a_1$ $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 90^\circ$				
IV Тетрагональная $a_1 = a_2 \neq a_3$ $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 90^\circ$				
V Ромбоэдрическая $a_1 = a_2 \neq a_3$ $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 \neq 90^\circ$				
VI Гексагональная $a_1 = a_2 \neq a_3$ $\theta_1 = \theta_2 = 90^\circ, \theta_3 = 120^\circ$				
VII Кубическая $a_1 = a_2 = a_3$ $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 90^\circ$				

Рис. 3.27. Решетки Бравэ

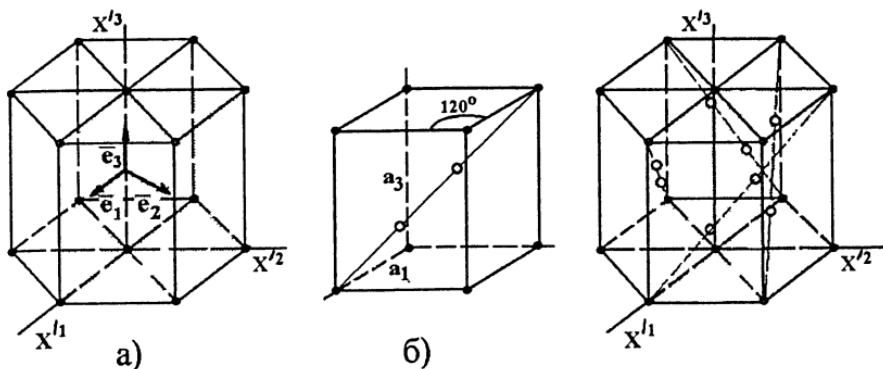


Рис. 3.28. Дополнительные решетки для гексагональной (а) и ромбоэдрической (б) и (в) сингоний

симальных групп в каждом классе, тогда для остальных групп, являющихся подгруппами максимальной группы, теорема также будет верна.

Введем кроме кристаллографических координат  $X^i$  еще одни – прямоугольные декартовы координаты  $x^i$  с базисом  $\bar{e}_i$ , называемым в соответствии с п.3.2.3, *кристаллофизическим базисом*. Точку  $O$  начала координат  $x^i$  поместим в центр симметрии решеток, что всегда возможно, так как у всех решеток она имеется и расположена на пересечении главных диагоналей. Оси  $Ox^i$  направим следующим образом: сингонии:

- триклинная, моноклинная:  $Ox^3 \perp (O'X'^1X'^2)$ ,  $Ox^2 \parallel OX'^2$ ;
- ромбическая, тетрагональная:  $Ox^i \parallel O'X'^i$ ;
- кубическая
- ромбоэдрическая, гексагональная:  $Ox^3 \perp (O'X'^1X'^2)$ ,  $Ox^2 \parallel OX'^2$ ,

где  $\parallel$  означает параллельность, а  $\perp$  – ортогональность оси к плоскости. Для ромбоэдрической и гексагональной сингоний выбираем решетки с шестиугольником в основании (рис.3.28).

Используем представление группы  $G_s$  с помощью элементов симметрии, приведенных в табл.3.5, и покажем, что решетки являются симметричными в построенных осях  $Ox^i$ .

Триклинная решетка, очевидно, симметрична относительно группы  $G_2$ , так как в ней только один элемент симметрии – центр симметрии.

Нетрудно убедиться, что моноклинная решетка, у которой единственный непрямой угол  $\theta_3$  лежит в плоскости  $\sigma_z$ , ортогональной оси  $Ox^3$ , будет симметричной относительно этой плоскости. Поскольку четыре грани этой решетки параллельны оси  $Ox^3$ , а две другие представляют собой параллелограммы, через пересечение диагоналей которого проходит ось  $Ox^3$  (см. рис.3.27), то эта ось будет осью симметрии второго порядка решетки.

Проверяя таким образом все решетки на симметричность относительно элементов симметрии из табл.3.5, убеждаемся в справедливости теоремы. Подробный анализ остальных решеток оставим в качестве упр.3.3.1. ▲

Докажем теперь обещанную ранее теорему, объясняющую, почему в точечных группах  $G$ , содержащихся повороты только на углы  $0, \pi/4, \pi/3, \pi/2$  и  $\pi$ .

**ТЕОРЕМА 3.3.** Решетки Бравэ могут иметь оси симметрии только  $n$ -го порядка, где  $n = 1, 2, 3, 4$  и  $6$ .

▼ Пусть имеется некоторая ось симметрии  $OX$   $n$ -го порядка тела  $V$ , образованного одной из решеток Бравэ. Тогда при любом повороте вокруг этой оси на угол  $\varphi$ , сохраняющем симметрию, каждая из вершин решетки (например, точка  $A$  на рис.3.29) перейдет снова в вершину (например, в точку  $A_1$ ), причем отрезок  $AA_1$  будет лежать на прямой  $l_{12}$ , параллельной плоскости поворота  $\Sigma$ . Если мы осуществим еще один поворот на угол  $\varphi$  в плоскости  $\Sigma$ , то рассматриваемая вершина перейдет в новую вершину – точку  $A_2$ , причем отрезок  $A_1A_2$  также будет лежать на прямой  $l_{23}$ , параллельной плоскости  $\Sigma$ . Так как при повороте вокруг оси расстояния от точек до оси не меняются, то при одном и том же угле поворота  $\varphi$  получаем, что  $|AA_1| = |A_1A_2|$ . Осуществляя  $n$  поворотов на угол  $\varphi$  вокруг оси  $OX$ , получаем, что все точки  $A_1 \dots A_n$  лежат в одной плоскости  $\Sigma'$ , параллельной плоскости поворота  $\Sigma$ , и образуют правильный  $n$ -угольник.

Но поскольку все  $A_1 \dots A_n$  – вершины решетки Бравэ, то у нее в одной плоскости могут лежать только четыре или шесть вершин. Так как фиксированная вершина при поворотах переходит не обязательно во все остальные, лежащие с ней в одной плоскости  $\Sigma'$ , то имеются еще две возможности образования правильного  $n$ -угольника: при  $n=2$  и  $3$ . Присоединяя тождественное преобразование с  $\varphi=0$ , окончательно получаем:  $n=1, 2, 3, 4$  и  $6$ . ▲

### 3.3.12. Периодические структуры для непрерывных групп

Примеры тел, симметричных относительно непрерывных групп  $G_s$ ,  $s = 33 \dots 39$ , приведены на рис.3.27. Периодическая структура может быть построена и для этих групп, однако ячейку периодичности в этом случае следует рассматривать как область, ограниченную только в одном направлении, например, по  $x^3$ :  $0 \leq x^3 \leq a_3/2$ . В результате получим слой (рис.3.30) или неоднородную ячейку периодичности в виде системы нескольких слоев. Преобразование трансляции (3.40) этой ячейки осуществляется только в направлении  $OX^3$ :  $X^3 = X'^3 + pa_3$ , где  $a_3$  – период. Такая ячейка периодичности является симметричной относительно групп трансверсально-изотропного класса.

Ячеек периодичности, ограниченных хотя бы по одному направлению, симметричных относительно групп изотропного класса не существует.

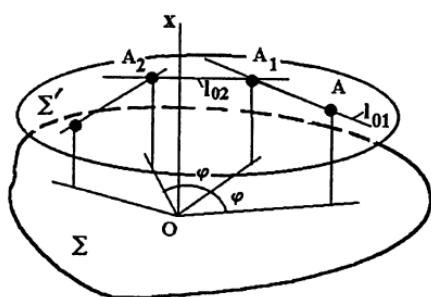


Рис. 3.29. К выводу теоремы 3.3

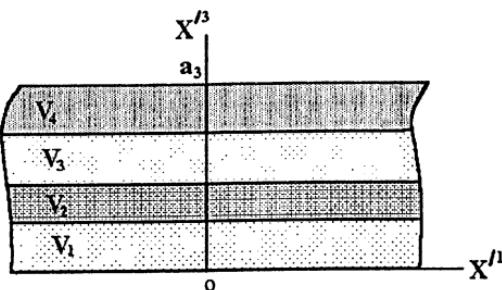


Рис. 3.30. Ячейка периодичности трансверсально-изотропной периодической структуры

### Упражнения к § 3.3.

**Упражнение 3.3.1.** Доказать теорему 3.2 для ромбической, тетрагональной, кубической, ромбоэдрической и гексагональной сингоний.

## § 3.4. Матричные представления групп преобразований

### 3.4.1. Тензорное произведение матриц

В п.3.2.1 мы ввели понятие группы преобразований  $G_s$ , и каждому ортогональному преобразованию координат в трехмерном пространстве поставили в соответствие матрицу  $A^i{}_j$  размером  $3 \times 3$ , в результате получили группы  $G_s$  ( $s = 1, \dots, 39$ ) из матриц  $3 \times 3$ . Однако это не единственный способ такого соответствия. Каждому преобразованию можно поставить в соответствие *тензорное* (или *прямое*, или его еще называют *кронекеровским*) произведение матриц  $A^{i_1}{}_{j_1} A^{i_2}{}_{j_2}$  или двойное тензорное произведение  $A^{i_1}{}_{j_1} A^{i_2}{}_{j_2} A^{i_3}{}_{j_3}$ , или, вообще, полиадное произведение матриц  $A^{i_1}{}_{j_1} \dots A^{i_n}{}_{j_n}$ . При этом в качестве  $A^i{}_j$  в этих произведениях выбирается та или иная матрица из групп  $G_1 \dots G_{39}$ .

Такие тензорные произведения играют важную роль в теории индифферентных тензоров (см. далее гл.4).

Полиадное произведение матриц в данном случае удобно рассматривать не как компоненты тензора ранга  $2n$ , а как матрицу размером  $3^n \times 3^n$ . Будем обозначать такие матрицы рекуррентным способом: введем последовательность матриц  $A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(n)}$  размерами  $3 \times 3$ ,  $3^2 \times 3^2, \dots, 3^n \times 3^n$  соответственно, которые имеют следующий вид:

матрица первого уровня

$$A^{(1)} = (A^{(1)i})_j = (A^i{}_j), \quad (3.41)$$

матрица второго уровня

$$A^{(2)} = (A^{(2)i})_{9 \times 9} = \begin{pmatrix} A^1{}_1 A^{(1)} & A^1{}_2 A^{(1)} & A^1{}_3 A^{(1)} \\ A^2{}_1 A^{(1)} & A^2{}_2 A^{(1)} & A^2{}_3 A^{(1)} \\ A^3{}_1 A^{(1)} & A^3{}_2 A^{(1)} & A^3{}_3 A^{(1)} \end{pmatrix}. \quad (3.42)$$

Здесь каждый элемент, например,  $A^1{}_2 A^{(1)}$  есть матрица  $A^i{}_j$  ( $3 \times 3$ ), элементы которой умножаются на  $A^1{}_2$ :

$$A^1{}_2 A^{(1)} = \begin{pmatrix} A^1{}_2 A^1{}_1 & A^1{}_2 A^1{}_2 & A^1{}_2 A^1{}_3 \\ A^1{}_2 A^2{}_1 & A^1{}_2 A^2{}_2 & A^1{}_2 A^2{}_3 \\ A^1{}_2 A^3{}_1 & A^1{}_2 A^3{}_2 & A^1{}_2 A^3{}_3 \end{pmatrix}. \quad (3.43)$$

Тогда матрица  $A^{(n)}$   $n$ -го уровня имеет вид:

$$\begin{aligned} A^{(n)} = (A^{(n)i})_{3^n \times 3^n} &= \begin{pmatrix} A^1{}_1 A^{(n-1)} & A^1{}_2 A^{(n-1)} & A^1{}_3 A^{(n-1)} \\ A^2{}_1 A^{(n-1)} & A^2{}_2 A^{(n-1)} & A^2{}_3 A^{(n-1)} \\ A^3{}_1 A^{(n-1)} & A^3{}_2 A^{(n-1)} & A^3{}_3 A^{(n-1)} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} A^{(n)1}_1 & \dots & A^{(n)1}_l \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A^{(n)l}_1 & \dots & A^{(n)l}_l \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.44)$$

ее размерность  $l \times l$ , где  $l = 3^n$ .

Формула (3.44) для матрицы  $A^{(n)}$   $n$ -го уровня может быть символьически записана как тензорное произведение матрицы  $A = A^{(1)}$  на матрицу  $A^{(n-1)}$  ( $n - 1$ )-го уровня:

$$A^{(n)} = A^{(1)} \otimes A^{(n-1)}. \quad (3.45)$$

Очевидно, что матрица  $A^{(n)}$  связана с матрицей первого уровня полиадным произведением  $n$ -го уровня:

$$A^{(n)} = \underbrace{A \otimes A \otimes \dots \otimes A}_{n \text{ штук}}, \quad (3.46)$$

поэтому будем говорить, что матрица  $A^{(n)}$   $n$ -го уровня, образованная таким способом *порождена* матрицей  $A$ . Саму матрицу  $A$  первого уровня будем называть *порождающей* матрицей.

### 3.4.2. Матричные представления группы

Рассмотрим теперь не одну, а множество матриц  $A^{(1)}$  размером  $3 \times 3$ , принадлежащих какой-либо группе  $G_s$ , тогда соответствующие матрицы  $A^{(n)}$   $n$ -го уровня образуют некоторое множество  $D_s^n$  матриц размером  $3^n \times 3^n$ .

**ТЕОРЕМА 3.4.** *Множество  $D_s^n$  матриц  $A^{(n)}$  образует группу.*

▼ В самом деле, вычисляя скалярное произведение двух матриц  $A^{(n)}$  и  $H^{(n)}$ , порожденных двумя матрицами  $A, H \in G_s$ , по правилам обычного перемножения матриц (2.22) получаем:

$$\begin{aligned} A^{(n)} \cdot H^{(n)} &= (A^{(n)i})_j H^{(n)j}) = \\ &= \begin{pmatrix} A^1{}_1 H^1{}_1 A^{(n-1)} H^{(n-1)} & \dots & A^1{}_1 H^1{}_1 A^{(n-1)} H^{(n-1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A^3{}_1 H^1{}_1 A^{(n-1)} H^{(n-1)} & \dots & A^3{}_1 H^1{}_3 A^{(n-1)} H^{(n-1)} \end{pmatrix}, \quad (3.47) \end{aligned}$$

т.е. матрицы  $A^{(n-1)}, H^{(n-1)}$  и матрицы  $A^s{}_l, H^l{}_t$  перемножаются независимо.

Для матриц первого уровня имеем:

$$(A^{(1)} \cdot H^{(1)}) = (A^i{}_j H^j{}_k). \quad (3.48)$$

Таким образом, снова получаем матрицу  $A^{(n)} \cdot H^{(n)}$  того же строения, что и исходные  $A^{(n)}, H^{(n)}$ , порождающая ее матрица  $A^i{}_j H^j{}_k$  также принадлежит группе  $G_s$ . Следовательно, операция произведения матриц  $n$ -го уровня (3.47) отображает множество  $D_s^n$  в себя.

Если в качестве  $H^i{}_j$  выбрать обратную к  $A^i{}_j$  матрицу  $B^i{}_j$ , то по правилу (3.47) перемножения получим, очевидно, единичную матрицу размером  $3^n \times 3^n$ :

$$A^{(n)} \cdot H^{(n)} = E^{(n)} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.49)$$

Эту же матрицу можно получить из (3.44), если в качестве  $A^i{}_j$  взять  $\delta_j^i$ . Умножение такой матрицы  $E^{(n)}$  на  $A^{(n)}$ , очевидно, будет всегда давать  $A^{(n)}$ .

Если  $A^i{}_j$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) – ортогональные матрицы, то все матрицы  $A^{(n)i}_j$  ( $i, j = 1 \dots l$ ) также будут ортогональными. Это следует из формулы перемножения матриц (3.47), если в качестве  $H^{(n)}$  взять

матрицу, порожденную транспонированной матрицей  $H_j^i = A_j^{(i)}$ . Таким образом, множество  $D_s^n$  матриц  $n$ -го уровня  $A^{(n)}$  действительно образует группу. ▲

Итак, одной и той же группе  $G_s$  ортогональных преобразований (3.1) можно поставить в соответствие различные группы  $D_s^n$  матриц при разных  $n$ , называемые *матричными представлениями группы  $G_s$* ,  $n$ -го уровня.

Заметим, что, вообще говоря, матричные представления можно ввести для произвольной группы  $G_s$ , не относящейся к группам линейных преобразований координат.

### 3.4.3. Изомерные матричные представления

Пусть теперь имеется некоторая невырожденная матрица  $S$  того же порядка  $l = 3^n$ , что и матрица  $A^{(n)}$ . Тогда, образуя с каждым из элементов  $A^{(n)}$  группы  $D_s^n$  новую матрицу  $l$ -го порядка

$$A'^{(n)} = S^{-1} \cdot A^{(n)} \cdot S, \quad \det S \neq 0, \quad (3.50)$$

получим еще одно множество матриц  $A'^{(n)}$   $n$ -го уровня. Это множество также образует группу  $D_s'^n$ , так как произведение двух матриц  $A'^{(n)}$  и  $H'^{(n)}$  вида (3.50) снова есть матрица вида (3.50):

$$A'^{(n)} \cdot H'^{(n)} = (S^{-1} \cdot A^{(n)} \cdot S) \cdot (S^{-1} \cdot H^{(n)} \cdot S) = S^{-1} \cdot (A^{(n)} \cdot H^{(n)}) \cdot S. \quad (3.51)$$

Выбирая в качестве  $H'^{(n)}$  матрицу, обратную к  $A'^{(n)}$ , получим элемент  $(A'^{(n)})^{-1}$  – обратный к  $A'^{(n)}$ , который, очевидно, тоже имеет вид (3.44).

Группа матриц  $D_s'^n$  дает еще одно матричное представление  $n$ -го уровня группы  $G_s$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.7.** *Матричные представления  $D_s^n$  и  $D_s'^n$ , элементы которых связаны соотношением (3.50) называют изомерными (или эквивалентными).*

### 3.4.4. Приводимые и неприводимые представления

Для одной и той же группы  $G_s$  можно построить бесконечное число матричных представлений. Выше мы привели два способа их построения: с помощью тензорного произведения матриц (3.46) и с помощью невырожденного преобразования (3.50). Укажем еще два способа, назовем их *третьим* и *четвертым*.

Пусть имеется некоторое матричное представление группы  $G_s$ , с помощью матриц  $H_a$   $n$ -го порядка и второе представление той же

группы с помощью матриц  $B_a$   $m$ -го порядка. Тогда можно образовать квазидиагональные матрицы  $C_a$  ( $n + m$ )-го порядка, в которых  $H_a$  и  $B_a$  являются блоками (см. (2.45)):

$$C_a = \begin{pmatrix} H_a & 0 \\ 0 & B_a \end{pmatrix}. \quad (3.52)$$

Перемножение квазидиагональных матриц (см. п.2.2.4) снова дает квазидиагональную матрицу, поэтому все матрицы  $C_a$ , построенные по (3.52), дают еще одно матричное представление группы  $G_s$ .

Вообще говоря, из конечного числа  $k$  матричных представлений с помощью матриц  $H_a, B_a, \dots, P_a$  различного порядка можно всегда образовать новое матричное представление  $C_a$  с использованием квазидиагональных матриц вида:

$$C_a = \begin{pmatrix} H_a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_a \end{pmatrix}. \quad (3.53)$$

Четвертый способ является комбинацией третьего и второго: выбирая произвольную невырожденную матрицу  $S$  того же порядка, что и  $C_a$ , образуем новые матричные представления группы  $G_s$ :

$$C'_a = S^{-1} \cdot C_a \cdot S, \quad \det S \neq 0. \quad (3.54)$$

Матрицы  $C'_a$  в этом представлении, вообще говоря, уже не будут квазидиагональными.

Дадим теперь следующую классификацию.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.8.** *Матричное представление группы  $G_s$ , матрицы  $C'_a$  которого имеют квазидиагональный вид (3.53) с количеством блоков более одного, называют приведенным.*

Приведенное представление распадается на конечное число  $k$  матричных представлений с матрицами  $H_a, B_a, \dots, P_a$ , меньшего, чем  $C_a$  порядка.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.9.** *Матричное представление, матрицы  $C'_a$  которого не имеют квазидиагонального вида, но могут быть приведены к нему с помощью невырожденного преобразования (3.54), называют приводимым.*

*Если же матричное представление не имеет квазидиагонального вида и не может быть приведено к нему с помощью какого-либо невырожденного преобразования (3.54), то такое представление называют неприводимым.*

В этой связи возникает задача: пусть имеется некоторое матричное представление группы  $G_s$ ; требуется установить является ли оно

приводимым, и если да, то требуется найти его квазидиагональный вид с максимально возможным количеством блоков (т.е., иначе говоря, найти все его неприводимые представления). Как будет показано далее в гл.4, эта задача непосредственно связана с нахождением числа  $k$  независимых компонент тензора.

### 3.4.5. Характеры матричных представлений

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.10.** *Характером матрицы  $A^{(n)}$  размером  $3^n \times 3^n$  называют сумму ее диагональных компонент (след), и обозначают его следующим образом:*

$$\chi(A^{(n)}) = \sum_{i=1}^l A_i^{(n)i}, \quad l = 3^n. \quad (3.55)$$

*Характером матричного представления  $n$ -го уровня для группы  $G_s$ , называется множество (конечное или континуальное) характеров всех матриц  $n$ -го уровня  $A^{(n)}$  данной группы:*

$$\chi(A_1^{(n)}) \dots \chi(A_a^{(n)}) \dots \chi(A_p^{(n)}), \quad G_s = \{A_1^{(n)}, \dots, A_a^{(n)}, \dots, A_p^{(n)}\}, \quad (3.56)$$

где  $p$  – общее число элементов в группе (для конечных групп), непрерывные группы будут рассмотрены далее в гл.4.

Учитывая структуру (3.44) матриц  $A^{(n)}$  можно установить соотношения между характерами матриц  $n$ -го и первого уровня:

$$\chi(A^{(n)}) = \chi(A_j^{(1)}) \chi(A^{(n-1)}) = \chi(A_j^{(1)}) \chi(A_j^{(1)}) \chi(A^{(n-2)}) \text{ и т.д.}, \quad (3.57)$$

т.е. получаем

$$\chi(A^{(n)}) = \chi^n(A). \quad (3.58)$$

На этом мы закончим краткое знакомство с теорией представлений групп, более подробно о них можно узнать, например, из [21].

### Упражнения к § 3.4.

**Упражнение 3.4.1.** Показать, что характеры матричных представлений  $\chi(A)$  групп  $G_s$ ,  $s = 1 \dots 38$ , вычисляются согласно данным табл.3.3 и 3.4.

**Упражнение 3.4.2.** Показать, что характеры матричного представления  $\chi(A)$  группы  $G_{39} = I$  имеют вид:

$$\chi(A) = \cos(\phi - \chi)(1 - \cos \theta)(-1)^\gamma + \cos \theta, \quad \text{если } A_j^i \in \{R_\gamma Q_{\phi \chi \theta}\}, \quad \gamma = 1, 2;$$

$$\chi(A) = \cos(\phi - \chi)(1 + \cos \theta) - \cos \theta, \quad \text{если } A_j^i \in \{R_3 Q_{\phi \chi \theta}\}.$$

## ГЛАВА 4

### ИНДИФЕРЕНТНЫЕ ТЕНЗОРЫ И ИНВАРИАНТЫ

---

#### § 4.1. Индифферентные тензоры

##### 4.1.1. Принцип Неймана

Выше в §3.3 были рассмотрены способы описания только геометрической симметрии тел. Реальные физические тела могут обладать определенным физическими свойствами (например, упругостью, сжимаемостью, теплопроводностью, тепловым расширением и т.п.), которые описываются некоторыми тензорами  ${}^n\Omega$ . Эти физические свойства также могут обладать определенной симметрией, т.е. зависеть определенным образом от преобразования координат. В этом случае говорят, что тела обладают *анизотропией* физических свойств.

Связь между геометрической симметрией и симметрией физических свойств устанавливает *принцип Неймана*, который говорит о том, что группа элементов симметрии любого физического свойства должна иметь подгруппу элементов геометрической симметрии.

Рассмотрим теперь способы описания симметрии физических свойств тел, которые определяются некоторым тензором  ${}^n\Omega$ . Начнем с формул преобразования компонент этого тензора при линейных преобразованиях (3.1).

##### 4.1.2. Преобразование компонент тензоров при линейных преобразованиях координат

При линейных преобразованиях (3.1) формулы (1.129) и преобразования компонент  $\Omega^{ij}$  произвольного тензора  $\Omega$  второго ранга имеют вид:

$$\begin{aligned}\bar{\Omega}^{ij} &= \Omega^{kl} B^i{}_k B^l{}_k, \\ \Omega^{kl} &= A^k{}_i A^l{}_j \bar{\Omega}^{ij}.\end{aligned}\tag{4.1}$$

Аналогичным образом преобразуются компоненты любого тензора  $n$ -ого ранга  ${}^n\Omega$ :

$${}^n\Omega = \Omega^{i_1 \dots i_n} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_n} = \bar{\Omega}^{i_1 \dots i_n} \bar{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \bar{e}_{i_n} \quad n \geq 1,$$

$$\Omega^{i_1 \dots i_n} = \bar{\Omega}^{j_1 \dots j_n} A^{i_1}_{j_1} \dots A^{i_n}_{j_n}. \tag{4.2}$$

### 4.1.3. Определение индифферентных тензоров

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1.** Если при любых линейных преобразованиях координат (3.1) компоненты  $\bar{\Omega}^{i_1 \dots i_n}$  некоторого тензора  ${}^n\Omega$  в базисе  $\bar{e}_i$  не изменяются, т.е.

$$\bar{\Omega}^{i_1 \dots i_n} = \Omega^{i_1 \dots i_n} \quad n \geq 1, \quad (4.3)$$

то такой тензор  ${}^n\Omega$  называется индифферентным относительно преобразований (3.1).

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2.** Если условие (4.3) неизменяемости компонент  $\bar{\Omega}^{i_1 \dots i_n}$  выполнено только для некоторой группы  $G_s$  линейных преобразований (3.1), то такой тензор  ${}^n\Omega$  называется индифферентным относительно группы  $G_s$ , а группу  $G_s$  в этом случае называют группой симметрии тензора  ${}^n\Omega$ .

Не все компоненты индифферентных тензоров являются независимыми, т.к. между ними существуют зависимости, вытекающие из (4.2) и (4.3):

$$\bar{\Omega}^{i_1 \dots i_n} = \bar{\Omega}^{j_1 \dots j_n} A_{j_1}^{i_1} \dots A_{j_n}^{i_n} \quad n \geq 1. \quad (4.4)$$

В частности, индифферентным является сам тензор линейных преобразований  $Q$ , компоненты которого совпадают с матрицами преобразований (см. п.3.1.3):

$$Q = A_j^i \bar{e}^j \otimes \bar{e}_i. \quad (4.5)$$

В самом деле, используя формулы (3.23), перейдем в новый базис:

$$Q = A_j^i \bar{e}^j \otimes \bar{e}_i = A_j^i A_i^k B_m^j e^m \otimes e_k = A_i^k \delta_m^i e^m \otimes e_k = A_i^k e^i \otimes e_k. \quad (4.6)$$

Отсюда и следует, что компоненты тензора  $Q$  в базисах  $\bar{e}_i$  и  $e_i$  совпадают.

Используя тензор линейных преобразований  $Q$ , можно сформулировать условие индифферентности тензора.

**ТЕОРЕМА 4.1.** Тензор  ${}^n\Omega$  является индифферентным относительно группы  $G_s$ , если и только если скалярное умножение на любой тензор линейных преобразований  $Q$  из группы  $G_s$  не изменяет значений этого тензора  ${}^n\Omega$ , т.е.

$${}^n\Omega = {}^n\Omega \underbrace{\dots}_{n} (\underbrace{Q \otimes \dots \otimes Q}_{n})^{(2n-1, 2n-3, \dots, 3, 1, 2, 4, \dots, 2n)}. \quad (4.7)$$

▼ Покажем эквивалентность формулировок (4.4) и (4.7). Тензор  $Q \otimes \dots \otimes Q$  имеет следующие компоненты:

$$\underbrace{Q \otimes \dots \otimes Q}_{n} = A_{k_1}^{i_1} \dots A_{k_n}^{i_n} \bar{e}^{k_1} \otimes \bar{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \bar{e}^{k_n} \otimes \bar{e}_{i_n}, \quad (4.8)$$

тогда (4.7) в компонентном виде записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{\Omega}^{i_1 \dots i_n} \bar{e}_{i_1} \dots \bar{e}_{i_n} &= \bar{\Omega}^{j_1 \dots j_n} \bar{e}_{j_1} \otimes \dots \otimes \bar{e}_{j_n} \dots A_{k_1}^{i_1} \dots A_{k_n}^{i_n} \bar{e}^{k_n} \otimes \dots \\ &\otimes \bar{e}^{k_3} \otimes \bar{e}^{k_1} \otimes \bar{e}_{i_1} \otimes \bar{e}_{i_2} \otimes \dots \otimes \bar{e}_{i_n} = \bar{\Omega}^{j_1 \dots j_n} A_{k_1}^{i_1} \dots A_{k_n}^{i_n} \times \\ &\times \delta_{j_n}^{k_n} \dots \delta_{j_1}^{k_1} \bar{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \bar{e}_{i_n} = \bar{\Omega}^{j_1 \dots j_n} A_{j_1}^{i_1} \dots A_{j_n}^{i_n} \bar{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \bar{e}_{i_n}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Сравнивая в этом равенстве первое и последнее выражения, очевидно, получаем, что формула (4.9) будет выполнена тогда и только тогда, когда выполнена формула (4.4), что и требовалось доказать. ▲

Получим теперь с помощью (4.7) условие индифферентности вектора  $\mathbf{a}$ :

$$\mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{Q} \quad \text{или} \quad \bar{a}^i = \bar{a}^j A_{j}^i, \quad (A_{j}^i) \in G_s \quad (4.10)$$

и тензора второго ранга  $\mathbf{T}$ :

$$\mathbf{T} = \mathbf{T} \cdot (\mathbf{Q} \otimes \mathbf{Q})^{(3124)} \quad \text{или} \quad \bar{T}^{ij} = \bar{T}^{kl} A_{k}^i A_{l}^j. \quad (4.11)$$

Это выражение можно также представить в виде (см. упр. 4.1.7):

$$\mathbf{T} = \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q}. \quad (4.12)$$

#### 4.1.4. Изомерные группы симметрии

Понятие (4.3) индифферентности тензора, а также альтернативные формулировки (4.4) и (4.7), непосредственно связаны с фиксированной системой координат  $x^i$ , к которой отнесена группа симметрии. Совершенно аналогично можно определить тензоры, индифферентные относительно группы  $G_s$ , отнесенной к другой ортогональной системе координат  $X'^i$  (см. п. 3.1.4 и 3.2.3):

$$\Omega'^{i_1 \dots i_n} = \Omega^{i_1 \dots i_n}, \quad (4.13)$$

где  $\Omega'^{i_1 \dots i_n}$  – компоненты тензора  ${}^n\Omega$  в системе координат  $X'^i$ :

$${}^n\Omega = \Omega'^{i_1 \dots i_n} e'_{i_1} \otimes \dots \otimes e'_{i_n} = \Omega^{i_1 \dots i_n} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_n}. \quad (4.14)$$

Тогда формулировка (4.4) будет иметь вид:

$$\Omega'^{i_1 \dots i_n} = \Omega'^{j_1 \dots j_n} A_{j_1}^{i_1} \dots A_{j_n}^{i_n}, \quad (4.15)$$

а формулировка (4.7) примет вид:

$${}^n\Omega = {}^n\Omega \underbrace{\dots \cdot}_{n} \underbrace{(\mathbf{Q}' \otimes \dots \otimes \mathbf{Q}')}_{n}, \quad (4.16)$$

где  $\mathbf{Q}'$  – тензор линейных преобразований группы  $G_s$ , определенный в базисе  $\mathbf{e}^{\prime i}$  (формула (3.25а)).

Для тензора второго ранга это соотношение имеет вид:

$$\mathbf{T} = \mathbf{Q}'^{iT} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q}'^i. \quad (4.17)$$

Один и тот же тензор  ${}^n\Omega$ , индифферентный относительно группы  $G_s$ , связанной с одной системой координат  $x^i$ , вообще говоря, не будет индифферентным относительно группы  $G_s$ , связанной с другой системой координат  $X'^i$ .

Если двум группам симметрии  $G_s$  и  $G'_s$  соответствуют тензоры линейных преобразований  $\mathbf{Q}$  и  $\mathbf{Q}'$ , которые являются изомерными (см.п.3.1.4), то такие группы также называют *изомерными*. Изомерным группам соответствуют, очевидно, одни и те же матрицы преобразований  $A^i{}_j$ , но различные оси анизотропии. Далее к обозначениям групп симметрии, у которых оси анизотропии отличаются от осей координат  $Ox^i$ , будем добавлять знак  ${}^n$ .

#### 4.1.5. Группа симметрии произвольного симметричного тензора второго ранга

В этой связи установим группу симметрии произвольного симметричного тензора второго ранга  $\mathbf{T}$ .

Как было установлено в п.1.6.1, для  $\mathbf{T}$  всегда существует три вещественных собственных значения  $\lambda_\alpha$  и три ортонормированных собственных вектора  $\overset{\circ}{\mathbf{e}}_\alpha$ :

$$\mathbf{T} = \sum_{\alpha=1}^3 \lambda_\alpha \overset{\circ}{\mathbf{e}}_\alpha \otimes \overset{\circ}{\mathbf{e}}_\alpha, \quad \text{т.е. } T'^{\alpha\beta} \equiv \lambda_\alpha \delta^{\alpha\beta},$$

таким образом,  $\mathbf{T}$  в базисе  $\overset{\circ}{\mathbf{e}}_\alpha$  имеет диагональный вид.

Выберем в качестве осей анизотропии линии действия векторов  $\mathbf{e}'_\alpha = \overset{\circ}{\mathbf{e}}_\alpha$  и покажем, что все матрицы из группы ортотропии  $G_8$ :  $E, C, R_\alpha$  и  $D_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$  (см. п.3.2.3) сохраняют без изменения компоненты  $T'^{ij}$ :

$$T'^{ij} = A^i{}_k A^j{}_l T'^{kl}, \quad A^i{}_k \in \{E, C, R_\alpha, D_\alpha\}. \quad (4.18)$$

В самом деле, поскольку все указанные матрицы, включая  $T'^{ij}$ , – диагональны, то это соотношение можно переписать в виде:

$$T'^{\beta\beta} = (A^\beta{}_\beta)^2 T'^{\beta\beta}. \quad (4.18a)$$

Но, в силу ортогональности матриц из группы  $G_8$ :  $(A^\beta{}_\beta)^2 = 1$ , и, следовательно, соотношения (4.18a) и (4.18) всегда выполнены.

Таким образом, доказана следующая теорема.

**ТЕОРЕМА 4.2.** Произвольный симметричный тензор второго ранга обладает группой симметрии  $G'_8$ , принадлежащей к классу ортотропии, оси анизотропии которой совпадают с собственными направлениями тензора.

#### 4.1.6. Тензорный базис

**ТЕОРЕМА 4.3.** Множество всех тензоров  $n$ -го ранга, индифферентных относительно фиксированной группы преобразований  $G_s$ , образует конечномерное линейное пространство размерности  $k \leq 3^n$ .

▼ Действительно, множество всех тензоров  $n$ -го ранга в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^3$  согласно теореме 2.29 образует линейное пространство  $T_3^{(n)}$  размерности  $m = n^3$ . Множество всех индифферентных тензоров  $n$ -го ранга  $I_3^{(n)}$  является подмножеством  $T_3^{(n)}$ . Очевидно, что это множество  $I_3^{(n)}$  само является подпространством, так как сумма  $({}^n\Omega_1 + {}^n\Omega_2)$  любых двух индифферентных относительно одной и той же группы  $G_s$  тензоров  ${}^n\Omega_1$  и  ${}^n\Omega_2$  тоже индифферентна, тоже самое относится и к произведению тензора  ${}^n\Omega$  на число. Поскольку размерность подпространства  $I_3^{(n)} \in T_3^{(n)}$  не может превосходить размерности пространства  $T_3^{(n)}$ , то, следовательно,  $\dim I_3^{(n)} = k \leq 3^n = m = \dim T_3^{(n)}$ . ▲

Следовательно, в пространстве  $I_3^{(n)}$  существует базис  ${}^n\Omega_{(\beta)}$   $\beta = 1 \dots k$ , называемый *тензорным базисом*, такой, что любой индифферентный тензор  ${}^n\Omega$  фиксированного ранга  $n$  можно представить в виде разложения по этому базису:

$${}^n\Omega = \sum_{\beta=1}^k {}^n\Omega_{(\beta)} \gamma_{\beta} \quad n \geq 1 \quad (4.19)$$

или

$$\Omega^{i_1 \dots i_n} = \sum_{\gamma=1}^k \gamma_{\beta} {}^n\Omega_{(\beta)}^{i_1 \dots i_n}, \quad (4.19a)$$

где  $\gamma_{\beta}$  - коэффициенты разложения.

#### 4.1.7. Образующие и направляющие тензоры

Тензоры, входящие в тензорные базисы  ${}^n\Omega_{(\gamma)}$  для различных  $n$ , взаимосвязаны между собой: для одной и той же группы преобразований  $G_s$  существует минимальный набор тензоров  $O_{s,\gamma}$   $\gamma = 1, 2, \dots, k_s$ , на основе которого с помощью только операций тензорного умножения, сложения и транспонирования образуются все тензоры  ${}^n\Omega_{(\gamma)}$  для

любого  $n \geq 1$ . Эти тензоры  $O_{s\gamma}$ , имеющие, вообще говоря, различный ранг, называют *образующими* тензорами группы  $G_s$ .

Образующие тензоры  $O_{s\gamma}$  обладают следующими свойствами:

- все они являются индифферентными относительно фиксированной группы преобразований  $G_s$  (группы симметрии);
- любой тензор, являющийся индифферентным относительно группы  $G_s$ , может быть образован из тензоров  $O_{s\gamma}$  с помощью операций тензорного умножения, транспонирования и сложения.

Образующие тензоры можно разложить по любому базису, например, по локальному  $R_i$ :

$$O_{s(\gamma)} = \bar{O}_{s(\gamma)}^{i_1 \dots i_n} \bar{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \bar{e}_{i_n} = O_{s(\gamma)}^{i_1 \dots i_n} R_{i_1} \otimes \dots R_{i_n}, \quad (4.20)$$

$$s = 1 \dots 39, \quad \gamma = 1 \dots k_s,$$

где  $\bar{O}_{s(\gamma)}^{i_1 \dots i_n}$  - компоненты образующих тензоров в декартовом базисе  $\bar{e}_i$ , а  $O_{s(\gamma)}^{i_1 \dots i_n}$  - в произвольном локальном базисе  $R_i$ . Все образующие тензоры  $O_{s(\gamma)}$ , в свою очередь, выражаются только через 17 тензоров, называемых *направляющими* тензорами. Перечислим их:

векторы:

$$\bar{e}_\alpha, \quad (4.21)$$

тензоры 2-го ранга:

$$\bar{e}_\alpha^2 = \bar{e}_\alpha \otimes \bar{e}_\alpha, \quad E, \quad \overset{\circ}{\Omega}_\alpha = \bar{e}_\beta \otimes \bar{e}_\gamma, \quad (4.22)$$

тензоры 3-его ранга:

$$\epsilon, \quad T_d = \sum_{\alpha, \beta, \gamma=1}^3 \bar{e}_\alpha \otimes \bar{e}_\beta \otimes \bar{e}_\gamma,$$

$$D_{3h} = \bar{e}_1 \otimes (\bar{e}_1 \otimes \bar{e}_1 - \bar{e}_2 \otimes \bar{e}_2) - \bar{e}_2 \otimes (\bar{e}_1 \otimes \bar{e}_2 + \bar{e}_2 \otimes \bar{e}_1), \quad (4.23)$$

тензоры 4-го ранга:

$$D_{3d} = \bar{e}_3 \otimes D_{3h}, \quad O_h = \sum_{\alpha=1}^3 \bar{e}_\alpha \otimes \bar{e}_\alpha \otimes \bar{e}_\alpha \otimes \bar{e}_\alpha, \quad (4.24)$$

$$T_h = \bar{e}_1^2 \otimes \bar{e}_2^2 + \bar{e}_2^2 \otimes \bar{e}_3^2 + \bar{e}_3^2 \otimes \bar{e}_1^2, \quad \alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha, \quad \alpha, \beta, \gamma = 1, 3,$$

тензор 6-го ранга:

$$D_{6d} = D_{3h} \otimes D_{3h}. \quad (4.25)$$

Используются также тензоры

$$\Omega_\alpha = \overset{\circ}{\Omega}_\alpha - \overset{\circ}{\Omega}_\alpha^T = \bar{e}_\beta \otimes \bar{e}_\gamma - \bar{e}_\gamma \otimes \bar{e}_\beta. \quad (4.26)$$

Компоненты этих направляющих тензоров в декартовом базисе  $\bar{e}_\alpha$  имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} (\bar{e}_\alpha^2)^{ij} &= \delta_\alpha^i \delta_\alpha^j, & (E)^{ij} &= \delta^{ij}, & (\Omega_\alpha)^{ij} &= \delta_\beta^i \delta_\gamma^j - \delta_\gamma^i \delta_\beta^j, & \overset{\circ}{\Omega}{}^{ij}{}_\alpha &= \delta_\beta^i \delta_\gamma^j, \\ (\epsilon)^{ijk} &= \epsilon^{ijk}, & (T_d)^{ijk} &= \sum_{\alpha=1}^3 \delta_\alpha^i (\delta_\beta^j \delta_\gamma^k + \delta_\gamma^j \delta_\beta^k), \\ (D_{3h})^{ijk} &= \delta_1^i (\delta_1^j \delta_1^k - \delta_2^j \delta_2^k) - \delta_2^i (\delta_1^j \delta_2^k + \delta_2^j \delta_1^k), \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} (D_{3d})^{ijkl} &= \delta_3^i (D_{3h})^{jkl}, & (O_h)^{ijkl} &= \sum_{\alpha=1}^3 \delta_\alpha^i \delta_\alpha^j \delta_\alpha^k \delta_\alpha^l, \\ (T_h)^{ijkl} &= \delta_1^i \delta_1^j \delta_2^k \delta_2^l + \delta_2^i \delta_2^j \delta_3^k \delta_3^l + \delta_3^i \delta_3^j \delta_1^k \delta_1^l, \\ (D_{6d})^{ijklmn} &= D_{3h}^{ijk} \otimes D_{3h}^{lmn}. \end{aligned}$$

Компоненты направляющих тензоров в произвольных криволинейных координатах  $X^i$  приведены в упр. 4.1.5.

#### 4.1.8. Образующие тензоры различных групп симметрии

Направляющие тензоры являются индифферентными по отношению к разным группам  $G$ , линейных преобразований декартовых координат  $x^i$ . Ниже приведены образующие тензоры групп  $G_1 \dots G_{29}$ , составленные из направляющих тензоров.

##### I. Триклинная сингония

$$O_{1(\gamma)} = \{\bar{e}_\gamma\} \quad k_1 = 3,$$

$$O_{2(\gamma)} = \{\bar{e}_\alpha^2, \overset{\circ}{\Omega}_\alpha\} \quad k_2 = 6, \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad \beta = 1, 2. \quad (4.28)$$

##### II. Моноклинная сингония

$$O_{3(\gamma)} = \{\bar{e}_\beta, \bar{e}_3^2\} \quad k_5 = 3; \quad O_{4(\gamma)} = \{\bar{e}_3, \epsilon, \overset{\circ}{\Omega}_3, \bar{e}_\beta^2\} \quad k_4 = 5;$$

$$O_{5(\gamma)} = \{E, \overset{\circ}{\Omega}_3, \bar{e}_\beta^2\} \quad k_3 = 4. \quad (4.29)$$

## III. Ромбическая сингония

$$\begin{aligned} \mathbf{O}_{6(\gamma)} &= \{\bar{\mathbf{e}}_3, \mathbf{E}, \bar{\mathbf{e}}_{\beta}^2\} \quad k_6 = 4, \quad \mathbf{O}_{7(\gamma)} = \{\mathbf{E}, \boldsymbol{\epsilon}, \bar{\mathbf{e}}_{\beta}^2\} \quad k_7 = 4, \\ \mathbf{O}_{8(\gamma)} &= \{\bar{\mathbf{e}}_{\alpha}^2\} \quad k_8 = 3. \end{aligned} \quad (4.30)$$

## IV. Тетрагональная сингония

$$\begin{aligned} \mathbf{O}_{9(\gamma)} &= \{\mathbf{E}, \bar{\mathbf{e}}_3^2, \Omega_3, \mathbf{T}_d\} \quad k_9 = 4, \quad \mathbf{O}_{10(\gamma)} = \{\mathbf{E}, \bar{\mathbf{e}}_3, \boldsymbol{\epsilon}, \mathbf{O}_h\} \quad k_{10} = 4; \\ \mathbf{O}_{11(\gamma)} &= \{\mathbf{E}, \bar{\mathbf{e}}_3^2, \Omega_3, \mathbf{O}_h\} \quad k_{11} = 4; \quad \mathbf{O}_{12(\gamma)} = \{\mathbf{E}, \bar{\mathbf{e}}_3^2, \mathbf{T}_d\} \quad k_{12} = 3; \\ \mathbf{O}_{13(\gamma)} &= \{\mathbf{E}, \bar{\mathbf{e}}_3, \mathbf{O}_h\} \quad k_{13} = 3, \quad \mathbf{O}_{14(\gamma)} = \{\mathbf{E}, \bar{\mathbf{e}}_3^2, \boldsymbol{\epsilon}, \mathbf{O}_h\} \quad k_{14} = 4; \\ \mathbf{O}_{15(\gamma)} &= \{\mathbf{E}, \bar{\mathbf{e}}_3^2, \mathbf{O}_h\} \quad k_{15} = 3. \end{aligned} \quad (4.31)$$

## V. Ромбоэдрическая сингония

$$\begin{aligned} \mathbf{O}_{16(\gamma)} &= \{\mathbf{E}, \bar{\mathbf{e}}_3, \mathbf{D}_{3h}\} \quad k_{16} = 3, \quad \mathbf{O}_{17(\gamma)} = \{\mathbf{E}, \bar{\mathbf{e}}_3^2, \Omega_3, \mathbf{D}_{3d}\} \quad k_{17} = 4, \\ \mathbf{O}_{18(\gamma)} &= \{\mathbf{E}, \bar{\mathbf{e}}_3, \mathbf{D}_{3h}\} \quad k_{18} = 3, \quad \mathbf{O}_{19(\gamma)} = \{\mathbf{E}, \bar{\mathbf{e}}_3^2, \boldsymbol{\epsilon}, \mathbf{D}_{3h}\} \quad k_{19} = 4, \\ \mathbf{O}_{20(\gamma)} &= \{\mathbf{E}, \bar{\mathbf{e}}_3^2, \mathbf{D}_{3d}\} \quad k_{20} = 3. \end{aligned} \quad (4.32)$$

## VI. Гексагональная сингония

$$\begin{aligned} \mathbf{O}_{21(\gamma)} &= \{\mathbf{E}, \bar{\mathbf{e}}_3^2, \Omega_3, \mathbf{D}_{3h}\}, \quad \mathbf{O}_{22(\gamma)} = \{\mathbf{E}, \bar{\mathbf{e}}_3, \boldsymbol{\epsilon}, \mathbf{D}_{6h}\}, \\ \mathbf{O}_{23(\gamma)} &= \{\mathbf{E}, \bar{\mathbf{e}}_3^2, \Omega_3, \mathbf{D}_{6h}\}, \quad \mathbf{O}_{24(\gamma)} = \{\mathbf{E}, \bar{\mathbf{e}}_3^2, \mathbf{D}_{3h}\}, \\ \mathbf{O}_{25(\gamma)} &= \{\mathbf{E}, \bar{\mathbf{e}}_3^2, \boldsymbol{\epsilon}, \mathbf{D}_{6h}\}, \quad \mathbf{O}_{26(\gamma)} = \{\mathbf{E}, \bar{\mathbf{e}}_3, \mathbf{D}_{6h}\}, \\ \mathbf{O}_{27(\gamma)} &= \{\mathbf{E}, \bar{\mathbf{e}}_3^2, \mathbf{D}_{6h}\}. \end{aligned} \quad (4.33)$$

## VII. Кубическая сингония

$$\begin{aligned} \mathbf{O}_{28(\gamma)} &= \{\mathbf{E}, \boldsymbol{\epsilon}, \mathbf{T}_h\} \quad k_{28} = 3, \quad \mathbf{O}_{29(\gamma)} = \{\mathbf{E}, \mathbf{T}_h\} \quad k_{29} = 2, \\ \mathbf{O}_{30(\gamma)} &= \{\mathbf{E}, \mathbf{T}_d\} \quad k_{30} = 2, \quad \mathbf{O}_{31(\gamma)} = \{\mathbf{E}, \boldsymbol{\epsilon}, \mathbf{O}_h\} \quad k_{31} = 3, \quad (4.34) \\ \mathbf{O}_{32(\gamma)} &= \{\mathbf{E}, \mathbf{O}_h\} \quad k_{32} = 2. \end{aligned}$$

*Класс трансверсальной изотропии*

$$\begin{aligned} \mathbf{O}_{33(\gamma)} &= \{\mathbf{E}, \bar{\mathbf{e}}_3, \boldsymbol{\epsilon}\}, \quad \mathbf{O}_{34(\gamma)} = \{\mathbf{E}, \bar{\mathbf{e}}_3^2, \Omega_3\}, \quad \mathbf{O}_{35(\gamma)} = \{\mathbf{E}, \bar{\mathbf{e}}_3\}, \\ \mathbf{O}_{36(\gamma)} &= \{\mathbf{E}, \bar{\mathbf{e}}_3^2, \boldsymbol{\epsilon}\}, \quad \mathbf{O}_{37(\gamma)} = \{\mathbf{E}, \bar{\mathbf{e}}_3^2\}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

### Класс изотропии

$$\mathbf{O}_{38(\gamma)} = \{\mathbf{E}, \epsilon\}, \quad \mathbf{O}_{39(\gamma)} = \{\mathbf{E}\}, \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad \beta = 1, 2. \quad (4.36)$$

#### 4.1.9. Симметричные направляющие и образующие тензоры

Важный случай представляют симметричные тензоры второго ранга  $\mathbf{T}$  и четвертого ранга  $\Omega$ , при этом симметрия тензора четвертого ранга понимается как выполнение следующих условий (см. п.1.8.4):

$$\Omega = \Omega^{ijkl} \mathbf{R}_i \otimes \mathbf{R}_j \otimes \mathbf{R}_k \otimes \mathbf{R}_l, \quad \mathbf{T} = T^{ij} \mathbf{R}_i \otimes \mathbf{R}_j. \quad (4.37)$$

$$\Omega^{ijkl} = \Omega^{jikl} = \Omega^{ijlk} = \Omega^{klji}, \quad T^{ij} = T^{ji}.$$

Все симметричные тензоры  $\mathbf{T}$  и  $\Omega$ , являющиеся индифферентными (по условию (4.3)) относительно группы симметрии  $G_s$ , выражаются линейно через тензорный базис в виде (4.19). Тензорный базис симметричных тензоров в каждой группе строится из симметричных комбинаций образующих тензоров  $\mathbf{O}_{s(\gamma)}$ , а те, в свою очередь, — из симметричных комбинаций направляющих тензоров. Укажем эти симметричные тензоры (табл.4.1).

Табл. 4.1. Симметричные направляющие тензоры

Векторы:	$\bar{\mathbf{e}}_\alpha$
Тензоры 2-го ранга:	$\mathbf{O}_\alpha = \bar{\mathbf{e}}_\beta \otimes \bar{\mathbf{e}}_\gamma + \bar{\mathbf{e}}_\gamma \otimes \bar{\mathbf{e}}_\beta, \quad \bar{\mathbf{e}}_\alpha^2, \quad \mathbf{E}$
Тензоры 4-го ранга:	$\mathbf{O}_h, \quad \mathbf{D}_3 = \mathbf{D}_{3d}^{(\cdot)},$ $\overset{\circ}{\Omega}_{3h} = -(\overset{\circ}{\Omega}_3 \cdot \mathbf{O}_h)^{(\cdot)},$ $\overset{\circ}{\Omega}_{3d} = -(\mathbf{D}_{3d} \cdot \overset{\circ}{\Omega}_3^T)^{(\cdot)}$

Здесь введена операция  $(\cdot)$  симметрирования тензора 4-го ранга:

$$\mathbf{D}_{3d}^{(\cdot)} = \mathbf{D}_{3d}^{(1234)} + \mathbf{D}_{3d}^{(2134)} + \mathbf{D}_{3d}^{(3124)} + \mathbf{D}_{3d}^{(4123)}, \quad (4.38)$$

а  $\mathbf{D}_{3d}^{(2134)}$  означает транспонированный тензор четвертого ранга (см. п.1.8.3). Тензор  $\mathbf{O}_\alpha$  образован симметрированием тензора  $\overset{\circ}{\Omega}_\alpha$ :

$$\mathbf{O}_\alpha = \overset{\circ}{\Omega}_\alpha + \overset{\circ}{\Omega}_\alpha^T. \quad (4.39)$$

В декартовом базисе  $\bar{\mathbf{e}}_i$  эти тензоры имеют следующие компоненты:

$$(\bar{\mathbf{e}}_\alpha)^i = \delta_\alpha^i, \quad (\bar{\mathbf{e}}_\alpha^2)^{ij} = \delta_\alpha^i \delta_\alpha^j, \quad (\mathbf{E})^{ij} = \delta^{ij},$$

$$(\mathbf{O}_\alpha)^{ij} = \delta_\beta^i \delta_\gamma^j + \delta_\gamma^i \delta_\beta^j, \quad \alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha,$$

$$(\mathbf{O}_h)^{ijkl} = \sum_{\alpha=1}^3 \delta_\alpha^i \delta_\alpha^j \delta_\alpha^k \delta_\alpha^l, \quad (4.40)$$

$$(\Omega_{3h})^{ijkl} = (\delta_1^i \delta_2^j + \delta_2^i \delta_1^j)(\delta_1^k \delta_1^l - \delta_2^k \delta_2^l) + (\delta_1^i \delta_1^j - \delta_2^i \delta_2^j)(\delta_1^k \delta_2^l + \delta_2^k \delta_1^l),$$

$$\begin{aligned} (\Omega_{3d})^{ijkl} = & (\delta_1^i \delta_3^j + \delta_3^i \delta_1^j)(\delta_1^k \delta_2^l + \delta_2^k \delta_1^l) + (\delta_2^i \delta_3^j + \delta_3^i \delta_2^j)(\delta_1^k \delta_1^l - \delta_2^k \delta_2^l) + \\ & + (\delta_1^i \delta_2^j + \delta_2^i \delta_1^j)(\delta_1^k \delta_3^l + \delta_3^k \delta_1^l) + (\delta_1^i \delta_1^j - \delta_2^i \delta_2^j)(\delta_2^k \delta_3^l + \delta_3^k \delta_2^l), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{D}_3)^{ijkl} = & (\delta_1^i \delta_3^j + \delta_3^i \delta_1^j)(\delta_1^k \delta_1^l - \delta_2^k \delta_2^l) - (\delta_2^i \delta_3^j + \delta_3^i \delta_2^j)(\delta_1^k \delta_2^l + \delta_2^k \delta_1^l) + \\ & + (\delta_1^i \delta_1^j - \delta_2^i \delta_2^j)(\delta_1^k \delta_3^l + \delta_3^k \delta_1^l) - (\delta_1^i \delta_2^j + \delta_2^i \delta_1^j)(\delta_3^k \delta_2^l + \delta_2^k \delta_3^l). \end{aligned}$$

Для симметричных тензоров четного ранга образующие тензоры  $\mathbf{O}_{s(\gamma)}$  одинаковы внутри каждого класса и совпадают с образующими тензорами максимальных групп в классах (табл. 4.2).

Табл. 4.2. Симметричные образующие тензоры классов

$E$ - триклинический класс	$\mathbf{O}_{E(\gamma)} = \{\bar{\mathbf{e}}_\alpha\}$
$M$ - моноклинический класс	$\mathbf{O}_{M(\gamma)} = \{\bar{\mathbf{O}}_3, \bar{\mathbf{e}}_\alpha^2\}$
$O$ - класс ортотропии	$\mathbf{O}_{O(\gamma)} = \{\bar{\mathbf{e}}_\alpha^2\}$
$T$ - тетрагональный класс	$\mathbf{O}_{T(\gamma)} = \{E, \bar{\mathbf{e}}_3^2, \mathbf{O}_h, \Omega_{3h}\}$
$K_3$ - класс квазитрансверсальной изотропии	$\mathbf{O}_{K_3(\gamma)} = \{E, \bar{\mathbf{e}}_3^2, \mathbf{O}_h\}$
$A$ - ромбоэдрический класс	$\mathbf{O}_{A(\gamma)} = \{E, \bar{\mathbf{e}}_3^2, D_3, \Omega_{3d}\}$
$B$ - ромбоэдрический класс	$\mathbf{O}_{B(\gamma)} = \{E, \bar{\mathbf{e}}_3^2, D_3\}$
$H$ - гексагональный класс	$\mathbf{O}_{H(\gamma)} = \{E, \bar{\mathbf{e}}_3^2\}$
$K$ - класс квазизотропии	$\mathbf{O}_{K(\gamma)} = \{E, \mathbf{O}_h\}$
$T_3$ - класс трансверсальной изотропии	$\mathbf{O}_{T_3(\gamma)} = \{E, \bar{\mathbf{e}}_3^2\}$
$I$ - класс изотропии	$\mathbf{O}_{I(\gamma)} = \{E\}$

На основе этих образующих тензоров строятся тензорные базисы для индифферентных симметричных тензоров второго и четвертого рангов. Эти тензорные базисы будут приведены ниже в гл. 5.

#### 4.1.10. Симметричные направляющие тензоры третьего ранга

Для тензоров третьего ранга  ${}^3\Omega$  также можно ввести понятие симметрии. Наиболее часто в механике и физике встречаются тензоры, обладающие симметрией по второму и третьему индексам:

$${}^3\Omega = {}^3\Omega^{(132)} \quad \text{или} \quad \Omega^{ijk} = \Omega^{ikj}, \quad (4.41)$$

где

$${}^3\Omega = \Omega^{ijk} R_i \otimes R_j \otimes R_k.$$

Далее тензоры третьего ранга, обладающие такими свойствами, будем называть симметричными.

Тензорный базис (4.19) для индифферентных симметричных тензоров третьего ранга строится из представленных ниже симметричных комбинаций направляющих тензоров (4.21) - (4.25):

$$\bar{e}_\alpha, \quad \bar{e}_\alpha^2, \quad T_d, \quad D_{3h},$$

$$E_h = E \otimes \bar{e}_3 + (E \otimes \bar{e}_3)^{(132)}, \quad B_{3d} = T_d \cdot \bar{e}_3^2 + (T_d \cdot \bar{e}_3^2)^{(132)}, \quad (4.42)$$

$$O_{\alpha d} = \epsilon \cdot \bar{e}_\alpha^2 + (\epsilon \cdot \bar{e}_\alpha^2)^{(132)}, \quad A_{3h} = D_{3h} \cdot \Omega_3, \quad R_{3d} = \Omega_3 \cdot T_d,$$

$$N_{3d} = T_d \cdot \Omega_3 + (T_d \cdot \Omega_3)^{(132)}.$$

Для этих тензоров имеют место следующие соотношения (см. упр. 4.1.4):

$$B_{3d} = \bar{e}_1 \otimes O_1 + \bar{e}_2 \otimes O_2,$$

$$O_{\alpha d} = \bar{e}_\beta \otimes O_\beta - \bar{e}_\gamma \otimes O_\gamma, \quad \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3, \quad \alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha,$$

$$A_{3h} = \bar{e}_1 \otimes O_3 + \bar{e}_2 \otimes (\bar{e}_1^2 - \bar{e}_2^2), \quad (4.43)$$

$$R_{3d} = \bar{e}_1 \otimes O_2 - \bar{e}_2 \otimes O_1, \quad N_{3d} = 2\bar{e}_3 \otimes (\bar{e}_2^2 - \bar{e}_1^2) - R_{3d}.$$

Компоненты этих направляющих тензоров в декартовом базисе  $\bar{e}_\alpha$  имеют следующий вид:

$$\bar{E}_h^{ijk} = \delta^{ij} \delta_3^k + \delta^{ik} \delta_3^j, \quad \bar{B}_{3d}^{ijk} = \delta_1^i (\delta_2^j \delta_3^k + \delta_3^j \delta_2^k) + \delta_2^i (\delta_1^j \delta_3^k + \delta_3^j \delta_1^k),$$

$$\bar{O}_{\alpha d}^{ijk} = \delta_\beta^i (\delta_\gamma^j \delta_\alpha^k + \delta_\alpha^j \delta_\gamma^k) - \delta_\gamma^i (\delta_\alpha^j \delta_\beta^k + \delta_\beta^j \delta_\alpha^k), \quad (4.44)$$

$$\bar{A}_{3h}^{ijk} = \delta_1^i (\delta_2^j \delta_2^k + \delta_2^j \delta_1^k) + \delta_2^i (\delta_1^j \delta_1^k - \delta_2^j \delta_2^k),$$

$$\bar{R}_{3d}^{ijk} = \delta_1^i (\delta_3^j \delta_1^k + \delta_1^j \delta_3^k) - \delta_2^i (\delta_3^j \delta_2^k + \delta_2^j \delta_3^k),$$

$$\bar{N}_{3d}^{ijk} = \delta_2^i (\delta_2^j \delta_3^k + \delta_3^j \delta_2^k) - \delta_1^i (\delta_3^j \delta_1^k + \delta_1^j \delta_3^k) + 2\delta_3^i (\delta_2^j \delta_2^k - \delta_1^j \delta_1^k).$$

Построение из этих направляющих тензоров конкретных тензорных базисов для различных групп симметрии  $G_s$  будет выполнено далее в гл.5.

### Упражнения к § 4.1

**Упражнение 4.1.1.** Доказать, что если симметричный тензор второго ранга  $\bar{T}$  имеет только два различных собственных значения, например,  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ,  $\lambda_2 = \lambda_3$ , то его группой симметрии является  $G'_{34}$ , принадлежащая к классу  $T_3$  трансверсальной изотропии с осью трансверсальной изотропии вдоль  $\overset{\circ}{e}_1$ .

**Упражнение 4.1.2.** Показать, что если собственные значения симметричного тензора второго ранга  $\bar{T}$  все равны между собой, то его группа симметрии совпадает с  $G'_{39}$ , принадлежащей к классу изотропии (полная группа ортогональных преобразований).

**Упражнение 4.1.3.** Показать, что направляющие тензоры (4.27) являются индифферентными относительно соответствующих групп преобразований.

**Упражнение 4.1.4.** Доказать справедливость формул (4.43).

**Упражнение 4.1.5.** Показать, что в криволинейной системе координат  $x^i$  направляющие тензоры (4.27) имеют следующие компоненты:

$$\bar{e}_\alpha = \bar{P}_\alpha^i R_j, \quad \bar{e}_\alpha^2 = \bar{P}_\alpha^i \bar{P}_\alpha^j R_i \otimes R_j,$$

$$E = g^{ij} R_i \otimes R_j, \quad \Omega_\alpha = (\bar{P}_\beta^i \bar{P}_\gamma^j - \bar{P}_\beta^j \bar{P}_\gamma^i) R_i \otimes R_j,$$

$$\epsilon = \frac{1}{\sqrt{g}} \epsilon^{ijk} R_i \otimes R_j \otimes R_k, \quad T_d = \sum_{\alpha, \beta, \gamma=1}^3 \bar{P}_\alpha^i \bar{P}_\beta^j \bar{P}_\gamma^k R_i \otimes R_j \otimes R_k,$$

$$D_{3h} = \left( \bar{P}_1^i (\bar{P}_1^j \bar{P}_1^k - \bar{P}_2^j \bar{P}_2^k) - \bar{P}_2^i (\bar{P}_1^j \bar{P}_2^k + \bar{P}_2^j \bar{P}_1^k) \right) R_i \otimes R_j \otimes R_k,$$

$$D_{3d} = \left( \bar{P}_3^i \bar{P}_1^j (\bar{P}_1^k \bar{P}_1^l - \bar{P}_2^k \bar{P}_2^l) - \bar{P}_3^i \bar{P}_2^j (\bar{P}_1^k \bar{P}_2^l + \bar{P}_2^k \bar{P}_1^l) \right) R_i \otimes R_j \otimes R_k \otimes R_l,$$

$$O_h = \sum_{\alpha=1}^3 \bar{P}_\alpha^i \bar{P}_\alpha^j \bar{P}_\alpha^k \bar{P}_\alpha^l R_i \otimes R_j \otimes R_k \otimes R_l,$$

$$T_h = \left( \bar{P}_1^i \bar{P}_1^j \bar{P}_2^k \bar{P}_2^l + \bar{P}_2^i \bar{P}_2^j \bar{P}_3^k \bar{P}_3^l + \bar{P}_3^i \bar{P}_3^j \bar{P}_1^k \bar{P}_1^l \right) R_i \otimes R_j \otimes R_k \otimes R_l.$$

**Упражнение 4.1.6.** Показать, что имеют место следующие соотношения между направляющими тензорами:

$$\Omega_\alpha = \epsilon \cdot \bar{e}_\alpha, \quad E = \sum_{\alpha=1}^3 \bar{e}_\alpha^2.$$

**Упражнение 4.1.7.** Доказать, что из (4.11) следует (4.12).

**Упражнение 4.1.8.** Показать, что если компоненты тензора четвертого ранга  ${}^4\Omega$  удовлетворяют условиям симметрии (4.37) в какой-либо системе координат  $x^i$ , то в любой другой системе координат  $x^{i'}$ , полученной невырожденным преобразованием также будут выполнены эти же условия симметрии.

**Упражнение 4.1.9.** Доказать, что если тензор  ${}^n\Omega^{(m_1 \dots m_n)}$  – индифферентен, то любой транспонированный тензор  ${}^n\Omega^{(m_1 \dots m_n)}$  тоже является индифферентным.

**Упражнение 4.1.10.** Используя единственность решения уравнения  $T \cdot T^{-1} = E$ , доказать, что если симметричный невырожденный тензор второго ранга  $T$  индифферентен относительно какой-либо группы  $G_s$ , то обратный к нему тензор  $T^{-1}$  также будет индифферентным относительно той же группы  $G_s$ .

**Упражнение 4.1.11.** Используя единственность решения уравнения  ${}^4C \cdot {}^4C^{-1} = \Delta$ , доказать, что если тензор  ${}^4C$  является симметричным и индифферентным относительно группы  $G_s$ , то обратный к нему тензор  $C^{-1}$  также будет индифферентным относительно той же группы  $G_s$ .

**Упражнение 4.1.12.** Показать, что из (4.27) и табл. 4.1 следуют формулы (4.40) для симметричных направляющих тензоров в декартовой системе координат.

**Упражнение 4.1.13.** Записать в произвольной криволинейной системе координат компоненты симметричных направляющих тензоров  $O_3$ ,  $\Omega_{3h}$ ,  $\Omega_{3d}$  и  $D_{3d}$ .

**Упражнение 4.1.14.** Доказать, что тензор  $D_3$ , определяемый по (4.38), обладает условиями симметрии (4.37).

**Упражнение 4.1.15.** Показать, что ненулевыми компонентами тензора  $D_3$  являются

$$D_3^{1311} = 1, \quad D^{1322} = D^{2312} = -1.$$

**Упражнение 4.1.16.** Показать, что тензор  $D_{3d}$ , определенный по (4.38), обладает следующей симметрией компонент:

$$D_{3d}^{ijkl} = D_{3d}^{ikjl}, \quad D_{3d}^{ijkl} = D_{3d}^{ijlk}.$$

**Упражнение 4.1.17.** Показать, что единичный тензор четвертого ранга  $\Delta$  (1.252) можно выразить через направляющие тензоры:

$$\begin{aligned} \Delta &= \sum_{\alpha, \beta=1}^3 \bar{e}_\alpha \otimes \bar{e}_\beta \otimes \bar{e}_\alpha \otimes \bar{e}_\beta + \bar{e}_\alpha \otimes \bar{e}_\beta^2 \otimes \bar{e}_\alpha = \\ &= \frac{1}{2} \left( (E \otimes E)^{(1324)} + (E \otimes E)^{(1423)} \right). \end{aligned}$$

**Упражнение 4.1.18.** Показать, что тензор  $\Omega_{3h}$ , определяемый по (4.40), обладает условиями симметрии (4.37) и имеет только две отличные от нуля компоненты:

$$\Omega_{3h}^{1211} = 1, \quad \Omega_{3h}^{1222} = -1.$$

**Упражнение 4.1.19.** Показать, что если какие-либо компоненты, например, контравариантные (4.3), сохраняются при линейных преобразованиях, то любые другие: ковариантные, смешанные – также сохраняются при тех же преобразованиях.

**Упражнение 4.1.20.** Доказать, что если неособенный тензор второго ранга  $T$  индифферентен относительно группы  $G_s$ , то обратный к нему тензор  $T^{-1}$  также индифферентен относительно той же группы  $G_s$ .

## § 4.2. Число независимых компонент индифферентного тензора

Выше в пп.4.1.7 – 4.1.10 мы указали способ построения тензорного базиса (4.19) в пространстве  $\mathcal{I}_3^{(n)}$  индифферентных тензоров – с помощью образующих тензоров групп. Однако открытым остался вопрос о числе  $k$  – размерности пространства  $\mathcal{I}_3^{(n)}$  для различных  $n$ . Это число  $k$ , очевидно, совпадает с числом элементов в тензорном базисе (4.19), а также согласно теореме 2.32 – с числом независимых компонент тензора  ${}^n\Omega \in \mathcal{I}_3^{(n)}$ .

Формулы для числа  $k$  могут быть установлены с помощью теории матричных представлений групп, о которой говорилось в §3.4. Выводу этих формул посвящен данный раздел.

#### 4.2.1. Векторное представление компонент тензоров

Рассмотрим произвольный тензор  $n$ -го ранга  ${}^n\Omega$  с компонентами  $\bar{\Omega}^{i_1 \dots i_n}$  в декартовой системе координат  $Ox^i$ . Образуем из этих компонент координатный столбец из  $l = 3^n$  элементов:

$$\mathbf{a}_{(n)} = (a_{(n)}^1, \dots, a_{(n)}^l)^T, \quad l = 3^n. \quad (4.45)$$

Компоненты этого столбца  $a_{(n)}^1, \dots, a_{(n)}^l$  определим рекуррентным образом: представим столбец  $n$ -го уровня  $\mathbf{a}_{(n)}$  как совокупность трех столбцов  $(n-1)$ -го уровня  $\mathbf{a}_{(n-1)}^{i_1}$  ( $i_1 = 1, 2, 3$ ) длиной  $3^{n-1}$ :

$$\mathbf{a}_{(n)}^T = (\mathbf{a}_{(n-1)}^{1T}, \mathbf{a}_{(n-1)}^{2T}, \mathbf{a}_{(n-1)}^{3T}), \quad (4.46)$$

а столбец  $a_{(n-1)}^{i_1}$  – как совокупность трех столбцов  $(n - 2)$ -го уровня  
 $a_{(n-2)}^{i_1 i_2}$  и т.д.:

$$\mathbf{a}_{(n-1)}^{i_1 T} = (\mathbf{a}_{(n-2)}^{i_1 1T}, \mathbf{a}_{(n-2)}^{i_1 2T}, \mathbf{a}_{(n-2)}^{i_1 3T}), \quad (4.47)$$

• • • • • • • • •

$$\mathbf{a}_{(2)}^{i_1 \dots i_{n-2} T} = (\mathbf{a}_{(1)}^{i_1 \dots i_{n-2} 1T}, \mathbf{a}_{(1)}^{i_1 \dots i_{n-2} 2T}, \mathbf{a}_{(1)}^{i_1 \dots i_{n-2} 3T}).$$

Координатные столбцы первого уровня  $a_{(1)}^{i_1 \dots i_{n-1}}$  имеют длину, равную трем, и состоят из компонент тензора  $\tilde{\Omega}^{i_1 \dots i_n}$ :

$$\mathbf{a}_{(1)}^{i_1 \dots i_{n-1} T} = (\bar{\Omega}^{i_1 \dots i_{n-1} 1}, \bar{\Omega}^{i_1 \dots i_{n-1} 2}, \bar{\Omega}^{i_1 \dots i_{n-1} 3}), \quad (4.48)$$

$$i_1, \dots, i_{n-1} = 1, 2, 3.$$

Знак " $T$ " здесь, как и ранее, означает транспонирование – превращение столбцов в строки. Будем говорить, что координатный столбец  $\mathbf{a}_{(n)}$  порожден компонентами тензора  $\bar{\Omega}^{i_1 \dots i_n}$ .

Приведем пример формирования координатного столбца  $\mathbf{a}_{(2)}$  указанным способом для тензора второго ранга  $\Omega$  с компонентами  $\bar{\Omega}^{i_1 i_2}$ :

$$\mathbf{a}_{(1)}^{i_1 T} = (\bar{\Omega}^{i_1 1}, \bar{\Omega}^{i_1 2}, \bar{\Omega}^{i_1 3}), \quad (4.49)$$

$$\mathbf{a}_{(2)}^T = (\mathbf{a}_{(1)}^{1T}, \mathbf{a}_{(1)}^{2T}, \mathbf{a}_{(1)}^{3T}) = (\bar{\Omega}^{11}, \bar{\Omega}^{12}, \bar{\Omega}^{13}, \bar{\Omega}^{21}, \bar{\Omega}^{22}, \bar{\Omega}^{23}, \bar{\Omega}^{31}, \bar{\Omega}^{32}, \bar{\Omega}^{33}).$$

#### 4.2.2. Линейное преобразование $A^{(n)}$

Очевидно, что множество всех координатных столбцов  $\mathbf{a}_{(n)}$  заданного уровня образует линейное пространство  $L^{(n)}$  размерности  $l = 3^n$ .

При линейных преобразованиях координат (3.1) компоненты  $\bar{\Omega}^{i_1 \dots i_n}$  преобразуются по формуле (4.2):

$$\Omega^{i_1 \dots i_n} = A^{i_1}_{j_1} \dots A^{i_n}_{j_n} \bar{\Omega}^{j_1 \dots j_n}. \quad (4.50)$$

С помощью матрицы  $A^{(n)}$   $n$ -го уровня, введенной по (3.44), и координатных столбцов  $\mathbf{a}_{(n)}$   $n$ -го уровня это соотношение можно записать в матричном виде:

$$\mathbf{a}'_{(n)} = A^{(n)} \cdot \mathbf{a}_{(n)}, \quad (4.51)$$

где  $\mathbf{a}'_{(n)}$  – координатный столбец вида (4.45), порождаемый компонентами  $\Omega^{i_1 \dots i_n}$  тензора  $\Omega$  в системе координат  $X^i$ .

Соотношение (4.51) определяет линейное преобразование  $A^{(n)}$   $l$ -мерного линейного пространства  $L^{(n)}$  координатных столбцов  $\mathbf{a}_{(n)}$  в себя, а матрица  $A^{(n)}$   $n$ -го уровня есть матрица  $l \times l$  этого линейного преобразования.

#### 4.2.3. Индифферентные векторы $n$ -го уровня

Если тензор  ${}^n\Omega$  является индифферентным относительно какой-либо группы  $G$ , ортогональных преобразований в трехмерном пространстве, то его компоненты  $\bar{\Omega}^{i_1 \dots i_n}$  не меняются при любых преобразованиях вида (4.50) (см. формулу (4.7)):

$$\bar{\Omega}^{i_1 \dots i_n} = A^{i_1}_{j_1} \dots A^{i_n}_{j_n} \bar{\Omega}^{j_1 \dots j_n}, \quad (4.52)$$

где  $A^i_j$  – произвольная матрица третьего порядка из группы  $G_s$ .

С помощью матричной записи (4.51) соотношение (4.52) можно представить следующим образом:

$$\mathbf{a}_{(n)} = A^{(n)} \cdot \mathbf{a}_{(n)}. \quad (4.53)$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.3.** Вектор  $\mathbf{a}_{(n)}$   $l$ -мерного пространства  $\mathcal{L}^{(n)}$ , удовлетворяющий (4.53) для любых матриц  $A_a^{(n)}$  из группы  $D_s^n$ , назовем индифферентным вектором  $n$ -ого уровня относительно  $D_s^n$ .

Этот вектор, очевидно, порожден компонентами индифферентного тензора  $\bar{\Omega}^{i_1 \dots i_n}$ .

Сравнивая формулу (4.53) с соотношением (2.78) для собственных векторов матрицы  $A$  линейного преобразования, получаем, что индифферентный вектор  $\mathbf{a}_{(n)}$  является собственным вектором, соответствующим собственному значению  $\lambda = 1$ , для каждой матрицы  $A_a^{(n)} \in D_s^n$ .

Если же собственное значение  $\lambda = 1$  имеет кратность  $s$ , то, согласно теоремам 2.16 и 2.17, все собственные векторы матрицы  $A^{(n)}$ , соответствующие этому значению, образуют инвариантное подпространство  $\mathcal{L}_a^{(n)}$  размерности  $m \leq s$  в пространстве  $\mathcal{L}^{(n)}$ . В этом подпространстве  $\mathcal{L}_a^{(n)}$  можно выбрать базис  $\hat{\mathbf{e}}_1^{(n)} \dots \hat{\mathbf{e}}_m^{(n)}$ , тогда всякий индифферентный вектор  $\mathbf{a}_{(n)}$  будет выражаться через него.

Пусть теперь среди этих векторов  $\hat{\mathbf{e}}_1^{(n)} \dots \hat{\mathbf{e}}_m^{(n)}$  имеется  $k$  векторов ( $k \leq m$ ), которые являются собственными одновременно для всех матриц  $A_a^{(n)}$  из группы  $D_s^n$  (число  $k$  может быть равно и нулю). Эти  $k$  векторов не обязательно совпадают с первыми  $\hat{\mathbf{e}}_1^{(n)} \dots \hat{\mathbf{e}}_k^{(n)}$ , поэтому обозначим их как  $\overset{\circ}{\mathbf{e}}_1^{(n)}, \dots, \overset{\circ}{\mathbf{e}}_k^{(n)}$ .

Согласно теореме 2.18, линейная оболочка из них также образует инвариантное  $k$ -мерное подпространство  $\overset{\circ}{\mathcal{L}}^{(n)}$  в  $\mathcal{L}^{(n)}$ . Назовем его индифферентным подпространством. Тогда любой индифферентный вектор  $\mathbf{a}_{(n)}$ , принадлежащий  $\overset{\circ}{\mathcal{L}}^{(n)}$ , можно представить в виде суммы этих векторов:

$$\mathbf{a}_{(n)} = \sum_{\beta=1}^k \gamma_\beta \overset{\circ}{\mathbf{e}}_\beta^{(n)}. \quad (4.54)$$

Формула (4.54) является матричным аналогом формулы (4.19) разложения индифферентного тензора  ${}^n\Omega$  по тензорному базису группы  $G_s$ . Поэтому если мы найдем число элементов в базисе  $\overset{\circ}{\mathbf{e}}_1^{(n)}, \dots, \overset{\circ}{\mathbf{e}}_k^{(n)}$ , то найдем и искомое число  $k$  независимых компонент тензора  ${}^n\Omega$ .

#### 4.2.4. Приведение матричного представления к квазидиагональному виду

Рассмотрим подробнее введенное подпространство  $\overset{\circ}{\mathcal{L}}^{(n)}$ . Поскольку его базис  $\overset{\circ}{\mathbf{e}}_1^{(n)}, \dots, \overset{\circ}{\mathbf{e}}_k^{(n)}$  образует систему  $k$  линейно независимых векторов, которые соответствуют одному собственному значению  $\lambda = 1$

для любой матрицы  $A^{(n)}$  из  $D_s^n$ , то, согласно теореме 2.14, существует невырожденное преобразование  $S$ , которое приводит матрицу  $A^{(n)}$  к блочному виду (2.83):

$$A'^{(n)} = S^{-1} \cdot A^{(n)} \cdot S = \begin{pmatrix} E_k & | & \widehat{A}'_{12} \\ 0 & | & \widehat{A}'_{22} \end{pmatrix}, \quad (4.55)$$

где  $E_k$  – единичная матрица  $k$ -го порядка,  $\widehat{A}'_{12}$  – матрица размером  $k \times (l-k)$ ,  $\widehat{A}'_{22}$  – квадратная матрица  $(l-k)$ -го порядка.

Если вектор  $\mathbf{a}_{(n)}$  является индифферентным относительно всех матриц  $A_a^{(n)}$  группы  $D_s^n$ , то вектор

$$\mathbf{a}'_{(n)} = S^{-1} \cdot \mathbf{a}_{(n)} \quad (4.56)$$

будет индифферентным относительно всех блочных матриц  $A'^{(n)}$ , так как

$$A'^{(n)} \cdot \mathbf{a}'_{(n)} = S^{-1} \cdot A^{(n)} \cdot S \cdot S^{-1} \cdot \mathbf{a}_{(n)} = S^{-1} \cdot \mathbf{a}_{(n)} = \mathbf{a}'_{(n)}, \quad (4.57)$$

т.е.

$$\mathbf{a}'_{(n)} = S^{-1} \cdot A^{(n)} \cdot S \mathbf{a}'_{(n)}. \quad (4.58)$$

**Теорема 4.4.** Матрицу  $A^{(n)}$  можно привести не только к блочному, но и к квазидиагональному виду.

▼ Для доказательства рассмотрим матрицу  $S^{-1} \cdot S^{-1T}$   $l$ -го порядка. Эта матрица является симметричной и положительно-определенной, так как  $(S^{-1} \cdot S^{-1T})^T = S^{-1} \cdot S^{-1T}$ , тогда, согласно теореме 2.12, ее можно представить в виде произведения неособенной треугольной матрицы  $L$  на ее транспонированную:

$$S^{-1} \cdot S^{-1T} = L \cdot L^T, \quad \det L \neq 0. \quad (4.59)$$

С помощью этой матрицы  $L$   $l$ -го порядка введем новый вектор

$$\mathbf{a}''_{(n)} = L^{-1} \cdot \mathbf{a}'_{(n)} = G^{-1} \cdot \mathbf{a}_{(n)} \quad (4.60)$$

и новую матрицу

$$A''^{(n)} = L^{-1} \cdot A'^{(n)} \cdot L = G^{-1} \cdot A^{(n)} \cdot G, \quad (4.61)$$

где

$$G = S \cdot L. \quad (4.62)$$

Покажем, что  $A''^{(n)}$  тоже имеет блочный вид (4.55). Представляя матрицу  $L$  в блочном виде, по правилу (2.43) перемножения блочных матриц действительно получаем:

$$\begin{aligned} A''^{(n)} &= L^{-1} \cdot A'^{(n)} \cdot L = \\ &= \left( \begin{array}{c|c} \tilde{L}_{11}^{-1} & \tilde{L}_{12}^{-1} \\ \hline 0 & \tilde{L}_{22} \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|c} E_k & \tilde{A}'_{12} \\ \hline 0 & \tilde{A}_{22} \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|c} \tilde{L}_{11} & \tilde{L}_{12} \\ \hline 0 & \tilde{L}_{22} \end{array} \right) = \\ &= \left( \begin{array}{c|c} \tilde{L}_{11}^{-1} & \tilde{L}_{12}^{-1} \\ \hline 0 & \tilde{L}_{22}^{-1} \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|c} \tilde{L}_{11} & \tilde{L}_{12} + \tilde{A}_{12} - \tilde{L}_{22} \\ \hline 0 & \tilde{A}_{22} \cdot \tilde{L}_{22} \end{array} \right) = \\ &= \left( \begin{array}{c|c} E_k & \tilde{A}''_{12} \\ \hline 0 & \tilde{A}''_{22} \end{array} \right), \end{aligned} \tag{4.63}$$

где  $\tilde{L}_{11}$  и  $\tilde{L}_{11}^{-1}$  – верхние треугольные матрицы размером  $k \times k$  (см. упр.2.2.6);  $\tilde{L}_{22}$  и  $\tilde{L}_{22}^{-1}$  – верхние треугольные матрицы размером  $(l-k) \times (l-k)$ ;  $\tilde{L}_{12}^{-1}$ ,  $\tilde{L}_{12}$  и

$$\tilde{A}''_{12} = \tilde{L}_{11}^{-1} \cdot \tilde{L}_{12} + \tilde{L}_{11}^{-1} \cdot \tilde{A}_{12} \cdot \tilde{L}_{22} + \tilde{L}_{12}^{-1} \cdot \tilde{A}_{22} \cdot \tilde{L}_{22}$$

– матрицы размером  $k \times (l-k)$ , а  $\tilde{A}''_{22} = \tilde{L}_{22}^{-1} \cdot \tilde{A}_{22} \cdot \tilde{L}_{22}$  – матрица  $(l-k) \times (l-k)$ .

Матрица  $G$  – ортогональная, так как

$$G \cdot G^T = S \cdot L \cdot (S \cdot L)^T = S \cdot L \cdot L^T \cdot S = S \cdot S^{-1} \cdot S^{-1T} \cdot S = E^{(n)}. \tag{4.64}$$

Тогда и  $A''^{(n)}$  является ортогональной матрицей, поскольку  $A^{(n)}$  – ортогональная (см. п.3.4.2). В самом деле, умножая  $A''^{(n)}$  на свою транспонированную, получаем:

$$\begin{aligned} A''^{(n)} \cdot A''^{(n)T} &= (G^{-1} \cdot A^{(n)} \cdot G) \cdot (G^{-1} \cdot A^{(n)} \cdot G)^T = \\ &= G^{-1} \cdot A^{(n)} \cdot G \cdot G^T \cdot A^{(n)T} \cdot G^{-1T} = \\ &= G^{-1} \cdot A^{(n)} \cdot A^{(n)T} \cdot G^{-1T} = G^{-1} \cdot G^{-1T} = E^{(n)}. \end{aligned} \tag{4.65}$$

Учитывая блочную структуру (4.63) и ортогональность матрицы  $A''^{(n)}$ , получаем:

$$\begin{aligned} A''^{(n)} \cdot A''^{(n)T} &= \left( \begin{array}{c|c} E_k & \tilde{A}''_{12} \\ \hline 0 & \tilde{A}''_{22} \end{array} \right) \cdot \left( \begin{array}{c|c} E_k & 0 \\ \hline \tilde{A}''_{12}^T & \tilde{A}''_{22}^T \end{array} \right) = \\ &= \left( \begin{array}{c|c} E_k + \tilde{A}''_{12} \cdot \tilde{A}''_{12}^T & \tilde{A}''_{12} \cdot \tilde{A}''_{22}^T \\ \hline \tilde{A}''_{22} \cdot \tilde{A}''_{12}^T & \tilde{A}''_{22} \cdot \tilde{A}''_{22}^T \end{array} \right) = E^{(n)}. \end{aligned} \tag{4.66}$$

Последнее равенство в (4.66) возможно только если  $\tilde{A}_{12}'' = 0$  и  $\tilde{A}_{22}'' \cdot \tilde{A}_{22}^{\prime\prime T} = E_{n-k}$ , т.е. матрица  $A''^{(n)}$  действительно имеет квазидиагональный вид:

$$A''^{(n)} = G^{-1} \cdot A^{(n)} \cdot G = \begin{pmatrix} E_k & 0 \\ 0 & \tilde{A}_{22}'' \end{pmatrix}, \quad (4.67)$$

причем  $\tilde{A}_{22}''$  – ортогональная матрица, а  $E_k$  – единичная матрица  $k$ -го порядка. Теорема доказана. ▲

Поскольку у нас имеется группа  $D_s^n$  матриц  $A_a^{(n)}$ , то, согласно доказанной теореме, каждую матрицу можно привести к квазидиагональному виду (4.67), причем поскольку базис  $\overset{\circ}{e}_1^{(n)}, \dots, \overset{\circ}{e}_k^{(n)}$  является общим для всех  $A_a^{(n)}$ , то единичная матрица  $E_k$  в (4.67) имеет один и тот же порядок  $k$ . Согласно теореме 2.15, матрица преобразования  $S$ , а, следовательно, и матрица  $G$ , определяемая по  $S$  однозначно (см. теорему 2.12), является общей для всех матриц  $A_a^{(n)}$ . Это означает, что все матрицы  $A_a^{(n)}$  из  $D_s^n$  одним невырожденным преобразованием  $G^{-1} \cdot A_a^{(n)} \cdot G$  могут быть приведены к квазидиагональному виду (аналогично (3.54)). В соответствии с классификацией п.3.4.4, такое матричное представление  $A_a^{(n)}$  группы  $G$ , является приводимым. Фактически мы доказали следующую теорему.

**ТЕОРЕМА 4.5.** *Если в  $\overset{\circ}{L}^{(n)}$  имеется некоторое подпространство  $\overset{\circ}{L}$  размерности  $k \leq l$ , элементы которого являются индифферентными относительно всех матриц из матричного представления  $A_a^{(n)}$  группы  $G_s$ , то это матричное представление приводимо.*

При этом число неприводимых матричных представлений размерности 1 (т.е. число диагональных элементов-блоков в единичной матрице  $E_k$ ), содержащихся в приводимом, равно числу  $k$ .

#### 4.2.5. Приведенное матричное представление

Каждой матрице  $A_a^{(n)}$  из  $D_s^n$  можно поставить в соответствие квазидиагональную матрицу  $A_a''^{(n)} = G^{-1} \cdot A_a^{(n)} \cdot G$ . Множество  $D_s''^n$  всех таких матриц  $A_a''^{(n)}$  образует группу, изомерную с  $D_s^n$ , и, согласно классификации п.3.4.4, образует приведенное матричное представление группы  $G_s$ .

**ТЕОРЕМА 4.6.** *Размерность подпространства  $\overset{\circ}{L}''^{(n)}$ , индифферентного относительно группы  $D_s''^{(n)}$ , равна размерности  $k$  подпространства  $\overset{\circ}{L}^{(n)}$ , индифферентного относительно  $D_s^n$ .*

▼ Для доказательства выберем базис  $\overset{\circ}{e}_1^{(n)}, \dots, \overset{\circ}{e}_k^{(n)}$  в  $\overset{\circ}{\mathcal{L}}^{(n)}$  и образуем на его основе векторы по формуле (4.60):

$$\overset{\circ}{e}_i^{\prime\prime(n)} = G^{-1} \cdot \overset{\circ}{e}_i^{(n)}, \quad i = 1, \dots, k. \quad (4.68)$$

Эти векторы будут инвариантными относительно группы  $D_s^{\prime\prime(n)}$ , так как

$$A^{\prime\prime(n)} \cdot \overset{\circ}{e}_i^{\prime\prime(n)} = G^{-1} \cdot A^{(n)} \cdot G \cdot G^{-1} \cdot \overset{\circ}{e}_i^{(n)} = G^{-1} \cdot A^{(n)} \cdot \overset{\circ}{e}_i^{(n)} = G^{-1} \overset{\circ}{e}_i^{(n)} = \overset{\circ}{e}_i^{\prime\prime(n)}. \quad (4.69)$$

Они являются также и линейно независимыми. Поэтому линейная оболочка из векторов  $\overset{\circ}{e}_i^{\prime\prime(n)}$  образует подпространство  $\overset{\circ}{\mathcal{L}}^{\prime\prime(n)}$ , индифферентное относительно  $D_s^{\prime\prime(n)}$ , его размерность не меньше  $k$ . Пусть существует еще один вектор  $\overset{\circ}{e}_{k+1}^{\prime\prime(n)}$  линейно независимый с  $\overset{\circ}{e}_i^{\prime\prime(n)}$  и индифферентный относительно  $D_s^{\prime\prime(n)}$ , тогда найдется вектор  $\overset{\circ}{e}_{k+1}^{(n)} = G \cdot \overset{\circ}{e}_{k+1}^{\prime\prime(n)}$ , линейно независимый с  $\overset{\circ}{e}_i^{(n)}$  ( $i = 1 \dots k$ ) и индифферентный относительно  $D_s^{(n)}$ :

$$\begin{aligned} A^{(n)} \cdot \overset{\circ}{e}_{k+1}^{(n)} &= A^{(n)} \cdot G \cdot \overset{\circ}{e}_{k+1}^{\prime\prime(n)} = G \cdot A^{\prime\prime(n)} \cdot G^{-1} \cdot G \cdot \overset{\circ}{e}_{k+1}^{\prime\prime(n)} = \\ &= G \cdot A^{\prime\prime(n)} \cdot \overset{\circ}{e}_{k+1}^{\prime\prime(n)} = G \cdot \overset{\circ}{e}_{k+1}^{\prime\prime(n)} = \overset{\circ}{e}_{k+1}^{(n)}, \end{aligned} \quad (4.70)$$

что невозможно, так как система  $\overset{\circ}{e}_1^{(n)} \dots \overset{\circ}{e}_k^{(n)}$  по предположению содержит максимальное число таких векторов. Полученное противоречие доказывает утверждение, что размерность подпространства  $\overset{\circ}{\mathcal{L}}^{\prime\prime(n)}$  равна  $k$ . ▲

#### 4.2.6. Свойство ортогональности матричных представлений

Рассмотрим теперь базис  $\overset{\circ}{e}_1^{\prime\prime(n)} \dots \overset{\circ}{e}_k^{\prime\prime(n)}$  подпространства  $\overset{\circ}{\mathcal{L}}^{\prime\prime(n)}$ . Поскольку элементы пространства  $\mathcal{L}^{(n)}$  – координатные столбцы, то каждый  $\overset{\circ}{e}_i^{\prime\prime(n)}$  имеет вид:

$$\overset{\circ}{e}_i^{\prime\prime(n)} = (\overset{\circ}{e}_i^{\prime\prime(n)1}, \dots, \overset{\circ}{e}_i^{\prime\prime(n)l})^T, \quad i = 1 \dots k, \quad (4.71)$$

где  $\overset{\circ}{e}_i^{\prime\prime(n)j}$  можно рассматривать как компоненты в некотором базисе  $\overset{\circ}{e}_i^{(n)}$  ( $i = 1 \dots l$ ) пространства  $\mathcal{L}^{(n)}$  (см. упр. 4.2.1).

Введем новую систему  $k$  векторов  $b_i^{(n)}$ , обнулив в (4.71) компоненты при  $j = k+1, \dots, l$ :

$$b_i^{(n)} = (\overset{\circ}{e}_i^{\prime\prime(n)1}, \dots, \overset{\circ}{e}_i^{\prime\prime(n)k}, 0, \dots, 0)^T, \quad i = 1, \dots, k. \quad (4.72)$$

Эта система  $b_i^{(n)}$ , очевидно, является линейно независимой и индифферентной относительно группы  $D_s^{\prime\prime(n)}$ , так как

$$\sum_{j=1}^l A^{\prime\prime(n)t}{}_j b_j^{(n)} = \begin{cases} \sum_{j=1}^k A^{(n)t} \overset{\circ}{e}_i^{\prime\prime(n)j} = \overset{\circ}{e}_i^{\prime\prime(n)t} = b_i^{(n)t}, & t \leq k, \\ 0, & t > k. \end{cases} \quad (4.73)$$

Здесь мы учли квазидиагональный вид (4.67) матрицы  $A^{\prime\prime(n)}$ .

Рассмотрим далее в этом параграфе только точечные группы, состоящие из конечного числа  $p$  элементов.

Введем еще один произвольный ненулевой вектор следующего вида:

$$\mathbf{c}^{(n)} = (0, \dots, 0, c^{k+1}, \dots, c^l)^T \quad (4.74)$$

и образуем с его помощью сумму:

$$\mathbf{b}^{(n)} = \sum_{a=1}^p A_a^{\prime\prime(n)} \cdot \mathbf{c}^{(n)}, \quad (4.75)$$

где суммирование идет по всем элементам группы  $D_s^{\prime\prime(n)}$ .

В силу квазидиагональности формы (4.67) матрицы  $A_a^{\prime\prime(n)}$ , вектор  $\mathbf{b}^{(n)}$  будет иметь нулевыми первые  $k$  компонент, как и  $\mathbf{c}^{(n)}$ . Этот вектор  $\mathbf{b}^{(n)}$  будет индифферентным относительно группы  $D_s^{\prime\prime(n)}$ :

$$A_b^{\prime\prime(n)} \cdot \mathbf{b}^{(n)} = \sum_{a=1}^p A_b^{\prime\prime(n)} \cdot A_a^{\prime\prime(n)} \cdot \mathbf{c}^{(n)} = \sum_{a=1}^p A_a^{\prime\prime(n)} \cdot \mathbf{c}^{(n)} = \mathbf{b}^{(n)}, \quad (4.76)$$

так как в силу свойств группы, произведение элементов группы всегда дает снова элемент группы.

Вектор  $\mathbf{b}^{(n)}$ , очевидно, является линейно независимым с базисом  $\mathbf{b}_i^{(n)}$  ( $i = 1, \dots, k$ ). Тогда получается, что мы построили линейно независимую систему из  $k+1$  векторов, индифферентных относительно группы  $D_s^{\prime\prime(n)}$ , т.е. принадлежащих  $\overset{\circ}{\mathcal{L}}{}^{\prime\prime(n)}$ . Но, согласно теореме 4.6, это невозможно, следовательно, вектор  $\mathbf{b}^{(n)}$  должен быть равен нулю:

$$\mathbf{b}^{(n)} = 0. \quad (4.77)$$

Если ввести обозначение для ненулевой части вектора  $\mathbf{c}^{(n)}$  как  $\mathbf{c}' = (c^{k+1}, \dots, c^l)^T$ , то получим новый вектор размерности  $(l - k)$ , и условие (4.77) с учетом (4.75) и (4.67) примет вид:

$$\sum_{a=1}^p \tilde{A}_{22a}'' \cdot \mathbf{c}' = 0, \quad (4.78)$$

где  $\tilde{A}_{22a}''$  – матрицы  $(l - k)$ -го порядка.

Соотношение (4.78) должно выполняться для любых ненулевых векторов  $\mathbf{c}'$ , очевидно, что это возможно только если

$$\sum_{a=1}^p \tilde{A}_{22a}'' = 0. \quad (4.79)$$

Это соотношение называют *свойством ортогональности матричных представлений*. Фактически оно является следствием некоторых более общих соотношений ортогональности представлений, более детальное изложение которых можно найти, например, в [3, 7, 30, 39, 43].

#### 4.2.7. Вывод формулы для числа $k$

Из свойства ортогональности (4.79), в частности следует, что характер суммы матриц  $\tilde{A}_{22a}''$  равен нулю:

$$\chi\left(\sum_{a=1}^p \tilde{A}_{22a}''\right) = 0. \quad (4.80)$$

Тогда, вычисляя характер суммы матриц  $A_a''^{(n)}$  из  $D_s''^{(n)}$ , получаем

$$\chi\left(\sum_{a=1}^p A_a''^{(n)}\right) = \sum_{a=1}^p \chi(E_k) + \chi\left(\sum_{a=1}^p \tilde{A}_{22a}''\right) = \sum_{a=1}^p k = pk, \quad (4.81)$$

так как характер единичной матрицы  $E_k$  равен  $k$ .

**ТЕОРЕМА 4.7. Характеры изомерных матричных представлений совпадают.**

▼ Справедливость этой теоремы следует из того, что все коэффициенты характеристических полиномов  $P(\lambda)$  изомерных матриц совпадают (см. п.2.3.5), а след матрицы является одним из этих коэффициентов. ▲

Используя теорему 4.7, в (4.81) переходим к характерам матриц  $A_a^{(n)}$  и получаем окончательно следующую основную теорему.

**Теорема 4.8.** Число  $k$  независимых компонент тензора  ${}^n\Omega$  любого  $n$ -го ранга, индифферентного относительно точечной группы  $G_s$ , вычисляют по следующей формуле:

$$k = \frac{1}{p} \sum_{a=1}^p \chi(A_a^{(n)}). \quad (4.82)$$

Это число  $k$  равно размерности пространства  $\mathcal{I}_3^{(n)}$  индифферентных тензоров  $n$ -го ранга.

Характеры  $\chi(A_a^{(n)})$  матриц  $n$ -го уровня можно вычислить по характеристикам  $\chi(A_a)$  матриц  $A_a$  первого уровня, согласно формуле (3.58).

#### 4.2.8. Случай непрерывных групп

Для непрерывных групп изложенное выше доказательство также остается справедливым, но в формулах (4.75) и (4.82) перебор всех элементов группы путем суммирования должен быть заменен интегрированием по непрерывным подгруппам.

Рассмотрим группы  $G_{33} \dots G_{37}$  класса трансверсальной изотропии (см. п.3.2.2). Каждая группа содержит несколько континуальных множеств ( $\mathcal{K}$  штук), каждый элемент которых соответствует точке на отрезке  $0 \leq \phi \leq 2\pi$ :

$$(A_{[t]}(\phi))_j^i, \quad 0 \leq \phi \leq \pi, \quad t = 1, \dots, \mathcal{K}. \quad (4.83)$$

Например, для группы  $G_{33}$ :  $\mathcal{K} = 1$ ,  $A_{[1]}(\phi) = Q_3^\phi$ , для группы  $G_{34}$ :  $\mathcal{K} = 2$  и  $A_{[1]}(\phi) = Q_3^\phi$ ,  $A_{[2]}(\phi) = Q_3^\phi R_3$  и т.д. Тогда каждой из этих матриц можно поставить в соответствие матрицы  $n$ -го уровня:

$$(A_{[t]}^{(n)}(\phi))_j^i, \quad (4.84)$$

а также квазидиагональные матрицы:

$$(A_{[t]}^{''(n)}(\phi))_j^i, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi, \quad t = 1 \dots \mathcal{K}. \quad (4.85)$$

В результате получим непрерывные группы  $D_s^{''(n)}$ .

Тогда вектор  $\mathbf{b}^{(n)}$ , по аналогии с (4.75), строим следующим образом:

$$\mathbf{b}^{(n)} = \sum_{t=1}^{\mathcal{K}} \int_0^\pi A_{[t]}^{''(n)}(\phi) \cdot \mathbf{c}^{(n)} d\phi. \quad (4.86)$$

Следствием равенства нулю (4.77) этого вектора является соотношение, аналогичное (4.78):

$$\sum_{t=1}^{\mathcal{K}} \int_0^\pi \tilde{A}_{22[t]}^{''}(\phi) \cdot \mathbf{c}^{(n)} d\phi = 0. \quad (4.87)$$

Свойство ортогональности, записанное для характеров (4.80), принимает в данном случае вид:

$$\sum_{t=0}^{\kappa} \int_0^{\pi} \chi(\tilde{A}_{22[t]}''(\phi)) d\phi = 0. \quad (4.88)$$

Переходя к характерам матричного представления из группы  $D_s^{''(n)}$ , получаем:

$$\sum_{t=0}^{\kappa} \int_0^{\pi} \chi(A_{[t]}^{''(n)}(\phi)) d\phi = \sum_{t=0}^{\kappa} \int_0^{\pi} k d\phi = \pi k \mathcal{K}. \quad (4.89)$$

Отсюда, переходя к характерам матриц  $A_{[t]}^{(n)}(\phi)$ , получаем утверждение следующей теоремы.

**ТЕОРЕМА 4.9.** Число  $k$  независимых компонент тензора  ${}^n\Omega$ , индифферентного относительно непрерывных групп трансверсально-изотропного класса вычисляют по формуле:

$$k = \frac{1}{\pi \mathcal{K}} \sum_{t=0}^{\kappa} \int_0^{\pi} \chi(A_{[t]}^{(n)}(\phi)) d\phi. \quad (4.90)$$

Характеры матриц  $A_{[t]}^{(n)}(\phi)$  можно вычислить по характерам матричного представления  $A_{[t]}(\phi)$  групп  $G_s$ :

$$\chi(A_{[t]}^{(n)}(\phi)) = \chi^n(A_{[t]}(\phi)), \quad t = 1 \dots \mathcal{K}, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi. \quad (4.91)$$

Рассмотрим теперь изотропный класс.

Каждый элемент группы  $G_s$ ,  $s = 38, 39$ , из этого класса соответствует некоторой точке из множества  $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \times [0, \pi]$  в трехмерном пространстве:

$$A_{[t]}(\phi, \varphi, \theta), \quad (4.92)$$

$$0 \leq \phi, \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad t = 1, \dots, \mathcal{K},$$

таких континуальных множеств в каждой группе  $G_s$ ,  $s = 38, 39$ , имеется  $\mathcal{K}$  штук. По этим элементам группы  $G_s$  строим матрицы  $n$ -го уровня  $A_{[t]}^{(n)}(\phi, \varphi, \theta)$  и  $A_{[t]}^{''(n)}(\phi, \varphi, \theta)$ . Вектор  $\mathbf{b}^{(n)}$  строится следующим образом:

$$\mathbf{b}^{(n)} = \sum_{t=1}^{\kappa} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} A_{[t]}^{''(n)}(\phi, \varphi, \theta) \sin \theta d\theta d\varphi d\phi. \quad (4.93)$$

Проделывая еще раз все выкладки, получаем формулу для числа  $k$ .

**Теорема 4.10.** Число независимых компонент индифферентного тензора  $n$ -го ранга относительно групп изотропии вычисляют по формуле:

$$k = \frac{1}{8\pi^2 \mathcal{K}} \sum_{t=1}^{\mathcal{K}} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \chi(A_{[t]}^{(n)}(\phi, \varphi, \theta)) \sin \theta d\theta d\varphi d\phi. \quad (4.94)$$

Характеры рассмотренных матриц вычисляются следующим образом:

$$\chi(A_{[t]}^{(n)}(\phi, \varphi, \theta)) = \chi^n(A_{[t]}(\phi, \varphi, \theta)). \quad (4.95)$$

### Упражнения к § 4.2.

**Упражнение 4.2.1.** Показать, что если матрица  $A = A^{(1)}$  определена в декартовом трехмерном базисе  $\bar{e}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), то матрица линейного преобразования  $A^{(n)}$ , порожденная ей, будет определена в  $l$ -мерном базисе векторов  $e_1^{(n)}, \dots, e_l^{(n)}$  ( $l = 3^n$ ) пространства  $\mathcal{L}^{(n)}$ , каждый элемент которого  $e_i^{(n)}$  ( $i = 1, \dots, l$ ) есть координатный столбец, порожденный компонентами полиады  $\bar{e}_{i_1} \otimes \bar{e}_{i_2} \otimes \dots \otimes \bar{e}_{i_n}$  в трехмерном пространстве  $\mathbb{R}^3$ .

**Упражнение 4.2.2.** Показать, что базис  $e_i^{(n)}$  ( $i = 1, \dots, l$ ), введенный в упр. 4.2.1, можно представить рекуррентным образом:

$$\mathbf{e}_i^{(n)} = \mathbf{e}_{i\langle i_1 \dots i_n \rangle}^{(n)}, \quad i = 1, \dots, l,$$

где

$$\mathbf{e}_{\mathbf{i}^{(n)}_{1 \dots i_n}}^{(n)T} = \mathbf{e}_{\mathbf{i}^{(n)}_{1 \dots i_n}}^{(n)T} = (\mathbf{e}_{\mathbf{i}^{(n)}_{1 \dots i_n}}^{(n-1)1T}, \mathbf{e}_{\mathbf{i}^{(n)}_{1 \dots i_n}}^{(n-1)2T}, \mathbf{e}_{\mathbf{i}^{(n)}_{1 \dots i_n}}^{(n-1)3T}),$$

$$\mathbf{e}_{i_1 \dots i_n}^{(n-1)jT} = (\mathbf{e}_{i_1 \dots i_n}^{(n-2)j, 1T}, \mathbf{e}_{i_1 \dots i_n}^{(n-2)j, 2T}, \mathbf{e}_{i_1 \dots i_n}^{(n-2)j, 3T}),$$

• • • • • • • •

$$e_{i_1 \dots i_n}^{(1)j_1 \dots j_{n-1}T} = (\delta_{i_1}^{j_1} \dots \delta_{i_{n-1}}^{j_{n-1}} \delta_{i_n}^1, \delta_{i_1}^{j_1} \dots \delta_{i_{n-1}}^{j_{n-1}} \delta_{i_n}^2, \delta_{i_1}^{j_1} \dots \delta_{i_{n-1}}^{j_{n-1}} \delta_{i_n}^3),$$

$$i_1, \dots, i_n, j_1, \dots, j_n = 1, 2, 3.$$

Здесь введена функция  $i = i(i_1 \dots i_n)$ , устанавливающая соответствие между трехмерными индексами  $i_1 \dots i_n \equiv 1, 2, 3$  и  $l$ -мерными  $i = 1 \dots l$  ( $l = 3^n$ ).

**Упражнение 4.2.3.** Показать, что функцию  $i = i(i_1 \dots i_n)$  можно записать явным образом.

$$i = 3^{n-1} \cdot (i_1 - 1) + 3^{n-2} (i_1 - 1) + \dots + 3^1 (i_{n-1} - 1) + i_n.$$

**Упражнение 4.2.4.** Используя формулу упр.4.2.3, показать, что для случая  $n = 2$  функция  $i = i(i_1 \dots i_n)$  связывает девятимерные индексы с трехмерными следующим образом:

$$i = (1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9),$$

$$i_1 i_2 = (11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33).$$

**Упражнение 4.2.5.** Показать, что векторы  $e_i^{(n)}$ , построенные по формулам упр.4.2.2, имеют явный вид:

$$e_1^{(n)} = (1, 0, 0 \dots 0, 0)^T,$$

$$e_2^{(n)} = (0, 1, 0 \dots 0, 0)^T,$$

$$e_3^{(n)} = (0, 0, 1 \dots 0, 0)^T,$$

· · · · · · · ·

$$e_l^{(n)} = (0, 0, 0 \dots 0, 1)^T, \quad l = 3^n$$

и образуют базис в пространстве  $\mathcal{L}^{(n)}$ .

### § 4.3. Симметричные индифферентные тензоры

#### 4.3.1. Число независимых компонент индифферентных симметричных тензоров

Формулы (4.82), (4.90) и (4.94) позволяют установить число независимых компонент любого тензора  $n$ -го ранга, индифферентного относительно группы  $G_s$ , по характерам  $\chi(A_a^{(n)})$  приводимого матричного представления. Вычисление этих характеров достаточно сложно, поэтому, пользуясь формулами (4.91), (3.58) и (4.95), переходят к характерам неприводимого представления группы  $\chi(A_a)$ . Однако эти формулы (4.91), (3.58) и (4.95) верны, только если тензор  ${}^n\Omega$  не обладает никакой симметрией по индексам. Если же такая симметрия имеется, то число независимых компонент тензора уменьшается, и указанные формулы следует уточнить.

Суть этого уточнения в следующем. Для индифферентного тензора  ${}^n\Omega$ , обладающего какой-либо симметрией по компонентам, следует составить индифферентный вектор  $a_{(n)}$ , а потом еще один вектор  $\hat{a}_{(n)}$ , суммируя совпадающие вследствие симметрии компоненты. Размерность вектора  $\hat{a}_{(n)}$  при этом будет уже меньше, чем размерность  $a_{(n)}$ , т.е.  $q \leq 3^n$ .

Матрица  $n$ -го уровня  $\hat{A}^{(n)}$ , соответствующая индифферентному вектору  $\hat{a}_{(n)}$  будет также иметь уменьшенный порядок  $q$ . Эта матрица  $\hat{A}^{(n)}$  строится из соответствующей матрицы  $A^{(n)}$  путем суммирования строк, отвечающих совпадающим компонентам вектора  $a_{(n)}$ , и

исключением соответствующих строк и столбцов. (Можно поступить наоборот: к столбцу  $j$  матрицы  $A^{(n)}$  добавить столбцы  $s, t, u, \dots$ , если компоненты вектора  $a_{(n)}^s = a_{(n)}^t = a_{(n)}^u = \dots$  совпадают из-за симметрии, а затем исключить в матрице  $A^{(n)}$  строки и столбцы с номерами  $s, t, u, \dots$ . Хотя матрица  $\tilde{A}^{(n)}$  при этом получится, вообще говоря, другая, но ее характер будет совпадать с  $\chi(\tilde{A}^{(n)})$ ).

Заметим, что построение матрицы  $\hat{A}^{(n)}$  по матрице  $A^{(n)}$  отличается от операции симметрирования по группе индексов (2.163), поэтому для таких матриц  $\hat{A}^{(n)}$  будем использовать термин – *симметризованная матрица n-го уровня*.

Если теперь образовать множество всех построенных таким образом матриц  $\hat{A}^{(n)}$  для одной и той же группы  $G_s$  и одного и того же вектора  $\hat{\mathbf{a}}_{(n)}$ , то получим еще одно матричное представление группы  $G_s$ , которое будет, очевидно, приводимым.

Для этого матричного представления  $\hat{A}^{(n)}$  будут справедливы все выводы пп. 4.2.4 – 4.2.8, а также формулы (4.82), (4.90) и (4.94). Подсчет числа независимых компонент тензора  ${}^n\Omega$ , обладающего симметрией компонент, сводится к определению характеров приводимого представления  $\chi(A_a^{(n)})$  (а для непрерывной группы характеров  $\chi(A_{[t]}^{(n)}(\phi))$ ) через характеры  $\chi(A_a)$ .

### 4.3.2. Симметричные индифферентные тензоры второго ранга

Формулы связи  $\chi(A_a^{(n)})$  и  $\chi(A_a)$  для случая симметричного тензора второго ранга  $\Omega$ :

$$\Omega = \Omega^T, \quad \bar{\Omega}^{i_1 i_2} = \bar{\Omega}^{i_2 i_1} \quad (n = 2)$$

можно легко установить непосредственным вычислением характеров. Покажем это.

Вначале образуем индифферентные векторы  $\mathbf{a}_{(n)}$  и  $\hat{\mathbf{a}}_{(n)}$ , имеющие размерности  $3^2 = 9$  и 6 соответственно:

$$\mathbf{a}_{(2)}^T = (a_{(1)}^{1T}, a_{(1)}^{2T}, a_{(1)}^{3T}) = (\bar{\Omega}^{11}, \bar{\Omega}^{12}, \bar{\Omega}^{13}, \bar{\Omega}^{21}, \bar{\Omega}^{22}, \bar{\Omega}^{23}, \bar{\Omega}^{31}, \bar{\Omega}^{32}, \bar{\Omega}^{33})$$

и

$$\hat{\mathbf{a}}_{(2)}^T = (\bar{\Omega}^{11}, \bar{\Omega}^{12} + \bar{\Omega}^{21}, \bar{\Omega}^{13} + \bar{\Omega}^{31}, \bar{\Omega}^{22}, \bar{\Omega}^{23} + \bar{\Omega}^{32}, \bar{\Omega}^{33}).$$

Матрица  $A^{(2)}$  будет иметь вид (3.42).

Тогда соотношение (4.51) индифферентности в явном виде запи-

шется следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \Omega^{11} \\ \Omega^{12} \\ \Omega^{13} \\ \Omega^{21} \\ \Omega^{22} \\ \Omega^{23} \\ \Omega^{31} \\ \Omega^{32} \\ \Omega^{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1^1 A^{(1)} & A_2^1 A^{(1)} & A_3^1 A^{(1)} \\ A_1^2 A^{(1)} & A_2^2 A^{(1)} & A_3^2 A^{(1)} \\ A_1^3 A^{(1)} & A_2^3 A^{(1)} & A_3^3 A^{(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega^{11} \\ \Omega^{12} \\ \Omega^{13} \\ \Omega^{21} \\ \Omega^{22} \\ \Omega^{23} \\ \Omega^{31} \\ \Omega^{32} \\ \Omega^{33} \end{pmatrix}, \quad (4.97)$$

где

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 \\ A_1^3 & A_2^3 & A_3^3 \end{pmatrix}.$$

Просуммируем теперь строки 2 и 4, 3 и 7, 6 и 8 в векторах и в матрице, а затем исключим из матрицы столбцы 4, 6 и 7. В итоге получим соотношение индифферентности для симметризованного вектора  $\hat{\mathbf{a}}_{(2)}$ :

$$\hat{\mathbf{a}}_{(2)} = \hat{A}^{(2)} \cdot \hat{\mathbf{a}}_{(2)}, \quad (4.98)$$

или в явном виде, выписывая только члены главной диагонали:

$$\begin{pmatrix} \Omega^{11} \\ \Omega^{12} + \Omega^{21} \\ \Omega^{13} + \Omega^{31} \\ \Omega^{22} \\ \Omega^{23} + \Omega^{32} \\ \Omega^{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1^1 A_1^1 & & & & & \Omega^{11} \\ A_1^1 A_2^2 + A_2^1 A_1^2 & A_1^1 A_3^3 + & & & & \Omega^{12} + \Omega^{21} \\ A_1^2 A_3^3 + & A_1^2 A_2^2 & A_2^2 A_3^2 & & & \Omega^{13} + \Omega^{31} \\ & A_2^3 A_2^2 + & A_3^2 A_2^2 & & & \Omega^{22} \\ & A_3^3 A_2^2 + & A_2^3 A_3^2 & A_3^3 A_3^3 & & \Omega^{23} + \Omega^{32} \\ & & & & & \Omega^{33} \end{pmatrix}. \quad (4.98')$$

Вычислим характер симметризованной матрицы  $\hat{A}^{(2)}$ :

$$\chi(\hat{A}^{(2)}) = (A_1^1)^2 + (A_2^2)^2 + (A_3^3)^2 + A_1^1 A_2^2 + A_1^1 A_3^3 + A_2^2 A_3^3 + A_2^1 A_1^2 + A_2^3 A_3^2 + A_3^1 A_1^3. \quad (4.99)$$

Комбинируя слагаемые в том выражении, получаем:

$$\chi(\hat{A}^{(2)}) = \frac{1}{2}(A_1^1 + A_2^2 + A_3^3)^2 + \frac{1}{2}(A_1^1 A_1^1 + A_2^1 A_2^2 + A_3^1 A_3^3 + A_1^2 A_2^1 + A_2^2 A_3^2 + A_3^2 A_3^3 + A_1^3 A_2^1 + A_2^3 A_3^2 + A_3^3 A_1^3). \quad (4.100)$$

Откуда окончательно получаем следующую теорему.

**Теорема 4.11.** Характеры матричного представления группы  $G_s$ , образованного с помощью симметризованных матриц второго уровня  $\widehat{A}^{(2)}$ , связаны с характерами матричного представления  $A$  первого уровня той же группы  $G_s$ , следующей формулой:

$$\chi(\widehat{A}^{(2)}) = \frac{1}{2}(\chi^2(A) + \chi(A^2)), \quad (4.101)$$

где  $\chi(A^2) = A^i_j A^j_i$ .

Формула (4.101) является аналогом формулы (3.58) на случай симметричного тензора второго ранга.

Если теперь подставить (4.101) в (4.82), или (4.90), или (4.94), то можно подсчитать число независимых компонент симметричного тензора второго ранга, индифферентного относительно различных групп симметрии.

### 4.3.3. Симметричные индифферентные тензоры третьего ранга

Рассмотрим теперь индифферентный тензор третьего ранга  ${}^3\Omega$ , симметричный по второму и третьему индексам:

$${}^3\Omega = {}^3\Omega^{(132)} \quad \text{или} \quad \Omega^{i_1 i_2 i_3} = \Omega^{i_1 i_2 i_3}, \quad (4.102)$$

тогда  $n = 3$ ,  $l = 3^3 = 27$ . Соответствующий ему индифферентный вектор  $\mathbf{a}_{(3)}$  имеет 27 компонент, запишем их рекуррентным способом, используя обозначения из п.4.2.1:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{(3)}^T &= (a_{(2)}^{1T}, a_{(2)}^{2T}, a_{(2)}^{3T}), \quad \mathbf{a}_{(2)}^{i_1 T} = (a_{(1)}^{i_1 1T}, a_{(1)}^{i_1 2T}, a_{(1)}^{i_1 3T}), \\ \mathbf{a}_{(1)}^{i_1 i_2 T} &= (\bar{\Omega}^{i_1 i_2 1}, \bar{\Omega}^{i_1 i_2 2}, \bar{\Omega}^{i_1 i_2 3}). \end{aligned} \quad (4.103)$$

Симметризованный вектор  $\widehat{\mathbf{a}}_{(3)}$  имеет 18 компонент, которые рекуррентным способом можно записать следующим образом:

$$\widehat{\mathbf{a}}_{(3)}^T = (\widehat{a}_{(2)}^1, \widehat{a}_{(2)}^2, \widehat{a}_{(2)}^3), \quad (4.104)$$

$$\widehat{a}_{(2)}^{i_1} = (\bar{\Omega}^{i_1 11}, \bar{\Omega}^{i_1 12} + \bar{\Omega}^{i_1 21}, \bar{\Omega}^{i_1 13} + \bar{\Omega}^{i_1 31}, \bar{\Omega}^{i_1 22}, \bar{\Omega}^{i_1 23} + \bar{\Omega}^{i_1 32}, \bar{\Omega}^{i_1 33}).$$

Условие (4.53) индифферентности вектора  $\mathbf{a}_{(3)}$  также записываем рекуррентным образом:

$$\begin{pmatrix} a_{(2)}^1 \\ a_{(2)}^2 \\ a_{(2)}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1^1 A^{(2)} & A_2^1 A^{(2)} & A_3^1 A^{(2)} \\ A_1^2 A^{(2)} & A_2^2 A^{(2)} & A_3^2 A^{(2)} \\ A_1^3 A^{(2)} & A_2^3 A^{(2)} & A_3^3 A^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{(2)}^1 \\ a_{(2)}^2 \\ a_{(2)}^3 \end{pmatrix}, \quad (4.105)$$

где

$$A^{(2)} \mathbf{a}_{(2)}^{i_1} = \begin{pmatrix} A_1^1 A^{(1)} & A_2^1 A^{(1)} & A_3^1 A^{(1)} \\ A_1^2 A^{(1)} & A_2^2 A^{(1)} & A_3^2 A^{(1)} \\ A_1^3 A^{(1)} & A_2^3 A^{(1)} & A_3^3 A^{(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{(1)}^{i_1 1} \\ a_{(1)}^{i_1 2} \\ a_{(1)}^{i_1 3} \end{pmatrix}. \quad (4.106)$$

Сравнивая (4.103) и (4.104), легко заметить, что симметрирование производится только для векторов  $\mathbf{a}_{(2)}^{i_1}$ , тогда в симметризованном виде должна быть записана матрица  $A^{(2)}$  в (4.106), а матрица  $A^{(3)}$  в (4.105) останется без изменения:

$$\widehat{A}^{(2)} \widehat{\mathbf{a}}_{(2)}^{i_1} = \begin{pmatrix} A_1^1 A_1^1 & & & & \Omega^{i_1 11} \\ A_1^1 A_2^2 + & A_2^1 A_1^2 & & & \Omega^{i_1 12} + \Omega^{i_1 21} \\ & A_1^1 A_3^3 + & A_3^1 A_1^3 & & \Omega^{i_1 13} + \Omega^{i_1 31} \\ & & A_2^2 A_2^2 & & \Omega^{i_1 22} \\ & & A_3^2 A_2^2 & + A_2^3 A_3^2 & \Omega^{i_1 23} + \Omega^{i_1 32} \\ & & & A_3^3 A_3^3 & \Omega^{i_1 33} \end{pmatrix}, \quad (4.107)$$

т.е. в симметризованном виде матрицы  $\widehat{A}^{(2)}$  в соотношениях (4.98) и (4.107) совпадают. Это означает, что совпадают и их характеристы, т.е.  $\chi(\widehat{A}^{(2)})$  можно вычислить по формуле (4.101). Так как в соотношении (4.105) замена матрицы  $A^{(2)}$  на симметризованную  $\widehat{A}^{(2)}$  происходит одинаково во всех блоках матрицы  $A^{(2)}$ , получаем следующую теорему.

**ТЕОРЕМА 4.12.** *Характеры матричного представления группы  $G_s$ , образованного с помощью симметризованных матриц третьего уровня  $\widehat{A}^{(3)}$ , связаны с характерами матричного представления первого уровня  $A$  той же группы  $G_s$ , следующей формулой:*

$$\chi(\widehat{A}^{(3)}) = \chi(A)\chi(\widehat{A}^{(2)}) = \frac{1}{2}(\chi^3(A) + \chi(A)\chi(A^2)). \quad (4.108)$$

Формула (4.108) совместно с формулой

$$k = \frac{1}{p} \sum_{a=1}^p \chi(\widehat{A}_a^{(3)}) \quad (4.109)$$

(или аналогичными формулами (4.90) или (4.94)) позволяют вычислить число независимых компонент симметричного индифферентного тензора третьего ранга  ${}^3\Omega$  по характеристикам  $\chi(A_a)$  матричного представления группы  $G_s$ .

#### 4.3.4. Симметричные индифферентные тензоры четвертого и более высокого рангов

Используя формулы (3.58) для тензоров без симметрии, (4.101) для симметричного по паре индексов тензора второго ранга и (4.108) для симметричного по одной паре индексов тензора третьего ранга, можно установить следующие рекуррентные зависимости характеров симметричных тензоров.

**Теорема 4.13.** Пусть имеется индифферентный относительно группы  $G$ , вектор  $n$ -го уровня  $\mathbf{a}_{(n)}$ . Тогда

1º если на  $(t - 1)$ -ом уровне векторы  $\mathbf{a}_{(m)}^{i_1 \dots i_{n-m+1}}$  имеют какую-либо симметрию, а на  $t$ -ом уровне у вектора  $\mathbf{a}_{(m)}^{i_1 \dots i_{n-m}}$  не появляется новых видов симметрии, то характеры симметризованных матричных представлений группы  $G$ , на этих уровнях связаны следующим образом ( $t \leq n$ ):

$$\chi(\widehat{A}^{(m)}) = \chi(A)\chi(\widehat{A}^{(m-1)}); \quad (4.110)$$

2º если на  $(t - 2)$ -ом уровне векторы  $\mathbf{a}_{(m-2)}^{i_1 \dots i_{n-m+2}}$  имеют какую-либо симметрию, а на  $t$ -ом уровне у вектора  $\mathbf{a}_{(m)}^{i_1 \dots i_{n-m}}$  появляется дополнительно только симметрия по двум "новым индексам"  $i_{n-m+1}, i_{n-m+2}$ , то характеры матричных представлений на этих уровнях связаны следующим образом:

$$\chi(\widehat{A}^{(m)}) = \frac{1}{2}(\chi^2(A) + \chi(A))\chi(\widehat{A}^{(m-2)}); \quad (4.111)$$

3º если на  $t$ -ом уровне векторы  $\mathbf{a}_{(m)}^{i_1 \dots i_{n-m}}$  имеют какую-либо симметрию, а на уровне  $2m \leq n$  вектор  $\mathbf{a}_{(2m)}^{i_1 \dots i_{n-2m}}$  симметричен по группе индексов  $i_1, \dots, i_{n-2m}, i_{n-2m+1}, \dots, i_{n-m}$ , то характеры матриц на этих уровнях связаны следующим образом:

$$\chi(\widehat{A}^{(2m)}) = \frac{1}{2}(\chi^2(\widehat{A}^{(m)}) + \chi(\widehat{A}^{(m)})^2). \quad (4.112)$$

▼ Доказательство утверждения (4.110) осуществляется также, как и вывод формулы (4.108) для тензора третьего ранга, а утверждения (4.111) – аналогично доказательству формулы (4.101).

Для доказательства формулы (4.112) рассмотрим случай тензоров четвертого ранга  ${}^4\Omega$ , обладающих симметрией по парам индексов:

$$\bar{\Omega}^{i_1 i_2 i_3 i_4} = \bar{\Omega}^{i_1 i_4 i_3 i_2}, \quad (4.113)$$

тогда  $n = 4$ ,  $m = 2$ , и представим соответствующий индифферентный вектор  $\mathbf{a}_{(4)}$  с помощью двухиндексных элементов  $\tilde{\Omega}_{(2)}^{j_1 j_2}$ .

$$\mathbf{a}_{(4)}^T = (\tilde{\Omega}_{(2)}^{11}, \dots, \tilde{\Omega}_{(2)}^{19}, \tilde{\Omega}_{(2)}^{21}, \dots, \tilde{\Omega}_{(2)}^{29}, \dots, \tilde{\Omega}_{(2)}^{91}, \dots, \tilde{\Omega}_{(2)}^{99}), \quad (4.114)$$

где индексы  $i_1$  и  $i_2$  пробегают значения от 1 до 9, каждое из этих значений соответствует паре индексов у тензора  $\tilde{\Omega}^{i_1 i_2 i_3 i_4}$  (см. табл.4.3).

*Таблица 4.3.* Значения  $(j_1)$  и соответствующие им пары  $(i_1, i_2)$

$(j_1)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$(i_1, i_2)$	11	12	13	21	22	23	31	32	33

Тогда матрицу  $A^{(4)}$  также можно представить с помощью кронекеровского произведения матриц  $A^{(2)}$  размерностью  $9 \times 9$ :

$$A^{(4)} = \left( A^{(4)i}_j \right)_{81 \times 81} = \begin{pmatrix} A^{(2)1}_1 A^{(2)} & \dots & A^{(2)1}_9 A^{(2)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A^{(2)9}_1 A^{(2)} & \dots & A^{(2)9}_9 A^{(2)} \end{pmatrix}, \quad (4.115)$$

где  $A^{(2)}$  имеет вид (3.42). В справедливости такого представления легко убедиться непосредственно, расписывая компоненты матрицы  $A^{(4)}$  через матрицы  $A^{(2)}$ . Соотношение индифферентности (4.53) с учетом обозначений (4.114) и (4.115) будет иметь вид:

$$\begin{pmatrix} \tilde{\Omega}_{(2)}^{11} \\ \tilde{\Omega}_{(2)}^{12} \\ \vdots \\ \tilde{\Omega}_{(2)}^{19} \\ \tilde{\Omega}_{(2)}^{21} \\ \vdots \\ \tilde{\Omega}_{(2)}^{29} \\ \vdots \\ \tilde{\Omega}_{(2)}^{91} \\ \vdots \\ \tilde{\Omega}_{(2)}^{99} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{(2)1}_1 A^{(2)} & \dots & A^{(2)1}_9 A^{(2)} \\ A^{(2)2}_1 A^{(2)} & \dots & A^{(2)2}_9 A^{(2)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A^{(2)9}_1 A^{(2)} & \dots & A^{(2)9}_9 A^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\Omega}_{(2)}^{11} \\ \tilde{\Omega}_{(2)}^{12} \\ \vdots \\ \tilde{\Omega}_{(2)}^{19} \\ \tilde{\Omega}_{(2)}^{21} \\ \vdots \\ \tilde{\Omega}_{(2)}^{29} \\ \vdots \\ \tilde{\Omega}_{(2)}^{91} \\ \vdots \\ \tilde{\Omega}_{(2)}^{99} \end{pmatrix}, \quad (4.116)$$

где

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} A^{(2)1}_1 & \dots & A^{(2)1}_9 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A^{(2)9}_1 & \dots & A^{(2)9}_9 \end{pmatrix}. \quad (4.116')$$

Сравним теперь соотношения индифферентности (4.97) и (4.116). Очевидно, что они отличаются только размером матриц и векторов: в (4.97) матрица имеет размер  $9 \times 9$ , а в (4.116) –  $81 \times 81$ . Более того, симметризация соотношения (4.111) осуществляется точно также, как и в (4.97) – суммированием строк, соответствующих компонентам  $\tilde{\Omega}_{j_1 j_2}^{(2)}$  с  $j_1 \neq j_2$ , и исключением соответствующих столбцов. В результате получим симметрированное соотношение индифферентности:

$$\hat{\mathbf{a}}_{(4)} = \hat{A}^{(4)} \cdot \hat{\mathbf{a}}_{(4)}, \quad (4.117)$$

явная форма которого в точности повторяет симметрированное соотношение (4.98') только для большей размерности:

$$\hat{\mathbf{a}}_{(4)} = \left( \begin{array}{c} A^{(2)1}_1 A^{(2)1}_1 \\ A^{(2)1}_1 A^{(2)2}_2 + A^{(2)1}_2 A^{(2)2}_1 \\ A^{(2)1}_1 A^{(2)3}_3 + A^{(2)1}_3 A^{(2)3}_1 \\ \vdots \\ A^{(2)2}_2 A^{(2)2}_2 \\ A^{(2)3}_3 A^{(2)2}_2 + A^{(2)3}_2 A^{(2)2}_3 \\ \vdots \\ A^{(2)9}_9 A^{(2)9}_9 \end{array} \right) \hat{\mathbf{a}}_{(4)}, \quad (4.119)$$

где

$$\hat{\mathbf{a}}_{(4)} = (\tilde{\Omega}_{(2)}^{11}, \tilde{\Omega}_{(2)}^{12} + \tilde{\Omega}_{(2)}^{21}, \tilde{\Omega}_{(2)}^{13} + \tilde{\Omega}_{(2)}^{31}, \dots, \tilde{\Omega}_{(2)}^{19} + \tilde{\Omega}_{(2)}^{91}, \tilde{\Omega}_{(2)}^{22}, \tilde{\Omega}_{(2)}^{23} + \tilde{\Omega}_{(2)}^{32}, \dots, \tilde{\Omega}_{(2)}^{99})^T.$$

Здесь, как и в (4.98'), мы выписываем только члены на главной диагонали, поэтому, очевидно, характер такой матрицы  $\hat{A}^{(4)}$  можно вычислить по формуле, аналогичной (4.101):

$$\chi(\hat{A}^{(4)}) = \frac{1}{2} (\chi^2(A^{(2)}) + \chi(A^{(2)2})). \quad (4.119)$$

Отметим, что формула (4.119) не зависит от конкретных значений и порядка матрицы  $A^{(2)}$ . Поэтому если матрицу  $A^{(2)}$  заменить на

симметризованный  $\widehat{A}^{(2)}$ , то формально результат (4.119), очевидно, не изменится:

$$\chi(\widehat{A}^{(4)}) = \frac{1}{2}(\chi^2(\widehat{A}^{(2)}) + \chi(\widehat{A}^{(2)2})). \quad (4.120)$$

Матрица  $\widehat{A}^{(4)}$ , полученная таким образом, будет соответствовать компонентам индифферентного тензора  $\Omega^{i_1 i_2 i_3 i_4}$ , симметричного уже не только по парам индексов, но и внутри каждой пары:  $i_1, i_2$  и  $i_3, i_4$ , что и доказывает формулу (4.112) для случая  $n = 4$ .

Для  $n > 4$  справедливость теоремы можно показать таким же способом. ▲

Для компонент симметричного тензора четвертого ранга  $\bar{\Omega}^{i_1 i_2 i_3 i_4}$ , т.е. удовлетворяющего соотношениям (4.37), формулу (4.120) можно преобразовать, если учесть, что  $\chi(\widehat{A}^{(2)2}) = \chi(\widehat{A}^{2(2)})$ , и воспользоваться формулой (4.101):

$$\chi(\widehat{A}^{(4)}) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{4} (\chi^2(A) + \chi(A^2))^2 + \frac{1}{2} (\chi^2(A^2) + \chi(A^4)) \right). \quad (4.121)$$

Приводя подобные, получаем следующую теорему.

**Теорема 4.14.** Характеры матричного представления группы  $G_s$ , образованного с помощью симметризованных матриц четвертого уровня  $\widehat{A}^{(4)}$ , соответствующих индифферентному тензору  ${}^4\Omega$  с условиями (4.37), связаны с характерами матричного представления первого уровня  $A$  следующей формулой:

$$\chi(\widehat{A}^{(4)}) = \frac{1}{8} \left( \chi^4(A) + 2\chi(A^2)\chi^2(A) + 3\chi^2(A^2) + 2\chi(A^4) \right). \quad (4.122)$$

Эта формула вместе с (4.82) (или (4.90), (4.94) для непрерывных групп) позволяет установить число независимых компонент индифферентного тензора четвертого ранга  ${}^4\Omega$ , обладающего симметрией компонент вида (1.263).

#### 4.3.5. Расчет независимых компонент тензоров с помощью характеров матричных представлений

Для того чтобы воспользоваться формулами (4.82), (4.90) или (4.94), нужно вычислить характеры  $\chi(A)$  матриц  $A^i_j$ , входящих в группы симметрии  $G_s$ . Вычисления можно сократить, если учесть, что характеры всех матриц, принадлежащих к одному и тому же классу  $\mathcal{E}_s$ , сопряженных элементов группы  $G_s$ , равны. Поэтому достаточно вычислить характер  $\chi(A)$  только одной какой-либо матрицы из класса.

Например, для матриц  $A^i_j$  из моноклинной группы  $G_5$  имеем:

$$\chi(A) = \chi(E) = 3, \quad (4.123)$$

$$\chi(C) = -3, \quad \chi(D_3) = -1, \quad \chi(R_3) = 1, \quad p = 4.$$

Тогда по формулам (4.82) находим число независимых компонент индифферентного вектора (тензора первого ранга  $n = 1$ ):

$$\begin{aligned} k &= \frac{1}{4}(\chi(E) + \chi(C) + \chi(D_3) + \chi(R_3)) = \\ &= \frac{1}{4}(3 + (-3) + (-1) + 1) = 0, \end{aligned} \quad (4.124)$$

т.е. индифферентных векторов относительно данной группы не существует.

По формуле (4.101) находим характеры  $\chi(\hat{A}^{(2)})$  симметризованных матриц второго уровня группы  $G_5$ :

$$\chi(\hat{E}^{(2)}) = 6, \quad \chi(\hat{C}^{(2)}) = \frac{1}{2}(\chi^2(C) + \chi(C^2)) = \frac{1}{2}(3^2 + 3) = 6, \quad (4.125)$$

$$\chi(\hat{D}_3^{(2)}) = \frac{1}{2}(\chi^2(D_3) + \chi(D_3^2)) = \frac{1}{2}(1 + 3) = 2, \quad \chi(R_3) = \frac{1}{2}(1 + 3) = 2.$$

Тогда по формуле (4.82) находим:

$$k = \frac{1}{4}(\chi(\hat{E}^{(2)}) + \chi(\hat{C}^{(2)}) + \chi(\hat{D}_3^{(2)}) + \chi(\hat{R}_3^{(2)})) = \frac{1}{4}(6 + 6 + 2 + 2) = 4 \quad (4.126)$$

– число независимых компонент симметричного тензора второго ранга  $\Omega^{i_1 i_2}$ , индифферентного относительно моноклинной группы.

По формуле (4.108) находим характеры  $\chi(\hat{A}^{(3)})$  симметризованных матриц третьего уровня группы  $G_5$ :

$$\begin{aligned} \chi(\hat{E}^{(3)}) &= 6 \cdot 3 = 18, \quad \chi(\hat{C}^{(3)}) = -3 \cdot 6 = -18, \\ \chi(\hat{D}_3^{(3)}) &= -1 \cdot 2 = -2, \quad \chi(\hat{R}_3^{(3)}) = 1 \cdot 2 = 2, \end{aligned} \quad (4.127)$$

тогда по формуле (4.108) находим:

$$\begin{aligned} k &= \frac{1}{4}(\chi(\hat{E}^{(3)}) + \chi(\hat{C}^{(3)}) + \chi(\hat{D}_3^{(3)}) + \chi(\hat{R}_3^{(3)})) = \\ &= \frac{1}{4}(18 - 18 - 2 + 2) = 0, \end{aligned} \quad (4.128)$$

т.е. индифферентных симметричных тензоров третьего ранга для данной группы нет.

Наконец, по формуле (4.122) находим характеры симметризованных матриц четвертого уровня:

$$\chi(\hat{E}^{(4)}) = \frac{1}{8}(3^4 + 2 \cdot 3 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3) = 21,$$

$$\chi(\widehat{C}^{(4)}) = \frac{1}{8}((-3)^4 + 2 \cdot 3 \cdot (-3)^2 + 3 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3) = 21, \quad (4.129)$$

$$\chi(\widehat{D}_3^{(4)}) = \frac{1}{8}((-1)^4 + 2 \cdot 3 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3) = 5,$$

$$\chi(\widehat{R}_3^{(4)}) = \frac{1}{8}(1^4 + 2 \cdot 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3) = 5.$$

По формуле (4.82) находим:

$$k = \frac{1}{4}(21 + 21 + 5 + 5) = 13$$

— число независимых компонент симметричного тензора четвертого ранга  $\Omega^{i_1 i_2 i_3 i_4}$ , индифферентного относительно моноклинного класса.

*Таблица 4.4.* Число  $k$  независимых компонент векторов и симметричных тензоров второго, третьего и четвертого рангов, индифферентных относительно различных групп симметрии

Сингония	Класс симметрии	Группа $G_s$	Число $k$			
			век- торы $n=1$	сим. тен- зоры 2-го ранга	сим. тен- зоры 3-го ранга	сим. тен- зоры 4-го ранга
Триклинная	$E$ Триклинный	1	3	6	18	21
		2	0		0	
Моноклинная	$M$ Моноклинный	3	2	4	10	13
		4	1		8	
		5	0		0	
Ромбическая	$O$ Орто- тропный	6	1	3	5	9
		7	0		3	
		8	0		0	
Тетрагональная	$T$ Тетрагональный	9	0	2	4	7
		10	1		4	
		11	0		0	

Сингония	Класс симметрии	Группа $G_s$	Число $k$			
			векторы $n=1$	сим. тен- зоры 2-го ранга	сим. тен- зоры 3-го ранга	сим. тен- зоры 4-го ранга
	$K_3$ Квазизо-троп-ный	12	0	2	2	6
		13	1		3	
		14	0		1	
		15	0		0	
Ромбическая	$A$ Ромбический	16	1	2	6	7
		17	0		0	
	$B$ Ромбический	18	1	2	4	6
		19	0		2	
		20	0		0	
Гексагональная	$H$ Гексагональный	21	0	2	2	5
		22	1		4	
		23	0		0	
		24	0		1	
		25	0		1	
		26	1		3	
		27	0		0	
Кубическая	$K$ Квазизо-троп-ный	28	0	1	1	3
		29	0		0	
		30	0		1	
		31	0		0	
		32	0		0	
	Трансверсаль-ноизо-троп-ный	33	1	2	4	5
		34	0		0	
		35	1		3	
		36	0		1	
		37	0		0	
	Изотроп-ный	38	0	1	0	2
		39	0		0	

Подобные вычисления можно проделать для всех остальных групп симметрии  $G_s$ , используя для этого данные из табл.3.3 и 3.4, в которых приведены характеристы матричного представления  $\chi(A)$  классов сопряженных элементов симметрии для всех групп симметрии  $G_s$ .

Итог этих вычислений подведем следующей теоремой.

**Теорема 4.15.** Число  $k$  независимых компонент векторов и симметричных тензоров второго, третьего и четвертого рангов (т.е. удовлетворяющих соотношениям (4.37) и (4.41)), индифферентных относительно групп симметрии  $G_s$ ,  $s = 1 \dots 39$ , определяется в соответствии с табл.4.4.

Это число  $k$  совпадает с числом элементов тензорного базиса (4.19) в соответствующем пространстве индифферентных тензоров.

Для тензоров четных рангов число  $k$  одинаково для всех групп в рамках класса симметрии (см. табл.4.4). Этим обстоятельством, главным образом, и обусловлено выделение в сингониях понятия класса симметрии.

#### § 4.4. Скалярные инварианты

Кроме индифферентных тензоров, сохраняющих свои компоненты при определенных преобразованиях, в механике и физике широко применяют скалярные функции от тензоров, также не изменяющиеся при линейных преобразованиях координат.

##### 4.4.1. Определение скалярных инвариантов

**Определение 4.4.** Скалярным инвариантом тензора  $\Omega$   $n$ -го ранга относительно группы преобразований  $G_s$  называют функцию  $I^{(s)}$ :  $T_3^{(n)} \rightarrow \mathbb{R}^1$

$$I^{(s)} = I^{(s)}(\Omega) = I^{(s)}(\bar{\Omega}^{i_1 \dots i_n}), \quad (4.130)$$

от компонент тензора  $\bar{\Omega}^{i_1 \dots i_n}$  в некотором базисе  $\bar{e}_i$ , не изменяющиеся при любых преобразованиях в данной группе  $G_s$ , т.е.

$$I^{(s)}(\Omega^{i_1 \dots i_n}) = I^{(s)}(\bar{\Omega}^{i_1 \dots i_n}). \quad (4.131)$$

Здесь

$$\Omega^{i_1 \dots i_n} = \bar{\Omega}^{j_1 \dots j_n} A_{j_1}^{i_1} \dots A_{j_n}^{i_n}, \quad \forall A_j^i \in G_s. \quad (4.132)$$

**Замечание 1.** Данное определение включает в себя задание кристаллофизического базиса  $\bar{e}_i$  или осей анизотропии. Фиксируя группу  $G_s$ ,

матриц преобразования и меняя базис на  $\mathbf{e}'_i$ , получим другие инварианты  $I^{(s)}(\Omega^{i_1 \dots i_n})$  тензора  ${}^n\Omega = \Omega^{i_1 \dots i_n} \mathbf{e}'_{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}'_{i_n}$  относительно изомерной группы симметрии  $G'_s$ .

Далее, если не оговаривается особо, полагаем, что инварианты рассматриваются в базисе  $\bar{\mathbf{e}}_i$ .

*Замечание 2.* Согласно определению 4.4, скалярный инвариант тензора можно рассматривать и как функцию  $I^{(s)}: T_3^{(n)} \rightarrow \mathbb{R}^1$ , и, после фиксирования кристаллографического базиса  $\bar{\mathbf{e}}_i$ , как функцию  $I^{(s)}: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^1$ , ставящую в соответствие набору компонент  $\Omega^{i_1 \dots i_n}$  тензора в базисе  $\bar{\mathbf{e}}_i$  вещественное число. Здесь  $k = 3^n$  – число компонент тензора, равное размерности пространства  $T_3^{(n)}$ . Оба эти подхода эквивалентны.

*Замечание 3.* Если у тензора  ${}^n\Omega$  не все компоненты  $\tilde{\Omega}^{i_1 \dots i_n}$  являются независимыми (например, когда тензор  ${}^n\Omega$  – симметричный по какой-либо группе индексов  $\sigma$ , т.е. принадлежит подпространству  $S_{3\sigma}^{(n)} \equiv S_{3\sigma}^{(n)} \subset T_3^{(n)}$ ), то число  $k$  будет меньше, чем  $3^n$ . В этом случае, будем всегда полагать, что аргументами функции  $I^{(s)}(\Omega^{i_1 \dots i_n})$  являются только  $k$  независимых компонент тензора  ${}^n\Omega$ . Набор этих компонент  $\Omega^{i_1 \dots i_n}$  представляет собой элемент пространства  $\mathbb{R}^k$ , и для него будем применять обозначение  $\Omega^{i_1 \dots i_n} \in \mathbb{R}^k$ .

#### 4.4.2. Независимые инварианты

Инвариантов относительно фиксированной группы  $G_s$  у каждого тензора  ${}^n\Omega$  существует бесконечное множество (любой инвариант, умноженный на число – тоже инвариант), поэтому выделяют *функционально независимые* инварианты тензора (будем их называть также просто независимыми). Дадим их определение.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.5.** Отображение  $f: \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^1$  ( $r \geq 1$ ) называют *тригонометрической функцией от r аргументов* и обозначают как  $f(I_1, \dots, I_r)$ , где  $(I_1, \dots, I_r) \in \mathbb{R}^r$ , если существует такая область  $W \subset \mathbb{R}^r$ , что для любых несовпадающих элементов  $(I_1, \dots, I_r) \subset W$  и  $(I_1^*, \dots, I_r^*) \subset W$ , их образы совпадают:

$$f(I_1, \dots, I_r) = f(I_1^*, \dots, I_r^*). \quad (4.133)$$

Соответственно, функция  $f(I_1, \dots, I_r)$  – *нетривиальная*, если в любой области  $W \subset \mathbb{R}^r$  всегда найдутся несовпадающие элементы  $(I_1, \dots, I_r) \subset W$  и  $(I_1^*, \dots, I_r^*) \subset W$ , образы которых также не совпадают.

Определение 4.5 применимо для функций  $f$ , непрерывных во всем  $\mathbb{R}^r$ . Если же  $f$  является непрерывно дифференцируемой в  $\mathbb{R}^r$ , то для нее справедлива следующая теорема.

**Теорема 4.16.** Пусть функция  $f(I_1, \dots, I_r)$  непрерывно дифференцируема в  $\mathbb{R}^r$ , тогда она является тривиальной в том и только в том случае, когда существует область  $W \subset \mathbb{R}^r$ , в которой все ее частные производные тождественно равны нулю:  $\partial f / \partial I_\beta = 0$  ( $\beta = 1, \dots, r$ ).

▼ Действительно, если  $f$  – тривиальная, то существует область  $W$ , в которой выполняется (4.133) для любых  $I_\beta \neq I_\beta^*$  из  $W$ . Тогда для всякого фиксированного набора  $(I_1, \dots, I_\beta, \dots, I_r)$  можно образовать функцию

$$g_\beta(I_1, \dots, I_r) = \frac{f(I_1, \dots, I_\beta, \dots, I_r) - f(I_1, \dots, I_\beta^*, \dots, I_r)}{I_\beta - I_\beta^*} = 0,$$

значение которой равно нулю, а предел при  $I_\beta \rightarrow I_\beta^*$  совпадает с частной производной:

$$\lim_{I_\beta \rightarrow I_\beta^*} g_\beta(I_1, \dots, I_r) = \partial f / \partial I_\beta = 0.$$

В силу построения, этот предел всегда равен нулю во всей  $W$ .

Наоборот, если у функции  $f$  все частные производные равны нулю в некоторой области  $W$ , то  $f$  является константой в  $W$ . Тогда, очевидно, что (4.133) всегда выполнено. ▲

**Следствие.** Из этой теоремы следует, что непрерывно дифференцируемая функция  $f$  является нетривиальной тогда и только тогда, когда в любой области  $W \subset \mathbb{R}^r$  в какой-либо точке найдется хотя бы одна не равная нулю частная производная  $\partial f / \partial I_\beta \neq 0$ ,  $\beta \in \{1, \dots, r\}$ .

Примером тривиальной функции является тривиальная линейная комбинация (см. п. 2.1.2) инвариантов  $f = s_1 I_1 + \dots + s_r I_r$ , для которой выполнение условия (4.133) эквивалентно тому, что  $s_\alpha = 0$ ,  $\alpha = 1, \dots, r$ .

**Определение 4.6.** Если для системы скалярных инвариантов  $I_\alpha(^n\Omega)$ ,  $\alpha = 1, \dots, r$ , тензора  ${}^n\Omega$  относительно группы  $G$ , существует нетривиальная функция  $f(I_1, \dots, I_r)$ , тождественно равная нулю при всех значениях компонент  $\bar{\Omega}^{i_1 \dots i_n}$ :

$$f(I_1(\bar{\Omega}^{i_1 \dots i_n}) \dots I_r(\bar{\Omega}^{i_1 \dots i_n})) = 0, \quad \forall \bar{\Omega}^{i_1 \dots i_n}, \quad (4.134)$$

то такую систему инвариантов называют функционально зависимой.

**Определение 4.7.** Систему скалярных инвариантов  $I_\alpha(^n\Omega)$ ,  $\alpha = 1, \dots, r$ , тензора  ${}^n\Omega$  относительно группы  $G$ , называют функционально независимой, если для любой нетривиальной функции  $f(I_1, \dots, I_r)$  от этих инвариантов найдутся такие значения компонент  $\bar{\Omega}^{i_1 \dots i_n}$ , что

$$f(I_1(\bar{\Omega}^{i_1 \dots i_n}) \dots I_r(\bar{\Omega}^{i_1 \dots i_n})) \neq 0. \quad (4.135)$$

Эти определения обобщают понятие линейной независимости элементов системы (см. упр. 4.4.1).

Будем далее полагать, что инварианты  $I_\alpha(\Omega^{i_1 \dots i_n})$  и соответствующие функции  $f(I_1, \dots, I_r)$  принадлежат одному классу: либо непрерывных, либо непрерывно дифференцируемых функций в соответствующих пространствах.

#### 4.4.3. Условия функциональной независимости инвариантов

Сформулируем теперь достаточное условие независимости системы инвариантов.

**ТЕОРЕМА 4.17.** Пусть имеется тензор  ${}^n\Omega$ , принадлежащий пространству  $T_3^{(n)}$ , причем  $\dim T_3^{(n)} = k \leq 3^n$ , рассмотрим инварианты этого тензора  $I_\alpha(\bar{\Omega}^{i_1 \dots i_n})$ ,  $\alpha = 1, \dots, r$ , относительно некоторой группы  $G_s$ , которые являются непрерывно дифференцируемыми функциями  $I_\alpha : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^1$ . Тогда при  $r \leq k$  система инвариантов  $I_1, \dots, I_r$  функционально зависима в том и только в том случае, если для любого  $\bar{\Omega}^{i_1 \dots i_n} \in \mathbb{R}^k$

$$\operatorname{rang} \left( \frac{\partial I_\alpha}{\partial \bar{\Omega}^{i_1 \dots i_n}} \right) < r, \quad (4.136)$$

а при  $r > k$  система инвариантов  $I_1, \dots, I_r$  всегда функционально зависима.

▼ Пусть инварианты  $I_\alpha$ ,  $\alpha = 1, \dots, r$ , функционально зависимы, тогда согласно определению 4.6 существует нетривиальная непрерывно дифференцируемая функция  $f(I_1(\bar{\Omega}^{i_1 \dots i_n}), \dots, I_r(\bar{\Omega}^{i_1 \dots i_n}))$ , равная нулю для любого  $\bar{\Omega}^{i_1 \dots i_n} \in \mathbb{R}^k$ . Дифференциал  $df$  такой функции также тождественно равен нулю в  $\mathbb{R}^k$ , следовательно,

$$df = \sum_{\alpha=1}^r \frac{\partial f}{\partial I_\alpha} dI_\alpha = \sum_{\alpha=1}^r \frac{\partial f}{\partial I_\alpha} \frac{\partial I_\alpha}{\partial \bar{\Omega}^{i_1 \dots i_n}} d\bar{\Omega}^{i_1 \dots i_n} = 0 \quad \forall \bar{\Omega}^{i_1 \dots i_n}. \quad (4.137)$$

В силу независимости приращений  $d\bar{\Omega}^{i_1 \dots i_n}$  (см. замечание 3 из п. 4.4.1) из (4.137) получаем, что должно выполняться соотношение:

$$\sum_{\alpha=1}^r \frac{\partial f}{\partial I_\alpha} \frac{\partial I_\alpha}{\partial \bar{\Omega}^{i_1 \dots i_n}} = 0. \quad (4.138)$$

Так как  $f$  – нетривиальная, то в силу следствия из теоремы 4.16 в соотношении (4.138) при любых  $\bar{\Omega}^{i_1 \dots i_n}$  найдутся не все нулевые коэффициенты  $\partial f / \partial I_\alpha$ , тогда (4.138) выражает собой линейную зависимость

всех  $r$  координатных строк матрицы  $(\partial I_\alpha / \partial \bar{\Omega}^{i_1 \dots i_n})$ . Следовательно, максимальное число независимых строк этой матрицы всегда меньше  $r$ . По теореме 2.10а, отсюда следует, что ранг такой матрицы также всегда меньше  $r$ . В одну сторону теорема доказана.

В обратную сторону. Предположим, что имеет место (4.136), но инварианты  $I_\alpha$  – функционально независимы. Тогда, согласно определению 4.7, для всякой нетривиальной функции  $f(I_1, \dots, I_r)$  найдутся такие значения  $\bar{\Omega}^{i_1 \dots i_n}$ , что выполняется соотношение (4.135).

Выберем в качестве такой функции линейную функцию  $f = c_1 I_1 + \dots + c_r I_r$ , где  $c_1, \dots, c_r$  – произвольные не все нулевые числа. Но тогда дифференциал такой функции будет отличен от нуля:

$$df = \sum_{\alpha=1}^r c_\alpha dI_\alpha \neq 0 \quad (4.139)$$

при любых ненулевых  $dI_\alpha$ . Следовательно, рассматривая  $I_\alpha$  как функции от  $\bar{\Omega}^{i_1 \dots i_n}$ , имеем

$$\sum_{\alpha=1}^r c_\alpha \frac{\partial I_\alpha}{\partial \bar{\Omega}^{i_1 \dots i_n}} d\bar{\Omega}^{i_1 \dots i_n} \neq 0. \quad (4.140)$$

В силу произвольности  $d\bar{\Omega}^{i_1 \dots i_n}$  (так как  $dI_\alpha$  в (4.139) также произвольны), получаем, что имеют место следующие соотношения:

$$\sum_{\alpha=1}^r c_\alpha \frac{\partial I_\alpha}{\partial \bar{\Omega}^{i_1 \dots i_n}} \neq 0. \quad (4.141)$$

Таким образом, мы показали, что для любых не всех нулевых коэффициентов  $c_\alpha$  имеют место соотношения (4.141), означающие, что все  $r$  строк матрицы  $(\partial I_\alpha / \partial \bar{\Omega}^{i_1 \dots i_n})$  линейно независимы.

Если  $r > k$ , то получаем, что имеются  $r$  линейно независимых строк длиной  $k$ , что согласно теореме 2.2 невозможно. Следовательно, предположение о независимости инвариантов  $I_1, \dots, I_r$  – ложно. Если же  $r \leq k$ , то согласно теореме 2.10а независимость всех  $r$  строк матрицы  $\partial I_\alpha / \partial \bar{\Omega}^{i_1 \dots i_n}$  означает, что

$$\text{rang } (\partial I_\alpha / \partial \bar{\Omega}^{i_1 \dots i_n}) = r,$$

но это противоречит условию теоремы, следовательно, инварианты  $I_1, \dots, I_r$  – функционально зависимы, и в этом случае теорема доказана.



С помощью теоремы 4.17 можно указать достаточные условия независимости инвариантов, которыми будем пользоваться далее.

**Теорема 4.18.** Пусть имеется система инвариантов  $I_\alpha(^n\Omega)$  (где  $\alpha = 1, \dots, r$  и  $r \leq k$ ) тензора  ${}^n\Omega$  относительно группы  $G_s \subset I$ , являющихся непрерывно дифференцируемыми функциями. Выполнение каждого из следующих условий является достаточным для функциональной независимости этой системы инвариантов:

- 1º подсистема из  $r - 1$  инварианта  $I_\alpha$  ( $\alpha = 1, \dots, r$ ,  $\alpha \neq \beta$ ) данной системы является независимой, а инвариант  $I_\beta$  зависит хотя бы от одной компоненты  $\bar{\Omega}^{i_1 \dots i_n}$ , от которой не зависят остальные инварианты;
- 2º каждый из инвариантов  $I_\alpha$  ( $\alpha = 1, \dots, r$ ) зависит хотя бы от одной компоненты  $\bar{\Omega}^{i_1 \dots i_n}$ , от которой не зависят остальные инварианты.

▼ Докажем п. 1º.

Образуем матрицу частных производных  $(\partial I_\alpha / \partial \bar{\Omega}^{i_1 \dots i_n})$  в условиях теоремы:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial I_1}{\partial \bar{\Omega}^{1 \dots 1}} & \dots & \frac{\partial I_1}{\partial \bar{\Omega}^{i_1 \dots i_n}} & \dots & \frac{\partial I_1}{\partial \bar{\Omega}^{3 \dots 3}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial I_\beta}{\partial \bar{\Omega}^{1 \dots 1}} & \dots & \frac{\partial I_\beta}{\partial \bar{\Omega}^{i_1 \dots i_n}} & \dots & \frac{\partial I_\beta}{\partial \bar{\Omega}^{3 \dots 3}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial I_r}{\partial \bar{\Omega}^{1 \dots 1}} & \dots & \frac{\partial I_r}{\partial \bar{\Omega}^{i_1 \dots i_n}} & \dots & \frac{\partial I_r}{\partial \bar{\Omega}^{3 \dots 3}} \end{pmatrix} =$$

$$= \left( \begin{array}{c|c|c} & i_1 \dots i_n & \\ \hline & 0 & \\ \hline & \vdots & \\ \hline & 0 & \\ \hline c & \hline 0 & \\ \hline & \vdots & \\ \hline & 0 & \end{array} \right) \leftarrow \beta.$$

Согласно этим условиям столбец, соответствующий индексам  $i_1^*, \dots, i_n^*$ , состоит из нулей кроме элемента в  $\beta$ -й строке:

$$c = \partial I_\beta / \partial \bar{\Omega}^{i_1^* \dots i_n^*}.$$

Вычеркивая из этой матрицы  $\beta$ -ую строку и несколько столбцов, включая  $(i_1^* \dots i_n^*)$ -ый, получаем матрицу  $(\partial I_\alpha / \partial \bar{\Omega}^{i_1 \dots i_n})'$  частных производных размером  $(r - 1) \times (k - 1)$ , которая содержит все производные

от инвариантов  $I_\alpha$ ,  $\alpha = 1 \dots r$ ,  $\alpha \neq \beta$ . Так как эти инварианты независимы, то эта матрица имеет ранг

$$m = \text{rang} \left( \frac{\partial I_\alpha}{\partial \bar{\Omega}^{i_1 \dots i_n}} \right)' \geq r - 1$$

согласно теореме 4.17. Но так как в ней только  $(r - 1)$  строк, то  $m = r$ . Значит, вычеркиванием  $(k - r)$  столбцов в матрице  $(\partial I_\alpha / \partial \bar{\Omega}^{i_1 \dots i_n})'$  можно найти невырожденную матрицу  $(\partial I_\alpha / \partial \bar{\Omega}^{i_1 \dots i_n})''$   $(r - 1)$ -го порядка.

Тогда, вычеркивая те же самые столбцы в матрице  $(\partial I_\alpha / \partial \bar{\Omega}^{i_1 \dots i_n})$ , придем к матрице  $(\partial I_\alpha / \partial \bar{\Omega}^{i_1 \dots i_n})'''$   $r$ -го порядка, содержащей  $\beta$ -ую строку и столбец, соответствующий индексам  $i_1^* \dots i_n^*$ . Вычислим детерминант этой матрицы, используя разложение по указанному  $(i_1^* \dots i_n^*)$ -ому столбцу. Тогда получим

$$\det (\partial I_\alpha / \partial \bar{\Omega}^{i_1 \dots i_n})''' = \det (\partial I_\alpha / \partial \bar{\Omega}^{i_1 \dots i_n})'' \neq 0,$$

так как по условию теоремы  $c \neq 0$  и  $\det (\partial I_\alpha / \partial \bar{\Omega}^{i_1 \dots i_n})'' \neq 0$ . Отсюда следует, что

$$\text{rang} (\partial I_\alpha / \partial \bar{\Omega}^{i_1 \dots i_n})''' = \text{rang} (\partial I_\alpha / \partial \bar{\Omega}^{i_1 \dots i_n})'' = r.$$

Согласно теореме 4.17 это означает, что вся система инвариантов  $I_1 \dots I_r$  – функционально зависима. Для случая 1° теорема доказана.

Рассмотрим случай 2°. Выберем вначале два инварианта, к ним применимы условия п.1°. Следовательно, они независимы. Далее при соединяя к системе третий инвариант – снова оказываются применимы условия п.1°, и система трех инвариантов будет независима. Продолжая этот процесс до  $r$ -го инварианта, очевидно, получим независимость всей системы  $r$  инвариантов. Теорема доказана. ▲

Сформулируем еще одну теорему, которая нам потребуется при подсчете независимых инвариантов тензоров.

**ТЕОРЕМА 4.19.** *Если в некотором базисе  $e_i$ , полученнном из  $\bar{e}_i$  с помощью матрицы  $A_{;i}^j$ , принадлежащей некоторой группе симметрии  $G_s$ :  $\bar{e}_i = A_{;i}^j e_j$ , где  $A_{;i}^j \in G_s$ , тензор  ${}^n\Omega = \Omega^{i_1 \dots i_n} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_n}$  имеет  $r$  ненулевых компонент, то число  $r$  функционально независимых инвариантов этого тензора относительно той же группы  $G_s$  не может быть больше  $p$ :  $r \leq p$ .*

▼ Действительно, пусть имеется набор из  $r$  скалярных инвариантов тензора  ${}^n\Omega$  относительно группы  $G_s$ :  $I_\alpha = I_\alpha(\bar{\Omega}^{i_1 \dots i_n})$  с осями анизотропии, направленными по  $\bar{e}_i$ . Так как данная матрица  $A_{;i}^j \in G_s$ ,

то функции  $I_\alpha = I_\alpha(\Omega^{i_1 \dots i_n})$ ,  $\alpha = 1 \dots r$ , также будут инвариантами тензора  ${}^n\Omega$  вследствие соотношения:

$$I_\alpha(\Omega^{i_1 \dots i_n}) = I_\alpha(A^{i_1}_{j_1} \dots A^{i_n}_{j_n} \bar{\Omega}^{j_1 \dots j_n}) = I_\alpha(\bar{\Omega}^{j_1 \dots j_n}).$$

По условию теоремы  $I_\alpha(\bar{\Omega}^{i_1 \dots i_n})$ ,  $\alpha = 1 \dots r$ , – независимы, тогда и система  $I_\alpha(\Omega^{i_1 \dots i_n})$ ,  $\alpha = 1 \dots r$ , – функционально независима. Но согласно теореме 4.18, число  $r$  не может быть больше ранга матрицы  $\partial I_\alpha / \partial \Omega^{i_1 \dots i_n}$ , а так как  $\Omega^{i_1 \dots i_n}$  имеет только  $r$  ненулевых компонент, то ранг этой матрицы не может быть больше  $p$ , т.е.

$$r \leq \text{rang } (\partial I_\alpha / \partial \Omega^{i_1 \dots i_n}) \leq p. \quad \blacktriangle$$

#### 4.4.4. Функциональный базис

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.8.** Система из  $r$  скалярных инвариантов  $I_\gamma^{(s)}(\Omega)$  (где  $\gamma = 1 \dots r$ ) тензора  ${}^n\Omega$  относительно группы преобразований  $G_s$ , называется функциональным базисом независимых инвариантов тензора относительно группы преобразований  $G_s$ , если

- она является функционально независимой,
- любой иной, не входящий в эту систему, скалярный инвариант тензора  ${}^n\Omega$  относительно этой же группы преобразований  $G_s$ , может быть представлен в виде функции от этих инвариантов  $I_\gamma^{(s)}$ .

Функциональный базис, очевидно, всегда является не единственным.

Заметим, что скалярные инварианты (4.130) могут быть установлены для любого тензора  ${}^n\Omega$ , не обязательно являющегося индифферентным.

Из теоремы 4.18 следует, что число  $r$  функционально независимых инвариантов не может быть больше числа  $k$  – независимых компонент тензора  ${}^n\Omega$ . Независимые скалярные инварианты  $I_\gamma({}^n\Omega)$  относительно группы  $G_s$ , могут быть образованы с помощью операции свертки *направляющих* тензоров  $O_\gamma$  в данной группе с данным тензором  ${}^n\Omega$  и его тензорными степенями  ${}^n\Omega \otimes {}^n\Omega$  и  ${}^n\Omega \otimes {}^n\Omega \otimes {}^n\Omega$ .

Такие инварианты называют *полиномиальными*. Реально в механике и физике другие, неполиномиальные инварианты используют крайне редко, и здесь они далее не рассматриваются.

Заметим также, что когда говорят о независимых инвариантах и компонентах тензора  ${}^n\Omega$ , фактически неявно предполагают, что этот тензор имеет *максимально возможное* число ненулевых и различных между собой компонент. В частном же случае тензоры могут принимать любые значения, например, все компоненты тензора  $\Omega^{i_1 \dots i_n}$  могут быть равны между собой, но это отнюдь не означает, что у тензора одна независимая компонента и один инвариант. Поэтому

везде далее будем использовать понятие независимых инвариантов и компонент тензора с учетом этого допущения.

#### 4.4.5. Неприводимые инварианты

Иногда ограничивают вид зависимости между инвариантами и рассматривают только *полиномиальные* соотношения между ними, при этом если какой-либо инвариант может быть представлен в виде полинома (т.е. суммы степеней) от других инвариантов, то его называют *приводимым*. В противном случае его называют *неприводимым*.

Если выбран набор из  $p$  скалярных инвариантов тензора  $\Omega$  относительно группы  $G_s$ , которые обладают следующими свойствами:

- являются неприводимыми,
  - любой иной, не входящий в этот набор инвариант можно представить в виде *полинома* от этих инвариантов,
- то такой набор называют *минимальным целым рациональным базисом*.

Очевидно, что число элементов  $p$  минимального рационального базиса и число  $r$  элементов полного набора функционально независимых инвариантов, вообще говоря, различны, причем  $r \leq p$ , а  $p$  может быть больше  $k$ . В самом деле, возможна ситуация, когда соотношения между инвариантами являются полиномиальными, но ни один из них не может быть выражен в виде полинома от других инвариантов. Такие соотношения называются *сизигиями*. В то же время из сизигии какой-либо инвариант  $I_\gamma^{(s)}$  можно выразить как неполиномиальную функцию от других инвариантов, тогда он заведомо не будет входить в полный набор функционально независимых инвариантов. Однако  $I_\gamma^{(s)}$  останется неприводимым и войдет в целый рациональный базис (если, конечно, он не выражается полиномиально из других каких-либо еще соотношений).

Примером такой сизигии является, например, полиномиальное соотношение между инвариантами  $I_1$  и  $I_2$ :

$$aI_1^2 + bI_1I_2 + cI_2^2 = 0,$$

где  $a, b, c$  – числа. Очевидно, что в общем случае ни  $I_1$ , ни  $I_2$  нельзя выразить в виде полинома друг от друга, и в то же время  $I_1$  или  $I_2$  можно выразить в виде неполиномиальной функции от  $I_2$  или  $I_1$ . Другие примеры сизигий будут приведены в упражнениях к §4.4.

Далее нас будут интересовать в основном функционально независимые инварианты.

Наиболее часто в механике используют инварианты векторов и симметричных тензоров второго ранга, т.е.  $n=1$  и  $2$ . Рассмотрим их.

#### 4.4.6. Инварианты вектора

Независимые скалярные инварианты вектора  $\mathbf{a} = \bar{a}_i \mathbf{e}_i$ ; относительно группы  $G_s$ , могут быть образованы с помощью операции скалярного

произведения вектора  $\mathbf{a}$  с образующим вектором  $\mathbf{O}_{(\gamma)}$  (тензорами размерности  $n = 1$ ) соответствующей группы  $G_s$ , а также скалярного произведения тензора  $\mathbf{a} \otimes \mathbf{a}$  с образующими тензорами второго ранга  $\mathbf{O}_{s(\gamma)}$ . При этом число  $r$  независимых инвариантов вектора не может превышать  $r \leq k = 3$ .

Исходя из перечня (4.27) направляющих векторов и тензоров, получим, что указанным выше способом можно построить только следующие инварианты вектора  $\mathbf{a}$ :

$$\mathbf{a} \cdot \bar{\mathbf{e}}_\alpha = \bar{a}_\alpha, \quad \mathbf{a} \otimes \mathbf{a} \cdot \mathbf{E} = |\mathbf{a}|^2, \quad \mathbf{a} \otimes \mathbf{a} \cdot \bar{\mathbf{e}}_\alpha^2 = \bar{a}_\alpha^2, \quad \mathbf{a} \otimes \mathbf{a} \cdot \overset{\circ}{\Omega}_\alpha = \bar{a}_\beta \bar{a}_\gamma. \quad (4.142)$$

В зависимости от принадлежности направляющих тензоров той или иной группе  $G_s$ , получаем из набора (4.142) инварианты вектора  $I_\gamma^{(s)}$  относительно данной группы  $G_s$ . Ниже приведены инварианты вектора  $\mathbf{a}$ , построенные указанным способом для всех групп  $G_s$ ,  $s = 1, \dots, 39$ .

В скобках выписана явная запись инвариантов через компоненты  $\bar{a}_i$  вектора в базисе  $\bar{\mathbf{e}}_i$ .

### I. Триклинная сингония

$$G_1 : \quad I_\alpha^{(1)} = \mathbf{a} \cdot \bar{\mathbf{e}}_\alpha = \bar{a}_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad r = 3; \quad \{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3\} \quad (4.143a)$$

$$G_2 : \quad I_1^{(2)} = \mathbf{a} \cdot \overset{\circ}{\Omega}_1 \cdot \mathbf{a} = \bar{a}_2 \bar{a}_3, \quad I_2^{(2)} = \mathbf{a} \cdot \overset{\circ}{\Omega}_2 \cdot \mathbf{a} = \bar{a}_1 \bar{a}_3, \\ I_2^{(3)} = |\mathbf{a}|^2, \quad r = 3; \quad \{\bar{a}_2 \bar{a}_3, \bar{a}_1 \bar{a}_3, |\mathbf{a}|^2\}$$

### II. Моноклинная сингония

$$G_3 : \quad I_\beta^{(3)} = \mathbf{a} \cdot \bar{\mathbf{e}}_\beta = \bar{a}_\beta, \quad \beta = 1, 2; \\ I_3^{(3)} = \mathbf{a} \cdot \bar{\mathbf{e}}_3^2 \cdot \mathbf{a} = \bar{a}_3^2, \quad r = 3; \quad \{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3^2\}$$

$$G_4 : \quad I_\beta^{(4)} = \mathbf{a} \cdot \bar{\mathbf{e}}_\beta^2 \cdot \mathbf{a} = \bar{a}_\beta^2, \quad \beta = 1, 2; \\ I_3^{(4)} = \mathbf{a} \cdot \bar{\mathbf{e}}_3 = \bar{a}_3, \quad r = 3; \quad \{\bar{a}_1^2, \bar{a}_2^2, \bar{a}_3\} \quad (4.143b)$$

$$G_5 : \quad I_\beta^{(5)} = \mathbf{a} \cdot \bar{\mathbf{e}}_\beta^2 \cdot \mathbf{a} = \bar{a}_\beta^2, \quad \beta = 1, 3; \\ I_2^{(5)} = \mathbf{a} \cdot \overset{\circ}{\Omega}_3 \cdot \mathbf{a} = \bar{a}_1 \bar{a}_2, \quad r = 3; \quad \{\bar{a}_1^2, \bar{a}_1 \bar{a}_2, \bar{a}_3^2\}$$

### III. Ромбическая сингония

$$G_6 : \quad I_\beta^{(6)} = \mathbf{a} \cdot \bar{\mathbf{e}}_\beta^2 \cdot \mathbf{a} = \bar{a}_\beta^2, \quad I_3^{(6)} = \mathbf{a} \cdot \bar{\mathbf{e}}_3 = \bar{a}_3, \\ \beta = 1, 2, \quad r = 3; \quad \{\bar{a}_1^2, \bar{a}_2^2, \bar{a}_3\}$$

$$G_s, s = 7, 8 : \quad I_\alpha^{(s)} = \mathbf{a} \cdot \bar{\mathbf{e}}_\alpha^2 \cdot \mathbf{a} = \bar{a}_\alpha^2, \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad r = 3; \\ \{\bar{a}_1^2, \bar{a}_2^2, \bar{a}_3^2\} \quad (4.143b)$$

### IV. Тетрагональная сингония

$$G_s, s = 9, 11, 12, 14, 15 : \quad I_1^{(s)} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2, \\ I_2^{(s)} = \mathbf{a} \cdot \bar{\mathbf{e}}_3^2 \cdot \mathbf{a} = \bar{a}_3^2, \quad r = 2; \quad \{\bar{a}_1^2, \bar{a}_3^2\}$$

$$G_s, s = 10, 13 : \quad I_1^{(s)} = |\mathbf{a}|^2, \quad I_2^{(s)} = \mathbf{a} \cdot \bar{\mathbf{e}}_3 = \bar{a}_3; \quad \{|\mathbf{a}|^2, \bar{a}_3\} \quad (4.143\text{г})$$

#### V. Ромбоздрическая сингония

$$G_s, s = 16, 18 : \quad I_1^{(s)} = |\mathbf{a}|^2, \quad I_2^{(s)} = \bar{a}_3, \quad r = 2; \quad \{|\mathbf{a}|, \bar{a}_3\}$$

$$G_s, s = 17, 19, 20 : \quad I_1^{(s)} = |\mathbf{a}|^2, \quad I_2^{(s)} = \bar{a}_3^2, \quad r = 2; \quad \{|\mathbf{a}|^2, \bar{a}_3^2\} \quad (4.143\text{д})$$

#### VI. Гексагональная сингония

$$G_s, s = 21, 23, 24, 25, 27 : \quad I_1^{(s)} = |\mathbf{a}|^2, \quad I_2^{(s)} = \bar{a}_3^2, \quad r = 2; \quad \{|\mathbf{a}|^2, \bar{a}_3^2\}$$

$$G_s, s = 22, 26 : \quad I_1^{(s)} = |\mathbf{a}|^2, \quad I_2^{(s)} = \bar{a}_3, \quad r = 2; \quad \{|\mathbf{a}|^2, \bar{a}_3\} \quad (4.143\text{е})$$

#### VII. Кубическая сингония

$$G_s, s = 28, \dots, 32 : \quad I_1^{(s)} = |\mathbf{a}|^2, \quad r = 1; \quad \{|\mathbf{a}|^2\} \quad (4.143\text{ж})$$

#### VIII. Трансверсальная изотропия

$$G_s, s = 33, 35 : \quad I_1^{(s)} = |\mathbf{a}|^2, \quad I_2^{(s)} = \bar{a}_3, \quad r = 2; \quad \{|\mathbf{a}|^2, \bar{a}_3\} \quad (4.143\text{з})$$

$$G_s, s = 34, 36, 37 : \quad I_1^{(s)} = |\mathbf{a}|^2, \quad I_2^{(s)} = \bar{a}_3^2, \quad r = 2; \quad \{|\mathbf{a}|^2, \bar{a}_3^2\}$$

#### IX. Изотропия

$$G_s, s = 38, 39 : \quad I_1^{(s)} = |\mathbf{a}|^2, \quad r = 1; \quad \{|\mathbf{a}|^2\} \quad (4.143\text{и})$$

Очевидно, что для тех групп, у которых инвариантами являются длина вектора  $|\mathbf{a}|$  и  $\bar{a}_3^2$ , также инвариантом является и длина проекции вектора на плоскость  $O\bar{\mathbf{e}}_1\bar{\mathbf{e}}_2$ :  $\sqrt{(\bar{a}_1)^2 + (\bar{a}_2)^2}$ , но этот инвариант не является независимым.

**ТЕОРЕМА 4.20.** Функциональный базис независимых инвариантов вектора  $\mathbf{a}$  относительно группы  $G_s \subset I$  состоит из  $r$  элементов, где

- $r = 1$  для группы  $G_s$ , изотропного и кубического классов;
- $r = 2$  для групп  $G_s$ , тетрагональной, ромбоздрической, гексагональной, кубической сингоний и трансверсально-изотропного класса;
- $r = 3$  для остальных групп  $G_s \subset I$ .

В качестве функционального базиса могут быть выбраны инварианты (4.143).

▼ Рассмотрим изотропный класс и произвольный вектор  $\mathbf{a} = \bar{a}^i \bar{\mathbf{e}}_i$ . Тогда можно построить новый ортогональный базис  $\mathbf{e}_i$ , одним из векторов которого, например  $\mathbf{e}_3$ , будет вектор  $\mathbf{a} = \mathbf{e}_3$ . Поскольку все ортогональные базисы связаны ортогональными матрицами преобразований, то найдется такая матрица  $A^i_j \in I$ , что  $\bar{\mathbf{e}}_i = A^j_i \mathbf{e}_j$ . Но в базисе  $\mathbf{e}_i$  вектор  $\mathbf{a}$  имеет только одну ненулевую компоненту  $a_3$ . Следовательно, выполнены условия теоремы 4.19, а значит число независимых инвариантов вектора  $\mathbf{a}$  не может быть более одного. Но один инвариант всегда существует, это, например, длина вектора  $|\mathbf{a}|$ , так как

$$|\mathbf{a}|^2 = a^i a^j \delta_{ij} = A^i_k A^j_l \bar{a}^k \bar{a}^l \delta_{ij} = \bar{a}^k \bar{a}^l \delta_{kl}.$$

Следовательно,  $r = 1$ .

Рассмотрим теперь трансверсально-изотропный класс. Для произвольного вектора  $\mathbf{a}$  опять введем новый базис  $\mathbf{e}_i$  с помощью специальной матрицы  $A^i_j$ , вида (3.6), где угол  $\phi$  выберем из условия:  $\operatorname{tg} \phi = \bar{a}^2 / \bar{a}^1$ ; причем  $\bar{\mathbf{e}}_i = A^j_i \mathbf{e}_j$ . В базисе  $\mathbf{e}_i$  вектор  $\mathbf{a}$  имеет только две ненулевые компоненты:  $a_1$  и  $a_3$ . Поскольку такая матрица  $A^i_j$ , принадлежит к группе  $T_3$ , то снова оказываются выполненными условия теоремы 4.19, и, следовательно, для группы  $T_3$  число  $r \leq 2$ . Но два независимых инварианта всегда существуют – это, например, инварианты (4.143з). Независимость следует из теоремы 4.18 п.2°, так как у инварианта  $I_1^{(s)} = |\mathbf{a}|^2$  имеются компоненты вектора  $\bar{a}_i$ , не входящие в инвариант  $I_2^{(s)} = \bar{a}_3$  (или  $\bar{a}_3^2$ ).

Доказательство теоремы для групп из классов  $T$ ,  $A_3$ ,  $B_3$ ,  $H$ ,  $K$  и  $K_3$  оставим в качестве упражнения 4.4.4.

Для групп из классов  $E$ ,  $M$  и  $O$  теорема будет доказана, если мы установим независимость трех инвариантов (максимально возможное число:  $r = k = 3^1$ ) в системах (4.143а), (4.143б) и (4.143в) соответственно. Но независимость этих инвариантов  $I_\alpha^{(s)}$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$ , относительно групп  $G_s$ ,  $s = 1, 3, \dots, 8$ , очевидно, вытекает из теоремы 4.18, так как выполнены условия п.2°. Для доказательства независимости инвариантов  $I_\alpha^{(2)}$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$ , составим матрицу частных производных:

$$\left( \frac{\partial I_\alpha}{\partial \bar{a}^i} \right) = \begin{pmatrix} 0 & \bar{a}_3 & \bar{a}_2 \\ \bar{a}_3 & 0 & \bar{a}_1 \\ 2\bar{a}_1 & 2\bar{a}_2 & 2\bar{a}_3 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что существуют такие значения  $\bar{a}_i$ , что определитель этой матрицы

$$\Delta = \det(\partial I_\alpha / \partial \bar{a}^i) = 2\bar{a}_3(\bar{a}_1^2 + \bar{a}_2^2 - \bar{a}_3^2)$$

отличен от нуля, например, при  $\bar{a}_1 = \bar{a}_2 = \bar{a}_3 = 1$ , получаем  $\Delta = 2$ . Следовательно,  $\operatorname{rang}(\partial I_\alpha / \partial \bar{a}^i) = 3$ , и в соответствии с теоремой 4.17 делаем заключение о независимости инвариантов  $I_\alpha^{(2)}$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$ .

Независимость инвариантов  $I_\alpha^{(s)}$  относительно остальных групп  $G_s$ ,  $s = 9, \dots, 32$ , легко установить с помощью теоремы 4.18 п.2°. ▲

#### Упражнения к § 4.4

**Упражнение 4.4.1.** Показать, что система линейно зависимых инвариантов является функционально зависимой; если же система функционально независима, то она и линейно независима.

**Упражнение 4.4.2.** Показать, что абсолютные значения компонент вектора  $(\mathbf{a} \cdot \bar{\mathbf{e}}_\alpha^2 \cdot \mathbf{a})^{1/2} = |\bar{a}_\alpha|$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ) являются инвариантами относительно группы  $G_2$  (т.е., что выполнены условия (4.131)), однако они не являются независимыми, т.к. выражаются через полный набор инвариантов следующим образом:

$$|\bar{a}_\alpha| = \frac{1}{\Delta} |I_\beta^{(2)} I_\gamma^{(2)}|, \quad \alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha, \quad \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3;$$

$$\Delta = (I_1^{(2)} I_2^{(2)} I_3^{(2)})^{1/2}.$$

**Упражнение 4.4.3.** Показать, что скаляр

$$(\mathbf{a} \cdot \bar{\mathbf{e}}_2^2 \cdot \mathbf{a})^{1/2} = |a_2|$$

является инвариантом относительно группы  $G_3$ , но не является функционально независимым, т.к. выражается через  $I_\gamma^{(3)}$ :

$$|a_2| = |I_2^{(3)}|/|I_1^{(3)}|.$$

**Упражнение 4.4.4.** Доказать теорему 4.20 для групп из классов  $T, A_3, B_3, H, K_3$  и  $K$ .

## § 4.5. Инварианты симметричного тензора второго ранга

### 4.5.1. Пространство симметричных тензоров

Рассмотрим теперь симметричные тензоры второго ранга  $\mathbf{T}$ , т.е. удовлетворяющие условию (1.181).

Согласно теореме 2.31, множество всех симметричных тензоров второго ранга в  $\mathbb{R}^3$  образует линейное пространство  $S_3^{(2)}$ , являющееся подпространством в  $T_3^{(2)}$ .

### 4.5.2. Построение инвариантов симметричного тензора

Функционально независимые скалярные инварианты симметричного тензора второго ранга  $\mathbf{T}$  с компонентами

$$\mathbf{T} = \bar{T}_{ij} \bar{\mathbf{e}}_i \otimes \bar{\mathbf{e}}_j \quad (4.144)$$

в базисе  $\bar{\mathbf{e}}_i$  относительно группы симметрии  $G_s$ , принадлежащей к некоторому классу, могут быть построены с помощью операций свертки симметричных образующих тензоров  $\mathbf{O}_{(\gamma)}$  (см. табл.4.2) данного класса симметрии с самим тензором  $\mathbf{T}$ , либо его тензорными степенями  $\mathbf{T}^2, \mathbf{T} \otimes \mathbf{T}$  и  $\mathbf{T} \otimes \mathbf{T} \otimes \mathbf{T}, \mathbf{T}^3$ .

Исходя из перечня (см. табл.4.1) направляющих симметричных тензоров получим, что указанным выше способом можно построить следующие скалярные инварианты тензора  $\mathbf{T}$ :

$$\mathbf{T} \cdot \bar{\mathbf{e}}_\alpha \otimes \bar{\mathbf{e}}_\beta = \bar{T}_{\alpha\beta}, \quad \mathbf{T} \cdot \bar{\mathbf{e}}_\alpha^2 = \bar{T}_{\alpha\alpha},$$

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{E} = \bar{T}_{11} + \bar{T}_{22} + \bar{T}_{33}, \quad \mathbf{T} \cdot \mathbf{O}_3 = 2\bar{T}_{12} \quad (4.145)$$

- линейные инварианты, образуемые сверткой  $T$  с направляющими векторами  $\bar{e}_\alpha$  или тензорами второго ранга  $\bar{e}_\alpha^2$ ,  $E$  и  $O_3$ :

$$T^2 \cdot \cdot E = \bar{T}_{11}^2 + \bar{T}_{22}^2 + \bar{T}_{33}^2 + 2(\bar{T}_{12}^2 + \bar{T}_{23}^2 + \bar{T}_{13}^2),$$

$$T^2 \cdot \cdot O_3 = 2(\bar{T}_{11}\bar{T}_{12} + \bar{T}_{12}\bar{T}_{22} + \bar{T}_{13}\bar{T}_{23}),$$

$$T^2 \cdot \cdot \bar{e}_\alpha^2 = \bar{T}_{\alpha 1}^2 + \bar{T}_{\alpha 2}^2 + \bar{T}_{\alpha 3}^2, \quad (O_3 \cdot T) \cdot \cdot (\bar{e}_3^2 \cdot T) = 2\bar{T}_{13}\bar{T}_{23},$$

$$(\bar{e}_\alpha^2 \cdot T) \cdot \cdot (\bar{e}_3^2 \cdot T) = \bar{T}_{\alpha 3}^2, \quad (E - \bar{e}_3) \cdot T \cdot \cdot (\bar{e}_3^2 \cdot T) = \bar{T}_{13}^2 + \bar{T}_{23}^2, \quad (4.146)$$

$$T \otimes T \cdot \cdot \cdot O_h = \bar{T}_{11}^2 + \bar{T}_{22}^2 + \bar{T}_{33}^2,$$

$$T \otimes T \cdot \cdot \cdot D_3 = 4(\bar{T}_{13}(\bar{T}_{11} - \bar{T}_{22}) - 2\bar{T}_{12}\bar{T}_{23}),$$

$$T \otimes T \cdot \cdot \cdot \Omega_{3h} = 4\bar{T}_{12}(\bar{T}_{11} - \bar{T}_{22}),$$

$$T \otimes T \cdot \cdot \cdot \Omega_{3d} = 4(\bar{T}_{23}(\bar{T}_{11} - \bar{T}_{22}) + 2\bar{T}_{12}\bar{T}_{13})$$

- квадратичные инварианты, образуемые сверткой квадрата тензора  $T^2$  или  $T \otimes T$  с направляющими тензорами второго ранга  $E$ ,  $O_3$ ,  $\bar{e}_\alpha^2$  или четвертого ранга  $O_h$ ,  $D_3$ ,  $\Omega_{3h}$ ,  $\Omega_{3d}$ ;

$$T^3 \cdot \cdot O_{(\alpha)}, \quad T^2 \otimes T \cdot \cdot \cdot {}^4O_{(\alpha)}, \quad (T^2 \cdot O_{(\alpha)}) \cdot \cdot (T \cdot O_{(\beta)})^T,$$

$$(T \cdot O_{(\alpha)}) \cdot (T \cdot O_{(\beta)}) \cdot \cdot (T \cdot O_{(\gamma)})^T, \quad (4.147)$$

$$(T \cdot {}^4O_{(\alpha)}) \cdot (T \cdot O_{(\beta)}) \cdot \cdot (T \cdot O_{(\gamma)})^T,$$

$$(T \cdot O_{(\alpha)}) \cdot (T \cdot {}^4O_{(\beta)}) \cdot \cdot (T \cdot {}^4O_{(\gamma)})^T \text{ и т.п.}$$

$$O_{(\alpha)} \in \{E, O_3, \bar{e}_\alpha^2\}, \quad {}^4O_{(\alpha)} = \{O_h, D_3, \Omega_{3h}, \Omega_{3d}\}$$

- кубические инварианты, образуемые сверкой куба тензора  $T^3$  с направляющими тензорами второго ранга  $E$ ,  $O_3$  и  $\bar{e}_\alpha^2$ , или третьей степени тензора  $T \otimes T \otimes T$  с направляющими тензорами четвертого ранга.

Среди последних наиболее распространенными являются инварианты:

$$(T \cdot O_h) \cdot (T \cdot \cdot O_h) \cdot \cdot (T \cdot \cdot O_h) = \bar{T}_{11}^3 + \bar{T}_{22}^3 + \bar{T}_{33}^3, \quad (4.148)$$

$$\begin{aligned} T^2 \otimes T \cdot \cdot \cdot O_h = & \bar{T}_{11}^3 + \bar{T}_{22}^3 + \bar{T}_{33}^3 + \bar{T}_{11}(\bar{T}_{12}^2 + \bar{T}_{13}^2) + \bar{T}_{22}(\bar{T}_{12}^2 + \bar{T}_{23}^2) + \\ & + \bar{T}_{33}(\bar{T}_{13}^2 + \bar{T}_{23}^2). \end{aligned}$$

Сформулируем теперь теорему, из которой следует, что все введенные скаляры (4.145) – (4.148) действительно являются инвариантами.

**ТЕОРЕМА 4.21.** *Любой скалярный полином тензора второго ранга  $T$ :*

$$f(T) = {}^{2n}O \underbrace{\cdots}_{2n} \underbrace{T \otimes \cdots \otimes T}_n, \quad n \geq 1,$$

где  ${}^{2n}O$  – тензор  $(2n)$ -го ранга, индифферентный относительно группы  $G_s$ , является скалярным инвариантом тензора  $T$  относительно той же группы  $G_s$ .

▼ Запишем выражение для  $f$  в базисе  $\bar{e}_i$ , совпадающем с осями анизотропии тензора  ${}^{2n}O = \bar{O}^{i_1 \dots i_{2n}} \bar{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \bar{e}_{i_n}$ :

$$f(\bar{T}_{ij}) = \bar{O}^{i_1 \dots i_{2n}} \bar{T}_{i_{2n}i_{2n-1}} \dots \bar{T}_{i_2i_1},$$

а также в базисе  $e_i$ , связанном с  $\bar{e}_i$ , ортогональной матрицей  $A^i{}_j \in G_s$ , ( $\bar{e}_i = A^j{}_i e_j$ ):

$$f(T_{ij}) = \bar{O}^{i_1 \dots i_{2n}} T_{i_{2n}i_{2n}} \dots T_{i_2i_1} = \bar{O}^{j_1 \dots j_{2n}} A^{i_1}{}_{j_1} \dots A^{i_{2n}}{}_{j_{2n}} \bar{T}_{i_{2n}i_{2n-1}} \dots \dots \bar{T}_{i_2i_1} = \bar{O}^{j_1 \dots j_{2n}} \bar{T}_{j_{2n}j_{2n-1}} \dots \bar{T}_{j_2j_1} = f(\bar{T}_{ij}), \quad \forall A^i{}_j \in G_s.$$

Откуда получаем, что скаляр  $f(T)$  удовлетворяет условию (4.131) и, следовательно, является инвариантом относительно группы  $G_s$ . ▲

#### 4.5.3. Главные инварианты тензора

Наиболее часто применяют инварианты, образованные с помощью метрического тензора  $E$ :

$$I_1(T) = T \cdot \cdot E, \quad I_1(T^2) = T^2 \cdot \cdot E, \quad (4.149)$$

$$I_1(T^3) = T^3 \cdot \cdot E = \bar{T}_{11}^3 + \bar{T}_{22}^3 + \bar{T}_{33}^3 + 3(\bar{T}_{11}(\bar{T}_{12}^2 + \bar{T}_{13}^2) + \bar{T}_{22}(\bar{T}_{12}^2 + \bar{T}_{23}^2) + \bar{T}_{33}(\bar{T}_{13}^2 + \bar{T}_{23}^2)) + 6\bar{T}_{12}\bar{T}_{13}\bar{T}_{23},$$

которые, очевидно, являются инвариантами относительно любой группы преобразований  $G_s$ , т.к. метрический тензор входит в число образующих тензоров каждой группы.

Вводя определитель симметричного тензора  $T$  по формуле (1.8'):

$$\det T = \bar{T}_{11}\bar{T}_{22}\bar{T}_{33} - \bar{T}_{11}\bar{T}_{23}^2 - \bar{T}_{22}\bar{T}_{13}^2 - \bar{T}_{33}\bar{T}_{12}^2 + 2\bar{T}_{12}\bar{T}_{13}\bar{T}_{23}, \quad (4.150)$$

непосредственной проверкой нетрудно установить, что

$$\det(T) = \frac{1}{6} (I_1^3(T) - 3I_1(T)I_2(T^2) + 2I_1(T^3)), \quad (4.151)$$

откуда следует, что определитель тензора также является инвариантом относительно любой группы  $G_s$ .

На основе инвариантов (4.149) и (4.150) введем так называемые первый, второй и третий *главные инварианты*:

$$\begin{aligned} I_1(\mathbf{T}) &= \mathbf{T} \cdot \mathbf{E}, \\ I_2(\mathbf{T}) &= \frac{1}{2}(I_1^2(\mathbf{T}) - I_1(\mathbf{T}^2)) = \bar{T}_{11}\bar{T}_{22} + \bar{T}_{11}\bar{T}_{33} + \bar{T}_{22}\bar{T}_{33} - \bar{T}_{12}^2 - \bar{T}_{13}^2 - \bar{T}_{23}^2, \\ I_3(\mathbf{T}) &= \det(\mathbf{T}). \end{aligned} \quad (4.152)$$

Остальные скаляры в (4.145) – (4.148) являются инвариантами относительно уже не произвольной группы (класса) симметрии  $G_s$ , а только той, к которой принадлежит образующий тензор  $\mathbf{O}_{(\gamma)}$ , с помощью которого образован данный инвариант.

**Теорема 4.22.** *Собственные значения  $\lambda_\alpha$  симметричного тензора  $\mathbf{T}$  также являются инвариантами относительно всех классов симметрии.*

▼ В самом деле, если  $\lambda_\alpha$  – собственные значения  $\mathbf{T}$ :

$$(\mathbf{T} - \lambda_\alpha \mathbf{E}) \cdot \overset{\circ}{\mathbf{e}}_\alpha = 0, \quad (4.153)$$

то можно составить *характеристический полином*:

$$\mathcal{P}(\lambda) = \det(\mathbf{T} - \lambda \mathbf{E}) = \det(\bar{T}_{ij} - \lambda \delta_{ij}), \quad (4.154)$$

тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\lambda) &= (\bar{T}_{11} - \lambda)(\bar{T}_{22} - \lambda)(\bar{T}_{33} - \lambda) - (\bar{T}_{11} - \lambda)\bar{T}_{23}^2 - (\bar{T}_{22} - \lambda)\bar{T}_{13}^2 - \\ &- (\bar{T}_{33} - \lambda)\bar{T}_{12}^2 + 2\bar{T}_{12}\bar{T}_{13}\bar{T}_{23} = \det(\mathbf{T}) - \lambda^2(\bar{T}_{11}^2 + \bar{T}_{22}^2 + \bar{T}_{33}^2) - \\ &- \lambda(\bar{T}_{11}\bar{T}_{22} + \bar{T}_{11}\bar{T}_{33} + \bar{T}_{22}\bar{T}_{33} - \bar{T}_{12}^2 - \bar{T}_{23}^2 - \bar{T}_{13}^2) - \lambda^3 = \\ &= I_3(\mathbf{T}) - \lambda I_2(\mathbf{T}) + \lambda^2 I_1(\mathbf{T}) - \lambda^3. \end{aligned} \quad (4.154a)$$

С другой стороны, полином  $\mathcal{P}(\lambda)$  можно представить через его корни  $\lambda_\alpha$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\lambda) &= (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)(\lambda_3 - \lambda) = -\lambda^3 + \lambda^2(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) - \\ &- \lambda(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3) + \lambda_1\lambda_2\lambda_3. \end{aligned} \quad (4.155)$$

Сравнивая эти два представления, находим связь между  $\lambda_\alpha$  и инвариантами  $I_\alpha(\mathbf{T})$ :

$$I_1(\mathbf{T}) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \quad I_2(\mathbf{T}) = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3, \quad I_3(\mathbf{T}) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3. \quad (4.156)$$

Откуда следует, что  $\lambda_\alpha$ , как и  $I_\alpha(T)$  инвариантны относительно любого класса симметрии.

Так как  $I_\gamma(T)$  не зависят от системы координат, то из (4.156) кроме того следует, что собственные значения тензора  $\lambda_\alpha$  также не зависят от системы координат. ▲

#### 4.5.4. Теорема Гамильтона-Кэли

Поскольку  $\lambda_\alpha$  являются собственными значениями тензора  $T$ , то характеристический полином  $P(\lambda)$  при каждом  $\lambda = \lambda_\alpha$  обращается в нуль. Тогда из (4.154a) имеем:

$$\lambda_\alpha^3 = I_1(T)\lambda_\alpha^2 - I_2(T)\lambda_\alpha + I_3(T), \quad \alpha = 1, 2, 3. \quad (4.157)$$

Тензор  $T$  можно разложить по собственному базису  $\overset{\circ}{e}_\alpha$  согласно (1.173):

$$T = \sum_{\alpha=1}^3 \lambda_\alpha \overset{\circ}{e}_\alpha \otimes \overset{\circ}{e}^\alpha. \quad (4.158)$$

Рассмотрим теперь тензорные степени  $T^2$  и  $T^3$ . В силу (1.180), для  $T^2$  и  $T^3$  имеет место аналогичное разложение:

$$T^n = \sum_{\alpha=1}^3 \lambda_\alpha^n \overset{\circ}{e}_\alpha \otimes \overset{\circ}{e}^\alpha, \quad n = 2, 3. \quad (4.159)$$

Заменим теперь в разложении для  $T^3$  коэффициенты  $\lambda_\alpha^3$  их выражениями (4.157):

$$\begin{aligned} T = & I_1(T) \sum_{\alpha=1}^3 \lambda_\alpha^2 \overset{\circ}{e}_\alpha \otimes \overset{\circ}{e}^\alpha - I_2(T) \sum_{\alpha=1}^3 \lambda_\alpha \overset{\circ}{e}_\alpha \otimes \overset{\circ}{e}^\alpha + \\ & + I_3(T) \sum_{\alpha=1}^3 \overset{\circ}{e}_\alpha \otimes \overset{\circ}{e}^\alpha. \end{aligned} \quad (4.160)$$

Если тензор  $T$  неособенный, то, умножая (4.160) на  $T^{-1}$ , получаем

$$T^{-1} = \frac{1}{I_3(T)}(T^2 - I_1(T)T + I_2(T)E). \quad (4.161)$$

Если воспользоваться представлениями (4.158) и (4.159), то придем к

$$T^3 = I_1(T)T^2 - I_2(T)T + I_3(T)E \quad (4.162)$$

– уравнению, которое по форме аналогично характеристическому уравнению (4.157), если вместо  $\lambda_\alpha$  поставить сам тензор  $T$ . В этом состоит утверждение следующей теоремы.

**Теорема 4.23 (Гамильтона-Кэли).** *Неособенный тензор удовлетворяет своему характеристическому уравнению.*

Из (4.162) следует важный вывод: любую тензорную степень  $T^n$  ( $n > 3$ ) можно выразить только через первые две степени:  $T^2$ ,  $T$  и  $E$ , например

$$\begin{aligned} T^4 &= T^3 \cdot T = I_1(T)T^3 - I_2(T)T^2 + I_3(T)T = \\ &= I_1(I_1T^2 - I_2T + I_3E) - I_2T^2 + I_3T = \\ &= (I_1^2 - I_2)T^2 - (I_1I_2 - I_3)T + I_1I_2E, \end{aligned}$$

и т.д.

#### 4.5.5. Функциональные базисы независимых инвариантов симметричного тензора второго ранга

Среди всего множества инвариантов представляет интерес выделение полного набора функционально независимых инвариантов для каждого класса симметрии.

Ниже приведены функциональные базисы независимых скалярных инвариантов  $I_{\alpha}^{(s)}$  симметричного тензора  $T$ , построенные с помощью наборов (4.145) – (4.148) и соответствующие фиксированному классу симметрии  $(G_s)$ . В скобках представлено явное выражение инвариантов  $\{I_1^{(s)}, \dots, I_r^{(s)}\}$  через компоненты  $\bar{T}_{ij}$  тензора  $T$  в базисе  $\bar{e}_i$ .

$(E)$  - триклинический класс:

$$\begin{aligned} I_{\alpha}^{(E)} &= T \cdot \bar{e}_{\alpha} \otimes \bar{e}_{\alpha}, \quad I_{3+\alpha}^{(E)} = \frac{1}{2} T \cdot (\bar{e}_{\gamma} \otimes \bar{e}_{\beta} + \bar{e}_{\beta} \otimes \bar{e}_{\gamma}), \\ \alpha, \beta, \gamma &= 1, 2, 3, \quad \alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha, \\ \{\bar{T}_{11}, \bar{T}_{22}, \bar{T}_{33}, \bar{T}_{23}, \bar{T}_{13}, \bar{T}_{12}\}. \end{aligned} \tag{4.163}$$

$(M)$  - моноклинный класс:

$$\begin{aligned} I_{\alpha}^{(M)} &= T \cdot \bar{e}_{\alpha}^2, \quad \alpha = 1, 2, 3; \quad I_4^{(M)} = \frac{1}{2} T \cdot \bar{O}_3, \\ I_5^{(M)} &= (\bar{e}_1^2 \cdot T) \cdot (\bar{e}_3^2 \cdot T), \quad I_6^{(M)} = \frac{1}{2} (\bar{e}_3^2 \cdot T) \cdot (\bar{O}_3 \cdot T), \\ \{\bar{T}_{11}, \bar{T}_{22}, \bar{T}_{33}, \bar{T}_{12}, \bar{T}_{13}^2, \bar{T}_{13}\bar{T}_{23}\}. \end{aligned} \tag{4.164}$$

$(O)$  - класс ортотропии:

$$I_{\alpha}^{(O)} = T \cdot \bar{e}_{\alpha}^2, \quad \alpha = 1, 2, 3; \quad I_4^{(O)} = (\bar{e}_2^2 \cdot T) \cdot (\bar{e}_3^2 \cdot T),$$

$$I_5^{(O)} = (\bar{\mathbf{e}}_1^2 \cdot \mathbf{T}) \cdots (\bar{\mathbf{e}}_3^2 \cdot \mathbf{T}), \quad I_6^{(O)} = (\bar{\mathbf{e}}_1^2 \cdot \mathbf{T}) \cdot (\bar{\mathbf{e}}_2^2 \cdot \mathbf{T}) \cdots (\bar{\mathbf{e}}_3^2 \cdot \mathbf{T}),$$

$$\{\bar{T}_{11}, \bar{T}_{22}, \bar{T}_{33}, \bar{T}_{23}^2, \bar{T}_{13}^2, \bar{T}_{12}\bar{T}_{13}\bar{T}_{23}\}. \quad (4.165)$$

(T) - тетрагональный класс:

$$I_1^{(T)} = (\mathbf{E} - \bar{\mathbf{e}}_3^2) \cdot \cdot \mathbf{T}, \quad I_2^{(T)} = \mathbf{T} \cdot \cdot \bar{\mathbf{e}}_3^2, \quad I_3^{(T)} = (\mathbf{E} - \bar{\mathbf{e}}_3^2) \cdot \mathbf{T} \cdot \cdot (\bar{\mathbf{e}}_3^2 \cdot \mathbf{T}),$$

$$I_4^{(T)} = \mathbf{T} \otimes \mathbf{T} \cdot \cdot \cdot \cdot \mathbf{O}_h - (I_2^{(T)})^2,$$

$$I_5^{(T)} = \frac{1}{4} \mathbf{T} \otimes \mathbf{T} \cdot \cdot \cdot \cdot \Omega_{3h}, \quad I_6^{(T)} = \det(\mathbf{T}),$$

$$\{\bar{T}_{11} + \bar{T}_{22}, \bar{T}_{33}, \bar{T}_{13}^2 + \bar{T}_{23}^2, \bar{T}_{11}^2 + \bar{T}_{22}^2, \bar{T}_{12}(\bar{T}_{11} - \bar{T}_{22}), \det(\mathbf{T})\}. \quad (4.166)$$

(K<sub>3</sub>) - квазитрансверсально-изотропный класс:

$$I_\alpha^{(K)} = I_\alpha^{(T)}, \quad \alpha = 1, \dots, 4, 6;$$

$$I_5^{(K)} = \frac{1}{2} \left( \mathbf{T}^2 \cdot \cdot \mathbf{E} - 2I_3^{(T)} - I_4^{(T)} - I_2^{(T)2} \right),$$

$$\{\bar{T}_{11} + \bar{T}_{22}, \bar{T}_{33}, \bar{T}_{13}^2 + \bar{T}_{23}^2, \bar{T}_{11}^2 + \bar{T}_{22}^2, \bar{T}_{12}^2, \det(\mathbf{T})\}. \quad (4.167)$$

(A) - ромбоэдрический класс:

$$I_1^{(A)} = (\mathbf{E} - \bar{\mathbf{e}}_3^2) \cdot \cdot \mathbf{T}, \quad I_2^{(A)} = \mathbf{T} \cdot \cdot \bar{\mathbf{e}}_3^2,$$

$$I_3^{(A)} = (\mathbf{E} - \bar{\mathbf{e}}_3^2) \cdot \mathbf{T} \cdot \cdot (\bar{\mathbf{e}}_3^2 \cdot \mathbf{T}), \quad I_4^{(A)} = \frac{1}{4} \mathbf{T} \otimes \mathbf{T} \cdot \cdot \cdot \cdot \mathbf{D}_3,$$

$$I_5^{(A)} = \mathbf{T}^2 \cdot \cdot \mathbf{E} - I_2^{(A)2} - 2I_3^{(A)}, \quad I_6^{(A)} = \frac{1}{4} \mathbf{T} \otimes \mathbf{T} \cdot \cdot \cdot \cdot \Omega_{3d},$$

$$\{\bar{T}_{11} + \bar{T}_{22}, \bar{T}_{33}, \bar{T}_{13}^2 + \bar{T}_{23}^2, \bar{T}_{13}(\bar{T}_{11} - \bar{T}_{22}) - 2\bar{T}_{12}\bar{T}_{23},$$

$$\bar{T}_{11}^2 + \bar{T}_{22}^2 + 2\bar{T}_{12}^2, \bar{T}_{23}(\bar{T}_{11} - \bar{T}_{22}) + 2\bar{T}_{12}\bar{T}_{13}\}. \quad (4.168)$$

(B) - ромбоэдрический класс:

$$I_\alpha^{(B)} = I_\alpha^{(A)}, \quad \alpha = 1 \dots 5; \quad I_6^{(B)} = \det(\mathbf{T}),$$

$$\{\bar{T}_{11} + \bar{T}_{22}, \bar{T}_{33}, \bar{T}_{13}^2 + \bar{T}_{23}^2, \bar{T}_{13}(\bar{T}_{11} - \bar{T}_{22}) - 2\bar{T}_{12}\bar{T}_{23},$$

$$\bar{T}_{11}^2 + \bar{T}_{22}^2 + 2\bar{T}_{12}^2, \det(\mathbf{T})\}. \quad (4.169)$$

(K) - квазизотропный класс:

$$I_1^{(Q)} = \mathbf{T} \cdot \cdot \mathbf{E}, \quad I_2^{(Q)} = \mathbf{T} \otimes \mathbf{T} \cdot \cdot \cdot \mathbf{O}_h, \quad I_3^{(Q)} = \frac{1}{2} \left( \mathbf{T}^2 \cdot \cdot \mathbf{E} - I_2^{(Q)} \right),$$

$$I_4^{(Q)} = (\mathbf{T} \cdot \cdot \mathbf{O}_h) \cdot (\mathbf{T} \cdot \cdot \mathbf{O}_h) \cdot \cdot (\mathbf{T} \cdot \cdot \mathbf{O}_h),$$

$$I_5^{(Q)} = \mathbf{T}^2 \otimes \mathbf{T} \cdot \cdot \cdot \mathbf{O}_h - I_4^{(Q)}, \quad I_6^{(Q)} = \det(\mathbf{T}),$$

$$\begin{aligned} & \{\bar{T}_{11} + \bar{T}_{22} + \bar{T}_{33}, \bar{T}_{11}^2 + \bar{T}_{22}^2 + \bar{T}_{33}^2, \bar{T}_{12}^2 + \bar{T}_{13}^2 + \bar{T}_{23}^2, \bar{T}_{11}^3 + \bar{T}_{22}^3 + \bar{T}_{33}^3, \\ & \bar{T}_{11}(\bar{T}_{12}^2 + \bar{T}_{13}^2) + \bar{T}_{22}(\bar{T}_{12}^2 + \bar{T}_{23}^2) + \bar{T}_{33}(\bar{T}_{13}^2 + \bar{T}_{23}^2), \det(\mathbf{T})\}. \end{aligned} \quad (4.170)$$

(H) - гексагональный класс:

$$I_{\alpha}^{(H)} = I_{\alpha}^{(A)}, \quad \alpha = 1 \dots 3; \quad I_5^{(H)} = \det(\mathbf{T}),$$

$$I_4^{(H)} = \mathbf{T}^2 \cdot \cdot \mathbf{E} - I_2^{(A)2} - 2I_3^{(A)},$$

$$\{\bar{T}_{11} + \bar{T}_{22}, \bar{T}_{33}, \bar{T}_{13}^2 + \bar{T}_{23}^2, \bar{T}_{11}^2 + \bar{T}_{22}^2 + 2\bar{T}_{12}^2, \det(\mathbf{T})\}. \quad (4.171)$$

(T<sub>3</sub>) - трансверсально-изотропный класс:

$$I_{\alpha}^{(3)} = I_{\alpha}^{(H)}, \quad \alpha = 1 \dots 5. \quad (4.172)$$

(I) - класс изотропии:

$$I_{\gamma}^{(I)} = I_{\gamma}(\mathbf{T}), \quad \gamma = 1, 2, 3. \quad (4.173)$$

**ТЕОРЕМА 4.24.** Для симметричного тензора второго ранга  $\mathbf{T}$  функциональный базис независимых инвариантов относительно группы  $G_s \subset I$  состоит из  $r$  элементов, где

- $r = 3$  для групп  $G_s$  изотропного класса,
- $r = 5$  для групп  $G_s$  трансверсально-изотропного и гексагонального классов,
- $r = 6$  для всех остальных групп  $G_s$ , полной ортогональной группы  $I$ .

В качестве этих функциональных базисов соответствующих групп  $G_s$ , могут быть выбраны наборы инвариантов (4.163) – (4.173).

▼ Как и ранее будем для определенности полагать, что все рассматриваемые группы  $G_s$  соответствуют осям анизотропии, направленным по векторам базиса  $\vec{e}_i$ . Тогда определения (4.131), (4.132) скалярных

инвариантов тензора второго ранга  $\mathbf{T} = \bar{T}_{ij}\bar{\mathbf{e}}_i \otimes \bar{\mathbf{e}}_j$  можно записать следующим образом:

$$I_\alpha^{(s)}(\bar{T}^{j_1 j_2}) = I_\alpha^{(s)}(A^i{}_{j_1} A^i{}_{j_2} \bar{T}^{j_1 j_2}), \quad \forall A^i{}_j \in G_s, \quad \alpha = 1, \dots, r \leq 6. \quad (4.174)$$

Поскольку  $\mathbf{T}$  – симметричен, то у него имеется не более шести независимых компонент  $\bar{T}^{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ), поэтому согласно теореме 4.17 для всех групп  $G_s$  ( $s = 1 \dots 39$ ) число  $r \leq k = 6$ .

Рассмотрим группы  $G_s$  из класса изотропии  $I$ . Согласно теореме 1.13, симметричный тензор  $\mathbf{T}$  имеет три вещественных собственных значения  $\lambda_i$  и ортогональный собственный базис  $\overset{\circ}{\mathbf{e}}_i$ . Тогда существует ортогональная матрица  $\overset{\circ}{A}{}^i{}_j$ , связывающая  $\overset{\circ}{\mathbf{e}}_i$  с  $\bar{\mathbf{e}}_j$ :  $\bar{\mathbf{e}}_j = \overset{\circ}{A}{}^i{}_j \overset{\circ}{\mathbf{e}}_i$ . Поскольку соотношение (4.174) в изотропном классе имеет место для любых ортогональных матриц, то в качестве  $A^i{}_j$  можно выбрать  $\overset{\circ}{A}{}^i{}_j$ . Так как в базисе  $\overset{\circ}{\mathbf{e}}_i$  матрица компонент  $T^{ij} = \overset{\circ}{A}{}^i{}_i \overset{\circ}{A}{}^j{}_j \bar{T}^{i_1 j_1}$  – диагональная, из (4.174) получаем:  $I_\alpha^{(I)}(\bar{T}^{ij}) = I_\alpha^{(I)}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ ,  $\alpha = 1, \dots, r$ . Отсюда следует, что любой инвариант  $I_\alpha^{(I)}$  изотропного класса может быть представлен как функция только трех скаляров –  $\lambda_i$ . Но согласно теореме 4.22,  $\lambda_\alpha(\bar{T}^{ij})$  сами являются инвариантами тензора  $\mathbf{T}$ . Следовательно, они образуют функциональный базис в классе  $I$ , а значит  $r = 3$ . Вместо  $\lambda_i$  в качестве базиса можно выбрать главные инварианты  $I_i(\mathbf{T})$ , которые связаны с  $\lambda_i$  соотношениями (4.156).

Рассмотрим теперь *трансверсально-изотропный класс*  $T_3$ . Представим тензор  $\mathbf{T}$  в виде суммы двух тензоров:  $\mathbf{T} = \mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2$ , где

$$\mathbf{T}_1 = (\bar{T}^{i_3 j_3} + \bar{T}^{j_3 i_3} - \bar{T}^{33} \delta^{i_3 j_3}) \bar{\mathbf{e}}_i \otimes \bar{\mathbf{e}}_j, \quad (4.175)$$

$$\mathbf{T}_2 = \bar{T}_2^{ij} \bar{\mathbf{e}}_i \otimes \bar{\mathbf{e}}_j = \bar{T}^{IJ} \mathbf{e}_I \otimes \mathbf{e}_J, \quad I, J = 1, 2.$$

Тензор  $\mathbf{T}_2$  является симметричным и по теореме 1.13 имеет вещественные собственные значения, но ненулевых из них только два:  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , – в силу структуры самого тензора. Тогда собственные векторы  $\overset{\circ}{\mathbf{e}}_1, \overset{\circ}{\mathbf{e}}_2$  тензора  $\mathbf{T}_2$  будут лежать в плоскости векторов  $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2$ , ортогональной к оси трансверсальной изотропии  $Ox^3$ . Следовательно, существует ортогональная матрица  $\overset{\circ}{A}{}^i{}_j$  вида

$$\overset{\circ}{A}{}^i{}_j = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

такая, что  $\bar{\mathbf{e}}_i = \overset{\circ}{A}{}^i{}_j \overset{\circ}{\mathbf{e}}_j$ , причем  $\overset{\circ}{\mathbf{e}}_3 = \mathbf{e}_3$ .

Тензор  $T_2 = T_2^{ij} \overset{\circ}{e}_i \otimes \overset{\circ}{e}_j$  в базисе  $\overset{\circ}{e}_i$  диагонален, поэтому  $T_2^{ij} = A^i_k A^j_l \bar{T}^{kl} = \sum_{\alpha=1}^2 \lambda_\alpha \delta_\alpha^i \delta_\alpha^j$ , а тензор  $T_1$  в этом базисе сохраняет свою структуру:

$$(T_1^{ij}) = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \bar{T}^{13} \\ 0 & 0 & \bar{T}^{23} \\ \bar{T}^{13} & \bar{T}^{23} & \bar{T}^{33} \end{pmatrix} \times \\ \times \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & T^{13} \\ 0 & 0 & T^{23} \\ T^{13} & T^{23} & T^{33} \end{pmatrix},$$

где  $T^{13} = \cos \phi \bar{T}^{13} + \sin \phi \bar{T}^{23}$ ,  $T^{23} = \cos \phi \bar{T}^{23} - \sin \phi \bar{T}^{13}$ ,  $T^{33} = \bar{T}^{33}$ .

Тогда тензор  $T$  в базисе  $\overset{\circ}{e}_i$  имеет следующий вид:

$$T^{ij} = \overset{\circ}{A}{}^i{}_k \overset{\circ}{A}{}^j{}_l \bar{T}^{kl} = T_1^{ij} + T_2^{ij} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & T^{13} \\ 0 & \lambda_2 & T^{23} \\ T^{13} & T^{23} & T^{33} \end{pmatrix},$$

т.е. содержит только пять ненулевых компонент. Поскольку матрица преобразования  $\overset{\circ}{A}{}^i{}_k$  принадлежит к группе  $T_3$ , то у нас оказываются выполнеными условия теоремы 4.19, согласно которой число независимых инвариантов тензора  $T$  не может превышать пяти. Для доказательства теоремы нам остается только показать, что существуют пять независимых инвариантов относительно  $T_3$ -класса. Ниже мы покажем, что таковыми являются, например, инварианты (4.172).

Доказательство теоремы для  $H$ -класса оставим в качестве упр. 4.5.13.

Для остальных классов симметрии, поскольку  $r = 6$ , т.е. совпадает с максимальным возможным числом инвариантов, нам достаточно построить в каждом классе хотя бы одну систему из шести функционально независимых инвариантов. Такие системы построены в (4.163) – (4.173). То, что эти системы являются инвариантами, следует из теоремы 4.21. Покажем их независимость.

В классах  $E$ ,  $M$  и  $O$  системы инвариантов (4.163), (4.164) и (4.165) являются независимыми, так как каждый из инвариантов содержит хотя бы одну компоненту  $\bar{T}^{ij}$ , которая не входит в остальные инварианты системы, и тем самым выполнено условие 2° теоремы 4.18.

Для доказательства независимости системы инвариантов (4.166) в

$T$ -классе составим матрицу частных производных:

$$\left( \frac{\partial I_\alpha}{\partial \bar{T}^{ij}} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2\bar{T}_{13} & 0 & 2\bar{T}_{23} & 0 \\ 2\bar{T}_{11} & 0 & 0 & 2\bar{T}_{22} & 0 & 0 \\ \bar{T}_{12} & \bar{T}_{11} - \bar{T}_{22} & 0 & -\bar{T}_{12} & 0 & 0 \\ \bar{B}_{11} & \bar{B}_{12} & \bar{B}_{13} & \bar{B}_{22} & \bar{B}_{23} & \bar{B}_{33} \end{pmatrix}. \quad (4.176)$$

Здесь введено обозначение для производных:  $\bar{B}_{ij} \equiv \partial(\det T)/\partial \bar{T}^{ij} = \det T(\bar{T}^{-1})_{ij}$ . Вычисляя определитель этой матрицы, находим

$$\Delta = \det (\partial I_\alpha / \partial \bar{T}^{ij}) = 4(\bar{T}_{11} - \bar{T}_{22})^2(\bar{T}_{23}\bar{B}_{13} - \bar{T}_{13}\bar{B}_{23}).$$

Поскольку всегда существуют такие  $\bar{T}_{ij}$ , что  $\Delta \neq 0$ , например, при

$$(\bar{T}_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad (\bar{B}_{ij}) = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.177)$$

получаем  $\Delta = -468$ , то  $\text{rang } (\partial I_\alpha / \partial \bar{T}^{ij}) = 6$ , из теоремы 4.17 следует независимость системы (4.166).

Аналогичным образом, составляя матрицу частных производных  $(\partial I_\alpha / \partial \bar{T}^{ij})$ , доказываем независимость систем из шести инвариантов (4.167) – (4.170).

Матрицы частных производных для  $H$ ,  $T_3$  классов и класса изотропии соответственно имеют вид:

$$\left( \frac{\partial I_\alpha}{\partial \bar{T}^{ij}} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2\bar{T}_{13} & 0 & 2\bar{T}_{23} & 0 \\ 2\bar{T}_{11} & 4\bar{T}_{12} & 0 & 2\bar{T}_{22} & 0 & 0 \\ \bar{B}_{11} & \bar{B}_{12} & \bar{B}_{13} & \bar{B}_{22} & \bar{B}_{23} & \bar{B}_{33} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial I_\alpha}{\partial \bar{T}^{ij}} \right) &= \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ (\bar{T}_{22} + \bar{T}_{33}) & -2\bar{T}_{12} & -2\bar{T}_{13} & (\bar{T}_{11} + \bar{T}_{33}) & -2\bar{T}_{23} & (\bar{T}_{11} + \bar{T}_{22}) \\ \bar{B}_{11} & \bar{B}_{12} & \bar{B}_{13} & \bar{B}_{22} & \bar{B}_{23} & \bar{B}_{33} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Вычеркивая в первой матрице четвертый столбец, а во второй – четвертый, пятый и шестой столбцы, получаем матрицы пятого и

третьего порядка соответственно. Убеждаясь, что определители этих матриц для случая (4.177) отличны от нуля:

$$\begin{aligned} H, T_3\text{-классы} \quad & \Delta = 8\bar{T}_{12}(\bar{T}_{23}\bar{B}_{13} - \bar{T}_{13}\bar{B}_{23}) = -208, \\ T\text{-класс} \quad & \Delta = 2(\bar{T}_{13}\bar{B}_{12} - \bar{T}_{12}\bar{B}_{13}) = 26, \end{aligned}$$

находим ранги этих матриц: 5 и 3, соответственно. Применяя еще раз теорему 4.17, отсюда делаем вывод о независимости систем инвариантов (4.171) – (4.173). ▲

В силу теоремы 4.24, все другие скаляры из (4.145) – (4.147), являющиеся тоже инвариантами относительно данной группы  $G_s$ , могут быть выражены в виде некоторой функции от инвариантов  $I_\gamma^{(s)}$  соответствующего функционального базиса.

В частности, второй и третий главные инварианты всегда можно выразить через  $I_\gamma^{(s)}$  любого класса. Другие примеры приведены в упражнениях к данному разделу.

#### 4.5.6. Запись инвариантов в криволинейных системах координат

Выше была использована запись инвариантов вектора  $\mathbf{a}$  и тензора  $T$  через их компоненты в декартовом базисе  $\bar{\mathbf{e}}_i$ . Однако ничто не мешает записать эти инварианты с помощью компонент  $a_i$  и  $T_i^j$  в произвольной системе координат:

$$\mathbf{a} = a_i \mathbf{R}^i = a^i \mathbf{R}_i, \quad T = T_i^j \mathbf{R}^i \otimes \mathbf{R}_j.$$

Очевидно, что достаточно записать только неповторяющиеся инвариантные комбинации. Для вектора из (4.142) следует

$$\begin{aligned} \bar{a}_\alpha &= \mathbf{a} \cdot \bar{\mathbf{e}}_\alpha = a_i \bar{P}_\alpha^i, \quad |a|^2 = \sum_{\alpha=1}^3 a_\alpha a^\beta \bar{P}_\alpha^i \bar{Q}_j^\alpha = a_i a^i, \\ \bar{a}_\alpha^2 &= \mathbf{a} \otimes \mathbf{a} \cdot \bar{\mathbf{e}}_\alpha^2 = a_i a^\beta \bar{P}_\alpha^i \bar{Q}_j^\alpha, \\ \bar{a}_\beta \bar{a}_\gamma &= \mathbf{a} \otimes \mathbf{a} \cdot \bar{\Omega}_\alpha = a_i a^\beta \bar{P}_\beta^i \bar{Q}_j^\gamma, \quad \alpha \neq \beta \neq \gamma; \quad \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3. \end{aligned} \tag{4.178}$$

Переход от записи в базисе  $\bar{\mathbf{e}}_\alpha$  к записи в криволинейной системе координат с базисами  $\mathbf{R}_i$  и  $\mathbf{R}^j$ , очевидно осуществляется с помощью одной из формул:  $\bar{\mathbf{e}}_\alpha = \bar{P}_\alpha^i \mathbf{R}_i = \bar{Q}_j^\alpha \mathbf{R}^j$ .

Для симметричного тензора второго ранга инварианты, участвующие в полных наборах, можно записать подобным образом:

$$\bar{T}_{\alpha\alpha} = T_i^j \bar{P}_\alpha^i \bar{Q}_j^\alpha, \quad \bar{T}_{\beta\gamma} = T_i^j \bar{P}_\beta^i \bar{Q}_j^\gamma, \quad |\bar{T}_{\beta\gamma}| = |T_i^j \bar{P}_\beta^i \bar{Q}_j^\gamma|,$$

$$\bar{T}_{13} \bar{T}_{23} = T_i^j T_k^l \bar{P}_1^i \bar{Q}_2^3 \bar{P}_2^k \bar{Q}_l^3. \tag{4.179}$$

$$\bar{T}_{12}\bar{T}_{13}\bar{T}_{23} = T_i{}^j T_k{}^l T_m{}^n \bar{P}_1^i \bar{Q}_j^2 \bar{P}_1^k \bar{Q}_l^3 \bar{P}_2^m \bar{Q}_n^3,$$

$$\bar{T}_{11} + \bar{T}_{22} = T_i{}^j (\bar{P}_1^i \bar{Q}_j^1 + \bar{P}_2^i \bar{Q}_j^2).$$

При записи инвариантов в криволинейной системе координат более удобно использовать именно смешанные ко-контравариантные компоненты  $T_i{}^j$ , в частности из-за того, что первый, второй и третий инварианты при этом не изменяются:

$$I_1(\mathbf{T}) = \bar{T}_{11} + \bar{T}_{22} + \bar{T}_{33} = \sum_{\alpha=1}^3 T_i{}^j \bar{P}_\alpha^i \bar{Q}_j^\alpha = T_1{}^1 + T_2{}^2 + T_3{}^3, \quad (4.180)$$

$$I_2(\mathbf{T}) = \frac{1}{2} (\bar{T}_{ij} \bar{T}_{ij} - I_1^2(\mathbf{T})) = \frac{1}{2} \left( T_k{}^l T_m{}^n \bar{P}_i^k \bar{Q}_l^j \bar{P}_j^m \bar{Q}_n^i - I_1^2 \right) =$$

$$= \frac{1}{2} (T_k{}^l T_l{}^k - I_1)^2,$$

$$I_3(\mathbf{T}) = \det(\bar{T}_{kl}) = \det(T_i{}^j \bar{P}_k^i \bar{Q}_j^l) =$$

$$= \det(T_i{}^j) \det(\bar{P}_k^i) \det(\bar{Q}_j^l) = \det(T_i{}^j).$$

Здесь учтены формулы перехода:  $\bar{\mathbf{e}}_\alpha = \bar{Q}_j^\alpha \mathbf{R}^j$ , а также взаимо обратность якобиевых матриц:  $\bar{P}_k^i \bar{Q}_j^k = \delta_j^i$ .

#### 4.5.7. Запись инвариантов в физических компонентах

Часто возникает необходимость связать запись инвариантов в декартовой системе координат и в физических компонентах. Переход к физическим компонентам осуществляется с помощью формул (1.238). Очевидно, что инварианты  $|a|^2$ ,  $I_\alpha(\mathbf{T})$  не изменяют своего вида и в физических компонентах:

$$|a|^2 = \sum_{\alpha=1}^3 a_{\phi\alpha}^2, \quad I_1(\mathbf{T}) = \sum_{\alpha=1}^3 T_{\phi\alpha}^\alpha, \quad (4.181)$$

$$I_2(\mathbf{T}) = \frac{1}{2} \left( \sum_{\alpha,\beta=1}^3 T_{\phi\alpha}^\beta T_{\phi\beta}^\alpha - I_1^2 \right), \quad I_3(\mathbf{T}) = \det(T_{\phi\alpha}^\beta),$$

где

$$\mathbf{a} = a_{\phi i} \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{T} = T_{\phi i}{}^j \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j, \quad (4.182)$$

а  $\mathbf{e}_i$  - физический (ортонормированный) базис криволинейной системы координат.

Остальные инварианты в физических компонентах записываются следующим образом:

$$\bar{a}_\alpha = \sum_{\beta=1}^3 a_{\Phi\beta} \sqrt{g_{\beta\beta}} \bar{P}_\alpha^\beta, \quad \bar{a}_\alpha^2 = \sum_{\beta,\gamma=1}^3 a_{\Phi\beta} \bar{a}_{\Phi\gamma} \sqrt{\frac{g_{\beta\beta}}{g_{\gamma\gamma}}} \bar{P}_\alpha^\beta \bar{Q}_\gamma^\alpha, \quad (4.183)$$

$$\bar{a}_\alpha \bar{a}_\gamma = \sum_{\epsilon,\sigma=1}^3 a_{\Phi\epsilon} a_{\Phi\sigma} \sqrt{\frac{g_{\epsilon\epsilon}}{g_{\sigma\sigma}}} \bar{P}_\beta^\epsilon \bar{Q}_\sigma^\gamma.$$

Инварианты тензора имеют вид:

$$\bar{T}_{\alpha\alpha} = \sum_{\beta,\gamma=1}^3 T_{\Phi\beta}^\gamma \bar{P}_\alpha^\beta \bar{Q}_\gamma^\alpha \sqrt{\frac{g_{\beta\beta}}{g_{\gamma\gamma}}}, \quad \bar{T}_{\beta\gamma} = \sum_{\epsilon,\sigma=1}^3 T_{\Phi\sigma}^\epsilon \bar{P}_\beta^\sigma \bar{Q}_\epsilon^\gamma \sqrt{\frac{g_{\sigma\sigma}}{g_{\epsilon\epsilon}}},$$

$$\bar{T}_{13} \bar{T}_{23} = \sum_{\epsilon,\sigma=1}^3 \sum_{\omega,\varphi=1}^3 T_{\Phi\sigma}^\epsilon T_{\Phi\omega}^\varphi \bar{P}_1^\sigma \bar{Q}_\epsilon^3 \bar{P}_2^\omega \bar{Q}_\varphi^3 \sqrt{\frac{g_{\sigma\sigma} g_{\omega\omega}}{g_{\epsilon\epsilon} g_{\varphi\varphi}}}, \quad (4.184)$$

$$\bar{T}_{11} + \bar{T}_{22} = \sum_{\epsilon,\sigma=1}^3 T_{\Phi\sigma}^\epsilon (\bar{P}_1^\sigma \bar{Q}_\epsilon^1 + \bar{P}_2^\sigma \bar{Q}_\epsilon^2) \sqrt{\frac{g_{\sigma\sigma}}{g_{\epsilon\epsilon}}},$$

$$\bar{T}_{13}^2 + \bar{T}_{23}^2 = \sum_{\epsilon,\sigma=1}^3 \sum_{\omega,\varphi=1}^3 T_{\Phi\sigma}^\epsilon T_{\Phi\omega}^\varphi (\bar{P}_1^\sigma \bar{Q}_\epsilon^3 \bar{P}_1^\omega \bar{Q}_\varphi^3 + \bar{P}_2^\sigma \bar{Q}_\epsilon^3 \bar{P}_2^\omega \bar{Q}_\varphi^3) \sqrt{\frac{g_{\sigma\sigma} g_{\omega\omega}}{g_{\epsilon\epsilon} g_{\varphi\varphi}}},$$

и т.д.

### Упражнения к § 4.5.

**Упражнение 4.5.1.** Используя соотношение между  $I_i(\mathbf{T})$  и собственными значениями  $\lambda_\alpha$  положительно-определенного тензора  $\mathbf{T}$ , а также свойство

$$I_1^2(\mathbf{T}) - 3I_2(\mathbf{T}) = \frac{1}{2} ((\lambda_1 - \lambda_2)^2 + (\lambda_2 - \lambda_3)^2 + (\lambda_3 - \lambda_1)^2),$$

показать, что имеют место следующие неравенства для инвариантов:

$$I_1(\mathbf{T}) \geq 3I_3^{1/3}(\mathbf{T}), \quad I_2(\mathbf{T}) \geq 3I_3^{2/3}(\mathbf{T}),$$

$$I_1^2(\mathbf{T}) \geq 3I_2(\mathbf{T}).$$

**Упражнение 4.5.2.** Показать, что второй и третий инварианты  $I_2(T)$ ,  $I_3(T)$  выражаются через полный набор инвариантов моноклинного класса следующим образом:

$$I_2(T) = I_1^{(M)}(I_2^{(M)} + I_3^{(M)}) + I_2^{(M)}I_3^{(M)} - I_4^{(M)} - I_5^{(M)} - \left(\frac{I_6^{(M)}}{I_4^{(M)}I_5^{(M)}}\right)^2,$$

$$I_3(T) = I_1^{(M)}I_2^{(M)}I_3^{(M)} - I_3^{(M)}\left(\frac{I_6^{(M)}}{I_4^{(M)}I_5^{(M)}}\right)^2 - I_1^{(M)}I_4^{(M)2} - \\ - I_2^{(M)}I_5^{(M)2} + 2I_6^{(M)},$$

а скаляр  $\bar{T}_{23}^2$  также является инвариантом относительно  $M$ -класса, т.к.

$$\bar{T}_{23}^2 = I_6^{(M)2}/I_5^{(M)}.$$

**Упражнение 4.5.3.** Проверить, что скаляр

$$(\bar{\mathbf{e}}_1^2 \cdot T) \cdot (\bar{\mathbf{e}}_2^2 \cdot T) = T_{12}^2$$

является инвариантом относительно ортотропного класса  $O$  (т.е. проверить выполнение условий (4.131)), но уже не является независимым, т.к. выражается через полный набор инвариантов  $I_\gamma^{(O)}$ :

$$T_{12}^2 = I_6^{(O)2}/(I_4^{(O)}I_5^{(O)}).$$

**Упражнение 4.5.4.** Показать, что скаляры  $|T_{12}|$ ,  $T_{11}T_{22}$ ,  $|T_{11} - T_{22}|$ , а также  $I_2(T)$  выражаются через полный набор инвариантов тетрагонального класса  $I_\gamma^{(T)}$ :

$$|T_{12}| = \left(\frac{I_5^{(T)2}}{2I_4^{(T)} - I_1^{(T)2}}\right)^{1/2}, \quad T_{11}T_{22} = \frac{1}{2}(I_1^{(T)2} - I_4^{(T)}),$$

$$|T_{11} - T_{22}| = (2I_4^{(T)} - I_1^{(T)2})^{1/2},$$

$$I_2(T) = I_1^{(T)}I_2^{(T)} + \frac{1}{2}(I_1^{(T)2} - I_4^{(T)}) - I_3^{(T)} - \frac{I_5^{(T)2}}{2I_4^{(T)} - I_1^{(T)2}},$$

и поэтому являются инвариантами относительно  $(T)$ -класса.

**Упражнение 4.5.5.** Показать, что скаляры  $T_{11}T_{22}$ ,  $|T_{11} - T_{22}|$  и  $I_2(\mathbf{T})$  выражаются через полный набор  $I_\gamma^{(K)}$   $K_3$ -класса и поэтому являются инвариантами относительно квазитрансверсально-изотропного класса; в частности

$$I_2(\mathbf{T}) = \frac{1}{2}(I_1^{(K)2} - I_4^{(K)}) + I_1^{(K)}I_2^{(K)} + I_3^{(K)} + I_5^{(K)}.$$

**Упражнение 4.5.6.** Показать, что скаляры  $T_{11}T_{22} - T_{12}^2$ ,  $(T_{11} - T_{22})^2 + 4T_{12}^2$ ,  $T_{11}^2 + T_{22}^2 + 2T_{12}^2$ , а также  $I_2(\mathbf{T})$  выражаются через полный набор инвариантов  $A$ -ромбоэдрического класса  $I_\gamma^{(A)}$ :

$$(T_{11} - T_{22})^2 + 4T_{12}^2 = \frac{1}{I_3^{(A)}}(I_4^{(A)2} + I_5^{(A)2}) \equiv I_A,$$

$$T_{11}T_{22} - T_{12}^2 = \frac{1}{4}(I_1^{(A)2} - I_A),$$

$$T_{11}^2 + T_{22}^2 + 2T_{12}^2 = \frac{1}{2}(I_1^{(A)2} + I_A),$$

$$I_2(\mathbf{T}) = I_1^{(A)}I_2^{(A)} - I_3^{(A)} + \frac{1}{4}(I_1^{(A)2} - I_A)$$

и поэтому являются инвариантами относительно  $(A)$ -класса.

**Упражнение 4.5.7.** Показать, что скаляры  $T_{11}T_{22} - T_{12}^2$ ,  $(T_{11} - T_{22})^2 + 4T_{12}^2$ , а также  $I_2(\mathbf{T})$  выражаются через полный набор инвариантов  $B$ -ромбоэдрического класса  $I_\gamma^{(B)}$ :

$$T_{11}T_{22} - T_{12}^2 = \frac{1}{2}(I_1^{(B)2} - I_5^{(B)}),$$

$$(T_{11} - T_{22})^2 + 4T_{12}^2 = 2I_5^{(B)} - I_1^{(B)2},$$

$$I_2(\mathbf{T}) = I_1^{(B)}I_2^{(B)} + \frac{1}{2}(I_1^{(B)2} - I_5^{(B)}) - I_3^{(B)}.$$

**Упражнение 4.5.8.** Показать, что скаляры  $T_{11}T_{22} + T_{22}T_{33} + T_{11}T_{33}$ ,  $T_{11}T_{22}T_{33}$ , а также  $I_2(\mathbf{T})$  выражаются через полный набор инвариантов  $K$ -квазизотропного класса  $I_\gamma^{(Q)}$ :

$$I_Q \equiv T_{11}T_{22} + T_{22}T_{33} + T_{11}T_{33} = \frac{1}{2}(I_1^{(Q)2} - I_2^{(Q)}),$$

$$T_{11}T_{22}T_{33} = \frac{1}{3}I_4^{(Q)} + \frac{1}{6}I_1^{(Q)3} - \frac{1}{2}I_1^{(Q)}I_2^{(Q)},$$

$$I_2(\mathbf{T}) = I_Q - I_3^{(Q)}$$

и являются инвариантами относительно  $(K)$ -класса.

**Упражнение 4.5.9.** Показать, что скаляры  $T_{11}T_{22} - T_{12}^2$ ,  $(T_{11} - T_{22})^2 + 4T_{12}^2$ , а также  $I_2(\mathbf{T})$  выражаются через полный набор инвариантов  $H$  и  $T_3$  классов  $I_\gamma^{(H)}$  или  $I_\gamma^{(3)}$  таким же образом, как показано в упражнении 4.5.7, и являются инвариантами относительно  $(H)$  и  $(T_3)$  классов.

**Упражнение 4.5.10.** Проверить непосредственно, что инварианты  $I_4^{(A)}$  и  $I_5^{(A)}$  удовлетворяют условиям (4.131).

**Упражнение 4.5.11.** Используя формулу (4.162), доказать, что  $I_3(\mathbf{T})$  всегда можно представить в виде:

$$I_3(\mathbf{T}) = \frac{1}{3} (I_1(\mathbf{T}^3) - I_1^3(\mathbf{T}) + 3I_1(\mathbf{T})I_1(\mathbf{T}^2)).$$

**Упражнение 4.5.12.** Показать, что формула (4.162) имеет место также и для несимметричного тензора  $\mathbf{T}$ .

**Упражнение 4.5.13.** Доказать теорему 4.24 для  $H$ -класса.

**Упражнение 4.5.14.** Используя метод, описанный при доказательстве теоремы 4.24, доказать независимость систем инвариантов (4.167) – (4.170).

## ГЛАВА 5

### ТЕНЗОРНЫЕ ФУНКЦИИ

---

#### § 5.1. Линейные тензорные функции

##### 5.1.1. Определение тензорной функции

Рассмотрим два тензора  ${}^n S$  и  ${}^m T$   $n$ -го и  $m$ -го рангов, принадлежащие пространствам  $\mathcal{T}_3^{(n)}(\mathbb{R}^3)$  и  $\mathcal{T}_3^{(m)}(\mathbb{R}^3)$  соответственно. В механике и физике большую роль играют законы соответствия между различными тензорами, называемые *тензорными функциями*.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1.** *Отображение пространства тензоров  $\mathcal{T}_3^{(m)}(\mathbb{R}^3)$  в пространство  $\mathcal{T}_3^{(n)}(\mathbb{R}^3)$  называют тензорной функцией и обозначают как  ${}^n \mathcal{F}$  :  $\mathcal{T}_3^{(m)}(\mathbb{R}^3) \rightarrow \mathcal{T}_3^{(n)}(\mathbb{R}^3)$  или в виде зависимости:*

$${}^n S = {}^n \mathcal{F}({}^m T) \quad \forall {}^m T \in \mathcal{T}_3^{(m)}, \quad {}^n S \in \mathcal{T}_3^{(n)}. \quad (5.1)$$

Кроме формального установления закона соответствия тензоров  ${}^n S$  и  ${}^m T$ , запись (5.1) содержит утверждение, что тензорная функция не меняется при переходе из одной системы координат в другую при преобразованиях координат (1.2) в  $\mathbb{R}^3$ , т.е. если записать *компонентное представление функции* (5.1) в каком-либо базисе, например в  $R_i$ :

$$S^{i_1 \dots i_n} = \mathcal{F}^{i_1 \dots i_n}(T^{j_1 \dots j_m}), \quad (5.2)$$

то при переходе в любой другой базис  $R'_i = P_i^j R_j$  это представление можно записать следующим образом:

$$S'^{i_1 \dots i_n} = \mathcal{F}'^{i_1 \dots i_n}(T'^{j_1 \dots j_m}). \quad (5.3)$$

Здесь обозначены компоненты тензоров в базисах  $R_i$  и  $R'_i$ :

$${}^n S = S^{i_1 \dots i_n} R_{i_1} \otimes \dots \otimes R_{i_n} = S'^{i_1 \dots i_n} R'_{i_1} \otimes \dots \otimes R'_{i_n},$$

$${}^m T = T^{j_1 \dots j_m} R_{j_1} \otimes \dots \otimes R_{j_m} = T'^{j_1 \dots j_m} R'_{j_1} \otimes \dots \otimes R'_{j_m}, \quad (5.4)$$

$${}^n \mathcal{F} = \mathcal{F}^{i_1 \dots i_n} R_{i_1} \otimes \dots \otimes R_{i_n} = \mathcal{F}'^{i_1 \dots i_n} R'_{i_1} \otimes \dots \otimes R'_{i_n}.$$

Учитывая правило (см. (1.250)) преобразования компонент тензора при переходе из системы координат  $X^i$  в  $X'^i$ :

$$S'^{i_1 \dots i_n} = Q_{k_1}^{i_1} \dots Q_{k_n}^{i_n} S^{k_1 \dots k_n}, \quad T'^{i_1 \dots i_m} = Q_{j_1}^{i_1} \dots Q_{j_m}^{i_m} T^{j_1 \dots j_m} \quad (5.5)$$

и подставляя (5.2) и (5.3) в (5.5), получаем:

$$Q_{k_1}^{i_1} \dots Q_{k_n}^{i_n} \mathcal{F}^{k_1 \dots k_n}(T^{j_1 \dots j_m}) = \mathcal{F}'^{i_1 \dots i_n}(Q_{l_1}^{j_1} \dots Q_{l_m}^{j_m} T^{l_1 \dots l_m}). \quad (5.6)$$

Таким образом, фраза о неизменяемости тензорной функции при переходе из одной системы координат в другую означает, что компонентное представление этой функции преобразуется по закону (5.6).

### 5.1.2. Индифферентные тензорные функции

Важную роль в механике играют тензорные функции, компонентное представление которых сохраняется при переходе от некоторой фиксированной системы координат  $X'^i \equiv x^i$  в другую  $X^i$ , получающуюся путем линейного преобразования (3.1):

$$\tilde{\mathcal{F}}^{i_1 \dots i_n} = \mathcal{F}^{i_1 \dots i_n}, \quad (5.7)$$

где  $\tilde{\mathcal{F}}^{i_1 \dots i_n}$  – компонентное представление функции  ${}^n\mathcal{F}$  в декартовой системе координат  $x^i$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.2.** Тензорные функции (5.1), удовлетворяющие условию (5.7), называют индифферентными.

Подставляя (5.7) в (5.3), (5.2), получаем, что если в системе координат  $x^i$  тензорная функция связывает компоненты  $\tilde{S}^{i_1 \dots i_n}$  и  $\tilde{T}^{j_1 \dots j_m}$  с помощью соотношений:

$$\tilde{S}^{i_1 \dots i_n} = \mathcal{F}^{i_1 \dots i_n}(\tilde{T}^{j_1 \dots j_m}),$$

то компоненты тензоров  ${}^nS$  и  ${}^mT$  в системе координат  $X^i$  будут связаны теми же самыми функциями:

$$S^{i_1 \dots i_n} = \mathcal{F}^{i_1 \dots i_n}(T^{j_1 \dots j_m}). \quad (5.8)$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.3.** Если функция  ${}^n\mathcal{F}$  (5.1) удовлетворяет свойству (5.7) не для всех преобразований координат (3.1), а только для тех, которые образуют некоторую группу  $G_s$ , то такая тензорная функция называется индифферентной относительно группы  $G_s$ .

Группу  $G_s$  в этом случае называют группой симметрии тензорной функции  ${}^n\mathcal{F}$ .

Не все компоненты индифферентной тензорной функции являются независимыми, в силу (5.6) и (5.7) между ними имеются связи:

$$A_{k_1}^{i_1} \dots A_{k_n}^{i_n} \mathcal{F}^{k_1 \dots k_n}(\tilde{T}^{j_1 \dots j_m}) = \mathcal{F}^{i_1 \dots i_n}(A_{l_1}^{j_1} \dots A_{l_m}^{j_m} \tilde{T}^{l_1 \dots l_m}). \quad (5.9)$$

Здесь соотношение (5.6) записано для линейных преобразований (3.1), для которых якобиевы матрицы имеют вид (3.23б).

### 5.1.3. Определение линейной тензорной функции

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.4.** Тензорную функцию (5.1) называют линейной, если она удовлетворяет двум условиям:

- тензорная функция от суммы двух тензоров  ${}^mT_1$  и  ${}^mT_2$ , принадлежащих  $\mathcal{T}_3^{(m)}$ , есть сумма тензорных функций от каждого из этих тензоров:

$${}^n\mathcal{F}({}^mT_1 + {}^mT_2) = {}^n\mathcal{F}({}^mT_1) + {}^n\mathcal{F}({}^mT_2), \quad (5.10)$$

- тензорная функция от произведения тензора  ${}^mT \in \mathcal{T}_3^{(m)}$  на вещественное число  $\lambda \neq 0$  есть произведение числа на тензорную функцию от  ${}^mT$ :

$${}^n\mathcal{F}(\lambda {}^mT) = \lambda {}^n\mathcal{F}({}^mT). \quad (5.11)$$

Наиболее часто в механике встречаются центрированные тензорные функции, т.е. удовлетворяющие условию:

$${}^n\mathcal{F}({}^m0) = {}^n0, \quad (5.12)$$

здесь  ${}^m0$  и  ${}^n0$  – нуль-тензоры  $m$ -го и  $n$ -го рангов.

**ТЕОРЕМА 5.1.** Всякая линейная центрированная тензорная функция может быть представлена в виде:

$${}^nS = {}^n\mathcal{F}({}^mT) = {}^{n+m}\Omega \underbrace{\dots}_{m} \cdot ({}^mT)^{(m \dots 1)}, \quad (5.13)$$

где  ${}^{n+m}\Omega$  – некоторый фиксированный тензор  $(n+m)$ -го ранга из  $\mathcal{T}_3^{(n+m)}$ .

В отличие от  ${}^nS$  и  ${}^mT$ , являющихся переменными, тензор  ${}^{n+m}\Omega$  не меняется и характеризует данную линейную тензорную функцию. Будем называть его тензором, задающим линейную функцию.

▼ Для доказательства теоремы 5.1 выберем в качестве базисов  $\mathcal{T}_3^{(n)}$  и  $\mathcal{T}_3^{(m)}$  полиадные базисы:  $R_{i_1} \otimes \dots \otimes R_{i_n}$  и  $R^{j_1} \otimes \dots \otimes R^{j_m}$ , и разложим по ним  ${}^nS$  и  ${}^mT$ . В силу линейности (5.10) имеем

$$\begin{aligned} {}^nS &= {}^nS^{i_1 \dots i_n} R_{i_1} \otimes \dots \otimes R_{i_n} = {}^n\mathcal{F}(T_{j_1 \dots j_m} R^{j_1} \otimes \dots \otimes R^{j_m}) = \\ &= {}^n\mathcal{F}(R^{j_1} \otimes \dots \otimes R^{j_m}) T_{j_1 \dots j_m}. \end{aligned}$$

Разлагая теперь тензоры  ${}^n\mathcal{F}(R^{j_1} \otimes \dots \otimes R^{j_m})$  по полиадному базису в  $\mathcal{T}_3^{(n)}$ :

$${}^n\mathcal{F}(R^{j_1} \otimes \dots \otimes R^{j_m}) = \Omega^{i_1 \dots i_n j_1 \dots j_m} R_{i_1} \otimes \dots \otimes R_{i_n}, \quad (5.14a)$$

находим коэффициенты разложения  $\Omega^{i_1 \dots i_n j_1 \dots j_m}$ , которые являются компонентами некоторого тензора  $(n+m)$ -го ранга.

В самом деле, возьмем другой базис  $R'_i = P^j_i R_j$  и проведем в нем те же самые построения. Тогда получим, что

$${}^n\mathcal{F}(R'^{j_1} \otimes \dots \otimes R'^{j_m}) = \Omega'^{i_1 \dots i_n j_1 \dots j_m} R'_{i_1} \otimes \dots \otimes R'_{i_n}.$$

Откуда, заменяя базис, находим

$$\begin{aligned} {}^n\mathcal{F}(R^{k_1} \otimes \dots \otimes R^{k_m}) &= P^{k_1}_{j_1} \dots P^{k_m}_{j_m} P^{j_{m+1}}_{i_{m+1}} \dots \\ &\dots P^{j_{m+n}}_{i_{m+n}} \Omega'^{i_1 \dots i_{n+m}} R_{j_{m+1}} \otimes \dots \otimes R_{j_{m+n}}. \end{aligned} \quad (5.14б)$$

Сравнивая (5.14а) и (5.14б), убеждаемся, что  $\Omega'^{i_1 \dots i_{n+m}}$  преобразуются по тензорному закону. Тогда всегда можно выбрать тензор  ${}^{n+m}\Omega$ , компоненты которого в базисах  $R_i$  и  $R'_i$  имеют вид:

$${}^{n+m}\Omega = \Omega^{i_1 \dots i_{n+m}} R_{i_1} \otimes \dots \otimes R_{i_{n+m}} = \Omega'^{i_1 \dots i_{n+m}} R'_{i_1} \otimes \dots \otimes R'_{i_{n+m}},$$

и который удовлетворяет (5.13).  $\blacktriangleleft$

Тогда компонентное представление линейной тензорной функции (5.13) будет иметь вид:

$$S^{i_1 \dots i_n} = \mathcal{F}^{i_1 \dots i_n} \equiv \Omega^{i_1 \dots i_{n+m}} T_{i_{n+1} \dots i_{n+m}}. \quad (5.15)$$

Поскольку  $\Omega^{i_1 \dots i_n}$  по определению есть компоненты тензора, то, очевидно, что условие (5.6) для линейной функции (5.13) будет всегда выполнено при любом  ${}^mT$ .

#### 5.1.4. Примеры линейных функций

С помощью одного и того же тензора  ${}^{n+m}\Omega$  можно построить, вообще говоря, несколько различных тензорных функций. В самом деле, переобозначив в (5.13) индексы  $n \rightarrow m$ , а  $(n+m) \rightarrow n$ , получим:

$${}^mS = {}^n\Omega \underbrace{\dots}_{n-m} ({}^{n-m}T)^{(n-m, n-m-1, \dots, 1)}, \quad (5.16)$$

$$n = 0, 1, \dots; \quad m = 0, 1, \dots, n.$$

Отсюда следует, что при фиксированном  $n$ , меняя  $m$  от 0 до  $n$ , можно построить  $n+1$  различных тензорных функций.

Например, при  $n = 0$  получаем из (5.16) обычную скалярную:  $S = \Omega W$ .

Для  $n > 1$  вместо  ${}^mS$  и  ${}^{n-m}T$  используем обозначения, которых придерживаемся везде в тексте: скаляры  ${}^0S$  и  ${}^0T$  обозначим как  $S$  и  $W$ ; векторы  ${}^1S$  и  ${}^1T$  обозначим как  $s$  и  $a$ ; тензоры второго ранга  ${}^2S$  и  ${}^2T$  обозначим как  $K$  и  $T$ . Для тензоров  ${}^n\Omega$ , задающих линейную функцию примем далее обозначения:

$${}^0\Omega \equiv \Omega, \quad {}^1\Omega \equiv c, \quad {}^2\Omega \equiv K, \quad {}^3\Omega \equiv {}^3M, \quad {}^4\Omega \equiv {}^4C. \quad (5.17)$$

Тогда при  $n = 1$  из (5.16) имеем две линейные функции, которые во введенных обозначениях имеют вид:

$$\begin{aligned} m = 0, \quad S &= c \cdot a & (\text{или } S = c^i a_i); \\ m = 1, \quad s &= cW & (\text{или } s^i = c^i W). \end{aligned} \quad (5.18)$$

При  $n = 2$  имеем три функции:

$$\begin{aligned} m = 0, \quad S &= K \cdot T & (\text{или } S = K^{ij} W_{ji}); \\ m = 1, \quad s &= K \cdot a & (\text{или } s^i = K^{ij} a_j); \\ m = 2, \quad S &= KW & (\text{или } S^{ij} = K^{ij} W). \end{aligned} \quad (5.19)$$

При  $n = 3$  имеем четыре функции:

$$\begin{aligned} m = 0, \quad S &= {}^3M \cdots {}^3W & (\text{или } S = M^{ijk} W_{kji}); \\ m = 1, \quad s &= {}^3M \cdots T & (\text{или } s^i = M^{ijk} T_{kj}). \\ m = 2, \quad S &= {}^3M \cdot a & (\text{или } S^{ij} = M^{ijk} a_k); \\ m = 3, \quad {}^3S &= {}^3MW & (\text{или } S^{ijk} = M^{ijk} W). \end{aligned} \quad (5.20)$$

При  $n = 4$  имеем пять функций:

$$\begin{aligned} m = 0, \quad S &= {}^4C \cdots {}^4W & (\text{или } S = C^{ijkl} W_{lkji}); \\ m = 1, \quad s &= {}^4M \cdots {}^3W & (\text{или } s^i = C^{ijkl} W_{lkj}). \\ m = 2, \quad S &= {}^4C \cdots T & (\text{или } S^{ij} = C^{ijkl} T_{ik}); \\ m = 3, \quad {}^3S &= {}^4C \cdot a & (\text{или } S^{ijk} = C^{ijkl} a_l); \\ m = 4, \quad {}^4S &= {}^4CW & (\text{или } S^{ijkl} = C^{ijkl} W). \end{aligned} \quad (5.21)$$

### 5.1.5. Индифферентные линейные тензорные функции

Рассмотрим теперь линейные тензорные функции (5.16), которые являются индифферентными относительно некоторой группы  $G_s$ .

Подставляя (5.16) в (5.7), получаем, что если линейная индифферентная функция в исходной системе координат  $x^i$  имеет вид:

$$\bar{S}^{i_1 \dots i_m} = \bar{\Omega}^{i_1 \dots i_n} \bar{T}_{i_{m+1} \dots i_n}, \quad (5.22)$$

то в любой другой системе координат  $X^i$ , получающейся из  $x^i$  с помощью линейного преобразования (3.1), соответствующего данной группе  $G_s$ , эта функция будет иметь вид:

$$S^{i_1 \dots i_m} = \bar{\Omega}^{i_1 \dots i_n} T_{i_{m+1} \dots i_n},$$

т.е. компоненты тензора  ${}^n\Omega$  при таких преобразованиях не изменяются:

$$\Omega^{i_1 \dots i_{n+m}} = \bar{\Omega}^{i_1 \dots i_{n+m}}. \quad (5.23)$$

Сравнивая (5.23) с (4.3), заключаем, что имеет место следующая теорема.

**Теорема 5.2.** Тензор  ${}^n\Omega$ , задающий линейную индифферентную относительно группы  $G_s$  тензорную функцию (5.16), является индифферентным относительно той же группы  $G_s$ .

Если подставить (5.15) и (5.23) в соотношение (5.9), то получим

$$\bar{\Omega}^{k_1 \dots k_n} A_{k_1}^{i_1} \dots A_{k_n}^{i_n} = \bar{\Omega}^{i_1 \dots i_n} \quad \forall (A^i{}_k) \in G_s. \quad (5.24)$$

Это соотношение означает, что между компонентами индифферентного тензора существуют зависимости (см. также (4.4)).

Условие индифферентности (5.24), согласно п.4.1.3 (формула (4.7)), можно записать с помощью тензора линейных преобразований  $\mathbf{Q}$ , определенного формулой (4.5):

$${}^n\Omega = {}^n\Omega \underbrace{\dots}_{n} (\mathbf{Q} \otimes \dots \otimes \mathbf{Q})^{(2n-1, 2n-3, \dots, 3, 1, 2, 4, \dots, 2n)},$$

где

$$\mathbf{Q} = A^i{}_j \bar{\mathbf{e}}^j \otimes \bar{\mathbf{e}}_i.$$

Например, условия индифферентности вектора  $\mathbf{c}$  и тензора второго ранга  $\mathbf{K}$ , третьего ранга  ${}^3\mathbf{M}$  и четвертого ранга  ${}^4\mathbf{C}$  будут иметь вид:

$$\mathbf{c} = c \cdot \mathbf{Q}, \quad {}^3\mathbf{M} = {}^3\mathbf{M} \dots (\mathbf{Q} \otimes \mathbf{Q} \otimes \mathbf{Q})^{(531246)},$$

$${}^4\mathbf{C} = {}^4\mathbf{C} \dots (\mathbf{Q} \otimes \mathbf{Q} \otimes \mathbf{Q} \otimes \mathbf{Q})^{(75312468)}.$$

Из теоремы 5.2 следует, что для описания индифферентной линейной тензорной функции достаточно рассмотреть соответствующий индифферентный задающий тензор  ${}^n\Omega$ .

Для индифферентных относительно фиксированной группы преобразований  $G_s$  тензоров, как было установлено в п.4.1.6, существует разложение по тензорному базису (4.19) в пространстве  $I_3^{(n)}$ :

$${}^n\Omega = \sum_{\beta=1}^k {}^n\Omega_{(\beta)} \gamma_{\beta}, \quad (5.25)$$

или

$$\bar{\Omega}^{i_1 \dots i_n} = \sum_{\beta=1}^k \gamma_{\beta} \bar{\Omega}_{(\beta)}^{i_1 \dots i_n}, \quad (5.26)$$

где  ${}^n\Omega_{(\beta)}$  - тензорный базис для группы  $G_s$ , а  $\gamma_\beta$  - коэффициенты разложения. Этот тензорный базис может быть организован с помощью образующих тензоров группы  $O_{S(\gamma)}$  (см. п.4.1.8).

Подставляя (5.25) в (5.16), получим *первое представление линейной индифферентной тензорной функции* (через тензорный базис):

$${}^m S = \sum_{\beta=1}^k \gamma_\beta {}^n\Omega_{(\beta)} \cdot {}^{n-m} T. \quad (5.27)$$

*Вторым представлением индифферентной линейной тензорной функции* назовем компонентное представление, например, в декартовом базисе  $\bar{e}_i$ :

$$\bar{S}^{i_1 \dots i_m} = \sum_{\beta=1}^k \gamma_\beta \bar{\Omega}^{i_1 \dots i_n} \bar{T}_{i_{m+1} \dots i_n}. \quad (5.28)$$

Заметим, что в этих представлениях одна линейная функция отличается от другой только значениями констант  $\gamma_\beta$  (в рамках одной группы симметрии  $G_s$ ).

Соответствующие представления (5.25) и (5.26) будем называть *первым и вторым представлениями задающего тензора*  ${}^n\Omega$ .

Укажем далее тензорные базисы  ${}^n\Omega_\beta$  и представление задающего тензора  ${}^n\Omega$  для различных групп симметрии, ограничиваясь наиболее распространенными в механике значениями  $n=1, 2, 3$  и  $4$ . Будем при этом использовать символику (5.17).

### 5.1.6. Индифферентные линейные векторные функции

Как было отмечено в п.4.1.8, тензорные базисы могут быть построены с помощью только образующих тензоров  $O_{S(\gamma)}$  группы  $G_s$ . Рассмотрим случай индифферентных тензоров первого ранга (векторов):  ${}^1\Omega = c$ , т.е. в (5.25) положим  $n=1$ . Тогда в тензорный базис  ${}^3\Omega_{(\beta)}$  могут входить только образующие тензоры групп из наборов (4.28) - (4.36) рангом не выше  $n=1$ . Если таких образующих тензоров нет в какой-либо группе  $G_s$ , то индифферентной линейной векторной функции в этой группе нет. Соответствующие компоненты  $c^i$  задающего вектора в этом случае будем полагать равными нулю.

В табл.5.1 даны вторые представления (5.26) задающего вектора с линейной функциией для разных групп симметрии.

Максимальное число ненулевых констант  $\gamma_\beta$  у линейной векторной функции равно 3 и достигается в группе  $G_1$ . Для групп  $G_s$ ,  $s=4, 6, 10, 13, 16, 18, 22, 26, 33, 35$  имеется только одна константа  $\gamma$ , а для  $G_3$  - две. Для остальных групп  $G_s$  не существует соответствующих ненулевых индифферентных линейных тензорных функций, что отражено в (5.25) как  $\bar{c}^i = 0$ .

Таблица 5.1.

<i>I. Триклиническая сингония</i>	
$G_1 : \bar{c}^i = \sum_{\alpha=1}^3 \gamma_\alpha \delta_\alpha^i, \quad G_2 : \bar{c}^i = 0.$	
<i>II. Моноклиническая сингония</i>	
$G_3 : \bar{c}^i = \sum_{\beta=1}^2 \gamma_\beta \delta_\beta^i, \quad G_4 : \bar{c}^i = \gamma \delta_3^i, \quad G_5 : \bar{c}^i = 0.$	
<i>III. Ромбическая сингония</i>	
$G_6 : \bar{c}^i = \gamma \delta_3^i, \quad G_{7,8} : \bar{c}^i = 0.$	(5.29)
<i>IV. Тетрагональная сингония</i>	
$G_{9,11,12,14,15} : \bar{c}^i = 0, \quad G_{10,13} : \bar{c}^i = \gamma \delta_3^i.$	
<i>V. Ромбоэдрическая сингония</i>	
$G_{16,18} : \bar{c}^i = \gamma \delta_3^i, \quad G_{17,19,20} : \bar{c}^i = 0.$	
<i>VI. Гексагональная сингония</i>	
$G_{21,23,24,25,27} : \bar{c}^i = 0, \quad G_{22,26} : \bar{c}^i = \gamma \delta_3^i.$	
<i>VII. Кубическая сингония</i>	
$G_{28..32} : \bar{c}^i = 0.$	
<i>VIII. Трансверсальная изотропия</i>	
$G_{33,35} : \bar{c}^i = \gamma \delta_3^i, \quad G_{34,36,37} : \bar{c}^i = 0.$	
<i>IX. Изотропия</i>	
$G_{38,39} : \bar{c}^i = 0.$	

### 5.1.7. Индифферентные линейные функции второго ранга

Рассмотрим случай линейных функций (5.16) при  $n = 2$ , причем кроме условия индифферентности (5.23) будем считать выполненными условия симметрии для задающих тензоров  ${}^2\Omega \equiv K$ , т.е.

$$K = K^T \quad \text{или} \quad \bar{K}^{ij} = \bar{K}^{ji}. \quad (5.30)$$

Для случая  $n = 2$  часто используется еще одно, *третье представление* задающего тензора  $K$  - в матричном виде:

$$(\bar{K}) = \begin{pmatrix} \bar{K}^{11} & \bar{K}^{12} & \bar{K}^{13} \\ \bar{K}^{21} & \bar{K}^{22} & \bar{K}^{23} \\ \text{сим.} & & \bar{K}^{33} \end{pmatrix}. \quad (5.31)$$

*Матричное (третье) представление* линейной тензорной функции второго ранга может быть также введено для функций вида (5.19) при  $m = 1$ :

$$\begin{pmatrix} \bar{s}^1 \\ \bar{s}^2 \\ \bar{s}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{K}^{11} & \bar{K}^{12} & \bar{K}^{13} \\ \bar{K}^{21} & \bar{K}^{22} & \bar{K}^{23} \\ \bar{K}^{31} & \bar{K}^{32} & \bar{K}^{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a}_1 \\ \bar{a}_2 \\ \bar{a}_3 \end{pmatrix}, \quad (5.32)$$

где введены компоненты векторов  $\bar{s}$  и  $\bar{a}$  в виде координатных столбцов в базисе  $\bar{e}_i$ .

Максимальное число независимых компонент у симметричного тензора второго ранга равно 6, так как из 9 возможных комбинаций из  $\bar{K}^{ij}$  наложены 3 условия симметрии (5.30):

$$\bar{K}^{12} = \bar{K}^{21}, \quad \bar{K}^{13} = \bar{K}^{31}, \quad \bar{K}^{23} = \bar{K}^{32}. \quad (5.33)$$

Условие (5.30) с  $i = j$ , очевидно, образует тождества.

Индифферентность тензора  $K$  по отношению к той или иной группе симметрии  $G_s$  приводит к появлению дополнительных условий (5.24):

$$\bar{K}^{ij} = \bar{K}^{kl} A^i_k A^j_l, \quad \forall (A^i_k) \in G_s \quad (5.34)$$

на компоненты  $\bar{K}^{ij}$  и число  $k$  независимых компонент еще уменьшается. Это число  $k$  может быть определено с помощью теории характеров матричных представлений (см. теорему 4.15 и табл. 4.4).

Тензорный базис  $O_{S(\gamma)}$  (5.25) симметричных индифферентных тензоров второго ранга  $K$  будет состоять только из симметричных образующих тензоров рангом выше второго. Эти тензоры содержатся в табл. 4.2. Заметим, что они одинаковы для разных групп  $G_s$  в пределах фиксированного класса.

Ниже даны первое, второе и третье представления задающего тензора  $K$  для различных классов, а также используемые образующие тензоры.

*Триклинический E-класс*  $\{\mathbf{e}_\alpha\}$ :

$$K = \sum_{\alpha=1}^3 \gamma_\alpha \mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}_\alpha + \gamma_4 (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1) + \gamma_5 (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1) + \gamma_6 (\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2),$$

$$\bar{K}^{ij} = \sum_{\alpha=1}^3 \gamma_\alpha \delta_\alpha^i \delta_\alpha^j + \gamma_4 (\delta_1^i \delta_2^j + \delta_2^i \delta_1^j) + \gamma_5 (\delta_1^i \delta_3^j + \delta_3^i \delta_1^j) + \gamma_6 (\delta_2^i \delta_3^j + \delta_3^i \delta_2^j),$$

$$(\bar{K}^{ij}) = \begin{pmatrix} \bar{K}^{11} & \bar{K}^{12} & \bar{K}^{13} \\ \bar{K}^{12} & \bar{K}^{22} & \bar{K}^{23} \\ \bar{K}^{13} & \bar{K}^{23} & \bar{K}^{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_4 & \gamma_5 \\ \gamma_4 & \gamma_2 & \gamma_6 \\ \gamma_5 & \gamma_6 & \gamma_3 \end{pmatrix}. \quad (5.35)$$

*Моноклинический M-класс*  $\{\mathbf{e}_\alpha^2, O_3\}$ :

$$K = \sum_{\alpha=1}^3 \gamma_\alpha \mathbf{e}_\alpha^2 + \gamma_4 O_3, \quad \bar{K}^{ij} = \sum_{\alpha=1}^3 \gamma_\alpha \delta_\alpha^i \delta_\alpha^j + \gamma_4 (\delta_1^i \delta_2^j + \delta_2^i \delta_1^j), \quad (5.36)$$

$$\bar{K}^{ij} = \begin{pmatrix} \bar{K}^{11} & \bar{K}^{12} & 0 \\ \bar{K}^{12} & \bar{K}^{22} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{K}^{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_4 & 0 \\ \gamma_4 & \gamma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_3 \end{pmatrix}.$$

Ортотропный  $O$ -класс  $\{\mathbf{e}_\alpha^2\}$ :

$$\mathbf{K} = \sum_{\alpha=1}^3 \gamma_\alpha \mathbf{e}_\alpha^2, \quad \bar{K}^{ij} = \sum_{\alpha=1}^3 \gamma_\alpha \delta_\alpha^i \delta_\alpha^j, \quad (5.37)$$

$$\bar{K}^{ij} = \begin{pmatrix} \bar{K}^{11} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{K}^{22} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{K}^{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_3 \end{pmatrix}.$$

$T$  - тетрагональный,  $K_3$  - квазитрансверсальноизотропный,  $A, B$  - ромбоэдрические,  $H$  - гексагональный,  $T_3$  - трансверсальноизотропный классы  $\{\mathbf{E}, \mathbf{e}_3^2\}$ :

$$\mathbf{K} = \gamma_1 (\mathbf{E} - \mathbf{e}_3^2) + \gamma_2 \mathbf{e}_3^2, \quad \bar{K}^{ij} = \gamma_1 (\delta^{ij} - \delta_3^i \delta_3^j) + \gamma_2 \delta_3^i \delta_3^j,$$

$$\bar{K}^{ij} = \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_1 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_2 \end{pmatrix}. \quad (5.38)$$

$K$  - квазизотропный,  $I$  - изотропный классы  $\{\mathbf{E}\}$ :

$$\mathbf{K} = \gamma \mathbf{E}, \quad \bar{K}^{ij} = \gamma \delta^{ij}, \quad \bar{K}^{ij} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}. \quad (5.39)$$

Для групп симметрии  $E$ -класса у тензора  $\mathbf{K}$  достигается максимальное число независимых констант - 6; для групп  $M$ -класса - 4; для ортотропного класса - 3; для групп классов  $T, K_3, A, B, H$  и  $T_3$  - 2 константы, и для групп  $K$  и  $I$ -классов - одна независимая константа.

Если тензор  $\mathbf{K}$  невырожден, то соотношения (5.19) при  $m = 2$  и (5.32) можно обратить:

$$\mathbf{a} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{s},$$

где  $\mathbf{L}$  - симметричный тензор, обратный к  $\mathbf{K}$  и имеющий матричное представление:

$$(\mathbf{L}) = \begin{pmatrix} \bar{L}_{11} & \bar{L}_{12} & \bar{L}_{13} \\ \bar{L}_{12} & \bar{L}_{22} & \bar{L}_{23} \\ \bar{L}_{13} & \bar{L}_{23} & \bar{L}_{33} \end{pmatrix},$$

причем

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{L} = \mathbf{E}$$

или

$$\bar{K}^{ij}\bar{L}_{jk} = \delta^i_j.$$

Используя результаты упр. 4.1.8, получаем, что если  $K$  - индифферентен относительно какой-либо группы симметрии, то и  $L$  - индифферентен относительно той же самой группы  $G_s$ . Это означает, что обратный тензор  $L$  для каждого класса симметрии будет иметь ту же структуру (5.35) - (5.39), что и тензор  $K$ .

### 5.1.8. Индифферентные линейные функции третьего ранга

Для индифферентных линейных тензорных функций третьего ранга (формулы (5.16),  $n = 3$ ) задающим тензором является тензор третьего ранга  ${}^3\Omega = {}^3M$  (формулы (5.17) и (5.20)). Будем далее считать его симметричным (см. п. 4.1.10), т.е.

$${}^3M = {}^3M^{(132)} \quad \text{или} \quad \bar{M}^{ijk} = \bar{M}^{ikj}. \quad (5.40)$$

Наличие симметрии (5.40) приводит к сокращению числа максимально возможных независимых компонент  $\bar{M}^{ijk}$ : из  $3^3 = 27$  компонент остаются только 18 штук, так как условия (5.40) накладывают 9 ограничений на компоненты.

Условия индифферентности (5.24) тензора  ${}^3M$  по отношению к группам симметрии  $G_s$ :

$$\bar{M}^{i_1 i_2 i_3} = \bar{M}^{j_1 j_2 j_3} A_{j_1}^{i_1} A_{j_2}^{i_2} A_{j_3}^{i_3}, \quad (A^i_j) \in G_s, \quad (5.41)$$

еще уменьшают число независимых компонент (см. табл. 4.4).

Для симметричного тензора третьего ранга также можно дать *матричное представление*, для этого расположим его независимые компоненты в виде матрицы  $3 \times 6$ :

$$({}^3M)_{3 \times 6} = \begin{pmatrix} \bar{M}^{111} & \bar{M}^{122} & \bar{M}^{133} & \sqrt{2}\bar{M}^{123} & \sqrt{2}\bar{M}^{131} & \sqrt{2}\bar{M}^{112} \\ \bar{M}^{211} & \bar{M}^{222} & \bar{M}^{233} & \sqrt{2}\bar{M}^{223} & \sqrt{2}\bar{M}^{231} & \sqrt{2}\bar{M}^{212} \\ \bar{M}^{311} & \bar{M}^{322} & \bar{M}^{333} & \sqrt{2}\bar{M}^{323} & \sqrt{2}\bar{M}^{331} & \sqrt{2}\bar{M}^{312} \end{pmatrix} \quad (5.42)$$

Появление коэффициентов  $\sqrt{2}$  в этой матрице позволяет записать линейную функцию третьего ранга (5.20) при  $m = 1$  также в матричном виде:

$$\{\underline{s}\}_{1 \times 3} = ({}^3M)_{3 \times 6} \{\underline{T}\}_{1 \times 6}, \quad (5.43)$$

где  $\{\underline{s}\}_{1 \times 3}$  и  $\{\underline{T}\}_{1 \times 6}$  – координатные столбцы из компонент вектора  $s$  и симметричного тензора  $T$ , построенные следующим образом:

$$\{\underline{s}\}_{1 \times 3} = \begin{pmatrix} \bar{s}^1 \\ \bar{s}^2 \\ \bar{s}^3 \end{pmatrix}, \quad \{\underline{T}\}_{1 \times 6} = \begin{pmatrix} \bar{T}_{11} \\ \bar{T}_{22} \\ \bar{T}_{33} \\ \sqrt{2}\bar{T}_{23} \\ \sqrt{2}\bar{T}_{31} \\ \sqrt{2}\bar{T}_{12} \end{pmatrix}. \quad (5.44)$$

Если координатные столбцы  $\{ \ }$  имеют различные размеры, как в данном случае, то в матричной записи указывается их размер. Эквивалентное для (5.43) и (5.20) компонентное представление линейной функции третьего ранга имеет вид:

$$\bar{s}^i = \bar{M}^{ijk} \bar{T}_{jk}. \quad (5.45)$$

Хотя для тензоров третьего ранга не существует понятия обратного тензора, однако аналогом обратной к линейной функции третьего ранга (5.20)  $m = 1$  можно считать функцию (5.20) при  $m = 2$ :

$$S = {}^3M^{(231)} \cdot a, \quad (5.46)$$

где  $S$  - симметричный тензор второго ранга. Его компонентное (второе) представление имеет вид:

$$\bar{S}^{ij} = \bar{M}^{kij} \bar{a}_k, \quad (5.47)$$

а матричное (третье):

$$\{ S_{1 \times 6} \} = ({}^3M_{6 \times 3})^T \{ a_{1 \times 3} \}, \quad (5.48)$$

или

$$\begin{pmatrix} \bar{S}^{11} \\ \bar{S}^{22} \\ \bar{S}^{33} \\ \sqrt{2}\bar{S}^{23} \\ \sqrt{2}\bar{S}^{31} \\ \sqrt{2}\bar{S}^{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{M}^{111} & \bar{M}^{211} & \bar{M}^{311} \\ \bar{M}^{122} & \bar{M}^{222} & \bar{M}^{322} \\ \bar{M}^{133} & \bar{M}^{233} & \bar{M}^{333} \\ \sqrt{2}\bar{M}^{123} & \sqrt{2}\bar{M}^{223} & \sqrt{2}\bar{M}^{323} \\ \sqrt{2}\bar{M}^{131} & \sqrt{2}\bar{M}^{231} & \sqrt{2}\bar{M}^{331} \\ \sqrt{2}\bar{M}^{112} & \sqrt{2}\bar{M}^{212} & \sqrt{2}\bar{M}^{312} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a}_1 \\ \bar{a}_2 \\ \bar{a}_3 \end{pmatrix}. \quad (5.49)$$

Обозначение  $({}^3M)^T$  здесь означает, что к матрице  $({}^3M)$  применено транспонирование.

Тензор  ${}^3M$  и в случае линейной функции (5.46) обладает симметрией вида (5.40). Сравнивая матричные представления (5.43) и (5.49), легко заметить, что введение в матрицы  $({}^3M)$  и  $({}^3M)^T$  коэффициентов  $\sqrt{2}$  позволило сохранить структуру столбцов  $\{ \ }$  и матриц  $( )$  в "обратной" функции (5.49) (см. упр. 5.1.4).

Если тензорные функции (5.43) и (5.46) индифферентны относительно какой-либо группы  $G_s$ , то соответствующий тензор  ${}^3M$  можно представить разложением (5.25) по тензорному базису данной группы. Тензорные базисы групп строятся с помощью направляющих тензоров, приведенных в п. 4.1.10.

Как и для тензоров первого ранга, ненулевые индифферентные тензоры третьего ранга существуют не во всех группах  $G_s$ . Ниже приведены по три представления (тензорное, компонентное и матричное) ненулевых индифферентных тензоров  ${}^3M$  в тензорном базисе различных групп и классов симметрии. В фигурных скобках указаны образующие тензоры  $O_{s(\gamma)}$  групп.

*(E) - Триклинический класс*

*Группа  $G_1$  { $\bar{e}_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$ }:*

$$\begin{aligned} {}^3M = \sum_{\alpha=1}^3 & \left( d_\alpha \bar{e}_\alpha^3 + d_{3+\alpha} \bar{e}_\alpha \otimes \bar{e}_\beta^2 + d_{6+\alpha} \bar{e}_\alpha \otimes \bar{e}_\gamma^2 + d_{9+\alpha} (\bar{e}_\alpha^2 \otimes \bar{e}_\beta + \right. \\ & \left. + (\bar{e}_\alpha^2 \otimes \bar{e}_\beta)^{(132)}) + d_{12+\alpha} (\bar{e}_\alpha^2 \otimes \bar{e}_\gamma + (\bar{e}_\alpha^2 \otimes \bar{e}_\gamma)^{(132)}) + d_{15+\alpha} \bar{e}_\alpha \otimes O_\alpha \right), \end{aligned}$$

$$\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3; \quad \alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha.$$

$$\begin{aligned} \bar{M}^{ijk} = \sum_{\alpha=1}^3 & \left( d_\alpha \delta_3^i \delta_3^j \delta_3^k + d_{3+\alpha} \delta_\alpha^i \delta_\beta^j \delta_\beta^k + d_{6+\alpha} \delta_\alpha^i \delta_\gamma^j \delta_\gamma^k + \right. \\ & \left. + d_{9+\alpha} (\delta_\alpha^i \delta_\alpha^j \delta_\beta^k + \delta_\alpha^i \delta_\alpha^k \delta_\beta^j) + d_{12+\alpha} (\delta_\alpha^i \delta_\alpha^j \delta_\gamma^k + \delta_\alpha^i \delta_\alpha^k \delta_\gamma^j) + \right. \\ & \left. + d_{15+\alpha} \delta_\alpha^i (\delta_\beta^j \delta_\gamma^k + \delta_\gamma^j \delta_\beta^k) \right), \end{aligned} \quad (5.50)$$

$$\begin{aligned} ({}^3M) &= \begin{pmatrix} d_1 & d_4 & d_7 & \sqrt{2}d_{16} & \sqrt{2}d_{13} & \sqrt{2}d_{10} \\ d_8 & d_2 & d_5 & \sqrt{2}d_{11} & \sqrt{2}d_{17} & \sqrt{2}d_{14} \\ d_6 & d_9 & d_3 & \sqrt{2}d_{15} & \sqrt{2}d_{12} & \sqrt{2}d_{18} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \bar{M}^{111} & \bar{M}^{122} & \bar{M}^{133} & \sqrt{2}\bar{M}^{123} & \sqrt{2}\bar{M}^{131} & \sqrt{2}\bar{M}^{112} \\ \bar{M}^{211} & \bar{M}^{222} & \bar{M}^{233} & \sqrt{2}\bar{M}^{223} & \sqrt{2}\bar{M}^{231} & \sqrt{2}\bar{M}^{212} \\ \bar{M}^{311} & \bar{M}^{322} & \bar{M}^{333} & \sqrt{2}\bar{M}^{323} & \sqrt{2}\bar{M}^{331} & \sqrt{2}\bar{M}^{312} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Здесь  $d_\alpha$  - константы разложения по тензорному базису.

Индексы в формуле (5.50) и далее следует расшифровывать следующим образом: если в сумме по  $\alpha$  значение  $\alpha = 1$ , то  $\beta = 2, \gamma = 3$ ; если  $\alpha = 2$ , то  $\beta = 3, \gamma = 1$ ; если  $\alpha = 3$ , то  $\beta = 1, \gamma = 2$ . Таким образом, тензор  ${}^3M$  в данной группе имеет максимальное число независимых компонент - 18.

$(M)$  -Моноклинный класс

Группа  $G_3 \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3^2\}$ :

$$\begin{aligned} {}^3M = & \sum_{\alpha=1}^2 \left( d_{\alpha} \bar{e}_{\alpha}^2 \otimes \bar{e}_{\alpha} + d_{2+\alpha} \bar{e}_{\alpha} \otimes \bar{e}_3^2 + d_{4+\alpha} (\bar{e}_3^2 \otimes \bar{e}_{\alpha} + (\bar{e}_3^2 \otimes \bar{e}_{\alpha})^{(132)}) + \right. \\ & \left. + d_{6+\alpha} \bar{e}_{\alpha} \otimes \bar{e}_{\beta}^2 + d_{8+\alpha} \bar{e}_{\alpha} \otimes \bar{O}_3 \right), \quad \alpha, \beta = 1, 2; \quad \alpha \neq \beta, \end{aligned} \quad (5.51)$$

$$\begin{aligned} \bar{M}^{ijk} = & \sum_{\alpha=1}^2 \left( d_{\alpha} \delta_{\alpha}^i \delta_{\alpha}^j \delta_{\alpha}^k + d_{2+\alpha} \delta_{\alpha}^i \delta_3^j \delta_3^k + d_{4+\alpha} \delta_3^i (\delta_3^j \delta_{\alpha}^k + \delta_{\alpha}^j \delta_3^k) + \right. \\ & \left. + d_{6+\alpha} \delta_{\alpha}^i \delta_{\beta}^j \delta_{\beta}^k + d_{8+\alpha} \delta_{\alpha}^i (\delta_1^j \delta_2^k + \delta_2^j \delta_1^k) \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ({}^3M) = & \begin{pmatrix} d_1 & d_7 & d_3 & 0 & 0 & \sqrt{2}d_9 \\ d_8 & d_2 & d_4 & 0 & 0 & \sqrt{2}d_{10} \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}d_6 & \sqrt{2}d_5 & 0 \end{pmatrix} = \\ = & \begin{pmatrix} \bar{M}^{111} & \bar{M}^{122} & \bar{M}^{133} & 0 & 0 & \sqrt{2}\bar{M}^{112} \\ \bar{M}^{211} & \bar{M}^{222} & \bar{M}^{233} & 0 & 0 & \sqrt{2}\bar{M}^{212} \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}\bar{M}^{323} & \sqrt{2}\bar{M}^{313} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Тензор  ${}^3M$  имеет 10 независимых констант  $d_{\alpha}$ .

Группа  $G_4 \{\bar{e}_1^2, \bar{e}_2^2, \bar{e}_3, O_{\alpha d}, \alpha = 1, 2, 3\}$ :

$${}^3M = \sum_{\alpha=1}^3 \left( d_{\alpha} \bar{e}_3 \otimes \bar{e}_{\alpha}^2 + d_{3+\alpha} O_{\alpha d} \right) + \sum_{\alpha=1}^2 d_{6+\alpha} \left( \bar{e}_{\alpha}^2 \otimes \bar{e}_3 + (\bar{e}_{\alpha}^2 \otimes \bar{e}_3)^{(132)} \right),$$

$$\begin{aligned} \bar{M}^{ijk} = & \sum_{\alpha=1}^3 d_{\alpha} \delta_3^i \delta_{\alpha}^j \delta_{\alpha}^k + d_{3+\alpha} \left( \delta_{\beta}^i (\delta_{\gamma}^j \delta_{\alpha}^k + \delta_{\alpha}^j \delta_{\gamma}^k) - \delta_{\gamma}^i (\delta_{\alpha}^j \delta_{\beta}^k + \delta_{\beta}^j \delta_{\alpha}^k) \right) + \\ & + \sum_{\alpha=1}^2 d_{6+\alpha} (\delta_{\alpha}^i \delta_{\alpha}^j \delta_3^k + \delta_{\alpha}^i \delta_3^j \delta_{\alpha}^k), \end{aligned} \quad (5.52)$$

$$\begin{aligned} ({}^3M) = & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}(d_6 - d_5) & \sqrt{2}d_7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}d_8 & \sqrt{2}(d_4 - d_6) & 0 \\ d_1 & d_2 & d_3 & 0 & 0 & \sqrt{2}(d_5 - d_4) \end{pmatrix} = \\ = & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}\bar{M}^{132} & \sqrt{2}\bar{M}^{131} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}\bar{M}^{232} & \sqrt{2}\bar{M}^{231} & 0 \\ \bar{M}^{311} & \bar{M}^{322} & \bar{M}^{333} & 0 & 0 & \sqrt{2}\bar{M}^{312} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Тензор  ${}^3M$  имеет 8 независимых констант.

(O) - Ортотропный класс

Группа  $G_6 \{ \bar{e}_1^2, \bar{e}_2^2, \bar{e}_3 \}$ :

$${}^3M = \sum_{\alpha=1}^3 d_\alpha \bar{e}_3 \otimes \bar{e}_\alpha^2 + \sum_{\alpha=1}^2 d_{3+\alpha} \left( \bar{e}_\alpha^2 \otimes \bar{e}_3^2 + (\bar{e}_\alpha^2 \otimes \bar{e}_3)^{(132)} \right),$$

$$\bar{M}^{ijk} = \sum_{\alpha=1}^3 d_\alpha \delta_3^i \delta_\alpha^j \delta_\alpha^k + \sum_{\alpha=1}^2 d_{3+\alpha} (\delta_\alpha^i \delta_\alpha^j \delta_3^k + \delta_\alpha^i \delta_3^j \delta_\alpha^k), \quad (5.53)$$

$$\begin{aligned} ({}^3M) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}d_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}d_5 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & d_3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}\bar{M}^{131} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}\bar{M}^{232} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{M}^{311} & \bar{M}^{322} & \bar{M}^{333} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Тензор  ${}^3M$  имеет 5 независимых констант.

Группа  $G_7 \{ O_{\alpha d}, \alpha = 1, 2, 3 \}$ :

$$\begin{aligned} {}^3M &= \sum_{\alpha=1}^3 d_\alpha O_{\alpha d}, \quad \bar{M}^{ijk} = \sum_{\alpha=1}^3 d_\alpha \left( \delta_\beta^i (\delta_\gamma^j \delta_\alpha^k + \delta_\alpha^j \delta_\gamma^k) - \delta_\gamma^i (\delta_\alpha^j \delta_\beta^k + \delta_\beta^j \delta_\alpha^k) \right), \\ ({}^3M) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}(d_3 - d_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}(d_1 - d_3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}(d_2 - d_1) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.54)$$

Тензор  ${}^3M$  имеет 3 независимые константы.

(T) - Тетрагональный класс

Группа  $G_9$ :

$${}^3M = d_1 T_d + d_2 B_{3d} + d_3 N_{3d} + d_4 R_{3d},$$

$$\begin{aligned} \bar{M}^{ijk} &= (d_1 + d_2) \sum_{\alpha=1}^2 \delta_\alpha^i (\delta_\beta^j \delta_\gamma^k + \delta_\gamma^j \delta_\beta^k) + d_1 \delta_3^i (\delta_1^j \delta_2^k + \delta_2^j \delta_1^k) + \\ &+ (d_4 - d_3) \left( \delta_2^i (\delta_2^j \delta_3^k + \delta_3^j \delta_2^k) - \delta_1^i (\delta_3^j \delta_1^k + \delta_1^j \delta_3^k) \right) + \\ &+ 2d_3 \delta_3^i (\delta_2^j \delta_2^k - \delta_1^j \delta_1^k), \end{aligned} \quad (5.55)$$

$$({}^3\mathbf{M}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}(d_1 + d_2) & \sqrt{2}(d_4 - d_3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2}(d_4 - d_3) & \sqrt{2}(d_1 + d_2) & 0 \\ -2d_3 & 2d_3 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}d_1 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}\bar{M}^{123} & \sqrt{2}\bar{M}^{131} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2}\bar{M}^{131} & \sqrt{2}\bar{M}^{123} & 0 \\ \bar{M}^{311} & \bar{M}^{322} & \bar{M}^{333} & 0 & 0 & \sqrt{2}\bar{M}^{312} \end{pmatrix}.$$

Тензор  ${}^3\mathbf{M}$  имеет 4 независимые константы. Определение тензоров  $\mathbf{T}_d$ ,  $\mathbf{B}_{3d}$ ,  $\mathbf{N}_{3d}$  и  $\mathbf{R}_{3d}$  дано в п.4.1.10.

Группа  $G_{10}$ :

$${}^3\mathbf{M} = d_1 \mathbf{E}_h + d_2 \bar{\mathbf{e}}_3 \otimes \mathbf{E} + d_3 \bar{\mathbf{e}}_3 \otimes \bar{\mathbf{e}}_3^2 + d_4 \mathbf{O}_{3d},$$

$$\bar{M}^{ijk} = d_1(\delta^{ij}\delta_3^k + \delta^{ik}\delta_3^j) + d_2\delta_3^i\delta^{jk} + d_3\delta_3^i\delta_3^j\delta_3^k + \\ + d_4\left(\delta_1^i(\delta_3^j\delta_2^k + \delta_2^j\delta_3^k) - \delta_2^i(\delta_3^j\delta_1^k + \delta_1^j\delta_3^k)\right), \quad (5.56)$$

$$({}^3\mathbf{M}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}d_4 & \sqrt{2}d_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}d_1 & -\sqrt{2}d_4 & 0 \\ d_2 & d_2 & d_1 + d_2 + d_3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тензор  ${}^3\mathbf{M}$  имеет 4 независимые константы.

( $K_3$ ) -Квазитрансверсально-изотропный класс

Группа  $G_{12}$ :

$${}^3\mathbf{M} = d_1 \mathbf{T}_d + d_2 \mathbf{B}_{3d},$$

$$\bar{M}^{ijk} = (d_1 + d_2) \sum_{\alpha=1}^2 \delta_\alpha^i (\delta_\beta^j \delta_\gamma^k + \delta_\gamma^j \delta_\beta^k) + d_1 \delta_3^i (\delta_1^j \delta_2^k + \delta_2^j \delta_1^k), \quad (5.57)$$

$$({}^3\mathbf{M}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}(d_1 + d_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}(d_1 + d_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}d_1 \end{pmatrix}.$$

Тензор  ${}^3\mathbf{M}$  имеет 2 независимые константы.

Группа  $G_{13}$ :

$${}^3\mathbf{M} = d_1 \mathbf{E}_h + d_2 \bar{\mathbf{e}}_3 \otimes \mathbf{E} + d_3 \bar{\mathbf{e}}_3 \otimes \bar{\mathbf{e}}_3^2,$$

$$\bar{M}^{ijk} = d_1(\delta^{ij}\delta_3^k + \delta^{ik}\delta_3^j) + d_2\delta_3^i\delta^{jk} + d_3\delta_3^i\delta_3^j\delta_3^k, \quad (5.58)$$

$$\begin{aligned} {}^3\mathbf{M} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}d_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}d_1 & 0 & 0 \\ d_2 & d_2 & d_1 + d_2 + d_3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}\bar{M}^{131} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}\bar{M}^{131} & 0 & 0 \\ \bar{M}^{311} & \bar{M}^{311} & \bar{M}^{333} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Тензор  ${}^3\mathbf{M}$  имеет 3 независимые константы.

Группа  $G_{14}$ :

$${}^3\mathbf{M} = d\mathbf{O}_{3d},$$

$$\bar{M}^{ijk} = d \left( \delta_1^i (\delta_3^j \delta_2^k + \delta_2^j \delta_3^k) - \delta_2^i (\delta_3^j \delta_1^k + \delta_1^j \delta_3^k) \right), \quad (5.59)$$

$$({}^3\mathbf{M}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2}d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тензор  ${}^3\mathbf{M}$  имеет 1 независимую константу.

(A) - Ромбоздрический класс

Группа  $G_{16}$ :

$${}^3\mathbf{M} = d_1 \mathbf{E}_h + d_2 \bar{\mathbf{e}}_3 \otimes \mathbf{E} + d_3 \bar{\mathbf{e}}_3 \otimes \bar{\mathbf{e}}_3^2 + d_4 \mathbf{O}_{3d} + d_5 \mathbf{D}_{3h} + d_6 \mathbf{A}_{3h},$$

$$\begin{aligned} \bar{M}^{ijk} &= d_1 (\delta_1^i \delta_3^j + \delta_1^j \delta_3^i) + d_2 \delta_3^i \delta^{jk} + d_3 \delta_3^i \delta_3^j \delta_3^k + \\ &+ d_4 \left( \delta_1^i (\delta_2^j \delta_3^k + \delta_3^j \delta_2^k) - \delta_2^i (\delta_3^j \delta_1^k + \delta_1^j \delta_3^k) \right) + \\ &+ (d_6 \delta_1^i - d_5 \delta_2^i) (\delta_1^j \delta_2^k + \delta_2^j \delta_1^k) + (d_6 \delta_2^i + d_5 \delta_1^i) (\delta_1^j \delta_1^k - \delta_2^j \delta_2^k), \quad (5.60) \end{aligned}$$

$$({}^3\mathbf{M}) = \begin{pmatrix} d_5 & -d_5 & 0 & \sqrt{2}d_4 & \sqrt{2}d_1 & \sqrt{2}d_6 \\ d_6 & -d_6 & 0 & \sqrt{2}d_1 & -\sqrt{2}d_4 & -\sqrt{2}d_5 \\ d_2 & d_2 & d_1 + d_2 + d_3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тензор  ${}^3\mathbf{M}$  имеет 6 независимых констант.

(B) - Ромбоздрический класс

Группа  $G_{18}$ :

$${}^3\mathbf{M} = d_1 \mathbf{E}_h + d_2 \bar{\mathbf{e}}_3 \otimes \mathbf{E} + d_3 \bar{\mathbf{e}}_3 \otimes \bar{\mathbf{e}}_3^2 + d_4 \mathbf{D}_{3h},$$

$$\begin{aligned} \bar{M}^{ijk} &= d_1 (\delta_1^i \delta_3^k + \delta_1^k \delta_3^i) + d_2 \delta_3^i \delta^{jk} + d_3 \delta_3^i \delta_3^j \delta_3^k + \\ &+ d_4 \left( \delta_1^i (\delta_1^j \delta_1^k - \delta_2^j \delta_2^k) - \delta_2^i (\delta_1^j \delta_2^k + \delta_2^j \delta_1^k) \right), \quad (5.61) \end{aligned}$$

$$({}^3M) = \begin{pmatrix} d_4 & -d_4 & 0 & 0 & \sqrt{2}d_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}d_1 & 0 & -\sqrt{2}d_4 \\ d_2 & d_2 & d_1 + d_2 + d_3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тензор  ${}^3M$  имеет 4 независимые константы.

*Группа G<sub>19</sub>:*

$${}^3M = d_1 O_{3d} + d_2 D_{3h},$$

$$\begin{aligned} \bar{M}^{ijk} = & d_1 \left( \delta_1^i (\delta_2^j \delta_3^k + \delta_3^j \delta_2^k) - \delta_2^i (\delta_3^j \delta_1^k + \delta_1^j \delta_3^k) \right) + \\ & + d_2 \left( \delta_1^i (\delta_1^j \delta_2^k - \delta_2^j \delta_1^k) - \delta_2^i (\delta_1^j \delta_2^k + \delta_2^j \delta_1^k) \right), \end{aligned} \quad (5.62)$$

$$({}^3M) = \begin{pmatrix} d_2 & -d_2 & 0 & \sqrt{2}d_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2}d_1 & -\sqrt{2}d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тензор  ${}^3M$  имеет 2 независимые константы.

(H) -Гексагональный класс

*Группа G<sub>21</sub>:*

$${}^3M = d_1 D_{3h} + d_2 A_{3h},$$

$$\bar{M}^{ijk} = (d_2 \delta_1^i - d_1 \delta_2^i) (\delta_1^j \delta_2^k + \delta_2^j \delta_1^k) + (d_2 \delta_2^i + d_1 \delta_1^i) (\delta_1^j \delta_1^k - \delta_2^j \delta_2^k), \quad (5.63)$$

$$({}^3M) = \begin{pmatrix} d_1 & -d_1 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}d_2 \\ d_2 & d_2 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2}d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тензор  ${}^3M$  имеет 2 независимые константы.

*Группа G<sub>22</sub>:* тензор  ${}^3M$  имеет такой же вид, как и для группы G<sub>10</sub>, и содержит 4 независимые константы.

*Группа G<sub>24</sub>:*

$${}^3M = d D_{3h},$$

$$\bar{M}^{ijk} = d \left( \delta_1^i (\delta_1^j \delta_1^k - \delta_2^j \delta_2^k) - \delta_2^i (\delta_1^j \delta_2^k + \delta_2^j \delta_1^k) \right), \quad (5.64)$$

$$({}^3M) = \begin{pmatrix} d & -d & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2}d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тензор  ${}^3M$  имеет 1 независимую константу.

*Группа G<sub>25</sub>:* тензор  ${}^3M$  имеет такой же вид, как и для группы G<sub>14</sub>, и содержит 1 независимую константу.

*Группа G<sub>26</sub>:* тензор  ${}^3M$  имеет такой же вид, как и для группы  $G_{13}$ , и содержит 3 независимые константы.

(K) -Кубический класс

*Группы G<sub>28</sub> и G<sub>30</sub>:*

$${}^3M = dT_d,$$

$$\bar{M}^{ijk} = d \sum_{\alpha=1}^3 \delta_{\alpha}^i (\delta_{\beta}^j \delta_{\gamma}^k + \delta_{\gamma}^j \delta_{\beta}^k), \quad (5.65)$$

$$({}^3M) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}d \end{pmatrix}.$$

Тензор  ${}^3M$  имеет 1 независимую константу.

(T<sub>3</sub>) - Трансверсально-изотропный класс

*Группа G<sub>33</sub>:* тензор  ${}^3M$  имеет такую же структуру, как и для группы  $G_{10}$ , и содержит 4 независимые константы.

*Группа G<sub>35</sub>:* тензор  ${}^3M$  имеет такой же вид, как и для группы  $G_{13}$ , и содержит 3 независимые константы.

*Группа G<sub>36</sub>:* тензор  ${}^3M$  имеет такой же вид, как и для группы  $G_{14}$ , и содержит 1 независимую константу.

Для всех остальных групп  $G_s$ , в том числе для всего изотропного класса (I) индифферентными тензорами третьего ранга являются только нулевые тензоры:

$$({}^3M) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.66)$$

### 5.1.9. Индифферентные линейные функции четвертого ранга

Если задающий тензор четвертого ранга  ${}^4C$  связывает симметричные тензоры второго ранга  $S$  и  $T$ , то его компоненты в любом базисе, в частности в декартовом, обладают симметрией вида:

$$\bar{C}^{ijkl} = \bar{C}^{jikl} \quad \text{и} \quad \bar{C}^{ijkl} = \bar{C}^{ijlk}. \quad (5.67a)$$

Кроме того, будем полагать выполненным условие симметрии по параметрам индексов (см. (4.37)):

$$\bar{C}^{ijkl} = \bar{C}^{klji}. \quad (5.67b)$$

Первая группа соотношений (5.67a) содержит 27 независимых уравнений для  $C^{ijkl}$ : каждой из 3 пар неповторяющихся индексов  $(i, j) = (12, 23, 13)$  соответствует 9 пар индексов  $(kl)$   $(11, 22, 13, 31, 21, \dots)$ .

Вторая группа соотношений содержит 18 независимых уравнений: каждой из 3 пар неповторяющихся индексов  $(k, l) = (12, 23, 13)$  соответствует только 6 пар индексов  $(11, 22, 33, 12, 13, 23)$ , так как перевернутые пары  $(21, 31, 32)$  уже учтены в первой группе соотношений.

Третья группа соотношений содержит 15 независимых уравнений: первой паре индексов  $(11)$  соответствует 5 соотношений со всеми другими парами (кроме перевернутых  $(21, 32, 31)$ ), т.к. они уже учтены в первой и второй группе, второй паре  $(12)$  – уже 4 соотношения и т.д., т.е. всего  $5+4+3+2+1=15$  соотношений.

Эти соотношения имеют место для любой группы симметрии. Однако, для частных случаев число независимых компонент еще сокращается и определяется теоремой 4.15. Здесь же мы иным способом доказали частный случай этой теоремы.

**ТЕОРЕМА 5.3.** Тензор четвертого ранга  ${}^4C \in T_3^{(4)}$ , обладающий симметриями вида (5.67a) и (5.67b), имеет не более 21 независимой компоненты.

Для тензора четвертого ранга с типом симметрии (5.67) третье (матричное) представление вводится с помощью матрицы  $6 \times 6$ :

$$({}^4C) = \begin{pmatrix} C^{1111} & C^{1122} & C^{1133} & \sqrt{2}\bar{C}^{1123} & \sqrt{2}\bar{C}^{1113} & \sqrt{2}\bar{C}^{1112} \\ \bar{C}^{2222} & C^{2233} & \sqrt{2}\bar{C}^{2223} & \sqrt{2}\bar{C}^{2213} & \sqrt{2}\bar{C}^{2212} & \\ \bar{C}^{3333} & C^{3323} & \sqrt{2}\bar{C}^{3323} & \sqrt{2}\bar{C}^{3313} & \sqrt{2}\bar{C}^{3312} & \\ & \text{сим.} & & 2\bar{C}^{2323} & 2\bar{C}^{2313} & 2\bar{C}^{1212} \\ & & & & 2\bar{C}^{1313} & 2\bar{C}^{1212} \\ & & & & & 2\bar{C}^{1212} \end{pmatrix}. \quad (5.68)$$

Введем также представление для компонент симметричных тензоров  $S$  и  $W$  с помощью координатных столбцов:

$$\{S\}_{1 \times 6} = \begin{pmatrix} S^{11} \\ S^{22} \\ S^{33} \\ \sqrt{2}S^{23} \\ \sqrt{2}S^{13} \\ \sqrt{2}S^{12} \end{pmatrix}, \quad \{T\}_{1 \times 6} = \begin{pmatrix} T^{11} \\ T^{22} \\ T^{33} \\ \sqrt{2}T^{23} \\ \sqrt{2}T^{13} \\ \sqrt{2}T^{12} \end{pmatrix}, \quad (5.69)$$

тогда для линейной тензорной функции четвертого ранга (5.21)  $m = 2$  можно дать третье (матричное) представление:

$$\{S\}_{1 \times 6} = ({}^4C)_{6 \times 6} \{T\}_{1 \times 6}. \quad (5.70)$$

Тензорный базис  $\mathbf{O}_{s(\gamma)}$  (5.25) для индифферентного тензора четвертого ранга  ${}^4\mathbf{C}$ , обладающего симметрией (5.67), будет состоять из симметричных образующих тензоров, представленных в таблице §4.2. Так же как и для тензора второго ранга, тензорный базис одинаков для всех групп  $G_s$ , в пределах фиксированного класса.

Ниже даны первое, второе и третье представления тензора четвертого ранга  ${}^4\mathbf{C}$ , индифферентного относительно различных классов, а также образующие тензорных классов, участвующие в этих представлениях.

$E$  - Триклинический класс  $\{\bar{\mathbf{e}}_\alpha\}$ :

$$\begin{aligned} {}^4\mathbf{C} = & \sum_{\alpha=1}^3 \left( \lambda_\alpha \bar{\mathbf{e}}_\alpha^2 \otimes \bar{\mathbf{e}}_\alpha^2 + \lambda_{3+\alpha} (\bar{\mathbf{e}}_\beta^2 \otimes \bar{\mathbf{e}}_\gamma^2 + \bar{\mathbf{e}}_\gamma^2 \otimes \bar{\mathbf{e}}_\beta^2) + \lambda_{6+\alpha} \mathbf{O}_\alpha \otimes \mathbf{O}_\alpha + \right. \\ & + \lambda_{9+\alpha} (\bar{\mathbf{e}}_\alpha^2 \otimes \mathbf{O}_1 + \mathbf{O}_1 \otimes \bar{\mathbf{e}}_\alpha^2) + \lambda_{12+\alpha} (\bar{\mathbf{e}}_\alpha^2 \otimes \mathbf{O}_2 + \mathbf{O}_2 \otimes \bar{\mathbf{e}}_\alpha^2) + \\ & \left. + \lambda_{15+\alpha} (\bar{\mathbf{e}}_\alpha^2 \otimes \mathbf{O}_3 + \mathbf{O}_3 \otimes \bar{\mathbf{e}}_\alpha^2) + \lambda_{18+\alpha} (\mathbf{O}_\beta \otimes \mathbf{O}_\gamma + \mathbf{O}_\gamma \otimes \mathbf{O}_\beta) \right), \\ & \alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{C}^{ijkl} = & \sum_{\alpha=1}^3 \left( \lambda_\alpha \delta_\alpha^i \delta_\alpha^j \delta_\alpha^k \delta_\alpha^l + \lambda_{3+\alpha} (\delta_\beta^i \delta_\beta^j \delta_\gamma^k \delta_\gamma^l + \delta_\gamma^i \delta_\gamma^j \delta_\beta^k \delta_\beta^l) + \right. \\ & + \lambda_{6+\alpha} (\delta_\beta^i \delta_\gamma^j + \delta_\gamma^i \delta_\beta^j) (\delta_\beta^k \delta_\gamma^l + \delta_\gamma^k \delta_\beta^l) + \\ & + \lambda_{9+\alpha} (\delta_\alpha^i \delta_\alpha^j (\delta_2^k \delta_3^l + \delta_3^k \delta_2^l) + \delta_\alpha^k \delta_\alpha^l (\delta_2^i \delta_3^j + \delta_3^i \delta_2^j)) + \\ & + \lambda_{12+\alpha} (\delta_\alpha^i \delta_\alpha^j (\delta_1^k \delta_3^l + \delta_3^k \delta_1^l) + \delta_\alpha^k \delta_\alpha^l (\delta_1^i \delta_3^j + \delta_3^i \delta_1^j)) + \\ & + \lambda_{15+\alpha} (\delta_\alpha^i \delta_\alpha^j (\delta_1^k \delta_2^l + \delta_2^k \delta_1^l) + \delta_\alpha^k \delta_\alpha^l (\delta_1^i \delta_2^j + \delta_2^i \delta_1^j)) + \\ & \left. + \lambda_{18+\alpha} ((\delta_\nu^i \delta_\mu^j + \delta_\mu^i \delta_\nu^j) (\delta_\rho^k \delta_\omega^l + \delta_\omega^k \delta_\rho^l) + (\delta_\rho^i \delta_\omega^j + \delta_\omega^i \delta_\rho^j) (\delta_\nu^k \delta_\mu^l + \delta_\mu^k \delta_\nu^l)) \right), \end{aligned}$$

$$\nu \neq \mu \neq \beta \neq \nu, \quad \rho \neq \omega \neq \gamma \neq \rho, \quad \rho, \omega, \nu, \mu, \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3. \quad (5.71)$$

Индексы в формуле (5.71) выбираются следующим образом: если, например,  $\alpha = 1$ , то  $\beta = 2$ ,  $\gamma = 3$ , и, следовательно,  $\nu = 1$ ,  $\mu = 3$  и  $\rho = 1$ ,  $\omega = 2$ .

В матричном представлении тензор  $\mathbf{C}$  имеет общий вид (5.68) и содержит максимальное число независимых констант - 21:

$$({}^4\mathbf{C}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_6 & \lambda_5 & \sqrt{2}\lambda_{10} & \sqrt{2}\lambda_{13} & \sqrt{2}\lambda_{16} \\ & \lambda_2 & \lambda_4 & \sqrt{2}\lambda_{11} & \sqrt{2}\lambda_{14} & \sqrt{2}\lambda_{17} \\ & & \lambda_3 & \sqrt{2}\lambda_{12} & \sqrt{2}\lambda_{15} & \sqrt{2}\lambda_{18} \\ & \text{сим.} & & 2\lambda_7 & 2\lambda_{21} & 2\lambda_{20} \\ & & & & 2\lambda_8 & 2\lambda_{19} \\ & & & & & 2\lambda_9 \end{pmatrix}. \quad (5.72)$$

*M* - Моноклинный класс  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3^2\}$ :

$$\begin{aligned} {}^4C = & \sum_{\alpha=1}^3 \lambda_\alpha \bar{e}_\alpha^2 \otimes \bar{e}_\alpha^2 + \lambda_{3+\alpha} (\bar{e}_\beta^2 \otimes \bar{e}_\gamma^2 + \bar{e}_\gamma^2 \otimes \bar{e}_\beta^2) + \lambda_{6+\alpha} O_\alpha \otimes O_\alpha + \\ & + \lambda_{9+\alpha} (\bar{e}_\alpha^2 \otimes O_3 + O_3 \otimes \bar{e}_\alpha^2) + \lambda_{13} (O_1 \otimes O_2 + O_2 \otimes O_1), \\ {}^4C^{ijkl} = & \sum_{\alpha=1}^3 \lambda_\alpha \delta_\alpha^i \delta_\alpha^j \delta_\alpha^k \delta_\alpha^l + \lambda_{3+\alpha} (\delta_\beta^i \delta_\beta^j \delta_\gamma^k \delta_\gamma^l + \delta_\gamma^i \delta_\gamma^j \delta_\beta^k \delta_\beta^l) + \\ & + \lambda_{6+\alpha} (\delta_\beta^i \delta_\gamma^j + \delta_\gamma^i \delta_\beta^j) (\delta_\beta^k \delta_\gamma^l + \delta_\gamma^k \delta_\beta^l) + \\ & + \lambda_{9+\alpha} (\delta_\alpha^i \delta_\alpha^j (\delta_1^k \delta_2^l + \delta_2^k \delta_1^l) + \delta_\alpha^k \delta_\alpha^l (\delta_1^i \delta_2^j + \delta_2^i \delta_1^j)) + \\ & + \lambda_{13} ((\delta_2^i \delta_3^j + \delta_3^i \delta_2^j) (\delta_1^k \delta_3^l + \delta_3^k \delta_1^l) + \\ & + (\delta_1^i \delta_3^j + \delta_3^i \delta_1^j) (\delta_2^k \delta_3^l + \delta_3^k \delta_2^l)), \end{aligned} \quad (5.73)$$

$$\begin{aligned} ({}^4C) = & \begin{pmatrix} \bar{C}^{1111} & \bar{C}^{1122} & \bar{C}^{1133} & 0 & 0 & \sqrt{2}\bar{C}^{1112} \\ \bar{C}^{2222} & \bar{C}^{2233} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}\bar{C}^{2212} \\ \bar{C}^{3333} & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}\bar{C}^{3312} \\ & 2\bar{C}^{2323} & 2\bar{C}^{2313} & & & 0 \\ & & 2\bar{C}^{1313} & & & 0 \\ & \text{сим.} & & & & 2\bar{C}^{1212} \end{pmatrix} = \\ = & \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_6 & \lambda_5 & 0 & 0 & \sqrt{2}\lambda_{10} \\ \lambda_2 & \lambda_4 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}\lambda_{11} \\ \lambda_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}\lambda_{12} \\ & 2\lambda_7 & 2\lambda_{13} & & & 0 \\ & & 2\lambda_8 & & & 0 \\ & \text{сим.} & & & & 2\lambda_9 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Индифферентный относительно моноклинного класса тензор  ${}^4C$  имеет 13 независимых констант.

Заметим, что среди тензоров  $O_\alpha$  только  $O_3$  является априори индифферентным относительно *M*-класса, однако тензоры четвертого ранга  $O_\alpha \otimes O_\alpha$ ,  $O_1 \otimes O_2 + O_2 \otimes O_1$  ( $\alpha = 1, 2$ ) также индифферентны (см. упр. 5.1.2), поэтому их использование в качестве тензорного базиса для тензора  ${}^4C$  правомерно.

*O* - Ортотропный (ромбический) класс  $\{\bar{e}_\alpha^2\}$ :

$${}^4C = \sum_{\alpha=1}^3 \left( \lambda_\alpha \bar{e}_\alpha^2 \otimes \bar{e}_\alpha^2 + \lambda_{3+\alpha} (\bar{e}_\beta^2 \otimes \bar{e}_\gamma^2 + \bar{e}_\gamma^2 \otimes \bar{e}_\beta^2) + \lambda_{6+\alpha} O_\alpha \otimes O_\alpha \right),$$

$$\bar{C}^{ijkl} = \sum_{\alpha=1}^3 \left( \lambda_\alpha \delta_\alpha^i \delta_\alpha^j \delta_\alpha^k \delta_\alpha^l + \lambda_{3+\alpha} (\delta_\beta^i \delta_\beta^j \delta_\gamma^k \delta_\gamma^l + \delta_\gamma^i \delta_\gamma^j \delta_\beta^k \delta_\beta^l) + \lambda_{6+\alpha} (\delta_\beta^i \delta_\gamma^j + \delta_\gamma^i \delta_\beta^j) (\delta_\beta^k \delta_\gamma^l + \delta_\gamma^k \delta_\beta^l) \right), \quad (5.74)$$

$$\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha, \quad \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3,$$

$$\begin{aligned} {}^4C &= \begin{pmatrix} \bar{C}^{1111} & \bar{C}^{1122} & \bar{C}^{1133} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{C}^{2222} & \bar{C}^{2233} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \bar{C}^{3333} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{сим.} & & 2\bar{C}^{2323} & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2\bar{C}^{1313} & 0 & 0 \\ & & & & 2\bar{C}^{1212} & \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_6 & \lambda_5 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_2 & \lambda_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{сим.} & & 2\lambda_7 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2\lambda_8 & 0 & 0 \\ & & & & 2\lambda_9 & \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Индифферентный относительно ортотропного класса тензор  ${}^4C$  имеет 9 независимых компонент.

Заметим, что как и в  $M$ -классе, тензоры  $O_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ) не являются индифферентными относительно  $O$ -класса, однако как показано в упр. 5.1.2, тензоры четвертого ранга  $O_\alpha \otimes O_\alpha$  уже индифферентны относительно  $O$ -класса.

$T$  - Тетрагональный класс  $\{E, \bar{e}_3^2, O_h, \Omega_{3h}\}$ :

$$\begin{aligned} {}^4C &= \lambda_1 E \otimes E + \lambda_2 \bar{e}_3^2 \otimes \bar{e}_3^2 + \lambda_3 (E \otimes \bar{e}_3^2 + \bar{e}_3^2 \otimes E) + \\ &+ \lambda_4 (O_1 \otimes O_1 + O_2 \otimes O_2) + \lambda_5 O_h + 2\lambda_6 \Delta + \lambda_7 \Omega_{3h}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{C}^{ijkl} &= \lambda_1 \delta^{ij} \delta^{kl} + \lambda_2 \delta_3^i \delta_3^j \delta_3^k \delta_3^l + \lambda_3 (\delta^{ij} \delta_3^k \delta_3^l + \delta_3^i \delta_3^j \delta^{kl}) + \\ &+ \lambda_4 ((\delta_2^i \delta_3^j + \delta_3^i \delta_2^j)(\delta_2^k \delta_3^l + \delta_3^k \delta_2^l) + (\delta_1^i \delta_3^j + \delta_3^i \delta_1^j)(\delta_1^k \delta_3^l + \delta_3^k \delta_1^l)) + \\ &+ \lambda_5 \sum_{\alpha=1}^3 \delta_\alpha^i \delta_\alpha^j \delta_\alpha^k \delta_\alpha^l + \lambda_6 (\delta^{ik} \delta^{jl} + \delta^{il} \delta^{jk}) + \lambda_7 \bar{\Omega}_{3h}^{ijkl}, \end{aligned} \quad (5.75)$$

$$({}^4C) = \begin{pmatrix} \bar{C}^{1111} & \bar{C}^{1112} & \bar{C}^{1133} & 0 & 0 & \sqrt{2}\bar{C}^{1112} \\ \bar{C}^{1111} & \bar{C}^{1133} & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2}\bar{C}^{1112} \\ & \bar{C}^{3333} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{сим.} & & 2\bar{C}^{2323} & 0 & 0 & 2\bar{C}^{1212} \\ & & & 2\bar{C}^{2323} & 0 & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & 2\bar{C}^{1212} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_5 + 2\lambda_6 & \lambda_1 & \lambda_1 + \lambda_3 & 0 & 0 & \sqrt{2}\lambda_7 \\ \lambda_1 + \lambda_5 + & 2\lambda_6 & \lambda_1 + \lambda_3 & 0 & 0 & -\sqrt{2}\lambda_7 \\ & & \lambda' & 0 & 0 & 0 \\ \text{сим.} & & & 2\lambda_4 + 2\lambda_6 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & 2\lambda_4 + 2\lambda_6 & 0 \\ & & & & & 2\lambda_6 \end{pmatrix},$$

$$\lambda' = \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 + \lambda_5 + 2\lambda_6.$$

Тензор  ${}^4C$  в  $T$ -классе имеет 7 независимых компонент. Выражение для компонент  $\Omega_{3h}^{ijkl}$  приведено в п. 4.1.9 (формулы (4.40)). Тензор  $O_1 \otimes O_1 + O_2 \otimes O_2$  является индифферентным относительно  $T$  и  $K_3$ -классов в силу результатов упр. 5.1.3.

$K_3$  - Квазитрансверсально-изотропный класс  $\{E, \bar{e}_3^2, O_h\}$ :

$${}^4C = \lambda_1 E \otimes E + \lambda_2 \bar{e}_3^2 \otimes \bar{e}_3^2 + \lambda_3 (E \otimes \bar{e}_3^2 + \bar{e}_3^2 \otimes E) + \\ + \lambda_4 (O_1 \otimes O_1 + O_2 \otimes O_2) + \lambda_5 O_h + \lambda_6 \Delta,$$

$$\begin{aligned} \bar{C}^{ijkl} = & \lambda_1 \delta^{ij} \delta^{kl} + \lambda_2 \delta_3^i \delta_3^j \delta_3^k \delta_3^l + \lambda_3 (\delta^{ij} \delta_3^k \delta_3^l + \delta_3^i \delta_3^j \delta^{kl}) + \\ & + \lambda_4 ((\delta_2^i \delta_3^j + \delta_3^i \delta_2^j)(\delta_2^k \delta_3^l + \delta_3^k \delta_2^l) + (\delta_1^i \delta_3^j + \delta_3^i \delta_1^j)(\delta_1^k \delta_3^l + \delta_3^k \delta_1^l)) + \\ & + \lambda_5 \sum_{\alpha=1}^3 \delta_{\alpha}^i \delta_{\alpha}^j \delta_{\alpha}^k \delta_{\alpha}^l + 2\lambda_6 (\delta^{ik} \delta^{jl} + \delta^{il} \delta^{jk}), \end{aligned} \quad (5.76)$$

$$({}^4C) = \begin{pmatrix} \bar{C}^{1111} & \bar{C}^{1122} & \bar{C}^{1133} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{C}^{1111} & \bar{C}^{1133} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \bar{C}^{3333} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{сим.} & & 2\bar{C}^{2323} & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2\bar{C}^{2323} & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 2\bar{C}^{1212} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_5 + 2\lambda_6 & \lambda_1 & \lambda_1 + \lambda_3 & 0 & 0 & \sqrt{2}\lambda_7 \\ \lambda_1 + \lambda_5 + & 2\lambda_6 & \lambda_1 + \lambda_3 & 0 & 0 & -\sqrt{2}\lambda_7 \\ & & \lambda' & 0 & 0 & 0 \\ \text{сим.} & & & 2\lambda_4 + 2\lambda_6 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & 2\lambda_4 + 2\lambda_6 & 0 \\ & & & & & 2\lambda_6 \end{pmatrix}.$$

Тензор  ${}^4C$  имеет 6 независимых компонент.

*A - Ромбоэдрический класс*  $\{E, \bar{e}_3^2, D_3, \Omega_{3d}\}$ :

$$\begin{aligned} {}^4C = & \lambda_1 E \otimes E + \lambda_2 \bar{e}_3^2 \otimes \bar{e}_3^2 + \lambda_3 (E \otimes \bar{e}_3^2 + \bar{e}_3^2 \otimes E) + \\ & + \lambda_4 (O_1 \otimes O_1 + O_2 \otimes O_2) + \lambda_5 D_3 + 2\lambda_6 \Delta + \lambda_7 \Omega_{3d}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{C}^{ijkl} = & \lambda_1 \delta^{ij} \delta^{kl} + \lambda_2 \delta_3^i \delta_3^j \delta_3^k \delta_3^l + \lambda_3 (\delta^{ij} \delta_3^k \delta_3^l + \delta_3^i \delta_3^j \delta^{kl}) + \\ & + \lambda_4 ((\delta_2^i \delta_3^j + \delta_3^i \delta_2^j)(\delta_2^k \delta_3^l + \delta_3^k \delta_2^l) + (\delta_1^i \delta_3^j + \delta_3^i \delta_1^j)(\delta_1^k \delta_3^l + \delta_3^k \delta_1^l)) + \\ & + \lambda_5 \bar{D}_3^{ijkl} + 2\lambda_6 (\delta^{ik} \delta^{jl} + \delta^{il} \delta^{jk}) + \lambda_7 \bar{\Omega}_{3d}^{ijkl}, \end{aligned} \quad (5.77)$$

$$\begin{aligned} {}^4C = & \begin{pmatrix} \bar{C}^{1111} & \bar{C}^{1122} & \bar{C}^{1133} & \sqrt{2} \bar{C}^{1123} & \sqrt{2} \bar{C}^{1113} & 0 \\ \bar{C}^{1111} & \bar{C}^{1133} & -\sqrt{2} \bar{C}^{1123} & -\sqrt{2} \bar{C}^{1113} & 0 & 0 \\ \bar{C}^{3333} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{сим.} & 2\bar{C}^{2323} & 0 & -2\bar{C}^{1113} & 2\bar{C}^{1123} & \bar{C}^{1111} - \bar{C}^{1122} \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} \lambda_1 + 2\lambda_6 & \lambda_1 & \lambda_1 + \lambda_3 & \sqrt{2}\lambda_7 & \sqrt{2}\lambda_5 & 0 \\ & \lambda_1 + 2\lambda_6 & \lambda_1 + \lambda_3 & -\sqrt{2}\lambda_7 & -\sqrt{2}\lambda_5 & 0 \\ & & \lambda'' & 0 & 0 & 0 \\ \text{сим.} & 2\lambda_4 + 2\lambda_6 & 0 & -2\lambda_5 & 2\lambda_7 & 2\lambda_6 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\lambda'' = \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 + 2\lambda_6.$$

Выражения для компонент тензоров  $\bar{D}_3^{ijkl}$  и  $\bar{\Omega}_{3d}^{ijkl}$  представлены в (4.40). Тензор  ${}^4C$  в данном классе имеет 7 независимых компонент. Тензор  $O_1 \otimes O_1 + O_2 \otimes O_2$  в силу результатов упр. 5.1.3, является индифферентным относительно *A* и *B*-ромбоэдрических классов.

*B - Ромбоэдрический класс*  $\{E, \bar{e}_3^2, D_3\}$ :

$$\begin{aligned} {}^4C = & \lambda_1 E \otimes E + \lambda_2 \bar{e}_3^2 \otimes \bar{e}_3^2 + \lambda_3 (E \otimes \bar{e}_3^2 + \bar{e}_3^2 \otimes E) + \\ & + \lambda_4 (O_1 \otimes O_1 + O_2 \otimes O_2) + \lambda_5 D_3 + 2\lambda_6 \Delta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{C}^{ijkl} = & \lambda_1 \delta^{ij} \delta^{kl} + \lambda_2 \delta_3^i \delta_3^j \delta_3^k \delta_3^l + \lambda_3 (\delta^{ij} \delta_3^k \delta_3^l + \delta_3^i \delta_3^j \delta^{kl}) + \\ & + \lambda_4 ((\delta_2^i \delta_3^j + \delta_3^i \delta_2^j)(\delta_2^k \delta_3^l + \delta_3^k \delta_2^l) + (\delta_1^i \delta_3^j + \delta_3^i \delta_1^j)(\delta_1^k \delta_3^l + \delta_3^k \delta_1^l)) + \\ & + \lambda_5 \bar{D}_3^{ijkl} + 2\lambda_6 (\delta^{ik} \delta^{jl} + \delta^{il} \delta^{jk}), \end{aligned} \quad (5.78)$$

$$\begin{aligned}
 {}^4C &= \begin{pmatrix} \bar{C}^{1111} & \bar{C}^{1122} & \bar{C}^{1133} & 0 & \sqrt{2}\bar{C}^{1113} & 0 \\ & \bar{C}^{1111} & \bar{C}^{1133} & 0 & -\sqrt{2}\bar{C}^{1113} & 0 \\ & & \bar{C}^{3333} & 0 & 0 & 0 \\ & \text{сим.} & & 2\bar{C}^{2323} & 0 & -2\bar{C}^{1113} \\ & & & & 2\bar{C}^{2323} & \\ & & & & & \bar{C}^{1111} - \bar{C}^{1122} \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} \lambda_1 + 2\lambda_6 & \lambda_1 & \lambda_1 + \lambda_3 & 0 & \sqrt{2}\lambda_5 & 0 \\ & \lambda_1 + 2\lambda_6 & \lambda_1 + \lambda_3 & 0 & -\sqrt{2}\lambda_5 & 0 \\ & & \lambda'' & 0 & 0 & 0 \\ & \text{сим.} & & 2\lambda_4 + 2\lambda_6 & 0 & -2\lambda_5 \\ & & & & 2\lambda_4 + 2\lambda_6 & 0 \\ & & & & & 2\lambda_6 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Тензор  ${}^4C$  в данном классе имеет 6 независимых компонент.

$H$  - Гексагональный класс и  $T_3$  - Трансверсально-изотропный класс  $\{\bar{e}_3^2, E\}$ :

$$\begin{aligned}
 {}^4C &= \lambda_1 E \otimes E + \lambda_2 \bar{e}_3^2 \otimes \bar{e}_3^2 + \lambda_3 (E \otimes \bar{e}_3^2 + \bar{e}_3^2 \otimes E) + \\
 &\quad + \lambda_4 (O_1 \otimes O_1 + O_2 \otimes O_2) + 2\lambda_5 \Delta,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{C}^{ijkl} &= \lambda_1 \delta^{ij} \delta^{kl} + \lambda_2 \delta_2^i \delta_3^j \delta_3^k \delta_3^l + \lambda_3 (\delta^{ij} \delta_3^k \delta_3^l + \delta_3^i \delta_3^j \delta^{kl}) + \\
 &+ \lambda_4 ((\delta_2^i \delta_3^j + \delta_3^i \delta_2^j)(\delta_2^k \delta_3^l + \delta_3^k \delta_2^l) + (\delta_1^i \delta_3^j + \delta_3^i \delta_1^j)(\delta_1^k \delta_3^l + \delta_3^k \delta_1^l)) + \\
 &+ \lambda_5 (\delta^{ik} \delta^{jl} + \delta^{il} \delta^{jk}), \tag{5.79}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 {}^4C &= \begin{pmatrix} \bar{C}^{1111} & \bar{C}^{1122} & \bar{C}^{1133} & 0 & 0 & 0 \\ & \bar{C}^{1111} & \bar{C}^{1133} & 0 & 0 & 0 \\ & & \bar{C}^{3333} & 0 & 0 & 0 \\ & \text{сим.} & & 2\bar{C}^{2323} & 0 & 0 \\ & & & & 2\bar{C}^{2323} & 0 \\ & & & & & \bar{C}^{1111} - \bar{C}^{1122} \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} \lambda_1 + 2\lambda_5 & \lambda_1 & \lambda_1 + \lambda_3 & 0 & 0 & 0 \\ & \lambda_1 + 2\lambda_5 & \lambda_1 + \lambda_3 & 0 & 0 & 0 \\ & & \lambda''' & 0 & 0 & 0 \\ & \text{сим.} & & 2\lambda_2 + 2\lambda_5 & 0 & 0 \\ & & & & 2\lambda_2 + 2\lambda_5 & 0 \\ & & & & & 2\lambda_5 \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

$$\lambda''' = \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 + 2\lambda_5.$$

Тензор  ${}^4C$  в данном классе имеет 5 независимых компонент.

*K - Кубический (квазизотропный) класс*  $\{E, O_h\}$ :

$${}^4C = \lambda_1 E \otimes E + 2\lambda_2 \Delta + \lambda_3 O_h,$$

$$\bar{C}^{ijkl} = \lambda_1 \delta^{ij} \delta^{kl} + \lambda_2 (\delta^{ik} \delta^{jl} + \delta^{il} \delta^{jk}) + \lambda_3 \sum_{\alpha=1}^3 \delta_{\alpha}^i \delta_{\alpha}^j \delta_{\alpha}^k \delta_{\alpha}^l, \quad (5.80)$$

$$\begin{aligned} ({}^4C) &= \begin{pmatrix} \bar{C}^{1111} & \bar{C}^{1122} & \bar{C}^{1122} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{C}^{1111} & \bar{C}^{1122} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \bar{C}^{1111} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{сим.} & & 2\bar{C}^{2323} & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2\bar{C}^{2323} & 0 & 0 \\ & & & & 2\bar{C}^{2323} & \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 & \lambda_1 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 & \lambda_1 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ & \text{сим.} & \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2\lambda_2 & 0 & 0 \\ & & & & 2\lambda_2 & 0 \\ & & & & & 2\lambda_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Тензор  ${}^4C$  в данном классе имеет 3 независимые компоненты.

*I - Изотропный класс:*

$${}^4C = \lambda_1 E \otimes E + 2\lambda_2 \Delta,$$

$$\bar{C}^{ijkl} = \lambda_1 \delta^{ij} \delta^{kl} + \lambda_2 (\delta^{ik} \delta^{jl} + \delta^{il} \delta^{jk}), \quad (5.81)$$

$$({}^4C) = \begin{pmatrix} \lambda_1 + 2\lambda_2 & \lambda_1 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ & \lambda_1 + 2\lambda_2 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ & & \lambda_1 + 2\lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ \text{сим.} & & & 2\lambda_2 & 0 & 0 \\ & & & & 2\lambda_2 & 0 \\ & & & & & 2\lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Тензор  ${}^4C$  в данном классе имеет 2 независимые компоненты.

### Упражнения к § 5.1.

**Упражнение 5.1.1.** Доказать, что если тензор  ${}^4C$  обладает симметрией вида (5.67) в какой-либо системе координат, то в любой другой системе координат эта симметрия сохраняется.

**Упражнение 5.1.2.** Показать, что имеют место следующие соотношения:

$$\mathbf{O}_1 \otimes \mathbf{O}_2 + \mathbf{O}_2 \otimes \mathbf{O}_1 = 4(\mathbf{O}_3 \otimes \bar{\mathbf{e}}_3^2)^{[1]},$$

$$\mathbf{O}_\alpha \otimes \mathbf{O}_\alpha = 4(\bar{\mathbf{e}}_\alpha^2 \otimes \bar{\mathbf{e}}_3^2)^{[1]}, \quad \alpha = 1, 2,$$

из которых следует, что хотя тензоры  $\mathbf{O}_1$  и  $\mathbf{O}_2$  не являются индифферентными относительно  $M$ -класса, но образованные выше из них тензоры четвертого ранга уже  $M$ -индифферентны.

**Упражнение 5.1.3.** Показать, что имеют место следующее соотношение:

$$\mathbf{O}_1 \otimes \mathbf{O}_1 + \mathbf{O}_2 \otimes \mathbf{O}_2 = 4(\mathbf{O}_3 \otimes \bar{\mathbf{e}}_3^2)^{[1]} - \bar{\mathbf{e}}_3^2 \otimes \bar{\mathbf{e}}_3^2,$$

из которого следует, что данный тензор четвертого ранга является индифферентным относительно  $T, K_3$ -классов, хотя  $\mathbf{O}_\alpha$  таковыми не являются.

**Упражнение 5.1.4.** Показать, что если в матричных представлениях (5.42) и (5.49) симметричного тензора третьего ранга убрать  $\sqrt{2}$ , то в соответствующей линейной функции (5.43) и "обратной" функции (5.49) векторы  $\{\mathbf{S}\}$  и  $\{\mathbf{T}\}$  будут иметь вид:

$$\{\mathbf{T}\} = \begin{pmatrix} \bar{T}_{11} \\ \bar{T}_{22} \\ \bar{T}_{33} \\ 1/2\bar{T}_{23} \\ 1/2\bar{T}_{31} \\ 1/2\bar{T}_{12} \end{pmatrix}, \quad \{\mathbf{S}\} = \begin{pmatrix} \bar{S}^{11} \\ \bar{S}^{22} \\ \bar{S}^{33} \\ \bar{S}^{31} \\ \bar{S}^{23} \\ \bar{S}^{12} \end{pmatrix},$$

т.е. структура матричной записи будет различной в прямой и "обратной" функциях.

**Упражнение 5.1.5.** Показать, что если для матрицы  $(^4\mathbf{C})$  использовать не (5.68), а следующее определение:

$$(^4\mathbf{C}) = \begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1112} & C_{1113} & C_{1123} \\ C_{2222} & C_{2233} & C_{2212} & C_{2213} & C_{2223} & \\ C_{3333} & C_{3312} & C_{3313} & C_{3323} & & \\ \text{сим.} & & C_{1212} & C_{1213} & C_{1223} & \\ & & C_{1213} & C_{1223} & & \\ & & C_{1313} & C_{1323} & & \\ & & & C_{2323} & & \end{pmatrix},$$

то ему соответствуют векторы  $\{\mathbf{S}\}$  и  $\{\boldsymbol{\varepsilon}\}$ , имеющие различную между собой структуру:

$$\{\mathbf{S}\} = \begin{pmatrix} \bar{S}^{11} \\ \bar{S}^{22} \\ \bar{S}^{33} \\ \bar{S}^{12} \\ \bar{S}^{13} \\ \bar{S}^{23} \end{pmatrix}, \quad \{\boldsymbol{\varepsilon}\}_{1 \times 6} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{23} \end{pmatrix},$$

а обратная к ней матрица  $(^4\Pi)$  в этом случае принимает вид:

$$(^4\Pi)_{6 \times 6} = \begin{pmatrix} \Pi_{1111} & \Pi_{1122} & \Pi_{1133} & 2\Pi_{1112} & 2\Pi_{1113} & 2\Pi_{1123} \\ & \Pi_{2222} & \Pi_{2233} & 2\Pi_{2212} & 2\Pi_{2213} & 2\Pi_{2223} \\ & & \Pi_{3333} & 2\Pi_{3312} & 2\Pi_{3313} & 2\Pi_{3323} \\ & & \text{сим.} & 4\Pi_{1212} & 4\Pi_{1213} & 4\Pi_{1223} \\ & & & 4\Pi_{1313} & 4\Pi_{1323} & 4\Pi_{2323} \end{pmatrix},$$

т.е. имеет отличную от  $(^4C)$  структуру (поэтому предпочтительным является матричное представление (5.68)).

## § 5.2. Скалярные функции тензорного аргумента

### 5.2.1. Определение скалярной функции

Рассмотрим теперь нелинейные тензорные функции, определение которых дано в п.5.1.1. Начнем с рассмотрения частного случая, когда в формуле (5.1) тензор  ${}^nS$  имеет нулевой ранг  $n = 0$ :

$$s = f({}^mT). \quad (5.82)$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.5.** Тензорную функцию вида (5.82) называют *скалярной функцией тензорного аргумента*.

Компонентное представление такой функции в базисе  $R_i$  имеет вид:

$$s = f(T^{j_1 \dots j_m}). \quad (5.82a)$$

В силу (5.6) при переходе от одной системы координат  $X^i$  к другой  $X'^i$  значение скалярной функции не меняется:

$$f(T^{j_1 \dots j_m}) = f'(Q_{l_1}^{j_1} \dots Q_{l_m}^{j_m} T^{l_1 \dots l_m}). \quad (5.83)$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.6.** Скалярная функция (5.82) называется *индивидуальной относительно группы линейных преобразований  $G_s$* , определяемых по (3.1), если вид самой функции  $f(T^{j_1 \dots j_m})$  не изменяется:

$$f(T^{j_1 \dots j_m}) = f(\bar{T}^{j_1 \dots j_m}) \quad (5.84)$$

при переходе из системы координат  $x^i$  в  $X^i$ , причем

$$T^{j_1 \dots j_m} = \bar{T}^{l_1 \dots l_m} A_{l_1}^{j_1} \dots A_{l_m}^{j_m}, \quad \forall \{A_{l_i}^j\} \in G_s. \quad (5.85)$$

С использованием тензора линейных преобразований  $\mathbf{Q} = A^i_j \bar{\mathbf{e}}_i^j \otimes \bar{\mathbf{e}}_i^j$  (см. пп. 4.1.3 и 5.1.5), условие индифферентности (5.84) скалярной функции (5.82) можно записать в виде:

$$f({}^m\mathbf{T}) = f\left({}^m\mathbf{T} \cdot \underbrace{\dots}_{m} \cdot \underbrace{(\mathbf{Q} \otimes \dots \otimes \mathbf{Q})^{(2n-1, 2n-3, \dots, 3, 1, 2, 4, \dots, 2n)}}_{m}\right). \quad (5.84a)$$

Например, для скалярной функции от вектора это условие имеет вид:

$$f(\mathbf{a}) = f(\mathbf{a} \cdot \mathbf{Q}), \quad (5.85a)$$

а для скалярной функции от тензора второго ранга:

$$f(\mathbf{T}) = f(\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q}). \quad (5.85b)$$

Подчеркнем, что из определения (5.83) следует, что вид функции  $f(\mathbf{T})$  может меняться при переходе в новую систему координат, но не меняется значение этой функции, а из (5.84) следует, что и вид функции  $f(\mathbf{T})$  не должен меняться. Например, если скалярная функция - это просто компонента вектора в базисе  $R_i$ :  $s = f(\mathbf{a}) = a^3$ , то при переходе в декартов базис  $\bar{\mathbf{e}}$  эта функция будет иметь другой вид  $f'(\bar{a}^i) = A_i^3 \bar{a}^i$ , но значения этих функций будут совпадать:

$$f(a^i) = a^3 = A_i^3 \bar{a}^i = f'(\bar{a}^i),$$

в силу того, что  $a^i$  - компоненты вектора. Однако индифферентной такая функция  $f(\mathbf{a})$  будет только относительно некоторых групп симметрии, например  $T_3$ .

Из определения (5.84) следует, что все скалярные инварианты  $I_\gamma({}^m\mathbf{T})$  относительно группы  $G_s$ , в том числе инварианты  $I_\gamma^{(s)}$ , определенные в п. 4.5.3, являются индифферентными функциями относительно той же группы  $G_s$ . Так например, длина вектора:  $s = f(\mathbf{a}) = |\mathbf{a}| = I_1^{(39)}(\mathbf{a})$  - индифферентна относительно группы  $G_{39} = I$ .

## 5.2.2. Дифференцирование скалярной функции по тензорному аргументу

Важную роль в механике играют формулы дифференцирования скалярной функции (5.82) по тензорному аргументу.

Пусть имеется компонентное представление (5.82a) функции  $f$ . Вычислим дифференциал от этой функции, как от функции многих переменных:

$$df(T^{j_1 \dots j_m}) = \frac{\partial f}{\partial T^{j_1 \dots j_m}} dT^{j_1 \dots j_m}. \quad (5.87)$$

Производные  $\partial f / \partial T^{j_1 \dots j_m}$  образуют компоненты некоторого тензора, который обозначим как

$${}^m f_T \equiv \frac{\partial f}{\partial \mathbf{T}} = \frac{\partial f}{\partial T^{j_1 \dots j_m}} R^{j_1} \otimes \dots \otimes R^{j_m}. \quad (5.88)$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.7.** Тензор (5.88) называется тензором производной скаляра  $f$  по тензорному аргументу или просто тензором производной.

Очевидно, что  ${}^m f_{\mathbf{T}}$  является тензором того же ранга, что и  ${}^m \mathbf{T}$ .

Введем еще один тензор, называемый дифференциалом тензора  $d({}^m \mathbf{T})$ , который обладает компонентами  $dT^{j_1 \dots j_m}$ :

$$d({}^m \mathbf{T}) = dT^{j_1 \dots j_m} \mathbf{R}_{j_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{R}_{j_m}. \quad (5.89)$$

Транспонирование этого тензора дает следующий объект:

$$d({}^m \mathbf{T})^{(m \dots 1)} = dT^{j_1 \dots j_m} \mathbf{R}_{j_m} \otimes \dots \otimes \mathbf{R}_{j_1}. \quad (5.90)$$

Преобразуем теперь выражение (5.87) следующим образом:

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial T^{j_1 \dots j_m}} dT^{j_1 \dots j_m} = \frac{\partial f}{\partial T^{j_1 \dots j_m}} \delta_{i_1}^{j_1} \dots \delta_{i_m}^{j_m} dT^{i_1 \dots i_m} = \\ &= \frac{\partial f}{\partial T^{j_1 \dots j_m}} \mathbf{R}^{j_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{R}^{j_m} \dots \dots \mathbf{R}_{i_m} \otimes \dots \otimes \mathbf{R}_{i_1} dT^{i_1 \dots i_m}. \end{aligned} \quad (5.91)$$

Здесь использовано свойство:  $\mathbf{R}_i \cdot \mathbf{R}^j = \delta_i^j$ . Используем теперь определение введенных тензоров  $\partial f / \partial \mathbf{T}$  и  $d({}^m \mathbf{T})$ , тогда придем к следующей теореме.

**ТЕОРЕМА 5.4.** Дифференциал скалярной функции (5.82) от тензорного аргумента представляет собой выражение вида

$$df = {}^m f_{\mathbf{T}} \cdot \dots \cdot d({}^m \mathbf{T})^{(m \dots 1)}. \quad (5.92)$$

Например, если  $m = 2$ , то формула (5.92) имеет вид:

$$df = f_{\mathbf{T}} \cdot d\mathbf{T}^T. \quad (5.93)$$

Для симметричного тензора  $\mathbf{T}$  функцию  $f$  необходимо представить в виде:

$$f(T^{ij}) = f\left(\frac{1}{2}(T^{ij} + T^{ji})\right), \quad (5.94)$$

тогда формула (5.87) для дифференциала примет вид:

$$df = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial T^{ij}} + \frac{\partial f}{\partial T^{ji}} \right) dT^{ij}, \quad (5.95)$$

а тензор производной (5.88) можно записать следующим образом:

$$f_{\mathbf{T}} = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial T^{ij}} (\mathbf{R}^i \otimes \mathbf{R}^j + \mathbf{R}^j \otimes \mathbf{R}^i) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial T^{ij}} + \frac{\partial f}{\partial T^{ji}} \right) \mathbf{R}^i \otimes \mathbf{R}^j. \quad (5.96)$$

Таким образом, для вычисления производной от скаляра  $f$  по симметричному тензору надо вначале вычислить частную производную  $\partial f / \partial T_{ij}$  по всем девяти компонентам без учета симметрии  $T^{ij}$ , а затем у результата дифференцирования  $\partial f / \partial T^{ij}$  поменять индексы  $i \leftrightarrow j$  и сложить обе производные с коэффициентом 1/2.

Из (5.96) следует, что производная скаляра по симметричному тензорному аргументу является симметричным тензором:

$$(f_T)^T = f_T, \quad \text{если} \quad T = T^T. \quad (5.97)$$

### 5.2.3. Дифференцирование инвариантов вектора

Рассмотрим случай, когда в качестве скалярной функции выбраны инварианты  $I_\gamma^{(s)}(\mathbf{a})$  вектора  $\mathbf{a}$ , рассмотренные в п.4.4.6:

$$f(\mathbf{a}) = I_\gamma^{(s)}(\mathbf{a}), \quad (5.98)$$

где  $s$  - номер группы симметрии  $G_s$ , а  $\gamma$  - номер инварианта в соответствующем полном наборе.

Вычислим производные по  $\mathbf{a}$  от различных инвариантов  $I_\gamma^{(s)}(\mathbf{a})$ , приведенных в (4.142).

*Инвариант*  $I_i^{(s)}(\mathbf{a}) = |\mathbf{a}|^2$ .

Вычислим сначала частные производные:

$$\frac{\partial}{\partial a^i} |\mathbf{a}|^2 = \frac{\partial}{\partial a^i} (a^m a^n g_{mn}) = \delta_i^m a_m + \delta_i^n a_n = 2a_i,$$

а затем составим вектор согласно (5.88):

$$|\mathbf{a}|^2_{\mathbf{a}} \equiv \frac{\partial |\mathbf{a}|^2}{\partial \mathbf{a}} = 2a_i \mathbf{R}^i = 2\mathbf{a}, \quad (5.99)$$

который и дает искомое выражение для производной от инварианта.

*Инварианты*  $I_\gamma^{(s)}(\mathbf{a}) = \bar{a}_\alpha^2$ .

Вычислим частные производные по декартовым компонентам:

$$\frac{\partial \bar{a}_\alpha^2}{\partial \bar{a}^i} = \frac{\partial}{\partial \bar{a}^i} (a^\alpha)^2 = 2\delta_i^\alpha \bar{a}_\alpha,$$

(по  $\alpha$  суммирования нет), и составим вектор согласно (5.88):

$$\frac{\partial \bar{a}_\alpha^2}{\partial \mathbf{a}} = 2\delta_i^\alpha \bar{a}_\alpha \bar{\mathbf{e}}_i = 2\bar{\mathbf{a}}_\alpha \bar{\mathbf{e}}_\alpha. \quad (5.100)$$

**Инварианты**  $I_{\gamma}^{(s)}(\mathbf{a}) = \bar{a}_{\alpha}$ .

Частные производные и производная от инварианта имеют вид:

$$\frac{\partial \bar{a}_{\alpha}}{\partial \bar{a}^i} = \delta_{i\alpha}, \quad \frac{\partial \bar{a}_{\alpha}}{\partial \mathbf{a}} = \delta_{i\alpha} \bar{\mathbf{e}}_i = \bar{\mathbf{e}}_{\alpha}. \quad (5.101)$$

**Инварианты**  $I_{\gamma}^{(s)}(\mathbf{a}) = \bar{a}_{\alpha} \bar{a}_{\beta}$ ,  $\alpha \neq \beta$ .

Частные производные и производная от инварианта имеют вид:

$$\frac{\partial \bar{a}_{\alpha} \bar{a}_{\beta}}{\partial \bar{a}^i} = \delta_{i\alpha} \bar{a}_{\beta} + \delta_{i\beta} \bar{a}_{\alpha}, \quad \frac{\partial \bar{a}_{\alpha} \bar{a}_{\beta}}{\partial \mathbf{a}} = \bar{a}_{\beta} \bar{\mathbf{e}}_{\alpha} + \bar{a}_{\alpha} \bar{\mathbf{e}}_{\beta}. \quad (5.102)$$

**Инварианты**  $|a|^2$ ,  $\bar{a}_{\alpha}^2$  и  $\bar{a}_{\alpha} \bar{a}_{\beta}$  квадратично зависят от компонент  $a_i$ , поэтому можно вычислить производные от них по симметричному тензору  $\mathbf{a} \otimes \mathbf{a} = \mathbf{a}^2$ .

Все эти инварианты можно рассматривать как линейные тензорные функции от  $\mathbf{a}^2$ , поэтому получим общую формулу для производной линейной скалярной функции от симметричного тензора  $\mathbf{T}$ :

$$f(\mathbf{T}) = \mathbf{T} \cdot \cdot \Omega = T^{mn} \Omega_{nm}, \quad (5.103)$$

где  $\Omega$  - некоторый фиксированный тензор. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial T^{ij}} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial T^{ij}} (T^{mn} + T^{nm}) \Omega_{nm} = \\ &= \frac{1}{2} (\delta_i^m \delta_j^n + \delta_j^m \delta_i^n) \Omega_{nm} = \frac{1}{2} (\Omega_{nm} + \Omega_{mn}), \end{aligned}$$

и, следовательно, имеет место следующая теорема.

**Теорема 5.5.** Тензор производной от линейной скалярной функции (5.82) от симметричного тензора второго ранга  $\mathbf{T}$  вычисляют по формуле:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{T}} (\mathbf{T} \cdot \cdot \Omega) = \frac{1}{2} (\Omega_{nm} + \Omega_{mn}) \mathbf{R}^n \otimes \mathbf{R}^m = \frac{1}{2} (\Omega + \Omega^T). \quad (5.104)$$

Если  $\mathbf{T}$  - несимметричен, то

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{T}} (\mathbf{T} \cdot \cdot \Omega) = \Omega. \quad (5.105)$$

Используя формулу (5.104), получаем, что

$$\frac{\partial |a|^2}{\partial a^2} = \frac{\partial}{\partial a^2} (a^2 \cdot \cdot E) = E, \quad \frac{\partial \bar{a}_{\alpha}^2}{\partial a^2} = \frac{\partial}{\partial a^2} (a^2 \cdot \cdot \bar{e}_{\alpha}^2) = \bar{e}_{\alpha}^2,$$

$$\frac{\partial \bar{a}_\beta \bar{a}_\gamma}{\partial \mathbf{a}^2} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{a}^2} (\mathbf{a}^2 \cdot \overset{\circ}{\Omega}_\alpha) = \overset{\circ}{\Omega}_\alpha. \quad (5.106)$$

### 5.2.4. Дифференцирование главных инвариантов тензора второго ранга

Выберем теперь в качестве скалярной функции  $f$  первый главный инвариант  $I_1(\mathbf{T})$  тензора второго ранга  $\mathbf{T}$  и его степеней  $\mathbf{T}^n$  и вычислим их производные по  $\mathbf{T}$ .

Производные инварианта  $I_1(\mathbf{T}) = \mathbf{E} \cdot \mathbf{T}$  находим, используя (5.105):

$$I_1(\mathbf{T})_{\mathbf{T}} = \mathbf{E}. \quad (5.107)$$

Далее вычисляем частные производные от  $I_1(\mathbf{T}^n)$ ,  $n=2$  и  $3$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial T^{ij}} I_1(\mathbf{T}^2) &= \frac{\partial}{\partial T^{ij}} (T^{mk} T^{nl} g_{nk} g_{lm}) = \\ &= (\delta_i^m \delta_j^n T^{nl} + T^{mk} \delta_i^n \delta_j^l) g_{nk} g_{lm} = 2T_{ji}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial T^{ij}} I_1(\mathbf{T}^3) &= \frac{\partial}{\partial T^{ij}} (T^{mk} T^{nl} T^{st} g_{nk} g_{ls} g_{tm}) = (\delta_i^m \delta_j^n T^{nl} T^{st} + \\ &+ \delta_i^n \delta_j^l T^{mk} T^{st} + \delta_i^s \delta_j^t T^{mk} T^{nl}) g_{nk} g_{ls} g_{tm} = 3T_j^m T_{mi}. \end{aligned} \quad (5.108)$$

Тогда производные от инвариантов имеют вид:

$$I_1(\mathbf{T}^2)_{\mathbf{T}} = 2T_{ji} \mathbf{R}^i \otimes \mathbf{R}^j = 2\mathbf{T}^T, \quad I_1(\mathbf{T}^3)_{\mathbf{T}} = 3T_j^m T_{mi} \mathbf{R}^i \otimes \mathbf{R}^j = 3\mathbf{T}^{2T}. \quad (5.109)$$

Таким образом, имеет место следующая теорема.

**Теорема 5.6.** Выражения для тензора производной от первого инварианта степеней тензора  $\mathbf{T}$  имеют следующий вид:

$$I_1(\mathbf{T})_{\mathbf{T}} = \mathbf{E}, \quad I_1(\mathbf{T}^2)_{\mathbf{T}} = 2\mathbf{T}^T, \quad I_1(\mathbf{T}^3)_{\mathbf{T}} = 3\mathbf{T}^{2T}. \quad (5.110)$$

Выберем теперь в качестве скалярной функции  $f$  второй и третий главные инварианты  $I_2(\mathbf{T})$  и  $I_3(\mathbf{T})$  тензора  $\mathbf{T}$ .

Согласно (4.151) и (4.152) (см.п.4.5.3) эти инварианты можно выразить через  $I_1$ :

$$I_3(\mathbf{T}) = \frac{1}{6}(I_1^3(\mathbf{T}) - 3I_1(\mathbf{T})I_1(\mathbf{T}^2) + 2I_1(\mathbf{T}^3)), \quad (5.111)$$

$$I_2(\mathbf{T}) = \frac{1}{2}(I_1^2(\mathbf{T}) - I_1(\mathbf{T}^2)).$$

Дифференцируя (5.111) по  $T$ , с учетом (5.110) получаем:

$$I_3(T)_T = T^{T^2} - I_1(T)T^T + EI_2(T), \quad I_2(T)_T = EI_1(T) - T^T. \quad (5.112)$$

Используя следствие (4.161) (см.п.4.5.4) формулы Гамильтона–Кэли, можно также записать (5.112) в виде:

$$\frac{\partial I_3(T)}{\partial T} \equiv I_3(T)_T = I_3(T)T^{-1}. \quad (5.113)$$

### 5.2.5. Формулы дифференцирования линейных, квадратичных и кубических инвариантов тензора второго ранга относительно различных групп симметрий

В данном разделе получим формулы для дифференцирования скалярной функции  $f(T)$ , в качестве которой выбираем инварианты  $I_\gamma^s$  симметричного тензора  $T$  второго ранга относительно различных групп симметрии  $G_s$ :

$$f(T) = I_\gamma^s(T). \quad (5.114)$$

Как было показано в п.4.4.4, полные наборы независимых инвариантов всех групп симметрии  $G_s$ ,  $s = 1 \dots 39$  могут быть получены с помощью свертки тензорных степеней  $T$ ,  $T \otimes T$  и  $T \otimes T \otimes T$ . Тогда можно считать, что любой из инвариантов  $I_\gamma^s(T)$  может быть представлен в виде либо линейной функции:

$$f = T \cdot \cdot \Omega, \quad (5.115)$$

либо квадратичной функции:

$$f = T \otimes T \cdot \cdot \cdot {}^4\Omega, \quad (5.116)$$

либо кубической функции:

$$f = T \otimes T \otimes T \cdot \cdot \cdot {}^6\Omega, \quad (5.117)$$

где " $\Omega$ ",  $n = 2, 4, 6$  - некоторые индифферентные в группе  $G_s$  тензоры, составленные из образующих тензоров этой группы.

Производная от линейной функции (5.115) была получена выше:

$$\frac{\partial}{\partial T}(T \cdot \cdot \Omega) = \frac{1}{2}(\Omega + \Omega^T). \quad (5.118)$$

Для вычисления производной от квадратичной и кубической функций, найдем их частные производные с учетом правила расшифровки скалярного произведения тензоров высших рангов, приведенного в

упр.1.8.1:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial T^{ij}}(T^{mn}T^{kl}\Omega_{lknm}) &= \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial T^{ij}}(T^{mn} + T^{nm})(T^{kl} + T^{lk})\Omega_{lknm} = \\
 &= \frac{1}{4} \left( (\delta_i^m \delta_j^n + \delta_i^n \delta_j^m)(T^{kl} + T^{lk}) + (\delta_i^k \delta_j^l + \delta_i^l \delta_j^k)(T^{mn} + T^{nm}) \right) \Omega_{lknm} = \\
 &= \frac{1}{4} T_{st} \left( (g^{sk} g^{lt} + g^{sl} g^{tk})(\Omega_{lkji} + \Omega_{lkij}) + \right. \\
 &\quad \left. + (g^{sm} g^{tn} + g^{sn} g^{tm})(\Omega_{ijnm} + \Omega_{jijnm}) \right) = \\
 &= \frac{1}{4} T_{st} R^s \otimes R^t \cdot \cdot \left( (R^l \otimes R^k + R^k \otimes R^l)(\Omega_{lkji} + \Omega_{lkij}) + \right. \\
 &\quad \left. + (R^n \otimes R^m + R^m \otimes R^n)(\Omega_{ijnm} + \Omega_{jijnm}) \right). \tag{5.119}
 \end{aligned}$$

Здесь произведение обратных метрических матриц представлено в виде:

$$\begin{aligned}
 g^{sk} g^{lt} &= R^s \otimes R^t \cdot \cdot R^l \otimes R^k, \\
 g^{sm} g^{tn} &= R^s \otimes R^t \cdot \cdot R^n \otimes R^m, \quad \text{и т.д.}
 \end{aligned}$$

Составляя теперь выражение для тензора производной (5.88) от скалярной функции, получим

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial T}(T \otimes T \cdot \cdot \cdot {}^4\Omega) &= \frac{\partial}{\partial T^{ij}}(T^{mn}T^{kl}\Omega_{lknm})R^i \otimes R^j = \\
 &= \frac{1}{4} T \cdot \cdot ({}^4\Omega^{(1243)} + {}^4\Omega^{(2143)} + {}^4\Omega^{(1234)} + \\
 &\quad + {}^4\Omega^{(2134)} + {}^4\Omega^{(3412)} + {}^4\Omega^{(3421)} + {}^4\Omega^{(4312)} + {}^4\Omega^{(4321)}),
 \end{aligned}$$

или, используя определение операции симметрии (1.266), получаем следующую теорему.

**ТЕОРЕМА 5.7.** *Тензор производной от скалярной квадратичной функции симметричного тензора второго ранга вычисляют по формуле:*

$$\frac{\partial}{\partial T}(T \otimes T \cdot \cdot \cdot {}^4\Omega) = 2T \cdot \cdot {}^4\Omega^{(\cdot)} = 2{}^4\Omega^{(\cdot)} \cdot \cdot T. \tag{5.120}$$

Второе равенство справедливо ввиду симметрии  $T$  и  ${}^4\Omega^{(\cdot)}$ .

Если тензор  ${}^4\Omega$  - симметричный, т.е. удовлетворяет условиям (1.264), то из (5.120) получаем:

$$\frac{\partial}{\partial T}(T \otimes T \cdot \cdot \cdot {}^4\Omega) = 2T \cdot \cdot {}^4\Omega = 2{}^4\Omega \cdot \cdot T. \tag{5.121}$$

Если квадратичный инвариант имеет структуру вида:

$$f = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{T}) \cdots (\mathbf{B} \cdot \mathbf{T}) = \mathbf{T} \otimes \mathbf{T} \cdots (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{(1432)} \quad (5.122)$$

(см. упр. 1.8.4), где  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  - симметричные тензоры, то формула (5.120) принимает вид:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{T}} ((\mathbf{A} \cdot \mathbf{T}) \cdots (\mathbf{B} \cdot \mathbf{T})) = 2(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{[i]} \cdots \mathbf{T}, \quad (5.123)$$

где вторая операция симметрирования  $[i]$  определяется по (1.268).

Для нахождения тензора производной от кубической функции (5.117) необходимо вычислить частную производную:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial T_{ij}^i} (T^{mn} T^{kl} T^{qp} \Omega_{pqlknm}) &= \frac{1}{8} \frac{\partial}{\partial T_{ij}^i} (T^{mn} + T^{nm})(T^{kl} + T^{lk})(T^{sp} + T^{ps}) \cdot \\ &\cdot \Omega_{pslknm} = \frac{1}{8} \left( (T^{kl} + T^{lk})(T^{qp} + T^{pq})(\Omega_{pqlkji} + \Omega_{pqlkij}) + \right. \\ &+ (T^{nm} + T^{mn})(T^{qp} + T^{pq})(\Omega_{pqjim} + \Omega_{pqijnm}) + \\ &\left. + (T^{nm} + T^{mn})(T^{kl} + T^{lk})(\Omega_{jilknm} + \Omega_{ijlknm}) \right), \end{aligned} \quad (5.124)$$

Переходим к ковариантным компонентам, разбивая каждое из трех слагаемых в (5.124) еще на 2, например,

$$\begin{aligned} (T^{kl} + T^{lk})(T^{qp} + T^{pq})(\Omega_{pqlkji} + \Omega_{pqlkij}) &= \\ = \frac{1}{2} T_{st} T_{ab} \left( (g^{sk} g^{lt} + g^{sl} g^{tk})(g^{aq} g^{bp} + g^{ap} g^{bq}) + \right. \\ \left. + (g^{ak} g^{bl} + g^{al} g^{bk})(g^{sq} g^{tp} + g^{sp} g^{tq}) \right) (\Omega_{pqlkji} + \Omega_{pqlkij}). \end{aligned}$$

Далее представляем произведение метрических матриц в виде свертки двух тензоров четвертого ранга, причем для одного из них (например, левого) фиксируем расположение индексов, например:

$$g^{ak} g^{bl} g^{sq} g^{tp} = R^s \otimes R^t \otimes R^a \otimes R^b \cdots R^l \otimes R^k \otimes R^p \otimes R^q.$$

Проделав эти операции, подставим итоговое выражение частной производной (5.124) в тензор производной, в результате получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{T}} (\mathbf{T} \otimes \mathbf{T} \otimes \mathbf{T} \cdots \cdots {}^6\Omega) &= \frac{\partial}{\partial T_{ij}^i} (T^{mn} T^{kl} T^{qp} \Omega_{pqlknm}) \mathbf{R}^i \otimes \mathbf{R}^j = \\ = \frac{1}{16} \mathbf{T} \otimes \mathbf{T} \cdots \cdots &({}^6\Omega^{(\cdot)65} + {}^6\Omega^{(\cdot)56} + {}^6\Omega^{(\cdot)34} + \\ + {}^6\Omega^{(\cdot)43} + {}^6\Omega^{(\cdot)12} + {}^6\Omega^{(\cdot)21}). \end{aligned}$$

Или, используя обозначение операции симметрирования (см. (1.270)), получаем следующую теорему.

**ТЕОРЕМА 5.8.** *Тензор производной от скалярной кубической функции от симметричного тензора второго ранга имеет вид:*

$$\frac{\partial}{\partial T} (T \otimes T \otimes T \cdots \cdots {}^6\Omega) = 3T \otimes T \cdots \cdots {}^6\Omega^{\{ \cdot \}} = 3{}^6\Omega^{\{ \cdot \}} \cdots T \otimes T. \quad (5.125)$$

Тензор  ${}^6\Omega^{\{ \cdot \}}$  является симметричным тензором шестого ранга (см. (1.269)). Если же исходный тензор  ${}^6\Omega$  уже является симметричным, то из (5.125) следует, что

$$\frac{\partial}{\partial T} (T \otimes T \otimes T \cdots \cdots {}^6\Omega) = 3{}^6\Omega \cdots T \otimes T. \quad (5.126)$$

### 5.2.8. Тензоры производной от инвариантов тензора второго ранга относительно различных групп симметрии

Применяя формулу (5.118) к линейным инвариантам  $I_\gamma^s(T)$  разных групп симметрии, получим следующие тензоры производной от линейных инвариантов:

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_\alpha^{(E)}}{\partial T} &= \frac{\partial}{\partial T} (T \cdot \bar{e}_\alpha^2) = \bar{e}_\alpha^2, & \frac{\partial I_{\alpha+3}^{(E)}}{\partial T} &= \frac{1}{2} O_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, 3, \\ \frac{\partial I_1^{(T)}}{\partial T} &= E - \bar{e}_3^2, & \frac{\partial I_1^{(I)}}{\partial T} &= E. \end{aligned} \quad (5.127)$$

Остальные линейные инварианты классов совпадают с указанными выше, например:

$$\begin{aligned} I_\alpha^{(0)} &= I_\alpha^{(M)} = I_\alpha^{(E)}, & I_4^{(M)} &= I_3^{(E)}, & I_2^{(T)} &= I_2^{(A)} = I_3^{(E)}, \\ I_1^{(T)} &= I_1^{(K)} = I_1^{(A)}, & I_1^{(Q)} &= I_1^{(I)} \text{ и т.п.,} \end{aligned} \quad (5.127')$$

поэтому совпадают и их тензоры производной.

Применяя формулу (5.123) к различным квадратичным инвариантам групп симметрий  $G_s$  (п.4.5.5), получаем после расшифровки операции симметрирования  $[\cdot]$ :

$$\frac{\partial I_5^{(M)}}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial T} ((\bar{e}_1^2 \cdot T) \cdots (\bar{e}_3^2 \cdot T)) = \frac{1}{2} O_2 \otimes O_2 \cdots T, \quad (5.128)$$

$$\frac{\partial I_6^{(M)}}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial T} ((\bar{e}_3^2 \cdot T) \cdots (O_3 \cdot T)) = \frac{1}{2} (O_1 \otimes O_2 + O_2 \otimes O_1) \cdots T$$

– для моноклинного класса;

$$\frac{\partial I_4^{(O)}}{\partial \mathbf{T}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{T}} ((\bar{\mathbf{e}}_2^2 \cdot \mathbf{T}) \cdot (\bar{\mathbf{e}}_3^2 \cdot \mathbf{T})) = \frac{1}{2} \mathbf{O}_1 \otimes \mathbf{O}_1 \cdot \cdot \mathbf{T} \quad (5.129)$$

– для ортотропного класса;

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_3^{(T)}}{\partial \mathbf{T}} &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{T}} ((\mathbf{E} - \bar{\mathbf{e}}_3^2) \cdot \mathbf{T} \cdot (\bar{\mathbf{e}}_3^2 \cdot \mathbf{T})) = 2((\mathbf{E} - \bar{\mathbf{e}}_3^2) \otimes \bar{\mathbf{e}}_3^2) \cdot \cdot \mathbf{T} = \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{O}_2 \otimes \mathbf{O}_2 + \mathbf{O}_1 \otimes \mathbf{O}_1) \cdot \cdot \mathbf{T}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_4^{(T)}}{\partial \mathbf{T}} &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{T}} ((\mathbf{T} \otimes \mathbf{T} \cdots \cdots \mathbf{O}_h) - 2I_2^{(T)} \frac{\partial I_2^{(T)}}{\partial \mathbf{T}}) = \\ &= 2(\mathbf{O}_h - \bar{\mathbf{e}}_3^2 \otimes \bar{\mathbf{e}}_3^2) \cdot \cdot \mathbf{T} = 2(\bar{\mathbf{e}}_1^2 \otimes \bar{\mathbf{e}}_1^2 + \bar{\mathbf{e}}_2^2 \otimes \bar{\mathbf{e}}_2^2) \cdot \cdot \mathbf{T}, \quad (5.130) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_5^{(T)}}{\partial \mathbf{T}} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{T}} (\mathbf{T} \otimes \mathbf{T} \cdots \cdots \Delta) - \frac{\partial I_3^{(T)}}{\partial \mathbf{T}} - \frac{1}{2} \frac{\partial I_4^{(T)}}{\partial \mathbf{T}} - I_2^{(T)} \frac{\partial I_2^{(T)}}{\partial \mathbf{T}} = \\ &= \left( \Delta - \frac{1}{2} (\mathbf{O}_1 \otimes \mathbf{O}_1 + \mathbf{O}_2 \otimes \mathbf{O}_2) - \mathbf{O}_h \right) \cdot \cdot \mathbf{T}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial I_6^{(T)}}{\partial \mathbf{T}} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{T}} (\mathbf{T} \otimes \mathbf{T} \cdots \cdots \Omega_{3h}) = \frac{1}{2} \Omega_{3h} \cdot \cdot \mathbf{T}$$

– для тетрагонального и квазитрансверсально-изотропного (кроме  $\partial I_6^{(T)} / \partial \mathbf{T}$ ) классов;

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_3^{(A)}}{\partial \mathbf{T}} &= \frac{1}{2} (\mathbf{O}_1 \otimes \mathbf{O}_1 + \mathbf{O}_2 \otimes \mathbf{O}_2) \cdot \cdot \mathbf{T}, \\ \frac{\partial I_4^{(A)}}{\partial \mathbf{T}} &= \frac{1}{2} \mathbf{D}_3 \cdot \cdot \mathbf{T}, \quad \frac{\partial I_6^{(A)}}{\partial \mathbf{T}} = \frac{1}{2} \Omega_{3d} \cdot \cdot \mathbf{T}, \quad (5.131) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial I_5^{(A)}}{\partial \mathbf{T}} = 2(\Delta - \frac{1}{2} (\mathbf{O}_1 \otimes \mathbf{O}_1 - \mathbf{O}_2 \otimes \mathbf{O}_2) - \bar{\mathbf{e}}_3^2 \otimes \bar{\mathbf{e}}_3^2) \cdot \cdot \mathbf{T}$$

– для *A*-ромбоэдрического и *B*-ромбоэдрического (кроме  $\partial I_6^{(A)} / \partial \mathbf{T}$ ) классов;

$$\frac{\partial I_2^{(Q)}}{\partial \mathbf{T}} = 2\mathbf{O}_h \cdot \cdot \mathbf{T}, \quad \frac{\partial I_3^{(Q)}}{\partial \mathbf{T}} = (\Delta - \mathbf{O}_h) \cdot \cdot \mathbf{T} \quad (5.132)$$

– для квазизотропого класса;

$$\frac{\partial I_{\alpha}^{(H)}}{\partial \mathbf{T}} = \frac{\partial I_{\alpha}^{(A)}}{\partial \mathbf{T}} = \frac{\partial I_{\alpha}^{(3)}}{\partial \mathbf{T}}, \quad \alpha = 1, 2, 3,$$

$$\frac{\partial I_4^{(H)}}{\partial \mathbf{T}} = \frac{\partial I_4^{(3)}}{\partial \mathbf{T}} = \frac{\partial I_5^{(A)}}{\partial \mathbf{T}} \quad (5.133)$$

– для гексагонального и трансверсально-изотропного классов.

Различных кубических инвариантов во всех группах симметрии всего три:

$$I_3(\mathbf{T}), \quad I_4^{(Q)} \quad \text{и} \quad I_5^{(Q)} = I_6^{(O)}. \quad (5.134)$$

Тензор производной от третьего главного инварианта уже был вычислен в п.5.2.4:

$$\frac{\partial I_3(\mathbf{T})}{\partial \mathbf{T}} = \mathbf{T}^2 - I_1(\mathbf{T})\mathbf{T} + EI_2(\mathbf{T}) \quad (5.135)$$

(для симметричного тензора  $\mathbf{T}$ ).

Для вычисления тензора производной от  $I_4^{(Q)}$  представим его в виде (5.117) и воспользуемся формулой (5.126):

$$I_4^{(Q)} = (\mathbf{T} \cdots \mathbf{O}_h) \cdot (\mathbf{T} \cdots \mathbf{O}_h) \cdot (\mathbf{T} \cdots \mathbf{O}_h) = \mathbf{T} \otimes \mathbf{T} \otimes \mathbf{T} \cdots \cdots {}^6\mathbf{O}_n, \quad (5.136)$$

$$\frac{\partial I_4^{(Q)}}{\partial \mathbf{T}} = 3 {}^6\mathbf{O}_n \cdots \cdots \mathbf{T} \otimes \mathbf{T},$$

где тензор  ${}^6\mathbf{O}_n$  является симметричным тензором шестого ранга и имеет следующий вид:

$${}^6\mathbf{O}_n = (\mathbf{O}_h \cdot \mathbf{O}_h) \cdots \mathbf{O}_h = \sum_{\alpha=1}^3 \delta_{\alpha}^{i_1} \delta_{\alpha}^{i_2} \delta_{\alpha}^{i_3} \delta_{\alpha}^{i_4} \delta_{\alpha}^{i_5} \delta_{\alpha}^{i_6} \bar{\mathbf{e}}_{i_1} \otimes \dots \otimes \bar{\mathbf{e}}_{i_6}. \quad (5.137)$$

Еще один кубический инвариант имеется в классах сротропии и квазизотропии  $I_6^{(O)}$ , его можно представить в виде:

$$I_6^{(O)} = (\bar{\mathbf{e}}_1^2 \cdot \mathbf{T}) \cdot (\bar{\mathbf{e}}_2^2 \cdot \mathbf{T}) \cdot (\bar{\mathbf{e}}_3^2 \cdot \mathbf{T}) = \mathbf{T} \otimes \mathbf{T} \otimes \mathbf{T} \cdots \cdots (\bar{\mathbf{e}}_1^2 \otimes \bar{\mathbf{e}}_2^2 \otimes \bar{\mathbf{e}}_3^2)^{(165432)}. \quad (5.138)$$

Используя формулу (5.125), получаем:

$$\frac{\partial I_6^{(O)}}{\partial \mathbf{T}} = 3 \left( (\bar{\mathbf{e}}_1^2 \otimes \bar{\mathbf{e}}_2^2 \otimes \bar{\mathbf{e}}_3^2)^{(165432)} \right)^{\{\cdot\}} \cdots \cdots \mathbf{T} \otimes \mathbf{T}. \quad (5.139)$$

Можно показать (см. упр. 5.2.3), что тензор шестого ранга, участвующий в этом выражении, представим следующим образом:

$$\begin{aligned} & \left( (\bar{\mathbf{e}}_1^2 \otimes \bar{\mathbf{e}}_2^2 \otimes \bar{\mathbf{e}}_3^2)^{(165432)} \right)^{\{ \cdot \}} = \\ & = \frac{1}{48} \sum_{\substack{\alpha, \beta, \gamma=1 \\ \alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha}}^3 (O_\alpha \otimes O_\beta + O_\beta \otimes O_\alpha) \otimes O_\gamma \equiv {}^6O_m, \quad (5.139a) \end{aligned}$$

тогда

$$\frac{\partial I_6^{(O)}}{\partial T} = 3 {}^6O_m \cdots T \otimes T. \quad (5.140)$$

### Упражнения к § 5.2.

**Упражнение 5.2.1.** Доказать справедливость формулы (5.136), записывая компонентные представления тензоров  $O_h$  и  ${}^6O_n$ .

**Упражнение 5.2.2.** Доказать справедливость формулы (5.139).

**Упражнение 5.2.3.** Записывая явное компонентное представление тензоров, показать, что тензор (5.139a) имеет следующие компоненты:

$$(\bar{\mathbf{e}}_1^2 \otimes \bar{\mathbf{e}}_2^2 \otimes \bar{\mathbf{e}}_3^2)^{(165432)} = \delta_1^{i_1} \delta_3^{i_2} \delta_3^{i_3} \delta_2^{i_4} \delta_2^{i_5} \delta_1^{i_6} \bar{\mathbf{e}}_{i_1} \otimes \dots \otimes \bar{\mathbf{e}}_{i_6}.$$

Применяя операцию симметрирования  $\{ \cdot \}$ , доказать справедливость формулы (5.139a).

**Упражнение 5.2.4.** Используя определение (5.88) тензора производной, показать, что имеют место правила дифференцирования скалярных функций по тензору, совпадающие с обычными правилами дифференцирования:

$$d(\varphi\psi) = (\varphi\psi_T + \psi\varphi_T) \cdot dT^T,$$

$$d\left(\frac{\varphi}{\psi}\right) = \frac{1}{\psi^2}(\psi\varphi_T - \varphi\psi_T) \cdot dT^T.$$

**Упражнение 5.2.5.** Доказать, что

$$\frac{\partial}{\partial T}(T^2 \cdot \Omega) = \left( (\Omega \otimes E)^{(1423)} + (\Omega \otimes E)^{(4123)} \right) \cdot T = \Omega \cdot T + T \cdot \Omega,$$

если  $T$  и  $\Omega$  – симметричные.

### § 5.3. Потенциальные тензорные функции

#### 5.3.1. Определение потенциальной тензорной функции

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.8.** Тензорная функция (5.1) или (5.2) называется *потенциальной*, если существует скалярная функция  $\psi(^nT)$  тензорного аргумента, называемая *потенциалом*, тензор производной от которой совпадает с этой функцией:

$$^nS = ^n\mathcal{F}(^nT) = \frac{\partial \psi}{\partial ^nT}. \quad (5.141)$$

Очевидно, что для потенциальных тензорных функций тензоры  $^nS$  и  $^nT$  имеют одинаковый ранг.

В компонентах формула (5.141) имеет вид:

$$S_{i_1 \dots i_n} = \mathcal{F}_{i_1 \dots i_n}(T^{j_1 \dots j_n}) = \frac{\partial \psi}{\partial T^{i_1 \dots i_n}}(T^{j_1 \dots j_n}). \quad (5.142)$$

При переходе от одной криволинейной системы координат  $X^i$  в другую  $X'^i$  компонентное представление потенциальной функции согласно (5.3) изменяется следующим образом:

$$S'_{i_1 \dots i_n} = \mathcal{F}'_{i_1 \dots i_n}(T'^{j_1 \dots j_n}) = \frac{\partial \psi'}{\partial T'^{i_1 \dots i_n}}, \quad (5.143)$$

где

$$S_{i_1 \dots i_n} = Q_{i_1}^{j_1} \dots Q_{i_n}^{j_n} S'_{j_1 \dots j_n}, \quad T^{j_1 \dots j_n} = P_{i_1}^{j_1} \dots P_{i_n}^{j_n} T'^{i_1 \dots i_n}, \quad (5.144)$$

причем в силу инвариантности тензорной функции (5.141) имеют место следующие соотношения:

$$\frac{\partial \psi'}{\partial T'^{i_1 \dots i_n}}(T'^{k_1 \dots k_n}) = Q_{i_1}^{j_1} \dots Q_{i_n}^{j_n} \frac{\partial \psi}{\partial T^{j_1 \dots j_n}}(P_{l_1}^{k_1} \dots P_{l_n}^{k_n} T'^{l_1 \dots l_n}). \quad (5.145)$$

#### 5.3.2. Индифферентные потенциальные тензорные функции

Согласно общему определению (5.8), индифферентная тензорная функция не меняет свой вид при переходе из одной системы координат  $x^i$  в другую  $X^i$ , осуществляя в рамках определенной группы  $G_s$  преобразований, например линейных. Применительно к потенциальной тензорной функции, это свойство индифферентности относительно группы  $G_s$ , записывается следующим образом: если имеет место соотношение

$$\bar{S}_{i_1 \dots i_n} = \frac{\partial \psi}{\partial \bar{T}^{i_1 \dots i_n}}(\bar{T}^{j_1 \dots j_n}) \quad (5.146)$$

в декартовой системе координат  $Ox^i$ , то при переходе в другую систему координат  $X^i$ , получающуюся с помощью линейного преобразования в группе  $G_s$ , характеризуемого матрицами  $A^i{}_j$  и  $B^i{}_j$ , вид зависимости  $S_{i_1 \dots i_n}$  от  $T^{j_1 \dots j_n}$  в новой системе координат не меняется и определяется формулой (5.142).

Очевидно, выполнена следующая теорема.

**Теорема 5.9.** Если скалярная функция  $\psi(\bar{T}^{j_1 \dots j_n})$  является индифферентной относительно группы  $G_s$ , т.е. для нее выполнена формула (5.84) из п.5.2.1:

$$\psi(\bar{T}^{j_1 \dots j_n}) = \psi(A^{j_1}_{k_1} \dots A^{j_n}_{k_n} \bar{T}^{k_1 \dots k_n}), \quad \forall \{A^j{}_k\} \in G_s, \quad (5.147)$$

то потенциальная тензорная функция (5.142) также является индифферентной относительно группы  $G_s$ .

Условие (5.145) для компонент индифферентной потенциальной функции имеет вид:

$$B^{j_1}_{i_1} \dots B^{j_n}_{i_n} \frac{\partial \psi}{\partial T^{j_1 \dots j_n}}(T^{k_1 \dots k_n}) = \frac{\partial \psi}{\partial \bar{T}^{i_1 \dots i_n}}(\bar{T}^{k_1 \dots k_n}), \quad (5.148)$$

причем в левую часть необходимо после дифференцирования подставить соотношение:

$$T^{k_1 \dots k_n} = A^{k_1}_{l_1} \dots A^{k_n}_{l_n} \bar{T}^{l_1 \dots l_n}. \quad (5.149)$$

### 5.3.3. Представление потенциальной функции в тензорном базисе

**Теорема 5.10.** Индифферентная относительно группы  $G_s$  скалярная функция  $\psi(^nT)$  всегда может быть представлена как функция полного набора функционально независимых скалярных инвариантов  $I_\gamma^{(s)}(^nT)$  относительно той же группы симметрии:

$$\psi(^nT) = \psi(I_\gamma^{(s)}(^nT)), \quad \gamma = 1 \dots r. \quad (5.150)$$

▼ В самом деле, если скалярная индифферентная функция  $\psi(^nT)$  не выражается через инварианты  $I_\gamma^{(s)}(^nT)$ , то ее саму можно рассматривать как еще один независимый скалярный инвариант тензора  ${}^nT$ , а это противоречит полноте набора  $I_\gamma^{(s)}$ . Таким образом, представление (5.150) всегда возможно. ▲

Вычислим теперь тензор производной от  $\psi$  (5.150) и подставим его в (5.141), тогда получим:

$${}^nS = \sum_{\gamma=1}^r \frac{\partial \psi}{\partial I_\gamma^{(s)}} \frac{\partial I_\gamma^{(s)}}{\partial {}^nT}. \quad (5.151)$$

Перепишем это соотношение в следующем виде:

$${}^n S = \sum_{\gamma=1}^r \varphi_{\gamma}(I_1^{(s)}({}^n T) \dots I_r^{(s)}({}^n T)) {}^n H_{\gamma}^{(s)}({}^n T), \quad (5.152)$$

где введены обозначения для тензоров производной от инвариантов:

$${}^n H_{\gamma}^{(s)} = \frac{\partial I_{\gamma}^{(s)}}{\partial {}^n T} \quad (5.153)$$

и скалярных функций:

$$\varphi_{\gamma} = \frac{\partial \psi}{\partial I_{\gamma}}, \quad (5.154)$$

которые, очевидно, удовлетворяют условиям взаимности:

$$\frac{\partial \varphi_{\gamma}}{\partial I_{\beta}} = \frac{\partial \varphi_{\beta}}{\partial I_{\gamma}}. \quad (5.155)$$

Запись (5.152) называется *представлением потенциальной тензорной функции в тензорном базисе*.

В самом деле, любая потенциальная тензорная функция (5.141) может быть представлена в виде разложения (5.152), причем в рамках одной и той же группы симметрии  $G_s$ , одна функция отличается от другой только коэффициентами  $\varphi_{\gamma}$ , а тензоры  ${}^n H_{\gamma}^{(s)}$  не изменяются. Так как полный набор инвариантов  $I_{\gamma}^{(s)}$  строится с помощью образующих тензоров групп  ${}^n \Omega_{\gamma}^{(s)}$  и тензорных степеней от  ${}^n T$ , то и  ${}^n H_{\gamma}^{(s)}$  зависит от этих же самых тензоров.

Установим далее эти тензоры  ${}^n H_{\gamma}^{(s)}$  для  $n = 1$  (векторные функции) и  $n = 2$  (тензорные функции второго ранга) и различных групп симметрии.

#### 5.3.4. Потенциальные векторные функции

Рассмотрим случай  $n = 1$ , тогда потенциальная функция (5.141) имеет вид:

$$s = f(\mathbf{a}) = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{a}}, \quad (5.156)$$

где  $\psi$  является функцией инвариантов вектора относительно группы  $G_s$ :

$$\psi = \psi(I_{\gamma}^{(s)}(\mathbf{a})) \quad \gamma = 1 \dots r. \quad (5.157)$$

Представление (5.151) для векторной функции имеет вид:

$$s = \sum_{\gamma=1}^r \frac{\partial \psi}{\partial I_{\gamma}^{(s)}} \frac{\partial I_{\gamma}^{(s)}}{\partial \mathbf{a}} = \sum_{\gamma=1}^r \varphi_{\gamma}(I_{\gamma}^{(s)}(\mathbf{a}) \dots I_r^{(s)}(\mathbf{a})) \frac{\partial I_{\gamma}^{(s)}}{\partial \mathbf{a}}, \quad (5.158)$$

где

$$\varphi_\gamma = \partial\psi/\partial I_\gamma^{(s)}.$$

Используя теперь выражения для вектора производной  $\partial I_\gamma^{(s)}/\partial \mathbf{a}$ , полученного в п. 5.2.3, запишем представление (5.158) векторной функции относительно различных групп симметрии  $G_s$ .

*Триклинная сингония:*

$$\begin{aligned} G_1: \quad s &= \sum_{\gamma=1}^3 \varphi_\gamma (\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3) \bar{\mathbf{e}}_\gamma, \\ G_2: \quad s &= \sum_{\gamma=1}^3 \varphi_\gamma (\bar{a}_2 \bar{a}_3, \bar{a}_1 \bar{a}_3, \bar{a}_1 \bar{a}_2) (\bar{a}_\beta \bar{\mathbf{e}}_\alpha + \bar{a}_\alpha \bar{\mathbf{e}}_\beta), \\ &\quad \alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha, \quad \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (5.159)$$

*Моноклинная сингония:*

$$\begin{aligned} G_3: \quad s &= 2(\varphi_1 \bar{a}_1 \bar{\mathbf{e}}_1 + \varphi_2 \bar{a}_3 \bar{\mathbf{e}}_3) + \varphi_3 (\bar{a}_1 \bar{\mathbf{e}}_2 + \bar{a}_2 \bar{\mathbf{e}}_1), \\ &\quad \varphi_\gamma = \varphi_\gamma (a_1^2, a_1 a_2, a_3^2), \end{aligned} \quad (5.160)$$

$$G_4: \quad s = 2 \sum_{\gamma=1}^2 \varphi_\gamma \bar{a}_\gamma \bar{\mathbf{e}}_\gamma + \varphi_3 \bar{\mathbf{e}}_3, \quad \varphi_\gamma = \varphi_\gamma (a_1^2, a_2^2, a_3),$$

$$G_5: \quad s = \sum_{\gamma=1}^2 \varphi_\gamma \bar{\mathbf{e}}_\gamma + 2\varphi_3 \bar{a}_3 \bar{\mathbf{e}}_3, \quad \varphi_\gamma = \varphi_\gamma (a_1, a_2, a_3^2).$$

*Ромбическая сингония:*

$$G_6: \quad s = 2 \sum_{\gamma=1}^2 \varphi_\gamma \bar{a}_\gamma \bar{\mathbf{e}}_\gamma + \varphi_3 \bar{\mathbf{e}}_3, \quad \varphi_\gamma = \varphi_\gamma (a_1^2, a_2^2, a_3), \quad (5.161)$$

$$G_{7,8}: \quad s = 2 \sum_{\gamma=1}^2 \varphi_\gamma \bar{a}_\gamma \bar{\mathbf{e}}_\gamma, \quad \varphi_\gamma = \varphi_\gamma (a_1^2, a_2^2, a_3^2).$$

<i>Сингонии:</i>	тетрагональная	$G_s = 9, 12, 14, 15$
	ромбоэдрическая	$G_s = 17, 19, 20$
	гексагональная	$G_s = 21, 23, 24, 25, 27;$
	трансверсальная изотропия	$G_s = 34, 36, 37;$

$$s = 2\varphi_1 \mathbf{a} + 2\varphi_2 \bar{a}_3 \bar{\mathbf{e}}_3, \quad \varphi_\gamma = \varphi_\gamma (|a|^2, a_3^2). \quad (5.162)$$

<i>Сингонии:</i>	тетрагональная	$G_s = 10, 13;$
	ромбоэдрическая	$G_s = 16, 18;$
	гексагональная	$G_s = 22, 26;$
	трансверсальная изотропия	$G_s = 33, 35;$

$$s = 2\varphi_1 \mathbf{a} + \varphi_2 \bar{\mathbf{e}}_3, \quad \varphi_\gamma = \varphi_\gamma (|a|^2, a_3). \quad (5.163)$$

*Кубическая сингония, изотропия  $G_s = 28, \dots, 32, 38, 39$ :*

$$s = 2\varphi \mathbf{a}, \quad \varphi = \varphi(|a|^2). \quad (5.164)$$

### 5.3.5. Общее представление потенциальных тензорных функций второго ранга

Рассмотрим теперь случай  $n = 2$ , тогда потенциальная функция (5.141) имеет вид:

$$\mathbf{S} = \mathcal{F}(\mathbf{T}) = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{T}}, \quad (5.165)$$

где  $S$  и  $T$  - симметричные тензоры второго ранга, а  $\psi$  - скалярная функция, зависящая от инвариантов тензора  $T$  относительно группы  $G_s$ :

$$\psi = \psi(I_\gamma^{(s)}(\mathbf{T})), \quad \gamma = 1 \dots r. \quad (5.166)$$

Представление (5.152) для функции второго ранга имеет вид:

$$S = \sum_{\gamma=1}^r \varphi_\gamma(I_1^{(s)}(T), \dots, I_r^{(s)}(T)) \frac{\partial I_\gamma^{(s)}(T)}{\partial T}, \quad (5.167)$$

где

$$\varphi_\gamma = \partial\psi/\partial I_\gamma^{(s)}(\mathbf{T}). \quad (5.168)$$

В качестве инвариантов  $I_{\gamma}^{(s)}(T)$  выберем полные наборы инвариантов различных классов, приведенные в п.4.5.5.

Как было показано в п.5.2.5, все эти инварианты являются либо линейными:

$$I_{\gamma}^{(s)}(\mathbf{T}) = \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\Omega}_{\gamma}^{(s)}, \quad \gamma = 1 \dots m, \quad (5.169)$$

либо квадратичными:

$$I_{\gamma}^{(s)}(\mathbf{T}) = \mathbf{T} \otimes \mathbf{T} \dots {}^4\Omega_{\gamma}^{(s)}, \quad \gamma = m+1\dots q, \quad (5.170)$$

либо кубическими:

$$I_{\gamma}^{(s)}(\mathbf{T}) = \mathbf{T} \otimes \mathbf{T} \otimes \mathbf{T} \dots \dots \Omega_{\gamma}^{(s)}, \quad \gamma = q+1 \dots r, \quad r \leq 6, \quad (5.170a)$$

где  $\Omega_{\gamma}^{(s)}$ ,  ${}^4\Omega_{\gamma}^{(s)}$  и  ${}^6\Omega_{\gamma}^{(s)}$  - тензоры, построенные с помощью образующих тензоров групп, а  $m$  - число линейных инвариантов,  $m_2 \equiv q - m$  - число квадратичных инвариантов,  $m_3 \equiv r - q$  - число кубических инвариантов в группе.

Тензоры производной от этих инвариантов вычисляются в п.5.2.5 (формулы (5.105), (5.120) и (5.125)), и в общем виде могут быть записаны следующим образом:

$$\frac{\partial I_\gamma^{(s)}}{\partial T} = \Omega_\gamma^{(s)}, \quad \gamma = 1 \dots m; \quad \frac{\partial I_\gamma^{(s)}}{\partial T} = 2^4 \Omega_\gamma^{(s)} \langle \cdot \rangle \cdot T, \quad \gamma = m+1 \dots q;$$

$$\frac{\partial I_{\gamma}^{(s)}}{\partial T} = 3^6 \Omega_{\gamma}^{(s)\{\cdot\}} \dots T \otimes T, \quad \gamma = q+1 \dots r. \quad (5.171)$$

Тогда представление (5.167) можно записать в виде:

$$S = \sum_{\gamma=1}^m \varphi_{\gamma} \Omega_{\gamma}^{(s)} + 2 \sum_{\gamma=m+1}^q \varphi_{\gamma} {}^4 \Omega_{\gamma}^{(s)(\cdot)} \dots T + 3 \sum_{\gamma=q+1}^r \varphi_{\gamma} {}^6 \Omega_{\gamma}^{(s)\{\cdot\}} \dots T \otimes T, \quad (5.172)$$

$$\varphi_{\gamma} = \varphi_{\gamma}(I_1^{(s)}(T), \dots, I_r^{(s)}(T)) = \frac{\partial \psi}{\partial I_{\gamma}^{(s)}}. \quad (5.173)$$

Подчеркнем, что тензоры  $\Omega_{\gamma}^{(s)}$ ,  ${}^4 \Omega_{\gamma}^{(s)(\cdot)}$  и  ${}^6 \Omega_{\gamma}^{(s)\{\cdot\}}$  не зависят от тензора  $T$ , а меняются только при переходе от одного класса симметрии к другому. Таким образом, доказана следующая теорема.

**ТЕОРЕМА 5.11.** *Всякая потенциальная тензорная функция (5.165) второго ранга, индифферентная относительно некоторой группы  $G_s$ , может быть представлена в виде разложения (5.172) по тензорным степеням:  $E$ ,  $T$  и  $T \otimes T$  – не выше второй степени.*

Для одной и той же группы  $G_s$  одна потенциальная функция (5.165) отличается от другой только коэффициентами  $\varphi_{\gamma}$ , которые являются скалярными функциями (5.173) инвариантов  $I_{\gamma}^{(s)}(T)$ .

### 5.3.6. Потенциальные тензорные функции второго ранга относительно различных групп $G_s$

Запишем теперь представление (5.172) потенциальной тензорной функции для каждого класса симметрии. Будем исходить из представления (5.167), в которое подставим выражения для тензоров производной  $\partial I_{\gamma}^{(s)}/\partial T$  каждого класса симметрии, полученные в п.5.2.6.

Представление тензорной функции (5.172) запишем в безиндексном виде и в компонентной форме в декартовом базисе  $\bar{e}_i$ :

(E)-Триклинический класс ( $m = 6$ ,  $m_2 = 0$ ,  $m_3 = 0$ ):

$$S = \sum_{\gamma=1}^3 \left( \varphi_{\gamma} \bar{e}_{\gamma}^2 + \frac{1}{2} \varphi_{3+\gamma} O_{\gamma} \right), \quad (5.174)$$

$$\bar{S}^{ij} = \sum_{\gamma=1}^3 \left( \varphi_{\gamma} \delta_{\gamma}^i \delta_{\gamma}^j + \frac{1}{2} \varphi_{3+\gamma} (\delta_{\alpha}^i \delta_{\beta}^j + \delta_{\beta}^i \delta_{\alpha}^j) \right), \quad \alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha,$$

$$\varphi_{\gamma} = \varphi_{\gamma}(\bar{T}_{11}, \bar{T}_{22}, \bar{T}_{33}, \bar{T}_{23}, \bar{T}_{13}, \bar{T}_{12}).$$

*(M)-Моноклинный класс* ( $m = 4, m_2 = 2, m_3 = 0$ ):

$$\begin{aligned} \mathbf{S} = & \sum_{\gamma=1}^3 \varphi_\gamma \bar{\mathbf{e}}_\gamma^2 + \frac{1}{2} \varphi_4 \mathbf{O}_3 + \frac{1}{2} \left( \varphi_5 (\mathbf{O}_2 \otimes \mathbf{O}_2) + \right. \\ & \left. + \varphi_6 (\mathbf{O}_1 \otimes \mathbf{O}_2 + \mathbf{O}_2 \otimes \mathbf{O}_1) + \varphi_7 (\mathbf{O}_1 \otimes \mathbf{O}_1) \right) \cdot \cdot \mathbf{T}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{S}^{ij} = & \sum_{\gamma=1}^3 \varphi_\gamma \delta_\gamma^i \delta_\gamma^j + \frac{\varphi_4}{2} (\delta_1^i \delta_2^j + \delta_2^i \delta_1^j) + (\varphi_5 \bar{T}_{13} + \varphi_6 \bar{T}_{23}) \times \\ & \times (\delta_1^i \delta_3^j + \delta_3^i \delta_1^j) + (\varphi_6 \bar{T}_{13} + \varphi_7 \bar{T}_{23}) (\delta_2^i \delta_3^j + \delta_3^i \delta_2^j), \end{aligned} \quad (5.175)$$

$$\varphi_\gamma = \varphi_\gamma (\bar{T}_{11}, \bar{T}_{22}, \bar{T}_{33}, \bar{T}_{12}, \bar{T}_{13}^2, \bar{T}_{13}\bar{T}_{23}, \bar{T}_{23}^2).$$

*(O)-Ортотропный класс* ( $m = 3, m_2 = 2, m_3 = 1$ ):

$$\begin{aligned} \mathbf{S} = & \sum_{\gamma=1}^3 \varphi_\gamma \bar{\mathbf{e}}_\gamma^2 + \frac{1}{2} (\varphi_4 \mathbf{O}_1 \otimes \mathbf{O}_1 + \varphi_5 \mathbf{O}_2 \otimes \mathbf{O}_2 + \varphi_7 \mathbf{O}_3 \otimes \mathbf{O}_3) \cdot \cdot \mathbf{T} + \\ & + 3\varphi_6 {}^6\mathbf{O}_m \cdot \cdot \cdot \mathbf{T} \otimes \mathbf{T}, \end{aligned} \quad (5.176)$$

$$\begin{aligned} \bar{S}^{ij} = & \sum_{\gamma=1}^3 \varphi_\gamma \delta_\gamma^i \delta_\gamma^j + \frac{1}{2} (\varphi_4 \bar{T}_{23} + \bar{T}_{12} \bar{T}_{13} \varphi_6) (\delta_2^i \delta_3^j + \delta_3^i \delta_2^j) + \\ & + \frac{1}{2} (\varphi_5 \bar{T}_{13} + \varphi_6 \bar{T}_{12} \bar{T}_{23}) (\delta_1^i \delta_3^j + \delta_3^i \delta_1^j) + \\ & + \frac{1}{2} (\varphi_7 \bar{T}_{12} + \varphi_6 \bar{T}_{13} \bar{T}_{23}) (\delta_1^i \delta_2^j + \delta_2^i \delta_1^j), \end{aligned}$$

$$\varphi_\gamma = \varphi_\gamma (\bar{T}_{11}, \bar{T}_{22}, \bar{T}_{33}, \bar{T}_{23}^2, \bar{T}_{13}^2, \bar{T}_{12} \bar{T}_{13} \bar{T}_{23}, \bar{T}_{12}^2).$$

*(T)-Тетрагональный класс* ( $m = 2, m_2 = 3, m_3 = 1$ ):

$$\begin{aligned} \mathbf{S} = & (\varphi_1 + \varphi_2 I_2) (\mathbf{E} - \bar{\mathbf{e}}_3^2) + (\varphi_2 + I_2 \varphi_6) \bar{\mathbf{e}}_3^2 + \\ & + \left( \frac{1}{2} \varphi_3 (\mathbf{O}_1 \otimes \mathbf{O}_1 + \mathbf{O}_2 \otimes \mathbf{O}_2) + 2\varphi_4 (\bar{\mathbf{e}}_1^2 \otimes \bar{\mathbf{e}}_1^2 + \bar{\mathbf{e}}_2^2 \otimes \bar{\mathbf{e}}_2^2) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \varphi_5 \Omega_{3h} - \varphi_6 I_1 \Delta \right) \cdot \cdot \mathbf{T} + \varphi_6 \mathbf{T}^2, \end{aligned} \quad (5.177)$$

$$\begin{aligned}\bar{S}^{ij} = & (\varphi_1 + I_2 \varphi_6) \delta^{ij} + (\varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_5 \bar{T}_{33}) \delta_3^i \delta_3^j + \varphi_3 ((\delta_2^i \delta_3^j + \delta_3^i \delta_2^j) \bar{T}_{23} + \\ & + (\delta_1^i \delta_3^j + \delta_3^i \delta_1^j) \bar{T}_{13}) + 2\varphi_4 (\delta_1^i \delta_1^j \bar{T}_{11} + \delta_2^i \delta_2^j \bar{T}_{22}) - I_1 \varphi_6 \bar{T}^{ij} + \\ & + \varphi_5 \left( \frac{1}{2} (\delta_1^i \delta_2^j + \delta_2^i \delta_1^j) (\bar{T}_{11} - \bar{T}_{22}) + (\delta_1^i \delta_1^j - \delta_2^i \delta_2^j) \bar{T}_{12} \right) + \varphi_6 \bar{T}^{ik} \bar{T}_k^j,\end{aligned}$$

$$\varphi_\gamma = \varphi_\gamma (\bar{T}_{11} + \bar{T}_{22}, \bar{T}_{33}, \bar{T}_{13}^2 + \bar{T}_{23}^2, \bar{T}_{11}^2 + \bar{T}_{22}^2, \bar{T}_{12}^2, \bar{T}_{12} (\bar{T}_{11} - \bar{T}_{22})).$$

*(K<sub>3</sub>)-Квазитрансверсально-изотропный класс* ( $m = 2$ ,  $m_2 = 3$ ,  $m_3 = 1$ ):

$$\begin{aligned}S = & (\varphi_1 + I_2 \varphi_6)(E - \bar{e}_3^2) + (\varphi_2 + I_2 \varphi_6)\bar{e}_3^2 + \left( \frac{1}{2} \varphi_3 (O_1 \otimes O_1 + O_2 \otimes O_2) + \right. \\ & + 2\varphi_4 (\bar{e}_1^2 \otimes \bar{e}_1^2 + \bar{e}_2^2 \otimes \bar{e}_2^2) + \varphi_5 \left( \Delta - \frac{1}{2} (O_1 \otimes O_1 + O_2 \otimes O_2) - O_h \right) - \\ & \left. - \varphi_6 I_1 \Delta \right) \cdot T + \varphi_6 T^2, \quad (5.178)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{S}^{ij} = & (\varphi_1 + \varphi_6 I_2) \delta^{ij} + (\varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_5 \bar{T}_{33}) \delta_3^i \delta_3^j + (\varphi_3 - \varphi_5) ((\delta_2^i \delta_3^j + \\ & + \delta_3^i \delta_2^j) \bar{T}_{23} + (\delta_1^i \delta_3^j + \delta_3^i \delta_1^j) \bar{T}_{13}) + (2\varphi_4 - \varphi_5) (\delta_1^i \delta_1^j \bar{T}_{11} + \\ & + \delta_2^i \delta_2^j \bar{T}_{22}) + (\varphi_5 - I_1 \varphi_6) \bar{T}^{ij} + \varphi_6 \bar{T}^{ik} \bar{T}^{kj},\end{aligned}$$

$$\varphi_\gamma = \varphi_\gamma (\bar{T}_{11} + \bar{T}_{22}, \bar{T}_{33}, \bar{T}_{13}^2 + \bar{T}_{23}^2, \bar{T}_{11}^2 + \bar{T}_{22}^2, \bar{T}_{12}^2, \det T).$$

*(A)-Ромбоэдрический класс* ( $m = 2$ ,  $m_2 = 4$ ,  $m_3 = 0$ ):

$$\begin{aligned}S = & \varphi_1 (E - \bar{e}_3^2) + \varphi_2 \bar{e}_3^2 + \left( \frac{1}{2} \varphi_3 (O_1 \otimes O_1 + O_2 \otimes O_2) + \frac{1}{2} \varphi_4 D_3 + \right. \\ & + 2\varphi_5 \left( \Delta - \frac{1}{2} (O_1 \otimes O_1 + O_2 \otimes O_2) - \bar{e}_3^2 \otimes \bar{e}_3^2 \right) + \left. + \frac{1}{2} \varphi_6 \Omega_{3d} \right) \cdot T,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{S}^{ij} = & \varphi_1 \delta^{ij} + (\varphi_2 - \varphi_1 - 2\varphi_5 \bar{T}_{33}) \delta_3^i \delta_3^j + \\ & + (\delta_2^i \delta_3^j + \delta_3^i \delta_2^j) ((\varphi_3 - 2\varphi_5) \bar{T}_{23} - \varphi_4 \bar{T}_{12} + \frac{\varphi_6}{2} (\bar{T}_{11} - \bar{T}_{22})) + \\ & + (\delta_1^i \delta_3^j + \delta_3^i \delta_1^j) ((\varphi_3 - 2\varphi_5) \bar{T}_{13} + \frac{\varphi_4}{2} (\bar{T}_{11} - \bar{T}_{22}) + \varphi_6 \bar{T}_{12}) + \\ & + (\delta_1^i \delta_1^j - \delta_2^i \delta_2^j) (\varphi_4 \bar{T}_{13} + \varphi_6 \bar{T}_{23}) + \\ & + (\delta_1^i \delta_2^j + \delta_2^i \delta_1^j) (\varphi_6 \bar{T}_{13} - \varphi_4 \bar{T}_{23}) + 2\varphi_5 \bar{T}^{ij}, \quad (5.179)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_\gamma = & \varphi_\gamma (\bar{T}_{11} + \bar{T}_{22}, \bar{T}_{33}, \bar{T}_{13}^2 + \bar{T}_{23}^2, \bar{T}_{13} (\bar{T}_{11} - \bar{T}_{22}) - 2\bar{T}_{13} \bar{T}_{23}, \\ & \bar{T}_{11}^2 + \bar{T}_{22}^2 + 2\bar{T}_{12}^2, \bar{T}_{23} (\bar{T}_{11} - \bar{T}_{22}) + 2\bar{T}_{12} \bar{T}_{13}).\end{aligned}$$

(B)-Ромбоэдрический класс ( $m = 2, m_2 = 3, m_3 = 1$ ):

$$\begin{aligned} S &= (\varphi_1 + I_2 \varphi_6)(E - \bar{e}_3^2) + (\varphi_2 + I_2 \varphi_6)\bar{e}_3^2 + \\ &+ \frac{1}{2}(\varphi_3(O_1 \otimes O_1 + O_2 \otimes O_2) + \frac{1}{2}\varphi_4 D_3 + \\ &+ 2\varphi_5(\Delta - \frac{1}{2}(O_1 \otimes O_1 + O_2 \otimes O_2) - \bar{e}_3^2 \otimes \bar{e}_3^2) - \varphi_6 I_1 \Delta) \cdot \cdot T + \varphi_6 T^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{S}^{ij} &= (\varphi_1 + I_2 \varphi_6)\delta^{ij} + (\varphi_2 - \varphi_1 - 2\varphi_5 \bar{T}_{33})\delta_3^i \delta_3^j + \\ &+ ((\varphi_3 - 2\varphi_5)\bar{T}_{23} - \varphi_4 \bar{T}_{12})(\delta_2^i \delta_3^j + \delta_3^i \delta_2^j) + \\ &+ ((\varphi_3 - 2\varphi_5)\bar{T}_{13} + \frac{\varphi_4}{2}(\bar{T}_{11} - \bar{T}_{22}))(\delta_1^i \delta_3^j + \delta_3^i \delta_1^j)(2(\varphi_4 - \varphi_5)\bar{T}_{13} + \\ &+ \varphi_4(\bar{T}_{13}(\delta_1^i \delta_2^j - \delta_2^i \delta_2^j) - \bar{T}_{23}(\delta_1^i \delta_2^j + \delta_2^i \delta_1^j)) + \\ &+ (2\varphi_5 - I_1 \varphi_6)\bar{T}^{ij} + \varphi_6 \bar{T}^{ik} \bar{T}^{kj}, \end{aligned} \quad (5.180)$$

$$\varphi_\gamma = \varphi_\gamma(\bar{T}_{11} + \bar{T}_{22}, \bar{T}_{33}, \bar{T}_{13}^2 + \bar{T}_{23}^2, \bar{T}_{13}(\bar{T}_{11} - \bar{T}_{22}) - 2\bar{T}_{13}\bar{T}_{23}, \\ \bar{T}_{11}^2 + \bar{T}_{22}^2 + 2\bar{T}_{12}^2, \det T).$$

(K)-Квазизотропный класс ( $m = 1, m_2 = 2, m_3 = 3$ ):

$$\begin{aligned} S &= (\varphi_1 + I_2 \varphi_6)E + (2\varphi_2 O_h + \varphi_3(\Delta - O_h - \varphi_6 I_1 \Delta) \cdot \cdot T + \\ &+ (3\varphi_4^6 O_n + 3\varphi_5^6 O_m + \varphi_6 \Delta \cdot \Delta) \cdot \cdot \cdot T \otimes T, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{S}^{ij} &= (\varphi_1 + I_2 \varphi_6)\delta^{ij} + \sum_{\alpha=1}^3(2\varphi_2 - \varphi_3 + 3\varphi_4 \bar{T}_{\alpha\alpha})\delta_\alpha^i \delta_\alpha^j \bar{T}_{\alpha\alpha} + \\ &+ (\varphi_3 - I_1 \varphi_6)\bar{T}^{ij} + \varphi_6 \bar{T}^{ik} \bar{T}^{kj} + \frac{\varphi_5}{2}(\bar{T}_{12} \bar{T}_{13}(\delta_2^i \delta_3^j + \delta_3^i \delta_2^j) + \\ &+ \bar{T}_{12} \bar{T}_{23}(\delta_1^i \delta_3^j + \delta_3^i \delta_1^j) + \bar{T}_{13} \bar{T}_{23}(\delta_1^i \delta_2^j + \delta_2^i \delta_1^j)), \end{aligned} \quad (5.181)$$

$$\varphi_\gamma = \varphi_\gamma(\bar{T}_{11} + \bar{T}_{22} + \bar{T}_{33}, \bar{T}_{11}^2 + \bar{T}_{22}^2 + \bar{T}_{33}^2, \bar{T}_{13}^2 + \bar{T}_{23}^2 + \bar{T}_{12}^2, \\ \bar{T}_{11}^3 + \bar{T}_{22}^2 + \bar{T}_{33}^2, \bar{T}_{23} \bar{T}_{13} \bar{T}_{23}, \det T).$$

(H)-Гексагональный и (T<sub>3</sub>)-Трансверсально-изотропный классы ( $m = 2, m_2 = 2, m_3 = 1$ ):

$$\begin{aligned} S &= (\varphi_1 + I_2 \varphi_5)(E - \bar{e}_3^2) + (\varphi_2 + I_2 \varphi_5)\bar{e}_3^2 + \left(\frac{1}{2}\varphi_3(O_1 \otimes O_1 + O_2 \otimes O_2) + \right. \\ &\left. + 2\varphi_4(\Delta - \frac{1}{2}(O_1 \otimes O_1 + O_2 \otimes O_2) - \bar{e}_3^2 \otimes \bar{e}_3^2 - \varphi_5 I_1 \Delta)\right) \cdot \cdot T + \varphi_5 T^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{S}^{ij} &= (\varphi_1 + I_2 \varphi_5) \delta^{ij} + (\varphi_2 - \varphi_1 - 2\varphi_4 \bar{T}_{33}) \delta_3^i \delta_3^j + \\ &+ (\varphi_3 - 2\varphi_4)((\delta_2^i \delta_3^j + \delta_3^i \delta_2^j) \bar{T}_{23} + (\delta_1^i \delta_3^j + \delta_3^i \delta_1^j) \bar{T}_{13}) + \\ &+ (2\varphi_4 - I_1 \varphi_5) \bar{T}^{ij} + \varphi_5 \bar{T}^{ik} \bar{T}^{kj}, \\ \varphi_\gamma &= \varphi_\gamma(\bar{T}_{11} + \bar{T}_{22}, \bar{T}_{33}, \bar{T}_{13}^2 + \bar{T}_{23}^2, \bar{T}_{11}^2 + \bar{T}_{22}^2 + 2\bar{T}_{12}^2, \det T).\end{aligned}\quad (5.182)$$

(I)-Изотропный класс ( $m = 1, m_2 = 1, m_3 = 1$ ):

$$\begin{aligned}S &= (\varphi_1 + I_1 \varphi_2 + I_2 \varphi_3) E - (\varphi_2 + I_1 \varphi_3) T + \varphi_3 T^2, \\ \bar{S}^{ij} &= (\varphi_1 + I_1 \varphi_2 + \varphi_3) \delta^{ij} - (\varphi_2 + I_1 \varphi_3) \bar{T}^{ij} + \varphi_3 \bar{T}^{ik} \bar{T}^{kj}, \\ \varphi_\gamma &= \varphi_\gamma(I_1(T), I_2(T), I_3(T)).\end{aligned}\quad (5.183)$$

Функции  $\varphi_\gamma$  во всех соотношениях (5.174)-(5.183) потенциальны, т.е. удовлетворяют соотношениям взаимности:

$$\frac{\partial \varphi_\gamma}{\partial I_\beta^{(s)}} = \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial I_\gamma^{(s)}}. \quad (5.184)$$

Сделаем ряд замечаний к представленным выше выражениям.

- В двух классах симметрии,  $M$ -моноклинном и  $O$ -ортотропном, потенциал  $\psi$ , а, следовательно, и коэффициенты  $\varphi_\gamma$ , удобно рассматривать как функции не шести, а семи инвариантов (среди которых, естественно, только шесть независимых): в  $M$ -классе добавлен инвариант  $I_7^{(M)} = T_{23}^2$ , а в  $O$ -классе – инвариант  $I_7^{(O)} = T_{12}^2$ . В этом случае выражения для потенциальных функций  $S^{ij}(T^{kl})$  становятся симметричными: в  $M$ -классе – по отношению к индексам 1 и 2, а в  $O$ -классе – по отношению ко всем трем индексам.
- Инварианты  $I_1$  и  $I_2$ , входящие в представленные выше тензорные функции, всегда могут быть выражены через инварианты  $I_\gamma^{(s)}$  соответствующего класса симметрии (см. упражнения к §4.5).

### Упражнения к § 5.3.

**Упражнение 5.3.1.** Исходя из общего представления (5.172) потенциальных тензорных функций и формул п.5.2.6 для тензоров производных  $\partial I_\gamma^{(s)} / \partial T$ , доказать справедливость представлений тензорных функций для различных групп  $G_s$ , приведенных в п.5.3.6.

## § 5.4. Квазилинейные тензорные функции

### 5.4.1. Определение квазилинейных функций

Рассмотрим потенциальную тензорную функцию второго ранга (5.165). Как было показано в п.5.3.5, ее всегда можно представить в виде разложения (5.172) по тензорному базису относительно каждого класса симметрии.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.9.** Частный класс тензорных потенциальных функций (5.141), для которых разложение (5.172) по тензорному базису содержит только тензорные степени не старше первого порядка, т.е.  $E$  и  $T$ :

$$S = \sum_{\gamma=1}^m \varphi_{\gamma} \Omega_{\gamma}^{(s)} + 2 \sum_{\gamma=m+1}^q \varphi_{\gamma} {}^4 \Omega_{\gamma}^{(s)(\cdot)} \cdot T, \quad (5.185)$$

называется классом квазилинейных потенциальных функций.

Из (5.172) и (5.185) следует, что для квазилинейных потенциальных функций:

$$\varphi_{\gamma} = \frac{\partial \psi}{\partial I_{\gamma}} = 0, \quad \gamma = q + 1, \dots, r, \quad (5.186)$$

т.е. потенциал зависит, вообще говоря, не от всего набора инвариантов  $I_{\gamma}^{(s)}$  данной группы  $G_s$ , а только от линейных и квадратичных инвариантов:

$$\psi = \psi(I_1(T), \dots, I_q(T)). \quad (5.187)$$

Заметим, что, вообще говоря, понятие квазилинейности, или иначе тензорной линейности, может быть распространено и на непотенциальные тензорные функции, об этом пойдет речь в § 5.7.

#### 5.4.2. Квазилинейные функции различных классов симметрии

Рассматривая разложения потенциальных функций по тензорному базису для различных классов симметрии, представленных в п. 5.3.6, нетрудно заметить, что для некоторых классов тензорные функции являются квазилинейными, без дополнительных допущений вида (5.187). Очевидно, что это те классы, у которых потенциал  $\psi$  не зависит от кубических инвариантов. Итак, для

- триклинического ( $E$ ),
- моноклинического ( $M$ ),
- тетрагонального ( $T$ ),
- $A$ -ромбоэдрического ( $A$ )

классов потенциальные функции являются квазилинейными, и их разложения (5.172) и (5.185) по тензорному базису совпадают.

Остальные классы содержат кубические инварианты. Ниже приведены разложения квазилинейных тензорных функций по тензорному базису для этих классов.

(O)-Ортотропный класс:

$$S = \sum_{\gamma=1}^3 (\varphi_{\gamma} \bar{e}_{\gamma}^2 + \frac{1}{2} \varphi_{3+\gamma} (\mathbf{O}_{\gamma} \otimes \mathbf{O}_{\gamma}) \cdot \cdot T), \quad (5.188)$$

$$\bar{S}^{ij} = \sum_{\gamma=1}^3 (\varphi_\gamma \delta_\gamma^i \delta_\gamma^j + \frac{1}{2} \varphi_{3+\gamma} (\delta_\alpha^i \delta_\beta^j + \delta_\beta^i \delta_\alpha^j) \bar{T}_{\alpha\beta}),$$

$$\varphi_\gamma = \varphi_\gamma (\bar{T}_{11}, \bar{T}_{22}, \bar{T}_{33}, \bar{T}_{23}^2, \bar{T}_{13}^2, \bar{T}_{12}^2).$$

(K<sub>3</sub>)-Квазитрансверсально-изотропный класс:

$$S = \varphi_1(E - \bar{e}_3^2) + \varphi_2 \bar{e}_3^2 + \left( \frac{1}{2} \varphi_3(O_1 \otimes O_1 + O_2 \otimes O_2) + 2\varphi_4(\bar{e}_1^2 \otimes \bar{e}_1^2 + \bar{e}_2^2 \otimes \bar{e}_2^2) + \varphi_5 \left( \Delta - \frac{1}{2}(O_1 \otimes O_1 + O_2 \otimes O_2) - O_h \right) \right) \cdot T, \quad (5.189)$$

$$\bar{S}^{ij} = \varphi_1 \delta^{ij} + (\varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_5 \bar{T}_{33}) \delta_3^i \delta_3^j + (\varphi_3 - \varphi_5) ((\delta_2^i \delta_3^j + \delta_3^i \delta_2^j) \bar{T}_{23} + (\delta_1^i \delta_3^j + \delta_3^i \delta_1^j) \bar{T}_{13}) + (2\varphi_4 - \varphi_5) (\delta_1^i \delta_1^j \bar{T}_{11} + \delta_2^i \delta_2^j \bar{T}_{22}) + \varphi_5 \bar{T}^{ij},$$

$$\varphi_\gamma = \varphi_\gamma (\bar{T}_{11} + \bar{T}_{22}, \bar{T}_{33}, \bar{T}_{13}^2 + \bar{T}_{23}^2, \bar{T}_{11}^2 + \bar{T}_{22}^2, \bar{T}_{12}^2).$$

(B)-Ромбоэдрический класс:

$$S = \varphi_1(E - \bar{e}_3^2) + \varphi_2 \bar{e}_3^2 + \left( \varphi_3(O_1 \otimes O_1 + O_2 \otimes O_2) + \frac{1}{2} \varphi_4 D_3 + 2\varphi_5 \left( \Delta - \frac{1}{2}(O_1 \otimes O_1 + O_2 \otimes O_2) - \bar{e}_3^2 \otimes \bar{e}_3^2 \right) \right) \cdot T, \quad (5.190)$$

$$\bar{S}^{ij} = \varphi_1 \delta^{ij} + (\varphi_2 - \varphi_1 - 2\varphi_5 \bar{T}_{33}) \delta_3^i \delta_3^j + (2(\varphi_3 - \varphi_5) \bar{T}_{23} - \varphi_4 \bar{T}_{12}) (\delta_2^i \delta_3^j + \delta_3^i \delta_2^j) + (2(\varphi_3 - \varphi_5) \bar{T}_{13} + \frac{\varphi_4}{2} (\bar{T}_{11} - \bar{T}_{22})) (\delta_1^i \delta_3^j + \delta_3^i \delta_1^j) + \varphi_4 (\bar{T}_{13} (\delta_1^i \delta_1^j - \delta_2^i \delta_2^j) - \bar{T}_{23} (\delta_1^i \delta_2^j + \delta_2^i \delta_1^j)) + 2\varphi_5 \bar{T}^{ij},$$

$$\varphi_\gamma = \varphi_\gamma (\bar{T}_{11} + \bar{T}_{22}, \bar{T}_{33}, \bar{T}_{13}^2 + \bar{T}_{23}^2, \bar{T}_{13} (\bar{T}_{11} - \bar{T}_{22}) - 2\bar{T}_{13} \bar{T}_{23}, \bar{T}_{11}^2 + \bar{T}_{22}^2 + 2\bar{T}_{12}^2).$$

(K)-Квазизотропный класс:

$$S = \varphi_1 E + (2\varphi_2 O_h + \varphi_3 (\Delta - O_h)) \cdot T, \quad (5.191)$$

$$\bar{S}^{ij} = \varphi_1 \delta^{ij} + \sum_{\alpha=1}^3 (2\varphi_2 - \varphi_3) \delta_\alpha^i \delta_\alpha^j \bar{T}_{\alpha\alpha} + \varphi_3 \bar{T}^{ij},$$

$$\varphi_\gamma = \varphi_\gamma(\bar{T}_{11} + \bar{T}_{22} + \bar{T}_{33}, \bar{T}_{11}^2 + \bar{T}_{22}^2 + \bar{T}_{33}^2, \bar{T}_{13}^2 + \bar{T}_{23}^2 + \bar{T}_{12}^2).$$

(H)-Гексагональный и ( $T_3$ )-Трансверсально-изотропный классы:

$$\begin{aligned} S = & \varphi_1(E - \bar{e}_3^2) + \varphi_2 \bar{e}_3^2 + \left( \varphi_3(O_1 \otimes O_1 + O_2 \otimes O_2) + \right. \\ & \left. + 2\varphi_4(\Delta - \frac{1}{2}(O_1 \otimes O_1 + O_2 \otimes O_2) - \bar{e}_3^2 \otimes \bar{e}_3^2) \right) \cdot T, \end{aligned} \quad (5.192)$$

$$\begin{aligned} \bar{S}^{ij} = & \varphi_1 \delta^{ij} + (\varphi_2 - \varphi_1 - 2\varphi_4 \bar{T}_{33}) \delta_3^i \delta_3^j + 2(\varphi_3 - \varphi_4) ((\delta_2^i \delta_3^j + \delta_3^i \delta_2^j) \bar{T}_{23} + \\ & + (\delta_1^i \delta_3^j + \delta_3^i \delta_1^j) \bar{T}_{13}) + 2\varphi_4 \bar{T}^{ij}, \end{aligned}$$

$$\varphi_\gamma = \varphi_\gamma(\bar{T}_{11} + \bar{T}_{22}, \bar{T}_{33}, \bar{T}_{13}^2 + \bar{T}_{23}^2, \bar{T}_{11}^2 + \bar{T}_{22}^2 + 2\bar{T}_{12}^2).$$

(I)-Изотропный класс:

$$S = (\varphi_1 + I_1 \varphi_2) E - \varphi_2 T, \quad (5.193)$$

$$\bar{S}^{ij} = (\varphi_1 + I_1 \varphi_2) \delta^{ij} - \varphi_2 \bar{T}^{ij},$$

$$\varphi_\gamma = \varphi_\gamma(I_1, I_2).$$

Для ортотропной квазилинейной функции потенциал  $\psi$  и коэффициенты  $\varphi_\gamma$ ,  $\gamma = 1, \dots, 6$  зависят от шести независимых инвариантов, в число которых не входит кубический инвариант  $T_{12}T_{23}T_{13}$ .

### 5.4.3. Представление квазилинейных функций с помощью тензора четвертого ранга

Квазилинейные функции можно сделать действительно совпадающими по форме с соответствующими линейными тензорными функциями, описанными в п. 5.1.9. Для этого следует преобразовать функции  $\varphi_\gamma$  таким образом, чтобы можно было выделить симметричный тензор четвертого ранга  ${}^4C$  при  $T$  в квазилинейных функциях п. 5.3.6 и 5.4.2. Проделаем эти операции для каждого класса, начиная с изотропного.

(I)-Изотропный класс:

В формуле (5.193) введем две новые функции  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , зависящие от инвариантов  $I_1$ ,  $I_2$ :

$$\lambda_1(I_1, I_2) = \varphi_2 + \frac{\varphi_1}{I_1}, \quad \lambda_2(I_1, I_2) = -2\varphi_2, \quad (5.194)$$

тогда расшифровывая линейный инвариант  $I_1 = \mathbf{E} \cdot \cdot \mathbf{T}$ , преобразуем (5.193) к следующему виду:

$$\mathbf{S} = \lambda_1 I_1 \mathbf{E} + 2\lambda_2 \Delta \cdot \cdot \mathbf{T} = (\lambda_1 \mathbf{E} \otimes \mathbf{E} + 2\lambda_2 \Delta) \cdot \cdot \mathbf{T} = {}^4\mathbf{C} \cdot \cdot \mathbf{T}, \quad (5.195)$$

где тензор четвертого ранга  ${}^4\mathbf{C}$  определен по формуле (5.81). Однако, в отличие от линейной тензорной функции, для квазилинейной функции коэффициенты  $\lambda_1, \lambda_2$  уже не константы, а некоторые функции инвариантов  $I_1, I_2$ .

### (K)-Кубический класс:

В формуле (5.191) введем три новые функции:

$$\lambda_1 = \frac{\varphi_1}{I_1}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}\varphi_3, \quad \lambda_3 = 2\varphi_2 - \varphi_3, \quad (5.196)$$

тогда (5.191) можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \lambda_1 I_1 \mathbf{E} + (2\lambda_2 \Delta + \lambda_3 \mathbf{O}_h) \cdot \cdot \mathbf{T} = \\ &= (\lambda_1 \mathbf{E} \otimes \mathbf{E} + 2\lambda_2 \Delta + \lambda_3 \mathbf{O}_h) \cdot \cdot \mathbf{T} = {}^4\mathbf{C} \cdot \cdot \mathbf{T}. \end{aligned} \quad (5.197)$$

Тензор  ${}^4\mathbf{C}$  здесь совпадает с соответствующим тензором (5.80).

### (H)-Гексагональный и $T_3$ -Трансверсально-изотропный классы:

Представим функции  $\varphi_1 \dots \varphi_4$  в формулах (5.192) следующим образом:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \lambda_1(I_1^{(H)} + I_2^{(H)}) + \lambda_3 I_2^{(H)}, \\ \varphi_2 - \varphi_1 - 2\varphi_4 I_2^{(H)} &= \lambda_2 I_2^{(H)} + \lambda_3(I_1^{(H)} + I_2^{(H)}), \\ \lambda_4 &= \varphi_3 - \varphi_4, \quad \varphi_4 = \lambda_5, \end{aligned} \quad (5.198)$$

где  $\lambda_1 \dots \lambda_5$  функции инвариантов  $I_1^{(H)} \dots I_4^{(H)}$ , тогда (5.192) можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= (\lambda_1(I_1^{(H)} + I_2^{(H)}) + \lambda_3 I_2^{(H)}) \mathbf{E} + (\lambda_2 I_2^{(H)} + \lambda_3(I_1^{(H)} + I_2^{(H)})) \bar{\mathbf{e}}_3^2 + \\ &+ (\lambda_4(\mathbf{O}_1 \otimes \mathbf{O}_1 + \mathbf{O}_2 \otimes \mathbf{O}_2) + 2\lambda_5 \Delta) \cdot \cdot \mathbf{T}. \end{aligned} \quad (5.199)$$

Расшифровывая линейные инварианты  $I_1^{(H)} + I_2^{(H)} = \mathbf{E} \cdot \cdot \mathbf{T}$ ,  $I_2^{(H)} = \mathbf{T} \cdot \cdot \bar{\mathbf{e}}_3^2$ , получаем:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= (\lambda_1 \mathbf{E} \otimes \mathbf{E} + \lambda_2 \bar{\mathbf{e}}_3^2 \otimes \bar{\mathbf{e}}_3^2 + \lambda_3(\mathbf{E} \otimes \bar{\mathbf{e}}_3^2 + \bar{\mathbf{e}}_3^2 \otimes \mathbf{E}) + \\ &+ \lambda_4(\mathbf{O}_1 \otimes \mathbf{O}_1 + \mathbf{O}_2 \otimes \mathbf{O}_2) + 2\lambda_5 \Delta) \cdot \cdot \mathbf{T} = {}^4\mathbf{C} \cdot \cdot \mathbf{T}. \end{aligned} \quad (5.200)$$

Тензор  ${}^4\mathbf{C}$  совпадает с соответствующим тензором (5.79).

(B)-Ромбоэдрический класс:

Введем шесть функций  $\lambda_1 \dots \lambda_6$  от инвариантов  $I_{\gamma}^{(B)}$ , представляя функции  $\varphi_1 \dots \varphi_5$  в формулах (5.190) в виде:

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \lambda_1(I_1^{(B)} + I_2^{(B)}) + \lambda_3 I_2^{(B)}, \\ \varphi_2 - \varphi_1 - 2\varphi_5 I_2^{(B)} &= \lambda_2 I_2^{(B)} + \lambda_3(I_1^{(B)} + I_2^{(B)}), \\ \varphi_3 - \varphi_5 &= \lambda_4, \quad \varphi_4 = 2\lambda_5, \quad \varphi_5 = \lambda_6.\end{aligned}\quad (5.201)$$

Тогда после расшифровки линейных инвариантов  $I_1^{(B)} + I_2^{(B)} = \mathbf{E} \cdot \cdot \mathbf{T}$ ,  $I_2^{(B)} = \mathbf{T} \cdot \cdot \bar{\mathbf{e}}_3^2$ , приводим (5.190) к виду:

$$\begin{aligned}\mathbf{S} &= (\lambda_1 \mathbf{E} \otimes \mathbf{E} + \lambda_2 \bar{\mathbf{e}}_3^2 \otimes \bar{\mathbf{e}}_3^2 + \lambda_3 (\mathbf{E} \otimes \bar{\mathbf{e}}_3^2 + \bar{\mathbf{e}}_3^2 \otimes \mathbf{E}) + \\ &+ \lambda_4 (\mathbf{O}_1 \otimes \mathbf{O}_1 + \mathbf{O}_2 \otimes \mathbf{O}_2) + \lambda_5 \mathbf{D}_5 + 2\lambda_6 \Delta) \cdot \cdot \mathbf{T} = {}^4\mathbf{C} \cdot \cdot \mathbf{T}.\end{aligned}\quad (5.202)$$

Тензор  ${}^4\mathbf{C}$  также совпадает с соответствующим тензором (5.78).

(A)-Ромбоэдрический класс:

Семь функций  $\lambda_1 \dots \lambda_7$  от инвариантов  $I_{\gamma}^{(A)}$  вводятся в формулах (5.179) следующим образом:

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \lambda_1(I_1^{(A)} + I_2^{(A)}) + \lambda_3 I_2^{(A)}, \\ \varphi_2 - \varphi_1 - 2\varphi_5 I_2^{(A)} &= \lambda_2 I_2^{(A)} + \lambda_3(I_1^{(A)} + I_2^{(A)}), \\ \varphi_3 - \varphi_5 &= \lambda_4, \quad \varphi_4 = 2\lambda_5, \\ \varphi_5 &= \lambda_6, \quad \varphi_6 = 2\lambda_7.\end{aligned}\quad (5.203)$$

Тогда аналогично (5.202) приводим (5.179) к виду:

$$\mathbf{S} = {}^4\mathbf{C} \cdot \cdot \mathbf{T}, \quad (5.204)$$

где тензор  ${}^4\mathbf{C}$  определяется формулой (5.77).

(K<sub>3</sub>)-Квазитрансверсально-изотропный класс:

Шесть функций  $\lambda_1 \dots \lambda_6$  от инвариантов  $I_{\gamma}^{(K)}$  вводятся в формулах (5.189) следующим образом:

$$\varphi_1 = \lambda_1 I_1^{(K)} + \lambda_3 I_2^{(K)},$$

$$\begin{aligned}\varphi_2 - \varphi_1 - 2\varphi_4 I_2^{(K)} &= \lambda_2 I_2^{(K)} + \lambda_3 I_1^{(K)}, \\ \varphi_3 - \frac{\varphi_5}{2} &= \lambda_4, \quad 2\varphi_4 - \varphi_5 = \lambda_5, \quad \varphi_5 = 2\lambda_6,\end{aligned}\tag{5.205}$$

тогда формулу (5.189) можно привести к виду (5.204), в которой тензор  ${}^4C$  определяется формулой (5.76).

(T)-Тетрагональный класс:

Семь функций  $\lambda_1 \dots \lambda_7$  от инвариантов  $I_\gamma^{(T)}$  вводятся в формулах (5.177) следующим образом:

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \lambda_1 I_1^{(T)} + \lambda_3 I_2^{(T)}, \\ \varphi_2 - \varphi_1 - 2\varphi_4 I_2^{(T)} &= \lambda_2 I_2^{(T)} + \lambda_3 I_1^{(T)}, \\ \varphi_3 - \varphi_5 &= 2\lambda_4, \quad 2\varphi_4 - \varphi_5 = \lambda_5, \\ \varphi_5 &= 2\lambda_6, \quad \varphi_6 = 2\lambda_7,\end{aligned}\tag{5.206}$$

тогда функцию (5.177) можно привести к виду (5.204), в котором тензор  ${}^4C$  определяется формулой (5.75).

(O)-Ортотропный класс:

Девять функций  $\lambda_1 \dots \lambda_9$  от инвариантов  $I_\gamma^{(O)}$  вводятся в формулах (5.188) следующим образом:

$$\begin{aligned}\varphi_\alpha &= \lambda_\alpha I_\alpha^{(O)} + \lambda_{3+\gamma} I_\beta^{(O)} + \lambda_{3+\beta} I_\gamma^{(O)}, \quad \alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha, \quad \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3; \\ \varphi_{\alpha+3} &= 2\lambda_{6+\alpha}.\end{aligned}\tag{5.207}$$

Тогда расшифровывая линейные инварианты  $I_\gamma^{(O)} = T \cdot \bar{e}_\gamma^2$ , приводим (5.188) к виду:

$$\begin{aligned}S &= \sum_{\alpha=1}^3 (\lambda_\alpha I_\alpha^{(O)} + \lambda_{3+\gamma} I_\beta^{(O)} + \lambda_{3+\beta} I_\gamma^{(O)}) \bar{e}_\alpha^2 + \lambda_{6+\alpha} (\mathbf{O}_\alpha \otimes \mathbf{O}_\alpha) \cdot T = \\ &= \sum_{\alpha=1}^3 (\lambda_\alpha \bar{e}_\alpha^2 \otimes \bar{e}_\alpha^2 + \lambda_{3+\gamma} (\bar{e}_\beta^2 \otimes \bar{e}_\gamma^2 + \bar{e}_\gamma^2 \otimes \bar{e}_\beta^2)) + \lambda_{6+\alpha} (\mathbf{O}_\alpha \otimes \mathbf{O}_\alpha) \cdot T = \\ &= {}^4C \cdot T.\end{aligned}\tag{5.208}$$

Здесь тензор  ${}^4C$  определяется формулой (5.74).

*(M)*-Моноклинный класс:

Тринадцать функций  $\lambda_1 \dots \lambda_{13}$  от инвариантов  $I_\gamma^{(M)}$  вводятся в формулах (5.175) следующим образом:

$$\begin{aligned}\varphi_\alpha &= \lambda_\alpha I_\alpha^{(M)} + \lambda_{3+\gamma} I_\beta^{(M)} + \lambda_{3+\beta} I_\gamma^{(M)} + 2\lambda_{9+\alpha} I_4^{(M)}, \\ \varphi_4 &= 2 \sum_{\alpha=1}^3 \lambda_{9+\alpha} I_\alpha^{(M)} + 4\lambda_9 I_4^{(M)}, \quad \varphi_5 = \lambda_8, \\ \varphi_6 &= \lambda_{13}, \quad \varphi_7 = \lambda_7, \\ \alpha &\neq \beta \neq \gamma \neq \alpha, \quad \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3.\end{aligned}\quad (5.209)$$

Расшифровывая линейные инварианты  $I_\alpha^{(M)} = \mathbf{T} \cdot \cdot \bar{\mathbf{e}}_\alpha^2$ ,  $I_4^{(M)} = (1/2)\mathbf{T} \cdot \cdot \mathbf{O}_3$ , преобразуем выражение (5.175) к виду:

$$\begin{aligned}\mathbf{S} &= \sum_{\alpha=1}^3 ((\lambda_\alpha I_\alpha^{(M)} + \lambda_{3+\gamma} I_\beta^{(M)} + \lambda_{3+\beta} I_\gamma^{(M)}) \bar{\mathbf{e}}_\alpha^2 + \\ &+ \lambda_{9+\alpha} I_\alpha^{(M)} \mathbf{O}_3 + \lambda_{6+\alpha} (\mathbf{O}_\alpha \otimes \mathbf{O}_\alpha) + \lambda_{13} (\mathbf{O}_1 \otimes \mathbf{O}_2 + \mathbf{O}_2 \otimes \mathbf{O}_1)) \cdot \cdot \mathbf{T} = \\ &= \left( \sum_{\alpha=1}^3 (\lambda_\alpha \bar{\mathbf{e}}_\alpha^2 \otimes \bar{\mathbf{e}}_\alpha^2 + \lambda_{3+\alpha} (\bar{\mathbf{e}}_\beta^2 \otimes \bar{\mathbf{e}}_\gamma^2 + \bar{\mathbf{e}}_\gamma^2 \otimes \bar{\mathbf{e}}_\beta^2) + \lambda_{6+\alpha} \mathbf{O}_\alpha \otimes \mathbf{O}_\alpha + \right. \\ &\quad \left. + \lambda_{9+\alpha} (\bar{\mathbf{e}}_\alpha^2 \otimes \mathbf{O}_3 + \mathbf{O}_3 \otimes \bar{\mathbf{e}}_\alpha^2)) + \lambda_{13} (\mathbf{O}_1 \otimes \mathbf{O}_2 + \mathbf{O}_2 \otimes \mathbf{O}_1) \right) \cdot \cdot \mathbf{T} = \\ &= {}^4\mathbf{C} \cdot \cdot \mathbf{T}.\end{aligned}\quad (5.210)$$

Тензор  ${}^4\mathbf{C}$  совпадает с тензором четвертого ранга, определяемым по формуле (5.73).

*(E)*-Триклинический класс:

Двадцать одна функция  $\lambda_1 \dots \lambda_{21}$  от инвариантов  $I_1^{(E)} \dots I_6^{(E)}$  в формулах (5.174) вводятся следующим образом:

$$\begin{aligned}\varphi_\alpha &= \lambda_\alpha I_\alpha^{(E)} + \lambda_{3+\gamma} I_\beta^{(E)} + \lambda_{3+\beta} I_\gamma^{(E)} + 2\lambda_{9+\alpha} I_4^{(E)} + \\ &\quad + 2\lambda_{12+\alpha} I_5^{(E)} + 2\lambda_{15+\alpha} I_6^{(E)}, \\ \varphi_{3+\alpha} &= 2 \sum_{\omega=1}^3 \lambda_{3\alpha+6+\omega} I_\omega^{(E)} + 4\lambda_{18+\gamma} I_{3+\beta}^{(E)} + 4\lambda_{18+\beta} I_{3+\gamma}^{(E)} + 4\lambda_{6+\alpha} I_{3+\alpha}^{(E)}, \\ \alpha &\neq \beta \neq \gamma \neq \alpha, \quad \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3.\end{aligned}\quad (5.211)$$

Расшифровывая линейные инварианты  $I_\alpha^{(E)} = \mathbf{T} \cdot \cdot \bar{\mathbf{e}}_\alpha^2$ ,  $I_{3+\alpha}^{(E)} = \frac{1}{2}\mathbf{T} \cdot \cdot \mathbf{O}_\alpha$ , убеждаемся, что выражение (5.174) действительно можно привести к виду (5.204), в котором тензор  ${}^4\mathbf{C}$  выражается по формуле (5.71).

#### 5.4.4. Потенциалы линейных тензорных функций

Представление с помощью тензоров четвертого ранга позволяет легко получить из квазилинейной обычную линейную тензорную функцию с образующим тензором  ${}^4C$ , нужно только все  $\lambda_\alpha$  положить константами.

Получим выражение для потенциалов  $\psi$ , которые соответствуют линейной тензорной функции с образующим тензором  ${}^4C$  из п.5.1.9 для каждой группы. Для этого вспомним, что

$$\frac{\partial \psi}{\partial I_\gamma^{(s)}} = \varphi_\gamma, \quad (5.212)$$

и воспользуемся соотношениями между  $\varphi_\gamma$  и  $\lambda_\alpha$ , введенными в п.5.4.3.

*(E)-Триклинический класс:*

Из (5.211) имеем:

$$\frac{\partial \psi}{\partial I_\alpha^{(E)}} = \lambda_\alpha I_\alpha^{(E)} + \lambda_{3+\beta} I_\gamma^{(E)} + \lambda_{3+\gamma} I_\beta^{(E)} + 2 \sum_{\omega=1}^3 \lambda_{3\omega+6+\alpha} I_{3+\omega}^{(E)}, \quad (5.213)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial I_{3+\alpha}^{(E)}} = 2 \sum_{\omega=1}^3 \lambda_{3\alpha+6+\omega} I_\omega^{(E)} + 2\lambda_{18+\gamma} I_{3+\beta}^{(E)} + 2\lambda_{18+\beta} I_{3+\gamma}^{(E)} + 2\lambda_{6+\alpha} I_{3+\alpha}^{(E)}.$$

Решением этой системы уравнений является скалярная функция от инвариантов  $I_\gamma^{(E)}$ :

$$\begin{aligned} \psi = & \sum_{\alpha=1}^3 \left( \frac{1}{2} \lambda_\alpha I_\alpha^{(E)2} + \lambda_{3+\alpha} I_\beta^{(E)} I_\gamma^{(E)} + 2\lambda_{6+\alpha} I_{\alpha+3}^{(E)2} + 4\lambda_{18+\alpha} I_{\beta+3}^{(E)} I_{\gamma+3}^{(E)} + \right. \\ & \left. + 2\lambda_{9+\alpha} I_\alpha^{(E)} I_4^{(E)} + 2\lambda_{12+\alpha} I_\alpha^{(E)} I_5^{(E)} + 2\lambda_{15+\alpha} I_\alpha^{(E)} I_6^{(E)} \right) + \psi_0, \end{aligned} \quad (5.214)$$

которая и является потенциалом линейной тензорной функции в триклиническом классе, а  $\psi_0$  - постоянная интегрирования.

Тензор производной от этой функции имеет вид:

$$\frac{\partial \psi}{\partial T} = {}^4C \cdot \cdot T, \quad (5.215)$$

где тензор  ${}^4C$  определяется формулой (5.71).

**(M)-Моноклинный класс:**

Решением дифференциальных уравнений (5.212) с правой частью из (5.209) является следующая скалярная функция:

$$\psi = \sum_{\alpha=1}^3 \left( \frac{1}{2} \lambda_\alpha I_\alpha^{(M)2} + \lambda_{3+\alpha} I_\beta^{(M)} I_\gamma^{(M)} + 2\lambda_7 I_7^{(M)} + 2\lambda_8 I_5^{(M)} + 2\lambda_9 I_4^{(M)2} + 2\lambda_{9+\alpha} I_\alpha^{(M)} I_4^{(M)} + 2\lambda_{13} I_6^{(M)} \right) + \psi_0. \quad (5.216)$$

Тензор производной от этой функции дает линейную функцию (5.215) с тензором  ${}^4C$ , определяемым по (5.73).

**(O)-Ортотропный класс:**

Потенциал линейной функции имеет вид:

$$\psi = \sum_{\alpha=1}^3 \left( \frac{1}{2} \lambda_\alpha I_\alpha^{(O)2} + \lambda_{3+\alpha} I_\beta^{(O)} I_\gamma^{(O)} + 2\lambda_{6+\alpha} I_{\alpha+3}^{(O)} \right) + \psi_0. \quad (5.217)$$

Тензор производной от этой функции образует линейную функцию (5.215) с тензором  ${}^4C$  (5.74).

Частные производные  $\partial\psi/\partial I_\gamma^{(O)}$  приводят к формулам (5.207), в которых все  $\lambda_\alpha$  следует положить константами.

**(T)-Тетрагональный класс:**

Потенциал линейной функции имеет вид:

$$\psi = \frac{1}{2} (\lambda_1 I_1^{(T)2} + \tilde{\lambda}_2 I_2^{(T)2}) + \tilde{\lambda}_3 I_1^{(T)} I_2^{(T)} + 2\tilde{\lambda}_4 I_3^{(T)} + \tilde{\lambda}_5 I_4^{(T)} + 2\lambda_6 I_5^{(T)} + \lambda_7 I_6^{(T)} + \psi_0. \quad (5.218)$$

Для того чтобы тензор производной от этой функции привел к линейной функции (5.215) с тетрагональным тензором  ${}^4C$ , определяемым по (5.75), необходимо положить:

$$\tilde{\lambda}_2 = \lambda_2 + 3\lambda_1 + 2\lambda_3 + \lambda_5 + 2\lambda_6, \quad \tilde{\lambda}_3 = \lambda_3 + \lambda_1, \quad (5.219)$$

$$\tilde{\lambda}_4 = \lambda_4 + \lambda_6, \quad \tilde{\lambda}_5 = \frac{1}{2}\lambda_5 + \lambda_6.$$

В этом случае частные производные  $\varphi_\gamma = \partial\psi/\partial I_\gamma^{(T)}$  приводят к формулам (5.206), в которых все  $\lambda_\alpha$  также следует считать константами.

(K<sub>3</sub>)-Квазитрансверсально-изотропный класс:

Потенциал имеет вид (5.218), но  $\lambda_7 = 0$ :

$$\begin{aligned}\psi = \frac{1}{2}(\lambda_1 I_1^{(K)2} + \tilde{\lambda}_2 I_2^{(K)2}) + \tilde{\lambda}_3 I_1^{(K)} I_2^{(K)} + 2\tilde{\lambda}_4 I_3^{(K)} + \\ + \tilde{\lambda}_5 I_4^{(K)} + 2\lambda_6 I_5^{(K)} + \psi_0.\end{aligned}\quad (5.220)$$

Тензор производной от  $\psi$  приводит к тензору  ${}^4C$  в виде (5.76), а частные производные  $\partial\psi/\partial I_\gamma^{(K)}$  приводят к формулам (5.205).

(A)-Ромбоздрический класс:

Потенциал линейной функции имеет вид:

$$\begin{aligned}\psi = \frac{1}{2}(\lambda_1 I_1^{(A)2} + \tilde{\lambda}_2 I_2^{(A)2}) + \tilde{\lambda}_3 I_1^{(A)} I_2^{(A)} + 2\tilde{\lambda}_4 I_3^{(A)} + \\ + 2\lambda_5 I_4^{(A)} + \lambda_6 I_5^{(A)} + 2\lambda_7 I_6^{(A)} + \psi_0,\end{aligned}\quad (5.221)$$

$$\tilde{\lambda}_2 = \lambda_2 + 3\lambda_1 + 2\lambda_3 + 2\lambda_6, \quad \tilde{\lambda}_3 = \lambda_1 + \lambda_3, \quad \tilde{\lambda}_4 = \lambda_4 + \lambda_6.$$

Тензор производной от  $\psi$  образует линейную функцию с образующим тензором  ${}^4C$  в форме (5.77), а частные производные  $\partial\psi/\partial I_\gamma^{(A)}$  приводят к формулам (5.203).

(B)-Ромбоздрический класс:

Потенциал имеет вид (5.221), в котором  $\lambda_7 = 0$ :

$$\begin{aligned}\psi = \frac{1}{2}(\lambda_1 I_1^{(B)2} + \tilde{\lambda}_2 I_2^{(B)2}) + \tilde{\lambda}_3 I_1^{(B)} I_2^{(B)} + 2\tilde{\lambda}_4 I_3^{(B)} + \\ + 2\lambda_5 I_4^{(B)} + \lambda_6 I_5^{(B)} + \psi_0,\end{aligned}\quad (5.222)$$

$$\tilde{\lambda}_2 = \lambda_2 + 3\lambda_1 + 2\lambda_3 + 2\lambda_6, \quad \tilde{\lambda}_3 = \lambda_1 + \lambda_3, \quad \tilde{\lambda}_4 = \lambda_4 + \lambda_6,$$

ему соответствует тензор четвертого ранга  ${}^4C$  (5.78) и коэффициенты (5.201).

(H)-Гексагональный и T<sub>3</sub>-Трансверсально-изотропный классы:

Потенциал имеет следующий вид:

$$\psi = \frac{1}{2}(\lambda_1 I_1^{(H)2} + \tilde{\lambda}_2 I_2^{(H)2}) + \tilde{\lambda}_3 I_1^{(H)} I_2^{(H)} + 2\tilde{\lambda}_4 I_3^{(H)} + \lambda_5 I_4^{(H)} + \psi_0, \quad (5.223)$$

$$\tilde{\lambda}_2 = \lambda_2 + 3\lambda_1 + 2\lambda_3 + 2\lambda_5, \quad \tilde{\lambda}_3 = \lambda_1 + \lambda_3, \quad \tilde{\lambda}_4 = \lambda_4 + \lambda_5,$$

ему соответствует тензор четвертого ранга  ${}^4\mathbf{C}$  (5.79) и коэффициенты (5.198).

(K)- Квазизотропный класс:

Потенциал имеет вид:

$$\psi = \frac{1}{2}\lambda_1 I_1^{(Q)} + \left(\lambda_2 + \frac{\lambda_3}{2}\right) I_2^{(Q)} + 2\lambda_2 I_3^{(Q)} + \psi_0, \quad (5.224)$$

ему соответствует тензор  ${}^4\mathbf{C}$  (5.80) и коэффициенты  $\varphi_\gamma$  (5.196).

(I)- Изотропный класс:

Потенциал имеет вид:

$$\psi = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) I_1^2 - \lambda_2 I_2 + \psi_0, \quad (5.225)$$

ему соответствует тензор  ${}^4\mathbf{C}$  (5.81) и коэффициенты  $\varphi_\gamma$  (5.194).

С использованием тензора четвертого ранга  ${}^4\mathbf{C}$  потенциал  $\psi$  для линейных потенциальных функций всех классов симметрии можно представить в виде:

$$\psi = \frac{1}{2} {}^4\mathbf{C} \cdot \cdot \cdot \mathbf{T} \otimes \mathbf{T} + \psi_0. \quad (5.226)$$

В самом деле, рассматривая  $\psi$  как скалярную функцию квадратичного типа (5.116), можем вычислить тензор производной согласно (5.121):

$$\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{T}} = {}^4\mathbf{C}^{(\cdot)} \cdot \cdot \mathbf{T} = {}^4\mathbf{C} \cdot \cdot \mathbf{T} = \mathbf{S}, \quad (5.227)$$

так как  ${}^4\mathbf{C}$  является симметричным тензором четвертого ранга. Таким образом, (5.226) действительно является потенциалом для всех линейных функций (5.227).

## § 5.5. Спектральное представление тензоров второго ранга

### 5.5.1. Определение спектрального представления

Для квазилинейных потенциальных функций можно дать еще одну форму представления, основанную на так называемом спектральном представлении тензоров. Дадим определение этих представлений.

Рассмотрим пространство симметричных тензоров второго ранга  $S_3^{(2)}$ .

**Теорема 5.12.** Пространство  $S_3^{(2)}$  можно разбить на прямую сумму ортогональных подпространств  $\mathcal{P}_{(\alpha)}$ , инвариантных относительно некоторой группы преобразований  $G_s$ , являющейся подгруппой полной ортогональной группы преобразований  $I_0$ :

$$S_3^{(2)} = \mathcal{P}_{(1)} \oplus \dots \oplus \mathcal{P}_{(n)}, \quad G_s \subset I_0. \quad (5.228)$$

Иначе говоря, любой симметричный тензор второго ранга  $T$  можно представить суммой

$$T = \sum_{\alpha=1}^n P_{(\alpha)}, \quad n \leq 6, \quad (5.229)$$

где каждый тензор  $P_{(\alpha)}$  обладает следующими свойствами:

- 1° (прямая сумма подпространств)  $P_{(\alpha)}$  является симметричным тензором второго ранга, принадлежащим подпространству  $\mathcal{P}_{(\alpha)}$ ;
- 2° (ортогональность подпространств)  $P_{(\alpha)}$  – взаимно-ортогональны, т.е.

$$P_{(\alpha)} \cdot P_{(\beta)} = 0, \quad \text{если } \alpha \neq \beta; \quad (5.230)$$

- 3° (инвариантность подпространств)  $P_{(\alpha)}$  является индифферентной тензорной функцией относительно группы преобразований  $G_s$ , т.е.

$$Q^T \cdot P_{(\alpha)}(T) \cdot Q = P_{(\alpha)}(Q^T \cdot T \cdot Q), \quad (5.231)$$

где  $Q$  – тензор линейных преобразований, соответствующий группе преобразований  $G_s$ ;

- 4° тензор  $P_{(\alpha)}$  является линейной тензорной функцией от  $T$ :

$$P_{(\alpha)} = P_{(\alpha)}(T) = {}^4\Gamma_{(\alpha)} \cdot T, \quad \alpha = 1 \dots n. \quad (5.232)$$

Заметим, что формула (5.231) действительно определяет линейное преобразование подпространства  $\mathcal{P}_{(\alpha)}$  в себя, если ее переписать в виде:

$$(Q \otimes Q)^{(2431)} \cdot P_{(\alpha)} = P'_{(\alpha)}, \quad P_{(\alpha)}, P'_{(\alpha)} \in \mathcal{P}_{(\alpha)}. \quad (5.231a)$$

Поскольку  $P'_{(\alpha)} = P_{(\alpha)}(Q^T \cdot T \cdot Q)$  тоже принадлежит  $\mathcal{P}_{(\alpha)}$ , то  $\mathcal{P}_{(\alpha)}$  – действительно инвариантное подпространство относительно преобразования (5.231a). А так как (5.231a) имеет место для любого  $Q \in G_s$ , то  $\mathcal{P}_{(\alpha)}$  – инвариантно относительно группы преобразований.

Возможность представления (5.229) тензора  $T$  докажем ниже конструктивно, т.е. построив в пп. 5.5.3 – 5.5.8 эти представления для различных групп симметрии.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.10.** Представление (5.229), обладающее свойствами 1° – 4°, называют спектральным представлением симметричного тензора второго ранга.

Впервые спектральное представление (5.229) было установлено Б.Е.Победрей.

Тензоры  $P_{(\alpha)}$  называются обобщенными девиаторами или  $p$ -тензорами, причем  ${}^4\Gamma_{(\alpha)}$  – некоторые постоянные тензоры четвертого ранга, не зависящие от  $T$ , а только от образующих тензоров  $O_{s(\gamma)}$  группы симметрии  $G_s$ .

Среди этих  ${}^4\Gamma_{(\alpha)}$  имеются приводимые, т.е. полученные тензорным произведением некоторого симметричного тензора второго ранга  $a_{(\alpha)}$ :

$${}^4\Gamma_{(\alpha)} = \frac{1}{a_\alpha^2} a_{(\alpha)} \otimes a_{(\alpha)}, \quad \alpha = 1 \dots m < n. \quad (5.233)$$

Для тензоров  ${}^4\Gamma_{(\alpha)}$  и  $a_{(\alpha)}$  вводятся инварианты:

$$\Gamma_{(\alpha)}^2 = {}^4\Gamma_{(\alpha)} \cdots {}^4\Gamma_{(\alpha)}, \quad \alpha = m+1 \dots n, \quad (5.234)$$

$$a_\alpha = (a_{(\alpha)} \cdots a_{(\alpha)})^{1/2}, \quad \alpha = 1 \dots m.$$

Из условия индифферентности функции  $P_{(\alpha)}(T)$  следует, что тензоры  ${}^4\Gamma_\alpha$  и  $a_{(\alpha)}$  должны быть индифферентны сами, т.е. должны удовлетворять условиям (4.7), (4.12):

$$Q^T \cdot a_{(\alpha)} \cdot Q = a_{(\alpha)}, \quad {}^4\Gamma_{(\alpha)} = {}^4\Gamma_{(\alpha)} \cdots (Q \otimes Q \otimes Q \otimes Q)^{(75312468)}, \quad (5.235)$$

или в компонентном виде:

$$a_{(\alpha)} = \bar{a}_{(\alpha)}^{ij} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j, \quad \bar{a}_{(\alpha)}^{ij} = \bar{a}_{(\alpha)}^{kl} A^i{}_k A^j{}_l, \quad (5.236)$$

$${}^4\Gamma_{(\alpha)} = \bar{\Gamma}_{(\alpha)}^{i_1 \dots i_4} \bar{e}_{i_1} \otimes \bar{e}_{i_2} \otimes \bar{e}_{i_3} \otimes \bar{e}_{i_4}, \quad \bar{\Gamma}_{(\alpha)}^{i_1 \dots i_4} = \bar{\Gamma}_{(\alpha)}^{j_1 \dots j_4} A^{i_1}_{j_1} \dots A^{i_4}_{j_4},$$

где  $A^i{}_k$  – произвольная матрица преобразований из группы  $G_s$ .

### 5.5.2. Инварианты, связанные со спектральным представлением

Введем с помощью тензоров  $P_{(\alpha)}$  инварианты тензора  $T$ , обозначим их в отличие от инвариантов, введенных в §4.1, как  $Y_\alpha(T)$ . Для тех  $P_{(\alpha)}$ , у которых  ${}^4\Gamma_{(\alpha)}$  является приводимым, инвариант  $Y_\alpha$  вводится как

$$Y_\alpha(T) = \frac{1}{a_\alpha} a_{(\alpha)} \cdots T, \quad \alpha = 1 \dots m, \quad (5.237)$$

причем из (5.232) и (5.233) следует, что

$$P_{(\alpha)} = \frac{1}{a_\alpha} Y_\alpha a_{(\alpha)}, \quad (5.238)$$

а скаляр (5.237) называется *спектральным линейным инвариантом*.

Для остальных  $P_{(\alpha)}$ ,  $\alpha = m+1 \dots n$  инварианты вводятся формулой

$$Y_\alpha(T) = (P_{(\alpha)} \cdot \cdot P_{(\alpha)})^{1/2} \quad (5.239)$$

и называются *спектральными квадратичными инвариантами*. Заметим, что для линейных инвариантов (5.237) также справедлива формула (5.239).

С учетом (5.238), разложение любого тензора второго ранга  $T$  (5.229) может быть представлено в виде

$$T = \sum_{\alpha=1}^m \frac{a_{(\alpha)}}{a_\alpha} Y_\alpha(T) + \sum_{\alpha=m+1}^n P_{(\alpha)}(T). \quad (5.240)$$

Отметим два важных свойства спектральных разложений, которые будут использоваться в дальнейшем.

Умножая скалярно  $P_{(\alpha)}$  на  $T$ , с учетом представления (5.229) и ортогональности  $P_{(\alpha)}$  получаем:

$$P_{(\alpha)} \cdot \cdot T = \sum_{\beta=1}^n P_{(\alpha)} \cdot \cdot P_{(\beta)} = P_{(\alpha)} \cdot \cdot P_{(\alpha)} = Y_\alpha^2, \quad \alpha = 1 \dots n. \quad (5.241)$$

Рассмотрим теперь скалярный квадрат тензора  $T \cdot \cdot T$  и подставим вместо  $T$  спектральное разложение (5.229), тогда с учетом ортогональности  $P_{(\alpha)}$ , получим:

$$I_1(T^2) = T \cdot \cdot T = \sum_{\alpha, \beta=1}^n P_{(\alpha)} \cdot \cdot P_{(\beta)} = \sum_{\alpha=1}^n P_{(\alpha)} \cdot \cdot P_{(\alpha)} = \sum_{\alpha=1}^n Y_\alpha^2, \quad (5.242)$$

т.е. сумма квадратов всех спектральных инвариантов  $Y_\alpha$  всегда образует один и тот же инвариант – след от квадрата тензора:

$$I_1(T^2) = \sum_{\alpha=1}^n Y_\alpha^2. \quad (5.243)$$

### 5.5.3. Спектральное представление для класса изотропии

▼ Докажем теперь теорему 5.12.

Покажем, что введенные в п.5.5.1 спектральные представления существуют. Начнем с класса изотропии - ( $I$ ).

Образующий тензор  $O_{s(\gamma)}$  в этом классе только один (см.п.4.1.8) - это тензор  $E$ . Тогда существует только один тензор второго ранга  $a_{(\alpha)}$ , а  $a_{(1)}$  - его инвариант:

$$a_{(1)} = E, \quad m = 1, \quad a_{(1)} = (E \cdot E)^{1/2} = \sqrt{3}. \quad (5.244)$$

Спектральный линейный инвариант определяется следующим выражением:

$$Y_1(T) = \frac{1}{a_{(1)}} a_{(1)} \cdot T = \frac{1}{\sqrt{3}} T \cdot E = \frac{1}{\sqrt{3}} I_1(T). \quad (5.245)$$

Соответствующий ему тензор  $P_{(1)}$  определяется формулой (5.238):

$$P_{(1)} = \frac{1}{\sqrt{3}} Y_1 a_{(1)} = \frac{1}{3} I_1(T) E. \quad (5.246)$$

Второй обобщенный девиатор строим следующим образом:

$$P_{(2)} = T - \frac{1}{3} I_1 E. \quad (5.247)$$

Соответствующий ему тензор  ${}^4\Gamma_{(2)}$  имеет вид:

$${}^4\Gamma_{(2)} = \Delta - \frac{1}{3} E \otimes E. \quad (5.248)$$

В декартовой системе координат тензоры  $a_{(1)}$  и  ${}^4\Gamma_{(2)}$  имеют вид:

$$\bar{a}_{(1)}^{ij} = \delta^{ij}, \quad \bar{a}_1 = \sqrt{3}, \quad (5.249)$$

$$\bar{\Gamma}_{(2)}^{ijkl} = \frac{1}{2} (\delta^{ik} \delta^{jl} + \delta^{il} \delta^{jk}) - \frac{1}{3} \delta^{ij} \delta^{kl}.$$

Других обобщенных девиаторов в этом классе нет, т.е. число  $n = 2$  для класса изотропии.

Покажем, что построенные таким образом тензоры  $P_{(\alpha)}$  являются *обобщенными девиаторами*.

Проверим справедливость формулы (5.229). В самом деле, складывая тензоры  $P_{(\alpha)}$ , получаем:

$$T = \frac{1}{3}I_1E + (T - \frac{1}{3}I_1E) = P_{(1)} + P_{(2)}. \quad (5.250)$$

Проверим ортогональность  $P_{(1)}$  и  $P_{(2)}$ , т.е. справедливость (5.230):

$$P_{(1)} \cdot \cdot P_{(2)} = \frac{1}{3}I_1E \cdot \cdot (T - \frac{1}{3}I_1E) = \frac{1}{3}(I_1^2 - I_1^2 \frac{1}{3}E \cdot \cdot E) = 0, \quad (5.251)$$

т.к.  $E \cdot \cdot E = 3$ .

В компонентной записи  $P_{(\alpha)}$  тензоры имеют вид:

$$\bar{P}_{(1)}^{ij} = \frac{1}{3}I_1\delta^{ij}, \quad \bar{P}_{(2)}^{ij} = \bar{T}^{ij} - \frac{1}{3}I_1\delta^{ij} \quad (5.252)$$

и

$$\bar{T}^{ij} = \delta_{(1)}^{ij} + \delta_{(2)}^{ij} = \frac{1}{3}I_1\delta^{ij} + \bar{P}_{(2)}^{ij}. \quad (5.253)$$

Представление (5.253) называют *разбиением тензора на шаровую и девиаторную части*.

Спектральный квадратичный инвариант определяем по (5.239):

$$Y_{(2)} = (P_{(2)} \cdot \cdot P_{(2)})^{1/2}. \quad (5.254)$$

Этот инвариант называют *интенсивностью* тензора  $T$ , вычислим его в декартовой системе координат:

$$T_u^2 \equiv Y_2^2 = P_{ij}P_{ij} = \sum_{\alpha=1}^3 P_{\alpha\alpha}^2 + 2(P_{12}^2 + P_{13}^2 + P_{23}^2), \quad (5.255)$$

но  $P_{ij} = \bar{T}_{ij} - (1/3)\bar{T}_{kk}\delta_{ij}$ , поэтому

$$P_{11} = \bar{T}_{11} - \frac{1}{3}(\bar{T}_{11} + \bar{T}_{22} + \bar{T}_{33}) = \frac{1}{3}((\bar{T}_{11} - \bar{T}_{22}) + (\bar{T}_{11} - \bar{T}_{33})),$$

$$P_{22} = \frac{1}{3}((\bar{T}_{22} - \bar{T}_{11}) + (\bar{T}_{22} - \bar{T}_{33})), \quad (5.256)$$

$$P_{33} = \frac{1}{3}((\bar{T}_{33} - \bar{T}_{11}) + (\bar{T}_{33} - \bar{T}_{22})),$$

$$P_{12} = \bar{T}_{12}, \quad P_{13} = \bar{T}_{13}, \quad P_{23} = \bar{T}_{23}.$$

Тогда, подставляя (5.256) в (5.255), после приведения подобных членов получаем

$$\begin{aligned} T_u^2 = & \frac{1}{3} \left( (\bar{T}_{11} - \bar{T}_{22})^2 + (\bar{T}_{11} - \bar{T}_{33})^2 + (\bar{T}_{22} - \bar{T}_{33})^2 + \right. \\ & \left. + 6(\bar{T}_{12}^2 + \bar{T}_{13}^2 + \bar{T}_{23}^2) \right) \end{aligned} \quad (5.257)$$

часто используемое представление второго спектрального инварианта в декартовой системе координат.

#### 5.5.4. Квазизотропный (кубический) класс

Как показано в п.4.1.8, в квазизотропном  $K$ -классе также имеется только один образующий тензор второго ранга – это  $\mathbf{E}$ , поэтому в спектральном представлении число  $m = 1$  и

$$\mathbf{a}_{(1)} = \mathbf{E}, \quad a_1 = \sqrt{3}, \quad m = 1. \quad (5.258)$$

Следовательно, первый обобщенный девиатор  $\mathbf{P}_{(1)}$  такой же, как и в классе изотропии:

$$\mathbf{P}_{(1)} = \frac{1}{\sqrt{3}} Y_1 \mathbf{a}_{(1)}, \quad (5.259)$$

где

$$Y_1(\mathbf{T}) = \frac{1}{\sqrt{3}} I_1(\mathbf{T}). \quad (5.260)$$

Однако, по сравнению с  $I$ -классом, в квазизотропном случае существует еще один дополнительный образующий тензор четвертого ранга – это  $\mathbf{O}_h$  (см.п.4.1.8), следовательно, появляется возможность построения еще одного девиатора:

$$\mathbf{P}_{(3)} = \mathbf{T} - \mathbf{O}_h \cdot \cdot \mathbf{T}. \quad (5.261)$$

Второй девиатор при этом принимает вид:

$$\mathbf{P}_{(2)} = \mathbf{T} - \mathbf{P}_{(1)} - \mathbf{P}_{(3)} = \mathbf{O}_h \cdot \cdot \mathbf{T} - \frac{1}{\sqrt{3}} Y_1 \mathbf{E}. \quad (5.262)$$

Соответствующие тензоры  ${}^4\Gamma_{(\alpha)}$  выражаются следующим образом:

$${}^4\Gamma_{(2)} = \mathbf{O}_h - \frac{1}{3} \mathbf{E} \otimes \mathbf{E}, \quad {}^4\Gamma_{(3)} = \Delta - \mathbf{O}_h. \quad (5.263)$$

Следовательно, общее число обобщенных девиаторов для квазизотропии -  $n = 3$ .

Проверим, что  $P_{(\alpha)}$  обладает всеми свойствами (5.230) – (5.232). Свойство (5.232) очевидно, так же как и индифферентность всех функций  $P_{(\alpha)}(T)$ , так как тензоры  ${}^4\Gamma_{(\alpha)}$  состоят только из индифферентных относительно  $K$ -класса образующих тензоров  $E$ ,  $\Delta$  и  $O_h$ .

Покажем взаимную ортогональность  $P_{(\alpha)}$ , используя свойство (5.241):

$$\begin{aligned} P_{(1)} \cdot \cdot P_{(3)} &= \frac{Y_1}{\sqrt{3}} E \cdot \cdot (T - O_h \cdot \cdot T) = \\ &= I_1(I_1 - \delta^{ij} \sum_{\alpha=1}^3 \delta_\alpha^i \delta_\alpha^j \bar{T}_{\alpha\alpha}) = I_1(I_1 - I_1) = 0, \end{aligned}$$

$$P_{(1)} \cdot \cdot P_{(2)} = P_{(1)} \cdot \cdot T - P_{(1)} \cdot \cdot P_{(1)} = \frac{1}{3}(I_1 - I_1) = 0, \quad (5.264)$$

$$\begin{aligned} P_{(2)} \cdot \cdot P_{(3)} &= (T - O_h \cdot \cdot T) \cdot \cdot (O_h \cdot \cdot T - \frac{1}{3}I_1 E) = \\ &= \left( \sum_{\alpha=1}^3 (\bar{T}_{\alpha\alpha}^2 - \bar{T}_{\alpha\alpha}^2) - \frac{1}{3}I_1^2 + \frac{1}{3}I_1^2 \right) = 0. \end{aligned}$$

Спектральные квадратичные инварианты имеют вид:

$$Y_{(3)} = T \cdot \cdot (T - O_h \cdot \cdot T) = T^2 \cdot \cdot E - O_h \cdot \cdot (T \otimes T) = 2I_3^{(Q)},$$

$$Y_{(2)} = T \cdot \cdot (O_h \cdot \cdot T - \frac{1}{3}I_1 E) = O_h \cdot \cdot (T \otimes T) - \frac{1}{3}I_1^2. \quad (5.265)$$

Запишем теперь обобщенные девиаторы и инварианты в компонентах:

$$\bar{P}_{ij}^{(1)} = \frac{Y_1}{\sqrt{3}} \delta_{ij}, \quad \bar{P}_{ij}^{(2)} = \sum_{\alpha=1}^3 \delta_\alpha^i \delta_\alpha^j \bar{T}_{\alpha\alpha} - \frac{1}{\sqrt{3}} Y_1 \delta_{ij}, \quad (5.266)$$

$$\bar{P}_{ij}^{(3)} = \bar{T}_{ij} - \sum_{\alpha=1}^3 \delta_{i\alpha} \delta_{j\alpha} \bar{T}_{\alpha\alpha}.$$

Тензоры  ${}^4\Gamma_{(\alpha)}$  имеют следующие компоненты:

$$\bar{a}_{(1)ij} = \delta_{ij}, \quad \bar{\Gamma}_{(2)ijkl} = \sum_{\alpha=1}^3 \delta_{i\alpha} \delta_{j\alpha} \delta_{l\alpha} \delta_{k\alpha} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl},$$

$$\bar{\Gamma}_{(3)ijkl} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) - \sum_{\alpha=1}^3 \delta_{i\alpha}\delta_{j\alpha}\delta_{k\alpha}\delta_{l\alpha}. \quad (5.267)$$

Линейный  $Y_1$  и квадратичные  $Y_2, Y_3$  инварианты

$$Y_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\bar{T}_{kk}, \quad Y_3 = \sqrt{2}(\bar{T}_{12}^2 + \bar{T}_{13}^2 + \bar{T}_{23}^2)^{1/2} \quad (5.268).$$

$$Y_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}((\bar{T}_{11} - \bar{T}_{22})^2 + (\bar{T}_{11} - \bar{T}_{33})^2 + (\bar{T}_{22} - \bar{T}_{33})^2)^{1/2}.$$

Матричное представление обобщенных девиаторов:

$$\begin{aligned} \bar{P}_{(1)ij} &= \frac{\bar{T}_{11} + \bar{T}_{22} + \bar{T}_{33}}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & \bar{P}_{(3)ij} &= \begin{pmatrix} 0 & \bar{T}_{12} & 0 \\ \bar{T}_{12} & 0 & \bar{T}_{23} \\ \bar{T}_{13} & \bar{T}_{23} & 0 \end{pmatrix}, \\ \bar{P}_{(2)ij} &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2\bar{T}_{11} - \bar{T}_{22} - \bar{T}_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 2\bar{T}_{22} - \bar{T}_{11} - \bar{T}_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 2\bar{T}_{33} - \bar{T}_{11} - \bar{T}_{22} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.269)$$

### 5.5.5. $(H)$ -Гексагональный и $(T_3)$ -Трансверсально-изотропный классы

В этом классе существует два образующих тензора второго ранга  $O_{(s)\gamma}$  (см.п.4.1.8) – это  $E$  и  $\bar{e}_3^2$ , поэтому можно образовать два тензора  $a_{(\alpha)}$ :

$$a_{(1)} = \bar{e}_3^2 \quad \text{и} \quad a_{(2)} = E - \bar{e}_3^2, \quad m = 2, \quad (5.270)$$

причем их инварианты принимают следующие значения:

$$a_{(1)}^2 = \bar{e}_3 \otimes \bar{e}_3 \cdot \bar{e}_3 \otimes \bar{e}_3 = |\bar{e}_3|^4 = 1, \quad (5.271)$$

$$a_{(2)}^2 = (E - \bar{e}_3 \otimes \bar{e}_3) \cdot (E - \bar{e}_3 \otimes \bar{e}_3) = 3 - 2\bar{e}_3 \cdot \bar{e}_3 + 1 = 3 - 2 + 1 = 2.$$

Им соответствуют линейные спектральные инварианты тензора  $T$ :

$$Y_1(T) = T \cdot \bar{e}_3^2, \quad Y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}T \cdot (E - \bar{e}_3^2) \quad (5.272)$$

и обобщенные девиаторы  $P_{(\alpha)}$

$$P_{(1)} = Y_1 \bar{e}_3 \otimes \bar{e}_3, \quad P_{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}Y_2(E - \bar{e}_3 \otimes \bar{e}_3). \quad (5.273)$$

Полное число ортогональных подпространств  $\mathcal{P}_{(\alpha)}$  в данном случае равно  $n = 4$ , а оставшиеся два  $p$ -тензора вычисляют следующим образом:

$$\mathbf{P}_{(3)} = \mathbf{T} - \frac{1}{\sqrt{2}} Y_2 (\mathbf{E} - \bar{\mathbf{e}}_3^2) + Y_1 \bar{\mathbf{e}}_3^2 - (\mathbf{T} \cdot \bar{\mathbf{e}}_3^2 + \bar{\mathbf{e}}_3^2 \cdot \mathbf{T}), \quad (5.274)$$

$$\mathbf{P}_{(4)} = (\mathbf{T} \cdot \bar{\mathbf{e}}_3^2 + \bar{\mathbf{e}}_3^2 \cdot \mathbf{T}) - 2Y_1 \bar{\mathbf{e}}_3^2.$$

Тензоры  ${}^4\Gamma_{(3)}$  и  ${}^4\Gamma_{(4)}$ , соответствующие этим девиаторам имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} {}^4\Gamma_{(3)} &= \Delta - \frac{1}{2} (\mathbf{E} - \bar{\mathbf{e}}_3^2) \otimes (\mathbf{E} - \bar{\mathbf{e}}_3^2) - \bar{\mathbf{e}}_3^2 \otimes \bar{\mathbf{e}}_3^2 - \frac{1}{2} (\mathbf{O}_1 \otimes \mathbf{O}_1 + \mathbf{O}_2 \otimes \mathbf{O}_2), \\ {}^4\Gamma_{(4)} &= \frac{1}{2} (\mathbf{O}_1 \otimes \mathbf{O}_1 + \mathbf{O}_2 \otimes \mathbf{O}_2). \end{aligned} \quad (5.275)$$

То что эти тензоры соответствуют девиаторам (5.274), проверяется непосредственно умножением  ${}^4\Gamma_{(\alpha)}$  на  $\mathbf{T}$ , при этом следует учесть очевидное соотношение:

$$\mathbf{T} \cdot \bar{\mathbf{e}}_3^2 + \bar{\mathbf{e}}_3^2 \cdot \mathbf{T} = (2\bar{\mathbf{e}}_3^2 \otimes \bar{\mathbf{e}}_3^2 + \frac{1}{2} (\mathbf{O}_1 \otimes \mathbf{O}_1 + \mathbf{O}_2 \otimes \mathbf{O}_2)) \cdot \cdot \mathbf{T}. \quad (5.276)$$

Справедливость (5.229) следует из построения тензоров (5.273) и (5.244).

Проверим ортогональность  $\mathbf{P}_{(\alpha)}$ :

$$\mathbf{P}_{(1)} \cdot \cdot \mathbf{P}_{(2)} = \frac{Y_2 Y_1}{\sqrt{2}} \bar{\mathbf{e}}_3 \otimes \bar{\mathbf{e}}_3 \cdot (\mathbf{E} - \bar{\mathbf{e}}_3 \otimes \bar{\mathbf{e}}_3) = \frac{Y_1 Y_2}{\sqrt{2}} (|\bar{\mathbf{e}}_3|^2 - |\bar{\mathbf{e}}_3|^4) = 0, \quad (5.277)$$

т.к.  $|\bar{\mathbf{e}}_3^2| = 1$ . Аналогично можно установить ортогональность других тензоров  $\mathbf{P}_{(\alpha)}$ .

Запишем выражения для двух спектральных квадратичных инвариантов:

$$\begin{aligned} Y_4^2 &= \mathbf{P}_{(4)} \cdot \cdot \mathbf{P}_{(4)} = (\mathbf{T} \cdot \bar{\mathbf{e}}_3^2 + \bar{\mathbf{e}}_3^2 \cdot \mathbf{T}) \cdot \cdot (\mathbf{T} \cdot \bar{\mathbf{e}}_3^2 + \bar{\mathbf{e}}_3^2 \cdot \mathbf{T}) - \\ &- 4Y_1 (\mathbf{T} \cdot \bar{\mathbf{e}}_3^2 + \bar{\mathbf{e}}_3^2 \cdot \mathbf{T}) \cdot \cdot \bar{\mathbf{e}}_3^2 + 4Y_1^2. \end{aligned} \quad (5.278)$$

Учитывая, что

$$(\mathbf{T} \cdot \bar{\mathbf{e}}_3^2) \cdot \cdot (\mathbf{T} \cdot \bar{\mathbf{e}}_3^2) = (\bar{\mathbf{e}}_3 \cdot \mathbf{T} \cdot \bar{\mathbf{e}}_3)^2 = Y_1^2,$$

$$(\mathbf{T} \cdot \bar{\mathbf{e}}_3^2) \cdot \cdot \bar{\mathbf{e}}_3^2 = (\bar{\mathbf{e}}_3^2 \cdot \mathbf{T}) \cdot \cdot \bar{\mathbf{e}}_3^2 = Y_1, \quad (5.279)$$

$$(\bar{\mathbf{e}}_3^2 \cdot \mathbf{T}) \cdot (\mathbf{T} \cdot \bar{\mathbf{e}}_3^2) = \bar{\mathbf{e}}_3^2 \cdot \mathbf{T}^2,$$

получаем

$$Y_4^2 = 2\bar{\mathbf{e}}_3^2 \cdot \mathbf{T}^2 + 2Y_1^2 - 8Y_1^2 + 4Y_1^2 = 2(\bar{\mathbf{e}}_3^2 \cdot \mathbf{T}^2 - Y_1^2). \quad (5.280)$$

Выражение для инвариантов  $Y_3$  получим с помощью соотношения (5.242):

$$Y_3^2 = I_1(\mathbf{T}^2) - Y_1^2 - Y_2^2 - Y_4^2. \quad (5.281)$$

Запишем компоненты тензоров  $\mathbf{a}_{(\alpha)}$  и  $\Gamma_{(\alpha)}$  в декартовой системе координат:

$$\bar{a}_{(1)ij} = \delta_{i3}\delta_{j3}, \quad \bar{a}_{(1)} = 1,$$

$$\bar{a}_{(2)ij} = \delta_{i1}\delta_{j1} + \delta_{i2}\delta_{j2}, \quad \bar{a}_{(2)} = \sqrt{2}, \quad (5.282)$$

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{(3)ijkl} &= \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) - \frac{1}{2}(\delta_{k1}\delta_{l1} + \delta_{k2}\delta_{l2})(\delta_{i1}\delta_{j1} + \delta_{i2}\delta_{j2}) + \\ &+ \delta_{k3}\delta_{l3}\delta_{i3}\delta_{j3} - \frac{1}{2}(\delta_{ki}\delta_{l3} + \delta_{li}\delta_{k3})\delta_{j3} - \frac{1}{2}(\delta_{kj}\delta_{l3} + \delta_{lj}\delta_{k3})\delta_{i3}, \end{aligned}$$

$$\bar{\Gamma}_{(4)ijkl} = \frac{1}{2}(\delta_{ki}\delta_{l3} + \delta_{li}\delta_{k3})\delta_{j3} + \frac{1}{2}(\delta_{kj}\delta_{l3} + \delta_{lj}\delta_{k3})\delta_{i3} - 2\delta_{k3}\delta_{l3}\delta_{i3}\delta_{j3}.$$

Выражения для обобщенных девиаторов произвольного симметричного тензора  $\mathbf{T}$  имеют вид:

$$\bar{P}_{(1)ij} = \bar{T}_{33}\delta_{i3}\delta_{j3},$$

$$\bar{P}_{(2)ij} = \frac{\bar{T}_{11} + \bar{T}_{22}}{2}(\delta_{ij} - \delta_{i3}\delta_{j3}) = \frac{\bar{T}_{11} + \bar{T}_{22}}{2}(\delta_{i1}\delta_{j1} + \delta_{i2}\delta_{j2}),$$

$$\bar{P}_{(3)ij} = \bar{T}_{ij} - \frac{\bar{T}_{11} + \bar{T}_{22}}{2}(\delta_{i1}\delta_{j1} + \delta_{i2}\delta_{j2}) + \bar{T}_{33}\delta_{i3}\delta_{j3} - (\bar{T}_{i3}\delta_{j3} + \bar{T}_{j3}\delta_{i3}), \quad (5.283)$$

$$\begin{aligned} \bar{P}_{(4)ij} &= \bar{T}_{i3}\delta_{j3} + \bar{T}_{j3}\delta_{i3} - 2\bar{T}_{33}\delta_{i3}\delta_{j3} = \\ &= \bar{T}_{13}(\delta_{i1}\delta_{j3} + \delta_{i3}\delta_{j1}) + \bar{T}_{23}(\delta_{i2}\delta_{j3} + \delta_{i3}\delta_{j2}). \end{aligned}$$

Инварианты  $Y_\alpha$  тензора  $\mathbf{T}$  вычисляются следующим образом:

$$Y_1 = \bar{T}_{33}, \quad Y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{T}_{ij}(\delta_{ij} - \delta_{i3}\delta_{j3}) = \frac{\bar{T}_{11} + \bar{T}_{22}}{\sqrt{2}},$$

$$\begin{aligned} Y_3^2 &= \bar{T}_{ij}\bar{T}_{ij} - \bar{T}_{33}^2 - \frac{1}{2}(\bar{T}_{11} + \bar{T}_{22})^2 - 2\bar{T}_{k3}\bar{T}_{k3} + 2\bar{T}_{33} = \\ &= \frac{1}{2}((\bar{T}_{11} - \bar{T}_{22})^2 + 4\bar{T}_{12}^2), \end{aligned} \quad (5.284)$$

$$Y_4^2 = 2(\bar{T}_{k3}\bar{T}_{k3} - \bar{T}_{33}^2) = 2(\bar{T}_{13}^2 + \bar{T}_{23}^2).$$

Матричное представление обобщенных девиаторов имеет вид:

$$\begin{aligned} \bar{P}_{(1)ij} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{T}_{33} \end{pmatrix}, \quad \bar{P}_{(2)ij} = \frac{\bar{T}_{11} + \bar{T}_{22}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.285) \\ \bar{P}_{(3)ij} &= \begin{pmatrix} (\bar{T}_{11} - \bar{T}_{22})/2 & \bar{T}_{12} & 0 \\ \bar{T}_{12} & (\bar{T}_{22} - \bar{T}_{11})/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \bar{P}_{(4)ij} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \bar{T}_{13} \\ 0 & 0 & \bar{T}_{23} \\ \bar{T}_{13} & \bar{T}_{23} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

### 5.5.6. $(K_3)$ -Квазитрансверсально-изотропный класс

В этом классе так же, как и в  $H$ -классе, имеется два образующих тензора,  $E$  и  $\bar{e}_3^2$ , но число индифферентных тензоров четвертого ранга увеличивается на один за счет тензора  $O_h$ . Следовательно, в данном классе числа  $m$  и  $n$  имеют следующие значения:

$$m = 2, \quad n = 5, \quad (5.286)$$

т.е. имеются два тензора  $a_{(\alpha)}$  и три тензора  ${}^4G_{(\alpha)}$  четвертого ранга.

Тензоры  $a_{(\alpha)}$  аналогичны соответствующим тензорам в  $(H)$  и  $(T_3)$ -классах:

$$a_{(1)} = \bar{e}_3^2, \quad a_{(2)} = E - \bar{e}_3^2, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 2. \quad (5.287)$$

Линейные спектральные инварианты также остаются без изменений:

$$Y_1 = T \cdot \cdot \bar{e}_3^2, \quad Y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} T \cdot \cdot (E - \bar{e}_3^2). \quad (5.288)$$

Соответствующие девиаторы имеют вид:

$$P_{(1)} = Y_1 \bar{e}_3^2, \quad P_{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} Y_2 (E - \bar{e}_3^2). \quad (5.289)$$

Тензоры  ${}^4\Gamma_{(\alpha)}$  для данного класса имеют вид:

$$\begin{aligned} {}^4\Gamma_{(3)} &= \mathbf{O}_h - \bar{\mathbf{e}}_3^2 \otimes \bar{\mathbf{e}}_3^2 - \frac{1}{2}(\mathbf{E} - \bar{\mathbf{e}}_3^2) \otimes (\mathbf{E} - \bar{\mathbf{e}}_3^2), \\ {}^4\Gamma_{(4)} &= \frac{1}{2}(\mathbf{O}_1 \otimes \mathbf{Q}_1 + \mathbf{O}_2 \otimes \mathbf{O}_2), \\ {}^4\Gamma_{(5)} &= \Delta - \mathbf{O}_h - \frac{1}{2}(\mathbf{O}_1 \otimes \mathbf{O}_1 + \mathbf{O}_2 \otimes \mathbf{O}_2). \end{aligned} \quad (5.290)$$

Соответствующие им обобщенные девиаторы выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{(3)} &= \mathbf{T} \cdot \cdot \mathbf{O}_h - Y_1 \bar{\mathbf{e}}_3^2 - \frac{Y_2}{\sqrt{2}}(\mathbf{E} - \bar{\mathbf{e}}_3^2), \\ \mathbf{P}_{(4)} &= \mathbf{T} \cdot \bar{\mathbf{e}}_3^2 + \bar{\mathbf{e}}_3^2 \cdot \mathbf{T} - 2Y_1 \bar{\mathbf{e}}_3^2, \\ \mathbf{P}_{(5)} &= \mathbf{T} - \mathbf{O}_h \cdot \cdot \mathbf{T} - \mathbf{T} \cdot \bar{\mathbf{e}}_3^2 - \bar{\mathbf{e}}_3^2 \cdot \mathbf{T} + 2Y_1 \bar{\mathbf{e}}_3^2. \end{aligned} \quad (5.291)$$

Здесь учтено свойство (5.276).

Введенные таким образом обобщенные инварианты обладают всеми свойствами (5.230) – (5.232) р-тензоров.

Поскольку девиатор  $\mathbf{P}_{(4)}$  такой же, как и для ( $H$ )-класса (см. (5.274)), то и соответствующий ему инвариант сохраняет свой вид (5.280):

$$Y_4^2 = 2(\mathbf{T}^2 \cdot \cdot \bar{\mathbf{e}}_3^2 - Y_1^2). \quad (5.292)$$

Вычислим инвариант  $Y_3^2$ :

$$\begin{aligned} Y_2^2 &= \mathbf{P}_{(3)} \cdot \cdot \mathbf{P}_{(3)} = \mathbf{T} \cdot \cdot \mathbf{O}_h \cdot \cdot \mathbf{O}_h \cdot \cdot \mathbf{T} = +Y_1^2 + Y_2^2 - 2Y_1 \mathbf{T} \cdot \cdot \mathbf{O}_h \cdot \cdot \bar{\mathbf{e}}_3^2 - \\ &- \frac{2}{\sqrt{2}} Y_2 \mathbf{T} \cdot \cdot \mathbf{O}_h \cdot \cdot (\mathbf{E} - \bar{\mathbf{e}}_3^2) = \mathbf{O}_h \cdot \cdot \cdot \mathbf{T} \otimes \mathbf{T} - Y_1^2 - Y_2^2. \end{aligned} \quad (5.293)$$

Пятый инвариант находим из (5.243):

$$Y_5^2 = I_1(\mathbf{T}^2) - 2\mathbf{T}^2 \cdot \cdot \bar{\mathbf{e}}_3^2 - \mathbf{O}_h \cdot \cdot \cdot \mathbf{T} \otimes \mathbf{T} + 2Y_1^2. \quad (5.294)$$

В декартовой системе координат тензоры  $\mathbf{a}_{(\alpha)}$  и  ${}^4\Gamma_{(\alpha)}$  имеют вид:

$$\bar{a}_{(1)ij} = \delta_{i3}\delta_{j3}, \quad \bar{a}_{(2)ij} = \delta_{i1}\delta_{j1} + \delta_{i2}\delta_{j2}, \quad \bar{a}_{(1)} = 1, \quad \bar{a}_{(2)} = \sqrt{2}, \quad (5.295)$$

$$\bar{\Gamma}_{(3)ijkl} = \sum_{\alpha=1}^2 \delta_{i\alpha}\delta_{j\alpha}\delta_{k\alpha}\delta_{l\alpha} - \frac{1}{2}(\delta_{i1}\delta_{j1} + \delta_{i2}\delta_{j2})(\delta_{k1}\delta_{l1} + \delta_{k2}\delta_{l2}),$$

$$\bar{\Gamma}_{(4)ijkl} = \frac{1}{2}(\delta_{ki}\delta_{l3} + \delta_{li}\delta_{k3})\delta_{j3} + \frac{1}{2}(\delta_{kj}\delta_{l3} + \delta_{lj}\delta_{k3})\delta_{i3} - 2\delta_{k3}\delta_{l3}\delta_{i3}\delta_{j3},$$

$$\bar{\Gamma}_{(5)ijkl} = \frac{1}{2}(\delta_{k1}\delta_{l2} + \delta_{k2}\delta_{l1})(\delta_{i1}\delta_{j2} + \delta_{i2}\delta_{j1}).$$

Обобщенные девиаторы симметричного тензора  $\mathbf{T}$  имеют вид:

$$\bar{P}_{(1)ij} = \bar{T}_{33}\delta_{i3}\delta_{j3}, \quad \bar{P}_{(2)ij} = \frac{\bar{T}_{11} + \bar{T}_{22}}{2}(\delta_{i1}\delta_{j1} + \delta_{i2}\delta_{j2}),$$

$$\bar{P}_{(3)ij} = \bar{T}_{i1}\delta_{j3} + \bar{T}_{j3}\delta_{i3} - 2\bar{T}_{33}\delta_{i3}\delta_{j3}, \quad (5.296)$$

$$\bar{P}_{(4)ij} = \bar{T}_{ij} - \frac{\bar{T}_{11} + \bar{T}_{22}}{2}(\delta_{i1}\delta_{j1} + \delta_{i2}\delta_{j2}) + \bar{T}_{j3}\delta_{i3}\delta_{j3} - \bar{T}_{12}(\delta_{i1}\delta_{j2} + \delta_{i2}\delta_{j1}),$$

$$\bar{P}_{(5)ij} = \bar{T}_{12}(\delta_{i1}\delta_{j2} + \delta_{i2}\delta_{j1}).$$

Матричное представление этих девиаторов имеет вид:

$$\bar{P}_{(1)ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{T}_{33} \end{pmatrix}, \quad \bar{P}_{(2)ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{\bar{T}_{11} + \bar{T}_{22}}{2},$$

$$\bar{P}_{(3)ij} = \begin{pmatrix} (\bar{T}_{11} - \bar{T}_{22})/2 & 0 & 0 \\ 0 & (\bar{T}_{22} - \bar{T}_{11})/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.297)$$

$$\bar{P}_{(4)ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \bar{T}_{13} \\ 0 & 0 & \bar{T}_{23} \\ \bar{T}_{13} & \bar{T}_{23} & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{P}_{(5)ij} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{T}_{12} & 0 \\ \bar{T}_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Линейные инварианты тензора  $\mathbf{T}$  совпадают с линейными инвариантами в  $(T_3)$ -классе:

$$Y_1 = \bar{T}_{33}, \quad Y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{T}_{11} + \bar{T}_{22}). \quad (5.298)$$

Квадратичные инварианты в  $(K_3)$  имеют вид:

$$Y_3 = \frac{|\bar{T}_{11} - \bar{T}_{22}|}{\sqrt{2}}, \quad Y_4 = \sqrt{2}(\bar{T}_{13}^2 + \bar{T}_{23}^2)^{1/2}, \quad Y_5 = \sqrt{2}|\bar{T}_{12}|. \quad (5.299)$$

### 5.5.7. Ортотропный класс

В этом классе имеется три индифферентных симметричных тензора второго ранга:  $\bar{e}_\alpha^2$ , общее же число обобщенных девиаторов максимально и равно шести, т.е.

$$m = 3, \quad n = 6. \quad (5.300)$$

Тензоры  $a_{(\alpha)}$  и  ${}^4\Gamma_{(\alpha)}$  имеют вид:

$$a_{(\alpha)} = \bar{e}_\alpha^2, \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad a_{(\alpha)} = 1, \quad (5.301)$$

$${}^4\Gamma_{(\alpha)} = \frac{1}{2} O_{\alpha-3} \otimes O_{\alpha-3}, \quad \alpha = 4, 5, 6.$$

Обобщенные девиаторы определяются следующим образом:

$$P_{(\alpha)} = Y_\alpha \bar{e}_\alpha^2, \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad (5.302)$$

где

$$Y_\alpha = T \cdot \bar{e}_\alpha^2 \quad (5.303)$$

— линейные спектральные инварианты, а также

$$P_{(\alpha)} = \frac{1}{2} O_{\alpha-3} (T \cdot O_{\alpha-3}), \quad \alpha = 4, 5, 6. \quad (5.304)$$

Проверим, что все свойства  $p$ -тензоров (5.229) – (5.232) выполнены.

Спектральное представление (5.229) проверяем, переходя к компонентной записи:

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^6 P_{(\alpha)} &= \sum_{\alpha=1}^3 \left( Y_\alpha \bar{e}_\alpha^2 + \frac{1}{2} O_{\alpha+3} (T \cdot O_{\alpha+3}) \right) = \\ &= \sum_{\alpha=1}^3 (\bar{T}_{\alpha\alpha} \delta_\alpha^i \delta_\alpha^j + (\delta_\beta^i \delta_\gamma^j + \delta_\gamma^i \delta_\beta^j) \bar{T}_{\alpha\beta}) = T, \end{aligned} \quad (5.305)$$

$$\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha, \quad \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3.$$

Индифферентность функций  $P_{(\alpha)}(T)$  - очевидна, т.к. все тензоры  $\bar{e}_\alpha^2$ ,  $O_\alpha \otimes O_\alpha$  индифферентны относительно класса ортотропии.

Взаимная ортогональность  $P_{(\alpha)}$  вытекает из ортогональности векторов базиса  $\bar{e}_\alpha$ :

$$P_{(\alpha)} \cdot P_{(\beta)} = \bar{e}_\alpha^2 \cdot \bar{e}_\beta^2 = 0, \quad \alpha \neq \beta, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3, \quad (5.306)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{(\alpha)} \cdot \cdot \mathbf{P}_{(\beta+3)} &= \bar{\mathbf{e}}_\alpha^2 \cdot \cdot \mathbf{O}_\beta = \bar{\mathbf{e}}_\alpha \otimes \bar{\mathbf{e}}_\alpha \cdot \cdot (\bar{\mathbf{e}}_\gamma \otimes \bar{\mathbf{e}}_\delta + \bar{\mathbf{e}}_\delta \otimes \bar{\mathbf{e}}_\gamma) = \\ &= 2(\bar{\mathbf{e}}_\alpha \cdot \bar{\mathbf{e}}_\gamma)(\bar{\mathbf{e}}_\alpha \cdot \bar{\mathbf{e}}_\delta) = 0, \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2, 3, \quad \beta \neq \gamma \neq \delta \neq \beta, \\ \mathbf{P}_{(\alpha+3)} \cdot \cdot \mathbf{P}_{(\beta+3)} &= \mathbf{O}_\alpha \cdot \cdot \mathbf{O}_\beta = 0, \quad \alpha \neq \beta, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Квадратичные спектральные инварианты определяются по формулам (5.241):

$$Y_\alpha^2 = \mathbf{P}_{(\alpha)} \cdot \cdot \mathbf{T} = \frac{1}{2}(\mathbf{T} \cdot \cdot \mathbf{O}_{\alpha-3})^2, \quad \alpha = 4, 5, 6. \quad (5.307)$$

Запишем также все введенные тензоры в декартовой системе координат:

$$\bar{a}_{(\alpha)ij} = \delta_{i\alpha}\delta_{j\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad a_\alpha = 1;$$

$$\bar{\Gamma}_{(\alpha)ijkl} = \frac{1}{2}(\delta_{k\beta}\delta_{l\gamma} + \delta_{k\gamma}\delta_{l\beta})(\delta_{i\beta}\delta_{j\gamma} + \delta_{i\gamma}\delta_{j\beta}), \quad \alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha. \quad (5.308)$$

Обобщенные девиаторы и инварианты имеют вид:

$$\bar{P}_{(\alpha)ij} = \bar{T}_{\alpha\alpha}\delta_{i\alpha}\delta_{j\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, 3; \quad \bar{P}_{(4)ij} = \bar{T}_{12}(\delta_{i1}\delta_{j2} + \delta_{i2}\delta_{j1}),$$

$$\bar{P}_{(5)ij} = \bar{T}_{13}(\delta_{i1}\delta_{j3} + \delta_{i3}\delta_{j1}), \quad \bar{P}_{(6)ij} = \bar{T}_{23}(\delta_{i2}\delta_{j3} + \delta_{i3}\delta_{j2}), \quad (5.309)$$

$$Y_\alpha = \bar{T}_{\alpha\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, 3; \quad Y_4 = \sqrt{2}|\bar{T}_{12}|, \quad Y_5 = \sqrt{2}|\bar{T}_{13}|, \quad Y_6 = \sqrt{2}|\bar{T}_{23}|.$$

Обобщенные девиаторы имеют следующее матричное представление:

$$\begin{aligned} \bar{P}_{(1)ij} &= \begin{pmatrix} \bar{T}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{P}_{(2)ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{T}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \bar{P}_{(3)ij} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{T}_{33} \end{pmatrix}, \quad \bar{P}_{(4)ij} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{T}_{12} & 0 \\ \bar{T}_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \bar{P}_{(5)ij} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \bar{T}_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ \bar{T}_{13} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{P}_{(6)ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{T}_{23} \\ 0 & \bar{T}_{23} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.310)$$

### 5.5.8. Триклиинный класс

В этом классе имеется шесть индифферентных симметричных тензоров второго ранга:  $\bar{\mathbf{e}}_\alpha \otimes \bar{\mathbf{e}}_\beta$ , следовательно, все числа  $m$  и  $n$  совпадают и равны шести:

$$m = n = 6, \quad (5.311)$$

а обобщенные девиаторы являются линейными. Тензоры  $\mathbf{a}_{(\alpha)}$  имеют вид:

$$\mathbf{a}_{(\alpha)} = \bar{\mathbf{e}}_\alpha^2, \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad a_{(\alpha)} = 1, \quad (5.312)$$

$$\mathbf{a}_{(\alpha+3)} = \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{e}}_\beta \otimes \bar{\mathbf{e}}_\gamma + \bar{\mathbf{e}}_\gamma \otimes \bar{\mathbf{e}}_\beta) = \frac{1}{2} \mathbf{O}_\alpha, \quad a_{(\alpha+3)} = 1.$$

Спектральные инварианты определяются по формулам:

$$Y_\alpha = \mathbf{T} \cdot \bar{\mathbf{e}}_\alpha^2 = I_\alpha^{(E)}, \quad Y_{3+\alpha} = \frac{1}{2} \mathbf{T} \cdot \mathbf{O}_\alpha = I_{3+\alpha}^{(E)}, \quad \alpha = 1, 2, 3. \quad (5.313)$$

Поэтому обобщенные девиаторы имеют вид:

$$\mathbf{P}_{(\alpha)} = Y_\alpha \bar{\mathbf{e}}_\alpha^2, \quad \mathbf{P}_{(3+\alpha)} = \frac{1}{2} Y_{3+\alpha} \mathbf{O}_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, 3. \quad (5.314)$$

Очевидно, что все свойства  $p$ -тензоров выполняются при таком построении.

В декартовой системе координат введенные объекты имеют следующий вид:

$$\bar{a}_{(\alpha)ij} = \delta_{i\alpha} \delta_{j\alpha}, \quad \bar{a}_{(\alpha+3)ij} = \frac{1}{2} (\delta_{i\beta} \delta_{j\gamma} + \delta_{i\gamma} \delta_{j\beta}),$$

$$\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3, \quad \alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha, \quad (5.315)$$

а также

$$\bar{P}_{(\alpha)ij} = Y_\alpha \delta_{i\alpha} \delta_{j\alpha}, \quad \bar{P}_{(\alpha+3)ij} = \frac{1}{2} \bar{T}_{\beta\gamma} (\delta_{i\beta} \delta_{j\gamma} + \delta_{i\gamma} \delta_{j\beta}). \quad (5.316)$$

Спектральные инварианты имеют вид

$$Y_\alpha = \bar{T}_{\alpha\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, 3,$$

$$Y_4 = |\bar{T}_{23}|, \quad Y_5 = |\bar{T}_{13}|, \quad Y_6 = |\bar{T}_{12}|. \quad (5.317)$$

Матричное представление обобщенных девиаторов также очевидно: каждая матрица  $(\bar{P}_{(\alpha)ij})$  имеет одну ненулевую компоненту тензора  $\mathbf{T}$ :

$$\bar{P}_{(1)ij} = \begin{pmatrix} \bar{T}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{P}_{(2)ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{T}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\bar{P}_{(3)ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{T}_{33} \end{pmatrix}, \quad \bar{P}_{(4)ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{T}_{23} \\ 0 & \bar{T}_{23} & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.318)$$

$$\bar{P}_{(5)ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \bar{T}_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ \bar{T}_{13} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{P}_{(6)ij} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{T}_{12} & 0 \\ \bar{T}_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

### 5.5.9. Сравнение спектральных инвариантов $Y_\alpha$ с инвариантами группы $I_\gamma^{(s)}$

Для триклинического класса спектральные инварианты  $Y_\alpha$  и  $I_\alpha^{(E)}$ , введенные в п. 4.5.5, как было показано в п. 5.5.8, совпадают.

Для остальных рассмотренных классов: ( $I$ ), ( $H$ ), ( $T_3$ ), ( $K$ ), ( $K_3$ ) и ( $O$ ), – число спектральных инвариантов  $Y_\alpha$  на один меньше, чем инвариантов  $I_\gamma^{(s)}$ , причем отсутствует кубический инвариант в каждом классе. В классе ортотропии – это  $I_6^{(O)} = \bar{T}_{12}\bar{T}_{13}\bar{T}_{23}$ , а в остальных – это  $I_3 = \det T$ .

Этот результат естественен, так как само построение инвариантов  $Y_\alpha$  предполагает, что могут возникнуть либо линейные, либо квадратичные инварианты. Вспомним теперь результаты §5.4, где было получено, что в построении квазилинейных тензорных функций участвуют как раз линейные и квадратичные инварианты.

Таким образом, применение спектральных инвариантов является еще одним (весьма удобным, как будет показано в §5.6) способом для описания квазилинейных функций.

На этом мы закончили доказательство теоремы 5.12, показав, что спектральное разложение (5.229) существует для классов: ( $E$ ), ( $O$ ), ( $K_3$ ), ( $K$ ), ( $H$ ), ( $T_3$ ) и ( $I$ ).

Заметим, что квадратичные спектральные инварианты  $Y_\alpha$  по определению (5.239) являются положительно определенными формами от  $\bar{T}_{ij}$ : т.е.  $Y_\alpha > 0$ ,  $\alpha = m + 1, \dots, n$ , поэтому для остальных классов: ( $M$ ), ( $T$ ), ( $A$ ) и ( $B$ )-классов, у которых имеются квадратичные инварианты, но не являющиеся положительно определенными (см. п. 4.5.5), спектральные разложения не построены. ▲

### Упражнения к § 5.5.

**Упражнение 5.5.1.** Показать, что из взаимной ортогональности тензоров  $P_{(\alpha)}$  следует

$${}^4\Gamma_{(\alpha)} \cdot {}^4\Gamma_{(\beta)} = 0, \quad \alpha \neq \beta, \quad \alpha, \beta = 1, \dots, n.$$

## § 5.6. Спектральные представления квазилинейных тензорных функций

### 5.6.1. Спектральное представление двух тензоров

Спектральное представление, введенное в §5.5, обладает важным свойством: оно одинаково в рамках одной и той же группы симметрии  $G_s$ , для всех симметричных тензоров. Это означает, что если имеются два симметричных тензора  $S$  и  $T$  второго ранга и фиксирована группа симметрии  $G_s$ , то спектральные представления этих тензоров записываются следующим образом:

$$S = \sum_{\alpha=1}^n P_{(\alpha)}^{(S)}, \quad T = \sum_{\alpha=1}^n P_{(\alpha)}^{(T)}, \quad (5.319)$$

где  $P_{(\alpha)}^{(S)}$  и  $P_{(\alpha)}^{(T)}$  - обобщенные девиаторы тензоров:

$$P_{(\alpha)}^{(S)} \equiv P_{(\alpha)}(S) = {}^4\Gamma_{(\alpha)} \cdot \cdot S, \quad (5.320)$$

$$P_{(\alpha)}^{(T)} \equiv P_{(\alpha)}(T) = {}^4\Gamma_{(\alpha)} \cdot \cdot T, \quad \alpha = 1 \dots n.$$

Из представления (5.320) следует, в частности, что тензоры  $P_{(\alpha)}^{(S)}$  и  $P_{(\beta)}^{(T)}$  взаимно ортогональны:

$$P_{(\alpha)}^{(S)} \cdot \cdot P_{(\beta)}^{(T)} = 0, \quad \alpha \neq \beta. \quad (5.321)$$

Спектральные инварианты тензоров  $T$  и  $S$  обозначим следующим образом:

$$Y_{\alpha}^{(T)} \equiv Y_{\alpha}(T) = (P_{(\alpha)}^{(T)} \cdot \cdot P_{(\alpha)}^{(T)})^{1/2}, \quad \alpha = 1 \dots n,$$

$$Y_{\alpha}^{(S)} \equiv Y_{\alpha}(S) = (P_{(\alpha)}^{(S)} \cdot \cdot P_{(\alpha)}^{(S)})^{1/2}. \quad (5.322)$$

Среди них имеются по  $m$  линейных инвариантов, для которых

$$P_{(\alpha)}^{(T)} = \frac{Y_{\alpha}^{(T)}}{a_{\alpha}} \mathbf{a}_{(\alpha)}, \quad P_{(\alpha)}^{(S)} = \frac{Y_{\alpha}^{(S)}}{a_{\alpha}} \mathbf{a}_{(\alpha)}, \quad \alpha = 1 \dots m. \quad (5.323)$$

### 5.6.2. Спектральное представление приращения потенциала

Пусть теперь два симметричных тензора  $S$  и  $T$  связаны потенциальной квазилинейной функцией:

$$S = \mathcal{F}(T) = \frac{\partial \psi}{\partial T}, \quad (5.324)$$

где  $\psi$  - потенциал.

Составим дифференциал от функции  $\psi$ , рассматривая ее как скалярную функцию от  $T$  (см.(5.93)):

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial T} \cdot dT. \quad (5.325)$$

Здесь учтено, что  $T$  - симметричный тензор. Если теперь подставить (5.324) в (5.325), то получим условие потенциальности в виде:

$$d\psi = S \cdot dT. \quad (5.326)$$

Подставляя теперь в (5.326) спектральные представления (5.319) тензоров  $S$  и  $T$ , получим в итоге

$$d\psi = \sum_{\alpha=1}^n P_{(\alpha)}^{(S)} \cdot dP_{(\alpha)}^{(T)}. \quad (5.327)$$

Дифференциал тензора  $dP_{(\alpha)}^{(T)}$  определен в п.5.2.2 и представляет собой симметричный тензор:

$$dP_{(\alpha)}^{(T)} = dP_{(\alpha)}^{ij(T)} R_i \otimes R_j, \quad (5.328)$$

где  $P_{(\alpha)}^{ij(T)}$  - компоненты девиатора:

$$P_{(\alpha)}^{(T)} = P_{(\alpha)}^{ij(T)} R_i \otimes R_j. \quad (5.329)$$

Очевидно, что тензоры  $dP_{(\alpha)}^{(T)}$  будут взаимно ортогональны к  $P_{(\beta)}^{(S)}$  ( $\alpha \neq \beta$ ), что и учтено в (5.327).

Формула (5.327) называется *спектральным представлением приращения потенциала квазилинейной функции*.

### 5.6.3. Вывод спектрального представления квазилинейной функции

Как было показано в п.5.4.1, потенциал  $\psi$  квазилинейной функции может зависеть только от линейных и квадратичных инвариантов тензора  $T$ . Выберем в качестве этих инвариантов спектральные инварианты  $Y_\alpha(T)$  относительно какой-либо группы симметрии  $G_s$ :

$$\psi = \psi(Y_1^{(T)} \dots Y_n^{(T)}). \quad (5.330)$$

Тогда

$$d\psi = \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial Y_\alpha^{(T)}} dY_\alpha^{(T)}. \quad (5.331)$$

Дифференциал  $dY_\alpha^{(T)}$  вычислим следующим образом:

$$dY_\alpha^{(T)} = \frac{1}{2Y_\alpha^{(T)}} dY_\alpha^{(T)2} \quad \alpha = 1 \dots n, \quad (5.332)$$

но  $Y_\alpha^{(T)2}$  является, согласно (5.239), квадратичной скалярной функцией от  $P_{(\alpha)}^{(T)}$ , поэтому ее дифференциал вычисляем по (5.93) и (5.123):

$$dY_\alpha^{(T)2} = \frac{\partial Y_\alpha^{(T)2}}{\partial P_{(\alpha)}^{(T)}} \cdot dP_{(\alpha)}^{(T)} = 2P_{(\alpha)}^{(T)} \cdot dP_{(\alpha)}^{(T)}, \quad \alpha = 1 \dots n. \quad (5.333)$$

Подставляя (5.333) и (5.332) в (5.331), получаем:

$$d\psi = \sum_{\alpha=1}^n \frac{1}{Y_\alpha^{(T)}} \frac{\partial \psi}{\partial Y_\alpha^{(T)}} P_{(\alpha)}^{(T)} \cdot dP_{(\alpha)}^{(T)}. \quad (5.334)$$

Подставляя теперь (5.334) в (5.327), имеем:

$$\sum_{\alpha=1}^n \left( \frac{1}{Y_\alpha^{(T)}} \frac{\partial \psi}{\partial Y_\alpha^{(T)}} P_{(\alpha)}^{(T)} - P_{(\alpha)}^{(S)} \right) \cdot dP_{(\alpha)}^{(T)} = 0. \quad (5.335)$$

В силу независимости приращений девиаторов из (5.335) вытекает следующий результат.

**ТЕОРЕМА 5.13.** *Обобщенные девиаторы двух симметричных тензоров второго ранга, связанных квазилинейной потенциальной функцией (5.324), пропорциональны друг другу:*

$$P_{(\alpha)}^{(S)} = \frac{\varphi_\alpha}{Y_\alpha^{(T)}} P_{(\alpha)}^{(T)}, \quad \alpha = 1 \dots n. \quad (5.336)$$

Коэффициенты пропорциональности являются скалярными функциями от спектральных инвариантов  $Y_\alpha^{(T)}$ :

$$\varphi_\alpha = \varphi_\alpha(Y_1^{(T)} \dots Y_n^{(T)}) = \frac{\partial \psi}{\partial Y_\alpha^{(T)}}. \quad (5.337)$$

Соотношения (5.336) называют *спектральным представлением квазилинейной тензорной функции* (5.324). Это представление впервые было установлено Б.Е.Победрой.

Подставляя в первые  $m$  соотношений (5.336) выражения (5.323), получаем:

$$Y_\alpha^{(S)} = \varphi_\alpha(Y_1^{(T)} \dots Y_n^{(T)}) = \frac{\partial \psi}{\partial Y_\alpha^{(T)}}. \quad (5.338)$$

Умножая оставшиеся соотношения (5.336) при  $\alpha = m+1 \dots n$  скалярно сами на себя, с учетом определения (5.322) квадратичных инвариантов получаем, что соотношения (5.338) имеют место и для оставшихся индексов  $\alpha = m+1 \dots n$ . Здесь учтено, что  $\varphi_\alpha \geq 0$ .

Если подставить (5.336) в (5.319), то получим еще одно представление квазилинейной функции:

$$S = \sum_{\alpha=1}^n \frac{\varphi_\alpha}{Y_\alpha^{(T)}} (Y_1^{(T)} \dots Y_n^{(T)}) P_{(\alpha)}^{(T)}. \quad (5.339)$$

Поскольку первым  $\alpha = 1 \dots m$  обобщенным девиаторам соответствуют линейные инварианты (5.237), то это соотношение можно переписать с учетом (5.238):

$$S = \sum_{\alpha=1}^m \frac{\varphi_\alpha(Y_1^{(T)} \dots Y_n^{(T)})}{a_\alpha} a_{(\alpha)} + \sum_{\alpha=m+1}^n \frac{\varphi_\alpha(Y_1^{(T)} \dots Y_n^{(T)})}{Y_\alpha^{(T)}} P_{(\alpha)}^{(T)}. \quad (5.340)$$

На практике используют одно из трех представлений квазилинейной функции (5.324):

- (5.340), которое называют *полным спектральным представлением*;
- (5.336), (5.337), называемые *укороченным спектральным представлением* (т.е. не выписано явное выражение  $S \sim T$ );
- (5.338), являющееся соотношением между инвариантами, когда не выписывают явным образом даже соотношения между обобщенными девиаторами.

Очевидно, что все эти представления эквивалентны.

### 5.6.4. Спектральное представление линейной тензорной функции

Если тензорная функция (5.324) - линейная, то, как было показано в п.4.4.4, потенциал  $\psi$  представляет собой сумму квадратичных инвариантов тензора  $T$  и квадратов линейных инвариантов. С использованием спектральных инвариантов потенциал  $\psi$  для линейной функции имеет вид:

$$\psi = \psi_0 + \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^m C_{\alpha\beta} Y_{\alpha}^{(T)} Y_{\beta}^{(T)} + \sum_{\alpha=m+1}^n C_{\alpha\alpha} Y_{\alpha}^{(T)2}, \quad (5.341)$$

где  $C_{\alpha\beta}$  - константы.

Подставляя это выражение в (5.338) получаем, что линейные инварианты связаны только с линейными, квадратичные - с квадратичными:

$$Y_{\alpha}^{(S)} = \sum_{\alpha=1}^m C_{\alpha\beta} Y_{\beta}^{(T)}, \quad \alpha = 1 \dots m,$$

$$Y_{\alpha}^{(S)} = C_{\alpha\alpha} Y_{\alpha}^{(T)}, \quad \alpha = m+1 \dots n. \quad (5.342)$$

Подставляя теперь (5.342) в (5.336), имеем

$$P_{(\alpha)}^{(S)} = C_{\alpha\alpha} P_{(\alpha)}^{(T)}, \quad \alpha = m+1 \dots n. \quad (5.343)$$

Если же подставить (5.342) в (5.340), то получим полное спектральное представление линейной тензорной функции:

$$S = \sum_{\alpha, \beta=1}^m C_{\alpha\beta} \frac{Y_{\beta}^{(T)}}{a_{\alpha}} \mathbf{a}_{(\alpha)} + \sum_{\alpha=m+1}^n C_{\alpha\alpha} P_{(\alpha)}^{(T)}. \quad (5.344)$$

Наконец, если в (5.344) подставить определение (5.237) линейных инвариантов и (5.232) девиаторов, то линейную функцию приведем к явному виду:

$$S = \left( \sum_{\alpha, \beta=1}^m \frac{C_{\alpha\beta}}{a_{\alpha} a_{\beta}} \mathbf{a}_{(\alpha)} \otimes \mathbf{a}_{(\beta)} + \sum_{\alpha=m+1}^n C_{\alpha\alpha} {}^4\Gamma_{(\alpha)} \right) \cdot \cdot T \equiv {}^4C \cdot \cdot T, \quad (5.345)$$

где

$${}^4C = \sum_{\alpha, \beta=1}^m \frac{C_{\alpha\beta}}{a_{\alpha} a_{\beta}} \mathbf{a}_{(\alpha)} \otimes \mathbf{a}_{(\beta)} + \sum_{\alpha=m+1}^n C_{\alpha\alpha} {}^4\Gamma_{(\alpha)} \quad (5.346)$$

является тензором четвертого ранга, задающим линейную функцию. В силу единственности линейной функции, это тот же самый тензор, который был введен в п.5.1.9.

Формула (5.346) устанавливает связь между  ${}^4C$  и двухиндексными константами  $C_{\alpha\beta}$ .

Получим обратные к (5.346) соотношения. Образуем для этого свертку тензора  ${}^4C$  с тензорами  $(1/(a_\gamma a_\delta)) \mathbf{a}_{(\gamma)} \otimes \mathbf{a}_{(\delta)}$ , а затем с  ${}^4\Gamma_{(\alpha)}$ . Тогда, учитывая результаты упр.5.5.1:

$$C_{\alpha\alpha} {}^4\Gamma_{(\alpha)} \cdots \mathbf{a}_{(\gamma)} \otimes \mathbf{a}_{(\delta)} = 0, \quad \alpha = m+1 \dots n, \quad \gamma, \delta = 1 \dots m, \quad (5.347)$$

$$C_{\alpha\beta} \mathbf{a}_{(\gamma)} \otimes \mathbf{a}_{(\delta)} \cdots \mathbf{a}_{(\alpha)} \otimes \mathbf{a}_{(\beta)} = \begin{cases} 0, & \text{если } (\alpha, \beta) \neq (\gamma, \delta), \\ & \alpha, \beta, \gamma, \delta = 1 \dots m, \\ C_{\alpha\beta} a_\alpha^2 a_\beta^2, & \text{если } (\alpha, \beta) = (\gamma, \delta), \end{cases}$$

$${}^4\Gamma_{(\alpha)} \cdots {}^4\Gamma_{(\beta)} = \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha \neq \beta, \\ \Gamma_\alpha^2, & \text{если } \alpha = \beta, \quad \alpha, \beta = m+1 \dots n, \end{cases}$$

и из (5.346) получаем:

$$\begin{cases} C_{\alpha\beta} = (1/(a_\alpha a_\beta)) \mathbf{a}_{(\alpha)} \cdot {}^4C \cdot \mathbf{a}_{(\beta)}, & \alpha, \beta = 1 \dots m, \\ C_{\alpha\alpha} = (1/\Gamma_\alpha^2) {}^4C \cdots {}^4\Gamma_{(\alpha)}, & \alpha = m+1 \dots n. \end{cases} \quad (5.348)$$

Далее рассмотрим спектральное представление тензорных функций, индифферентных относительно различных классов симметрии.

### 5.6.5. Спектральное представление изотропных тензорных функций

Пусть квазилинейная тензорная функция (5.324) является изотропной, т.е. индифферентной относительно класса изотропии.

Тогда спектральные представления (5.319) тензоров  $T$  и  $S$  имеют вид (5.250):

$$S = P^{(S)} + \frac{1}{3} I_1(S) E, \quad T = P^{(T)} + \frac{1}{3} I_1(T) E, \quad (5.349)$$

где  $P^{(S)}$  и  $P^{(T)}$  - девиаторы.

Спектральные инварианты тензоров вычисляются следующим образом (см. (5.245), (5.255)):

$$Y_1^{(T)} = \frac{1}{\sqrt{3}} I_1(T), \quad Y_1^{(S)} = \frac{1}{\sqrt{3}} I_1(S), \quad (5.350)$$

$$Y_2^{(T)} = T_u = (P^{(T)} \cdot \cdot P^{(T)})^{1/2}, \quad Y_2^{(S)} = S_u = (P^{(S)} \cdot \cdot P^{(S)})^{1/2}.$$

Соотношения (5.338) между инвариантами представляют собой две функции от двух аргументов:

$$\begin{cases} Y_1^{(S)} = \varphi_1(T_u, Y_1^{(T)}), \\ S_u = \varphi_2(T_u, Y_1^{(T)}). \end{cases} \quad (5.351)$$

Укороченное спектральное представление (5.336) изотропной квазилинейной функции имеет вид:

$$\begin{cases} P^{(S)} = (\varphi_2(T_u, Y_1^{(T)})/T_u)P^{(T)}, \\ Y_1^{(S)} = \varphi_1(T_u, Y_1^{(T)}). \end{cases} \quad (5.352)$$

Полное же спектральное представление имеет следующий вид:

$$S = \frac{1}{3} \left( \varphi_1(T_u, Y_1^{(T)}) - \varphi_2(T_u, Y_1^{(T)}) \frac{Y_1^{(T)}}{\sqrt{3}T_u} \right) E + \frac{\varphi_2(T_u, Y_1^{(T)})}{T_u} T. \quad (5.353)$$

Частным случаем являются соотношения (5.351), в которых линейные инварианты связаны линейно, а квадратичные – нелинейно:

$$\begin{cases} Y_1^{(S)} = 3KY_1^{(T)}, \\ S_u = 2G(1 - \omega(T_u))T_u, \end{cases} \quad (5.354)$$

здесь  $K$  и  $G$  – константы, а  $\omega(T_u)$  – нелинейная функция А.А.Ильюшина, удовлетворяющая условию  $\omega(0) = 0$ .

Тогда укороченное спектральное представление (5.354) принимает вид:

$$\begin{cases} Y_1^{(S)} = 3KY_1^{(T)}, \\ P^{(3)} = 2G(1 - \omega(T_u))P^{(T)}. \end{cases} \quad (5.355)$$

Если функцию  $\omega(T_u)$  выбрать в виде:

$$\omega(T_u) = \begin{cases} 0, & T_u \leqslant T^*, \\ (1 - k)(1 - (T^*/T_u)), & T_u \geqslant T^* \quad (0 < k \leqslant 1), \end{cases} \quad (5.356)$$

то функция  $S_u = S_u(T_u)$  является кусочно-линейной:

$$S_u = \begin{cases} 2GT_u, & T_u \leqslant T^*, \\ 2G(1 - (1 - k)(1 - (T^*/T_u)))T_u, & T_u \geqslant T^*. \end{cases} \quad (5.357)$$

### 5.6.6. Трансверсально-изотропные функции

Пусть теперь функция  $\mathcal{F}(T)$  – трансверсально изотропная, т.е.  $G_s = T_3$ . В этом случае четыре инварианта тензоров  $S$  и  $T$  имеют вид (см. п. 5.5.5):

$$Y_1^{(T)} = T \cdot \bar{\mathbf{e}}_3^2, \quad Y_2^{(T)} = \frac{1}{\sqrt{2}} T \cdot (E - \bar{\mathbf{e}}_3^2) \equiv \frac{\tilde{T}}{\sqrt{2}},$$

$$Y_3^{(T)2} = T^2 \cdot E - (T \cdot E)^2 + \frac{1}{2}(Y_1^{(T)} + T \cdot E)^2 - 2T^2 \cdot \bar{\mathbf{e}}_3^2, \quad (5.358)$$

$$Y_4^{(T)} = 2(T^2 \cdot \bar{\mathbf{e}}_3^2 - Y_1^{(T)2});$$

$$Y_1^{(S)} = S \cdot \bar{\mathbf{e}}_3^2, \quad Y_2^{(S)} = \frac{1}{\sqrt{2}} S \cdot (E - \bar{\mathbf{e}}_3^2) \equiv \frac{\tilde{S}}{\sqrt{2}},$$

$$Y_3^{(S)2} = S^2 \cdot E - (S \cdot E)^2 + \frac{1}{2}(Y_1^{(S)} + S \cdot E)^2 - 2S^2 \cdot \bar{\mathbf{e}}_3^2, \quad (5.359)$$

$$Y_4^{(S)2} = 2(S^2 \cdot \bar{\mathbf{e}}_3^2 - Y_1^{(S)2}).$$

Соотношения (5.338) между четырьмя инвариантами  $Y_\alpha^{(S)}$  и  $Y_\alpha^{(T)}$  представляют собой четыре функции от четырех аргументов:

$$Y_\alpha^{(S)} = \varphi_\alpha^{(S)}(Y_1^{(T)} \dots Y_4^{(T)}), \quad \alpha = 1, \dots, 4. \quad (5.360)$$

Полное спектральное представление (5.340) с учетом (5.270) имеет вид:

$$S = \varphi_1(Y_1^{(T)} \dots Y_4^{(T)}) \bar{\mathbf{e}}_3^2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi_2(Y_1^{(T)} \dots Y_4^{(T)})(E - \bar{\mathbf{e}}_3^2) + \\ + \frac{\varphi_3(Y_1^{(T)} \dots Y_4^{(T)})}{Y_3^{(T)}} P_{(3)}^{(T)} + \frac{\varphi_4(Y_1^{(T)} \dots Y_4^{(T)})}{Y_4^{(T)}} P_{(4)}^{(T)}. \quad (5.361)$$

В случае линейной трансверсально изотропной функции все  $\varphi_\alpha$  линейно выражаются через инварианты  $Y_\beta^{(T)}$ :

$$\varphi_1 = C_{11} Y_1^{(T)} + C_{12} Y_2^{(T)}, \quad \varphi_2 = C_{12} Y_1^{(T)} + C_{22} Y_2^{(T)}, \quad (5.362)$$

$$\varphi_3 = C_{33} Y_3^{(T)}, \quad \varphi_4 = C_{44} Y_4^{(T)},$$

где  $C_{\alpha\beta}$  – константы.

В декартовой системе координат линейное соотношение (5.361) имеет вид:

$$\begin{aligned}\bar{S}_{ij} = & (C_{11}\bar{T}_{33} + C_{12}\tilde{T})\delta_{i3}\delta_{j3} + \left(\frac{C_{12}}{\sqrt{2}}\bar{T}_{33} + \frac{C_{22}}{2}\tilde{T}\right)(\delta_{i1}\delta_{j1} + \delta_{i2}\delta_{j2}) + \\ & + C_{33}(\bar{T}_{ij} - \frac{\tilde{T}}{2}(\delta_{i1}\delta_{j1} + \delta_{i2}\delta_{j2}) + \bar{T}_{33}\delta_{i3}\delta_{j3} - \bar{T}_{i3}\delta_{j3} - \bar{T}_{j3}\delta_{i3}) + \\ & + C_{44}(\bar{T}_{i3}\delta_{j3} + \bar{T}_{j3}\delta_{i3} - 2\bar{T}_{33}\delta_{i3}\delta_{j3}).\end{aligned}\quad (5.363)$$

Сравнивая это представление с выражением (5.21)  $\bar{S}_{ij} = \bar{C}_{ijkl}\bar{T}^{kl}$  для различных случаев:  $\bar{T}_{33} \neq 0$ , остальные  $\bar{T}_{ij} = 0$ ;  $\bar{T}_{11} \neq 0$ , остальные  $\bar{T}_{ij} = 0$ ;  $\bar{T}_{13} \neq 0$ , остальные  $\bar{T}_{ij} = 0$ , находим связь четырехиндексных компонент  $\bar{C}_{ijkl}$  с двухиндексными  $C_{\alpha\beta}$ :

$$C_{3333} = C_{11}, \quad C_{2233} = C_{1133} = \frac{C_{12}}{\sqrt{2}}, \quad C_{1111} = \frac{C_{22} + C_{33}}{2},$$

$$2C_{1313} = 2C_{2323} = C_{44}, \quad 2C_{1212} = C_{33}. \quad (5.364)$$

Рассмотрим пример *нелинейной* трансверсально-изотропной функции.

В *простейшей* модели функция  $\varphi_\alpha$  имеет вид:

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= C_{11}(1 - \omega_1(Y_1^{(T)}))Y_1^{(T)} + C_{12}Y_2^{(T)}, \\ \varphi_2 &= C_{12}Y_1^{(T)} + C_{22}(1 - \omega_2(Y_2^{(T)}))Y_2^{(T)}, \\ \varphi_3 &= C_{33}(1 - \omega_3(Y_3^{(T)}))Y_3^{(T)}, \quad \varphi_4 = C_{44}(1 - \omega_4(Y_4^{(T)}))Y_4^{(T)},\end{aligned}\quad (5.365)$$

т.е. имеется только четыре *нелинейные* функции  $\omega_\alpha(Y_\alpha^{(T)})$ , зависящие от одного своего аргумента.

Аналитическое задание этих функций можно осуществить также с помощью кусочно-линейных функций:

$$\omega_\alpha(Y_\alpha^{(T)}) = \begin{cases} 0, & Y_\alpha^{(T)} \leq T_\alpha^*, \\ (1 - k_\alpha) \left(1 - \frac{T_\alpha^*}{Y_\alpha^{(T)}}\right), & Y_\alpha^{(T)} \geq T_\alpha^*, \quad \alpha = 1 \dots 4, \end{cases} \quad (5.366)$$

где  $T_\alpha^*$  – пределы пропорциональности, а  $k_\alpha = C'_{\alpha\alpha}/C_{\alpha\alpha}$  – отношение тангенсов углов наклона функций  $\omega_\alpha(Y_\alpha^{(T)})$  в *нелинейной* и *линейной* областях.

### 5.6.7. Ортотропные функции

Рассмотрим ортотропные функции (5.324). В этом случае тензоры  $S$  и  $T$  имеют по шесть инвариантов (см. п. 5.5.7):

$$Y_{\alpha}^{(T)} = T \cdot \cdot \bar{e}_{\alpha}^2, \quad \alpha = 1, 2, 3; \quad (5.367)$$

$$Y_4^{(T)2} = \frac{1}{2} (T \cdot \cdot (\bar{e}_2 \otimes \bar{e}_3 + \bar{e}_3 \otimes \bar{e}_2))^2 = 2\bar{T}_{23}^2,$$

$$Y_5^{(T)2} = \frac{1}{2} (T \cdot \cdot (\bar{e}_1 \otimes \bar{e}_3 + \bar{e}_3 \otimes \bar{e}_1))^2 = 2\bar{T}_{13}^2,$$

$$Y_6^{(T)2} = \frac{1}{2} (T \cdot \cdot (\bar{e}_1 \otimes \bar{e}_2 + \bar{e}_2 \otimes \bar{e}_1))^2 = 2\bar{T}_{12}^2,$$

$$Y_{\alpha}^{(S)} = S \cdot \cdot \bar{e}_{\alpha}^2, \quad \alpha = 1, 2, 3; \quad (5.368)$$

$$Y_4^{(S)2} = \frac{1}{2} (S \cdot \cdot (\bar{e}_2 \otimes \bar{e}_3 + \bar{e}_3 \otimes \bar{e}_2))^2 = 2\bar{S}_{23}^2,$$

$$Y_5^{(S)2} = \frac{1}{2} (S \cdot \cdot (\bar{e}_1 \otimes \bar{e}_3 + \bar{e}_3 \otimes \bar{e}_1))^2 = 2\bar{S}_{13}^2,$$

$$Y_6^{(S)2} = \frac{1}{2} (S \cdot \cdot (\bar{e}_1 \otimes \bar{e}_2 + \bar{e}_2 \otimes \bar{e}_1))^2 = 2\bar{S}_{12}^2,$$

соотношения между которыми имеют общий вид (5.338), т.е. представляют собой шесть функций от шести аргументов.

Полное спектральное представление (5.340) имеет вид:

$$S = \sum_{\alpha=1}^3 \varphi_{\alpha}(Y_1^{(T)} \dots Y_6^{(T)}) \bar{e}_{\alpha}^2 + \sum_{\alpha=3}^6 \frac{\varphi_{\alpha}(Y_1^{(T)} \dots Y_6^{(T)})}{Y_{\alpha}^{(T)}} P_{(\alpha)}^{(T)}. \quad (5.369)$$

В декартовой системе координат это соотношение имеет вид:

$$\begin{aligned} \bar{S}_{ij} = & \sum_{\alpha=1}^3 \varphi_{\alpha}(Y_1^{(T)} \dots Y_6^{(T)}) \bar{T}_{\alpha\alpha} \delta_{i\alpha} \delta_{j\alpha} + \varphi_4(Y_1^{(T)} \dots Y_6^{(T)}) \bar{T}_{12} (\delta_{i1} \delta_{j2} + \\ & + \delta_{i2} \delta_{j1}) + \varphi_5(Y_1^{(T)} \dots Y_6^{(T)}) \bar{T}_{13} (\delta_{i1} \delta_{j3} + \delta_{i3} \delta_{j1}) + \\ & + \varphi_6(Y_1^{(T)} \dots Y_6^{(T)}) \bar{T}_{23} (\delta_{i2} \delta_{j3} + \delta_{i3} \delta_{j2}), \end{aligned} \quad (5.370)$$

где

$$Y_{\alpha}^{(T)} = \bar{T}_{\alpha\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, 3;$$

$$Y_4^{(T)} = \sqrt{2} |\bar{T}_{12}|, \quad Y_5^{(T)} = \sqrt{2} |\bar{T}_{13}|, \quad Y_6^{(T)} = \sqrt{2} |\bar{T}_{23}|. \quad (5.371)$$

В случае линейной функции  $\varphi_\alpha$  линейно выражаются через инварианты  $Y_1^{(T)}, \dots, Y_6^{(T)}$ :

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= C_{11}Y_1^{(T)} + C_{12}Y_2^{(T)} + C_{13}Y_3^{(T)}, \\ \varphi_2 &= C_{12}Y_1^{(T)} + C_{22}Y_2^{(T)} + C_{23}Y_3^{(T)}, \\ \varphi_3 &= C_{13}Y_1^{(T)} + C_{23}Y_2^{(T)} + C_{33}Y_3^{(T)}, \\ \varphi_4 &= C_{44}Y_4^{(T)}, \quad \varphi_5 = C_{55}Y_5^{(T)}, \quad \varphi_6 = C_{66}Y_6^{(T)}.\end{aligned}\tag{5.372}$$

Простейшая нелинейная модель ортотропной функции предполагает, что

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= C_{11}Y_1^{(T)} + C_{12}Y_2^{(T)} + C_{13}Y_3^{(T)}, \\ \varphi_2 &= C_{12}Y_1^{(T)} + C_{22}Y_2^{(T)} + C_{23}Y_3^{(T)}, \\ \varphi_3 &= C_{13}Y_1^{(T)} + C_{23}Y_2^{(T)} + C_{33}(1 - \omega(Y_3^{(T)}))Y_3^{(T)}, \\ \varphi_\alpha &= C_{\alpha\alpha}(1 - \omega_\alpha(Y_\alpha^{(T)}))Y_\alpha^{(T)}, \quad \alpha = 4, 5, 6,\end{aligned}\tag{5.373}$$

т.е. имеем четыре функции одного аргумента  $\omega_\alpha(Y_\alpha^{(T)})$ , вид которых может быть выбран также как (5.366).

### 5.6.8. Квазитрансверсально-изотропные функции

Для квазитрансверсально-изотропной функции  $\varphi_\alpha$  тензоры  $T$  и  $S$  имеют по пять инвариантов  $Y_\alpha^{(T)}$  и  $Y_\alpha^{(S)}$  ( $\alpha = 1, \dots, 5$ ), которые можно выразить по формулам (5.288), (5.293) и (5.294). Из этих инвариантов два являются линейными:  $Y_\alpha^{(T)}$  ( $\alpha = 1, 2$ ) и три – квадратичными:  $Y_\alpha^{(T)}$  ( $\alpha = 3, 4, 5$ ).

Соответствующие тензоры  $a_{(\alpha)}$  ( $\alpha = 1, 2$ ) можно определить из формул (5.295).

Тогда полное спектральное представление (5.340) для квазитрансверсально-изотропной функции имеет вид:

$$\begin{aligned}\bar{S}_{ij} &= \varphi_1(Y_1^{(T)} \dots Y_5^{(T)})\delta_{i3}\delta_{j3} + \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_2(Y_1^{(T)} \dots Y_5^{(T)})(\delta_{ij} - \delta_{i3}\delta_{j3}) + \\ &+ \frac{\varphi_3(Y_1^{(T)} \dots Y_5^{(T)})}{Y_3^{(T)}}(\bar{T}_{i3}\delta_{j3} + \bar{T}_{j3}\delta_{i3} - 2\bar{T}_{33}\delta_{i3}\delta_{j3}) + \\ &+ \frac{\varphi_4(Y_1^{(T)} \dots Y_5^{(T)})}{Y_4^{(T)}}(\bar{T}_{ij} - \frac{\bar{T}_{11} + \bar{T}_{22}}{2}(\delta_{i1}\delta_{j1} + \delta_{i2}\delta_{j2})) + \\ &+ \bar{T}_{33}\delta_{i3}\delta_{j3} - \bar{T}_{12}(\delta_{i1}\delta_{j2} + \delta_{i2}\delta_{j1}) + \\ &+ \frac{\varphi_5(Y_1^{(T)} \dots Y_5^{(T)})}{Y_5^{(T)}}\bar{T}_{12}(\delta_{i1}\delta_{j2} + \delta_{i2}\delta_{j1}).\end{aligned}\tag{5.374}$$

Инварианты  $Y_\alpha^{(T)}$  ( $\alpha = 1, \dots, 5$ ) в декартовой системе координат имеют вид (5.298), (5.299).

В *простейшей* нелинейной модели квазитрансверсально-изотропные функции  $\varphi_\alpha$  выбирают следующим образом:

$$\begin{cases} \varphi_1 = C_{11}Y_1^{(T)} + C_{12}Y_2^{(T)}, \\ \varphi_2 = C_{12}Y_1^{(T)} + C_{22}Y_2^{(T)}, \\ \varphi_\alpha = C_{\alpha\alpha}(1 - \omega_\alpha(Y_\alpha^{(T)}))Y_\alpha^{(T)}, \quad \alpha = 3, 4, 5, \end{cases} \quad (5.375)$$

где  $C_{\alpha\beta}$  – константы, а  $\omega_\alpha(Y_\alpha^{(T)})$  – нелинейные функции. Согласно степенной модели выбираем их в виде:

$$\omega_\alpha(Y_\alpha^{(T)}) = \begin{cases} 0, & |Y_\alpha^{(T)}| \leq Y_\alpha^*, \\ \left(\frac{|Y_\alpha^{(T)}| - Y_\alpha^*}{Y_\alpha^0 - |Y_\alpha^{(T)}|}\right)^{n_\alpha}, & |Y_\alpha^{(T)}| \geq Y_\alpha^*, \end{cases} \quad (5.376)$$

где  $Y_\alpha^*$ ,  $Y_\alpha^0$  и  $n_\alpha$  – константы модели.

Рассмотрим частный случай *плоского состояния*, когда часть компонент тензоров  $T$  и  $S$  равна нулю:

$$S_{i3} = 0, \quad T_{13} = T_{23} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (5.377)$$

а остальные компоненты отличны от нуля (заметим, что компонента  $T_{33}$  может быть отлична от нуля). Тогда инварианты и девиаторы имеют вид:

$$Y_1^{(S)} = 0, \quad Y_2^{(S)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{S}_{11} + \bar{S}_{22}),$$

$$Y_3^{(S)} = \frac{1}{\sqrt{2}}|\bar{S}_{11} - \bar{S}_{22}|, \quad Y_4^{(S)} = 0, \quad Y_5^{(S)} = \sqrt{2}|\bar{S}_{12}|; \quad (5.378)$$

$$Y_1^{(T)} = \bar{T}_{33}, \quad Y_2^{(T)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{T}_{11} + \bar{T}_{22}),$$

$$Y_3^{(T)} = \frac{1}{\sqrt{2}}|\bar{T}_{11} - \bar{T}_{22}|, \quad Y_4^{(T)} = 0, \quad Y_5^{(T)} = \sqrt{2}|\bar{T}_{12}|, \quad (5.379)$$

$$P_{(3)11}^{(S)} = -P_{(3)22}^{(S)} = \frac{1}{2}(\bar{S}_{11} - \bar{S}_{22}), \quad P_{(5)12}^{(S)} = \bar{S}_{12}, \quad \text{остальные } P_{(\alpha)ij}^{(S)} = 0, \quad (5.380)$$

$$P_{(3)11}^{(T)} = -P_{(3)22}^{(T)} = \frac{1}{2}(\bar{T}_{11} - \bar{T}_{22}), \quad P_{(5)12}^{(T)} = \bar{T}_{12}, \quad \text{остальные } P_{(\alpha)ij}^{(T)} = 0. \quad (5.381)$$

Укороченное спектральное представление (соотношение (5.336) между девиаторами) для тензорной функции (5.374) и плоского состояния приобретает вид:

$$\begin{cases} \bar{S}_{11} + \bar{S}_{22} = C_{22}(\bar{T}_{11} + \bar{T}_{22}), \\ \bar{S}_{11} - \bar{S}_{22} = C_{33} \left( 1 - \omega_3 \left( \frac{|\bar{T}_{11} - \bar{T}_{22}|}{\sqrt{2}} \right) \right) (\bar{T}_{11} - \bar{T}_{22}), \\ \bar{S}_{12} = C_{55} (1 - \omega_5 (\sqrt{2} |\bar{T}_{12}|)) \bar{T}_{12}. \end{cases} \quad (5.382)$$

Часто необходимо иметь запись тензорной функции не в осях анизотропии  $Ox_i$ , а в осях  $Ox'_i$ , повернутых вокруг оси  $Ox_3$  в плоскости квазизотропии на угол  $\phi$ . Тогда  $T'_{ij}$  и  $S'_{ij}$  в этой повернутой системе координат связаны с  $\bar{T}_{ij}$  и  $\bar{S}_{ij}$  соотношениями:

$$\bar{T}_{ij} = P_i^k P_l^j T'_{kl}, \quad \bar{S}_{ij} = P_i^k P_l^j S'_{kl}, \quad (5.383)$$

где

$$P_i^k = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.384)$$

– матрица поворота, или в явном виде:

$$\begin{aligned} \bar{T}_{11} &= T'_{11} \cos^2 \phi + T'_{22} \sin^2 \phi - T'_{12} \sin 2\phi, \\ \bar{T}_{22} &= T'_{11} \sin^2 \phi + T'_{22} \cos^2 \phi + T'_{12} \sin 2\phi, \\ \bar{T}_{12} &= \frac{1}{2} (T'_{11} - T'_{22}) \sin 2\phi + T'_{12} \cos 2\phi. \end{aligned} \quad (5.385)$$

Соотношения (5.382) в повернутых осях примут вид:

$$\begin{cases} S'_{11} + S'_{22} = C_{22}(T'_{11} + T'_{22}), \\ (S'_{11} - S'_{22}) \cos 2\phi - 2S'_{12} \sin 2\phi = C_{33}(1 - \omega_3(Y_3^{(T)})) \times \\ \quad \times ((T'_{11} - T'_{22}) \cos 2\phi - 2T'_{12} \sin 2\phi), \\ (S'_{11} - S'_{22}) \sin 2\phi + 2S'_{12} \cos 2\phi = 2C_{55}(1 - \omega_5(Y_5^{(T)})) \times \\ \quad \times ((T'_{11} - T'_{22}) \sin 2\phi + 2T'_{12} \cos 2\phi). \end{cases} \quad (5.386)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \sqrt{2}Y_3^{(T)} &= |(T'_{11} - T'_{22}) \cos 2\phi - 2T'_{12} \sin 2\phi|, \\ \sqrt{2}Y_5^{(T)} &= |(T'_{11} - T'_{22}) \sin 2\phi + 2T'_{12} \cos 2\phi|. \end{aligned} \quad (5.387)$$

Важный частный случай представляют соотношения (5.386) при  $\phi = \pi/4$ :

$$\begin{cases} S'_{11} + S'_{22} = C_{22}(T'_{11} + T'_{22}), \\ S'_{12} = C_{33}(1 + \omega_3(\sqrt{2}|T'_{12}|))T'_{12}, \\ S'_{11} - S'_{22} = C_{55} \left(1 - \omega_5 \left(\frac{|T'_{11} - T'_{22}|}{\sqrt{2}}\right)\right)(T'_{11} - T'_{22}), \end{cases} \quad (5.388)$$

таким образом соотношения (5.388) являются двойственными к (5.382), записанным в осях анизотропии  $Ox^i$ .

## § 5.7. Непотенциальные тензорные функции

### 5.7.1. Представление непотенциальных функций в тензорном базисе

Наиболее часто в механике и физике применяются рассмотренные выше потенциальные тензорные функции, однако в ряде случаев встречаются также функции, не обладающие потенциалом  $\psi$ . Рассмотрим эти функции.

**ТЕОРЕМА 5.14.** Пусть имеется тензорная функция (5.1) второго ранга, являющаяся индифферентной относительно некоторой группы  $G_s$  (т.е. для нее выполняются условия (5.8) и (5.9)), но, вообще говоря, не обладающая свойством потенциальности (5.141):

$$S = \mathcal{F}(T) \quad (5.389)$$

или

$$\bar{S}^{ij} = \bar{\mathcal{F}}^{ij}(\bar{T}^{kl}), \quad (5.390)$$

где  $S$  и  $T$  – симметричные тензоры второго ранга, тогда эту тензорную функцию всегда можно представить в виде суммы:

$$S = \sum_{\alpha=1}^n \psi_{\alpha} H_{\alpha}^{(s)}, \quad (5.391)$$

где  $\psi_{\alpha}$  – скалярные индифферентные относительно  $G_s$  функции инвариантов тензора  $T$ :

$$\psi_{\alpha} = \psi_{\alpha}(I_1^{(s)}(T), \dots, I_r^{(s)}(T)), \quad \alpha = 1 \dots n, \quad (5.392)$$

а тензоры  $H_{\alpha}^{(s)}$  являются либо тензорами-константами:

$$H_{\alpha}^{(s)} = H_{\alpha}^{(0)}, \quad \alpha = 1 \dots m, \quad (5.393)$$

либо линейными тензорными функциями от  $T$ :

$$H_{\alpha}^{(s)} = {}^4H_{\alpha}^{(1)} \cdot T, \quad \alpha = m+1 \dots q, \quad (5.394)$$

либо квадратичными тензорными функциями:

$$H_{\alpha}^{(s)} = {}^6H_{\alpha}^{(2)} \dots T \otimes T, \quad \alpha = q+1 \dots n. \quad (5.395)$$

Число  $n$ , очевидно, не может быть больше 6.

Тензоры

$$H_{\alpha}^{(0)}, \quad {}^4H_{\alpha}^{(1)} \quad \text{и} \quad {}^6H_{\alpha}^{(2)} \quad (5.396)$$

являются индифферентными тензорами относительно группы  $G_s$  и состоят из образующих тензоров группы  $G_s$ .

Подставляя (5.392) – (5.395) в (5.391), получим представление не-потенциальной функции в тензорном базисе:

$$\begin{aligned} S = & \sum_{\alpha=1}^m \psi_{\alpha}(I_1^{(s)} \dots I_r^{(s)}) H_{\alpha}^{(0)} + \sum_{\alpha=m+1}^q \psi_{\alpha}(I_1^{(s)} \dots I_r^{(s)}) {}^4H_{\alpha}^{(1)} \cdot T + \\ & + \sum_{\alpha=q+1}^n \psi_{\alpha}(I_1^{(s)} \dots I_r^{(s)}) {}^6H_{\alpha}^{(2)} \dots T \otimes T. \end{aligned} \quad (5.397)$$

Докажем теорему 5.14 и возможность представления (5.397) конструктивным способом, т.е. указав метод построения тензоров  $H_{\alpha}^{(0)}$ ,  ${}^4H_{\alpha}^{(1)}$  и  ${}^6H_{\alpha}^{(2)}$ . Этому посвящены пп. 5.7.2 – 5.7.5.

### 5.7.2. Триклиновые тензорные функции

▼ Рассмотрим вначале тензорную функцию (5.390), индифферентную относительно триклининого  $E$ -класса.

Для тензора  $S$ , как для всякого симметричного тензора, можно записать его представление в диадном базисе, выбирая в качестве векторов базиса  $\bar{e}_i$ , с которыми связана группа симметрий  $G_s$ :

$$S = \bar{S}^{ij} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j = \bar{\mathcal{F}}^{ij} (\bar{T}^{kl}) \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j. \quad (5.398)$$

Если этот тензор  $S$  зависит от тензора  $T$ , то компоненты  $\bar{S}^{ij}$  в этом представлении являются функциями от компонент  $\bar{T}^{kl}$ , что и отражает второе равенство в (5.398).

Введем теперь обозначения:

$$\psi_{\alpha} = \bar{\mathcal{F}}^{\alpha\alpha} (\bar{T}^{kl}), \quad (5.399)$$

$$\psi_{\alpha+\beta} = 2\bar{\mathcal{F}}^{\beta\gamma} (\bar{T}^{kl}), \quad \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3, \quad \alpha \neq \beta \neq \gamma,$$

тогда (5.391) можно записать в виде:

$$\mathbf{S} = \sum_{\alpha=1}^3 (\psi_\alpha \bar{\mathbf{e}}_\alpha^2 + \frac{1}{2} \psi_{\alpha+3} \mathbf{O}_\alpha), \quad (5.400)$$

где  $\mathbf{O}_\alpha = \bar{\mathbf{e}}_\beta \otimes \bar{\mathbf{e}}_\gamma + \bar{\mathbf{e}}_\gamma \otimes \bar{\mathbf{e}}_\beta$  (см. табл.4.1).

Сравним теперь это представление (5.400) с представлением (5.174) в тензорном базисе для потенциальной тензорной функции, индифферентной относительно  $E$ -класса. Формальные записи этих представлений совпадают, причем в (5.174) коэффициенты  $\varphi_\alpha$ ,  $\alpha = 1 \dots 6$ , являются скалярными индифферентными потенциальными функциями инвариантов тензора  $\mathbf{T}$  относительно  $E$ -класса, т.е. зависят от всех компонент  $\bar{T}_{ij}$ .

В представлении (5.400)  $\psi_\alpha$  также согласно (5.399) зависят от всех шести компонент  $\bar{T}^{kl}$ . Если кроме того мы потребуем от тензорных функций (5.390) индифферентности только относительно триклинического класса, то функции (5.399), очевидно, будут скалярными функциями, индифферентными тоже относительно  $E$ -класса. В самом деле, при переходе из декартовой системы координат  $x^i$  в другую  $X^i$ , получаемую с помощью линейного преобразования (3.1) с матрицей  $B^i{}_j$ , соотношения (5.399) преобразуются согласно (5.9) следующим образом:

$$B^{i_1}_{k_1} B^{i_2}_{k_2} \mathcal{F}^{k_1 k_2} (\bar{T}^{j_1 j_2}) = \mathcal{F}^{i_1 i_2} (B^{j_1}_{l_1} B^{j_2}_{l_2} \bar{T}^{l_1 l_2}). \quad (5.401)$$

Но для триклинического класса  $B^i{}_j = \delta^i{}_j$ , поэтому соотношение (5.401) превращается в тождество и выполняется всегда, следовательно,  $\varphi_\alpha$  будут индифферентными скалярными функциями.

Таким образом, существует единственное отличие между (5.174) и (5.400): в первом случае функции  $\varphi_\alpha$  потенциальны, т.е. удовлетворяют условиям взаимности (5.184), а в (5.393) функции  $\psi_\alpha$  – вообще говоря, нет. Они являются произвольными функциями инвариантов тензора  $\mathbf{T}$  в триклиническом классе:

$$\psi_\alpha = \psi_\alpha (\bar{T}_{11}, \bar{T}_{22}, \bar{T}_{33}, \bar{T}_{23}, \bar{T}_{31}, \bar{T}_{12}) \quad (5.402)$$

Следовательно, представление (5.400), полученное без каких-либо предположений, является общим представлением для индифферентной относительно  $E$ -класса тензорной функции. Из него, в частности, следует, что если функция (5.390) потенциальна, то коэффициенты  $\varphi_\alpha$  не произвольны, а удовлетворяют условиям взаимности (5.184).

Если теперь в (5.400) обозначить тензоры как

$$\mathbf{H}_\alpha = \mathbf{H}_\alpha^{(0)} = \bar{\mathbf{e}}_\alpha^2, \quad \mathbf{H}_{\alpha+3}^{(0)} = \frac{1}{2} \mathbf{O}_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad (5.403)$$

то, очевидно, представление (5.400) будет в точности совпадать с (5.391). Отсюда следует, что для триклинического класса представление

(5.391) действительно существует, причем линейные и квадратичные тензорные функции в нем отсутствуют:

$${}^4H_{\alpha}^{(1)} = 0 \quad \text{и} \quad {}^6H_{\alpha}^{(2)} = 0, \quad m = n = 6. \quad (5.404)$$

### 5.7.3. Доказательство представления функций в тензорном базисе

Докажем теперь возможность представления (5.397) для тензорных функций из следующих классов симметрии:  $M, O, T, K_3, A, B$  и  $K$ , исключая пока трансверсально-изотропный ( $T_3$ ), гексагональный ( $H$ ) и изотропный ( $I$ ) классы.

Выберем для каждого из этих классов функциональный базис независимых инвариантов тензора  $T$ :

$$I_{\alpha}^{(s)} = I_{\alpha}^{(s)}(T), \quad \alpha = 1 \dots r. \quad (5.405)$$

Число  $r$  этих инвариантов относительно указанных выше классов, как следует из теоремы 4.24, максимально и равно шести.

Данные инварианты являются линейными, либо квадратичными, либо кубическими функциями от  $T$  (см. (5.169), (5.170)). Введем обозначения:  $m$  - число линейных и  $(q - m)$  - число квадратичных инвариантов.

Дифференцируя инварианты (5.405) по  $T$ , получим тензоры производной (см. п. 5.2.2), для которых введем обозначения:

$$H_{\alpha}^{(s)} = \frac{\partial I_{\alpha}^{(s)}}{\partial T}, \quad \alpha = 1, \dots, n, \quad n = r = 6. \quad (5.406)$$

Используя правила дифференцирования инвариантов (5.171), получим, что

$$H_{\alpha}^{(s)} = H_{\alpha}^{(0)} = \Omega_{\alpha}^{(s)}, \quad \alpha = 1, \dots, m,$$

$$H_{\alpha}^{(s)} = 2^4 \Omega_{\alpha}^{(s)\{\cdot\}} \cdot T, \quad \alpha = m + 1, \dots, q, \quad (5.407)$$

$$H_{\alpha}^{(s)} = 3^6 \Omega_{\alpha}^{(s)\{\cdot\}} \cdots T \otimes T, \quad \alpha = q + 1, \dots, n.$$

Введем обозначения для тензоров-констант:

$${}^4H_{\alpha}^{(1)} = 2^4 \Omega_{\alpha}^{(s)\{\cdot\}}, \quad \alpha = m + 1, \dots, q, \quad (5.408)$$

$${}^6H_{\alpha}^{(2)} = 3^6 \Omega_{\alpha}^{(s)\{\cdot\}}, \quad \alpha = q + 1, \dots, n.$$

Как было показано в п. 5.2.6, для всех групп симметрии тензоры  $\Omega_{\alpha}^{(s)}$ ,  ${}^4\Omega_{\alpha}^{(s)}$  и  ${}^6\Omega_{\alpha}^{(s)}$ , а, следовательно, и  $H_{\alpha}^{(0)}$ ,  ${}^4H_{\alpha}^{(1)}$  и  ${}^6H_{\alpha}^{(2)}$  являются индифферентными относительно соответствующих групп  $G$ . Это означает, что и тензорные функции (5.407) также индифферентны.

Кроме того, тензоры  $H_{\alpha}^{(s)}$ ,  $\alpha = 1 \dots n$ , для фиксированной группы  $G_s$  – линейно независимы. В самом деле, в противном случае можно было бы выразить какой-либо тензор через все остальные:

$$H_{\beta}^{(s)} = \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq \beta}}^n k_{\alpha} H_{\alpha}^{(s)}.$$

Но согласно (5.406), тогда имело бы место соотношение между инвариантами:

$$I_{\beta}^{(s)} - \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq \beta}}^n k_{\alpha} I_{\alpha}^{(s)} = \text{const},$$

что противоречит условию о независимости  $I_{\alpha}^{(s)}$ .

Поскольку  $H_{\alpha}^{(s)}$  являются симметричными тензорами второго ранга, то их можно всегда представить в декартовом базисе:

$$H_{\alpha}^{(s)} = \bar{H}_{\alpha}^{ij} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j, \quad \alpha = 1 \dots n. \quad (5.409)$$

Используя тензоры  $\bar{e}_{\alpha}^2$  и  $O_{\alpha}$ , это представление можно записать подобно (5.400):

$$H_{\alpha}^{(s)} = \sum_{\beta=1}^3 \left( \bar{H}_{\alpha\beta} \bar{e}_{\beta}^2 + \frac{1}{2} \bar{H}_{\alpha,3+\beta} O_{\beta} \right), \quad \alpha = 1 \dots 6, \quad (5.410)$$

где обозначены компоненты тензора:

$$\bar{H}_{\alpha\beta} = \bar{H}_{\alpha}^{\beta\beta}, \quad \beta = 1, 2, 3, \quad (5.411)$$

$$\bar{H}_{\alpha 4} = 2 \bar{H}_{\alpha}^{23}, \quad \bar{H}_{\alpha 5} = 2 \bar{H}_{\alpha}^{31}, \quad \bar{H}_{\alpha 6} = 2 \bar{H}_{\alpha}^{12}.$$

На (5.410) можно смотреть как на систему шести линейных уравнений относительно шести неизвестных тензоров  $\bar{e}_{\beta}^2$  и  $O_{\beta}$ ,  $\beta = 1, 2, 3$ .

Поскольку тензоры  $H_{\alpha}^{(s)}$  – линейно независимы, то решение такой системы существует и его можно записать в виде:

$$\bar{e}_{\beta}^2 = \sum_{\alpha=1}^6 \psi_{\beta\alpha} H_{\alpha}^{(s)}, \quad (5.412)$$

$$O_{\beta} = \sum_{\alpha=1}^6 \psi_{3+\beta,\alpha} H_{\alpha}^{(s)}, \quad \beta = 1, 2, 3,$$

где коэффициенты  $\psi_{\alpha\beta}$  зависят от  $\bar{H}_{\alpha\beta}$  и, следовательно, являются функциями  $\bar{H}_{\alpha}^{ij}$ , а значит и от компонент  $\bar{T}^{ij}$  тензора  $T$ :

$$\psi_{\alpha\beta} = \psi_{\alpha\beta}(\bar{T}^{ij}). \quad (5.413)$$

Однако, вообще говоря,  $\psi_{\alpha\beta}$  не являются функциями инвариантов  $I_{\alpha}^{(s)}(T)$ .

Используем теперь для тензора  $S$  представление (5.400) в декартовом базисе и подставим в него выражение (5.412):

$$S = \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^6 \left( \varphi_{\alpha} \psi_{\alpha\beta} H_{\beta}^{(s)} + \frac{1}{2} \varphi_{\alpha+3} \psi_{\alpha+3,\beta} H_{\beta}^{(s)} \right). \quad (5.414)$$

Вводя обозначения для коэффициентов

$$\psi_{\beta} = \sum_{\alpha=1}^6 \left( \varphi_{\alpha} \psi_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \varphi_{\alpha+3} \psi_{\alpha+3,\beta} \right), \quad \beta = 1 \dots 6, \quad (5.415)$$

из (5.414) получаем искомое представление (5.391).

Коэффициенты  $\psi_{\beta}$  в этом представлении действительно являются, в отличие от  $\varphi_{\alpha}$  и  $\psi_{\alpha\beta}$ , индифферентными скалярными функциями от  $T$ , так как  $H_{\beta}^{(s)}(T)$  и сама  $S(T)$  по условию – индифферентные функции. Тогда  $\psi_{\beta}$  всегда можно считать зависящими от инвариантов  $I_{\alpha}^{(s)}(T)$  в виде (5.392).

Таким образом, возможность представления тензорной функции в виде (5.391), а также теорема 5.14 доказаны.

Подставим теперь выражение (5.407) в (5.397). В результате получим:

$$\begin{aligned} S = & \sum_{\alpha=1}^m \psi_{\alpha} \Omega_{\alpha}^{(s)} + \sum_{\alpha=m+1}^q 2\psi_{\alpha}^4 \Omega_{\alpha}^{(s)(\cdot)} \dots T + \\ & + \sum_{\alpha=q+1}^n 3\psi_{\alpha}^6 \Omega_{\alpha}^{(s)\{\cdot\}} \dots T \otimes T. \end{aligned} \quad (5.416)$$

Сравнивая это выражение с (5.172), убеждаемся в их формальном сходстве, однако в (5.172) функции  $\varphi_{\alpha}$  не произвольны, а потенциальны, т.е. удовлетворяют условиям взаимности (5.184). На  $\psi_{\alpha}$  в (5.416) этого ограничения нет.

Итак, показано, что произвольная непотенциальная, вообще говоря, тензорная функция (5.390), индифферентная относительно группы  $G_s$ ,

может быть представлена в тензорном базисе в виде квадратичной функции (5.416).

#### 5.7.4. Непотенциальные тензорные функции для различных классов симметрии

Для конкретных классов симметрии:  $E$ ,  $M$ ,  $O$ ,  $T$ ,  $K_3$ ,  $A$ ,  $B$  и  $K$  – представление (5.416) формально совпадает с соответствующими представлениями (5.174) – (5.181) для потенциальных функций, однако функции  $\varphi_\alpha$  в них уже, вообще говоря, непотенциальны.

Учитывая произвольность непотенциальных функций  $\varphi_\alpha$  в (5.174) – (5.181), выражения для тензорных функций в некоторых классах можно упростить, обозначая комбинации из  $\varphi_\alpha$ , стоящие при индифферентных тензорах, новой буквой. Ниже представлены непотенциальные тензорные функции различных классов, преобразованные таким образом.

( $E$ )-Триклинический класс: вид тензорных функций совпадает с (5.174).

( $M$ )-Моноклинический класс: вид тензорных функций совпадает с (5.175).

( $O$ )-Ортотропный класс: вид тензорных функций совпадает с (5.176).

( $T$ )-Тетрагональный класс:

$$\begin{aligned} S = \psi_1 E + \psi_2 \bar{e}_3^2 + & \left( \psi_3 (\mathbf{O}_1 \otimes \mathbf{O}_1 + \mathbf{O}_2 \otimes \mathbf{O}_2) + \right. \\ & \left. + \psi_4 (\bar{e}_1^2 \otimes \bar{e}_1^2 + \bar{e}_2^2 \otimes \bar{e}_2^2) + \psi_5 \Delta + \psi_6 \Omega_{3h} \right) \cdot \cdot T, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{S}^{ij} = \psi_1 \delta^{ij} + \psi_2 \delta_3^i \delta_3^j + 2\psi_3 ((\delta_2^i \delta_3^j + \delta_3^i \delta_2^j) \bar{T}_{23} + \\ + (\delta_1^i \delta_3^j + \delta_3^i \delta_1^j) \bar{T}_{13}) + \psi_4 (\delta_1^i \delta_1^j \bar{T}_{11} + \delta_2^i \delta_2^j \bar{T}_{22}) + \psi_5 \bar{T}^{ij} + \\ + \psi_6 ((\delta_1^i \delta_2^j + \delta_2^i \delta_1^j) (\bar{T}_{11} - \bar{T}_{22}) + 2\bar{T}_{12} (\delta_1^i \delta_1^j - \delta_2^i \delta_2^j)). \end{aligned}$$

( $K_3$ )-Квазитрансверсально-изотропный класс:

$$\begin{aligned} S = \psi_1 E + \psi_2 \bar{e}_3^2 + & \left( \psi_3 (\mathbf{O}_1 \otimes \mathbf{O}_1 + \mathbf{O}_2 \otimes \mathbf{O}_2) + \right. \\ & \left. + \psi_4 (\bar{e}_1^2 \otimes \bar{e}_1^2 + \bar{e}_2^2 \otimes \bar{e}_2^2) + \psi_5 \Delta \right) \cdot \cdot T + \psi_6 T^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{S}^{ij} = \psi_1 \delta^{ij} + \psi_2 \delta_3^i \delta_3^j + 2\psi_3 ((\delta_2^i \delta_3^j + \delta_3^i \delta_2^j) \bar{T}_{23} + \\ + (\delta_1^i \delta_3^j + \delta_3^i \delta_1^j) \bar{T}_{13}) + \psi_4 (\delta_1^i \delta_1^j \bar{T}_{11} + \delta_2^i \delta_2^j \bar{T}_{22}) + \\ + \psi_5 \bar{T}^{ij} + \psi_6 \bar{T}^i_k \bar{T}^{kj}. \end{aligned}$$

(A)-Ромбоэдрический класс ( $m = 2, m_2 = 4, m_3 = 0$ ):

$$\mathbf{S} = \psi_1 \mathbf{E} + \psi_2 \bar{\mathbf{e}}_3^2 + \left( \psi_3 (\mathbf{O}_1 \otimes \mathbf{O}_1 + \mathbf{O}_2 \otimes \mathbf{O}_2) + \right. \\ \left. + \psi_4 \mathbf{D}_3 + \psi_5 \Delta + \psi_6 \Omega_{3d} \right) \cdot \cdot \mathbf{T},$$

$$\bar{S}^{ij} = \psi_1 \delta^{ij} + \psi_2 \delta_3^i \delta_3^j + \psi_5 \bar{T}^{ij} + (2\psi_3 \bar{T}_{23} - 2\psi_4 \bar{T}_{12} + \\ + \psi_6 (\bar{T}_{11} - \bar{T}_{22})) (\delta_2^i \delta_3^j + \delta_3^i \delta_2^j) + (\delta_1^i \delta_3^j + \delta_3^i \delta_1^j) (2\psi_3 \bar{T}_{13} + \\ + \psi_4 (\bar{T}_{11} - \bar{T}_{22}) + 2\psi_6 \bar{T}_{12}) + 2(\delta_1^i \delta_1^j - \delta_2^i \delta_2^j) (\psi_4 \bar{T}_{13} + \psi_6 \bar{T}_{23}) + \\ + 2(\delta_1^i \delta_2^j + \delta_2^i \delta_1^j) (\psi_6 \bar{T}_{13} - \psi_4 \bar{T}_{23}).$$

(B)-Ромбоэдрический класс:

$$\mathbf{S} = \psi_1 \mathbf{E} + \psi_2 \bar{\mathbf{e}}_3^2 + \left( \psi_3 (\mathbf{O}_1 \otimes \mathbf{O}_1 + \mathbf{O}_2 \otimes \mathbf{O}_2) + \right. \\ \left. + \psi_4 \mathbf{D}_3 + \psi_5 \Delta \right) \cdot \cdot \mathbf{T} + \psi_6 \mathbf{T}^2,$$

$$\bar{S}^{ij} = \psi_1 \delta^{ij} + \psi_2 \delta_3^i \delta_3^j + 2(\psi_3 \bar{T}_{23} - \psi_4 \bar{T}_{12}) (\delta_2^i \delta_3^j + \delta_3^i \delta_2^j) + \\ + (2\psi_3 \bar{T}_{13} + \psi_4 (\bar{T}_{11} - \bar{T}_{22})) (\delta_1^i \delta_3^j + \delta_3^i \delta_1^j) + \psi_5 \bar{T}^{ij} + \\ + 2\psi_4 (\bar{T}_{13} (\delta_1^i \delta_1^j - \delta_2^i \delta_2^j) - \bar{T}_{23} (\delta_1^i \delta_2^j + \delta_2^i \delta_1^j)) + \psi_6 \bar{T}_k^i \bar{T}^{kj}.$$

(K)-Квазизотропный класс:

$$\mathbf{S} = \psi_1 \mathbf{E} + (\psi_2 \Delta + \psi_3 \mathbf{O}_h) \cdot \cdot \mathbf{T} + \\ + (\psi_4 {}^6 \mathbf{O}_n + \psi_5 {}^6 \mathbf{O}_m + \psi_6 \Delta \cdot \Delta) \cdot \cdot \cdot \mathbf{T} \otimes \mathbf{T},$$

$$\bar{S}^{ij} = \psi_1 \delta^{ij} + \psi_2 \bar{T}^{ij} + \sum_{\alpha=1}^3 (\psi_3 + \psi_4 \bar{T}_{\alpha\alpha}) \delta_\alpha^i \delta_\alpha^j \bar{T}_{\alpha\alpha} + \\ + \psi_6 \bar{T}_k^i \bar{T}^{kj} + \frac{\psi_5}{6} (\bar{T}_{12} \bar{T}_{13} (\delta_2^i \delta_3^j + \delta_3^i \delta_2^j) + \\ + \bar{T}_{12} \bar{T}_{23} (\delta_1^i \delta_3^j + \delta_3^i \delta_1^j) + \bar{T}_{13} \bar{T}_{23} (\delta_1^i \delta_2^j + \delta_2^i \delta_1^j)).$$

Все скалярные функции  $\psi_\gamma$  в этих формулах являются функциями соответствующих инвариантов  $I_\gamma^{(s)}(\mathbf{T})$ . Однако, в отличие от потенциальных функций  $\varphi_\gamma$ , это могут быть любые наборы независимых

инвариантов в классе, не обязательно те, которые представлены в (5.174) - (5.183), так как для непотенциальных тензорных функций базисные тензоры  $H_{\alpha}^{(s)}$ , вообще говоря, не связаны с инвариантами  $I_{\gamma}^{(s)}(T)$ .

### 5.7.5. Трансверсально-изотропные и гексагональные тензорные функции

Эти два класса симметрии отличаются от остальных, рассмотренных выше, тем, что функциональный базис независимых инвариантов  $I_{\gamma}^{(s)}(T)$  у них состоит из пяти, а не из шести элементов. Поэтому если тензорный базис  $H_{\alpha}^{(s)}$  выбирать только из тензоров производной от инвариантов, то этот базис может оказаться неполным.

Действительно, для  $T_3$ -класса тензоры  $H_{\alpha}^{(s)}$ , построенные указанным способом, имеют вид:

$$H_1 = E - \bar{e}_3^2,$$

$$H_2 = \bar{e}_3^2, \quad m = 2,$$

$$H_3 = \frac{1}{2} (O_1 \otimes O_1 + O_2 \otimes O_2) \cdot \cdot T, \quad (5.417)$$

$$H_4 = (2\Delta - (O_1 \otimes O_1 - O_2 \otimes O_2) - 2\bar{e}_3^2 \otimes \bar{e}_3^2) \cdot \cdot T,$$

$$H_5 = T^2 - I_1(T)T + EI_2(T).$$

К ним можно присоединить еще один тензор  $H_6$ , являющийся квадратичной тензорной функцией:

$$H_6 = (E \otimes E \otimes \bar{e}_3^2)^{(146352)} \cdot \cdot \cdot T \otimes T. \quad (5.418)$$

В декартовых компонентах эти тензоры имеют вид:

$$\bar{H}_1^{ij} = \delta^{ij} - \delta_3^i \delta_3^j, \quad \bar{H}_2^{ij} = \delta_3^i \delta_3^j,$$

$$\bar{H}_3^{ij} = (\delta_2^i \delta_3^j + \delta_3^i \delta_2^j) \bar{T}_{23} + (\delta_1^i \delta_3^j + \delta_3^i \delta_1^j) \bar{T}_{13},$$

$$\bar{H}_4^{ij} = 2(\bar{T}^{ij} - \bar{T}_{33} \delta^{ij} - \bar{H}_3^{ij}), \quad (5.419)$$

$$\bar{H}_5^{ij} = \bar{T}^{ik} \bar{T}_k^j - I_1 \bar{T}^{ij} + I_2 \delta^{ij}, \quad \bar{H}_6^{ij} = \bar{T}^i_3 \bar{T}^j_3.$$

Все шесть тензоров являются линейно независимыми, в чем можно убедиться непосредственно, составив определитель матрицы  $\bar{H}_{\alpha\beta}$  размером  $6 \times 6$  с компонентами (5.411), а в качестве  $\bar{H}_{\alpha}^{ij}$  использовав (5.419). Этот определитель, очевидно, будет отличен от нуля, если

компоненты тензора  $\bar{T}^{ij}$  взять как максимально возможные (см. замечание к п.4.4.4).

Заметим, однако, что все инварианты, образованные из тензора  $H_6$ , например:

$$\begin{aligned} H_6 \cdot \cdot E &= \bar{T}_3^i \bar{T}_{i3}, \quad H_6 \cdot \cdot \bar{e}_3^2 = \bar{T}_{33}^2, \\ H_6 \cdot \cdot T &= \bar{T}_3^i \bar{T}_3^j \bar{T}_{ij}, \end{aligned} \quad (5.420)$$

уже не являются независимыми и выражаются через  $I_1^{(3)} \dots I_5^{(3)}$  (см. упражнения к §4.5).

Тем не менее тензор  $H_6$ , являясь индифферентным относительно  $T_3$ -класса (что следует из индифферентности  $E$  и  $\bar{e}_3$  в (5.418)), замыкает систему (5.417) базисных тензоров  $H_\alpha^{(s)}$  и делает возможным применение далее всей процедуры выражения тензоров  $\bar{e}_\alpha^2$  и  $O_\alpha$  согласно (5.412). В итоге для трансверсально-изотропной тензорной функции (5.390) доказываем возможность представления (5.414) и, следовательно, (5.391) и (5.397).

В явном виде это представление будет иметь вид:

$$\begin{aligned} S = \psi_1 E + \psi_2 \bar{e}_3^2 + & \left( \psi_3 (O_1 \otimes O_1 + O_2 \otimes O_2) + \right. \\ & \left. + \psi_4 \Delta \right) \cdot \cdot T + \psi_5 T^2 + \psi_6 (E \otimes E \otimes \bar{e}_3^2)^{(146352)} \dots \cdot T \otimes T, \end{aligned} \quad (5.421)$$

или в компонентах

$$\begin{aligned} \bar{S}^{ij} = \psi_1 \delta^{ij} + \psi_2 \delta_3^i \delta_3^j + 2\psi_3 & \left( (\delta_1^i \delta_3^j + \delta_3^i \delta_2^j) \bar{T}_{23} + \right. \\ & \left. + (\delta_1^i \delta_3^j + \delta_3^i \delta_1^j) \bar{T}_{13} \right) + \psi_4 \bar{T}^{ij} + \psi_5 \bar{T}^{ik} \bar{T}_k^j + \psi_6 \bar{T}_3^i \bar{T}_3^j, \end{aligned}$$

где все  $\psi_\alpha$  являются функциями пяти инвариантов, например  $I_7^{(3)}$ :

$$\psi_\alpha = \psi_\alpha (\bar{T}_{11} + \bar{T}_{22}, \bar{T}_{33}, \bar{T}_{13}^2 + \bar{T}_{23}, \bar{T}_{11}^2 + \bar{T}_{22}^2 + 2\bar{T}_{12}^2, \det T), \quad (5.422)$$

$$\alpha = 1, \dots, 6.$$

Сравнивая (5.421), (5.422) с (5.182), находим, что в отличие от других рассмотренных выше классов симметрий, различие между потенциальными и непотенциальными трансверсально-изотропными функциями заключается не только в том, что  $\varphi_\alpha$  в (5.182) потенциальны, а  $\psi_\alpha$  в (5.421) – нет. Для непотенциальной функции появляется еще одно квадратичное слагаемое и, соответственно, дополнительная функция  $\psi_6$ .

Все проделанные выше построения, а также итоговое представление (5.421) и (5.422), справедливы и для случая гексагональной тензорной функции, поскольку тензор  $H_6$  является, очевидно, индифферентным и относительно  $H$ -класса. На этом завершим доказательство теоремы 5.14, оставив изотропный случай как отдельное утверждение.

▲

### 5.7.6. Теорема об инвариантах тензоров, связанных тензорной функцией

Перед тем как перейти к изотропным тензорным функциям, установим связь между инвариантами  $I_\gamma(T)$  тензора  $T$  и инвариантами  $I_\gamma(S)$  тензора  $S$  относительно одной и той же группы  $G_s$ , если эти тензоры связаны, вообще говоря, непотенциальной тензорной функцией (5.389), индифферентной относительно  $G_s$ .

Каждый из инвариантов  $I_\gamma(T)$ ,  $\gamma = 1 \dots r$ , является, как было отмечено в п.5.2.1, скалярной тензорной функцией, индифферентной относительно группы  $G_s$ , т.е. удовлетворяет условию (5.856):

$$I_\gamma(T) = I_\gamma(Q^T \cdot T \cdot Q), \quad \forall Q \in \{G_s\}, \quad (5.423)$$

где  $Q$  - тензор линейных преобразований из группы  $G_s$ .

Построим теперь некоторый инвариант  $I'_\gamma(S)$  тензора  $S$  относительно той же группы  $G_s$ . Знак " $'$ " означает, что структура зависимости  $I'_\gamma$  от  $S$  может отличаться от любой из функций  $I_\gamma(T)$ , но из инвариантности  $I'_\gamma$  вытекает, что

$$I'_\gamma(S) = I'_\gamma(Q^T \cdot S \cdot Q), \quad \forall Q \in \{G_s\}. \quad (5.424)$$

Так как  $S$  является функцией от  $T$ , то  $I'_\gamma(S)$  можно рассматривать как некоторую скалярную функцию от  $T$ :

$$I'_\gamma(S) = I'_\gamma(\mathcal{F}(T)) = \bar{I}'_\gamma(T). \quad (5.425)$$

Покажем, что эта функция  $\bar{I}'_\gamma(T)$  также является индифферентной относительно  $G_s$ . Используем свойство индифферентности функции (5.389), которое можно записать в виде:

$$Q^T \cdot \mathcal{F}(T) \cdot Q = \mathcal{F}(Q^T \cdot T \cdot Q). \quad (5.426)$$

Тогда инвариант  $\bar{I}'_\gamma$  при линейных преобразованиях в группе  $G_s$  преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{I}'_\gamma(T) &= I'_\gamma(\mathcal{F}(T)) = I'_\gamma(Q^T \cdot \mathcal{F}(T) \cdot Q) = \\ &= I'_\gamma(\mathcal{F}(Q^T \cdot T \cdot Q)) = \bar{I}'_\gamma(Q^T \cdot T \cdot Q), \end{aligned} \quad (5.427)$$

т.е. удовлетворяет свойству (5.423). Но всякая скалярная функция от  $T$ , индифферентная относительно  $G_s$ , является по определению инвариантом относительно этой группы.

Таким образом, доказана следующая теорема.

**ТЕОРЕМА 5.15.** *Если два тензора  $S$  и  $T$  связаны индифферентной относительно  $G$ , тензорной функцией (5.389), то любой инвариант от одного тензора  $I'_\gamma(S)$  является одновременно инвариантом другого тензора  $T$  относительно той же группы симметрии  $G_s$ .*

### 5.7.7. Теорема о соосности тензоров, связанных изотропной тензорной функцией

**ТЕОРЕМА 5.16.** *Пусть два симметричных тензора  $S$  и  $T$  связаны тензорной функцией (5.389), являющейся индифферентной относительно изотропного класса  $I$  (такие функции будем называть изотропными), тогда эти тензоры  $S$  и  $T$  являются соосными (см. п. 1.6.1), т.е. имеют один и тот же собственный базис.*

▼ Как было показано в п.4.1.5, всякий симметричный тензор  $T$  обладает группой симметрии  $G'_9$ , принадлежащей к классу  $O$ -ортотропии, причем оси анизотропии  $e'_\alpha$  совпадают с осями собственного базиса  $\overset{\circ}{e}_\alpha$ . Иначе говоря,  $T$  индифферентен относительно  $O'$ -класса, т.е. для него выполняются соотношения (4.17):

$$T = Q'^T \cdot T \cdot Q', \quad \forall Q' \in \{G'_9\}, \quad (5.428)$$

где  $Q'$  - ортогональный тензор линейных преобразований из группы ортотропии  $G'_9$  с осями анизотропии вдоль  $\overset{\circ}{e}_\alpha$ .

Составим теперь тензор:  $Q'^T \cdot S \cdot Q'$  и преобразуем его следующим образом:

$$Q'^T \cdot S \cdot Q' = Q'^T \cdot \mathcal{F}(T) \cdot Q' = \mathcal{F}(Q'^T \cdot T \cdot Q') = \mathcal{F}(T) = S. \quad (5.428')$$

Здесь учтено, что  $\mathcal{F}(T)$  - изотропная функция, следовательно, для нее второе равенство в строке имеет место для произвольного ортогонального тензора, в том числе и для  $Q'$ .

Из соотношения (5.428') следует, что тензор  $S$  индифферентен относительно той же группы ортотропии  $G'_9$ . Но ортотропный тензор второго ранга, как было установлено в п.5.1.7, имеет диагональный вид в осях анизотропии, а значит оси анизотропии  $e' = \overset{\circ}{e}$ ; совпадают с собственными направлениями тензора  $S$  в силу единственности последних.

Таким образом, действительно собственные базисы тензоров  $S$  и  $T$  совпадают. ▲

### 5.7.8. Представление изотропной функции в тензорном базисе

Рассмотрим вновь тензорную функцию (5.389), предполагая ее индифферентной относительно класса изотропии. Поскольку тензоры  $S$

и  $T$ , связываемые этой функцией, соосны, то их можно записать в едином собственном базисе:

$$S = \sum_{\alpha=1}^3 S_\alpha \overset{\circ}{e}_\alpha \otimes \overset{\circ}{e}_\alpha, \quad T = \sum_{\alpha=1}^3 T_\alpha \overset{\circ}{e}_\alpha \otimes \overset{\circ}{e}_\alpha. \quad (5.429)$$

Выберем в качестве базисных тензоров  $H_\alpha$  следующие:

$$H_1 = E = \sum_{\alpha=1}^3 \overset{\circ}{e}_\alpha \otimes \overset{\circ}{e}_\alpha, \quad H_2 = T = \sum_{\alpha=1}^3 T_\alpha \overset{\circ}{e}_\alpha^2 \otimes \overset{\circ}{e}_\alpha, \quad (5.430)$$

$$H_3 = T^2 = \sum_{\alpha=1}^3 T_\alpha^2 \overset{\circ}{e}_\alpha \otimes \overset{\circ}{e}_\alpha.$$

Поскольку при изучении инвариантных характеристик мы рассматриваем тензоры с максимально возможными ненулевыми и различными компонентами (см. п. 4.4.4), то эти тензоры  $H_\alpha$  всегда будут линейно независимыми. Тогда так же, как это было проделано в п. 5.7.3, можно рассматривать (5.430) как систему линейных уравнений относительно трех тензоров  $\overset{\circ}{e}_\alpha \otimes \overset{\circ}{e}_\alpha$ . Найдем эти тензоры:

$$\overset{\circ}{e}_\alpha \otimes \overset{\circ}{e}_\alpha = \sum_{\beta=1}^3 \psi_{\alpha\beta} H_\beta, \quad (5.431)$$

причем коэффициенты  $\psi_{\alpha\beta}$  зависят только от  $T_\alpha$ , которые являются инвариантами тензора  $T$ :

$$\psi_{\alpha\beta} = \psi_{\alpha\beta}(I_1(T), I_2(T), I_3(T)). \quad (5.432)$$

Подставляя далее тензоры (5.431) в (5.429), получим представление тензора  $S$  по базисным тензорам  $H_\beta$ . Оно состоит из трех слагаемых:

$$S = \psi_1 E + \psi_2 T + \psi_3 T^2, \quad (5.433)$$

где

$$\psi_\beta = \sum_{\alpha=1}^3 \psi_{\alpha\beta} S_\alpha. \quad (5.434)$$

Поскольку  $\psi_{\alpha\beta}$  являются функциями от инвариантов тензора  $T$ , а собственные значения  $S_\alpha$  тензора  $S$  согласно теореме 5.15, всегда можно считать функциями от  $I_\gamma(T)$ , то функции  $\psi_\beta$  – тоже есть функции от инвариантов тензора  $T$ :

$$\psi_\beta = \psi_\beta(I_1(T), I_2(T), I_3(T)). \quad (5.435)$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

**ТЕОРЕМА 5.17.** *Всякая изотропная тензорная функция (5.390), связывающая симметричные тензоры второго ранга, может быть представлена в виде (5.433), который является частным случаем представления в тензорном базисе (5.397).*

Представление (5.433) отличается от представлений в других классах: оно содержит только три базисных тензора. Функции  $\psi_\beta$  (5.435), вообще говоря, не являются потенциальными.

### 5.7.9. Полиномиальные изотропные тензорные функции

Рассмотрим непотенциальную изотропную тензорную функцию от несимметричного тензора  $T$ , а именно *полиномиальную* функцию, образованную тензорными степенями:

$$S = \mathcal{F}(T) = c_0 E + c_1 T + c_2 T^2 + c_3 T^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n T^n, \quad (5.436)$$

где под  $T^0$  понимается метрический тензор  $E$ , а  $c_n$  - константы.

**ТЕОРЕМА 5.18.** *Функция (5.436) является изотропной.*

▼ Действительно, так как при замене  $T$  на  $Q^T \cdot T \cdot Q$ , где  $Q$  - произвольный ортогональный тензор, тензорные степени преобразуются как

$$\begin{aligned} (Q^T \cdot T \cdot Q)^n &= \underbrace{(O^T \cdot T \cdot O) \cdot Q^T \cdot T \cdot Q \cdot \dots \cdot Q^T \cdot T \cdot Q}_{n} = \\ &= Q^T \cdot \underbrace{T \cdot T \cdot \dots \cdot T}_{n} \cdot Q = Q^T \cdot T^n \cdot Q, \end{aligned}$$

а, следовательно, полиномиальная функция (5.436) удовлетворяет условию (5.9):

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(Q^T \cdot T \cdot Q) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n (Q^T \cdot T \cdot Q)^n = \\ &= Q^T \cdot \left( \sum_{n=0}^{\infty} c_n T^n \right) \cdot Q = Q^T \cdot \mathcal{F}(T) \cdot Q. \quad \blacktriangle \end{aligned} \quad (5.437)$$

Записывая тензор  $T$  в собственном базисе (1.174):

$$T = \sum_{\alpha=1}^3 \lambda_\alpha \overset{\circ}{e}_\alpha \otimes \overset{\circ}{e}^\alpha, \quad (5.438)$$

любую целую степень  $T^n$  также можно представить в виде диагонального тензора в том же базисе (1.180):

$$T^n = \sum_{\alpha=1}^3 \lambda_\alpha^n \overset{\circ}{e}_\alpha \otimes \overset{\circ}{e}^\alpha. \quad (5.439)$$

Тогда полиномиальная функция (5.436) может быть представлена в виде:

$$S = \sum_{\alpha=1}^3 \left( \sum_{n=1}^{\infty} c_n \lambda_\alpha^n \right) \overset{\circ}{e}_\alpha \otimes \overset{\circ}{e}^\alpha = \sum_{\alpha=1}^3 f(\lambda_\alpha) \overset{\circ}{e}_\alpha \otimes \overset{\circ}{e}^\alpha, \quad (5.440)$$

где

$$f(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \lambda^n. \quad (5.441)$$

Таким образом, всякой полиномиальной изотропной тензорной функции  $\mathcal{F}(T)$  (5.436) может быть сопоставлена обычная функция  $f(\lambda)$ , которая имеет аналогичную структуру, если аргумент  $T$  заменить на  $\lambda$ .

Очевидно, что верно и обратное утверждение: по всякой полиномиальной обычной функции можно образовать изотропную тензорную функцию (5.440).

Используя это свойство изотропных функций, можно построить тензорные функции – аналоги элементарных функций. Для этого надо представить эти функции разложением в степенные ряды (5.441) в окрестности точки  $\lambda = 0$ , сходящиеся в некотором интервале  $|\lambda| \leq \lambda_0$ , а затем, заменяя  $\lambda$  на  $T$ , построить тензорную функцию – аналог (5.440).

Например, функция "синус от тензора" будет иметь вид:

$$S = \sin T = T - \frac{1}{3!} T^3 + \frac{1}{5!} T^5 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} T^{2n+1}, \quad (5.442)$$

"косинус от тензора":

$$S = \cos T = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} T^{2n}, \quad (5.443)$$

"логарифм от тензора":

$$S = \ln(E + T) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} T^n, \quad (5.444)$$

”экспонента от тензора”:

$$S = \exp T = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} T^n. \quad (5.445)$$

Для экспоненты от тензора, очевидно, выполняются свойства обычной экспоненты, например:

$$\begin{aligned} \exp(T_1 + T_2) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (T_1 + T_2)^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (T_1^n + nT_1^{n-1} \cdot T_2 + \dots + nT_1 \cdot T_2^{n-1} + T_2^n) = \\ &= \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} T_1^n \right) \cdot \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} T_2^n \right) = \exp T_1 \cdot \exp T_2. \end{aligned} \quad (5.446)$$

Транспонируя (5.440), устанавливаем важное свойство полиномиальной функции:

$$S^T = (\mathcal{F}(T))^T = \mathcal{F}(T^T). \quad (5.447)$$

Пусть теперь тензор  $T = \Omega$  – кососимметричен, тогда по (5.447):

$$(\exp \Omega)^T = \exp \Omega^T = \exp (-\Omega). \quad (5.448)$$

Умножая теперь  $\exp \Omega$  на транспонированный к нему, по (5.448) и (5.446) получаем:

$$\exp \Omega \cdot (\exp \Omega)^T = \exp \Omega \cdot \exp \Omega^T = \exp (\Omega - \Omega) = E, \quad (5.449)$$

таким образом, экспонента от кососимметричного тензора образует ортогональный тензор.

Вернемся теперь снова к полиномиальному представлению (5.436) и воспользуемся теоремой Гамильтона-Кэли (см. п.4.5.4), которая справедлива в том числе и для несимметричных тензоров  $T$  (см. упр.4.5.12). Согласно этой теореме, любую тензорную степень  $T^n$  выше второй:  $n > 2$ , можно выразить через  $T^2$ ,  $T$  и  $T^0 = E$ . Тогда из представления (5.436) вытекает следующая теорема.

**ТЕОРЕМА 5.19.** *Всякую изотропную тензорную полиномиальную функцию (5.436) всегда можно представить в виде:*

$$S = \mathcal{F}(T) = \varphi_0 E + \varphi_1 T + \varphi_2 T^2, \quad (5.450)$$

где  $\varphi_\alpha$  - скалярные функции от инвариантов тензора  $T$ :

$$\varphi_\alpha = \varphi_\alpha(I_1(T), I_2(T), I_3(T)). \quad (5.451)$$

Сравнивая (5.450) с формулой (5.433), которая была выведена для симметричных тензоров, получаем, что разложение изотропной тензорной функции по базису  $T^2$ ,  $T$  и  $E$  возможно и для несимметричных тензоров, но только для полиномиальных функций (5.436). Заметим, что для симметричных тензоров условие полиномиальности не использовалось.

Условие полиномиальности является существенным, так например, линейная изотропная тензорная функция

$$S = {}^4C \cdot \cdot T,$$

связывающая несимметричные тензоры  $S$  и  $T$  (где  ${}^4C$  - тензор четвертого ранга, индифферентный относительно полной ортогональной группы и не обладающий симметрией вида (1.264), не является полиномиальной и не может быть представлена в виде (5.450)).

Пусть теперь известен вид (5.436) полиномиальной функции  $F(T)$  с коэффициентами  $c_i$ . Найдем функции  $\varphi_\alpha$  (5.451) в соответствующем представлении (5.450). Для этого подставим разложение (5.438) тензора  $T$  по собственному базису в (5.450):

$$S = F(T) = \sum_{\alpha=1}^3 (\varphi_0 + \varphi_1 \lambda_\alpha + \varphi_2 \lambda_\alpha^2) \overset{\circ}{e}_\alpha \otimes \overset{\circ}{e}^\alpha. \quad (5.452)$$

Сравнивая (5.452) с представлением (5.440) функции (5.436), получаем, что должны выполняться равенства коэффициентов при собственном тензорном базисе:

$$\varphi_0 + \varphi_1 \lambda_\alpha + \varphi_2 \lambda_\alpha^2 = f(\lambda_\alpha), \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad (5.453)$$

где функция  $f(\lambda_\alpha)$  определяется по (5.441).

На (5.453) можно смотреть как на систему трех линейных уравнений относительно  $\varphi_\alpha$ . Определитель этой системы имеет вид:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 \end{vmatrix} = (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_3 - \lambda_1) \quad (5.454)$$

и называется *определителем Вандермонда*.

Как и ранее при рассмотрении тензорных базисов в п.5.7.4, мы предполагаем, что тензор  $T$  содержит максимально возможное число ненулевых и различных компонент. Тогда все  $\lambda_\alpha$  отличны от нуля

и различны. Следовательно,  $\Delta \neq 0$  и существует решение системы (5.453) относительно  $\varphi_\alpha$ :

$$\varphi_0 = \frac{1}{\Delta} \left( f(\lambda_1)\lambda_2\lambda_3(\lambda_3 - \lambda_2) + f(\lambda_2)\lambda_1\lambda_3(\lambda_1 - \lambda_3) + f(\lambda_3)\lambda_1\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1) \right),$$

$$\varphi_1 = \frac{1}{\Delta} \left( f(\lambda_1)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2) + f(\lambda_2)(\lambda_3^2 - \lambda_1^2) + f(\lambda_3)(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \right), \quad (5.455)$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{\Delta} \left( f(\lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2) + f(\lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3) + f(\lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_1) \right).$$

Поскольку  $\lambda_\alpha$  являются инвариантами тензора  $T$  и выражаются через  $I_1(T)$ ,  $I_2(T)$  и  $I_3(T)$  (см. (4.156)), то и  $\varphi_\alpha$  являются функциями  $I_\alpha(T)$ .

## § 5.8. Дифференцирование тензорных функций по тензорному аргументу

### 5.8.1. Определение производной от тензорной функции по тензорному аргументу

В §5.2 было введено понятие тензора производной  ${}^m f_T$  для скалярной функции  $s = f({}^m T)$  от тензорного аргумента. В механике часто возникает необходимость определения производной от произвольной тензорной функции

$${}^n S = {}^n \mathcal{F}({}^m T) \quad (5.456)$$

по тензорному аргументу  ${}^m T$ . Введем эти производные.

В компонентной записи функция (5.456) в базисе  $R_i$  имеет вид:

$$S^{i_1 \dots i_n} = \mathcal{F}^{i_1 \dots i_n}(T^{k_1 \dots k_m}). \quad (5.457)$$

Всегда можно вычислить дифференциал этой функции, рассматривая ее как обычную функцию многих переменных:

$$dS^{i_1 \dots i_n} = \frac{\partial \mathcal{F}^{i_1 \dots i_n}}{\partial T^{j_1 \dots j_m}} dT^{j_1 \dots j_m}. \quad (5.458)$$

С помощью производных  $\partial \mathcal{F}^{i_1 \dots i_n} / \partial T^{j_1 \dots j_m}$  можно определить следующий объект:

$${}^{n+m} S_T = \frac{\partial \mathcal{F}^{i_1 \dots i_n}}{\partial T^{j_1 \dots j_m}} R_{i_1} \otimes \dots \otimes R_{i_n} \otimes R^{j_1} \otimes \dots \otimes R^{j_m}, \quad (5.459)$$

называемый *тензором производной тензорной функции по тензорному аргументу*. Очевидно, что  $({}^{n+m}) S_T$  является тензором и имеет ранг  $(n+m)$ .

Составим теперь дифференциал тензора  $d^n S$ , используя определение (5.89):

$$d^n S = dS^{i_1 \dots i_n} R_{i_1} \otimes \dots \otimes R_{i_n}, \quad (5.460)$$

и подставим в него (5.459). Преобразуем получившееся выражение следующим образом:

$$\begin{aligned} d^n S &= \frac{\partial \mathcal{F}^{i_1 \dots i_n}}{\partial T^{j_1 \dots j_m}} R_{i_1} \otimes \dots \otimes R_{i_n} dT^{j_1 \dots j_m} = \\ &= \frac{\partial \mathcal{F}^{i_1 \dots i_n}}{\partial T^{j_1 \dots j_m}} R_{i_1} \otimes \dots \otimes R_{i_n} \delta_{k_1}^{j_1} \dots \delta_{k_m}^{j_m} dT^{k_1 \dots k_m} = \\ &= \frac{\partial \mathcal{F}^{i_1 \dots i_n}}{\partial T^{j_1 \dots j_m}} R_{i_1} \otimes \dots \otimes R_{i_n} \otimes R^{j_1} \otimes \dots \\ &\quad \dots \otimes R^{j_m} \dots \dots R_{k_m} \otimes \dots \otimes R_{k_1} dT^{k_1 \dots k_m}. \end{aligned} \quad (5.461)$$

Используя определение (5.459) тензора производной, этому выражению можно придать следующий вид:

$$d^n S = {}^{(n+m)} S_T \underbrace{\dots}_{m} d({}^m T)^{(m \dots 1)}, \quad (5.462)$$

где  $d({}^m T)^{(m \dots 1)}$  – транспонированный тензор от дифференциала  $T$  (см. (5.89) и (5.90)).

Формула (5.462) дает инвариантное определение производной тензора функции по тензорному аргументу. Фактический способ определения этой производной дает формула (5.459).

В частном случае, если  $n = m = 2$ , то формула (5.462) принимает вид:

$$dS = {}^4 S_T \cdot dT^T, \quad (5.463)$$

где  ${}^4 S_T$  – тензор четвертого ранга, определяемый по (5.459):

$$S_T = \frac{\partial \mathcal{F}^{ij}}{\partial T^{kl}} R_i \otimes R_j \otimes R^k \otimes R^l = \frac{\partial \mathcal{F}_{ij}}{\partial T^{kl}} R^i \otimes R^j \otimes R^k \otimes R^l. \quad (5.464)$$

## 5.8.2. Дифференцирование функций от симметричного и кососимметричного тензоров

Если  $T$  – симметричный тензор, то также как и для скалярной функции (см. §5.2) необходимо симметризовать аргумент функции

$$S^{ij} = \mathcal{F}^{ij} \left( \frac{1}{2}(T^{kl} + T^{lk}) \right), \quad (5.465)$$

а затем, после вычисления производных в (5.464) по каждой из девяти компонент, учесть симметрию  $T^{kl} = T^{lk}$ .

Формула (5.459) в этом случае примет вид:

$$S_T = \frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{F}_{ij}}{\partial T^{kl}} R^i \otimes R^j \otimes (R^k \otimes R^l + R^l \otimes R^k). \quad (5.466)$$

Если  $\mathbf{T}$  – кососимметричный тензор, то необходимо вместо (5.465) ввести следующий аргумент:

$$S^{ij} = \mathcal{F}^{ij} \left( \frac{1}{2} (T^{kl} - T^{lk}) \right), \quad (5.467)$$

а затем, после вычисления производных в (5.464), учесть кососимметрию  $T^{kl} = -T^{lk}$ .

Формула (5.459) в этом случае примет вид:

$$S_T = \frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{F}_{ij}}{\partial T^{kl}} R^i \otimes R^j \otimes (R^k \otimes R^l - R^l \otimes R^k). \quad (5.468)$$

### 5.8.3. Производная произведения скалярной и тензорной функций

Пусть  $\psi(\mathbf{T})$  – скалярная функция, а  $S(\mathbf{T})$  – тензорная функция от одного и того же тензора. Вычислим тензор производной от их произведения, применяя определение (5.464) для функции  $(\psi S)$ , в результате получим:

$$(\psi S)_T = \frac{\partial(\psi \mathcal{F}_{ij})}{\partial T^{kl}} R^i \otimes R^j \otimes R^k \otimes R^l = \left( \frac{\partial \psi}{\partial T^{kl}} \mathcal{F}_{ij} + \psi \frac{\partial \mathcal{F}_{ij}}{\partial T^{kl}} \right) \times \\ \times R^i \otimes R^j \otimes R^k \otimes R^l = S \otimes \psi_T + \psi S_T. \quad (5.469)$$

Здесь мы использовали определение (5.88) тензора производной от скаляра  $\psi_T$ , определение (5.464), а также применили обычное правило дифференцирования произведения функций.

Подставляя (5.469) в (5.463), получим выражение для дифференцирования произведения скалярной и тензорной функций:

$$d(\psi S) = (S \otimes \psi_T + \psi S_T) \cdot d\mathbf{T}^T. \quad (5.470)$$

### 5.8.4. Производная произведения тензоров

Подставим в определение (5.464) вместо  $S$  произведение  $S \cdot B$ , где

$$S = \mathcal{F}(\mathbf{T}) \quad \text{и} \quad B = G(\mathbf{T}) \quad (5.471)$$

– тензорные функции от одного и того же тензора  $T$ . Тогда получим

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{S} \cdot \mathbf{B})_T &= \frac{\partial}{\partial T^{kl}} (\mathcal{F}_i{}^m G_{mj}) \mathbf{R}^i \otimes \mathbf{R}^j \otimes \mathbf{R}^k \otimes \mathbf{R}^l = \\
 &= \left( \frac{\partial \mathcal{F}_{in}}{\partial T^{kl}} g^{nm} G_{mj} + \mathcal{F}_{in} g^{nm} \frac{\partial G_{mj}}{\partial T^{kl}} \right) \mathbf{R}^i \otimes \mathbf{R}^j \otimes \mathbf{R}^k \otimes \mathbf{R}^l = \\
 &= \left( \frac{\partial \mathcal{F}_{in}}{\partial T^{pq}} \mathbf{R}^i \otimes (\mathbf{R}^n \cdot \mathbf{R}^m) \delta_k^p \delta_l^q \otimes \mathbf{R}^j G_{mj} + \right. \\
 &\quad \left. + \mathcal{F}_{in} \mathbf{R}^i \otimes \mathbf{R}^n \cdot \mathbf{R}^m \otimes \mathbf{R}^j \frac{\partial G_{mj}}{\partial T^{pq}} \delta_k^p \delta_l^q \right) \otimes \mathbf{R}^k \otimes \mathbf{R}^l = \\
 &= \left( \frac{\partial \mathcal{F}_{in}}{\partial T^{pq}} \mathbf{R}^i \otimes \mathbf{R}^n \otimes \mathbf{R}^p \otimes \mathbf{R}^q \cdots \mathbf{R}_l \otimes \mathbf{R}_k \cdot \mathbf{R}^m \otimes \mathbf{R}^j G_{mj} + \right. \\
 &\quad \left. + \mathcal{F}_{in} \mathbf{R}^i \otimes \mathbf{R}^n \cdot \frac{\partial G_{mj}}{\partial T^{pq}} \mathbf{R}^m \otimes \mathbf{R}^j \otimes \mathbf{R}^p \otimes \right. \\
 &\quad \left. \otimes \mathbf{R}^q \cdots \mathbf{R}_l \otimes \mathbf{R}_k \right) \otimes \mathbf{R}^k \otimes \mathbf{R}^l. \tag{5.472}
 \end{aligned}$$

Здесь несколько раз использовано свойство  $\delta_k^p \delta_l^q = \mathbf{R}^p \otimes \mathbf{R}^q \cdots \mathbf{R}_l \otimes \mathbf{R}_k$ . Последнее выражение можно переписать следующим образом:

$$(\mathbf{S} \cdot \mathbf{B})_T = ((\mathbf{S}_T \cdots \mathbf{R}_l \otimes \mathbf{R}_k) \cdot \mathbf{B} + \mathbf{S} \cdot (\mathbf{B}_T \cdots \mathbf{R}_l \otimes \mathbf{R}_k)) \otimes \mathbf{R}^k \otimes \mathbf{R}^l. \tag{5.473}$$

Таким образом, формальное правило дифференцирования произведения функции для тензорных функций уже видоизменяется.

Используя свойство

$$\mathbf{R}^k \otimes \mathbf{R}^l \cdots d\mathbf{T}^T = \mathbf{R}^k \otimes \mathbf{R}^l \cdots \mathbf{R}_i \otimes \mathbf{R}_j dT^{ij} = dT^{kl}$$

и выражение (5.473), получим для дифференциала от произведения тензорных функций следующее выражение:

$$d(\mathbf{S} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{S}_T \cdots d\mathbf{T}^T) \cdot \mathbf{B} + \mathbf{S} \cdot \mathbf{B}_T \cdots d\mathbf{T}^T. \tag{5.474}$$

## § 5.9. Скалярные функции нескольких тензорных аргументов

### 5.9.1. Определение скалярной функции нескольких тензорных аргументов

В механике, кроме рассмотренных выше скалярных функций одного тензорного аргумента, иногда применяются скалярные функции, аргументами которых являются одновременно несколько тензоров:

$$s = f(m_1 \mathbf{T}_{(1)}, m_2 \mathbf{T}_{(2)}, \dots, m_n \mathbf{T}_{(n)}), \tag{5.475}$$

где  $m_\alpha \mathbf{T}_{(\alpha)}$  – тензор ранга  $m_\alpha$ , или в компонентном представлении:

$$s = f(T_{(1)}^{i_1 \dots i_{m_1}}, T_{(2)}^{j_1 \dots j_{m_2}}, \dots, T_{(n)}^{k_1 \dots k_{m_n}}). \tag{5.476}$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.11.** Отображение декартова произведения  $n$  пространств тензоров  $T_3^{(m_k)}(\mathbb{R}^3)$  ( $k = 1, \dots, n$ ) в пространстве  $\mathbb{R}^1$  называют скалярной тензорной функцией от  $n$  тензорных аргументов и обозначают как  $f: T_3^{(m_1)} \times \dots \times T_3^{(m_n)} \rightarrow \mathbb{R}^1$  или в виде зависимости (5.475).

При переходе из одной системы координат  $X^i$  в другую  $X'^i$  значение такой скалярной функции не меняется:

$$f\left(T_{(1)}^{i_1 \dots i_{m_1}}, \dots, T_{(n)}^{j_1 \dots j_{m_n}}\right) = f'\left(Q^{i_1}_{k_1} \dots Q^{i_{m_1}}_{k_{m_1}} T_{(1)}^{k_1 \dots k_{m_1}}, \dots, Q^{j_1}_{l_1} \dots Q^{j_{m_n}}_{l_{m_n}} T_{(n)}^{l_1 \dots l_{m_n}}\right). \quad (5.477)$$

В то же время вид функции  $f$  при таких преобразованиях может меняться.

### 5.9.2. Индифферентные скалярные функции нескольких тензорных аргументов

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.12.** Если при любых линейных преобразованиях вида (3.1) относительно группы  $G_s$  вид самой функции  $f$  не меняется, то такую скалярную функцию (5.475) называют индифферентной относительно группы  $G_s$ :

$$f\left(T_{(1)}^{i_1 \dots i_{m_1}}, \dots, T_{(n)}^{j_1 \dots j_{m_n}}\right) = f\left(\bar{T}_{(1)}^{i_1 \dots i_{m_1}}, \dots, \bar{T}_{(n)}^{i_1 \dots i_{m_n}}\right), \quad (5.478)$$

где компоненты тензоров преобразуются следующим образом:

$$T_{(\alpha)}^{i_1 \dots i_{m_\alpha}} = \bar{T}_{(\alpha)}^{k_1 \dots k_{m_\alpha}} A^{i_1}_{k_1} \dots A^{i_{m_\alpha}}_{k_{m_\alpha}}, \quad \alpha = 1 \dots n, \quad \forall (A^i{}_k) \in G_s. \quad (5.479)$$

### 5.9.3. Совместные инварианты нескольких тензоров

Индифферентная относительно некоторой группы  $G_s$  скалярная функция нескольких тензорных аргументов, очевидно, является инвариантом относительно данной группы  $G_s$ . Построенные таким образом инварианты называются совместными инвариантами тензоров  ${}^{m_1}T_{(1)} \dots {}^{m_n}T_{(n)}$  относительно группы преобразований  $G_s$ . Будем обозначать их буквой  $J({}^{m_1}T_{(1)} \dots {}^{m_n}T_{(n)})$ .

Среди всех совместных инвариантов  $n$  тензоров относительно данной группы  $G_s$  можно выделить функционально независимые.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.13.** Систему совместных инвариантов  $J_\alpha(\bar{T}_{(1)}^{i_1 \dots i_{m_1}} \dots \bar{T}_{(n)}^{i_1 \dots i_{m_n}})$ ,  $\alpha = 1 \dots r$ , тензоров  ${}^{m_1}T_{(1)} \dots {}^{m_n}T_{(n)}$  относительно группы  $G_s$ , называют функционально независимой, если для любой нетривиальной функции  $f(J_1, \dots, J_r)$  от этих инвариантов найдутся такие значения  $\bar{T}_{(1)}^{i_1 \dots i_{m_1}}, \dots, \bar{T}_{(n)}^{i_1 \dots i_{m_n}}$ , что

$$f(J_1(\bar{T}_{(1)}^{i_1 \dots i_{m_1}} \dots \bar{T}_{(n)}^{i_1 \dots i_{m_n}}), \dots, J_r(\bar{T}_{(1)}^{i_1 \dots i_{m_1}} \dots \bar{T}_{(n)}^{i_1 \dots i_{m_n}})) \neq 0.$$

В противном случае система совместных инвариантов называется функционально зависимой.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.14.** Система функционально независимых совместных инвариантов, с помощью которой функционально может быть выражен любой другой совместный инвариант относительно той же группы  $G_s$ , называется функциональным базисом совместных инвариантов тензоров  ${}^{m_1}T_{(1)} \dots {}^{m_n}T_{(n)}$ .

**Замечание 1.** Также как и скалярные инварианты одного тензора (см. замечания 1 – 3 к определению 4.4), совместные инварианты  $J(\bar{T}_{(1)}^{i_1 \dots i_{m_1}} \dots \bar{T}_{(n)}^{i_1 \dots i_{m_n}})$  можно рассматривать как функции вида  $J: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^1$ , где  $k = k_1 + \dots + k_n$ , а  $k_\alpha$  – число независимых компонент тензора  $T_{(\alpha)}^{i_1 \dots i_{m_\alpha}}$ . Такой подход позволяет формально применить уже доказанные результаты пп. 4.4.2 – 4.4.4 для случая совместных инвариантов, просто формально увеличив число компонент тензоров.

Теоремы 4.17 – 4.19 при этом также имеют место для совместных инвариантов, если под компонентами  $\Omega^{i_1 \dots i_n}$  подразумевать набор компонент всех  $n$  тензоров:  $(\Omega^{i_1 \dots i_n}) = (\bar{T}_{(1)}^{i_1 \dots i_{m_1}}, \dots, \bar{T}_{(n)}^{i_1 \dots i_{m_n}})$ .

Из теоремы 4.17, примененной для совместных инвариантов, вытекает следующее утверждение.

**ТЕОРЕМА 5.20.** Число  $z$  независимых совместных инвариантов  ${}^{m_1}T_{(1)} \dots {}^{m_n}T_{(n)}$  в функциональном базисе не может быть больше суммарного числа  $k$  независимых компонент всех этих тензоров:

$$z \leq k = k_1 + \dots + k_n,$$

где  $k_\alpha$  – число независимых компонент тензора  ${}^{m_\alpha}T_{(\alpha)}$ .

Если же, как и в случае инвариантов одного тензора (см. п. 4.4.5), способ выражения одного совместного инварианта через другие ограничен полиномиальными соотношениями, то число  $r$  неприводимых совместных инвариантов (т.е. тех, которые не выражаются полиномиально через другие), образующих минимальный рациональный базис, может быть больше  $k$ .

В дальнейшем нас будут интересовать только функционально независимые совместные инварианты.

#### 5.9.4. Функциональные базисы совместных инвариантов двух симметричных тензоров

Рассмотрим наиболее частый для механики сплошных сред случай – совместных инвариантов двух симметричных тензоров  $\mathbf{T}$  и  $\mathbf{B}$  второго ранга:

$$J_{\gamma}^{(s)} \equiv J_{\gamma}^{(s)}(\mathbf{T}, \mathbf{B}), \quad \gamma = 1 \dots z, \quad s = 1 \dots 39. \quad (5.480)$$

Тогда, согласно теореме 5.20, максимальное число  $z$  элементов в функциональном базисе совместных инвариантов относительно какой-либо группы  $G_s$ , являющейся подгруппой полной ортогональной группы  $I$ , не превышает  $k = 12$ :

$$z \leqslant 12.$$

Совместные инварианты  $J_{\gamma}^{(s)}$ , также как и инварианты одного тензора, могут быть образованы с помощью операций свертки направляющих тензоров  $\mathbf{O}_{\gamma}$  в данной группе с каждым из тензоров  $\mathbf{T}$  и  $\mathbf{B}$ , а также их тензорными степенями:  $\mathbf{T}^2, \mathbf{B}^2, \mathbf{T} \cdot \mathbf{B}$  и т.п.

Инварианты каждого из тензоров  $I_{\gamma}^{(s)}(\mathbf{T})$  и  $I_{\gamma}^{(s)}(\mathbf{B})$  также могут входить в функциональный базис совместных инвариантов. Однако простое объединение таких инвариантов  $I_{\gamma}^{(s)}(\mathbf{T})$  и  $I_{\gamma}^{(s)}(\mathbf{B})$  даже в случае, когда их по шесть штук, относительно той или иной группы  $G_s$ , не обязательно образует функциональный базис совместных инвариантов.

Ниже приведены *функциональные базисы* независимых совместных инвариантов двух тензоров для различных классов симметрии, в скобках представлены явные выражения совместных инвариантов через компоненты  $\bar{T}_{ij}$  и  $\bar{B}_{ij}$  тензоров в декартовом базисе  $\bar{\mathbf{e}}_i$ .

*(E)-Триклиинный класс:*

$$J_{\alpha}^{(E)} = I_{\alpha}^{(E)}(\mathbf{T}), \quad J_{6+\alpha}^{(E)} = I_{\alpha}^{(E)}(\mathbf{B}), \quad \alpha = 1, \dots, 6, \quad (5.481)$$

$$\{\bar{T}_{11}, \bar{T}_{22}, \bar{T}_{33}, \bar{T}_{23}, \bar{T}_{13}, \bar{T}_{12}, \bar{B}_{11}, \bar{B}_{22}, \bar{B}_{33}, \bar{B}_{23}, \bar{B}_{13}, \bar{B}_{12}\}, \quad z = 12.$$

*(M)-Моноклиинный класс:*

$$J_{\alpha}^{(M)} = I_{\alpha}^{(M)}(\mathbf{T}), \quad \alpha = 1, \dots, 6; \quad (5.482)$$

$$J_{6+\beta}^{(M)} = I_{\beta}^{(M)}(\mathbf{B}), \quad \beta = 1, \dots, 4, 6, \quad J_{11}^{(M)} = (\bar{\mathbf{e}}_1^2 \cdot \mathbf{T}) \cdot (\bar{\mathbf{e}}_3^2 \cdot \mathbf{B}),$$

$$\{\bar{T}_{11}, \bar{T}_{22}, \bar{T}_{33}, \bar{T}_{12}, \bar{T}_{13}^2, \bar{T}_{13}\bar{T}_{23}, \bar{B}_{11}, \bar{B}_{22}, \bar{B}_{33}, \bar{B}_{12}, \bar{T}_{13}\bar{B}_{13}, \bar{B}_{13}\bar{B}_{23}\}, \quad z = 12.$$

(O)-*Ортотропный класс:*

$$J_{\alpha}^{(O)} = I_{\alpha}^{(O)}(\mathbf{T}), \quad \alpha = 1, \dots, 6; \quad J_{6+\beta}^{(O)} = I_{\beta}^{(O)}(\mathbf{B}), \quad \beta = 1, 2, 3, 6, \quad (5.483)$$

$$J_{10}^{(O)} = (\bar{\mathbf{e}}_2^2 \cdot \mathbf{T}) \cdots (\bar{\mathbf{e}}_3^2 \cdot \mathbf{B}), \quad J_{11}^{(O)} = (\bar{\mathbf{e}}_1^2 \cdot \mathbf{T}) \cdots (\bar{\mathbf{e}}_3^2 \cdot \mathbf{B}),$$

$$\begin{aligned} &\{\bar{T}_{11}, \bar{T}_{22}, \bar{T}_{33}, \bar{T}_{23}^2, \bar{T}_{13}^2, \bar{T}_{12}\bar{T}_{13}\bar{T}_{23}, \bar{B}_{11}, \bar{B}_{22}, \bar{B}_{33}, \\ &\quad \bar{T}_{23}\bar{B}_{23}, \bar{T}_{13}\bar{B}_{13}, \bar{B}_{12}\bar{B}_{13}\bar{B}_{23}\}, \quad z = 12. \end{aligned}$$

(T)-*Тетрагональный класс:*

$$\begin{aligned} J_{\alpha}^{(T)} &= I_{\alpha}^{(T)}(\mathbf{T}), \quad \alpha = 1, \dots, 6; \quad J_{6+\beta}^{(T)} = I_{\beta}^{(T)}(\mathbf{B}), \quad \beta = 1, 2, 3, \\ J_{10}^{(T)} &= (\mathbf{E} - \bar{\mathbf{e}}_3^2) \cdot \mathbf{T} \cdots (\bar{\mathbf{e}}_3^2 \cdot \mathbf{B}), \quad J_{12}^{(T)} = \frac{1}{4} \mathbf{T} \otimes \mathbf{B} \cdots \Omega_{3h}, \\ J_{11}^{(T)} &= \mathbf{T} \otimes \mathbf{B} \cdots \mathbf{O}_h - I_2^{(T)}(\mathbf{T})I_2^{(T)}(\mathbf{B}), \end{aligned} \quad (5.484)$$

$$\begin{aligned} &\{\bar{T}_{11} + \bar{T}_{22}, \bar{T}_{33}, \bar{T}_{13}^2 + \bar{T}_{23}^2, \bar{T}_{11}^2 + \bar{T}_{22}^2, \bar{T}_{12}(\bar{T}_{11} - \bar{T}_{22}), \det \mathbf{T}, \\ &\bar{B}_{11} + \bar{B}_{22}, \bar{B}_{33}, \bar{B}_{13}^2 + \bar{B}_{23}^2, \bar{T}_{13}\bar{B}_{13} + \bar{T}_{23}\bar{B}_{23}, \bar{T}_{11}\bar{B}_{11} + \bar{T}_{22}\bar{B}_{22}, \\ &\frac{1}{2} ((\bar{T}_{11} - \bar{T}_{22})\bar{B}_{12} + (\bar{B}_{11} - \bar{B}_{22})\bar{T}_{12})\}, \quad z = 12. \end{aligned}$$

(K<sub>3</sub>)-*Квазитрансверсально-изотропный класс:*

$$\begin{aligned} J_{\alpha}^{(K)} &= I_{\alpha}^{(K)}(\mathbf{T}), \quad \alpha = 1, \dots, 6; \quad J_{6+\beta}^{(K)} = I_{\beta}^{(K)}(\mathbf{B}), \quad \beta = 1, 2, 3, \\ J_{10}^{(K)} &= (\mathbf{E} - \bar{\mathbf{e}}_3^2) \cdot \mathbf{T} \cdots (\bar{\mathbf{e}}_3^2 \cdot \mathbf{B}), \\ J_{11}^{(K)} &= \mathbf{T} \otimes \mathbf{B} \cdots \mathbf{O}_h - I_2^{(K)}(\mathbf{T})I_2^{(K)}(\mathbf{B}), \\ J_{12}^{(K)} &= \frac{1}{2} \left( \mathbf{T} \cdots \mathbf{B} - 2J_{10}^{(K)} - J_{11}^{(K)} - J_2^{(K)}J_8^{(K)} \right), \end{aligned} \quad (5.485)$$

$$\begin{aligned} &\{\bar{T}_{11} + \bar{T}_{22}, \bar{T}_{33}, \bar{T}_{13}^2 + \bar{T}_{23}^2, \bar{T}_{11}^2 + \bar{T}_{22}^2, \bar{T}_{12}^2, \det \mathbf{T}, \bar{B}_{11} + \bar{B}_{22}, \\ &\bar{B}_{33}, \bar{B}_{13}^2 + \bar{B}_{23}^2, \bar{T}_{13}\bar{B}_{13} + \bar{T}_{23}\bar{B}_{23}, \bar{T}_{11}\bar{B}_{11} + \bar{T}_{22}\bar{B}_{22}, \bar{T}_{12}\bar{B}_{12}\}. \end{aligned}$$

(A)-*Ромбоэдрический класс:*

$$J_{\alpha}^{(A)} = I_{\alpha}^{(A)}(\mathbf{T}), \quad \alpha = 1, \dots, 6; \quad J_{6+\beta}^{(A)} = I_{\beta}^{(A)}(\mathbf{B}), \quad \beta = 1, 2, 3,$$

$$J_{10}^{(A)} = (\mathbf{E} - \bar{\mathbf{e}}_3^2) \cdot \mathbf{T} \cdot (\bar{\mathbf{e}}_3^2 \cdot \mathbf{B}), \quad (5.486)$$

$$J_{11}^{(A)} = \frac{1}{4} \mathbf{T} \otimes \mathbf{B} \cdots \mathbf{D}_3, \quad J_{12}^{(A)} = \frac{1}{4} \mathbf{T} \otimes \mathbf{B} \cdots \mathbf{\Omega}_{3d},$$

$$\begin{aligned} & \{\bar{T}_{11} + \bar{T}_{22}, \bar{T}_{33}, \bar{T}_{13}^2 + \bar{T}_{23}^2, \bar{T}_{13}(\bar{T}_{11} - \bar{T}_{22}) - 2\bar{T}_{12}\bar{T}_{23}, \bar{T}_{11}^2 + \bar{T}_{22}^2 + 2\bar{T}_{12}, \\ & \bar{T}_{23}(\bar{T}_{11} - \bar{T}_{22}) + 2\bar{T}_{12}\bar{T}_{13}, \bar{B}_{11} + \bar{B}_{22}, \bar{B}_{33}, \bar{B}_{13}^2 + \bar{B}_{23}^2, \\ & \bar{T}_{13}\bar{B}_{13} + \bar{T}_{23}\bar{B}_{23}, \frac{1}{2}(\bar{B}_{13}(\bar{T}_{11} - \bar{T}_{22}) + \bar{T}_{13}(\bar{B}_{11} - \bar{B}_{22})) - \bar{T}_{12}\bar{B}_{23} - \bar{B}_{12}\bar{T}_{23}, \\ & \frac{1}{2}(\bar{T}_{23}(\bar{B}_{11} - \bar{B}_{22}) + \bar{B}_{23}(\bar{T}_{11} - \bar{T}_{22})) + \bar{T}_{12}\bar{B}_{13} + \bar{T}_{13}\bar{B}_{12}\}. \end{aligned}$$

(B)-Ромбоэдрический класс:

$$\begin{aligned} J_\alpha^{(B)} &= I_\alpha^{(B)}(\mathbf{T}), \quad \alpha = 1, \dots, 6; \quad J_{6+\beta}^{(B)} = I_\beta^{(B)}(\mathbf{B}), \quad \beta = 1, 2, 3, \\ J_{10}^{(B)} &= (\mathbf{E} - \bar{\mathbf{e}}_3^2) \cdot \mathbf{T} \cdot (\bar{\mathbf{e}}_3^2 \cdot \mathbf{B}), \quad J_{11}^{(B)} = \frac{1}{4} \mathbf{T} \otimes \mathbf{B} \cdots \mathbf{D}_3, \\ J_{12}^{(B)} &= \frac{1}{4} \mathbf{T} \otimes \mathbf{B} - 2J_{10}^{(B)} - J_2^{(B)}J_8^{(B)}, \quad (5.487) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \{\bar{T}_{11} + \bar{T}_{22}, \bar{T}_{33}, \bar{T}_{13}^2 + \bar{T}_{23}^2, \bar{T}_{13}(\bar{T}_{11} - \bar{T}_{22}) - 2\bar{T}_{12}\bar{T}_{23}, \bar{T}_{11}^2 + \bar{T}_{22}^2 + 2\bar{T}_{12}^2, \\ & \det \mathbf{T}, \bar{B}_{11} + \bar{B}_{22}, \bar{B}_{33}, \bar{B}_{13}^2 + \bar{B}_{23}^2, \bar{T}_{13}\bar{B}_{13} + \bar{T}_{23}\bar{B}_{23}, \frac{1}{2}(\bar{T}_{13}(\bar{B}_{11} - \bar{B}_{22}) + \\ & + \bar{B}_{13}(\bar{T}_{11} - \bar{T}_{22})) - \bar{T}_{12}\bar{B}_{23} - \bar{T}_{23}\bar{B}_{12}, \bar{T}_{11}\bar{B}_{11} + \bar{T}_{22}\bar{B}_{22} + 2\bar{T}_{12}\bar{B}_{12}\}. \end{aligned}$$

(K)-Квазизотропный класс:

$$\begin{aligned} J_\alpha^{(Q)} &= I_\alpha^{(Q)}(\mathbf{T}), \quad \alpha = 1, \dots, 6; \quad J_7^{(Q)} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{E}, \quad (5.488) \\ J_8^{(Q)} &= \mathbf{T} \otimes \mathbf{B} \cdots \mathbf{O}_h, \quad J_9^{(Q)} = \frac{1}{2}(\mathbf{T} \cdot \mathbf{B} - J_8^{(Q)}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{10}^{(Q)} &= (\mathbf{T} \cdot \mathbf{O}_h) \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{O}_h) \cdots (\mathbf{B} \cdot \mathbf{O}_h), \quad J_{11}^{(Q)} = \mathbf{T}^2 \otimes \mathbf{B} \cdots \mathbf{O}_h - J_{10}^{(Q)}, \\ J_{12}^{(Q)} &= (\mathbf{B}^2 \otimes \mathbf{T}) \cdots \mathbf{O}_h - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{O}_h) \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{O}_h) \cdots (\mathbf{T} \cdot \mathbf{O}_h), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \{\bar{T}_{11} + \bar{T}_{22} + \bar{T}_{33}, \bar{T}_{11}^2 + \bar{T}_{22}^2 + \bar{T}_{33}^2, \bar{T}_{12}^2 + \bar{T}_{13}^2 + \bar{T}_{23}^2, \bar{T}_{11}^3 + \bar{T}_{22}^3 + \bar{T}_{33}^3, \\ & \bar{T}_{11}(\bar{T}_{12}^2 + \bar{T}_{13}^2) + 2\bar{T}_{22}(\bar{T}_{12}^2 + \bar{T}_{23}^2) + \bar{T}_{33}(\bar{T}_{13}^2 + \bar{T}_{23}^2), \det \mathbf{T}, \bar{B}_{11} + \\ & + \bar{B}_{22} + \bar{B}_{33}, \bar{T}_{11}\bar{B}_{11} + \bar{T}_{22}\bar{B}_{22} + \bar{T}_{33}\bar{B}_{33}, \bar{T}_{12}\bar{B}_{12} + \bar{T}_{13}\bar{B}_{13} + \bar{T}_{23}\bar{B}_{23}, \\ & \bar{T}_{11}^2\bar{B}_{11} + \bar{T}_{22}^2\bar{B}_{22} + \bar{T}_{33}^2\bar{B}_{33}, \bar{B}_{11}(\bar{T}_{12}^2 + \bar{T}_{13}^2) + \bar{B}_{22}(\bar{T}_{12}^2 + \bar{T}_{23}^2) + \bar{B}_{33}(\bar{T}_{13}^2 + \\ & + \bar{T}_{23}^2), \bar{T}_{11}(\bar{B}_{12}^2 + \bar{B}_{13}^2) + \bar{T}_{22}(\bar{B}_{12}^2 + \bar{B}_{23}^2) + \bar{T}_{33}(\bar{B}_{13}^2 + \bar{B}_{23}^2)\}. \end{aligned}$$

(H)-Гексагональный класс:

$$J_{\alpha}^{(H)} = I_{\alpha}^{(H)}(\mathbf{T}), \quad \alpha = 1, \dots, 5; \quad J_{5+\beta}^{(H)} = I_{\beta}^{(H)}(\mathbf{B}), \quad \beta = 1, \dots, 4, \quad (5.489)$$

$$J_{10}^{(H)} = ((\mathbf{E} - \bar{\mathbf{e}}_3^2) \cdot \mathbf{T}) \cdot (\bar{\mathbf{e}}_3^2 \cdot \mathbf{B}), \quad J_{11}^{(H)} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{B} - 2J_{10}^{(H)} - J_2^{(H)} J_8^{(H)},$$

$$\begin{aligned} &\{\bar{T}_{11} + \bar{T}_{22}, \bar{T}_{33}, \bar{T}_{13}^2 + \bar{T}_{23}^2, \bar{T}_{11}^2 + \bar{T}_{22}^2 + 2\bar{T}_{12}^2, \det \mathbf{T}, \\ &\bar{B}_{11} + \bar{B}_{22}, \bar{B}_{33}, \bar{B}_{13}^2 + \bar{B}_{23}^2, \bar{B}_{11}^2 + \bar{B}_{22}^2 + 2\bar{B}_{12}^2, \bar{T}_{13}\bar{B}_{13} + \bar{T}_{23}\bar{B}_{23}, \\ &\bar{B}_{11}\bar{T}_{11} + \bar{B}_{22}\bar{T}_{22} + 2\bar{T}_{12}\bar{B}_{12}\}, \quad z = 11. \end{aligned}$$

(T<sub>3</sub>)-Трансверально-изотропный класс:

$$J_{\alpha}^{(3)} = J_{\alpha}^{(H)}, \quad \alpha = 1, \dots, 11, \quad z = 11. \quad (5.490)$$

(I)-Изотропный класс:

$$J_{\alpha}^{(I)} = I_{\alpha}(\mathbf{T}), \quad J_{3+\alpha}^{(I)} = I_{\alpha}(\mathbf{B}), \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad (5.491)$$

$$J_7^{(I)} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{B}, \quad J_8^{(I)} = \mathbf{T}^2 \cdot \mathbf{B}, \quad J_9^{(I)} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{B}^2,$$

$$\begin{aligned} &\{\bar{T}_i^i, \frac{1}{2}((\bar{T}_i^i)^2 - \bar{T}_j^i \bar{T}_i^j), \det \mathbf{T}, \bar{B}_i^i, \frac{1}{2}((\bar{B}_i^i)^2 - \bar{B}_j^i \bar{B}_i^j), \det \mathbf{B}, \\ &\bar{T}_j^i \bar{B}_i^j, \bar{T}_j^i \bar{T}_k^j \bar{B}_i^k, \bar{T}_j^i \bar{B}_k^j \bar{B}_i^k\}, \quad z = 9. \end{aligned}$$

**ТЕОРЕМА 5.21.** Функциональный базис совместных инвариантов двух симметричных тензоров второго ранга относительно одной и той же группы  $G_s \subset I$  состоит из  $z$  элементов, где

- $z = 9$  для групп  $G_s$  изотропного класса;
- $z = 11$  для групп  $T_3$  и  $H$  классов;
- $z = 12$  для всех остальных групп  $G_s \subset I$ .

В качестве функциональных базисов могут быть выбраны совместные инварианты (5.481) – (5.491).

▼ Рассмотрим изотропный класс.

Выберем такую ортогональную матрицу  $A^i_j$ , которая преобразует базис  $\bar{\mathbf{e}}_i$  в собственный базис  $\mathbf{e}_i$  тензора  $\mathbf{T}$ , т.е.  $\bar{\mathbf{e}}_i = A^j_i \mathbf{e}_j$ . Так как  $\mathbf{T}$  – симметричный, то в этом базисе он имеет три ненулевые вещественные компоненты:  $T^{\alpha\alpha} = A_i^{\alpha} A_j^{\alpha} \bar{T}^{ij}$ . Поскольку базис  $\mathbf{e}_i$ , вообще говоря, не является собственным базисом тензора  $\mathbf{B}$ , то он в этом базисе имеет шесть компонент  $B^{ij} = A_k^i A_l^j \bar{B}^{kl}$ . Следовательно, всего набор  $(T^{ij}, B^{ij})$  содержит девять ненулевых компонент. Поскольку матрица

$A^i_j \in I$ , то оказываются выполненными условия теоремы 4.19 с учетом замечания 1 из п.5.9.3. Из этой теоремы следует, что  $z \leq 9$ . Но девять совместных независимых инвариантов относительно  $I$ -класса существуют – это, например, набор (5.491). Первые шесть инвариантов  $J_\alpha^{(I)}$  в нем, очевидно, независимы по теореме 4.18 (п.1°) с учетом замечания 1 из п.5.9.3. Доказательство независимости всей системы инвариантов (5.491) можно осуществить с использованием теоремы 4.17 тем же методом, который был использован при доказательстве теоремы 4.24.

Рассмотрим теперь класс  $T_3$ .

Для тензора  $T$ , как было показано при доказательстве теоремы 4.24, всегда можно найти такую матрицу  $\overset{\circ}{A}{}^i_j \in T_3$ , что этот тензор в базисе  $e_i$ :  $\overset{\circ}{e}_i = \overset{\circ}{A}{}^j_i e_j$ , – будет иметь только пять ненулевых компонент. Поскольку тензор  $B$  в этом базисе, вообще говоря, будет иметь все шесть ненулевых компонент, то общее число ненулевых компонент  $(T^{ij}, B^{ij})$  в базисе  $e_i$  равно 11. Тогда по теореме 4.19  $z \leq 11$ . Но одиннадцать независимых совместных инвариантов действительно существуют – это, например, набор (5.490). Независимость этого набора можно показать, вычислив ранг матрицы частных производных  $\partial J_\alpha / \partial T^{ij}$ ,  $\partial J_\alpha / \partial B^{ij}$  и воспользовавшись теоремой 4.17.

Для остальных классов число  $z$  максимально и равно 12. Поэтому достаточно найти двенадцать независимых совместных инвариантов в каждом классе. Такие инварианты приведены в наборах (5.481) – (5.488). Доказательство их независимости аналогично рассмотренному выше и основано на использовании теоремы 4.17. ▲

### 5.9.5. Сизигии для совместных инвариантов

Подчеркнем еще раз, что если ограничить возможность выражения одних инвариантов через другие только полиномиальными соотношениями (т.е. в виде сумм и произведений сверток целых степеней тензоров), то число неприводимых инвариантов в каждом классе расширится. Про те совместные инварианты, которые построены в виде полиномиальных соотношений тензоров  $T$ ,  $B$  с участием образующих тензоров  $O_{(\gamma)}$  классов, но могут быть разрешены относительно функционального базиса инвариантов только как некоторые неполиномиальные функции, говорят, что они образуют *сизигии*. Такие совместные инварианты, очевидно, не входят в функциональный базис, но могут входить в целый рациональный базис.

Рассмотрим примеры таких сизигий для некоторых классов симметрии.

Для триклинического  $E$ -класса функциональный базис нескольких тензоров может быть образован без совместных инвариантов, поэтому нет необходимости его рассматривать.

В  $M$ -классе можно образовать инварианты, например, инвариант  $\bar{B}_{23}\bar{T}_{23}$ , не входящий в функциональный базис. Очевидно, что он мо-

может быть выражен через этот базис неполиномиальным образом:

$$J_{13}^{(M)} = \bar{B}_{23}\bar{T}_{23} = \frac{(\bar{T}_{13}\bar{T}_{23})(\bar{T}_{13}\bar{B}_{23})}{\bar{T}_{13}\bar{B}_{13}} = \frac{J_6^{(M)}J_{12}^{(M)}}{J_{11}^{(M)}}, \quad (5.492)$$

откуда получаем сизигию:

$$J_6^{(M)}J_{12}^{(M)} - J_{11}^{(M)}J_{13}^{(M)} = 0. \quad (5.493)$$

Для ортотропного  $O$ -класса можно образовать, например, инварианты  $\bar{B}_{13}^2, \bar{B}_{23}^2$ , которые выражаются через функциональный базис неполиномиальным образом:

$$J_{13}^{(O)} = \bar{B}_{12}\bar{T}_{12} = \frac{(\bar{T}_{12}\bar{T}_{13}\bar{T}_{23})(\bar{B}_{12}\bar{B}_{13}\bar{B}_{23})}{(\bar{T}_{13}\bar{B}_{13})(\bar{T}_{23}\bar{B}_{23})} = \frac{J_6^{(O)}J_{12}^{(O)}}{J_{10}^{(O)}J_{11}^{(O)}}, \quad (5.494)$$

$$J_{14}^{(O)} = \bar{B}_{23}^2 = \frac{J_{10}^{(O)2}}{J_4^{(O)}}$$

и также образуют сизигию.

Покажем, что для тетрагонального  $T$ -класса следующие инварианты можно выразить через функциональный базис  $I_\gamma^{(T)}$ , и, следовательно, они не являются независимыми:

$$\begin{aligned} J_{18}^{(T)} &= \bar{T}_{11}\bar{B}_{22} + \bar{T}_{22}\bar{B}_{11}, \\ J_{14}^{(T)} &= (\bar{T}_{11} - \bar{T}_{22})(\bar{B}_{11} - \bar{B}_{22}), \quad J_{15}^{(T)} = \frac{\bar{B}_{11} - \bar{B}_{22}}{\bar{T}_{11} - \bar{T}_{22}}, \\ J_{16}^{(T)} &= \bar{B}_{11}^2 + \bar{B}_{22}^2, \quad J_{17}^{(T)} = \bar{B}_{12}(\bar{B}_{11} + \bar{B}_{22}). \end{aligned} \quad (5.495)$$

Для первых трех инвариантов достаточно расписать явным образом следующие произведения инвариантов из функционального базиса:

$$\begin{aligned} J_1^{(T)}J_7^{(T)} - J_{11}^{(T)} &= (\bar{T}_{11} + \bar{T}_{22})(\bar{B}_{11} + \bar{B}_{22}) - \bar{T}_{11}\bar{B}_{11} - \bar{T}_{22}\bar{B}_{22} = \\ &= \bar{T}_{11}\bar{B}_{22} + \bar{T}_{22}\bar{B}_{11} = J_{18}^{(T)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2J_{11}^{(T)} - J_1^{(T)}J_7^{(T)} &= 2(\bar{T}_{11}\bar{B}_{11} + \bar{B}_{22}\bar{T}_{22}) - (\bar{T}_{11} + \bar{T}_{22})(\bar{B}_{11} + \bar{B}_{22}) = \\ &= (\bar{T}_{11} - \bar{T}_{22})(\bar{B}_{11} - \bar{B}_{22}) = J_{14}^{(T)}, \end{aligned} \quad (5.496)$$

$$\frac{J_{11}^{(T)} - J_1^{(T)} J_7^{(T)}}{2J_4^{(T)} - J_1^{(T)2}} = \frac{(\bar{B}_{11} - \bar{B}_{22})(\bar{T}_{11} - \bar{T}_{22})}{2\bar{T}_{11}^2 + 2\bar{T}_{22}^2 - (\bar{T}_{11} + \bar{T}_{22})^2} = \frac{\bar{B}_{11} - \bar{B}_{22}}{\bar{T}_{11} - \bar{T}_{22}} = J_{15}^{(T)}.$$

Таким образом, скаляры  $J_{18}^{(T)}$ ,  $J_{14}^{(T)}$  и  $J_{15}^{(T)}$  также являются инвариантами относительно  $T$ -класса, но уже зависимыми. Поскольку  $J_{18}^{(T)}$  и  $J_{14}^{(T)}$  выражаются полиномиально через функциональный базис, только последнее из соотношений (5.495) образует сизигию.

Для доказательства функциональной зависимости  $J_{16}^{(T)}$  выпишем выражение для четырех инвариантов:

$$J_1^{(T)} = \bar{T}_{11} + \bar{T}_{22}, \quad J_4^{(T)} = \bar{T}_{11}^2 + \bar{T}_{22}^2, \quad (5.497)$$

$$J_7^{(T)} = \bar{B}_{11} + \bar{B}_{22}, \quad J_{11}^{(T)} = \bar{T}_{11}\bar{B}_{11} + \bar{T}_{22}\bar{B}_{22},$$

и рассмотрим этот набор как систему четырех уравнений относительно компонент  $\bar{T}_{11}$ ,  $\bar{T}_{22}$ ,  $\bar{B}_{11}$  и  $\bar{B}_{22}$ . Выразим из третьего уравнения  $\bar{B}_{11}$  и, подставляя его в четвертое уравнение, находим:

$$\bar{B}_{22} = \frac{J_{11}^{(T)} - J_7^{(T)}\bar{T}_{11}}{\bar{T}_{22} - \bar{T}_{11}}, \quad \bar{B}_{11} = \frac{J_7^{(T)}\bar{T}_{22} - J_{11}^{(T)}}{\bar{T}_{22} - \bar{T}_{11}}. \quad (5.498)$$

Возводя в квадрат эти уравнения, а затем складывая друг с другом, с учетом первых двух уравнений системы (5.497), получим:

$$\begin{aligned} J_{16}^{(T)} &= \frac{1}{(\bar{T}_{22} - \bar{T}_{11})^2} \left( (J_{11}^{(T)} - J_7^{(T)}\bar{T}_{11})^2 + (J_{11}^{(T)} - J_7^{(T)}\bar{T}_{22})^2 \right) = \\ &= \frac{1}{2J_4^{(T)} - J_1^{(T)2}} \left( 2J_{11}^{(T)2} - 2J_{11}^{(T)}J_1^{(T)}J_7^{(T)} + J_7^{(T)2}J_4^{(T)} \right) \end{aligned} \quad (5.499)$$

– искомое соотношение, показывающее функциональную зависимость инварианта  $J_{16}^{(T)}$ .

Такой способ доказательства функциональной зависимости какого-либо инварианта, при котором входящие в его структуру компоненты тензоров предварительно находятся из системы уравнений, составленной из инвариантов функционального базиса, содержащих те же компоненты, назовем *компонентным методом*. Этот метод можно эффективно применять для различных классов симметрии.

Для доказательства функциональной зависимости  $J_{17}^{(T)}$  составим систему:

$$J_5^{(T)} = \bar{T}_{12}(\bar{T}_{11} - \bar{T}_{22}), \quad 2J_{12}^{(T)} = (\bar{T}_{11} - \bar{T}_{22})\bar{B}_{12} + (\bar{B}_{11} - \bar{B}_{22})\bar{T}_{12} \quad (5.500)$$

и выразим из нее  $\bar{B}_{12}$ :

$$\bar{B}_{12} = \frac{2J_{12}^{(T)}}{(\bar{B}_{11} - \bar{B}_{22})^2} J_5^{(T)}. \quad (5.501)$$

Домножая это выражение слева и справа на  $(\bar{B}_{11} - \bar{B}_{22})$ , с учетом (5.497) получаем окончательно:

$$J_{17}^{(T)} = \bar{B}_{12}(\bar{B}_{11} - \bar{B}_{22}) = (2J_{12}^{(T)} - J_{15}^{(T)} J_5^{(T)}) J_5^{(T)}. \quad (5.502)$$

Поскольку  $J_5^{(T)}$  образует сизигию, то (5.502) также представляет собой сизигию.

*A-класс.* Среди совместных инвариантов *A*-ромбоэдрического класса рассмотрим следующий:

$$J_{13}^{(A)} = \bar{T}_{11}\bar{B}_{11} + \bar{T}_{22}\bar{B}_{22} + 2\bar{T}_{12}\bar{B}_{12}. \quad (5.503)$$

Используя компонентный метод, покажем, что инвариант (5.503) можно функционально выразить через базис *A*-класса. Рассмотрим систему двух уравнений, составленную из инвариантов базиса *A*-класса:

$$J_{11}^{(A)} = \frac{1}{2}\bar{B}_{13}(\bar{T}_{11} - \bar{T}_{22}) + \bar{T}_{13}(\bar{B}_{11} - \bar{B}_{22}) - \bar{T}_{12}\bar{B}_{23} - \bar{T}_{23}\bar{B}_{12},$$

$$J_{12}^{(A)} = \frac{1}{2}\bar{B}_{23}(\bar{T}_{11} - \bar{T}_{22}) + \bar{T}_{23}(\bar{B}_{11} - \bar{B}_{22}) + \bar{T}_{12}\bar{B}_{13} + \bar{T}_{13}\bar{B}_{12} \quad (5.504)$$

и выразим из нее  $\bar{B}_{12}$  и  $(\bar{B}_{11} - \bar{B}_{22})$ :

$$\bar{B}_{12} = \frac{1}{J_3^{(A)}} \left( J_{12}^{(A)}\bar{T}_{13} - J_{11}^{(A)}\bar{T}_{23} - \frac{A}{2}\bar{B}_{23} - \frac{C}{2}\bar{B}_{13} \right),$$

$$\bar{B}_{11} - \bar{B}_{22} = \frac{1}{\bar{T}_{13}} \left( J_{11}^{(A)} - \frac{1}{2}\bar{B}_{13}(\bar{T}_{11} - \bar{T}_{22}) + \bar{T}_{12}\bar{B}_{23} + \bar{T}_{23}\bar{B}_{12} \right), \quad (5.505)$$

$$A = (\bar{T}_{11} - \bar{T}_{22})\bar{T}_{13} + 2\bar{T}_{12}\bar{T}_{23}, \quad C = 2\bar{T}_{12}\bar{T}_{13} - \bar{T}_{23}(\bar{T}_{11} - \bar{T}_{22}).$$

Подставляя эти выражения в (5.503), получаем окончательно соотношение

$$\begin{aligned} J_{13}^{(A)} &= \frac{1}{2}(\bar{T}_{11} + \bar{T}_{22})(\bar{B}_{11} + \bar{B}_{22}) + \frac{1}{2}(\bar{T}_{11} - \bar{T}_{22})(\bar{B}_{11} - \bar{B}_{22}) + \\ &+ 2\bar{T}_{12}\bar{B}_{12} = \frac{1}{2}J_1^{(A)}J_7^{(A)} + (J_6^{(A)}J_{12}^{(A)} + J_4^{(A)}J_{11}^{(A)})\frac{1}{J_3^{(A)}} - \\ &- J_{10}^{(A)}(J_5^{(A)} - \frac{1}{2}J_1^{(A)2}), \end{aligned} \quad (5.506)$$

которое образует сизигию.

### 5.9.6. Дифференцирование скалярных функций нескольких тензорных аргументов

В механике важную роль играют *частичные дифференциалы* от скалярной функции (5.476) по одному из тензорных аргументов:

$$d_k f = \frac{\partial f}{\partial T_{(k)}^{j_1 \dots j_{m_k}}} dT_{(k)}^{j_1 \dots j_{m_k}}, \quad k \in \{1, \dots, n\}. \quad (5.507)$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.15.** Тензором частной производной скалярной функции от  $n$  тензоров по  $k$ -ому тензорному аргументу называют следующий тензор:

$${}^{m_k} f_{\mathbf{T}_{(k)}} \equiv \frac{\partial f}{\partial \mathbf{T}_{(k)}} = \frac{\partial f}{\partial T_{(k)}^{j_1 \dots j_{m_k}}} \mathbf{R}^{j_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{R}^{j_{m_k}}, \quad k \in \{1, \dots, n\}. \quad (5.508)$$

Этот тензор имеет тот же ранг, что и аргумент-тензор  ${}^{m_k} \mathbf{T}_{(k)}$ . С учетом (5.508) и определения (5.89) дифференциала тензора, частичный дифференциал скалярной функции можно представить в виде, аналогичном (5.92):

$$d_k f = {}^{m_k} f_{\mathbf{T}_{(k)}} \cdot \dots \cdot d({}^{m_k} \mathbf{T}_{(k)})^{(m_k \dots 1)}. \quad (5.509)$$

Для случая тензоров второго ранга ( $m_k = 2$ ) эта формула имеет вид:

$$d_k f = f_{\mathbf{T}_{(k)}} \cdot d\mathbf{T}_{(k)}^T, \quad k \in \{1, 2\}. \quad (5.510)$$

Полный дифференциал от скалярной функции (5.476) представляет собой сумму частичных дифференциалов:

$$df({}^{m_1} \mathbf{T}_{(1)} \dots {}^{m_n} \mathbf{T}_{(n)}) = \sum_{k=1}^n d_k f = \sum_{k=1}^n {}^{m_k} f_{\mathbf{T}_{(k)}} \cdot \dots \cdot d({}^{m_k} \mathbf{T}_{(k)})^{(m_k \dots 1)}. \quad (5.511)$$

Например, для случая скалярной функции двух тензоров ( $n = 2$ ) второго ранга имеем:

$$df(\mathbf{T}, \mathbf{B}) = f_{\mathbf{T}} \cdot d\mathbf{T}^T + f_{\mathbf{B}} \cdot dB^T. \quad (5.512)$$

Если тензоры  $\mathbf{T}$  и  $\mathbf{B}$  – симметричные, то вычисление тензоров производной  $f_{\mathbf{T}}$  и  $f_{\mathbf{B}}$  должно осуществляться по правилам (5.94) и (5.96).

### 5.9.7. Дифференцирование совместных инвариантов

Рассмотрим в качестве скалярной функции  $f$  (5.475) совместные инварианты  $f = J_{\alpha}^{(s)}$  двух тензоров  $T$  и  $B$  относительно какой-либо группы  $G_s$ . Очевидно, что если совместный инвариант содержит компоненты только одного тензора, то тензоры производных от них будут совпадать с соответствующими тензорами производных обычных инвариантов  $I_{\alpha}^{(s)}$ . Поэтому вычислим производные только от инвариантов  $J_{\alpha}^{(s)}$  из функциональных базисов классов, приведенных в п.5.9.4, которые содержат компоненты обоих тензоров  $T$  и  $B$ . Возможны два вида таких инвариантов:

$$f = (T \otimes B) \cdots {}^4\Omega \quad (5.513)$$

– квадратичный совместный и

$$f = (T \otimes B \otimes B) \cdots {}^6\Omega \quad (5.514)$$

– кубический совместный, где  ${}^4\Omega$  и  ${}^6\Omega$  – индифферентные относительно группы  $G_s$  тензоры.

Для вычисления тензора частной производной  $f_B$ , рассмотрим тензор  $T$  как фиксированный, тогда скалярные функции (5.513) и (5.514) можно свести к линейной относительно  $B$ :

$$f = B \cdot \cdot \Omega, \quad \Omega = {}^4\Omega \cdot \cdot T \quad (5.515)$$

и квадратичный относительно  $B$ :

$$f = (B \otimes B) \cdots {}^4\tilde{\Omega}, \quad {}^4\tilde{\Omega} = {}^6\Omega \cdot \cdot T. \quad (5.516)$$

Тогда, используя правила (5.118) и (5.120) дифференцирования линейных и квадратичных функций, получаем:

$$\frac{\partial}{\partial B} (T \otimes B \cdots {}^4\Omega) = \frac{\partial}{\partial B} (B \cdot \cdot \Omega) = \frac{1}{2} (\Omega + \Omega^T) = \frac{1}{2} ({}^4\Omega + {}^4\Omega^{(2134)}) \cdot \cdot T, \quad (5.517)$$

а также

$$\frac{\partial}{\partial B} (T \otimes B \otimes B \cdots {}^6\Omega) = \frac{\partial}{\partial B} (B \otimes B \cdots {}^4\tilde{\Omega}) = 2 {}^4\tilde{\Omega}^{(1)} \cdot \cdot B. \quad (5.517')$$

Если совместный инвариант (5.517) имеет структуру вида:

$$f = (A \cdot T) \cdot \cdot (C \cdot B) = (T \otimes B) \cdots (A \otimes C)^{(1432)}, \quad (5.518)$$

где  $A$  и  $C$  – симметричные тензоры второго ранга, то формула (5.517) принимает вид:

$$\frac{\partial}{\partial B} ((A \cdot T) \cdot \cdot (C \cdot B)) = \frac{1}{2} \left( (A \otimes C)^{(1432)} + (A \otimes C)^{(4132)} \right) \cdot \cdot T. \quad (5.519)$$

### 5.9.8. Частные производные от совместных инвариантов функциональных базисов

Применим полученные правила для вычисления тензоров частных производных от совместных инвариантов функциональных базисов в различных классах симметрии.

В триклиническом классе нет инвариантов, содержащих компоненты обоих тензоров.

В моноклиническом классе есть один такой совместный инвариант:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_{11}^{(M)}}{\partial \mathbf{B}} &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{B}} ((\bar{\mathbf{e}}_1^2 \cdot \mathbf{T}) \cdots (\bar{\mathbf{e}}_3^2 \cdot \mathbf{B})) = \frac{1}{2} \left( (\bar{\mathbf{e}}_1^2 \otimes \bar{\mathbf{e}}_3^2)^{(1432)} + \right. \\ &\quad \left. + (\bar{\mathbf{e}}_1^2 \otimes \bar{\mathbf{e}}_3^2)^{(4132)} \right) \cdots \mathbf{T} = \frac{1}{4} (\mathbf{O}_2 \otimes \mathbf{O}_2) \cdots \mathbf{T} \end{aligned} \quad (5.520)$$

в силу симметрии  $\mathbf{T}$ .

В ортотропном классе два аналогичных инварианта:

$$\frac{\partial J_{10}^{(O)}}{\partial \mathbf{B}} = \frac{1}{4} (\mathbf{O}_1 \otimes \mathbf{O}_1) \cdots \mathbf{T}, \quad \frac{\partial J_{11}^{(O)}}{\partial \mathbf{B}} = \frac{1}{4} (\mathbf{O}_2 \otimes \mathbf{O}_2) \cdots \mathbf{T}. \quad (5.521)$$

Для тетрагонального класса имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_{10}^{(T)}}{\partial \mathbf{B}} &= \frac{1}{2} \left( ((\mathbf{E} - \bar{\mathbf{e}}_3^2) \otimes \bar{\mathbf{e}}_3^2)^{(1432)} + ((\mathbf{E} - \bar{\mathbf{e}}_3^2) \otimes \bar{\mathbf{e}}_3^2)^{(4132)} \right) \cdots \mathbf{T} = \\ &= \frac{1}{4} (\mathbf{O}_1 \otimes \mathbf{O}_1 + \mathbf{O}_2 \otimes \mathbf{O}_2) \cdots \mathbf{T}, \end{aligned} \quad (5.522)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_{11}^{(T)}}{\partial \mathbf{B}} &= \mathbf{O}_h \cdots \mathbf{T} - I_2^{(T)}(\mathbf{T}) \frac{\partial I_2^{(T)}(\mathbf{B})}{\partial \mathbf{B}} = (\mathbf{O}_h - \bar{\mathbf{e}}_3^2 \otimes \bar{\mathbf{e}}_3^2) \cdots \mathbf{T}, \\ \frac{\partial J_{12}^{(T)}}{\partial \mathbf{B}} &= \frac{1}{4} \Omega_{3h} \cdots \mathbf{T}. \end{aligned}$$

Для  $K_3$ -класса:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_{10}^{(K)}}{\partial \mathbf{B}} &= \frac{1}{4} (\mathbf{O}_1 \otimes \mathbf{O}_1 + \mathbf{O}_2 \otimes \mathbf{O}_2) \cdots \mathbf{T}, \quad \frac{\partial J_{11}^{(K)}}{\partial \mathbf{B}} = (\mathbf{O}_h - \bar{\mathbf{e}}_3^2 \otimes \bar{\mathbf{e}}_3^2) \cdots \mathbf{T}, \\ \frac{\partial J_{12}^{(K)}}{\partial \mathbf{B}} &= \frac{1}{2} \left( \Delta - \frac{1}{2} (\mathbf{O}_1 \otimes \mathbf{O}_1 + \mathbf{O}_2 \otimes \mathbf{O}_2) - \mathbf{O}_h \right) \cdots \mathbf{T}. \end{aligned} \quad (5.523)$$

Для  $A$ -класса:

$$\frac{\partial J_{10}^{(A)}}{\partial \mathbf{B}} = \frac{1}{4} (\mathbf{O}_1 \otimes \mathbf{O}_1 + \mathbf{O}_2 \otimes \mathbf{O}_2) \cdots \mathbf{T},$$

$$\frac{\partial J_{11}^{(A)}}{\partial \mathbf{B}} = \frac{1}{4} \mathbf{D}_3 \cdot \cdot \mathbf{T}, \quad \frac{\partial J_{12}^{(A)}}{\partial \mathbf{B}} = \frac{1}{4} \boldsymbol{\Omega}_{3d} \cdot \cdot \mathbf{T}. \quad (5.524)$$

Для  $B$ -класса:

$$\frac{\partial J_{10}^{(B)}}{\partial \mathbf{B}} = \frac{1}{4} (\mathbf{O}_1 \otimes \mathbf{O}_1 + \mathbf{O}_2 \otimes \mathbf{O}_2) \cdot \cdot \mathbf{T}, \quad \frac{\partial J_{11}^{(B)}}{\partial \mathbf{B}} = \frac{1}{4} \mathbf{D}_3 \cdot \cdot \mathbf{T}, \quad (5.525)$$

$$\frac{\partial J_{12}^{(B)}}{\partial \mathbf{B}} = \left( \Delta - \frac{1}{2} (\mathbf{O}_1 \otimes \mathbf{O}_1 + \mathbf{O}_2 \otimes \mathbf{O}_2) - \bar{\mathbf{e}}_3^2 \otimes \bar{\mathbf{e}}_3^2 \right) \cdot \cdot \mathbf{T}.$$

Для квазизотропного  $K$ -класса:

$$\frac{\partial J_8^{(Q)}}{\partial \mathbf{B}} = \mathbf{O}_h \cdot \cdot \mathbf{T}, \quad \frac{\partial J_9^{(Q)}}{\partial \mathbf{B}} = \frac{1}{2} (\Delta - \mathbf{O}_h) \cdot \cdot \mathbf{T},$$

$$\frac{\partial J_{10}^{(Q)}}{\partial \mathbf{B}} = \mathbf{O}_h \cdot \cdot ((\mathbf{T} \cdot \cdot \mathbf{O}_h) \cdot (\mathbf{T} \cdot \cdot \mathbf{O}_h)) = (\mathbf{T} \cdot \cdot \mathbf{O}_h) \cdot (\mathbf{T} \cdot \cdot \mathbf{O}_h), \quad (5.526)$$

$$\frac{\partial J_{11}^{(Q)}}{\partial \mathbf{B}} = \mathbf{O}_h \cdot \cdot \mathbf{T}^2 - (\mathbf{T} \cdot \cdot \mathbf{O}_h) \cdot (\mathbf{T} \cdot \cdot \mathbf{O}_h),$$

$$\frac{\partial J_{12}^{(Q)}}{\partial \mathbf{B}} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{O}_h \cdot \cdot \mathbf{T} + (\mathbf{T} \cdot \cdot \mathbf{O}_h) \cdot \mathbf{B} - (\mathbf{T} \cdot \cdot \mathbf{O}_h) \cdot (\mathbf{O}_h \cdot \cdot \mathbf{B}).$$

Для гексагонального ( $H$ ) и трансверсально-изотропного ( $T_3$ ) классов:

$$\frac{\partial J_{10}^{(H)}}{\partial \mathbf{B}} = \frac{1}{4} (\mathbf{O}_1 \otimes \mathbf{O}_1 + \mathbf{O}_2 \otimes \mathbf{O}_2) \cdot \cdot \mathbf{T},$$

$$\frac{\partial J_{11}^{(H)}}{\partial \mathbf{B}} = \left( \Delta - \frac{1}{2} (\mathbf{O}_1 \otimes \mathbf{O}_1 + \mathbf{O}_2 \otimes \mathbf{O}_2) - \bar{\mathbf{e}}_3^2 \otimes \bar{\mathbf{e}}_3^2 \right) \cdot \cdot \mathbf{T}. \quad (5.527)$$

Для изотропного класса:

$$\frac{\partial J_7^{(I)}}{\partial \mathbf{B}} = \Delta \cdot \cdot \mathbf{T}, \quad \frac{\partial J_8^{(I)}}{\partial \mathbf{B}} = \Delta \cdot \cdot \mathbf{T}^2, \quad (5.528)$$

$$\frac{\partial J_9^{(I)}}{\partial \mathbf{B}} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{T}, \quad \frac{\partial J_{10}^{(I)}}{\partial \mathbf{B}} = \mathbf{T}^2 \cdot \mathbf{B} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{T}^2.$$

### Упражнения к § 5.9.

**Упражнение 5.9.1.** Показать, что следующие скаляры можно выразить через функциональный базис совместных инвариантов  $M$ -класса:

$$\begin{aligned}\bar{T}_{23}^2 &= \frac{J_6^{(M)2}}{J_5^{(M)}}, \quad \bar{B}_{23}^2 = \frac{J_{12}^{(M)2} J_5^{(M)}}{J_{11}^{(M)2}}, \quad \bar{B}_{13}^2 = \frac{J_{11}^{(M)2}}{J_5^{(M)}}, \\ \bar{T}_{23} \bar{B}_{13} &= \frac{J_6^{(M)} J_{11}^{(M)}}{J_5^{(M)}}, \quad \bar{T}_{13} \bar{B}_{23} = \frac{J_5^{(M)} J_{12}^{(M)}}{J_{11}^{(M)}}.\end{aligned}$$

**Упражнение 5.9.2.** Показать, что следующие скаляры являются инвариантами относительно  $O$ -класса, и их можно выразить через функциональный базис этого класса:

$$\bar{B}_{12}^2 = \frac{J_{12}^{(O)2} J_4^{(O)} J_5^{(O)}}{J_{10}^{(O)2} J_{11}^{(O)2}}, \quad \bar{B}_{13}^2 = \frac{J_{11}^{(O)2}}{J_5^{(O)}}.$$

**Упражнение 5.9.3.** Показать, что следующие скаляры являются инвариантами относительно  $K_3$ -класса, и их можно выразить через функциональный базис этого класса:

$$\bar{B}_{12}^2 = \frac{J_{12}^{(K)2}}{J_5^{(K)}}, \quad \bar{T}_{11} \bar{B}_{22} + \bar{T}_{22} \bar{B}_{11} = J_1^{(K)} J_7^{(K)} - J_{11}^{(K)},$$

$$\bar{B}_{11}^2 + \bar{B}_{22}^2 = \frac{1}{2J_4^{(K)} - J_1^{(K)2}} \left( 2J_{11}^{(K)2} - 2J_{11}^{(K)} J_1^{(K)} J_7^{(K)} + J_7^{(K)2} J_4^{(K)} \right).$$

**Упражнение 5.9.4.** Показать, что следующие скаляры являются инвариантами относительно  $A$ -класса, но их можно выразить через функциональный базис этого класса:

$$J_{15}^{(A)} = \bar{B}_{13}(\bar{B}_{11} - \bar{B}_{22}) - 2\bar{B}_{12}\bar{B}_{23}, \quad J_{14}^{(A)} = \bar{B}_{23}(\bar{B}_{11} - \bar{B}_{22}) + 2\bar{B}_{12}\bar{B}_{13}.$$

**Упражнение 5.9.5.** Показать, что следующие скаляры являются инвариантами относительно  $B$ -класса, но их можно выразить через функциональный базис этого класса:

$$J_{13}^{(B)} = \bar{B}_{11}^2 + \bar{B}_{22}^2 + 2\bar{B}_{12}^2, \quad J_{14}^{(B)} = \bar{B}_{13}(\bar{B}_{11} - \bar{B}_{22}) - 2\bar{B}_{12}\bar{B}_{23}.$$

**Упражнение 5.9.6.** Показать, что следующие скаляры являются инвариантами относительно  $K$ -класса, но их можно выразить через функциональный базис этого класса:

$$J_{15}^{(Q)} = \bar{B}_{11}^2 + \bar{B}_{22}^2 + \bar{B}_{33}^2, \quad J_{14}^{(Q)} = \bar{B}_{12}^2 + \bar{B}_{13}^2 + \bar{B}_{23}^2,$$

$$J_{15}^{(Q)} = \bar{B}_{11}^3 + \bar{B}_{22}^3 + \bar{B}_{33}^3.$$

## § 5.10. Тензорные функции нескольких тензорных аргументов

### 5.10.1. Определение тензорной функции нескольких тензорных аргументов

Кроме скалярных функций вида (5.475) в механике применяют также *тензорные функции нескольких тензорных аргументов*.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.16.** *Отображение декартова произведения  $n$  пространств тензоров  $\mathcal{T}_3^{(m_k)}$ ,  $k = 1 \dots n$ , в пространство  $\mathcal{T}_3^{(m)}$  называют тензорной функцией  $n$  тензорных аргументов и обозначают как  ${}^m\mathcal{F} : \mathcal{T}_3^{(m_1)} \times \dots \times \mathcal{T}_3^{(m_n)} \rightarrow \mathcal{T}_3^{(m)}$  или в виде зависимости:*

$${}^m S = {}^m \mathcal{F}({}^{m_1} T_{(1)}, \dots, {}^{m_n} T_{(n)}), \quad \forall {}^m S \in \mathcal{T}_3^{(m)}, \quad {}^{m_k} T_{(k)} \in \mathcal{T}_3^{(m_k)}, \quad k = 1 \dots n. \quad (5.529)$$

В компонентном представлении, например, в базисе  $R_i$  пространства  $\mathbb{R}^3$  такие функции имеют вид:

$$S_{i_1 \dots i_m} = \mathcal{F}_{i_1 \dots i_m} \left( T_{(1)}^{j_1 \dots j_{m_1}} \dots T_{(n)}^{k_1 \dots k_{m_n}} \right). \quad (5.530)$$

При переходе из одной системы координат  $X^i$  в другую  $X'^i$  значения такой функции меняются по тензорному закону:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}'_{i_1 \dots i_m} & \left( Q^{l_1}_{\phantom{l_1} j_1} \dots Q^{l_{m_1}}_{\phantom{l_{m_1}} j_{m_1}} T_{(1)}^{j_1 \dots j_{m_1}}, \dots, Q^{s_1}_{\phantom{s_1} k_1} \dots Q^{s_{m_n}}_{\phantom{s_{m_n}} k_{m_n}} T_{(n)}^{k_1 \dots k_{m_n}} \right) = \\ & = P^{q_1}_{\phantom{q_1} i_1} \dots P^{q_m}_{\phantom{q_m} i_m} \mathcal{F}_{q_1 \dots q_m} \left( T_{(1)}^{l_1 \dots l_{m_1}}, \dots, T_{(n)}^{s_1 \dots s_{m_n}} \right). \end{aligned} \quad (5.531)$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.17.** *Тензорную функцию (5.530) называют индифферентной относительно группы  $G_s$ , если вид функции не меняется при всех преобразованиях в этой группе:*

$$\bar{\mathcal{F}}_{i_1 \dots i_m} = \mathcal{F}_{i_1 \dots i_m}, \quad (5.532)$$

где  $\bar{\mathcal{F}}_{i_1 \dots i_m}$  – компонентное представление тензорной функции в декартовой системе координат  $x^i = X'^i$  с осями, совпадающими с осями анизотропии.

Из (5.531) и (3.45) следует, что для индифферентной тензорной функции нескольких аргументов выполняются условия:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{i_1 \dots i_m} & \left( \bar{T}_{(1)}^{l_1 \dots l_{m_1}}, \dots, \bar{T}_{(n)}^{s_1 \dots s_{m_n}} \right) = \\ & = A^{q_1}_{\phantom{q_1} i_1} \dots A^{q_m}_{\phantom{q_m} i_m} \mathcal{F}_{q_1 \dots q_m} \left( A^{l_1}_{\phantom{l_1} j_1} \dots A^{l_{m_1}}_{\phantom{l_{m_1}} j_{m_1}} \bar{T}_{(1)}^{j_1 \dots j_{m_1}}, \dots, \right. \\ & \quad \left. A^{s_1}_{\phantom{s_1} k_1} \dots A^{s_{m_n}}_{\phantom{s_{m_n}} k_{m_n}} \bar{T}_{(n)}^{k_1 \dots k_{m_n}} \right) \quad \forall (A^i{}_k) \in G_s. \end{aligned} \quad (5.532')$$

### 5.10.2. Псевдопотенциальные тензорные функции нескольких тензорных аргументов

Для тензорных функций нескольких тензорных аргументов введем понятие *псевдопотенциальности*, которое, вообще говоря, отличается от обычного понятия потенциальности тензорной функции.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.18.** *Псевдопотенциальной или потенциальной по  $k$ -ому тензорному аргументу называют функцию вида (5.530), для которой существует скалярная функция:*

$$\psi = \psi \left( T_{(1)}^{j_1 \dots j_{m_1}}, \dots, T_{(k)}^{l_1 \dots l_m}, \dots, T_{(n)}^{s_1 \dots s_{m_n}} \right), \quad (5.533)$$

*тензор частной производной от которой по  $k$ -ому аргументу совпадает с функцией (5.530):*

$$S_{i_1 \dots i_n} = \partial \psi / \partial T_{(k)}^{i_1 \dots i_m}, \quad (5.534)$$

*или в тензорном виде*

$$S = \partial \psi / \partial T_{(k)}, \quad \psi = \psi \left( {}^{m_1} T_{(1)} \dots {}^m T_{(k)} \dots {}^{m_n} T_{(n)} \right). \quad (5.534')$$

Из определения псевдопотенциальной тензорной функции следует, что ранг  $m$  тензора  $S$  совпадает с рангом аргумента  ${}^m T_{(k)}$ .

Очевидно, что если скалярная функция (5.533) является индифферентной относительно группы  $G_s$ , то соответствующая ей псевдопотенциальная тензорная функция также является индифферентной относительно  $G_s$ .

### 5.10.3. Представление псевдопотенциальной тензорной функции в тензорном базисе

Рассмотрим псевдопотенциальную тензорную функцию (5.534'), зависящую от двух симметричных тензоров:

$$S = \mathcal{F}(T, B) = \frac{\partial \psi}{\partial B}. \quad (5.535)$$

Индифферентную относительно группы  $G_s$  скалярную функцию  $\psi(T, B)$  всегда можно представить как функцию от полного набора совместных инвариантов  $J_\alpha(T, B)$  из функционального базиса относительно той же группы симметрий:

$$\psi(T, B) = \psi(J_\gamma^{(s)}(T, B)), \quad \gamma = 1 \dots z. \quad (5.536)$$

Обозначим  $z$  – число совместных инвариантов  $J_\gamma$  в функциональном базисе группы  $G_s$ , а  $r$  – число инвариантов  $I_\gamma$  одного тензора  $T$

относительно этой группы  $G_s$ . Будем далее полагать, что инварианты  $J_\gamma(T)$  полностью входят в набор  $J_\gamma$ :  $J_\gamma = J_\gamma(T)$ ,  $\gamma = 1 \dots r$ . Тогда от тензора  $B$  зависят только  $J_\gamma$ , для которых  $\gamma = r+1 \dots z$ .

Вычисляя тензор частной производной от  $\psi$ , получаем, что псевдопотенциальную функцию (5.535) можно представить в виде:

$$S = \sum_{\gamma=r+1}^z \frac{\partial \psi}{\partial J_\gamma^{(s)}} \frac{\partial J_\gamma^{(s)}}{\partial B}. \quad (5.537)$$

Также как и для функции одного тензорного аргумента, введем тензорный базис:

$$H_\gamma^{(s)} = \frac{\partial J_\gamma^{(s)}}{\partial B}, \quad \gamma = 1 \dots z - r \quad (5.538)$$

и скалярные функции

$$\varphi_\gamma = \frac{\partial \psi}{\partial J_\gamma^{(s)}}, \quad \gamma = 1 \dots z - r. \quad (5.538')$$

Тогда получим следующую теорему.

**Теорема 5.22.** *Всякую псевдопотенциальную тензорную функцию (5.535), индифферентную относительно группы  $G_s$ , можно представить в виде разложения по тензорному базису  $H_\gamma^{(s)}$ :*

$$S = \sum_{\gamma=1}^{z-r} \varphi_\gamma \left( J_1^{(s)}(T, B), \dots, J_z^{(s)}(T, B) \right) H_\gamma^{(s)}. \quad (5.539)$$

Если тензорная функция является потенциальной по другому аргументу

$$S = \mathcal{F}(T, B) = \frac{\partial \psi}{\partial T}, \quad (5.540)$$

то формально для нее можно получить точно такое же представление, однако вид тензоров  $H_\gamma^{(s)}$  и их число при этом могут отличаться.

#### 5.10.4. Псевдопотенциальные тензорные функции для различных классов симметрии

Выберем в качестве совместных инвариантов  $J_\gamma$  ( $\gamma = 1 \dots z$ ) функциональные базисы, приведенные в п.5.9.4, тогда, используя результаты вычисления тензоров частных производных  $\partial J_\gamma^{(s)}/\partial B$ , содержащиеся в п.5.9.8, найдем базисные тензоры  $H_\gamma^{(s)}$ . В итоге получим следующие представления (5.539) для различных классов симметрии.

(E)-Триклиинный класс: представление (5.539) совпадает с (5.174).

(M)-Моноклиинный класс:

$$\mathbf{S} = \sum_{\gamma=1}^3 \varphi_{\gamma} \bar{\mathbf{e}}_{\gamma}^2 + \frac{1}{2} \varphi_4 \mathbf{O}_3 + \frac{1}{4} \left( \varphi_5 \mathbf{O}_2 \otimes \mathbf{O}_2 + \right. \\ \left. + \varphi_7 \mathbf{O}_1 \otimes \mathbf{O}_1 \right) \cdot \cdot \mathbf{T} + \frac{1}{2} \varphi_6 (\mathbf{O}_1 \otimes \mathbf{O}_2 + \mathbf{O}_2 \otimes \mathbf{O}_1) \cdot \cdot \mathbf{B}, \quad (5.541)$$

$$\varphi_{\gamma} = \varphi_{\gamma} \left( J_1^{(M)}, \dots, J_{13}^{(M)} \right).$$

(O)-Ортотропный класс:

$$\mathbf{S} = \sum_{\gamma=1}^3 \varphi_{\gamma} \bar{\mathbf{e}}_{\gamma}^2 + \frac{1}{4} \left( \varphi_4 \mathbf{O}_1 \otimes \mathbf{O}_1 + \varphi_5 \mathbf{O}_2 \otimes \mathbf{O}_2 + \right. \\ \left. + \varphi_7 \mathbf{O}_3 \otimes \mathbf{O}_3 \right) \cdot \cdot \mathbf{T} + 3 \varphi_6 {}^6 \mathbf{O}_m \cdot \cdot \cdot \mathbf{B} \otimes \mathbf{B}, \quad (5.542)$$

$$\varphi_{\gamma} = \varphi_{\gamma} \left( J_1^{(O)}, \dots, J_{13}^{(O)} \right).$$

(T)-Тетрагональный класс:

$$\mathbf{S} = (\varphi_1 + \varphi_7 I_2(\mathbf{B})) \mathbf{E} + (\varphi_2 - \varphi_1) \bar{\mathbf{e}}_3^2 + \frac{1}{2} \varphi_3 (\mathbf{O}_1 \otimes \mathbf{O}_1 + \\ + \mathbf{O}_2 \otimes \mathbf{O}_2) \cdot \cdot (\varphi_3 \mathbf{B} + \frac{\varphi_4}{2} \mathbf{T}) + \left( 2 \varphi_5 (\mathbf{O}_h - \bar{\mathbf{e}}_3^2 \otimes \bar{\mathbf{e}}_3^2) + \frac{1}{4} \varphi_6 \Omega_{3h} \right) \cdot \cdot \mathbf{T} - \\ - \varphi_7 I_1(\mathbf{B}) \mathbf{B} + \varphi_7 \mathbf{B}^2, \quad (5.543)$$

$$\varphi_{\gamma} = \varphi_{\gamma} \left( J_1^{(T)}, \dots, J_{13}^{(T)} \right), \quad J_{13}^{(T)} = \det \mathbf{B}.$$

(K<sub>3</sub>)-Квазитрансверсально-изотропный класс:

$$\mathbf{S} = (\varphi_1 + \varphi_7 I_2(\mathbf{B})) \mathbf{E} + (\varphi_2 - \varphi_1) \bar{\mathbf{e}}_3^2 + \frac{1}{2} (\mathbf{O}_1 \otimes \mathbf{O}_1 + \\ + \mathbf{O}_2 \otimes \mathbf{O}_2) \cdot \cdot (\varphi_3 \mathbf{B} + \frac{\varphi_4 - \varphi_6}{2} \mathbf{T}) + \left( (2 \varphi_5 - \frac{\varphi_6}{2}) \mathbf{O}_h - 2 \varphi_5 \bar{\mathbf{e}}_3^2 \otimes \bar{\mathbf{e}}_3^2 + \right. \\ \left. + \frac{\varphi_6}{2} \Delta \right) \cdot \cdot \mathbf{T} - \varphi_7 I_1(\mathbf{B}) \mathbf{B} + \varphi_7 \mathbf{B}^2, \quad (5.544)$$

$$\varphi_{\gamma} = \varphi_{\gamma} \left( J_1^{(K)}, \dots, J_{13}^{(K)} \right), \quad J_{13}^{(K)} = \det \mathbf{B}.$$

(A)-Ромбоэдрический класс:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} = & \varphi_1(\mathbf{E} - \bar{\mathbf{e}}_3^2) + (\varphi_2 - I_2(\mathbf{B})\varphi_7)\bar{\mathbf{e}}_3^2 + \frac{1}{2}(\mathbf{O}_1 \otimes \mathbf{O}_1 + \mathbf{O}_2 \otimes \mathbf{O}_2) \cdots \left( \varphi_3 \mathbf{B} + \right. \\ & \left. + \left( \frac{\varphi_4}{2} - \varphi_7 \right) \mathbf{T} \right) + \left( \varphi_7 \Delta + \frac{1}{4} \varphi_5 \mathbf{D}_3 + \frac{1}{4} \varphi_6 \Omega_{3d} \right) \cdots \mathbf{T}, \end{aligned} \quad (5.545)$$

$$\varphi_\gamma = \varphi_\gamma \left( J_1^{(A)}, \dots, J_{13}^{(A)} \right).$$

(B)-Ромбоэдрический класс:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} = & (\varphi_1 + \varphi_7 I_2(\mathbf{B}))\mathbf{E} + (\varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_6 I_2(\mathbf{B}))\bar{\mathbf{e}}_3^2 + \frac{1}{2}(\mathbf{O}_1 \otimes \mathbf{O}_1 + \\ & + \mathbf{O}_2 \otimes \mathbf{O}_2) \cdots \left( \varphi_3 \mathbf{B} + \left( \frac{\varphi_4}{2} - \varphi_6 \right) \mathbf{T} \right) + \left( \varphi_6 \Delta + \frac{1}{4} \varphi_5 \mathbf{D}_3 \right) \cdots \mathbf{T} - \\ & - \varphi_7 I_1(\mathbf{B})\mathbf{B} + \varphi_7 \mathbf{B}^2, \end{aligned} \quad (5.546)$$

$$\varphi_\gamma = \varphi_\gamma \left( J_1^{(B)}, \dots, J_{13}^{(B)} \right).$$

(K)-Квазизотропный класс:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} = & (\varphi_1 + \varphi_7 I_2(\mathbf{B}))\mathbf{E} + \left( \varphi_2 - \frac{\varphi_3}{2} \right) \mathbf{O}_h \cdots \mathbf{T} + \frac{\varphi_3}{2} \mathbf{T} + \\ & + (\varphi_4 - \varphi_5)(\mathbf{T} \cdots \mathbf{O}_h) \cdot (\mathbf{T} \cdots \mathbf{O}_h) + \varphi_5 \mathbf{O}_h \cdots \mathbf{T}^2 + \\ & + \varphi_6 \left( \mathbf{B} \cdot (\mathbf{O}_h \cdots \mathbf{T}) + (\mathbf{T} \cdots \mathbf{O}_h) \cdot \mathbf{B} - (\mathbf{T} \cdots \mathbf{O}_h) \cdot (\mathbf{B} \cdots \mathbf{O}_h) \right) + \\ & + \varphi_7 (\mathbf{B}^2 - I_1(\mathbf{B})\mathbf{B}), \end{aligned} \quad (5.547)$$

$$\varphi_\gamma = \varphi_\gamma \left( J_1^{(Q)}, \dots, J_{13}^{(Q)} \right).$$

(H)-Гексагональный и (T<sub>3</sub>)-Трансверсально-изотропный классы:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} = & (\varphi_1 + \varphi_6 I_2(\mathbf{B}))\mathbf{E} + (\varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_5 I_2(\mathbf{B}))\bar{\mathbf{e}}_3^2 + \\ & + \frac{1}{2}(\mathbf{O}_1 \otimes \mathbf{O}_1 + \mathbf{O}_2 \otimes \mathbf{O}_2) \cdots \left( \varphi_3 \mathbf{B} + \left( \frac{\varphi_4}{2} - \varphi_5 \right) \mathbf{T} \right) + \\ & + \varphi_5 \mathbf{T} - \varphi_6 I_1(\mathbf{B})\mathbf{B} + \varphi_6 \mathbf{B}^2, \end{aligned} \quad (5.548)$$

$$\varphi_\gamma = \varphi_\gamma \left( J_1^{(H)}, \dots, J_{12}^{(H)} \right).$$

(I)-Изотропный класс:

$$\mathbf{S} = (\varphi_1 + \varphi_2 J_1(\mathbf{B}) + \varphi_3 J_2(\mathbf{B}))\mathbf{E} - (\varphi_2 + \varphi_3 J_1(\mathbf{B}))\mathbf{B} + \varphi_3 \mathbf{B}^2 + \varphi_4 \mathbf{T} + \varphi_5 \mathbf{T}^2 + \varphi_6 (\mathbf{T} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{T}) + \varphi_7 (\mathbf{T}^2 \cdot \mathbf{B} + \mathbf{B}^2 \cdot \mathbf{T}), \quad (5.549)$$

$$\varphi_\gamma = \varphi_\gamma \left( J_1^{(I)}, \dots, J_{10}^{(I)} \right).$$

В этих представлениях кроме функциональных базисов совместных инвариантов  $J_\gamma^{(s)}$  ( $\gamma = 1 \dots z$ ) добавлено еще по одному инварианту  $J_{13}^{(s)}$  (для  $H$ - и  $T_3$ -классов – это  $J_{12}^{(H)}$ ), которые являются зависимыми, однако их введение обеспечивает возможность предельного перехода к функции одного тензорного аргумента  $\mathbf{S} = \tilde{\mathcal{F}}(\mathbf{T}) \equiv \mathcal{F}(\mathbf{T}, \mathbf{T})$ , если положить  $\mathbf{B} = \mathbf{T}$ .

Если же такой предельный переход не учитывается, то все функции  $\varphi_7$ , соответствующие инвариантам  $J_{13}^{(s)}$ :  $\varphi_7 = \partial\psi/\partial J_{13}^{(s)}$ , можно положить равными нулю. Для  $H$  и  $T_3$  классов то же самое относится к функции  $\varphi_6 = \partial\psi/\partial J_{12}^{(H)}$ .

Добавочные инварианты имеют вид:

$$\begin{aligned} J_{13}^{(M)} &= J_{13}^{(O)} = (\bar{\mathbf{e}}_2^2 \cdot \mathbf{T}) \cdot (\bar{\mathbf{e}}_3^2 \cdot \mathbf{B}), \\ J_{13}^{(T)} &= J_{13}^{(K)} = J_{13}^{(B)} = J_{13}^{(Q)} = J_{12}^{(H)} = \det \mathbf{B}, \\ J_{13}^{(A)} &= \mathbf{T} \cdot \mathbf{B} - 2J_{10}^{(A)} - J_2^{(A)} J_8^{(A)}. \end{aligned} \quad (5.550)$$

Для изотропного класса добавочные инварианты не вводятся.

## ГЛАВА 6

### ТЕНЗОРНЫЙ АНАЛИЗ

---

Большинство законов физики и механики записывают с помощью дифференциальных соотношений между тензорными величинами. Так как эти законы должны быть "объективны", т.е. не зависеть от выбора системы координат, то и дифференцирование тензоров должно учитывать это свойство. Оказывается однако, что обычные частные производные от компонент тензора не являются компонентами какого-либо другого тензора, поэтому применяют специальное ковариантное дифференцирование тензоров, которому и посвящена настоящая глава.

#### § 6.1. Ковариантное дифференцирование

##### 6.1.1. Символы Кристоффеля

Пусть в пространстве  $\mathbb{R}^3$  кроме декартовой системы координат  $Ox^i$  имеется некоторая криволинейная система координат  $X^i$  (1.2), и задано некоторое тензорное поле  ${}^n\Omega(x)$ , которое в силу (1.3) можно рассматривать как тензор-функцию от криволинейных координат  ${}^n\Omega(X^i)$ .

Рассмотрим простейший случай такого поля – локальные векторы базиса  $R_i$ .

Поскольку система координат  $X^k(x^i)$  криволинейная, то локальные векторы базиса

$$R_i = \frac{\partial x}{\partial X^i}(X^k)$$

действительно зависят от координат, т.е. имеется векторное поле  $R_i = R_i(X^k)$ .

Рассмотрим производные векторов базиса  $\partial R_i / \partial X^j$ . Поскольку при фиксированных значениях  $i$  и  $j$  объект  $\partial R_i / \partial X^j$  тоже является вектором, то его можно разложить по векторам базиса  $R_j$ :

$$\partial R_i / \partial X^j = \Gamma_{ij}^k R_k. \quad (6.1)$$

Коэффициенты разложения  $\Gamma_{ij}^k$  называют *символами Кристоффеля* (*коэффициентами связности*), они симметричны по нижним индексам:

сам:  $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ , т.к.

$$\frac{\partial \mathbf{R}_i}{\partial X^k} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial X^i \partial X^k} = \frac{\partial \mathbf{R}_k}{\partial X^i}. \quad (6.2)$$

Символы Кристоффеля не являются компонентами тензора, при переходе из одной системы координат в другую они преобразуются по закону, отличному от тензорного (см. упр. 6.1.1). Вычислим производные от векторов взаимного базиса:  $\partial \mathbf{R}^k / \partial X^i$ . Для этого продифференцируем соотношение между  $\mathbf{R}_i$  и  $\mathbf{R}^i$  (см. упр. 1.1.5):

$$\mathbf{R}_i \cdot \mathbf{R}^j = \delta_i^j,$$

тогда

$$\frac{\partial \mathbf{R}_i}{\partial X^k} \cdot \mathbf{R}^j + \mathbf{R}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{R}^j}{\partial X^k} = \mathbf{R}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{R}^j}{\partial X^k} + \Gamma_{ik}^m \mathbf{R}_m \cdot \mathbf{R}^j = 0.$$

Умножая это уравнение тензорно на  $\mathbf{R}^i$ , получаем:

$$\partial \mathbf{R}^j / \partial X^k = -\Gamma_{ik}^j \mathbf{R}^i. \quad (6.3)$$

### 6.1.2. Связь $\Gamma_{ij}^k$ с $g_{ij}$

Оказывается, что  $\Gamma_{ij}^k$  связаны с матрицей  $g_{ij}$ . В самом деле, дифференцируя (1.14), имеем:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial X^k} = \frac{\partial \mathbf{R}_i \cdot \mathbf{R}_j}{\partial X^k} = \frac{\partial \mathbf{R}_i}{\partial X^k} \cdot \mathbf{R}_j + \mathbf{R}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{R}_j}{\partial X^k},$$

или с учетом обозначения (6.1):

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial X^k} = \Gamma_{ik}^l \mathbf{R}_l \cdot \mathbf{R}_j + \mathbf{R}_i \cdot \Gamma_{jk}^l \cdot \mathbf{R}_l = \Gamma_{ik}^l g_{lj} + \Gamma_{jk}^l g_{il}. \quad (6.4)$$

Меняя индексы  $i$  и  $k$ , получим:

$$\frac{\partial g_{kj}}{\partial X^i} = \Gamma_{ki}^l g_{lj} + \Gamma_{ji}^l g_{kl}. \quad (6.5)$$

Меняя в (6.4) индексы  $j$  и  $k$ , получаем аналогично:

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial X^j} = \Gamma_{ij}^l g_{lk} + \Gamma_{kj}^l g_{il}. \quad (6.6)$$

Складывая (6.5) и (6.6) и затем вычитая из полученного выражения уравнение (6.4), получаем с учетом симметрии символов Кристоффеля и  $g_{kl}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{kj}}{\partial X^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial X^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial X^k} &= \Gamma_{ki}^l g_{lj} + \Gamma_{ji}^l g_{kl} + \Gamma_{ij}^l g_{lk} + \\ &+ \Gamma_{kj}^l g_{il} - \Gamma_{ik}^l g_{lj} - \Gamma_{jk}^l g_{il} = 2\Gamma_{ij}^l g_{lk}. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Умножая левую и правую части на  $(1/2)g^{km}$ , придем к теореме.

**Теорема 6.1.** Символы Кристоффеля  $\Gamma_{ij}^m$  определяются только метрической матрицей  $g_{ij}$ :

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2} g^{km} \left( \frac{\partial g_{kj}}{\partial X^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial X^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial X^k} \right). \quad (6.8)$$

Отсюда видно, что в декартовой системе координат, где  $g_{ij} = \text{const}$ ,  $\Gamma_{ij}^m \equiv 0$ .

Часто используют формулу, связывающую символы Кристоффеля  $\Gamma_{km}^m$  с  $g^{ij}$ :

$$\Gamma_{km}^m = \frac{1}{2} g^{im} \left( \frac{\partial g_{im}}{\partial X^k} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial X^m} - \frac{\partial g_{mi}}{\partial X^k} \right) = \frac{1}{2} g^{im} \frac{\partial g_{im}}{\partial X^k}. \quad (6.9)$$

Вычислим также с учетом формулы (1.156) производную от  $g = \det(g_{ij})$  по  $X^k$ :

$$\frac{\partial g}{\partial X^k} = \frac{\partial g}{\partial g_{ij}} \frac{\partial g_{ij}}{\partial X^k} = gg^{ij} \frac{\partial g_{ij}}{\partial X^k} = 2g\Gamma_{km}^m. \quad (6.10)$$

Из (6.9) и (6.10) получаем, что

$$\Gamma_{km}^m = \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial X^k} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial X^k}. \quad (6.11)$$

### 6.1.3. Символы Кристоффеля первого рода

Умножая  $\Gamma_{ij}^m$  на  $g_{mk}$  согласно правилам жонглирования индексами, получим

$$\Gamma_{ijk} = \Gamma_{ij}^m g_{mk} \quad (6.12)$$

— полностью ковариантные символы, называемые *символами Кристоффеля первого рода*. Для  $\Gamma_{ij}^m$  в этом случае используют название *символов Кристоффеля второго рода*.

Из (6.8) и (6.12), очевидно, следуют соотношения между  $\Gamma_{ijk}$  и метрической матрицей:

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{ik}}{\partial X^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial X^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial X^k} \right). \quad (6.13)$$

### 6.1.4. Градиент скаляра

Пусть имеется скаляр  $\varphi(X^k)$ , заданный как функция координат точки  $M$  с координатами  $X^k$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.1.** Градиентом скаляра назовем вектор, определенный следующим образом:

$$\nabla \varphi = \mathbf{R}^k \frac{\partial \varphi}{\partial X^k}. \quad (6.14)$$

Здесь  $\nabla$  - символ Гамильтона, называемый *набла-оператором*, который трактуется как действие символического вектора:

$$\nabla = \mathbf{R}^k \frac{\partial}{\partial X^k}. \quad (6.15)$$

Введем также обозначения для компонент разложения вектора  $\nabla \varphi$  по базису  $\mathbf{R}^k$ :

$$\nabla_k \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial X^k}, \quad \nabla \varphi = \nabla_k \varphi \mathbf{R}^k, \quad (6.15')$$

- получим *ковариантную производную скаляра*, которая, очевидно, совпадает с обычной частной производной.

Для векторов и тензоров такого совпадения, как увидим далее, уже нет.

### 6.1.5. Ковариантные производные компонент вектора

Рассмотрим теперь произвольное векторное поле  $\mathbf{a}(X^k)$ , заданное в  $\mathbb{R}^3$  и вычислим его производные по  $X^k$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial X^k} &= \frac{\partial a^i \mathbf{R}_i}{\partial X^k} = \frac{\partial a^i}{\partial X^k} \mathbf{R}_i + a^i \frac{\partial \mathbf{R}_i}{\partial X^k} = \\ &= \frac{\partial a^i}{\partial X^k} \mathbf{R}_i + a^i \Gamma_{ik}^j \mathbf{R}_j = \left( \frac{\partial a^j}{\partial X^k} + a^i \Gamma_{ik}^j \right) \mathbf{R}_j. \end{aligned} \quad (6.16)$$

Величина, стоящая в скобках, называется *ковариантной производной от контравариантных компонент вектора* и обозначается как

$$\nabla_k a^j = \frac{\partial a^j}{\partial X^k} + a^i \Gamma_{ik}^j. \quad (6.17)$$

*Ковариантную производную от ковариантных компонент вектора* определяют как

$$\nabla_k a_i = \frac{\partial a_i}{\partial X^k} - \Gamma_{ik}^j a_j. \quad (6.18)$$

Тогда производную от самого вектора  $\mathbf{a}$  можно представить в виде:

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial X^k} = \nabla_k a^j \mathbf{R}_j = \mathbf{R}^j \nabla_k a_j. \quad (6.19)$$

*Контравариантной производной от*, соответственно, ко- и контравариантных компонент вектора называют следующие величины:

$$\nabla^m a_j = g^{mk} \nabla_k a_j \quad \text{и} \quad \nabla^m a^j = g^{mk} \nabla_k a^j. \quad (6.20)$$

### 6.1.6. Набла-оператор и градиент вектора

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.2.** Набла-оператором (градиентом) вектора  $\mathbf{a}$  называют тензорное произведение векторов взаимного базиса  $\mathbf{R}^k$  и частных производных  $\partial \mathbf{a} / \partial X^k$ :

$$\nabla \otimes \mathbf{a} = \mathbf{R}^k \otimes \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial X^k} = \mathbf{R}^k \otimes \mathbf{R}_j \nabla_k a^j. \quad (6.21)$$

Раскроем физический смысл градиента вектора.

Вычислим дифференциал вектора  $d\mathbf{a}$ , рассматривая его как приращение вектора  $\mathbf{a}$ , обусловленное переходом из точки  $\mathcal{M}$  с координатами  $X^k$  в близкую точку  $\mathcal{M}_1$  с координатами  $X^k + dX^k$ :

$$d\mathbf{a}(X^k) = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial X^k} dX^k. \quad (6.22)$$

Если в качестве  $\mathbf{a}$  выбрать радиус-вектор  $\mathbf{x}$ , то получим:

$$d\mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial X^k} dX^k = \mathbf{R}_k dX^k. \quad (6.23)$$

Умножим (6.23) слева и справа на  $\mathbf{R}_i$ , тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^i \cdot d\mathbf{x} &= \mathbf{R}^i \cdot \mathbf{R}_k dX^k = \mathbf{R}^i \cdot \mathbf{R}^m g_{mk} dX^k = \\ &= g^{im} g_{mk} dX^k = \delta_k^i dX^k = dX^i. \end{aligned} \quad (6.24)$$

Следовательно, (6.22) можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} d\mathbf{a}(X^k) &= d\mathbf{x} \cdot \mathbf{R}^k \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial X^k} = d\mathbf{x} \cdot \mathbf{R}^k \otimes \nabla_k a^j \mathbf{R}_j = \\ &= d\mathbf{x} \cdot \nabla_k a^j \mathbf{R}^k \otimes \mathbf{R}_j = d\mathbf{x} \cdot \nabla \otimes \mathbf{a}. \end{aligned} \quad (6.25)$$

В итоге получим:

$$d\mathbf{a} = (\nabla \otimes \mathbf{a})^T \cdot d\mathbf{x}. \quad (6.26)$$

Таким образом, градиент вектора  $(\nabla \otimes \mathbf{a})^T$  связывает приращения вектора  $\mathbf{a}$  с соответствующими приращениями радиуса-вектора  $\mathbf{x}$  при переходе от материальной точки  $X^k$  к  $X^k + dX^k$ .

Для тензора  $(\nabla \otimes \mathbf{a})^T$  на основании (6.15) справедливо следующее формальное представление:

$$(\nabla \otimes \mathbf{a})^T = \mathbf{a} \otimes \nabla = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial X^k} \otimes \mathbf{R}^k = \nabla_k a^j \mathbf{R}_j \otimes \mathbf{R}^k. \quad (6.27)$$

**ТЕОРЕМА 6.2.** Градиент вектора  $\nabla \otimes \mathbf{a}$  является тензором второго ранга, а ковариантные  $\nabla_i a^j$ ,  $\nabla_i a_j$  и контравариантные  $\nabla^i a_j$ ,  $\nabla^i a^j$  производные являются компонентами этого тензора.

▼ То, что  $\nabla \otimes \mathbf{a}$  - тензор, следует, например, из (6.26) по обратному тензорному признаку. Следовательно, при переходе из одной системы координат  $X^i$  в другую  $X'^i$  его компоненты преобразуются по тензорному закону. Но из (6.21) следует, что его компонентами являются  $\nabla_i a_j$ ,  $\nabla_i a^j$  и  $\nabla^i a_j$ ,  $\nabla^i a^j$  в соответствующих базисах:

$$\nabla \otimes \mathbf{a} = \nabla_i a_j \mathbf{R}^i \otimes \mathbf{R}^j = \nabla_i a^j \mathbf{R}^i \otimes \mathbf{R}_j = \nabla^i a_j \mathbf{R}_i \otimes \mathbf{R}^j = \nabla^i a^j \mathbf{R}_i \otimes \mathbf{R}_j. \quad (6.28)$$

Следовательно, в отличие от частных производных  $\partial a^i / \partial X^k$  и  $\partial a_j / \partial X^k$ , ко- и контравариантные производные являются компонентами тензора. ▲

Поскольку физические законы описываются, как правило, инвариантными дифференциальными уравнениями, то в них используют именно ковариантные (а не частные) производные.

### 6.1.7. Ротор вектора

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.3.** Ротором вектора  $\mathbf{a}$  называется вектор, определенный следующим образом:

$$\nabla \times \mathbf{a} = \mathbf{R}^i \times \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial X^i} = \text{rot } \mathbf{a} = 2\omega. \quad (6.29)$$

Используя определение (1.33) векторного произведения, находим компоненты ротора:

$$\nabla \times \mathbf{a} = \frac{1}{\sqrt{g}} \epsilon^{ijk} \nabla_i a_j \mathbf{R}_k. \quad (6.30)$$

Вектор  $\omega$  называют *вектором вихря*. Как всякий вектор, образованный векторным произведением двух полярных векторов,  $\omega$  является аксиальным вектором, т.е., вообще говоря, псевдовектором (см. §1.9). Кроме того,  $\omega$  является вектором, сопутствующим некоторому кососимметричному тензору  $\Omega$ , который по (1.203) можно образовать следующим образом:

$$\begin{aligned} \Omega &= \mathbf{E} \times \omega = \frac{1}{2} \mathbf{R}_i \otimes \mathbf{R}^i \times \mathbf{R}^j \times \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial X^j} = \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{R}_i \otimes \left( \left( \mathbf{R}^i \cdot \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial X^j} \right) \mathbf{R}^j - (\mathbf{R}^i \cdot \mathbf{R}^j) \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial X^j} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial X^j} \otimes \mathbf{R}^j - \mathbf{R}^j \otimes \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial X^j} \right) = \frac{1}{2} ((\nabla \otimes \mathbf{a})^T - \nabla \otimes \mathbf{a}). \end{aligned} \quad (6.31)$$

Здесь использовано свойство (1.48) двойного векторного произведения, а также определение (6.21) градиента вектора.

Кососимметричный тензор  $\Omega$ , определенный формулой (6.31), называют *тензором вихря*, с его помощью транспонированный градиент вектора всегда можно представить в виде:

$$(\nabla \otimes \mathbf{a})^T = \varepsilon + \Omega, \quad (6.32)$$

где

$$\varepsilon \equiv \text{def } \mathbf{a} \equiv \frac{1}{2} (\nabla \otimes \mathbf{a} + (\nabla \otimes \mathbf{a})^T) \quad (6.33)$$

– симметричная часть, называемая *линейным тензором деформации над  $\mathbf{a}$* .

Подставляя разложение (6.32) в (6.26), получаем *формулу Гельмгольца*:

$$d\mathbf{a} = (\nabla \otimes \mathbf{a})^T \cdot d\mathbf{x} = \mathbf{T} \cdot d\mathbf{x} + \Omega \cdot d\mathbf{x} = \mathbf{T} \cdot d\mathbf{x} + \boldsymbol{\omega} \times d\mathbf{x}, \quad (6.34)$$

которая определяет приращение вектора  $\mathbf{a}$  в окрестности точки  $M$  через тензоры линейной деформации и вихря.

### 6.1.8. Дивергенция вектора

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.4.** *Дивергенцией вектора  $\mathbf{a}$  называют следующий скаляр:*

$$\nabla \cdot \mathbf{a} = \mathbf{R}^i \cdot \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial X^i} = \nabla_i a^i = \text{div } \mathbf{a}. \quad (6.35)$$

С учетом (6.11) и (6.17) выражение (6.35) можно представить в виде:

$$\nabla \cdot \mathbf{a} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g} a^i}{\partial X^i}. \quad (6.36)$$

### 6.1.9. Набла-оператор – самостоятельный вектор

Набла-оператор  $\nabla$  можно формально рассматривать как самостоятельный вектор, компонентами которого являются операторы ковариантной или контравариантной производной:

$$\nabla = \mathbf{R}^k \nabla_k. \quad (6.37)$$

Для набла-оператора справедливыми являются все операции умножения и сложения, как для обычных векторов. Например, легко проверить, что формулы для градиента (6.21), ротора (6.29) и дивергенции (6.35) будут справедливы при формальном умножении  $\nabla$  на вектор  $\mathbf{a}$ :

$$\nabla \otimes \mathbf{a} = \mathbf{R}^k \nabla_k \otimes a^j \mathbf{R}_j = \nabla_k a^j \mathbf{R}^k \otimes \mathbf{R}_j,$$

$$\nabla \cdot \mathbf{a} = \mathbf{R}^k \nabla_k \cdot a^j \mathbf{R}_j = \nabla_k a^j \mathbf{R}^k \cdot \mathbf{R}_j = \nabla_k a^k, \quad (6.38)$$

$$\nabla \times \mathbf{a} = \mathbf{R}^k \nabla_k \times a^j \mathbf{R}_j = \nabla_k a^j \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}_j = \sqrt{g} \epsilon^{kjm} \nabla_k a_j \mathbf{R}_m.$$

В отношении  $\nabla_k$  действуют обычные правила перемещения компонент векторов в любое место по отношению к знакам операций  $\otimes$ , · или  $\times$ . Однако  $\nabla_k$  нельзя перемещать по отношению к компонентам других векторов, так как по определению  $\nabla_k$  действует на стоящий справа от него символ компоненты тензора (напомним, что обычные компоненты в тензорах и их произведениях можно перемещать друг относительно друга).

Формула (6.14) для градиента скаляра тоже может быть получена формальным путем, так как согласно (6.15')  $\nabla_k \varphi = \partial \varphi / \partial X^k$ .

При формальном подходе можно произвести операции умножения (6.38) в обратном порядке:

$$\mathbf{a} \otimes \nabla = a^j \mathbf{R}_j \otimes \mathbf{R}^k \nabla_k = \mathbf{R}_j \otimes \mathbf{R}^k a^j \nabla_k,$$

$$\mathbf{a} \cdot \nabla = a^j \mathbf{R}_j \cdot \mathbf{R}^k \nabla_k = \mathbf{R}_j \cdot \mathbf{R}^k a^j \nabla_k = a^i \nabla_i; \quad (6.39)$$

$$\mathbf{a} \times \nabla = a^j \mathbf{R}_j \times \mathbf{R}^k \nabla_k = \mathbf{R}^j \times \mathbf{R}^k a_j \nabla_k = \frac{1}{\sqrt{g}} \mathbf{R}_m \epsilon^{jkm} a_j \nabla_k.$$

Здесь мы опять поступаем с  $\nabla_k$  как с обычными компонентами вектора, однако перестановка по отношению к  $a^i$ , как указывалось выше, недопустима.

Чтобы формальные операции (6.39) не потеряли смысл при их расшифровке в физических соотношениях, справа от операций (6.39) обязательно должен стоять какой-либо тензор, вектор или скаляр.

Таким образом, "странные", на первый взгляд, операции умножения (6.39) являются вполне допустимыми и используются в дальнейшем. Для них применяют следующие названия: *правый градиент вектора*, *правая дивергенция вектора* и *правый ротор вектора*.

### 6.1.10. Нелинейные дифференциальные операции над вектором

Все рассмотренные выше дифференциальные операции над вектором:  $\nabla \times \mathbf{a}$ ,  $\nabla \cdot \mathbf{a}$  и  $\text{def } \mathbf{a}$  – являются линейными, однако в механике широко применяются и *нелинейные дифференциальные операции*.

Наибольшее распространение имеют четыре такие операции:

$$\text{lef}_{\pm} (\mathbf{a}) = \text{def } \mathbf{a} \pm \frac{1}{2} (\nabla \otimes \mathbf{a}) \cdot (\nabla \otimes \mathbf{a})^T,$$

которые называют *левым положительным* (или *отрицательным*) *тензором деформаций* над  $\mathbf{a}$  и

$$\text{ref}_{\pm} (\mathbf{a}) = \text{def } \mathbf{a} \pm \frac{1}{2} (\nabla \otimes \mathbf{a})^T \cdot (\nabla \otimes \mathbf{a})$$

правым положительным (или отрицательным) тензором деформаций над  $\mathbf{a}$ .

Компоненты этих тензоров в базисе  $\mathbf{R}_i$  имеют следующий вид:

$$\text{lef}_{\pm}(\mathbf{a}) = \frac{1}{2}(\nabla_i a_j + \nabla_j a_i \pm \nabla_i a_k \nabla_j a^k) \mathbf{R}^i \otimes \mathbf{R}^j,$$

$$\text{ref}_{\pm}(\mathbf{a}) = \frac{1}{2}(\nabla_i a_j + \nabla_j a_i \pm \nabla_k a_i \nabla^k a_j) \mathbf{R}^i \otimes \mathbf{R}^j.$$

### Упражнения к § 6.1.

**Упражнение 6.1.1.** Используя формулы (6.8) и (6.13), а также результаты упр. 1.1.9, доказать, что символы Кристоффеля при переходе из системы координат  $X^i$  в  $X'^i$  преобразуются следующим образом:

$$\Gamma_{ij}^k = P_l^k Q_m^m Q_j^n \Gamma_{mn}^{il} + \frac{\partial^2 X'^m}{\partial X^i \partial X^j} P_m^k,$$

$$\Gamma_{ijk} = Q_m^m Q_j^n Q_l^l \Gamma_{ilj} + \frac{\partial^2 X'^m}{\partial X^i \partial X^j} g_{mn} Q_k^n.$$

**Упражнение 6.1.2.** Используя формулу (6.8), показать, что в цилиндрической системе координат ненулевые символы Кристоффеля второго рода имеют вид:

$$\Gamma_{22}^1 = -r, \quad \Gamma_{21}^2 = 1/r,$$

а ненулевые символы Кристоффеля первого рода имеют вид:

$$\Gamma_{122} = r, \quad \Gamma_{221} = -r.$$

**Упражнение 6.1.3.** Показать, что в сферической системе координат ненулевые символы Кристоффеля второго рода имеют вид:

$$\Gamma_{22}^1 = -r, \quad \Gamma_{33}^1 = -r \sin^2 \vartheta, \quad \Gamma_{33}^2 = -\frac{1}{2} \sin 2\vartheta,$$

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{13}^3 = 1/r, \quad \Gamma_{23}^3 = \operatorname{ctg} \vartheta,$$

а символы Кристоффеля первого рода имеют вид:

$$\Gamma_{221} = -r, \quad \Gamma_{331} = -r \sin^2 \vartheta, \quad \Gamma_{332} = -\frac{1}{2} r^2 \sin 2\vartheta,$$

$$\Gamma_{122} = r, \quad \Gamma_{133} = r \sin^2 \vartheta, \quad \Gamma_{233} = \frac{1}{2} r^2 \sin 2\vartheta.$$

**Упражнение 6.1.4.** Показать, что дифференциал скаляра  $\varphi(X^k)$  можно представить в виде

$$d\varphi = \nabla \varphi \cdot dx.$$

**Упражнение 6.1.5.** Показать, что в декартовой системе координат градиент скаляра имеет вид:

$$\nabla \psi = \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial \psi}{\partial x^\alpha} \bar{e}_\alpha.$$

**Упражнение 6.1.6.** Показать, что

$$\nabla \otimes x = E, \quad \nabla \cdot x = 3, \quad \nabla \times x = 0.$$

**Упражнение 6.1.7.** Показать, что в декартовой системе координат формулы (6.18) для градиента, (6.35) – для дивергенции и (6.29) – для ротора вектора имеют вид:

$$\nabla_i a_k = \frac{\partial a_k}{\partial x^i}, \quad \operatorname{div} a = \frac{\partial a_i}{\partial x^i},$$

$$\operatorname{rot} a = \sum_{\alpha=1}^3 \left( \frac{\partial a_\beta}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial a_\gamma}{\partial x^\beta} \right) \bar{e}_\alpha, \quad \alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha.$$

**Упражнение 6.1.8.** Показать, что ротор вектора (6.29) можно представить в виде символьического определителя:

$$\operatorname{rot} a = \frac{1}{\sqrt{g}} \begin{vmatrix} R_1 & R_2 & R_3 \\ \nabla_1 & \nabla_2 & \nabla_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix},$$

где  $\nabla_i$  умножается на  $a_j$  слева, а правый ротор (6.39) – в виде:

$$a \times \nabla = \frac{1}{\sqrt{g}} \begin{vmatrix} R_1 & R_2 & R_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ \nabla_1 & \nabla_2 & \nabla_3 \end{vmatrix},$$

где  $\nabla_i$  умножается на  $a_j$  справа.

## § 6.2. Дифференцирование тензоров второго ранга

### 6.2.1. Ковариантные производные тензора

Определим *ковариантные производные тензора второго ранга*. Для этого вычислим производную от тензора  $T(X^k)$ , заданного как

функция от криволинейных координат  $X^k$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial X^k} &= \frac{\partial}{\partial X^k}(T^{ij}R_i \otimes R_j) = \frac{\partial T^{ij}}{\partial X^k}R_i \otimes R_j + T^{ij}\frac{\partial R_i}{\partial X^k} \otimes R_j + \\ &+ T^{ij}R_i \otimes \frac{\partial R_j}{\partial X^k} = \frac{\partial T^{ij}}{\partial X^k}R_i \otimes R_j + T^{ij}\Gamma_{ik}^mR_m \otimes R_j + T^{ij}R_i \otimes \Gamma_{jk}^mR_m = \\ &= \left( \frac{\partial T^{ij}}{\partial X^k} + T^{mj}\Gamma_{mk}^i + T^{im}\Gamma_{mk}^j \right) R_i \otimes R_j = \nabla_k T^{ij}R_i \otimes R_j. \end{aligned} \quad (6.40)$$

Здесь введено обозначение *ковариантной производной контравариантных компонент тензора* второго ранга:

$$\nabla_k T^{ij} = \frac{\partial T^{ij}}{\partial X^k} + T^{mj}\Gamma_{mk}^i + T^{im}\Gamma_{mk}^j. \quad (6.41)$$

*Ковариантные производные ковариантных компонент тензора* определяют как

$$\nabla_k T_{ij} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial X^k} - T_{mj}\Gamma_{ik}^m - T_{im}\Gamma_{jk}^m, \quad (6.42)$$

*а ковариантную производную смешанных компонент тензора* следующим образом:

$$\nabla_k T_j^i = \frac{\partial T_j^i}{\partial X^k} + T_j^m\Gamma_{mk}^i - T_m^i\Gamma_{jk}^m. \quad (6.43)$$

Умножая ковариантные производные на обратную метрическую матрицу  $g^{km}$ , получим *контравариантные производные*:

$$\nabla^m T^{ij} = g^{mk}\nabla_k T^{ij}, \quad \nabla^m T_{ij} = g^{mk}\nabla_k T_{ij}, \quad \nabla^m T_j^i = g^{mk}\nabla_k T_j^i. \quad (6.44)$$

## 6.2.2. Дифференциал тензора

По аналогии с дифференциалом вектора определим *дифференциал тензора*  $n$ -го ранга  $d^n\Omega$ , рассматривая его как приращение тензора  ${}^n\Omega$ , обусловленное переходом из точки  $\mathcal{M}(X^k)$  в близкую точку с координатами  $X^k + dX^k$ :

$$d^n\Omega = \frac{\partial {}^n\Omega}{\partial X^k} dX^k. \quad (6.45)$$

Используя формулу (6.24), получим

$$d^n\Omega = dx \cdot R^k \otimes \frac{\partial {}^n\Omega}{\partial X^k} = dx \cdot \nabla \otimes {}^n\Omega. \quad (6.46)$$

Здесь введено обозначение для градиента тензора  $n$ -го ранга

$$\nabla \otimes {}^n\Omega = R^k \otimes \frac{\partial {}^n\Omega}{\partial X^k} = \nabla_k \Omega^{i_1 i_2 \dots i_n} R^k \otimes R_i \otimes \dots \otimes R_n. \quad (6.47)$$

**Теорема 6.3.** Градиент тензора  $n$ -го ранга, определенный по (6.47), представляет собой тензор  $(n+1)$ -го ранга, а ковариантные  $\nabla_k \Omega^{i_1 \dots i_n}$  и контравариантные  $\nabla^k \Omega^{i_1 \dots i_n}$  производные являются компонентами этого тензора в соответствующих базисах.

▼ Доказательство аналогично доказательству теоремы 6.3 и основано на соотношении (6.46). ▲

В силу этой теоремы, ко- и контравариантные производные тензоров при переходе из одной системы координат в другую преобразуются по тензорному закону.

### 6.2.3. Дивергенция тензора

**Определение 6.5.** Дивергенцией тензора второго ранга  $\nabla \cdot T$  называют следующий вектор:

$$\nabla \cdot T = R^k \cdot \frac{\partial T}{\partial X^k} = \nabla_i T^{ij} R_j = \operatorname{div} T. \quad (6.48)$$

Дивергенцию тензора с учетом (6.41) и (6.11) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \nabla \cdot T &= \nabla_i T^{ij} R_j = \left( \frac{\partial T^{ij}}{\partial X^i} + \Gamma_{im}^i T^{mj} + \Gamma_{mi}^j T^{im} \right) R_j = \left( \frac{\partial T^{ij}}{\partial X^i} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial X^m} T^{mj} \right) R_j + \frac{\partial R_m}{\partial X^i} T^{im} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial X^i} (\sqrt{g} T^{ij} R_j), \end{aligned} \quad (6.49)$$

или иначе

$$\begin{aligned} \nabla \cdot T &= \left( \sqrt{g} \frac{\partial T^{ij}}{\partial X^i} + \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial X^i} T^{ij} \right) \frac{1}{\sqrt{g}} R_j + \Gamma_{mi}^j T^{im} R_j = \\ &= \left( \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial X^i} (\sqrt{g} T^{ij}) + \Gamma_{mi}^j T^{im} \right) R_j. \end{aligned} \quad (6.50)$$

Оба эти представления (6.49) и (6.50) часто используют в механике.

### 6.2.4. Ротор тензора

**Определение 6.6.** Ротор тензора второго ранга  $T$  определяют следующим образом:

$$\nabla \times T = R^i \times \frac{\partial T}{\partial X^i} = \operatorname{rot} T. \quad (6.51)$$

Используя формулу (1.138) для векторного произведения вектора и тензора, находим компоненты  $\nabla \times T$ :

$$\nabla \times T = \frac{1}{\sqrt{g}} \epsilon^{ijk} \nabla_i T_{jl} R_k \otimes R^l = \sqrt{g} \epsilon_{ijk} \nabla^i T^{jl} R^k \otimes R_l. \quad (6.52)$$

### 6.2.5. Ковариантные производные метрической матрицы

Если в качестве  $T_{ij}$  выбрать метрическую матрицу  $g_{ij}$ , то из (6.42) и (6.8) получим:

$$\nabla_k g_{ij} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial X^k} - \Gamma_{ki}^m g_{mj} - \Gamma_{kj}^m g_{mi} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial X^k} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{ji}}{\partial X^k} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial X^i} - \frac{\partial g_{ki}}{\partial X^j} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{ij}}{\partial X^k} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial X^j} - \frac{\partial g_{kj}}{\partial X^i} \right) = 0, \quad (6.53)$$

то есть

$$\nabla_k g_{ij} = 0, \quad \nabla_k g^{ij} = 0. \quad (6.54)$$

Отсюда и из (1.38) следует, что

$$\nabla_k g = \frac{1}{6} \epsilon^{ijs} \epsilon^{mnl} \nabla_k (g_{mi} g_{nj} g_{sl}) = 0. \quad (6.55)$$

Таким образом, мы доказали следующую теорему.

**ТЕОРЕМА 6.4 (Риччи).** *Ковариантная производная метрической матрицы и ее определителя  $g$  равны нулю.*

Из теоремы Риччи следует, что при всех операциях ковариантного дифференцирования  $g_{ij}$ ,  $g^{ij}$  и  $g$  можно считать константами и выносить из-под знака ковариантной (но не частной!) производной.

### Упражнения к § 6.2.

**Упражнение 6.2.1.** Показать, что правый ротор тензора имеет следующие компоненты:

$$\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \nabla = B_{im} \mathbf{R}^i \otimes \mathbf{R}^m = B^{im} \mathbf{R}_i \otimes \mathbf{R}_m,$$

$$B_{im} = \sqrt{g} \epsilon_{mjk} T_i^j \nabla^k, \quad B^{im} = \frac{1}{\sqrt{g}} \epsilon^{mjk} T_j^i \nabla_k,$$

правая дивергенция тензора имеет компоненты:

$$\mathbf{a} = \mathbf{T} \cdot \nabla = a^i \mathbf{R}_i = a^i \mathbf{R}_i, \quad a_i = T_i^k \nabla_k, \quad a^i = T^{ik} \nabla_k,$$

и правый градиент:

$${}^3\Omega = \mathbf{T} \otimes \nabla = \Omega^{ij}_k \mathbf{R}_i \otimes \mathbf{R}_j \otimes \mathbf{R}^k, \quad \Omega^{ij}_k = T^{ij} \nabla_k.$$

**Упражнение 6.2.2.** Используя формулу (6.52), показать, что если  $\mathbf{T}$  – симметричный тензор, то двойная свертка его ротора с метрическим тензором дает нуль:

$$I_1(\nabla \times \mathbf{T}) \equiv \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{T} = 0.$$

**Упражнение 6.2.3.** Используя формулы (6.52) и (6.31), показать, что если  $\Omega$  – кососимметричный тензор, то двойная свертка его ротора с метрическим тензором выражается следующим образом:

$$I_1(\nabla \times \Omega) \equiv \mathbf{E} \cdot \nabla \times \Omega = -2\nabla \cdot \boldsymbol{\omega},$$

где  $\boldsymbol{\omega}$  – вектор, сопутствующий  $\Omega$ .

### § 6.3. Свойства ковариантных производных

#### 6.3.1. Ковариантное дифференцирование сумм

Из определения ковариантных производных (6.17) и (6.41) следует аддитивность операции ковариантного дифференцирования:

$$\nabla_k(a^j + b^j) = \frac{\partial(a^j + b^j)}{\partial X^k} + (a^m + b^m)\Gamma_{mk}^j = \nabla_k a^j + \nabla_k b^j, \quad (6.56)$$

$$\begin{aligned} \nabla_k(T^{ij} + B^{ij}) &= \frac{\partial}{\partial X^k}(T^{ij} + B^{ij}) + (T^{mj} + B^{mj})\Gamma_{mk}^i + \\ &+ (T^{im} + B^{im})\Gamma_{mk}^j = \nabla_k T^{ij} + \nabla_k B^{ij}, \end{aligned} \quad (6.57)$$

тоже самое относится, очевидно, ко всем другим комбинациям индексов.

Из аддитивности ковариантных производных следует аддитивность набла-оператора во всех рассмотренных операциях: градиенте, дивергенции и роторе. Например, для векторов имеем:

$$\nabla \otimes (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \nabla_i(a^j + b^j)\mathbf{R}^i \otimes \mathbf{R}_j = \nabla \otimes \mathbf{a} + \nabla \otimes \mathbf{b},$$

$$\nabla \times (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \frac{1}{\sqrt{g}}\epsilon^{ijk}\nabla_i(a_j + b_j)\mathbf{R}_k = \nabla \times \mathbf{a} + \nabla \times \mathbf{b}, \quad (6.58)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \nabla_i(a^i + b^i) = \nabla \cdot \mathbf{a} + \nabla \cdot \mathbf{b}.$$

Аналогичные правила справедливы и для тензоров:

$$\nabla \otimes (\mathbf{T} + \mathbf{B}) = \nabla_k(T^{ij} + B^{ij})\mathbf{R}^k \otimes \mathbf{R}_i \otimes \mathbf{R}_j = \nabla \otimes \mathbf{T} + \nabla \otimes \mathbf{B},$$

$$\nabla \times (\mathbf{T} + \mathbf{B}) = \nabla \times \mathbf{T} + \nabla \times \mathbf{B}, \quad (6.59)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{T} + \mathbf{B}) = \nabla \cdot \mathbf{T} + \nabla \cdot \mathbf{B}.$$

### 6.3.2. Дифференцирование произведений вектора и тензора на скаляр

Ковариантные производные произведения скаляра  $\psi(X^k)$  на другой скаляр  $\varphi(X^k)$ , вектор  $\mathbf{a}$  или тензор  $\Omega$  вычисляют по формальным правилам дифференцирования произведения классических функций. В самом деле, согласно определениям (6.15'), (6.17) и (6.41):

$$\nabla_i(\varphi\psi) \equiv \frac{\partial\varphi\psi}{\partial X^i} = \psi\nabla_i\varphi + \varphi\nabla_i\psi,$$

$$\nabla_k(\varphi a^i) = \frac{\partial\varphi a^i}{\partial X^k} + \varphi a^m \Gamma_{mk}^i = a^i \nabla_k \varphi + \varphi \nabla_k a^i, \quad (6.60)$$

$$\nabla_k(\varphi T^{ij}) = \frac{\partial\varphi T^{ij}}{\partial X^k} + \varphi(T^{mj}\Gamma_{mk}^i + T^{im}\Gamma_{mk}^j) = \varphi \nabla_k T^{ij} + T^{ij} \nabla_k \varphi.$$

Аналогичные формулы имеют место и для других комбинаций индексов.

Образуем теперь с помощью этих формул градиент произведения скаляров:

$$\nabla(\varphi\psi) = \nabla_i(\varphi\psi)\mathbf{R}^i = \psi\nabla\varphi + \varphi\nabla\psi, \quad (6.61)$$

градиент, ротор и дивергенцию произведения скаляра на вектор:

$$\nabla \otimes (\varphi \mathbf{a}) = \nabla_k(\varphi a^i)\mathbf{R}^k \otimes \mathbf{R}_i = \nabla\varphi \otimes \mathbf{a} + \varphi \nabla \otimes \mathbf{a}, \quad (6.62)$$

$$\begin{aligned} \nabla \times (\varphi \mathbf{a}) &= \frac{1}{\sqrt{g}} \epsilon^{ijk} \nabla_i(\varphi a_j) \mathbf{R}_k = \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}} \epsilon^{ijk} (\nabla_i \varphi a_j + \varphi \nabla_i a_j) \mathbf{R}_k = \nabla\varphi \times \mathbf{a} + \varphi \nabla \times \mathbf{a}, \end{aligned}$$

$$\nabla \cdot (\varphi \mathbf{a}) = \nabla_i(\varphi a^i) = \nabla\varphi \cdot \mathbf{a} + \varphi \nabla \cdot \mathbf{a},$$

а также градиент, ротор и дивергенцию произведения скаляра на тензор:

$$\nabla \otimes (\varphi T) = \nabla\varphi \otimes T + \varphi \nabla \otimes T, \quad \nabla \times (\varphi T) = \nabla\varphi \times T + \varphi \nabla \times T, \quad (6.63)$$

$$\nabla \cdot (\varphi T) = \nabla\varphi \cdot T + \varphi \nabla \cdot T.$$

### 6.3.3. Дифференцирование произведений двух векторов

Вычислим, используя определение (6.43), ковариантную производную от произведения компонент двух векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ :

$$\nabla_k(a^i b_j) = \frac{\partial a^i b_j}{\partial X^k} - a^i b_m \Gamma_{jk}^m + a^m b_j \Gamma_{mk}^i = (\nabla_k a^i)b_j + a^i \nabla_k b_j. \quad (6.64)$$

Используя эту формулу, найдем градиент скалярного произведения двух векторов:

$$\begin{aligned}\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) &= \nabla_k(a^i b_i) \mathbf{R}^k = \nabla_k a^i \mathbf{R}^k b_i + \nabla_k b^i \mathbf{R}^k a_i = \\ &= \nabla_k a^i \mathbf{R}^k \otimes \mathbf{R}_i \cdot b_j \mathbf{R}^j + \nabla_k b^i \mathbf{R}^k \otimes \mathbf{R}_i \cdot a_i \mathbf{R}^j = \\ &= (\nabla \otimes \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} + (\nabla \otimes \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a}.\end{aligned}\quad (6.65)$$

Формально эту операцию можно было бы записать как  $\nabla \otimes (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ , однако для градиента скаляра знак тензорного произведения обычно не используется.

Аналогично вычисляем градиент векторного произведения двух векторов:

$$\begin{aligned}\nabla \otimes (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= \nabla_m(\sqrt{g} \epsilon_{ijk} a^i b^j) \mathbf{R}^m \otimes \mathbf{R}^k = \\ &= \sqrt{g} \epsilon_{ijk} ((\nabla_m a^i) b^j + a^i \nabla_m b^j) \mathbf{R}^m \otimes \mathbf{R}^k = \\ &= (\nabla \otimes \mathbf{a}) \times \mathbf{b} - (\nabla \otimes \mathbf{b}) \times \mathbf{a}.\end{aligned}\quad (6.66)$$

Здесь использовано свойство (6.28), а также свойство векторного произведения тензора на вектор (см. упр. 1.4.7).

Вычислим теперь две возможные дивергенции векторного  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  и тензорного  $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$  произведений (очевидно, что дивергенцию от скаляра  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  образовать невозможно):

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= \nabla_k(\sqrt{g} \epsilon_{ijk} a_i b_j) = \sqrt{g} (\epsilon_{ijk} (\nabla_k a_i) b_j - \epsilon^{kji} (\nabla_k b_j) a_i) = \\ &= \sqrt{g} \epsilon^{kij} \nabla_k a_i \mathbf{R}_j \cdot b_m \mathbf{R}^m - \sqrt{g} \epsilon^{kji} \nabla_k b_j \mathbf{R}_i \cdot a_m \mathbf{R}^m = \\ &= (\nabla \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} - (\nabla \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a},\end{aligned}\quad (6.67)$$

а также

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) &= \nabla_k(a^k b^j) \mathbf{R}_j = (\nabla_k a^k) b^j \mathbf{R}_j + a^k \nabla_k b^j \mathbf{R}_j = \\ &= (\nabla \cdot \mathbf{a}) \otimes \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \nabla \otimes \mathbf{b}.\end{aligned}\quad (6.67')$$

Наконец, вычислим два возможных ротора от векторного и тензорного произведений векторов:

$$\begin{aligned}\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= \epsilon^{ijk} \epsilon_{jmn} \nabla_i(a^m b^n) \mathbf{R}_k = \\ &= -(\delta_m^i \delta_n^k - \delta_n^i \delta_m^k)(\nabla_i a^m b^n + a^m \nabla_i b^n) \mathbf{R}_k = \\ &= ((\nabla_n a^k) b^n + a^k \nabla_n b^n - b^k \nabla_m a^m - a^i \nabla_i b^k) \mathbf{R}_k = \\ &= \mathbf{b} \cdot \nabla \otimes \mathbf{a} + \mathbf{a}(\nabla \cdot \mathbf{b}) - \mathbf{b}(\nabla \cdot \mathbf{a}) - \mathbf{a} \cdot \nabla \otimes \mathbf{b},\end{aligned}\quad (6.68)$$

здесь использованы определения векторного произведения (1.33) и ротора (6.30), а также свойство (1.36) символов Леви-Чивиты;

$$\begin{aligned}\nabla \times (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) &= \frac{1}{\sqrt{g}} \epsilon^{ijk} \nabla_i (a_j b_m) \mathbf{R}_k \otimes \mathbf{R}^m = \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}} \epsilon^{ijk} (\nabla_i a_j) \mathbf{R}_k \otimes b_m \mathbf{R}^m - \frac{1}{\sqrt{g}} \epsilon^{jik} a_j \nabla_i b_m \mathbf{R}_k \otimes \mathbf{R}^m = \\ &= (\nabla \times \mathbf{a}) \otimes \mathbf{b} - \mathbf{a} \times (\nabla \otimes \mathbf{b}).\end{aligned}\quad (6.69)$$

#### 6.3.4. Дифференцирование произведений вектора на тензор

Убедимся вначале, что правило ковариантного дифференцирования формально сохраняется и для произведений компонент тензора  $\mathbf{T}$  и вектора  $\mathbf{a}$ :

$$\begin{aligned}\nabla_k (T^{ij} a_l) &= \left( \frac{\partial T^{ij}}{\partial X^k} + T^{mj} \Gamma_{mk}^i + T^{im} \Gamma_{mk}^j \right) a_l - \\ &- T^{ij} a_m \Gamma_{kl}^m + T^{ij} \frac{\partial a_l}{\partial X^k} = (\nabla_k T^{ij}) a_l + T^{ij} \nabla_k a^l.\end{aligned}\quad (6.70)$$

Пользуясь этим правилом, вычислим градиенты от скалярного произведения тензора на вектор:

$$\begin{aligned}\nabla \otimes (\mathbf{T} \cdot \mathbf{a}) &= \nabla_i (T^{jk} a_k) \mathbf{R}^i \otimes \mathbf{R}_j = (\nabla_i T^{jk}) \mathbf{R}^i \otimes \mathbf{R}_j \otimes \mathbf{R}_k \cdot a_m \mathbf{R}^m + \\ &+ \nabla_i a_k \mathbf{R}^i \otimes T^{jk} \mathbf{R}_j = (\nabla \otimes \mathbf{T}) \cdot \mathbf{a} + (\nabla \otimes \mathbf{a}) \cdot \mathbf{T}^T,\end{aligned}\quad (6.71)$$

и

$$\begin{aligned}\nabla \otimes (\mathbf{a} \cdot \mathbf{T}) &= \nabla_i (a^j T_{jk}) \mathbf{R}^i \otimes \mathbf{R}^k = \nabla_i a^j \mathbf{R}^i \otimes \mathbf{R}_j \cdot T_{mk} \mathbf{R}^m \otimes \mathbf{R}^k + \\ &+ \nabla_i T_{jk} \mathbf{R}^i \otimes \mathbf{R}^k \otimes \mathbf{R}^j \cdot a^m \mathbf{R}_m = (\nabla \otimes \mathbf{a}) \cdot \mathbf{T} + (\nabla \otimes \mathbf{T}^T) \cdot \mathbf{a}.\end{aligned}\quad (6.72)$$

Вычислим дивергенцию от скалярного произведения тензора на вектор:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{a}) &= \nabla_i (T_{ik} a_k) = (\nabla_i T^{ik}) a_k + T^{ik} \nabla_i a^k = \\ &= (\nabla \cdot \mathbf{T}) \cdot \mathbf{a} + \mathbf{T} \cdot (\nabla \otimes \mathbf{a})^T,\end{aligned}\quad (6.73)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{T}) = \nabla_i (a_k T^{ki}) = (\nabla \cdot \mathbf{T}^T) \cdot \mathbf{a} + \mathbf{T} \cdot (\nabla \otimes \mathbf{a}),$$

и дивергенцию от векторного произведения:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\mathbf{T} \times \mathbf{a}) &= \nabla_i (\epsilon^{mj} T^i_j a_k) \mathbf{R}_m = \frac{1}{\sqrt{g}} \epsilon^{mj} (\nabla_i T^i_j) a_k \mathbf{R}_m + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{g}} \epsilon^{mj} T^i_j \nabla_i a_k \mathbf{R}_m = (\nabla \cdot \mathbf{T}) \times \mathbf{a} + (\mathbf{T}^T \cdot \nabla) \times \mathbf{a},\end{aligned}\quad (6.74)$$

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{T}) &= \nabla_i \left( \frac{1}{\sqrt{g}} \epsilon^{mji} a_m T_{jk} \right) \mathbf{R}^k = \frac{1}{\sqrt{g}} \epsilon^{imj} (\nabla_i a_m) T_{jk} \mathbf{R}^k - \\ &- \frac{1}{\sqrt{g}} \epsilon^{mij} (\nabla_i T_{jk}) \mathbf{R}^k a_m = (\nabla \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{T} - \mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{T}).\end{aligned}\quad (6.75)$$

Здесь использовано формальное определение набла-оператора как вектора, а также формулы (6.51) для ротора тензора.

Вычислим также роторы от скалярного произведения тензора на вектор:

$$\begin{aligned}\nabla \times (\mathbf{T} \cdot \mathbf{a}) &= \frac{1}{\sqrt{g}} \epsilon^{ijk} \nabla_i (T_{jm} a^m) \mathbf{R}_k = \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}} \epsilon^{ijk} (\nabla_i T_{jm}) a^m \mathbf{R}_k + \frac{1}{\sqrt{g}} \epsilon^{ijk} T_{jm} \nabla_i a^m \mathbf{R}_k = \\ &= (\nabla \times \mathbf{T}) \cdot \mathbf{a} - (\mathbf{T} \times \nabla)^T \cdot \mathbf{a},\end{aligned}\quad (6.76)$$

$$\begin{aligned}\nabla \times (\mathbf{a} \cdot \mathbf{T}) &= \frac{1}{\sqrt{g}} \epsilon^{ijk} \nabla_i (a_m T_j^m) \mathbf{R}_k = - \frac{1}{\sqrt{g}} \epsilon^{jik} T_j^m \nabla_i a^m \mathbf{R}_k + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{g}} \epsilon^{ijk} (\nabla_i T_j^m) \mathbf{R}_k a_m = (\nabla \times \mathbf{T}^T) \cdot \mathbf{a} - (\mathbf{T}^T \times \nabla) \cdot \mathbf{a},\end{aligned}\quad (6.77)$$

и роторы от векторного произведения тензора на вектор:

$$\begin{aligned}\nabla \times (\mathbf{T} \times \mathbf{a}) &= \epsilon^{ijk} \epsilon_{lmn} \nabla_i (T_j^m a^n) \mathbf{R}_k \otimes \mathbf{R}^l = \\ &= \sqrt{g} \epsilon_{lmn} \left( \frac{1}{\sqrt{g}} \epsilon^{ijk} \nabla_i T_j^m \right) a^n \mathbf{R}_k \otimes \mathbf{R}^l - \sqrt{g} \epsilon_{lmn} \left( \frac{1}{\sqrt{g}} \epsilon^{jik} T_j^m \nabla_i \right) \times \\ &\times a^n \mathbf{R}_k \otimes \mathbf{R}^l = (\nabla \times \mathbf{T}) \times \mathbf{a} - (\mathbf{T}^T \times \nabla) \times \mathbf{a},\end{aligned}\quad (6.78)$$

$$\begin{aligned}\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{T}) &= \epsilon^{ijk} \epsilon_{mnj} \nabla_i (a^m T_l^n) \mathbf{R}_k \otimes \mathbf{R}^l = \\ &= -(\delta_m^i \delta_n^k - \delta_n^i \delta_m^k) (\nabla_i a^m T_l^n + a^m \nabla_i T_l^n) \mathbf{R}_k \otimes \mathbf{R}^l = \\ &= (-\nabla_m a^m T_l^k + \nabla_i a^k T_l^i - a^i \nabla_i T_l^k + a^k \nabla_i T_l^i) \mathbf{R}_k \otimes \mathbf{R}^l = \\ &= -(\nabla \cdot \mathbf{a}) \mathbf{T} + (\nabla \otimes \mathbf{a}) \cdot \mathbf{T} - \mathbf{a} \cdot \nabla \otimes \mathbf{T} + \mathbf{a} \otimes \nabla \cdot \mathbf{T}.\end{aligned}\quad (6.79)$$

Эти правила широко используют при безиндексной записи уравнений механики.

### 6.3.5. Дифференцирование произведения тензоров

Рассмотрим два тензора  $T$  и  $B$  и покажем, что ковариантные производные от произведений их компонент также вычисляются по правилам формального дифференцирования произведения классических функций:

$$\begin{aligned} \nabla_k (T^i_j B^m_n) &= \frac{\partial}{\partial X^k} (T^i_j B^m_n) + (T^s_j \Gamma_{ks}^i - T^i_s \Gamma_{kj}^s) B^m_n + \\ &+ T^i_j (B^s_n \Gamma_{sk}^m - B^m_s \Gamma_{km}^s) = (\nabla_k T^i_j) B^m_n + T^i_j \nabla_k B^m_n. \end{aligned} \quad (6.80)$$

Свертывая по индексам  $j$  и  $m$ , получаем отсюда, в частности:

$$\nabla_k (T^i_j B^j_n) = (\nabla_k T^i_j) B^j_n + T^i_j \nabla_k B^j_n. \quad (6.81)$$

Вычисляя теперь с помощью (6.81) дивергенцию от скалярного произведения  $T \cdot B$ :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (T \cdot B) &= \nabla_k (T^k_j B^j_n) R^n = (\nabla_k T^k_j) B^j_n R^n + T^k_j \nabla_k B^j_n R^n = \\ &= (\nabla_k T^k_j) R^j \cdot B^s_n R_s \otimes R^n + T^k_j R^j \otimes R_k \cdot \nabla_s B^s_n R^s \otimes R_m \otimes R^n = \\ &= (\nabla \cdot T) \cdot B + T^T \cdot \nabla \otimes B, \end{aligned} \quad (6.82)$$

получаем компоненты вектора.

## § 6.4. Ковариантные производные второго порядка

### 6.4.1. Двукратное дифференцирование скаляров

Рассмотрим теперь операцию двукратного ковариантного дифференцирования, и начнем с двукратного применения набла-оператора к скалярному полю  $\varphi(X^k)$ .

Однократное применение оператора  $\nabla$  к  $\varphi$  приводит к градиенту скаляра (6.14), представляющему собой векторный объект, поэтому при повторном применении  $\nabla$  возникнут три объекта: градиент от градиента, дивергенция от градиента и ротор от градиента. Рассмотрим первый случай:

$$\nabla \otimes \nabla \varphi = R^i \otimes \frac{\partial}{\partial X^i} \left( R^k \frac{\partial \varphi}{\partial X^k} \right). \quad (6.83)$$

Дифференцируя произведение в скобках по частям, получаем с учетом (6.3) выражение для градиента от градиента скаляра:

$$\nabla \otimes \nabla \varphi = \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^i \partial X^k} - \frac{\partial \varphi}{\partial X^m} \Gamma_{ik}^m \right) R^i \otimes R^k, \quad (6.84)$$

представляющего собой симметричный тензор второго ранга. Если в определении (6.83) использовать обозначение (6.15') и (6.21) для ковариантных производных, то получим альтернативное (6.84) представление:

$$\nabla \otimes \nabla \varphi = R^i \otimes \frac{\partial}{\partial X^i} (\nabla_k \varphi R^k) = \nabla_i (\nabla_k \varphi) R^i \otimes R^k. \quad (6.85)$$

Сравнивая (6.85) и (6.84), находим выражение для вторых ковариантных производных скаляра:

$$\nabla_i \nabla_k \varphi = \nabla_k \nabla_i \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^i \partial X^k} - \frac{\partial \varphi}{\partial X^m} \Gamma_{ik}^m. \quad (6.86)$$

В силу того, что первая ковариантная производная скаляра совпадает с частной производной (см. формулу (6.15')), мы получили правило независимости вторых ковариантных производных скаляра от порядка дифференцирования.

*Дивергенцию от градиента скаляра* определим следующим образом:

$$\nabla \cdot \nabla \varphi = R^i \cdot \frac{\partial}{\partial X^i} \left( R^k \frac{\partial \varphi}{\partial X^k} \right). \quad (6.87)$$

Дифференцируя по частям выражение в скобках, получаем:

$$\nabla \cdot \nabla \varphi = \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^i \partial X^k} - \frac{\partial \varphi}{\partial X^m} \Gamma_{ik}^m \right) g^{ik}, \quad (6.88)$$

т.е. эта операция образует скаляр, называемый часто *лапласианом* над  $\varphi$ . Запись лапласиана через ковариантные производные имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi &\equiv \nabla \cdot \nabla \varphi = R^i \cdot \frac{\partial}{\partial X^i} (\nabla_k \varphi R^k) = \\ &= \nabla_i \nabla_k \varphi R^i \cdot R^k = \nabla_i \nabla^i \varphi = \nabla^i \nabla_i \varphi. \end{aligned} \quad (6.89)$$

Ротор от градиента скаляра вычисляют следующим образом:

$$\nabla \times \nabla \varphi = R^i \times \frac{\partial}{\partial X^i} \left( R^k \frac{\partial \varphi}{\partial X^k} \right). \quad (6.90)$$

Переходя к ковариантным производным, получаем:

$$\nabla \times \nabla \varphi = \frac{1}{\sqrt{g}} \epsilon^{ijk} \nabla_i \nabla_j \varphi R_k = 0, \quad (6.91)$$

так как символ Леви-Чивиты сворачивается по двум индексам с симметричным тензором  $\nabla_i \nabla_j \varphi$  (см. (1.37)), т.е. ротор от градиента скаляра всегда равен нулю.

#### 6.4.2. Двукратное дифференцирование векторов

Двукратное применение набла-оператора  $\nabla$  к вектору  $\mathbf{a}$  приводит к образованию различных тензоров:

$$\nabla \wedge \nabla \vee \mathbf{a} = \mathbf{R}^i \wedge \frac{\partial}{\partial X^i} \left( \mathbf{R}^k \vee \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial X^k} \right) \quad \wedge, \vee \in \{\otimes, \times, \cdot\}, \quad (6.92)$$

в зависимости от сочетания знаков операций  $\wedge$  и  $\vee$  тензорного, векторного и скалярного умножения (здесь  $\wedge$  не является знаком внешнего умножения).

Переходя в (6.92) сначала для одного набла-оператора, а затем для другого к ковариантным производным, с учетом (6.16) и (6.47) получим:

$$\nabla \wedge \nabla \vee \mathbf{a} = \mathbf{R}^i \wedge \frac{\partial}{\partial X^i} (\nabla_k a_j \mathbf{R}^k \vee \mathbf{R}^j) = \nabla_i (\nabla_k a_j) \mathbf{R}^i \wedge \mathbf{R}^k \vee \mathbf{R}^j \quad (6.93)$$

– представление в тензорном базисе набла-операции второго порядка над вектором.

**ТЕОРЕМА 6.5.** В пространстве  $\mathbb{R}^3$  ковариантные производные от компонент вектора  $u$ , вообще, тензора любого ранга являются перестановочными при двукратном дифференцировании:

$$\nabla_i \nabla_k \Omega^{i_1 \dots i_n} = \nabla_k \nabla_i \Omega^{i_1 \dots i_n}. \quad (6.94)$$

▼ Образуем разность ковариантных производных:

$$\nabla_i \nabla_k \Omega^{i_1 \dots i_n} - \nabla_k \nabla_i \Omega^{i_1 \dots i_n} \equiv M_{ik}{}^{i_1 \dots i_n}.$$

В декартовой системе координат всегда имеем  $M_{ik}{}^{i_1 \dots i_n} \equiv 0$ , так как в ней  $\Gamma_{ij}^m \equiv 0$ , и ковариантные производные совпадают с частными. Но согласно теореме 6.3, ковариантные производные тензоров являются компонентами тензора, тогда в произвольной системе координат  $X^i$  имеем

$$M_{ik}{}^{i_1 \dots i_n} = Q^{i'}_i Q^{k'}_k P^{i_1}_{i'_1} \dots P^{i_n}_{i'_n} \bar{M}_{i'k'}{}^{i'_1 \dots i'_n} = 0,$$

откуда следует (6.94). ▲

Рассмотрим наиболее часто используемые сочетания операций  $\wedge$  и  $\vee$  в (6.93).

*Дивергенцию от градиента вектора* получим, если в (6.93) знак  $\wedge$  заменим на "·", знак  $\vee$  на  $\otimes$ :

$$\Delta \mathbf{a} \equiv \nabla \cdot \nabla \otimes \mathbf{a} = \nabla_i \nabla_k a_j \mathbf{R}^i \cdot \mathbf{R}^k \otimes \mathbf{R}^j = \nabla_i \nabla^i a_j \mathbf{R}^j. \quad (6.95)$$

В результате получаем вектор, для которого используется также название *лапласиан вектора*.

*Градиент от дивергенции вектора* получаем при обратном сочетании знаков скалярного и тензорного произведений:

$$\nabla \otimes \nabla \cdot \mathbf{a} = \nabla_i \nabla_k a_j \mathbf{R}^i \otimes \mathbf{R}^k \cdot \mathbf{R}^j = \nabla_i \nabla_k a^k \mathbf{R}^i. \quad (6.96)$$

*Ротор от ротора вектора* получаем из (6.93), выбрав в качестве  $\vee$  и  $\wedge$  знак векторного произведения:

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) &= \nabla_i \nabla_k a_j \mathbf{R}^i \times (\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^j) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}} \epsilon^{kjm} \nabla_i \nabla_k a_j \mathbf{R}^i \times \mathbf{R}_m = \epsilon^{kjm} \epsilon_{imn} \nabla^i \nabla_k a_j \mathbf{R}^n. \end{aligned} \quad (6.97)$$

Используя свойство (1.36) символов Леви-Чивиты, а также (6.95) и (6.96), получаем:

$$\begin{aligned} \text{rot rot } \mathbf{a} &= \nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) = (\delta_n^k \delta_i^j - \delta_i^k \delta_n^j) \nabla_k \nabla^i a_j \mathbf{R}^n = \\ &= \nabla_n \nabla^j a_j \mathbf{R}^n - \nabla_i \nabla^i a_j \mathbf{R}^j = \nabla \otimes \nabla \cdot \mathbf{a} - \Delta \mathbf{a}. \end{aligned} \quad (6.98)$$

*Дивергенция от ротора вектора* всегда дает нуль:

$$\begin{aligned} \text{div rot } \mathbf{a} &= \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) = \nabla_i \nabla_k a_j \mathbf{R}^i \cdot (\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^j) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}} \epsilon^{kjm} \nabla_i \nabla_k a_j \mathbf{R}^i \cdot \mathbf{R}_m = \frac{1}{\sqrt{g}} \epsilon^{kjm} \nabla_m \nabla_k a_j = 0, \end{aligned} \quad (6.99)$$

в силу свойства (6.94) перестановочности ковариантных производных и свойства (1.37).

*Ротор от градиента вектора* также есть нулевой тензор:

$$\nabla \times \nabla \otimes \mathbf{a} = \nabla_i \nabla_k a_j \mathbf{R}^i \times \mathbf{R}^k \otimes \mathbf{R}^j = \frac{1}{\sqrt{g}} \epsilon^{ikj} \nabla_i \nabla_k a_j \mathbf{R}_m \otimes \mathbf{R}^j = 0, \quad (6.100)$$

в силу того же свойства (1.37) символов Леви-Чивиты, свернутых по двум индексам с симметричными производными  $\nabla_i \nabla_k$ .

При перестановке операций получаем уже ненулевой тензор – *градиент от ротора вектора*:

$$\nabla \otimes \nabla \times \mathbf{a} = \nabla_i \nabla_k a_j \mathbf{R}^i \otimes \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^j = \frac{1}{\sqrt{g}} \epsilon^{kjm} \nabla_i \nabla_k a_j \mathbf{R}_m. \quad (6.101)$$

### 6.4.3. Двукратное дифференцирование тензоров второго ранга

Двукратное применение набла-оператора к тензору второго ранга  $\mathbf{T}$  приводит к образованию следующих тензорных объектов:

$$\nabla \wedge \nabla \vee \mathbf{T} = \mathbf{R}^i \wedge \frac{\partial}{\partial X^i} \left( \mathbf{R}^k \vee \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial X^k} \right) \quad \wedge, \vee \in \{\otimes, \times, \cdot\}, \quad (6.102)$$

с различными сочетаниями знаков операций  $\wedge$  и  $\vee$ .

Общее базисное представление этих тензоров имеет следующий вид:

$$\nabla \wedge \nabla \vee \mathbf{T} = \nabla_i \nabla_k T_{jm} \mathbf{R}^i \wedge \mathbf{R}^k \vee \mathbf{R}^j \otimes \mathbf{R}^m. \quad (6.103)$$

*Градиент от дивергенции тензора* представляет собой снова тензор второго ранга:

$$\nabla \otimes \nabla \cdot \mathbf{T} = \nabla_i \nabla_k T_m^k \mathbf{R}^i \otimes \mathbf{R}^m.$$

Тензорами второго ранга также являются *дивергенция от градиента тензора*, называемая *лапласианом тензора*:

$$\Delta \mathbf{T} \equiv \nabla \cdot \nabla \otimes \mathbf{T} = \nabla_i \nabla^i T_{jm} \mathbf{R}^j \otimes \mathbf{R}^m, \quad (6.104)$$

и *ротор от ротора тензора*:

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{T}) &= \nabla_i \nabla_k T_{jm} \mathbf{R}^i \times (\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^j) \otimes \mathbf{R}^m = \\ &= \epsilon^{kjn} \epsilon_{ins} \nabla^i \nabla_k T_{jm} \mathbf{R}^s \otimes \mathbf{R}^m. \end{aligned} \quad (6.105)$$

Используя свойство (1.36) символов Леви-Чивиты, получаем, что

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{T}) &= (\delta_s^k \delta_i^j - \delta_i^k \delta_s^j) \nabla^i \nabla_k T_{jm} \mathbf{R}^s \otimes \mathbf{R}^m = \nabla^j \nabla_s T_{jm} \mathbf{R}^s \otimes \mathbf{R}^m - \\ &- \nabla^k \nabla_k T_{sm} \mathbf{R}^s \otimes \mathbf{R}^m = \nabla \otimes \nabla \cdot \mathbf{T} - \Delta \mathbf{T}. \end{aligned} \quad (6.106)$$

Важную роль в механике играет *несовместность* тензора  $\mathbf{T}$ :

$$\text{Ink } \mathbf{T} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{T})^T = \frac{1}{g} \epsilon^{ijk} \epsilon^{mn} \nabla_i \nabla_m T_{jn} \mathbf{R}_k \otimes \mathbf{R}_l, \quad (6.107)$$

являющаяся тензором второго ранга.

*Дивергенция от ротора тензора* аналогично (6.99) образует нулевой вектор:

$$\begin{aligned} \text{div rot } \mathbf{T} &= \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{T}) = \nabla_i \nabla_k T_{jm} \mathbf{R}^i \cdot (\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^j) \otimes \mathbf{R}^m = \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}} \epsilon^{kji} \nabla_n \nabla_k T_{jm} \mathbf{R}^m = 0. \end{aligned} \quad (6.108)$$

Перестановка операций в (6.108) приводит к *ротору от дивергенции тензора*:

$$\nabla \times (\nabla \cdot \mathbf{T}) = \nabla_i \nabla_k T_m^k \mathbf{R}^i \times \mathbf{R}^m = \frac{1}{\sqrt{g}} \epsilon^{imj} \nabla_i \nabla_k T_m^k \mathbf{R}^j. \quad (6.109)$$

В отличие от вектора, для тензора определена операция *дивергенции от дивергенции*, образующая скаляр:

$$\operatorname{div} \operatorname{div} \mathbf{T} = \nabla \cdot (\nabla \cdot \mathbf{T}) = \nabla_i \nabla_k T^{ik}. \quad (6.110)$$

### Упражнения к § 6.4.

**Упражнение 6.4.1.** Используя формулы (6.93) и (6.95), показать, что

$$\nabla \cdot (\nabla \otimes \mathbf{a})^T = \nabla \otimes \nabla \cdot \mathbf{a}.$$

**Упражнение 6.4.2.** Доказать, что для ротора от ротора вектора порядок следования операций существенен и

$$(\nabla \times \nabla) \times \mathbf{a} = 0.$$

**Упражнение 6.4.3.** Доказать, что

$$\mathbf{E} \cdot \cdot \nabla \times \nabla \otimes \mathbf{T} = \nabla \times \nabla I_1(\mathbf{T}) = 0, \quad I_1(\mathbf{T}) = \mathbf{E} \cdot \cdot \mathbf{T}.$$

**Упражнение 6.4.4.** Доказать, что

$$\mathbf{E} \cdot \cdot \nabla \otimes \nabla \otimes \mathbf{T} = \nabla_i \nabla_k I_1(\mathbf{T}) \mathbf{R}^i \otimes \mathbf{R}^k.$$

**Упражнение 6.4.5.** Показать, что тензор  $\operatorname{Ink} \mathbf{T}$ , определяемый по (6.107), является симметричным, если симметричен  $\mathbf{T}$ .

## § 6.5. Дифференцирование в ортогональных криволинейных координатах

### 6.5.1. Символы Кристоффеля второго рода в ортогональных координатах

Криволинейные ортогональные координаты  $X^i$  часто применяют при решении различных задач механики. В этом случае переходят от безиндексной записи уравнений к компонентной. Поэтому полезно записать основные дифференциальные операторы, введенные выше, в ортогональных координатах  $X^i$ . Начнем с символов Кристоффеля.

Если  $X^i$  ортогональны, то  $g_{ij}$  и  $g^{ij}$  – диагональны (см. §1.7), и формулы (6.8) для символов Кристоффеля примут вид:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\alpha = \frac{1}{2} g^{k\alpha} \left( \frac{\partial g_{k\beta}}{\partial X^\alpha} + \frac{\partial g_{k\alpha}}{\partial X^\beta} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial X^k} \right) = \frac{1}{2} g^{\alpha\alpha} \frac{\partial g_{\alpha\alpha}}{\partial X^\beta}, \quad (6.111)$$

$$\alpha \neq \beta, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3,$$

т.к.  $g_{\alpha\beta} = 0$ .

Напомним, что по повторяющимся греческим буквам суммирования нет. Переходя к параметрам Ламе  $g_{\alpha\alpha} = H_\alpha^2$ ,  $g^{\alpha\alpha} = 1/H_\alpha^2$ , получаем:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\alpha = \frac{1}{2H_\alpha^2} \frac{\partial H_\alpha^2}{\partial X^\beta} = \frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial H_\alpha}{\partial X^\beta}. \quad (6.112)$$

При другом сочетании индексов получим:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\beta\beta}^\alpha &= \frac{1}{2} g^{k\alpha} \left( 2 \frac{\partial g_{k\beta}}{\partial X^\beta} - \frac{\partial g_{\beta\beta}}{\partial X^k} \right) = -\frac{1}{2} g^{\alpha\alpha} \frac{\partial g_{\beta\beta}}{\partial X^\alpha} = \\ &= -\frac{1}{2H_\alpha^2} \frac{\partial H_\beta^2}{\partial X^\alpha} = -\frac{H_\beta}{H_\alpha^2} \frac{\partial H_\beta}{\partial X^\alpha}. \end{aligned} \quad (6.113)$$

При полностью совпадающих индексах из (6.8) имеем:

$$\Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha = \frac{1}{2} g^{k\alpha} \left( 2 \frac{\partial g_{k\alpha}}{\partial X^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\alpha}}{\partial X^\alpha} \right) = \frac{1}{2} g^{\alpha\alpha} \frac{\partial g_{\alpha\alpha}}{\partial X^\alpha} = \frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial H_\alpha}{\partial X^\alpha}. \quad (6.114)$$

При всех неравных индексах символы Кристоффеля равны нулю:

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \frac{1}{2} g^{k\alpha} \left( \frac{\partial g_{k\beta}}{\partial X^\gamma} + \frac{\partial g_{k\gamma}}{\partial X^\beta} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial X^k} \right) = 0. \quad (6.115)$$

Итак, получили следующие выражения для символов Кристоффеля второго рода:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\alpha = \frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial H_\alpha}{\partial X^\beta}, \quad \Gamma_{\beta\beta}^\alpha = -\frac{H_\beta}{H_\alpha^2} \frac{\partial H_\beta}{\partial X^\alpha}, \quad \Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha = \frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial H_\alpha}{\partial X^\alpha}. \quad (6.116)$$

### 6.5.2. Производные от векторов ортонормированного базиса

Часто в различных задачах механики необходимо иметь значения производных от векторов ортонормированного базиса:  $\partial \mathbf{e}_\alpha / \partial X^\beta$ . Вычислим их, используя определения (1.233) и (6.1):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial X^\beta} &= \frac{\partial}{\partial X^\beta} \left( \frac{\mathbf{R}_\alpha}{H_\alpha} \right) = \frac{1}{H_\beta} \frac{\partial \mathbf{R}_\alpha}{\partial X^\beta} - \frac{1}{H_\alpha^2} \frac{\partial H_\alpha}{\partial X^\beta} \mathbf{R}_\alpha = \\ &= \frac{1}{H_\alpha} \left( \Gamma_{\alpha\beta}^m - \frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial H_\alpha}{\partial X^\beta} \delta_\alpha^m \right) \mathbf{R}_m. \end{aligned} \quad (6.117)$$

Используем теперь свойства (6.116) символов Кристоффеля:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial X^\beta} &= \left( \Gamma_{\alpha\beta}^\alpha - \frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial H_\alpha}{\partial X^\beta} \right) \frac{1}{H_\alpha} \mathbf{R}_\alpha + \Gamma_{\alpha\beta}^\beta \frac{1}{H_\alpha} \mathbf{R}_\beta = \frac{1}{H_\alpha H_\beta} \frac{\partial H_\beta}{\partial X^\alpha} \mathbf{R}_\beta, \\ &\quad \alpha \neq \beta, \end{aligned} \quad (6.118)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial X^\alpha} &= \left( \Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha - \frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial H_\alpha}{\partial X^\alpha} \right) \frac{1}{H_\alpha} \mathbf{R}_\alpha + \frac{\Gamma_{\alpha\alpha}^\beta}{H_\alpha} \mathbf{R}_\beta + \frac{\Gamma_{\alpha\alpha}^\gamma}{H_\alpha} \mathbf{R}_\gamma = \\ &= -\frac{1}{H_\beta^2} \frac{\partial H_\alpha}{\partial X^\beta} \mathbf{R}_\beta - \frac{1}{H_\gamma^2} \frac{\partial H_\alpha}{\partial X^\gamma} \mathbf{R}_\gamma. \end{aligned}$$

Слагаемые в скобках равны нулю в силу (6.116). Возвращаясь снова к ортонормированному базису, имеем окончательно:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial X^\beta} = \frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial H_\beta}{\partial X^\alpha} \mathbf{e}_\beta, & \alpha \neq \beta, \\ \frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial X^\alpha} = -\frac{1}{H_\beta} \frac{\partial H_\alpha}{\partial X^\beta} \mathbf{e}_\beta - \frac{1}{H_\gamma} \frac{\partial H_\alpha}{\partial X^\gamma} \mathbf{e}_\gamma, & \alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha. \end{cases} \quad (6.119)$$

Обе эти формулы, очевидно, можно объединить в одну:

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial X^\beta} = \sum_{\gamma=1}^3 \left( \frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial H_\beta}{\partial X^\alpha} \delta_{\beta\gamma} - \frac{1}{H_\gamma} \frac{\partial H_\alpha}{\partial X^\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right) \mathbf{e}_\gamma, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3. \quad (6.120)$$

### 6.5.3. Дифференциальные операции с векторами в ортогональных координатах

Вектор  $\mathbf{a}$ , согласно (1.237), всегда можно представить в ортонормированном базисе  $\mathbf{e}_\alpha$ :

$$\mathbf{a} = a^i \mathbf{R}_i = \sum_{\alpha=1}^3 a_{\Phi\alpha} \mathbf{e}_\alpha, \quad a^\alpha = a_{\Phi\alpha} / H_\alpha. \quad (6.121)$$

### A. Градиент вектора

Запишем формулу (6.21) для градиента вектора  $\nabla \otimes \mathbf{a}$  в базисе  $\mathbf{e}_\alpha$ , используя (1.235), (6.121):

$$\begin{aligned}\nabla \otimes \mathbf{a} &= \mathbf{R}^k \otimes \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial X^k} = \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\mathbf{e}_\alpha}{H_\alpha} \otimes \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial X^\alpha} = \\ &= \sum_{\alpha, \beta=1}^3 \frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial a_{\Phi\beta}}{\partial X^\alpha} \mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}_\beta + \sum_{\alpha, \gamma=1}^3 \frac{a_{\Phi\gamma}}{H_\alpha} \mathbf{e}_\alpha \otimes \frac{\partial \mathbf{e}_\gamma}{\partial X^\alpha}. \quad (6.122)\end{aligned}$$

Во вторую сумму подставим формулу (6.120), поменяв в ней предварительно индексы круговой перестановкой:  $\alpha \rightarrow \gamma$ ,  $\beta \rightarrow \alpha$ ,  $\gamma \rightarrow \beta$ , тогда получим:

$$\nabla \otimes \mathbf{a} = \sum_{\alpha, \beta=1}^3 \left( \frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial a_{\Phi\beta}}{\partial X^\alpha} + \sum_{\gamma=1}^3 \frac{a_{\Phi\gamma}}{H_\alpha} \left( \frac{1}{H_\gamma} \frac{\partial H_\alpha}{\partial X^\gamma} \delta_{\alpha\beta} - \frac{1}{H_\beta} \frac{\partial H_\gamma}{\partial X^\beta} \delta_{\alpha\gamma} \right) \right) \mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}_\beta. \quad (6.123)$$

Учитывая свойство символа  $\delta_{\alpha\gamma}$ , получаем окончательно:

$$\nabla \otimes \mathbf{a} = \sum_{\alpha, \beta=1}^3 \left( \frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial a_{\Phi\beta}}{\partial X^\alpha} - \frac{a_{\Phi\alpha}}{H_\alpha H_\beta} \frac{\partial H_\alpha}{\partial X^\beta} + \delta_{\alpha\beta} \sum_{\gamma=1}^3 \frac{a_{\Phi\gamma}}{H_\gamma H_\alpha} \frac{\partial H_\alpha}{\partial X^\gamma} \right) \mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}_\beta. \quad (6.124)$$

Для дальнейшего анализа введем следующие обозначения:

$$a_{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial a_{\Phi\beta}}{\partial X^\alpha} - \frac{a_{\Phi\alpha}}{H_\alpha H_\beta} \frac{\partial H_\alpha}{\partial X^\beta}, \quad \hat{a}_\alpha \equiv \frac{1}{H_\alpha} \sum_{\gamma=1}^3 \frac{a_{\Phi\gamma}}{H_\gamma} \frac{\partial H_\alpha}{\partial X^\gamma}, \quad (6.125)$$

тогда компоненты градиента вектора можно представить в следующем виде:

$$\nabla \otimes \mathbf{a} = \sum_{\alpha, \beta=1}^3 (a_{\alpha\beta} + \delta_{\alpha\beta} \hat{a}_\alpha) \mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}_\beta. \quad (6.126)$$

### B. Ротор вектора

Приведенный выше для градиента вектора вывод полностью сохраняется, если знак  $\otimes$  заменить на знак векторного произведения  $\times$ , поэтому для ротора вектора имеем:

$$\nabla \times \mathbf{a} = \mathbf{R}^k \times \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial X^k} = \sum_{\alpha, \beta=1}^3 (a_{\alpha\beta} + \delta_{\alpha\beta} \hat{a}_\alpha) \mathbf{e}_\alpha \times \mathbf{e}_\beta. \quad (6.127)$$

Поскольку  $\mathbf{e}_\alpha \times \mathbf{e}_\alpha = 0$ , а  $\mathbf{e}_\alpha \times \mathbf{e}_\beta = \mathbf{e}_\gamma$  ( $\alpha, \beta, \gamma$  образуют четную подстановку), то в этой сумме ненулевыми являются слагаемые только при  $\alpha \neq \beta$ . Это означает, что второе слагаемое в скобках вообще пропадает. Тогда

$$\nabla \times \mathbf{a} = \sum_{\gamma=1}^3 (a_{\alpha\beta} - a_{\beta\alpha}) \mathbf{e}_\gamma, \quad \alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha, \quad (6.128)$$

где при каждом  $\gamma$  индексы  $\alpha, \beta, \gamma$  образуют четную подстановку.

Подставляя вместо  $a_{\alpha\beta}$  их выражения (6.125), после приведения подобных получаем окончательно:

$$\nabla \times \mathbf{a} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \sum_{\gamma=1}^3 \left( \frac{\partial H_\beta a_{\Phi\beta}}{\partial X^\alpha} - \frac{\partial H_\alpha a_{\Phi\alpha}}{\partial X^\beta} \right) H_\gamma \mathbf{e}_\gamma. \quad (6.129)$$

### B. Дивергенция вектора

Для дивергенции воспользуемся формулой (6.36), а также (1.231), в результате получим:

$$\nabla \cdot \mathbf{a} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g} a^i}{\partial X^i} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial}{\partial X^\alpha} (a_{\Phi\alpha} H_\beta H_\gamma), \quad (6.130)$$

$$\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha.$$

### Г. Лапласиан скаляра

Если в формуле (6.130) в качестве  $\mathbf{a}$  выбрать градиент скаляра  $\mathbf{a} = \nabla \psi$ , то получим формулу для лапласиана скаляра:

$$\Delta \psi = \nabla \cdot \nabla \psi = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial}{\partial X^\alpha} \left( \frac{H_\beta H_\gamma}{H_\alpha} \frac{\partial \psi}{\partial X^\alpha} \right), \quad (6.131)$$

$$\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha.$$

### Д. Линейный тензор деформаций над $\mathbf{a}$

Используя определение (6.33) линейного тензора деформаций над вектором  $\mathbf{a}$  и складывая формулу (6.126) со своей транспонированной, получаем:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \otimes \mathbf{a} + (\nabla \otimes \mathbf{a})^T) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^3 (a_{\alpha\beta} + a_{\beta\alpha} + 2\delta_{\alpha\beta} \hat{a}_\alpha) \mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}_\beta. \quad (6.132)$$

Если обозначить физические компоненты этого тензора как  $\varepsilon_{\alpha\beta}$ , то с учетом обозначений (6.125) получим:

$$\varepsilon = \sum_{\alpha,\beta=1}^3 \varepsilon_{\alpha\beta}^\Phi e_\alpha \otimes e_\beta, \quad (6.133)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\alpha}^\Phi &= \frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial a_{\Phi\alpha}}{\partial X^\beta} + \frac{1}{H_\alpha H_\beta} \frac{\partial H_\alpha}{\partial X^\beta} a_{\Phi\beta} + \frac{1}{H_\alpha H_\gamma} \frac{\partial H_\alpha}{\partial X^\gamma} a_{\Phi\gamma}, \\ 2\varepsilon_{\alpha\beta}^\Phi &= \frac{H_\alpha}{H_\beta} \frac{\partial}{\partial X^\beta} \left( \frac{a_{\Phi\alpha}}{H_\beta} \right) + \frac{H_\beta}{H_\alpha} \frac{\partial}{\partial X^\beta} \left( \frac{a_{\Phi\beta}}{H_\alpha} \right). \end{aligned} \quad (6.134)$$

### E. Левые тензоры деформаций над $\mathbf{a}$

Получим представление нелинейных дифференциальных операторов, определенных в п. 6.1.10, в частности левых тензоров деформаций над  $\mathbf{a}$ . Для этого вычислим скалярное произведение градиента (6.124) на свой транспонированный:

$$\begin{aligned} (\nabla \otimes \mathbf{a}) \cdot (\nabla \otimes \mathbf{a})^T &= \\ &= \sum_{\alpha,\beta=1}^3 (a_{\alpha\beta} + \delta_{\alpha\beta} \hat{a}_\alpha) e_\alpha \otimes e_\beta \cdot \sum_{\epsilon,\rho=1}^3 (a_{\epsilon\rho} + \delta_{\epsilon\rho} \hat{a}_\epsilon) e_\rho \otimes e_\epsilon = \\ &= \sum_{\alpha,\beta,\epsilon=1}^3 (a_{\alpha\beta} + \delta_{\alpha\beta} \hat{a}_\alpha) (a_{\epsilon\beta} + \delta_{\epsilon\beta} \hat{a}_\epsilon) e_\alpha \otimes e_\epsilon = \\ &= \sum_{\alpha,\epsilon=1}^3 \left( \sum_{\beta=1}^3 a_{\alpha\beta} a_{\epsilon\beta} + \hat{a}_\epsilon a_{\alpha\epsilon} + \hat{a}_\alpha a_{\epsilon\alpha} + \delta_{\alpha\epsilon} \hat{a}_\alpha^2 \right) e_\alpha \otimes e_\epsilon. \end{aligned} \quad (6.135)$$

Складывая этот тензор с линейным тензором деформаций, получаем окончательно:

$$\begin{aligned} \text{lef}_\pm(\mathbf{a}) &= \text{def } \mathbf{a} \pm \frac{1}{2} (\nabla \otimes \mathbf{a}) \cdot (\nabla \otimes \mathbf{a})^T = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^3 \left( a_{\alpha\beta} + a_{\beta\alpha} + 2\delta_{\alpha\beta} \hat{a}_\alpha \pm \left( \sum_{\gamma=1}^3 a_{\alpha\gamma} a_{\beta\gamma} + \hat{a}_\beta a_{\alpha\beta} + \hat{a}_\alpha a_{\beta\alpha} + 2\delta_{\alpha\beta} \hat{a}_\alpha^2 \right) \right) e_\alpha \otimes e_\beta. \end{aligned} \quad (6.136)$$

**Ж. Правые тензоры деформаций над  $\mathbf{a}$** 

Аналогичным образом вычисляем вначале вспомогательный тензор:

$$\begin{aligned}
 & (\nabla \otimes \mathbf{a})^T \cdot (\nabla \otimes \mathbf{a}) = \\
 &= \sum_{\alpha, \beta=1}^3 (a_{\alpha\beta} + \delta_{\alpha\beta}\hat{a}_\alpha) \mathbf{e}_\beta \otimes \mathbf{e}_\alpha \cdot \sum_{\epsilon, \rho=1}^3 (a_{\epsilon\rho} + \delta_{\epsilon\rho}\hat{a}_\epsilon) \mathbf{e}_\epsilon \otimes \mathbf{e}_\rho = \\
 &= \sum_{\beta, \alpha, \rho=1}^3 (a_{\alpha\beta} + \delta_{\alpha\beta}\hat{a}_\alpha)(a_{\alpha\rho} + \delta_{\alpha\rho}\hat{a}_\alpha) \mathbf{e}_\beta \otimes \mathbf{e}_\rho = \\
 &= \sum_{\beta, \rho=1}^3 \left( \sum_{\alpha=1}^3 a_{\alpha\beta}a_{\alpha\rho} + a_{\beta\rho}\hat{a}_\beta + a_{\rho\beta}\hat{a}_\rho + \delta_{\rho\beta}\hat{a}_\beta^2 \right) \mathbf{e}_\beta \otimes \mathbf{e}_\rho, \quad (6.137)
 \end{aligned}$$

а затем находим правые тензоры деформаций:

$$\begin{aligned}
 \text{ref}_{\pm}(\mathbf{a}) = \text{def } \mathbf{a} \pm \frac{1}{2} (\nabla \otimes \mathbf{a})^T \cdot (\nabla \otimes \mathbf{a}) = \\
 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^3 \left( a_{\alpha\beta} + a_{\beta\alpha} + 2\delta_{\alpha\beta}\hat{a}_\alpha \pm \left( \sum_{\gamma=1}^3 a_{\gamma\alpha}a_{\gamma\beta} + \right. \right. \\
 \left. \left. + a_{\alpha\beta}\hat{a}_\alpha + a_{\beta\alpha}\hat{a}_\beta + 2\delta_{\alpha\beta}\hat{a}_\alpha^2 \right) \right) \mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}_\beta. \quad (6.138)
 \end{aligned}$$

**6.5.4. Дифференциальные операции с тензорами в ортогональных координатах**

Согласно (1.237), тензор второго ранга в ортогональном базисе имеет вид:

$$\mathbf{T} = T^{ij} \mathbf{R}_i \otimes \mathbf{R}_j = \sum_{\alpha, \beta=1}^3 T_{\Phi\alpha\beta} \mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}_\beta, \quad T^{\alpha\beta} = \frac{T_{\Phi\alpha\beta}}{H_{\alpha\beta}}.$$

**A. Дивергенция тензора**

Вычислим наиболее часто применяемую в механике операцию – дивергенцию тензора в базисе  $\mathbf{e}_\alpha$ . Воспользуемся формулой (6.49):

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial X^i} (\sqrt{g} T^{ij} \mathbf{R}_j) = \frac{1}{\Delta} \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial}{\partial X^\alpha} \left( \frac{\Delta}{H_\alpha} \sum_{\beta=1}^3 T_{\Phi\alpha\beta} \mathbf{e}_\beta \right), \quad (6.139)$$

$$\Delta = H_1 H_1 H_3.$$

Преобразуем это выражение с учетом формулы (6.120) дифференцирования векторов базиса  $e_\beta$ , в результате получим:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{T} &= \frac{1}{\Delta} \sum_{\alpha, \beta=1}^3 \frac{\partial}{\partial X^\alpha} \left( \frac{\Delta}{H_\alpha} T_{\alpha\beta} \right) e_\beta + \frac{1}{\Delta} \sum_{\alpha, \beta, \gamma=1}^3 \frac{\Delta}{H_\alpha} T_{\alpha\beta} \left( \frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial H_\alpha}{\partial X^\beta} \delta_{\alpha\gamma} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{H_\gamma} \frac{\partial H_\beta}{\partial X^\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right) e_\gamma = \sum_{\gamma=1}^3 b_\gamma e_\gamma, \end{aligned} \quad (6.140)$$

где

$$b_\gamma = \frac{1}{\Delta} \sum_{\alpha=1}^3 \left( \frac{\partial}{\partial X^\alpha} \left( \frac{\Delta}{H_\alpha} T_{\alpha\gamma} \right) + \frac{\Delta}{H_\alpha H_\gamma} \left( T_{\gamma\alpha} \frac{\partial H_\gamma}{\partial X^\alpha} - T_{\alpha\alpha} \frac{\partial H_\alpha}{\partial X^\gamma} \right) \right). \quad (6.140')$$

Если расписать все девять слагаемых в сумме (6.140), то выражение (6.140') можно также представить в виде:

$$\begin{aligned} b_\gamma &= \frac{1}{\Delta} \left( \frac{\partial}{\partial X^\gamma} (H_\alpha H_\beta T_{\gamma\gamma}) + \frac{\partial}{\partial X^\alpha} (H_\beta H_\gamma T_{\alpha\gamma}) + \frac{\partial}{\partial X^\beta} (H_\alpha H_\gamma T_{\beta\gamma}) + \right. \\ &\quad \left. + H_\beta T_{\gamma\alpha} \frac{\partial H_\gamma}{\partial X^\alpha} - H_\beta \frac{\partial H_\alpha}{\partial X^\gamma} T_{\alpha\alpha} + H_\alpha \frac{\partial H_\gamma}{\partial X^\beta} T_{\gamma\beta} - H_\alpha \frac{\partial H_\beta}{\partial X^\gamma} T_{\beta\beta} \right), \quad (6.141) \end{aligned}$$

(два слагаемых в (6.140) в круглых скобках при  $\alpha = \gamma$  взаимно уничтожаются).

### B. Лапласиан вектора

Выберем теперь в качестве тензора  $\mathbf{T}$  градиент вектора  $\mathbf{T} = \nabla \otimes \mathbf{a}$ , дивергенция такого тензора дает лапласиан вектора  $\mathbf{a}$ . Найдем его компоненты в базисе  $e_\alpha$ :

$$\Delta \mathbf{a} = \nabla \cdot \nabla \otimes \mathbf{a} = \sum_{\gamma=1}^3 c_\gamma e_\gamma.$$

Используя формулу (6.140), где в качестве  $T_{\alpha\gamma}$  следует взять  $a_{\alpha\gamma} + \delta_{\alpha\gamma} \hat{a}_\alpha$ , получаем

$$\begin{aligned} c_\gamma &= \frac{1}{\Delta} \sum_{\rho=1}^3 \left( \frac{\partial}{\partial X^\rho} \left( \frac{\Delta}{H_\rho} a_{\rho\gamma} \right) + \frac{\Delta}{H_\rho H_\gamma} \left( a_{\gamma\rho} \frac{\partial H_\gamma}{\partial X^\rho} - a_{\rho\rho} \frac{\partial H_\rho}{\partial X^\gamma} \right) \right) + \\ &\quad + \frac{1}{\Delta} \frac{\partial}{\partial X^\gamma} (H_\alpha H_\beta \hat{a}_\gamma), \quad \alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha. \end{aligned} \quad (6.142)$$

### Упражнения к § 6.5.

**Упражнение 6.5.1.** Используя формулу (6.120) и результаты упр. 1.6.1, показать, что для цилиндрической системы координат отличны от нуля только следующие производные от векторов ортонормированного (физического) базиса:

$$\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \phi} = \mathbf{e}_\theta, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\phi}{\partial \phi} = -\mathbf{e}_r,$$

для сферической системы – следующие:

$$\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \vartheta} = \mathbf{e}_\theta, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \phi} = \mathbf{e}_\phi \sin \vartheta, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \vartheta} = -\mathbf{e}_r,$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \phi} = \mathbf{e}_\phi \cos \vartheta, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\phi}{\partial \phi} = -\mathbf{e}_r - \mathbf{e}_\theta \cos \vartheta.$$

**Упражнение 6.5.2.** Показать, что формула (6.129) для ротора вектора может быть записана в виде символьического определителя:

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \begin{vmatrix} H_1 \mathbf{e}_1 & H_2 \mathbf{e}_2 & H_3 \mathbf{e}_3 \\ \partial / \partial X^1 & \partial / \partial X^2 & \partial / \partial X^3 \\ H_1 a_{\phi 1} & H_2 a_{\phi 2} & H_3 a_{\phi 3} \end{vmatrix}.$$

**Упражнение 6.5.3.** Показать, что формула (6.129) для ротора в цилиндрических координатах имеет вид:

$$\nabla \times \mathbf{a} = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial a_z}{\partial \phi} - \frac{\partial r a_\phi}{\partial z} \right) \mathbf{e}_r + \left( \frac{\partial a_z}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r} \right) \mathbf{e}_\phi + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial r a_\phi}{\partial r} - \frac{\partial a_r}{\partial \phi} \right) \mathbf{e}_z,$$

а в сферических – следующий вид:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{a} = & \frac{1}{r \sin \vartheta} \left( \frac{\partial (\sin \vartheta a_\phi)}{\partial \vartheta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial \phi} \right) \mathbf{e}_r + \\ & + \frac{1}{r} \left( \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial a_r}{\partial \phi} - \frac{\partial (r a_r)}{\partial r} \right) \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial (r a_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial a_r}{\partial \vartheta} \right) \mathbf{e}_\phi. \end{aligned}$$

**Упражнение 6.5.4.** Показать, что формула (6.130) для дивергенции в цилиндрической системе координат имеет вид:

$$\nabla \cdot \mathbf{a} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r a_r) + \frac{1}{r \cdot \partial \phi} + \frac{\partial a_z}{\partial z},$$

а в сферической системе координат – следующий вид:

$$\nabla \cdot \mathbf{a} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 a_r) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \left( \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta a_\theta) + \frac{\partial a_\phi}{\partial \phi} \right).$$

**Упражнение 6.5.5.** Показать, что формула (6.131) для лапласиана скаляра  $\psi$  в цилиндрической системе координат имеет вид:

$$\Delta\psi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial\psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2},$$

а в сферической системе координат – следующий вид:

$$\Delta\psi = \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial\psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial\vartheta} \left( \sin\vartheta \frac{\partial\psi}{\partial\vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2\vartheta} \frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2} \right).$$

**Упражнение 6.5.6.** Показать, что формулы (6.134) для компонент линейного тензора деформаций  $\varepsilon_{\alpha\beta}$  в цилиндрической системе координат имеют вид:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial a_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\phi\phi} = \frac{1}{r} \frac{\partial a_\phi}{\partial\phi} + \frac{a_r}{r}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial a_z}{\partial z}, \quad 2\varepsilon_{rz} = \frac{\partial a_z}{\partial r} + \frac{\partial a_r}{\partial z},$$

$$2\varepsilon_{r\phi} = \frac{1}{r} \frac{\partial a_r}{\partial\phi} + r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{a_\phi}{r} \right), \quad 2\varepsilon_{\phi z} = \frac{\partial a_\phi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial a_z}{\partial\phi},$$

а в сферической системе координат – следующий вид:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial a_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\vartheta\vartheta} = \frac{1}{r} \frac{\partial a_\vartheta}{\partial\vartheta} + \frac{a_r}{r},$$

$$\varepsilon_{\phi\phi} = \frac{1}{r \sin\vartheta} \frac{\partial a_\phi}{\partial\phi} + \frac{a_r}{r} + \frac{a_\vartheta \operatorname{ctg}\vartheta}{r}, \quad 2\varepsilon_{r\vartheta} = \frac{1}{r} \frac{\partial a_r}{\partial\vartheta} + \frac{\partial a_\vartheta}{\partial r} - \frac{a_\vartheta}{r},$$

$$2\varepsilon_{\phi r} = \frac{\partial a_\phi}{\partial r} + \frac{1}{r \sin\vartheta} \frac{\partial a_r}{\partial\phi} - \frac{a_\phi}{r},$$

$$2\varepsilon_{\phi\vartheta} = \frac{1}{r \sin\vartheta} \frac{\partial a_\vartheta}{\partial\phi} + \frac{1}{r} \frac{\partial a_\phi}{\partial\vartheta} - \frac{1}{r} a_\phi \operatorname{ctg}\vartheta.$$

**Упражнение 6.5.7.** Показать, что в цилиндрической системе координат формулы (6.140') для компонент  $b_\gamma$  дивергенции тензора второго ранга  $\mathbf{T}$  имеют вид:

$$b_r = \frac{1}{r} \frac{\partial r T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\phi r}}{\partial\phi} + \frac{\partial T_{zr}}{\partial z} - \frac{T_{\phi\phi}}{r},$$

$$b_\phi = \frac{1}{r} \frac{\partial r T_{r\phi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\phi\phi}}{\partial\phi} + \frac{\partial T_{z\phi}}{\partial z} + \frac{T_{\phi r}}{r},$$

$$b_z = \frac{1}{r} \frac{\partial r T_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\phi z}}{\partial\phi} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z},$$

а в сферической системе координат – следующий вид:

$$\begin{aligned} b_r &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 T_{rr}) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \left( \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta T_{\vartheta r}) + \frac{\partial T_{\phi r}}{\partial \phi} \right) - \frac{T_{\phi \phi} + T_{\vartheta \vartheta}}{r}, \\ b_\vartheta &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 T_{r\vartheta}) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \left( \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta T_{\vartheta \vartheta}) + \frac{\partial T_{\phi \vartheta}}{\partial \phi} \right) + \frac{T_{\vartheta r} - T_{\phi \phi} \operatorname{ctg} \vartheta}{r}, \\ b_\phi &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 T_{r\phi}) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \left( \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta T_{\vartheta \phi}) + \frac{\partial T_{\phi \phi}}{\partial \phi} \right) + \frac{T_{\phi r} + T_{\phi \vartheta} \operatorname{ctg} \vartheta}{r}. \end{aligned}$$

**Упражнение 6.5.8.** Показать, что в цилиндрической системе координат матрица  $a_{\alpha\beta}$  (6.125) и  $\hat{a}_\alpha$  имеют вид:

$$(a_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial a_r}{\partial r} & \frac{\partial a_\phi}{\partial r} & \frac{\partial a_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial a_r}{\partial \phi} - \frac{a_\phi}{r} & \frac{1}{r} \frac{\partial a_\phi}{\partial \phi} & \frac{1}{r} \frac{\partial a_z}{\partial \phi} \\ \frac{\partial a_r}{\partial z} & \frac{\partial a_\phi}{\partial z} & \frac{\partial a_z}{\partial z} \end{pmatrix},$$

$$\hat{a}_1 = 0, \quad \hat{a}_2 = a_r/r, \quad \hat{a}_3 = 0,$$

а в сферической системе координат – следующий вид:

$$(a_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial a_r}{\partial r} & \frac{\partial a_\vartheta}{\partial r} & \frac{\partial a_\phi}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial a_r}{\partial \vartheta} - \frac{a_\vartheta}{r} & \frac{1}{r} \frac{\partial a_\vartheta}{\partial \vartheta} & \frac{1}{r} \frac{\partial a_\phi}{\partial \vartheta} \\ \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial a_r}{\partial \phi} - \frac{a_\phi}{r} & \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial a_\vartheta}{\partial \phi} - \frac{a_\phi}{r} \operatorname{ctg} \vartheta & \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial a_\phi}{\partial \phi} \end{pmatrix},$$

$$\hat{a}_1 = 0, \quad \hat{a}_2 = a_r/r, \quad \hat{a}_3 = (a_r/r) + (a_\vartheta/r) \operatorname{ctg} \vartheta.$$

**Упражнение 6.5.9.** Используя результаты упр. 6.5.8 и формулу (6.136), показать, что компоненты левого тензора деформаций  $L^\pm = \text{lef}_\pm(\mathbf{a})$  в цилиндрической системе координат имеют вид:

$$L_{rr}^\pm = \frac{\partial a_r}{\partial r} \pm \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial a_r}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial a_\phi}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial a_z}{\partial r} \right)^2 \right),$$

$$\begin{aligned} L_{\phi\phi}^\pm &= \frac{1}{r} \frac{\partial a_\phi}{\partial \phi} + \frac{a_r}{r} \pm \frac{1}{2r^2} \left( \left( \frac{\partial a_r}{\partial \phi} - a_\phi \right)^2 + \left( \frac{\partial a_\phi}{\partial \phi} \right)^2 + \left( \frac{\partial a_z}{\partial \phi} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + 2a_r \frac{\partial a_\phi}{\partial \phi} + a_r^2 \right), \end{aligned}$$

$$L_{zz}^{\pm} = \frac{\partial a_z}{\partial z} \pm \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial a_r}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial a_\phi}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial a_z}{\partial z} \right)^2 \right),$$

$$\begin{aligned} L_{r\phi}^{\pm} = & \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial a_r}{\partial \phi} + r \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \frac{a_\phi}{r} \right) \right) \pm \frac{1}{2r} \left( \frac{\partial a_r}{\partial r} \left( \frac{\partial a_r}{\partial \phi} - a_\phi \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial a_\phi}{\partial r} \left( \frac{\partial a_\phi}{\partial \phi} + a_r \right) + \frac{\partial a_z}{\partial r} \frac{\partial a_z}{\partial \phi} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_{\phi z}^{\pm} = & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial a_\phi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial a_z}{\partial \phi} \right) \pm \frac{1}{2r} \left( \left( \frac{\partial a_r}{\partial \phi} - a_\phi \right) \frac{\partial a_r}{\partial z} + \right. \\ & \left. + \left( \frac{\partial a_\phi}{\partial \phi} + a_r \right) \frac{\partial a_\phi}{\partial z} + \frac{\partial a_z}{\partial \phi} \frac{\partial a_z}{\partial z} \right), \end{aligned}$$

$$L_{rz}^{\pm} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial a_z}{\partial r} + \frac{\partial a_r}{\partial z} \right) \pm \frac{1}{2} \left( \frac{\partial a_r}{\partial r} \frac{\partial a_r}{\partial z} + \frac{\partial a_\phi}{\partial r} \frac{\partial a_\phi}{\partial z} + \frac{\partial a_z}{\partial r} \frac{\partial a_z}{\partial z} \right),$$

а в сферической – следующий вид:

$$L_{rr}^{\pm} = \frac{\partial a_r}{\partial r} \pm \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial a_r}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial a_\theta}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial a_\phi}{\partial r} \right)^2 \right),$$

$$\begin{aligned} L_{\vartheta\vartheta}^{\pm} = & \frac{1}{r} \left( \frac{\partial a_\vartheta}{\partial \vartheta} + a_r \right) \pm \frac{1}{2r^2} \left( \left( \frac{\partial a_r}{\partial \vartheta} - a_\vartheta \right)^2 + \left( \frac{\partial a_\vartheta}{\partial \vartheta} \right)^2 + \right. \\ & \left. + \left( \frac{\partial a_\phi}{\partial \vartheta} \right)^2 + 2a_r \frac{\partial a_\vartheta}{\partial \vartheta} + a_r^2 \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_{\phi\phi}^{\pm} = & \frac{1}{r} \left( \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial a_\phi}{\partial \phi} + a_r + a_\vartheta \operatorname{ctg} \vartheta \right) \pm \\ & \pm \frac{1}{2r^2} \left( \left( \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial a_r}{\partial \phi} - a_\phi \right)^2 + \left( \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial a_\vartheta}{\partial \phi} - a_\phi \operatorname{ctg} \vartheta \right)^2 + \right. \\ & \left. + \left( \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial a_\phi}{\partial \phi} \right)^2 + \frac{2}{\sin \vartheta} \frac{\partial a_\phi}{\partial \phi} (a_r + a_\vartheta \operatorname{ctg} \vartheta) + (a_r + a_\vartheta \operatorname{ctg} \vartheta)^2 \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_{r\vartheta}^{\pm} = & \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial a_r}{\partial \vartheta} + r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{a_\vartheta}{r} \right) \right) \pm \frac{1}{2r} \left( \frac{\partial a_r}{\partial r} \left( \frac{\partial a_r}{\partial \vartheta} - a_\vartheta \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial a_\vartheta}{\partial r} \frac{\partial a_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{\partial a_\phi}{\partial r} \frac{\partial a_\phi}{\partial \vartheta} + \frac{\partial a_\vartheta}{\partial r} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_{\theta\phi}^{\pm} &= \frac{1}{2r} \left( \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial a_{\theta}}{\partial \phi} + \frac{\partial a_{\phi}}{\partial \vartheta} - a_{\phi} \operatorname{ctg} \vartheta \right) \pm \\
&\pm \frac{1}{2r^2} \left( \left( \frac{\partial a_r}{\partial \vartheta} - a_{\theta} \right) \left( \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial a_r}{\partial \phi} \right) + \left( a_r + \frac{\partial a_{\theta}}{\partial \vartheta} \right) \left( \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial a_{\theta}}{\partial \phi} - a_{\phi} \operatorname{ctg} \vartheta \right) + \right. \\
&+ \left. \frac{\partial a_{\phi}}{\partial \vartheta} \left( \frac{\partial a_{\phi}}{\partial \phi} \frac{1}{\sin \vartheta} + a_r + a_{\theta} \operatorname{ctg} \vartheta \right) \right), \\
L_{r\phi}^{\pm} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial a_r}{\partial \phi} + r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{a_{\phi}}{r} \right) \right) \pm \\
&\pm \frac{1}{2r} \left( \frac{\partial a_r}{\partial r} \left( \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial a_r}{\partial \phi} - \frac{a_{\phi}}{r} \right) + \frac{\partial a_{\theta}}{\partial r} \left( \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial a_{\theta}}{\partial \phi} - a_{\phi} \operatorname{ctg} \vartheta \right) + \right. \\
&+ \left. \frac{\partial a_{\phi}}{\partial r} \left( \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial a_{\phi}}{\partial \phi} + a_r + a_{\theta} \operatorname{ctg} \vartheta \right) \right).
\end{aligned}$$

**Упражнение 6.5.10.** Используя результаты упр. 6.5.9 и формулу (6.138), показать, что компоненты правого тензора деформаций  $R^{\pm} = \operatorname{ref}_{\pm}(\mathbf{a})$  в цилиндрической системе координат имеют вид:

$$R_{rr}^{\pm} = \frac{\partial a_r}{\partial r} \pm \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial a_r}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial a_r}{\partial \phi} - \frac{a_{\phi}}{r} \right)^2 + \left( \frac{\partial a_r}{\partial z} \right)^2 \right),$$

$$\begin{aligned}
R_{\phi\phi}^{\pm} &= \frac{1}{r} \frac{\partial a_{\phi}}{\partial \phi} + \frac{a_r}{r} \pm \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial a_{\phi}}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial a_{\phi}}{\partial \phi} \right)^2 + \left( \frac{\partial a_{\phi}}{\partial z} \right)^2 + \right. \\
&\left. + \frac{2a_r}{r^2} \frac{\partial a_{\phi}}{\partial \phi} + \left( \frac{a_r}{r} \right)^2 \right),
\end{aligned}$$

$$R_{zz}^{\pm} = \frac{\partial a_z}{\partial z} \pm \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial a_z}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial a_z}{\partial \phi} \right)^2 + \left( \frac{\partial a_z}{\partial z} \right)^2 \right),$$

$$\begin{aligned}
R_{r\phi}^{\pm} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial a_r}{\partial \phi} + r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{a_{\phi}}{r} \right) \right) \pm \frac{1}{2} \left( \frac{\partial a_r}{\partial r} \left( \frac{\partial a_{\phi}}{\partial r} + \right. \right. \\
&+ \left. \left. \frac{\partial a_r}{\partial z} \frac{\partial a_{\phi}}{\partial z} + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial a_r}{\partial \phi} - a_{\phi} \right) \left( \frac{\partial a_{\phi}}{\partial \phi} + a_r \right) \right) \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{\phi z}^{\pm} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial a_z}{\partial \phi} + \frac{\partial a_{\phi}}{\partial z} \right) \pm \frac{1}{2} \left( \frac{\partial a_{\phi}}{\partial r} \frac{\partial a_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial a_{\phi}}{\partial \phi} \frac{\partial a_z}{\partial \phi} + \right. \\
&+ \left. \frac{\partial a_{\phi}}{\partial z} \frac{\partial a_z}{\partial z} + \frac{a_r}{r^2} \frac{\partial a_z}{\partial \phi} \right),
\end{aligned}$$

$$R_{rz}^{\pm} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial a_r}{\partial z} + \frac{\partial a_z}{\partial r} \right) \pm \\ \pm \frac{1}{2} \left( \frac{\partial a_r}{\partial r} \frac{\partial a_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial a_r}{\partial \phi} - a_\phi \right) \frac{\partial a_z}{\partial \phi} + \frac{\partial a_r}{\partial z} \frac{\partial a_z}{\partial z} \right),$$

а в сферической – следующий вид:

$$R_{rr}^{\pm} = \frac{\partial a_r}{\partial r} \pm \frac{1}{2r^2} \left( r^2 \left( \frac{\partial a_r}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial a_r}{\partial \vartheta} - a_\theta \right)^2 + \right. \\ \left. + \left( \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial a_r}{\partial \phi} - a_\phi \right)^2 \right),$$

$$R_{\theta\theta}^{\pm} = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial a_\theta}{\partial \vartheta} + a_r \right) \pm \frac{1}{2r^2} \left( r^2 \left( \frac{\partial a_\theta}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial a_\theta}{\partial \vartheta} \right)^2 + \right. \\ \left. + \left( \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial a_\theta}{\partial \phi} - a_\phi \operatorname{ctg} \vartheta \right)^2 + 2a_r \frac{\partial a_\theta}{\partial \vartheta} + a_r^2 \right),$$

$$R_{\phi\phi}^{\pm} = \frac{1}{r} \left( \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial a_\phi}{\partial \phi} + a_r + a_\theta \operatorname{ctg} \vartheta \right) \pm \frac{1}{2r^2} \left( r^2 \left( \frac{\partial a_\phi}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial a_\phi}{\partial \vartheta} \right)^2 + \right. \\ \left. + \left( \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial a_\phi}{\partial \phi} \right)^2 + \frac{2}{\sin \vartheta} \frac{\partial a_\phi}{\partial \phi} (a_r + a_\theta \operatorname{ctg} \vartheta) + (a_r + a_\theta \operatorname{ctg} \vartheta)^2 \right),$$

$$R_{r\theta}^{\pm} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial a_r}{\partial \vartheta} + r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{a_\theta}{r} \right) \right) \pm \\ \pm \frac{1}{2r^2} \left( r^2 \frac{\partial a_r}{\partial r} \frac{\partial a_\theta}{\partial r} + \frac{\partial a_\theta}{\partial \vartheta} \left( \frac{\partial a_r}{\partial \vartheta} - a_\theta \right) + \right. \\ \left. + \left( \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial a_r}{\partial \phi} - a_\phi \right) \left( \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial a_\theta}{\partial \phi} - a_\phi \operatorname{ctg} \vartheta \right) + a_r \left( \frac{\partial a_r}{\partial \vartheta} - a_\theta \right) \right),$$

$$R_{\theta\phi}^{\pm} = \frac{1}{2r} \left( \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial a_\theta}{\partial \phi} + \frac{\partial a_\phi}{\partial \vartheta} - a_\phi \operatorname{ctg} \vartheta \right) \pm \\ \pm \frac{1}{2r^2} \left( r^2 \frac{\partial a_\theta}{\partial r} \frac{\partial a_\phi}{\partial r} + \frac{\partial a_\theta}{\partial \vartheta} \left( \frac{\partial a_\phi}{\partial \vartheta} + a_r \right) + \right. \\ \left. + \left( \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial a_\theta}{\partial \phi} - a_\phi \operatorname{ctg} \vartheta \right) \left( \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial a_\phi}{\partial \phi} + a_r + a_\theta \operatorname{ctg} \vartheta \right) \right),$$

$$\begin{aligned} R_{rz}^{\pm} = & \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial a_r}{\partial \phi} + r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{a_\phi}{r} \right) \right) \pm \\ & \pm \frac{1}{2r^2} \left( r^2 \frac{\partial a_r}{\partial r} \frac{\partial a_\phi}{\partial r} + \left( \frac{\partial a_r}{\partial \phi} - a_\vartheta \right) \frac{\partial a_\phi}{\partial \vartheta} + \right. \\ & \left. + \left( \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial a_z}{\partial \phi} - a_\phi \right) \left( \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial a_\phi}{\partial \phi} + a_r + a_\vartheta \operatorname{ctg} \vartheta \right) \right). \end{aligned}$$

# ГЛАВА 7

## ГЕОМЕТРИЯ КРИВЫХ И ПОВЕРХНОСТЕЙ

---

### § 7.1. Кривые в трехмерном евклидовом пространстве

#### 7.1.1. Способы задания кривых

Данная глава посвящена тензорному описанию кривых и поверхностей в пространстве  $\mathbb{R}^3$ .

Напомним, что положение одной точки  $M$  в трехмерном евклидовом пространстве в гл.1 определялось с помощью радиуса-вектора  $x = x^i \bar{e}_i$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.1.** *Кривой  $\mathcal{L}$  в  $\mathbb{R}^3$  называют непрерывное отображение отрезка  $[\xi_1 \xi_2]$  из  $\mathbb{R}^1$  в пространство  $\mathbb{R}^3$ , т.е.  $\mathcal{L} : [\xi_1 \xi_2] \in \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ .*

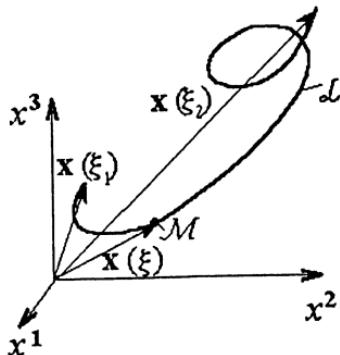


Рис. 7.1. К определению кривой в пространстве  $\mathbb{R}^3$

Иначе говоря, множество точек, образующих кривую  $\mathcal{L}$  в трехмерном евклидовом пространстве, определяется с помощью вектор-функции (рис.7.1):

$$x = x(\xi), \quad \xi_1 \leq \xi \leq \xi_2; \quad (7.1)$$

или трех обычных функций:

$$x^i = x^i(\xi)$$

от одного аргумента, где  $\xi$  - некоторый параметр (не обязательно время). Такой способ определения кривой в пространстве называется *параметрическим*.

Понятие непрерывности отображения  $\mathcal{L}$  уместно, поскольку в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^3$  определена метрика (т.е. расстояние между точками). Тогда  $x^i(\xi)$  являются непрерывными числовыми функциями.

Кривую  $\mathcal{L}$  можно также задать с помощью двух функций от трех

аргументов - координат  $x^i$ :

$$\begin{cases} \Phi_1(x^i) = 0, \\ \Phi_2(x^i) = 0. \end{cases} \quad (7.2)$$

Такой способ называется *неявным*.

Если кривые являются гладкими (непрерывными и без изломов), то вектор-функции (7.1) или функции (7.2) являются непрерывно дифференцируемыми, по крайней мере один раз.

В дальнейшем будем предполагать существование и непрерывность тех производных, о которых говорится в тексте.

За положительное направление кривой  $\mathcal{L}$ , по определению, выбираем направление, соответствующее возрастанию параметра  $\xi$ .

### 7.1.2. Длина дуги кривой

Две соседние точки  $M$  и  $M'$  с радиусами-векторами  $x(\xi)$  и  $x(\xi + \Delta\xi)$ , находящиеся на кривой  $\mathcal{L}$ , соединены малым вектором  $\Delta x$  (рис. 7.2):

$$\Delta x = x(\xi + \Delta\xi) - x(\xi). \quad (7.3)$$

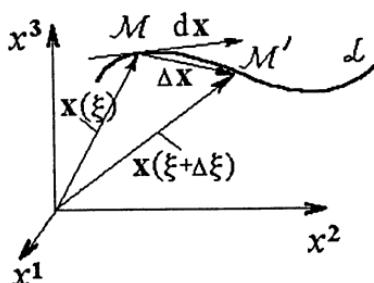


Рис. 7.2. К определению длины дуги кривой

Устремляя  $\Delta\xi \rightarrow 0$ , получим элементарный радиус-вектор  $dx$ , который связывает бесконечно близкие точки  $M$  и  $M'$  на кривой  $\mathcal{L}$ . Из определения  $dx$  следует, что он направлен по касательной к кривой  $\mathcal{L}$ . Также по касательной к  $\mathcal{L}$  направлен и вектор скорости движения по кривой  $ds/d\xi$ .

Длина элементарного вектора  $|dx|$  численно равна расстоянию  $ds$  между бесконечно близкими точками  $M$  и  $M'$  на кривой  $\mathcal{L}$ :

$$ds = |dx| = (dx \cdot dx)^{1/2}, \quad (7.4)$$

величина  $ds$  называется *элементарной длиной дуги* кривой  $\mathcal{L}$ .

Очевидно, что  $ds$  является функцией параметра  $\xi$ , тогда можно определить функцию  $s(\xi)$  как

$$s(\xi) = \int_{\xi_0}^{\xi} ds, \quad (7.5)$$

называемую *длиной дуги* кривой  $\mathcal{L}$ , которая соединяет точки  $M_0$  и  $M$  (расположенные на кривой  $\mathcal{L}$  уже произвольным образом) с радиусами-векторами  $\mathbf{x}(\xi_0)$  и  $\mathbf{x}(\xi)$ .

Подставляя (7.4) в (7.5), получаем явное представление для длины дуги:

$$s = \int_{\xi_0}^{\xi} \sqrt{d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}} = \int_{\xi_0}^{\xi} \left( \sum_{i=1}^3 \left( \frac{dx^i}{d\xi} \right)^2 \right)^{1/2} d\xi. \quad (7.6)$$

### 7.1.3. Векторные характеристики кривой

Элементарную длину дуги  $ds$  (7.4) можно записать в ином виде:

$$ds = \left| \frac{d\mathbf{x}}{d\xi} \right| d\xi. \quad (7.7)$$

С помощью этого соотношения между дифференциалами  $ds$  и  $d\xi$ , можно перейти от параметра  $\xi$ , характеризующего движение по кривой  $\mathcal{L}$ , к параметру  $s$  - длине дуги.

Тогда все характеристики кривой можно рассматривать как функции длины дуги  $s$ . Например, само задание кривой в виде (7.1) можно представить следующим образом:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(s), \quad s_1 \leq s \leq s_2, \quad (7.8)$$

или

$$x^i = x^i(s),$$

где справа стоят, конечно, уже другие функции по сравнению с (7.1). Также от вектора скорости движения по кривой  $(dx/d\xi)$  можно перейти к вектору  $(dx/ds)$ :

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\xi} = \frac{d\mathbf{x}}{ds} \frac{ds}{d\xi}. \quad (7.9)$$

Вектор

$$\mathbf{t} = d\mathbf{x}/ds \quad (7.10)$$

называется *единичным вектором касательной* к кривой  $\mathcal{L}$ . Также как и  $(dx/d\xi)$ , он направлен по касательной к  $\mathcal{L}$ , и в силу соотношения

$$|\mathbf{t}| = \frac{|d\mathbf{x}|}{ds} = \frac{ds}{ds} = 1, \quad (7.11)$$

действительно имеет единичную длину.

Дифференцируя вектор  $\mathbf{t}$  по  $s$ , получаем

$$\kappa = \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2} \quad (7.12)$$

– вектор кривизны кривой  $\mathcal{L}$ .

Этот вектор ортогонален вектору  $t$ . В самом деле, дифференцируя по  $s$  соотношение  $t \cdot t = 1$ , имеем

$$\frac{dt}{ds} \cdot t + t \cdot \frac{dt}{ds} = 0, \quad (7.13)$$

откуда, в силу независимости скалярного произведения от порядка множителей, получаем:

$$\kappa \cdot t = 0. \quad (7.14)$$

Поскольку  $t$  направлен по касательной к кривой  $\mathcal{L}$  в некоторой точке  $M$ , то вектор  $\kappa$ , в силу (7.13), направлен по нормали к  $\mathcal{L}$  в той же точке.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.2.** Кривизной кривой  $\mathcal{L}$  в точке  $M$  называют длину вектора  $\kappa$  в этой точке и обозначают как  $k$ .

Выражение для  $k$  через декартовы координаты, согласно (7.12) и (7.8), имеет вид:

$$k = |\kappa| = \left| \frac{d^2 \mathbf{x}}{ds^2} \right| = \left( \sum_{i=1}^3 \left( \frac{d^2 x^i}{ds^2} \right)^2 \right)^{1/2}. \quad (7.15)$$

Величина

$$R = 1/k \quad (7.16)$$

называется радиусом кривизны кривой  $\mathcal{L}$  в точке  $M$ . Из определений (7.15) и (7.16) ясно, что  $k$  и  $R$  – всегда неотрицательны.

Единичный вектор

$$\nu = R\kappa \quad (7.17)$$

называется вектором главной нормали к кривой.

С помощью  $\nu$  и  $t$  можно построить вектор

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \nu, \quad (7.18)$$

называемый единичным вектором бинормали. В силу свойства (1.49) векторного произведения, он ортогонален  $t$  и  $\nu$ , и в силу (1.50) действительно имеет единичную длину.

В силу свойств (см. упр. 1.2.7) векторного произведения, из (7.18) следуют также формулы:

$$\nu = -\mathbf{t} \times \mathbf{b}, \quad \mathbf{t} = \nu \times \mathbf{b}. \quad (7.18')$$

### 7.1.4. Сопровождающий трехгранник

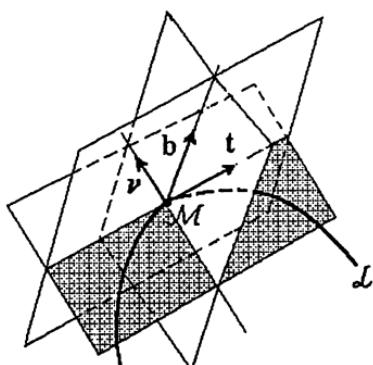


Рис. 7.3. Сопровождающий трехгранник пространственной кривой  $\mathcal{L}$

Таким образом, в каждой точке  $\mathcal{M}$  кривой  $\mathcal{L}$  имеется три взаимно ортогональных единичных векторов  $t$ ,  $\nu$  и  $b$ , которые образуют тройку векторов, называемых *сопровождающим трехгранником пространственной кривой  $\mathcal{L}$*  (рис. 7.3).

При движении вдоль кривой  $\mathcal{L}$  сопровождающий трехгранник движется как твердое тело.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.3.** Плоскость, проходящую через точку  $M$  кривой  $\mathcal{L}$  и содержащую векторы  $t$  и  $\nu$ , называют *соприкасающейся*; плоскость, содержащую векторы  $t$  и  $b$ , называют *спрямляющей*, а плоскость, содержащую векторы  $\nu$  и  $b$ , — *нормальной*.

### 7.1.5. Кручение кривой

Если вся кривая  $\mathcal{L}$  лежит в одной плоскости (*плоская кривая*), то эта плоскость совпадает с соприкасающейся плоскостью.

Для плоской кривой единичный вектор бинормали  $b$  постоянен, т.е. не меняет не только единичную длину, но и направление, поэтому  $db/ds = 0$ .

Для неплоской кривой эта производная отлична от нуля:  $db/ds \neq 0$ , и характеризует отклонение кривой от плоской формы. Поэтому вектор

$$\tau = db/ds \quad (7.19)$$

называют *вектором кручения*.

Дифференцируя (7.18), с учетом (7.12), (7.19) получаем:

$$\tau = \kappa \times \nu + t \times \frac{d\nu}{ds}. \quad (7.20)$$

Так как векторы  $\kappa$  и  $\nu$  по (7.17) - коллинеарны, то  $\kappa \times \nu = 0$ , поэтому

$$\tau = t \times \frac{d\nu}{ds}. \quad (7.21)$$

По свойству векторного произведения из (7.21) следует, что  $\tau$  ортогонален вектору  $t$ . С другой стороны, поскольку  $b$  - единичный вектор,

то дифференцируя соотношение  $\mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = 1$ , получим аналогично (7.13) и (7.14), что  $\mathbf{b}$  ортогонален  $d\mathbf{b}/ds = \tau$ . Таким образом,  $\tau$  ортогонален  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{t}$ , следовательно, коллинеарен вектору нормали  $\nu$ :

$$\tau = -\tau \nu, \quad (7.22)$$

где  $\tau$  - коэффициент пропорциональности.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.4.** Коэффициент пропорциональности  $\tau$  между вектором кручения  $\tau$  и вектором  $\nu$  главной нормали к кривой  $\mathcal{L}$ , взятый с обратным знаком называют *кручением кривой  $\mathcal{L}$* .

В отличие от кривизны  $k$ , кручение  $\tau$  может быть как положительным, так и отрицательным. Обратная к нему величина

$$R_\tau = 1/\tau$$

называется *радиусом кручения*.

Получим выражение для кручения  $\tau$ .

Умножая (7.22) скалярно на  $\nu$ , имеем с учетом (7.21):

$$\tau = - \left( \mathbf{t} \times \frac{d\nu}{ds} \right) \cdot \nu. \quad (7.23)$$

Подставим сюда вместо  $\nu$  его выражение (7.17) через вектор кривизны  $\kappa$ :

$$\begin{aligned} \tau &= -\mathbf{t} \times \frac{d(R\kappa)}{ds} \cdot R\kappa = -\mathbf{t} \times \left( \frac{dR}{ds}\kappa + R \frac{d\kappa}{ds} \right) \cdot R\kappa = \\ &= -R \frac{dR}{ds} (\mathbf{t} \times \kappa) \cdot \kappa - R^2 \left( \mathbf{t} \times \frac{d\kappa}{ds} \right) \cdot \kappa. \end{aligned} \quad (7.24)$$

Так как вектор  $(\mathbf{t} \times \kappa)$  ортогонален  $\kappa$ , то первое слагаемое в (7.24) равно нулю. Во втором слагаемом в (7.24) согласно свойству смешанного произведения векторов (см. упр.1.2.6) получим:

$$\tau = R^2 (\mathbf{t} \times \kappa) \cdot \frac{d\kappa}{ds}. \quad (7.25)$$

Подставляя вместо  $\mathbf{t}$  и  $\kappa$  их выражения (7.10), (7.12) через радиусы-векторы  $\mathbf{x}$ , имеем

$$\tau = R^2 \left( \frac{d\mathbf{x}}{ds} \times \frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2} \right) \cdot \frac{d^3\mathbf{x}}{ds^3}. \quad (7.26)$$

Заметим, что смешанное произведение в (7.26) представляет собой объем параллелепипеда, построенного на векторах  $\frac{d\mathbf{x}}{ds}$ ,  $\frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2}$  и  $\frac{d^3\mathbf{x}}{ds^3}$ , поэтому (7.26) можно представить в виде:

$$\tau = R^2 \det \left( \frac{d^\alpha \mathbf{x}}{ds^\alpha} \right). \quad (7.26')$$

### 7.1.6. Формулы Френе

Формулы Френе-Серре позволяют выразить производные от векторов сопровождающего трехгранника через сами векторы  $t$ ,  $b$  и  $\nu$ . Из (7.12) и (7.17) следует первая формула Френе-Серре:

$$\frac{dt}{ds} = k\nu. \quad (7.27)$$

Из (7.19) и (7.22) вытекает вторая формула Френе:

$$\frac{db}{ds} = -\tau\nu. \quad (7.28)$$

Дифференцируя первую формулу (7.18') с учетом (7.27) и (7.28), получаем:

$$\frac{d\nu}{ds} = -k\nu \times b + \tau t \times \nu. \quad (7.29)$$

Еще раз используя формулы (7.18) и (7.18'), получаем третью формулу Френе-Серре:

$$\frac{d\nu}{ds} = -kt + \tau b. \quad (7.30)$$

На формулы Френе-Серре (7.27), (7.28), (7.30) можно смотреть как на дифференциальные уравнения относительно векторов  $t$ ,  $\nu$  и  $b$ , тогда если известны две функции

$$k = k(s), \quad \tau = \tau(s), \quad s_0 \leq s \leq s_1, \quad (7.31)$$

то с помощью формул Френе-Серре можно полностью определить кривую  $\mathcal{L}$  с точностью до положения в пространстве.

Такой способ задания кривой  $\mathcal{L}$  называют *естественным*.

### 7.1.7. Механический смысл формул Френе

Рассмотрим движение по кривой  $\mathcal{L}$  от точки  $s = s_0$ . Если при движении длину дуги  $s$  трактовать как "время", то величины  $(dt/ds)$ ,  $(db/ds)$  и  $(d\nu/ds)$  - есть "скорости" изменения векторов сопровождающего трехгранника.

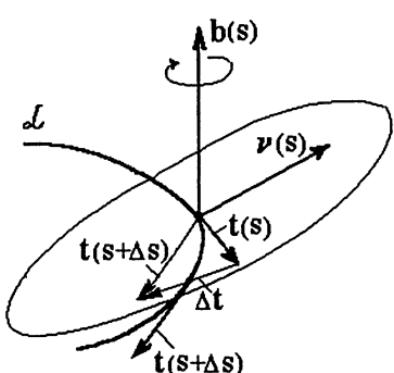


Рис. 7.4. К определению механического смысла формул Френе

Согласно первой формуле Френе (7.27) за малое "время"  $\Delta s$  изменение вектора  $t$  на величину

$$\Delta t = k\nu\Delta s$$

происходит в направлении нормали  $\nu$ . Кроме того, вектор  $\Delta t$ , представляющий собой разность

$$\Delta t = t(s + \Delta s) - t(s),$$

пересекает касательную с направляющим вектором  $t(s)$ . Отсюда следует, что  $\Delta t$  лежит в соприкасающейся плоскости, содержащей векторы  $\nu$  и  $t(s)$  и ортогональной вектору бинормали  $b$  (рис.7.4).

Иначе говоря, в течение малого "времени"  $\Delta s$  изменение вектора касательной  $t$  происходит путем вращения в спрямляющей плоскости, т.е. вокруг оси бинормали  $b(s)$ , называемой *мгновенным положением бинормали*.

Абсолютная угловая скорость этого вращения  $|(dt/ds)|$  согласно (7.27) равна кривизне:

$$|\frac{dt}{ds}| = k. \quad (7.32)$$

Совершенно аналогично из второй формулы Френе (7.28) можно показать, что бинормаль  $b$  в течение малого "времени"  $\Delta s$  вращается вокруг мгновенного положения касательной  $t(s)$  с угловой скоростью равной кручению  $\tau$ :

$$|\frac{db}{ds}| = \tau. \quad (7.33)$$

Так как сопутствующий трехгранник движется как жесткое целое вдоль кривой  $L$ , а оси бинормали и касательной при этом испытывают мгновенное вращение с угловыми скоростями  $\tau$  и  $k$ , то в целом трехгранник вращается с суммарной угловой скоростью

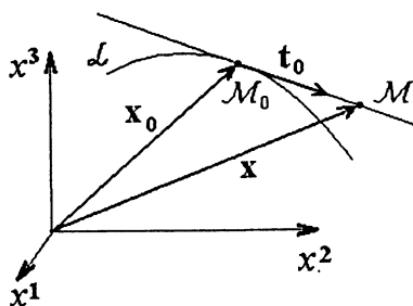
$$|\omega| = \sqrt{\tau^2 + k^2} \quad (7.34)$$

вокруг оси, направление которой определяется *вектором Дарбу*:

$$\omega = \tau t + kb. \quad (7.35)$$

### 7.1.8. Уравнения касательной, нормали и бинормали

Если зафиксировать точку  $M_0$  с координатами  $x^i = x_0^i$  на кривой  $\mathcal{L}$ , то уравнение касательной к кривой, проходящей через эту точку  $M_0$  и содержащую вектор касательной в этой точке  $t_0$ , будет иметь вид (см. рис.7.5):



$$\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 = \xi \mathbf{t}_0, \quad (7.36)$$

или в декартовых координатах

$$x^i - x_0^i = \xi \bar{t}_0^i. \quad (7.37)$$

Здесь  $x_0^i, \bar{t}_0^i$  фиксированы для точки  $M_0$ ,  $x^i$  - переменные, а  $\xi$  - переменный параметр.  
Совершенно аналогично записываются уравнения нормали

Рис. 7.5. К выводу уравнения касательной к кривой  $\mathcal{L}$

$$\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 = \xi \nu \quad (7.38)$$

и бинормали

$$\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 = \xi \mathbf{b} \quad (7.39)$$

к кривой  $\mathcal{L}$  в точке  $M_0$ .

#### Упражнения к § 7.1.

**Упражнение 7.1.1.** Разложим векторы сопровождающего трехгранника  $t$ ,  $\nu$  и  $b$  по векторам неподвижного декартова базиса  $\bar{e}_i$ :

$$t = \bar{t}_i \bar{e}_i, \quad \nu = \bar{\nu}_i \bar{e}_i, \quad b = \bar{b}_i \bar{e}_i.$$

Показать, что для декартовых компонент  $\bar{t}_i$ ,  $\bar{\nu}_i$  и  $\bar{b}_i$  имеют место выражения через компоненты радиуса-вектора:

$$\bar{t}_i = \frac{dx^i}{ds}, \quad \bar{\nu}_i = \frac{1}{k} \frac{d^2 x^i}{ds^2}, \quad \bar{b}_k = \frac{1}{k} \epsilon_{ijk} \frac{dx^i}{ds} \frac{d^2 x^j}{ds^2}.$$

**Упражнение 7.1.2.** Показать, что из формул Френе (7.27), (7.28) и (7.30) следуют уравнения для координат векторов сопровождающего трехгранника:

$$\begin{cases} d\bar{t}_i/ds = k\nu_i, \\ d\bar{b}_i/ds = -\tau\nu_i, \\ d\bar{\nu}_i/ds = -k\bar{t}_i + \tau\bar{b}_i. \end{cases}$$

**Упражнение 7.1.3.** Используя формулы Френе из упр.7.1.1, доказать, что если вдоль кривой  $\mathcal{L}$  кривизна  $k = 0$ , то эта кривая  $\mathcal{L}$  суть прямая линия.

**Упражнение 7.1.4.** Используя упр.7.1.1, доказать, что если вдоль кривой  $\mathcal{L}$  кручение  $\tau = 0$ , то эта кривая  $\mathcal{L}$  суть плоская кривая.

**Упражнение 7.1.5.** Показать, что из (7.9) выражение для параметра  $ds/d\xi$  имеет вид:

$$ds/d\xi = |\dot{\mathbf{x}}|,$$

где  $\dot{\mathbf{x}} \equiv dx/d\xi$ .

**Упражнение 7.1.6.** Используя результат упр.7.1.5, показать, что если кривая  $\mathcal{L}$  задана в виде (7.1), то из (7.16) и (7.18) следует такое выражение для кривизны  $k$ :

$$k = |\dot{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}}|/|\dot{\mathbf{x}}|^3.$$

**Упражнение 7.1.7.** Показать, что выражение для  $k$ , представленное в упр.7.1.6, может быть также записано следующим образом:

$$k = \frac{|\dot{\mathbf{x}}||\ddot{\mathbf{x}}| - (\dot{\mathbf{x}} \cdot \ddot{\mathbf{x}})^2}{|\dot{\mathbf{x}}|^3}.$$

**Упражнение 7.1.8.** Используя результаты упр.7.1.5 и 7.1.6, показать, что если кривая  $\mathcal{L}$  задана в виде (7.1), то из (7.26) можно получить следующее выражение для кручения:

$$\tau = \frac{\dot{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}} \cdot \ddot{\mathbf{x}}}{|\dot{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}}|^2}.$$

**Упражнение 7.1.9.** Показать, что для кривой  $\mathcal{L}$ , представляющей собой винтовую линию, для которой уравнения (7.1) имеют вид:

$$x^1 = a \cos \xi, \quad x^2 = a \sin \xi, \quad x^3 = b\xi, \quad a > 0$$

(если  $b > 0$ , это правая винтовая линия; если  $b < 0$  – левая), длина дуги  $s$  пропорциональна  $\xi$ :

$$s = \xi \sqrt{a^2 + b^2}.$$

**Упражнение 7.1.10.** Показать, что для винтовой линии кривизна  $k$  и кручение  $\tau$  постоянны и равны:

$$k = \frac{a}{a^2 + b^2}, \quad \tau = \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

**Упражнение 7.1.11.** Показать, что из (7.9) и (7.27) следует формула:

$$\ddot{\mathbf{x}} = \ddot{s}\mathbf{t} + \frac{\dot{s}^2}{R}\nu,$$

называемая формулой разложения ускорения движущейся точки на тангенциальную и нормальную составляющую.

**Упражнение 7.1.12.** Доказать, что если три вектора  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  лежат в одной плоскости (ортогональной некоторому вектору  $\nu$ ), то

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = 0.$$

Показать, что это выражение эквивалентно следующему:

$$\det \begin{pmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ c^1 & c^2 & c^3 \end{pmatrix} = 0.$$

## § 7.2. Поверхности в трехмерном евклидовом пространстве

### 7.2.1. Способы задания поверхностей

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.5.** Пусть  $w$  – открытая область в двумерном пространстве  $\mathbb{R}^2$ , тогда поверхность  $\Sigma$  в трехмерном пространстве  $\mathbb{R}^3$  называют отображение  $\Sigma$ :  $w \rightarrow \mathbb{R}^3$ , которое задается с помощью вектор-функции

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(X^1, X^2), \quad (X^1, X^2) \in w \subset \mathbb{R}^2 \quad (7.40)$$

или с помощью трех числовых функций

$$x^i = x^i(X^1, X^2), \quad i = 1, 2, 3, \quad (7.41)$$

зависящих от двух аргументов  $X^1$  и  $X^2$ .

Эти  $X^1, X^2$  представляют собой криволинейные координаты на поверхности  $\Sigma$ . Соотношения (7.40) или (7.41) выражают параметрический способ задания поверхности.

Три функции (7.41) предполагаются однозначными, непрерывными и имеющими непрерывные производные до второго порядка в некоторой области изменения аргументов  $X^I$ ,  $I = 1, 2$ .

Здесь и далее в этой главе заглавные латинские буквы в индексе пробегают значения от 1 до 2:  $I, J, K, L = 1, 2$ , а малые латинские – как обычно от 1 до 3:  $i, j, k, l = 1, 2, 3$ .

Поверхность  $\Sigma$  можно задать также неявным способом с помощью одной функции трех аргументов – координат  $x^i$ :

$$\Phi(x^i) = 0. \quad (7.42)$$

Если подставить функции (7.41) в (7.42), то получим тождество.

### 7.2.2. Локальные векторы базиса и метрическая матрица на поверхности

Подобно тому как в гл.1 вводились локальные векторы базиса  $R_i$  для пространства  $\mathbb{R}^3$ , введем два локальных вектора базиса  $\rho_I$  на поверхности:

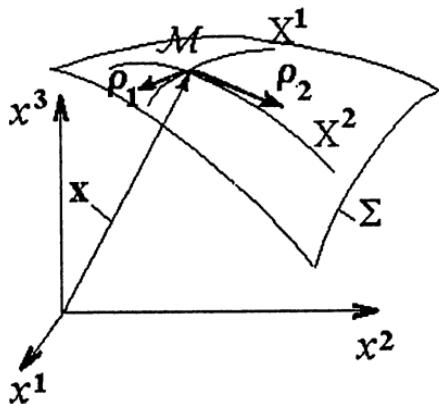


Рис. 7.6. Поверхность в трехмерном евклидовом пространстве

$$\rho_I = \partial \mathbf{x} / \partial X^I. \quad (7.43)$$

Эти векторы направлены по касательной к координатным линиям  $X^I = \text{const}$  поверхности  $\Sigma$ . Компоненты локальных векторов  $\rho_I$  в декартовом базисе  $\bar{\mathbf{e}}$  обозначим как  $\rho_I^i$ :

$$\rho_I = \rho_I^i \bar{\mathbf{e}}_i. \quad (7.44)$$

Введем *метрическую матрицу поверхности*:

$$\tilde{g}_{IJ} = \rho_I \cdot \rho_J, \quad (7.45)$$

которая имеет размер  $2 \times 2$ .

Определитель метрической матрицы  $\tilde{g}_{IJ}$  отличен от нуля:

$$\tilde{g} = \det(\tilde{g}_{IJ}) = \tilde{g}_{11}\tilde{g}_{22} - \tilde{g}_{12}^2 \neq 0, \quad (7.46)$$

полагаем, что

$$\tilde{g}_{11} > 0, \quad \tilde{g}_{22} > 0, \quad \tilde{g}_{11}\tilde{g}_{22} - \tilde{g}_{12}^2 > 0.$$

Для  $\tilde{g}_{IJ}$  существует обратная метрическая матрица поверхности  $\tilde{g}^{IJ}$  с компонентами:

$$\tilde{g}^{11} = \frac{\tilde{g}_{22}}{\tilde{g}}, \quad \tilde{g}^{22} = \frac{\tilde{g}_{11}}{\tilde{g}}, \quad \tilde{g}^{12} = -\frac{\tilde{g}_{12}}{\tilde{g}}, \quad (7.47)$$

причем

$$\tilde{g}^{IJ} \tilde{g}_{IK} = \delta_K^I. \quad (7.48)$$

Здесь  $\delta_K^I$  - двумерный символ Кронекера:

$$\delta_K^I = \begin{cases} 0, & I = K, \\ 1, & I \neq K. \end{cases} \quad (7.49)$$

Векторы взаимного локального базиса поверхности  $\rho^I$  введем следующим образом:

$$\rho^I = \tilde{g}^{IJ} \rho_J. \quad (7.50)$$

### 7.2.3. Тензоры на поверхности

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.6.** Плоскость  $\Sigma_t$ , содержащую векторы  $\rho_I$ , определенные для точки  $M_0$  поверхности  $\Sigma$ , называют касательной плоскостью к поверхности  $\Sigma$  в точке  $M_0$ .

Рассмотрим вектор  $a = \bar{a}^i \bar{e}_i$ , который лежит в касательной плоскости  $\Sigma_t$ , в данной точке  $M_0$ . Тогда его можно разложить по базису  $\rho_I$ :

$$a = a^I \rho_I.$$

**ТЕОРЕМА 7.1.** Множество всех векторов  $a = \bar{a}^i \bar{e}_i$ , лежащих в касательной плоскости  $\Sigma_t$ , в фиксированной точке  $M_0$  поверхности  $\Sigma$  с радиусом-вектором  $x$  образует линейное пространство  $\mathcal{L}_{t(x)}$ .

Это пространство называют также касательным линейным пространством.

▼ Действительно, сумма двух векторов  $a$  и  $b$  из касательной плоскости  $\Sigma_t$  всегда может быть представлена в виде  $a + b = (a^I + b^I) \rho_I = c^I \rho_I \in \Sigma_t$ , произведение вещественного числа  $\lambda$  на  $a$  также образует вектор  $\lambda a = (\lambda a^I) \rho_I$ , лежащий в касательной плоскости. Свойства 1° – 8° линейного пространства очевидны,  $\dim \mathcal{L}_{t(x)} = 2$ . ▲

Тогда к пространству  $\mathcal{L}_{t(x)}$  можно применить весь аппарат, изложенный в §2.5, в частности, образовать множество векторных наборов  $(a_1 b_1 a_2 b_2)$ , где  $a_I \in \mathcal{L}_{t(x)}$ ,  $b_I \in \mathcal{L}_{t(x)}$ , ввести на этом множестве операции (2.112) сложения и умножения на число и дать определение тензора, аналогичное определению 2.26.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.7.** Тензорным касательным пространством  $T_n^{(2)}(\mathcal{L}_{t(x)})$  называют тензорное произведение линейного пространства  $\mathcal{L}_{t(x)}$  на себя:

$$T_n^{(2)}(\mathcal{L}_{t(x)}) = \mathcal{L}_{t(x)} \otimes \mathcal{L}_{t(x)}, \quad x \in \Sigma.$$

Переходя от одной точки  $x$  поверхности  $\Sigma$  к другой  $x'$ , получаем различные тензорные касательные пространства. Определение 7.7 корректно, поскольку операция тензорного произведения вводится согласно определению 2.25 как фактор-пространство  $n$ -ой степени (здесь  $n = 2$ ) декартова квадрата пространств:  $\mathcal{L}_{t(x)} \otimes \mathcal{L}_{t(x)} = [(\mathcal{L}_{t(x)} \times \mathcal{L}_{t(x)})]^2$  по отношению к введенной в определении 2.24 эквивалентности. А согласно теореме 2.29,  $T_n^{(2)}(\mathcal{L}_{t(x)})$  действительно является линейным пространством, причем  $\dim T_n^{(2)} = 4$ .

Базисные диады в  $T_n^{(2)}(\mathcal{L}_{t(x)})$  введем аналогично (2.118):

$$\rho_J \otimes \rho_K = [\rho_I (\delta^I_J \rho_K)],$$

или явным образом:

$$\rho_1 \otimes \rho_1 = [\rho_1 \rho_1 \rho_2 0], \quad \rho_1 \otimes \rho_2 = [\rho_1 \rho_2 \rho_2 0],$$

$$\rho_2 \otimes \rho_1 = [\rho_1 0 \rho_2 \rho_1], \quad \rho_2 \otimes \rho_2 = [\rho_1 0 \rho_2 \rho_2].$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.8.** Тензорами второго ранга на поверхности  $A(x)$  называют элементы тензорных касательных пространств  $T_n^{(2)}(\mathcal{L}_{t(x)})$ , определенных для каждой точки  $x$  поверхности  $\Sigma$ .

Согласно теореме 2.28а, всякий тензор  $A$  на поверхности можно в данной точке  $\mathcal{M}$  представить разложением по диадному базису:

$$A = A^{IJ} \rho_I \otimes \rho_J.$$

Аналогично вводят тензоры высших рангов.

В силу положительной определенности  $\tilde{g}_{IJ}$ , все касательные пространства  $\mathcal{L}_{t(x)}$  будут евклидовыми, тогда, согласно п.2.5.9, сопряженные пространства  $\mathcal{L}_{t(x)}^*$  совпадают с  $\mathcal{L}_{t(x)}$ , и для тензоров на поверхности  $A(x)$  в каждой точке  $x \in \Sigma$  кроме операций сложения, умножения на число и транспонирования определены операции скалярного умножения и поднятия-опускания индексов с помощью матриц  $\tilde{g}_{IJ}$  и  $\tilde{g}^{IJ}$ .

Также как и для трехмерного евклидова пространства с помощью векторов локального базиса  $\rho_I$  и  $\rho^I$  можно определить различные диадные базисы:

$$\rho_I \otimes \rho_J, \quad \rho^I \otimes \rho_J, \quad \rho^I \otimes \rho^J, \quad I, J = 1, 2,$$

с помощью которых тензор на поверхности  $A$  можно представить в виде:

$$A = A^{IJ} \rho_I \otimes \rho_J = A_{IJ} \rho^I \otimes \rho^J = A^I_J \rho_I \otimes \rho^J.$$

Тензоры на поверхности представляют собой инвариантные объекты, не меняющиеся при переходе из одной криволинейной системы координат  $X^I$  в другую  $X^{I'}$ .

Правило преобразования компонент векторов локальных базисов и тензоров при переходе из  $X^I$  в  $X^{I'}$  также сохраняется:

$$\rho'_I = \frac{\partial x}{\partial X^{I'}}, \quad \rho'_I = \left( \frac{\partial X^K}{\partial X^{I'}} \right) \rho_K, \quad A^{IJ'} = A^{KL} \left( \frac{\partial X^{I'}}{\partial X^K} \right) \left( \frac{\partial X^{J'}}{\partial X^L} \right). \quad (7.51)$$

Метрический тензор на поверхности  $\tilde{E}$  определяют по аналогии с  $E$ :

$$\tilde{E} = \tilde{g}_{IJ}\rho^I \otimes \rho^J = \tilde{g}^{IJ}\rho_I \otimes \rho_J = \rho^I \otimes \rho_J.$$

Заметим, что хотя локальные базисы  $\rho_I$ ,  $\rho^I$  и метрические матрицы  $\tilde{g}_{IJ}$ ,  $\tilde{g}^{IJ}$  формально введены по аналогии с  $R_i$ ,  $R^i$ ,  $g_{ij}$ ,  $g^{ij}$  - трехмерными объектами, но, вообще говоря, их соответствующие компоненты различны, так как поверхностные объекты определены для функций (7.40) специального вида.

#### 7.2.4. Касательные плоскости и вектор нормали

Получим уравнение касательной плоскости  $\Sigma_t$  в точке  $M_0$  с координатами  $x_0^i$ .

Выберем произвольную точку  $M$  с координатами  $x^i$ , лежащую в касательной плоскости  $\Sigma_t$  к точке  $M_0$  (рис. 7.7), тогда три вектора  $x - x_0$ ,  $\rho_1$  и  $\rho_2$  лежат в одной плоскости  $\Sigma_t$ . Определитель, составленный из компонент этих векторов, будет равен нулю (см. теорему 2.10):

$$\begin{vmatrix} x^1 - x_0^1 & x^2 - x_0^2 & x^3 - x_0^3 \\ \rho_1^1 & \rho_1^2 & \rho_1^3 \\ \rho_2^1 & \rho_2^2 & \rho_2^3 \end{vmatrix} = 0 \quad (7.52)$$

или в векторном виде

$$(x - x_0) \times \rho_1 \cdot \rho_2 = 0. \quad (7.53)$$

Разрешая (7.52) относительно координат  $x^i$ , получим уравнение плоскости  $\Sigma_t$ , касательной в точке  $x_0^i$ :

$$A_1(x^1 - x_0^1) + A_2(x^2 - x_0^2) + A_3(x^3 - x_0^3) = 0, \quad (7.54)$$

где

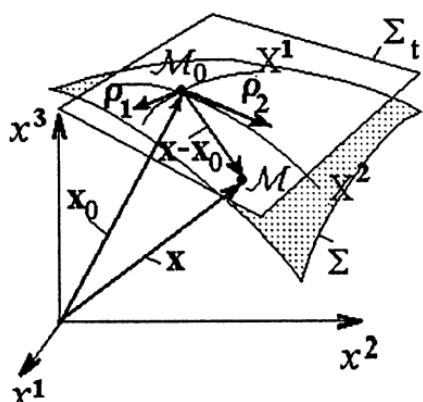
$$A_1 = \rho_1^2 \rho_2^3 - \rho_1^3 \rho_2^2,$$

Рис. 7.7. К выводу уравнения касательной плоскости

$$A_2 = -(\rho_1^1 \rho_2^3 - \rho_1^3 \rho_2^1), \quad A_3 = \rho_1^1 \rho_2^2 - \rho_1^2 \rho_2^1. \quad (7.55)$$

В уравнении (7.54)  $x_0^i$  - фиксированы, а  $x^i$  - переменные.

Нормалью к поверхности  $\Sigma$  называется прямая, проходящая через точку  $M$  поверхности и ортогональная к касательной плоскости  $\Sigma_t$ .



поверхности в этой точке  $\mathcal{M}$ . Очевидно, что единичный вектор нормали  $n$  ортогонален векторам  $\rho_1$ ; определим его как

$$n = \frac{1}{\sqrt{\tilde{g}}} \rho_1 \times \rho_2. \quad (7.56)$$

Используя определение (1.33) векторного произведения, можно показать (см. упр. 8.2.1), что формула (7.56) эквивалентна следующей:

$$n = \frac{\rho_1 \times \rho_2}{|\rho_1 \times \rho_2|}, \quad (7.56a)$$

откуда вытекает, что вектор  $n$  действительно единичный:

$$n \cdot n = 1.$$

Если зафиксировать точку  $\mathcal{M}_0$  на поверхности  $\Sigma$ , то уравнение нормали, проходящей через эту точку  $\mathcal{M}_0$  и содержащей вектор  $n_0$ , будет иметь вид:

$$x - x_0 = \xi n_0 \quad (7.57)$$

или

$$x^i - x_0^i = \xi n_0^i. \quad (7.58)$$

Здесь  $x_0^i$  и  $n_0^i$  - фиксированы,  $x^i$  - переменные, а  $\xi$  - переменный параметр.

### 7.2.5. Первая квадратичная форма поверхности

Рассмотрим кривую  $\mathcal{L}$  на поверхности  $\Sigma$ . Уравнение этой кривой можно записать в параметрическом виде:

$$X^i = X^i(\xi)$$

в криволинейных координатах  $X^i$  поверхности, или в декартовых координатах:

$$x = x(X^1(\xi), X^2(\xi)).$$

Возьмем две близкие точки  $\mathcal{M}$  и  $\mathcal{M}'$  с радиусами-векторами  $x$  и  $x'$ , лежащие на этой кривой  $\mathcal{L}$  (рис. 7.8). Эти две точки связаны вектором  $\Delta x = x' - x$ . Переходя к пределу, получим элементарный радиус-вектор  $dx$ , связывающий две бесконечно близкие точки  $\mathcal{M}$  и  $\mathcal{M}'$  поверхности. Согласно (7.40) и (7.43) для  $dx$  имеем выражение:

$$dx = \rho_I dX^I. \quad (7.59)$$

Длина элементарного радиуса-вектора есть дифференциал длины дуги  $ds$  кривой  $\mathcal{L}$ :

$$ds^2 = |dx|^2 = dx \cdot dx. \quad (7.60)$$

Подставляя (7.59) в (7.60) для квадрата дифференциала длины дуги  $ds^2$ , получим

$$ds^2 = \tilde{g}_{IJ} dX^I dX^J. \quad (7.61)$$

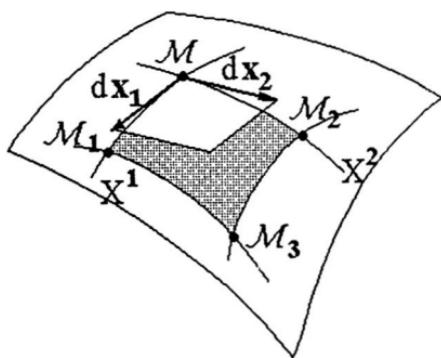
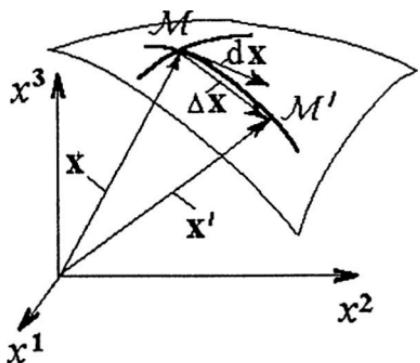


Рис. 7.8. К определению элементарного радиуса-вектора, связывающего две близкие точки поверхности

Рис. 7.9. К определению элементарной площадки поверхности

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.9.** Квадратичную форму (7.61) называют первой квадратичной формой поверхности, а  $\tilde{g}_{IJ}$  — коэффициентами первой квадратичной формы.

### 7.2.6. Элементарная площадка поверхности

Рассмотрим на поверхности  $\Sigma$  в окрестности точки  $M$  малую площадку, ограниченную двумя парами близких координатных линий  $X^I$  (рис. 7.9). Переходя к пределу, получим, что пары точек  $M, M_1$  и  $M, M_2$  соединены элементарными радиусами-векторами  $dx_1$  и  $dx_2$ , причем

$$dx_\alpha = \rho_\alpha dX^\alpha, \quad \alpha = 1, 2 \quad (7.62)$$

(здесь суммирования по  $\alpha$  нет).

В предельном переходе описанная малая площадка превращается в параллелограмм, площадь которого  $d\Sigma$ , согласно (1.51), вычислим по формуле:

$$nd\Sigma = dx_1 \times dx_2. \quad (7.63)$$

Вычислим длину векторов, стоящих справа и слева в (7.63), учитывая формулы (7.62), (7.56), а также тот факт, что  $|\mathbf{n}| = 1$ . В итоге получим

$$d\Sigma = |\rho_1 \times \rho_2| dX^1 dX^2 = \sqrt{\tilde{g}} dX^1 dX^2 \quad (7.64)$$

— выражение для элементарной площадки поверхности.

### 7.2.7. Угол между двумя кривыми на поверхности

Пусть на поверхности  $\Sigma$  имеются две кривые, пересекающиеся в точке  $M$  и заданные параметрически:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(X^1(\xi), X^2(\xi)), \quad \mathbf{x}' = \mathbf{x}(X'^1(\xi), X'^2(\xi)). \quad (7.65)$$

Тогда элементарные радиусы-векторы, выпущенные из точки  $M$  вдоль этих кривых, согласно (7.58) имеют вид:

$$d\mathbf{x} = \rho_I dX^I, \quad d\mathbf{x}' = \rho_I dX'^I. \quad (7.66)$$

Косинус угла  $\chi$  между векторами  $d\mathbf{x}$  и  $d\mathbf{x}'$  находим, используя скалярное произведение векторов:

$$\cos \chi = \frac{\mathbf{dx} \cdot \mathbf{dx}'}{|\mathbf{dx}| |\mathbf{dx}'|} = \frac{\tilde{g}_{IJ} dX^I dX'^J}{(g_{KL} dX^K dX^L)^{1/2} (g_{MN} dX'^M dX'^N)^{1/2}}. \quad (7.67)$$

Если в качестве параметра  $\xi$  в (7.65) выбрать длину дуги, то выражение (7.67) с учетом (7.11) можно упростить:

$$\cos \chi = \tilde{g}_{IJ} \frac{dX^I}{ds} \frac{dX'^J}{ds}. \quad (7.68)$$

### 7.2.8. Вторая квадратичная форма поверхности

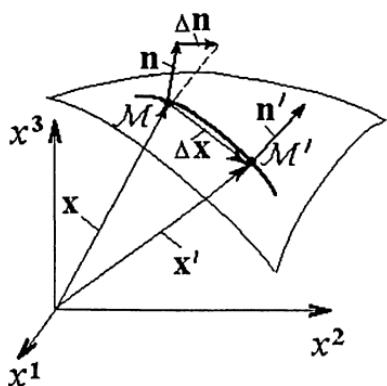


Рис. 7.10. К определению элементарного вектора нормали

Для двух близких точек поверхности  $M$  и  $M'$ , связанных радиусом-вектором  $\Delta x$ , рассмотрим векторы нормали  $n$  и  $n'$  (рис. 7.10) и определим элементарный вектор нормали  $d\mathbf{n}$  как предельное положение разности нормалей:

$$d\mathbf{n} = \mathbf{n}' - \mathbf{n}.$$

Подобно (7.59) для элементарного вектора нормали имеем:

$$d\mathbf{n} = \mathbf{n}_I dX^I, \quad (7.69)$$

где обозначены производные вектора нормали:

$$\mathbf{n}_I = \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial X^I}. \quad (7.70)$$

Составим теперь скалярное произведение  $d\mathbf{n}$  и  $d\mathbf{x}$ , с учетом (7.59) и (7.69) имеем:

$$-d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{n} = b_{IJ} dX^I dX^J. \quad (7.71)$$

Здесь введено обозначение для скалярного произведения:

$$b_{IJ} = -\rho_I \cdot \mathbf{n}_J. \quad (7.72)$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.10.** Выражение (7.71) называют в торой квадратичной формой поверхности, а  $b_{IJ}$  - коэффициентами второй квадратичной формы.

Представим выражение (7.72) для  $b_{IJ}$  в несколько ином виде. Вспомним, что векторы  $\rho_I$ , определенные в некоторой точке  $\mathcal{M}$ , направлены по касательным к кривым на поверхности  $\Sigma$ , совпадающим с координатными линиями  $X^I = \text{const}$ . Тогда  $\rho_I$  будут ортогональны вектору нормали  $\mathbf{n}$ , выпущенному из той же точки, т.е.

$$\rho_I \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (7.73)$$

Обозначим вторую производную от радиуса-вектора как

$$\rho_{IJ} = \frac{\partial \rho_I}{\partial X^J} = \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial X_I \partial X_J}. \quad (7.74)$$

Тогда дифференцируя (7.73) по  $X^J$ , получим

$$\rho_{IJ} \cdot \mathbf{n} = -\rho_I \cdot \mathbf{n}_J = b_{IJ}, \quad (7.75)$$

или с учетом (7.74):

$$b_{IJ} = \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial X^I \partial X^J} \cdot \mathbf{n}. \quad (7.76)$$

Из этого выражения, очевидно, следует симметричность коэффициентов второй квадратичной формы поверхности  $b_{IJ}$ .

Подставим в (7.75) вместо  $\mathbf{n}$  его определение (7.56), тогда выражение для коэффициентов  $b_{IJ}$  примет вид:

$$b_{IJ} = \frac{1}{\sqrt{g}} \rho_{IJ} \cdot \rho_1 \times \rho_2. \quad (7.77)$$

### 7.2.9. Псевдотензоры на поверхности

Рассмотрим теперь кроме координат  $X^i$  на поверхности  $\Sigma$  еще одни криволинейные координаты  $X'^i$ . Тогда в каждой точке  $\mathcal{M}$  поверхности мы имеем два локальных базиса  $\rho_I$  и  $\rho'_I$ , связанных соотношением

(7.51), две метрические матрицы  $\tilde{g}_{IJ}$  и  $\tilde{g}'_{IJ} = \rho'_I \cdot \rho'_J$ , между которыми имеется следующая связь:

$$\tilde{g}'_{IJ} = \frac{\partial X^K}{\partial X'^I} \frac{\partial X^L}{\partial X'^J} \tilde{g}_{KL},$$

и два набора коэффициентов второй квадратичной формы:

$$\begin{aligned} b_{IJ} &= \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial X^I \partial X^J} \cdot \frac{\rho_1 \times \rho_2}{|\rho_1 \times \rho_2|}, \\ b'_{IJ} &= \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial X'^I \partial X'^J} \cdot \frac{\rho'_1 \times \rho'_2}{|\rho'_1 \times \rho'_2|}. \end{aligned} \quad (7.78)$$

Вычисляя по этим формулам детерминанты  $\tilde{g}$  и  $\tilde{g}'$ , находим:

$$\sqrt{\tilde{g}'} = \frac{1}{|\Delta|} \sqrt{\tilde{g}}, \quad \text{где } \Delta = \det \left( \frac{\partial X'^I}{\partial X^K} \right).$$

Векторное произведение  $\rho'_1 \times \rho'_2$  преобразуем с учетом определений (1.33) и (7.44):

$$\begin{aligned} \rho'_1 \times \rho'_2 &= \epsilon_{ijk} \rho'_1{}^i \rho'_2{}^j \bar{e}^k = \epsilon_{ijk} \frac{\partial x^i}{\partial X'^I} \frac{\partial x^j}{\partial X'^J} e^k \frac{\partial X^I}{\partial X'^1} \frac{\partial X^J}{\partial X'^2} = \\ &= \rho_I \times \rho_J \frac{\partial X^I}{\partial X'^1} \frac{\partial X^J}{\partial X'^2} = \frac{1}{\Delta} \rho_1 \times \rho_2. \end{aligned}$$

Здесь учтено, что  $\rho_\alpha \times \rho_\alpha = \mathbf{0}$  ( $\alpha = 1, 2$ ). Подставляя полученное соотношение в выражение для  $b'_{IJ}$ , получаем формулы преобразования при переходе к новой системе координат:

$$\begin{aligned} b'_{IJ} &= \frac{|\Delta|}{\Delta} \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial X^K \partial X^L} \frac{\partial X^K}{\partial X'^I} \frac{\partial X^L}{\partial X'^J} \cdot \frac{\rho_1 \times \rho_2}{|\rho_1 \times \rho_2|} = \\ &= \frac{\Delta}{|\Delta|} \frac{\partial X^K}{\partial X'^I} \frac{\partial X^L}{\partial X'^J} b_{KL}. \end{aligned} \quad (7.79)$$

Согласно введенной в п.1.9.6 классификации, скаляр  $\sqrt{\tilde{g}}$  является относительным тензором веса  $\omega = -1$ , а коэффициенты второй квадратичной формы образуют симметричный псевдотензор второго ранга:

$$\mathbf{B} = b_{IJ} \rho^I \otimes \rho^J = b^{IJ} \rho_I \otimes \rho_J. \quad (7.80)$$

### 7.2.10. Деривационные формулы

В каждой точке поверхности  $\Sigma$  была определена тройка векторов  $\rho_1, \rho_2, n$ , которая называется *сопровождающим трехгранником поверхности*. Деривационные формулы Гаусса-Вейнгардена описывают изменение векторов сопровождающего трехгранника.

Рассмотрим эти векторы:

$$\frac{\partial \rho_I}{\partial X^J} = \rho_{IJ}, \quad \text{и} \quad n_J = \frac{\partial n}{\partial X^J}.$$

Их всегда можно разложить по векторам какого-либо базиса, например, по сопровождающему трехграннику:

$$\rho_{IJ} = \tilde{\Gamma}_{IJ}^K \rho_K + \tilde{b}_{IJ} n, \quad (7.81)$$

$$n_I = c_I^J \rho_J + d_I n, \quad (7.82)$$

где  $\tilde{\Gamma}_{IJ}^K, \tilde{b}_{IJ}, c_I^J$  и  $d_I$  - коэффициенты разложения. Установим вид этих коэффициентов.

Умножая (7.81) скалярно на  $n$ , в силу ортогональности  $\rho_I$  и  $n$  получаем:

$$\rho_{IJ} \cdot n = \tilde{b}_{IJ}. \quad (7.83)$$

Сравнивая (7.83) с (7.75), находим, что  $\tilde{b}_{IJ}$  - это коэффициенты второй квадратичной формы:

$$\tilde{b}_{IJ} = b_{IJ}. \quad (7.84)$$

Умножая (7.81) скалярно на  $\rho_L$ , с учетом (7.45) и (7.73) получаем:

$$\rho_{IJ} \cdot \rho_L = \tilde{\Gamma}_{IJ}^K \tilde{g}_{KL} = \tilde{\Gamma}_{IJL}. \quad (7.85)$$

Продифференцируем теперь (7.45):

$$\rho_{IL} \cdot \rho_J + \rho_I \cdot \rho_{JL} = \frac{\partial \tilde{g}_{IJ}}{\partial X^L}. \quad (7.86)$$

Меняя в (7.86) индексы  $J \leftrightarrow L$ , получим:

$$\rho_{IJ} \cdot \rho_L + \rho_I \cdot \rho_{JL} = \frac{\partial \tilde{g}_{IL}}{\partial X^J}. \quad (7.87)$$

Если поменять в (7.86) индексы  $I \leftrightarrow L$ , то

$$\rho_{LI} \cdot \rho_J + \rho_L \cdot \rho_{JI} = \frac{\partial \tilde{g}_{JL}}{\partial X^I}. \quad (7.88)$$

Учитывая симметрию  $\rho_{IJ}$ , из (7.86) - (7.88) и (7.85) получим:

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\partial \tilde{g}_{IL}}{\partial X^J} + \frac{\partial \tilde{g}_{JL}}{\partial X^I} - \frac{\partial \tilde{g}_{IJ}}{\partial X^L} \right) = \rho_{IJ} \cdot \rho_L = \tilde{\Gamma}_{IJL} \quad (7.89)$$

- выражение для коэффициентов  $\tilde{\Gamma}_{IJL}$ .

Если сравнить (7.89) с выражением (6.13) для символов Кристоффеля  $\tilde{\Gamma}_{ijk}$ , то увидим сходство этих формул с точностью до замены трехмерных индексов на двумерные. Таким образом, коэффициенты  $\tilde{\Gamma}_{IJL}$  (7.89) естественно определить как *двумерные символы Кристоффеля* первого рода.

Символы второго рода получаются умножением на обратную метрическую матрицу:

$$\tilde{\Gamma}_{IJ}^K = \tilde{\Gamma}_{IJL} \tilde{g}^{LK} = \frac{1}{2} \tilde{g}^{LK} \left( \frac{\partial \tilde{g}_{IL}}{\partial X^J} + \frac{\partial \tilde{g}_{JL}}{\partial X^I} - \frac{\partial \tilde{g}_{IJ}}{\partial X^L} \right). \quad (7.90)$$

Умножая теперь формулу (7.82) скалярно на  $n$ , получаем:

$$n_I \cdot n = d_I. \quad (7.91)$$

Но так как  $n \cdot n = 1$ , то

$$n_I \cdot n = 0, \quad (7.92)$$

поэтому

$$d_I = 0. \quad (7.93)$$

Наконец, умножая (7.82) на  $\rho_K$ , получаем:

$$n_I \cdot \rho_K = c_I^J \tilde{g}_{JK}. \quad (7.94)$$

Используя определение (7.72) коэффициентов  $b_{IK}$ , из (7.94) выражаем  $c_I^J$ :

$$c_I^J = -\tilde{g}^{JK} b_{KI} = -b_I^J, \quad (7.95)$$

где  $b_I^J$  - смешанные коэффициенты второй квадратичной формы.

Подставляя теперь (7.84), (7.93) и (7.95) в (7.81), (7.88), получаем следующую теорему.

**Теорема 7.2.** Изменение векторов сопровождающего трехгранника описывается следующими соотношениями для производных:

$$\begin{cases} \rho_{IJ} = \tilde{\Gamma}_{IJ}^K \rho_K + b_{IJ} n, \\ n_I = -b_I^J \rho_J. \end{cases} \quad (7.96)$$

Соотношения (7.96) называют *деривационными формулами*, первая из которых была установлена Гауссом, а вторая – Вейнгартеном.

### 7.2.11. Ковариантное дифференцирование на поверхности

Заметим, что в случае трехмерного пространства символы Кристоффеля  $\Gamma_{ij}^k$  вводились согласно (6.1) как коэффициенты разложения производной  $\partial R_i / \partial X^j$  по локальному базису  $R_i$ , а формула (6.8) связи  $\Gamma_{ij}^k$  с метрической матрицей  $g_{ij}$  была установлена в виде следствия.

Для случая двумерной поверхности аналогичное разложение (6.1) не существует; как следует из деривационных формул (7.96), двумерное дифференцирование локальных векторов базиса  $\rho_I$  приводит к разложению по трехмерному базису  $\rho_I$ , п. Поэтому за определение двумерных символов Кристоффеля  $\tilde{\Gamma}_{IJ}^K$  более естественно принять формулу (7.90), являющуюся в точности аналогом трехмерного соотношения (6.8), тогда деривационные формулы (7.96) будут их следствием. Это и было проделано в п. 7.2.10.

Далее с помощью двумерных символов Кристоффеля можно определить *ковариантную производную* от компонент вектора на поверхности  $\Sigma$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.11.** *Ковариантной производной на поверхности от контравариантных и ковариантных компонент вектора называют следующие величины:*

$$\nabla_I a^J = \frac{\partial a^J}{\partial X^I} + \tilde{\Gamma}_{IK}^J a^K, \quad \nabla_I a_J = \frac{\partial a_J}{\partial X^I} - \tilde{\Gamma}_{IJ}^K a_K, \quad (7.97)$$

*а от контравариантных и ковариантных компонент тензора второго ранга – следующие:*

$$\nabla_K T^{IJ} = \frac{\partial T^{IJ}}{\partial X^K} + \tilde{\Gamma}_{KL}^I T^{JL} + \tilde{\Gamma}_{KL}^J T^{IL}, \quad (7.98)$$

$$\nabla_K T_{IJ} = \frac{\partial T_{IJ}}{\partial X^K} - \tilde{\Gamma}_{KI}^L T_{LJ} - \tilde{\Gamma}_{KJ}^L T_{LI}.$$

Здесь  $a_I$  и  $T^{IJ}$  – компоненты вектора и тензора на поверхности:

$$a = a_I \rho^I = a^I \rho_I, \quad T = T_{IJ} \rho^I \otimes \rho^J = T^{IJ} \rho_I \otimes \rho_J. \quad (7.99)$$

Аналогично определяются ковариантные производные на поверхности от других компонент.

Если в качестве  $T$  взять метрический тензор  $\tilde{E}$ , то будут иметь место важные формулы, являющиеся аналогом формулы Риччи (6.54) в трехмерном случае.

**Теорема 7.3.** Ковариантная производная на поверхности от компонент метрического тензора на поверхности равна нулю:

$$\nabla_K \tilde{g}^{IJ} = 0, \quad \nabla_K \tilde{g}_{IJ} = 0, \quad \nabla_K \tilde{g} = 0, \quad (7.100)$$

Доказательство этой теоремы оставим в качестве упр. 7.2.3.

Дифференцирование векторов и тензоров на поверхности отличается от трехмерного случая. В самом деле, например:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial X^K} &= \frac{\partial(a^I \rho_I)}{\partial X^K} = \frac{\partial a^I}{\partial X^K} \rho_I + a^I \rho_{IK} = \\ &= \frac{\partial a^I}{\partial X^K} \rho_I + a^I (\tilde{\Gamma}_{IK}^L \rho_L + b_{IK} \mathbf{n}) = (\nabla_K a^I) \rho_I + a^I b_{IK} \mathbf{n}, \end{aligned} \quad (7.101)$$

т.е. частная производная от вектора  $\mathbf{a}$  на поверхности уже не является "вектором на поверхности".

### 7.2.12. Условия интегрируемости

Вернемся теперь вновь к деривационным формулам (7.96) и посмотрим на них как на систему дифференциальных уравнений относительно векторов сопровождающего трехгранника  $\rho_I, \mathbf{n}$ . Очевидно, что эта система будет переопределена: она содержит пять векторных уравнений относительно трех векторных неизвестных, значит ее решение существует не всегда. Поскольку система имеет первый порядок производных относительно  $\rho_I, \mathbf{n}$ , то условием ее интегрируемости будет равенство вторых смешанных производных:

$$\frac{\partial^2 \rho_I}{\partial X^J \partial X^K} = \frac{\partial^2 \rho_I}{\partial X^K \partial X^J}, \quad (7.102)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{n}}{\partial X^I \partial X^K} = \frac{\partial^2 \mathbf{n}}{\partial X^K \partial X^I}. \quad (7.103)$$

Вычислим эти производные. Дифференцируя (7.96), получаем:

$$\frac{\partial}{\partial X^K} \rho_{IJ} = \frac{\partial \tilde{\Gamma}_{IJ}^L}{\partial X^K} \rho_L + \tilde{\Gamma}_{IJ}^L \rho_{LK} + \frac{\partial b_{IJ}}{\partial X^K} \mathbf{n} + b_{IJ} n_K, \quad (7.104)$$

$$\frac{\partial}{\partial X^K} n_I = - \frac{\partial b_I^J}{\partial X^K} \rho_J - b_I^J \rho_{JK}.$$

Подставляем сюда выражение для  $\rho_{LK}$  и  $n_K$  из (7.96), тогда имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial X^K} \rho_{IJ} &= \left( \frac{\partial \tilde{\Gamma}_{IJ}^M}{\partial X^K} + \tilde{\Gamma}_{IJ}^L \tilde{\Gamma}_{LK}^M - b_{IJ} b_K^M \right) \rho_M + \\ &+ \left( \frac{\partial b_{IJ}}{\partial X^K} + \tilde{\Gamma}_{IJ}^L b_{LK} \right) \mathbf{n}, \end{aligned} \quad (7.105)$$

$$\frac{\partial}{\partial X^K} n_I = - \left( \frac{\partial b_I^J}{\partial X^K} + \tilde{\Gamma}_{MK}^J b_I^M \right) \rho_L - b_I^J b_{JK} n. \quad (7.106)$$

Подставляя теперь (7.105), а также формулы (7.105) с заменой индексов  $J \leftrightarrow K$ , в условие интегрируемости (7.102), получаем уравнение, которое должно выполняться при любых  $\rho_M$  и  $n$ . Тогда приравнивая коэффициенты при  $\rho_K$  и  $n$  нулю, получаем условие интегрируемости (7.102) в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\Gamma}_{IJ}^M}{\partial X^K} + \tilde{\Gamma}_{IJ}^L \tilde{\Gamma}_{LK}^M - \frac{\partial \tilde{\Gamma}_{IK}^M}{\partial X^J} - \tilde{\Gamma}_{IK}^L \tilde{\Gamma}_{LJ}^M = \\ = b_{IJ} b_K^M - b_{IK} b_J^M, \end{aligned} \quad (7.107)$$

$$\frac{\partial b_{IJ}}{\partial X^K} - \frac{\partial b_{IK}}{\partial X^J} + \tilde{\Gamma}_{IJ}^L b_{LK} - \tilde{\Gamma}_{IK}^L b_{LJ} = 0. \quad (7.108)$$

Подставляя (7.106) в (7.103) и приравнивая коэффициенты при  $\rho_J$  и  $n$  нулю, получаем вторую группу условий интегрируемости:

$$\frac{\partial b_I^J}{\partial X^K} - \frac{\partial b_K^J}{\partial X^I} + \tilde{\Gamma}_{MK}^J b_I^M - \tilde{\Gamma}_{MI}^J b_K^M = 0, \quad (7.109)$$

$$b_I^J b_{JK} - b_K^J b_{JI} = 0. \quad (7.110)$$

Введем обозначение:

$$\tilde{R}_{KJI}{}^M = \frac{\partial \tilde{\Gamma}_{IJ}^M}{\partial X^K} - \frac{\partial \tilde{\Gamma}_{IK}^M}{\partial X^J} + \tilde{\Gamma}_{IJ}^L \tilde{\Gamma}_{LK}^M - \tilde{\Gamma}_{IK}^L \tilde{\Gamma}_{LJ}^M. \quad (7.111)$$

Компоненты  $\tilde{R}_{KJI}{}^M$  являются компонентами тензора  ${}^4\tilde{\mathbf{R}}$  четвертого ранга на поверхности  $\Sigma$  (см. упр. 7.2.16), называемого *тензором кривизны поверхности* или *тензором Римана-Кристоффеля*:

$${}^4\tilde{\mathbf{R}} = \tilde{R}_{KJI}{}^M \rho^K \otimes \rho^J \otimes \rho^I \otimes \rho_M = \tilde{R}_{KJIL} \rho^K \otimes \rho^J \otimes \rho^I \otimes \rho^M.$$

Полностью ковариантные компоненты тензора кривизны  $\tilde{R}_{KJIL}$  вычисляем путем умножения (7.111) на метрическую матрицу:

$$\tilde{R}_{KJIL} = \tilde{R}_{KJI}{}^M \tilde{g}_{ML}. \quad (7.112)$$

С учетом (7.111), (7.112), формулы (7.107) можно представить в виде:

$$b_{IJ} b_{KL} - b_{IK} b_{JL} = \tilde{R}_{KJIL}. \quad (7.113)$$

Уравнения (7.108) с учетом определения (7.98) ковариантной производной и симметрии символов Кристоффеля  $\tilde{\Gamma}_{KJ}^L = \tilde{\Gamma}_{JK}^L$  можно представить в виде:

$$\nabla_K b_{IJ} - \nabla_J b_{IK} = 0. \quad (7.114)$$

Заметим, что (7.113) содержит всего одно тождественно не равное нулю уравнение:

$$b_{12}^2 - b_{11}b_{22} = \tilde{R}_{1212}, \quad (7.115)$$

а (7.114) - два таких уравнения:

$$\nabla_1 b_{I2} - \nabla_2 b_{I1} = 0, \quad I = 1, 2. \quad (7.116)$$

Уравнение (7.115) называется *уравнением Гаусса*, а (7.116) - *уравнениями Петерсона-Кодадци*.

Рассмотрим теперь две оставшиеся группы условий интегрируемости (7.109) и (7.110). Уравнения (7.110) выполняются всегда, при любых комбинациях индексов, в чем можно убедиться непосредственно, перейдя к ковариантным компонентам:

$$g^{JM}(b_{IM}b_{JK} - b_{KM}b_{JI}) = 0. \quad (7.117)$$

В уравнениях (7.109) также перейдем к ковариантным компонентам  $b_{IJ}$ , произведем дифференцирование по частям и сгруппируем слагаемые следующим образом:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial b_{IM}}{\partial X^K} - \frac{\partial b_{KM}}{\partial X^I} \right) g^{MJ} + b_{IL} \left( \frac{\partial \tilde{g}^{LJ}}{\partial X^K} + \tilde{\Gamma}_{MK}^J \tilde{g}^{LM} \right) - \\ - b_{KL} \left( \frac{\partial \tilde{g}^{LJ}}{\partial X^I} + \tilde{\Gamma}_{MI}^J \tilde{g}^{LM} \right) = 0. \end{aligned} \quad (7.118)$$

Учитывая свойства (7.100) метрической матрицы, выражения в скобках во втором и третьем слагаемых преобразуем следующим образом:

$$\frac{\partial \tilde{g}^{LJ}}{\partial X^K} + \tilde{\Gamma}_{MK}^J \tilde{g}^{LM} = -\tilde{\Gamma}_{MK}^L g^{JM}, \quad (7.119)$$

тогда (7.118) будет иметь вид:

$$\left( \frac{\partial b_{IM}}{\partial X^K} - \frac{\partial b_{KM}}{\partial X^I} + \tilde{\Gamma}_{MI}^L b_{KL} - \tilde{\Gamma}_{MK}^L b_{IL} \right) g^{LM} = 0. \quad (7.120)$$

Сравнивая (7.120) с (7.108), заключаем, что условие интегрируемости (7.120), а значит и (7.109), удовлетворяются, если только выполнены условия (7.108).

Таким образом, условия (7.109) и (7.110) не вносят никаких новых уравнений дополнительно к уравнениям Гаусса и Петерсона-Кодадци (7.115), (7.116), и мы доказали следующую теорему.

**Теорема 7.4.** Необходимыми и достаточными условиями интегрируемости деривационных формул (7.96) относительно векторов сопровождающего трехгранника  $\rho_I$ ,  $n$  являются уравнения (7.115) и (7.116).

### 7.2.13. Основная теорема теории поверхностей

Зададимся теперь вопросом о возможности определения самой поверхности по известным функциям первой и второй квадратичных форм. На этот вопрос положительно отвечает следующая основная теорема теории поверхностей.

**Теорема 7.5.** Пусть заданы дважды непрерывно дифференцируемые функции

$$\tilde{g}_{IJ} = \tilde{g}_{IJ}(X^1, X^2) \quad (7.121)$$

и один раз непрерывно дифференцируемые функции:

$$b_{IJ} = b_{IJ}(X^1, X^2), \quad (7.122)$$

для которых выполнены условия интегрируемости Петерсона-Коддаци (7.116) и Гаусса (7.115), а также условие положительной определенности:

$$\tilde{g}_{IJ}\xi_I\xi_J > 0, \quad \xi_1^2 + \xi_2^2 \neq 0 \quad (7.123)$$

для всякого ненулевого вектора  $\xi_I$ , тогда существует поверхность в  $\mathbb{R}^3$

$$x = x(X^1, X^2) \quad (7.124)$$

трижды непрерывно дифференцируемая, для которой  $\tilde{g}_{IJ}$  и  $b_{IJ}$  являются коэффициентами первой и второй квадратичной форм.

Эта поверхность определена с точностью до перемещения в пространстве как жесткого целого.

▼ Для доказательства теоремы воспользуемся результатами п.7.2.12, из которых следует, что если выполнены условия интегрируемости (7.115) и (7.116), то деривационные уравнения (7.96) имеют решение относительно функций  $\rho_I$  и  $n$ , причем  $\rho_I$  обладает симметричной производной:

$$\frac{\partial \rho_I}{\partial X^J} = \frac{\partial \rho_J}{\partial X^I}. \quad (7.125)$$

Если теперь на (7.43) посмотреть как на систему уравнений относительно функций  $x(X^1, X^2)$ , то опять получим переопределенную систему первого порядка. Ее решение существует, если функции  $\rho_I$ , считающиеся известными, удовлетворяют условию (7.125). Но это условие действительно выполнено, как было отмечено выше, таким образом, существует вектор-функция (7.124), определяющая поверхность в трехмерном евклидовом пространстве. ▲

### Упражнения к § 7.2.

**Упражнение 7.2.1.** Используя формулы (7.46), (7.45) и (1.50), доказать соотношение (7.56а).

**Упражнение 7.2.2.** Используя формулу (7.67), показать, что координатные линии на поверхности  $\Sigma$  пересекаются под углом  $\chi$ :

$$\cos \chi = \frac{\tilde{g}_{12}}{\sqrt{\tilde{g}_{11}\tilde{g}_{22}}}, \quad \sin \chi = \sqrt{\frac{\tilde{g}}{\tilde{g}_{11}\tilde{g}_{22}}}.$$

**Упражнение 7.2.3.** Доказать формулы Риччи (7.100) в двумерном случае, используя определения (7.98) и (7.89).

**Упражнение 7.2.4.** Обозначим компоненты объекта  $\rho_{IJ}$  в декартовом базисе как

$$\rho_{IJ} = \rho_{IJ}^i \bar{e}_i, \quad \rho_{IJ}^i = \frac{\partial x^i}{\partial X^I \partial X^J}.$$

Показать, что из (7.77) следует формула для коэффициентов второй квадратичной формы:

$$b_{IJ} = \frac{1}{\sqrt{\tilde{g}}} \epsilon_{ijk} \rho_{IJ}^i \rho_1^j \rho_2^k.$$

**Упражнение 7.2.5.** Показать, что формулу, приведенную в упр. 7.2.4 можно представить также в виде:

$$b_{IJ} = \frac{1}{\sqrt{\tilde{g}}} \begin{vmatrix} \rho_{IJ}^1 & \rho_{IJ}^2 & \rho_{IJ}^3 \\ \rho_1^1 & \rho_1^2 & \rho_1^3 \\ \rho_2^1 & \rho_2^2 & \rho_2^3 \end{vmatrix}.$$

**Упражнение 7.2.6.** Явным способом задания поверхности называется случай, когда

$$\begin{cases} X^1 = x^1, \\ X^2 = x^2, \\ x^3 = x^3(x^1, x^2). \end{cases}$$

Показать, что при этом векторы локального базиса  $\rho_I$  имеют вид:

$$\rho_I = \bar{e}_I + \frac{\partial x^3}{\partial x^I} \bar{e}_3,$$

а метрическая матрица вычисляется следующим образом:

$$\tilde{g}_{\alpha\alpha} = 1 + \left( \frac{\partial x^3}{\partial x^\alpha} \right)^2, \quad \tilde{g}_{12} = \frac{\partial x^3}{\partial x^1} \frac{\partial x^3}{\partial x^2}, \quad \tilde{g} = 1 + \left( \frac{\partial x^3}{\partial x^1} \right)^2 + \left( \frac{\partial x^3}{\partial x^2} \right)^2.$$

**Упражнение 7.2.7.** Показать, что для поверхности эллипсоида вращения, заданной в неявной форме

$$\left(\frac{x^1}{a}\right)^2 + \left(\frac{x^2}{a}\right)^2 + \left(\frac{x^3}{c}\right)^2 = 1, \quad a^2 \geq c^2,$$

параметрическая форма имеет следующий вид:

$$x^1 = a \cos X^1 \sin X^2, \quad x^2 = a \sin X^1 \sin X^2, \quad x^3 = c \cos X^2.$$

**Упражнение 7.2.8.** Показать, что для эллипсоида вращения (см. упр. 7.2.7) матрицы коэффициентов локальных базисов  $\rho_J^i$  имеют следующий вид:

$$(\rho_J^i) = \begin{pmatrix} -a \sin X^1 \sin X^2 & a \cos X^1 \sin X^2 & 0 \\ a \cos X^1 \cos X^2 & a \cos X^1 \cos X^2 & -c \sin X^2 \end{pmatrix}.$$

**Упражнение 7.2.9.** Показать, что коэффициенты первой квадратичной формы для эллипсоида вращения имеют вид:

$$(\tilde{g}_{IJ}) = \begin{pmatrix} a^2 \sin^2 X^2 & 0 \\ 0 & a^2 \cos^2 X^2 + c^2 \sin^2 X^2 \end{pmatrix},$$

а обратная метрическая матрица имеет вид:

$$(\tilde{g}^{IJ}) = \begin{pmatrix} (a^2 \sin^2 X^2)^{-1} & 0 \\ 0 & (a^2 \cos^2 X^2 + c^2 \sin^2 X^2)^{-1} \end{pmatrix}.$$

**Упражнение 7.2.10.** Показать, что коэффициенты второй квадратичной формы для эллипсоида вращения имеют вид:

$$(b_{IJ}) = \frac{ac}{\sqrt{a^2 \cos^2 X^2 + c^2 \sin^2 X^2}} \begin{pmatrix} \sin^2 X^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Упражнение 7.2.11.** Поверхностью вращения называется поверхность, явное задание которой имеет вид:

$$(x^2)^2 + (x^3)^2 = f^2(x^1),$$

где  $f(x^1)$  - некоторая неотрицательная функция, ось  $Ox^3$  является осью вращения. Показать, что в параметрической форме поверхность вращения можно задать следующим образом:

$$\begin{cases} x^1 = X^1, \\ x^2 = f(X^1) \cos X^2, \\ x^3 = f(X^1) \sin X^2. \end{cases}$$

**Упражнение 7.2.12.** Показать, что матрица коэффициентов  $\rho_J^i$  локального базиса для поверхности вращения имеет вид:

$$(\rho_J^i) = \begin{pmatrix} 1 & f' \cos X^2 & f' \sin X^2 \\ 0 & -f \sin X^2 & f \cos X^2 \end{pmatrix},$$

где  $f' = \partial f / \partial X^1$ .

**Упражнение 7.2.13.** Показать, что метрические матрицы для поверхности вращения имеют вид:

$$(\tilde{g}_{IJ}) = \begin{pmatrix} 1 + f'^2 & 0 \\ 0 & f^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1/(1 + f'^2) & 0 \\ 0 & 1/f^2 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{g} = (1 + f'^2)f^2.$$

**Упражнение 7.2.14.** Показать, что для поверхности вращения коэффициенты  $\rho_{IJ}^i$  имеют вид:

$$\rho_{IJ}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho_{IJ}^2 = \begin{pmatrix} f'' \cos X^2 & -f' \sin X^2 \\ -f \sin X^2 & -f \cos X^2 \end{pmatrix},$$

$$\rho_{IJ}^3 = \begin{pmatrix} f'' \sin X^2 & f' \cos X^2 \\ f \cos X^2 & -f \sin X^2 \end{pmatrix}.$$

**Упражнение 7.2.15.** Используя результаты упражнений 7.2.5, 7.2.12 - 7.2.14, показать, что коэффициенты второй квадратичной формы для поверхности вращения имеют вид:

$$b_{11} = -\frac{f''}{f\sqrt{1+f'^2}}, \quad b_{22} = -\frac{f''}{f\sqrt{1+f'^2}}, \quad b_{12} = 0.$$

**Упражнение 7.2.16.** Используя формулу (7.113), показать, что компоненты  $R_{KJIL}$  действительно являются компонентами тензора четвертого ранга.

### § 7.3. Кривые на поверхностях

#### 7.3.1. Векторы нормальной и геодезической кривизны

Пусть имеется некоторая кривая  $\mathcal{L}$  на поверхности  $\Sigma$ , заданная параметрически как функция длины дуги:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(X^1(s), X^2(s)). \quad (7.126)$$

Используем аппарат, разработанный в § 7.1 для описания кривых в пространстве. Дифференцируя (7.126) по  $s$ , получим вектор касательной к кривой  $\mathcal{L}$ :

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{x}}{ds} = \rho_I \frac{dX^I}{ds}, \quad (7.127)$$

дифференцируя еще раз, получим вектор кривизны кривой  $\mathcal{L}$ :

$$\kappa = \frac{dt}{ds} = \rho_{IJ} \frac{dX^I}{ds} \frac{dX^J}{ds} + \rho_I \frac{d^2X^I}{ds^2}. \quad (7.128)$$

Здесь мы учли (7.43) и (7.74).

**ТЕОРЕМА 7.6.** Вектор кривизны  $\kappa$  к кривой на поверхности всегда можно однозначно представить в виде суммы двух ортогональных векторов, называемых вектором нормальной кривизны  $\kappa_n$  и вектором геодезической кривизны  $\kappa_g$  (рис. 7.11):

$$\kappa = \kappa_n + \kappa_g, \quad (7.129)$$

где

$$\kappa_n = k_n \mathbf{n}, \quad \kappa_g = k_g \mathbf{n} \times \mathbf{t}, \quad (7.130)$$

а  $k_n$  и  $k_g$  - некоторые коэффициенты.

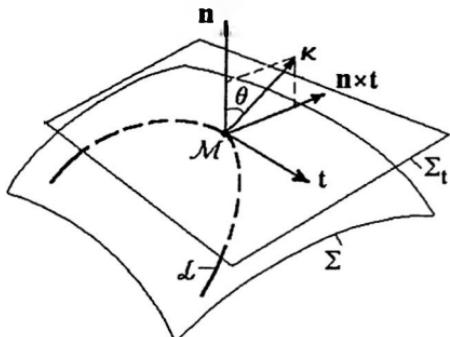


Рис. 7.11. К теореме 7.6

▼ Для доказательства утверждения (7.129) достаточно показать, что все три вектора  $\kappa$ ,  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{n} \times \mathbf{t}$  лежат в одной плоскости, тогда они являются линейно зависимыми, и один из них действительно можно выразить через два другие. Но все эти векторы ортогональны вектору касательной  $\mathbf{t}$ : вектор нормали  $\mathbf{n}$  - по определению ортогонален любому вектору из касательной плоскости  $\Sigma_t$ , в том числе к  $\mathbf{t}$ ; вектор  $\kappa = dt/ds$  ортогонален  $\mathbf{t}$  согласно (7.14); а  $\mathbf{n} \times \mathbf{t}$  ортогонален  $\mathbf{t}$  в силу свойств векторного произведения.

Тем самым, действительно, векторы  $\mathbf{n}$ ,  $\kappa$  и  $(\mathbf{n} \times \mathbf{t})$  лежат в одной плоскости, а значит разложение (7.129) имеет место. ▲

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.12.** Плоскость, содержащую вектор нормали  $\mathbf{n}$  и вектор касательной  $\mathbf{t}$  к кривой  $\mathcal{L}$ , называют плоскостью нормального сечения поверхности.

Заметим, что поскольку кривая  $\mathcal{L}$  на поверхности была выбрана произвольно, то через фиксированную точку  $M$  поверхности можно провести сколько угодно таких кривых. Следовательно, в одной и той же точке  $M$  существует бесконечное множество плоскостей нормального сечения, каждая из которых проходит через один и тот же вектор нормали  $\mathbf{n}$  и различные векторы касательной  $\mathbf{t}$ .

### 7.3.2. Нормальная и геодезическая кривизна кривой на поверхности

Выражая  $\kappa$  через вектор нормали  $\nu$  к кривой  $\mathcal{L}$ , запишем (7.129) в виде:

$$k\nu = k_n \mathbf{n} + k_g \mathbf{n} \times \mathbf{t}. \quad (7.130)$$

Умножая (7.130) скалярно на вектор  $\mathbf{n}$  или  $(\mathbf{n} \times \mathbf{t})$ , получим связь кривизны  $k$  с  $k_n$  и  $k_g$ :

$$k_n = k \cos \theta, \quad (7.131)$$

$$k_g = k \sin \theta, \quad (7.132)$$

$$\cos \theta = (\nu \cdot \mathbf{n}), \quad \sin \theta = \nu \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{t}), \quad (7.133)$$

где  $\theta$  - угол между соприкасающейся плоскостью кривой  $\mathcal{L}$  в данной точке и плоскостью нормального сечения.

Таким образом, из (7.131) и (7.132) проясняется смысл коэффициентов  $k_n$  и  $k_g$ : они характеризуют кривизну кривых, являющихся проекциями кривой  $\mathcal{L}$  на плоскость нормального сечения и соприкасающуюся плоскость в данной точке  $M$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.13.** Коэффициенты в представлении (7.130) называют  $k_n$  - кривизной нормального сечения или нормальной кривизной, а  $k_g$  - геодезической кривизной кривой  $\mathcal{L}$  на поверхности (7.131).

Радиусом нормальной кривизны  $r_n$  и геодезической кривизны  $r_g$  называют обратные к  $k_n$  и  $k_g$  величины:

$$r_n = \frac{1}{k_n}, \quad r_g = \frac{1}{k_g}. \quad (7.134)$$

Из формул (7.131) и (7.132) следует, что  $k_n$  и  $k_g$ , а также  $r_n$  и  $r_g$ , могут иметь как положительные, так и отрицательные значения, в зависимости от знака  $\cos \theta$  и  $\sin \theta$ . Напомним, что кривизна  $k$  кривой всегда неотрицательна.

Если проекция нормали кривой  $\nu$  на нормаль  $\mathbf{n}$  к поверхности отрицательна, то  $\cos \theta < 0$  и радиус нормальной кривизны  $r_n$  отрицателен.

Формула (7.131) составляет содержание следующей теоремы.

**ТЕОРЕМА 7.7 (МЕНЬЕ).** Нормальная кривизна  $k_n$  поверхности, которую имеет кривая  $\mathcal{L}$  на плоскости нормального сечения равна кривизне  $k$  этой кривой, умноженной на косинус угла  $\theta$ .

Из этой теоремы также следует, что если провести через данную точку  $M$  кривой  $\mathcal{L}$  плоскость наклонного сечения, проходящую через вектор касательной  $\mathbf{t}$  и составляющую некоторый угол  $\cos \theta'$  с плоскостью нормального сечения, то кривизна  $k'$  наклонного сечения будет связана с  $k_n$  формулой:

$$k_n = k' \cos \theta'. \quad (7.135)$$

Получим еще одну формулу для нормальной кривизны  $k_n$ . Подставляя (7.133) и (7.128) в (7.131):

$$k_n = k \nu \cdot \mathbf{n} = \frac{dt}{ds} \cdot \mathbf{n} = \rho_{IJ} \cdot \mathbf{n} \frac{dX^I}{ds} \frac{dX^J}{ds}, \quad (7.136)$$

а затем выражая  $\rho_{IJ} \cdot \mathbf{n}$  согласно (7.75) через  $b_{IJ}$ , а  $ds^2$  согласно (7.61) через  $g_{IJ}$ , получим:

$$k_n = \frac{b_{IJ} dX^I dX^J}{\tilde{g}_{IJ} dX^I dX^J}. \quad (7.137)$$

Таким образом, пришли к следующему утверждению.

**Теорема 7.8.** Кривизна  $k_n$  нормального сечения поверхности  $\Sigma$  в точке  $(X^1, X^2)$ , плоскость которого проходит через бесконечно близкую точку этой поверхности с координатами  $(X^1 + dX^1, X^2 + dX^2)$ , равна отношению второй и первой квадратичной форм, построенных на приращениях координат  $dX^I$ .

Очевидно, что меняя направление касательной в данной точке  $(X^1, X^2)$  (т.е. меняя значение  $dX^I$ ), получаем различные значения  $k_n$ .

Обозначая вторую квадратичную форму как

$$d^2\varphi = b_{IJ} dX^I dX^J, \quad (7.138)$$

формулу (7.137) можно записать в виде:

$$k_n = d^2\varphi/ds^2. \quad (7.139)$$

Можно также представить (7.137) следующим образом:

$$(b_{IJ} - k_n \tilde{g}_{IJ}) dX^I dX^J = 0. \quad (7.140)$$

### 7.3.3. Главные кривизны поверхности

Таким образом, в каждой точке поверхности  $\mathcal{M}$  существует бесконечно много нормальных кривизн  $k_n$ , но оказывается среди них существуют две преимущественные кривизны. Для их установления рассмотрим тензор второй квадратичной формы  $\mathbf{B}$  (7.80) с коэффициентами  $b_{IJ}$ . Так как  $\mathbf{B}$  является симметричным тензором второго ранга и определен на поверхности (т.е. в двумерном пространстве), то согласно § 1.6 у него имеется два действительных собственных значения  $k_1$  и  $k_2$  и собственный базис из двух взаимно-ортонормированных векторов  $\overset{\circ}{\rho}_I$ , т.е.  $\mathbf{B}$  можно представить в диагональном виде:

$$\mathbf{B} = b_{IJ} \rho^I \otimes \rho^J = \sum_{\alpha=1}^2 k_\alpha \overset{\circ}{\rho}_\alpha \otimes \overset{\circ}{\rho}_\alpha, \quad (7.141)$$

причем  $|\overset{\circ}{\rho}_I| = 1$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.14.** Направления, касательными к которым являются векторы  $\overset{\circ}{\rho}_I$ , называют главными.

Если известны коэффициенты квадратичных форм  $b_{IJ}$  и  $\tilde{g}_{IJ}$  в каком-либо базисе  $\rho^I$ , то собственные значения  $k_\alpha$  тензора  $\mathbf{B}$  находим из характеристического уравнения:

$$\det (\mathbf{B} - k_\alpha \tilde{\mathbf{E}}) = 0, \quad (7.142)$$

или

$$\det (b_{IJ} - k_\alpha \tilde{g}_{IJ}) = 0, \quad \alpha = 1, 2;$$

или в матричной записи

$$\begin{vmatrix} b_{11} - k_\alpha \tilde{g}_{11} & b_{12} - k_\alpha \tilde{g}_{12} \\ b_{12} - k_\alpha \tilde{g}_{12} & b_{22} - k_\alpha \tilde{g}_{22} \end{vmatrix} = 0. \quad (7.142')$$

Выберем теперь в точке  $\mathcal{M}$  новую локальную систему координат  $X^{I'}$ :

$$X^{I'} = X^{I'}(X^J), \quad (7.143)$$

локальный базис которой  $\rho'_I$  совпадает с  $\overset{\circ}{\rho}_I$ . В этом локальном базисе в силу ортонормированности  $\overset{\circ}{\rho}_I$  метрическая матрица  $\tilde{g}'_{IJ}$  оказывается единичной:

$$\tilde{\mathbf{E}} = \tilde{g}'_{IJ} \overset{\circ}{\rho}_I \otimes \overset{\circ}{\rho}_J,$$

$$\tilde{g}'_{IJ} = \rho_I \cdot \rho_J = \overset{\circ}{\rho}_I \cdot \overset{\circ}{\rho}_J = \delta_{IJ}, \quad (7.144)$$

базис  $\rho^I$  также совпадает с  $\overset{\circ}{\rho}_I$ , а вторая квадратичная форма  $b'_{IJ}$  согласно (7.141) является диагональной:

$$b'_{II} = k_I, \quad b'_{12} = 0. \quad (7.145)$$

Выберем также в качестве бесконечно близкой к  $\mathcal{M}$  точку  $\mathcal{M}_1$  с координатами  $(X^{1'} + dX^{1'}, X^{2'})$ . Тогда подставляя (7.142) и (7.145) в (7.137), получаем, что кривизна нормального сечения, проходящего через точки  $\mathcal{M}$  и  $\mathcal{M}_1$ , вычисляется по формуле:

$$k_n^{(1)} = \frac{b'_{11}(dX^{1'})^2}{\tilde{g}'_{11}(dX^{1'})^2} = k_1. \quad (7.146)$$

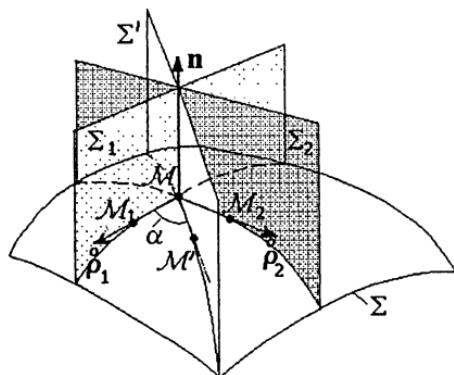
Выбирая нормальное сечение, проходящее через точки  $\mathcal{M}$  и  $\mathcal{M}_2$  с координатами  $(X^{1'}, X^{2'} + dX^{2'})$ , совершенно аналогично получим, что

$$k_n^{(2)} = k_2. \quad (7.147)$$

Таким образом, доказана теорема.

**Теорема 7.9.** Два собственных значения  $k_I$  тензора второй квадратичной формы  $\mathbf{B}$  представляют собой кривизны двух нормальных сечений, плоскости которых проходят через бесконечно близкие точки  $M_1$  и  $M_2$ , лежащие на собственных направлениях  $\rho_I$  тензора  $\mathbf{B}$  (или, иначе говоря, через векторы касательной  $t$ , совпадающие с  $\rho_I$ ).

**Определение 7.15.** Собственные значения  $k_I$  тензора  $\mathbf{B}$   $k_1$  и  $k_2$  называют главными кривизнами поверхности.



Плоскости нормальных сечений, соответствующие главным кривизнам  $k_I$ , т.е. проходящим через точки

$M, M_1$  и  $M, M_2$ ,

называют главными нормальными сечениями  $\Sigma_I$ .

Выберем теперь нормальное сечение  $\Sigma'$ , проходящее через бесконечно близкую к  $M$  точку  $M'$  с координатами

$$(X^{1\prime} + dX^{1\prime}, X^{2\prime} + dX^{2\prime}),$$

Рис. 7.12. Нормальные сечения поверхности

тогда кривизна  $k_n^I$  этого нормального сечения согласно (7.137) будет иметь вид:

$$k_{11} = \frac{b'_{11}(dX^{1\prime})^2 + b'_{22}(dX^{2\prime})^2}{\tilde{g}'_{11}(dX^{1\prime})^2 + \tilde{g}'_{22}(dX^{2\prime})^2}. \quad (7.148)$$

Так как метрическая матрица  $\tilde{g}'_{11}$  - единична, то вводя угол  $\alpha$  между главным нормальным сечением  $\Sigma_1$  и сечением  $\Sigma'$  (рис. 7.12), формулу (7.148) можно записать в виде:

$$k_n = k_1 \cos^2 \alpha + k_2 \sin^2 \alpha, \quad (7.149)$$

где

$$\cos \alpha = \frac{dX^{1\prime}}{\sqrt{(dX^{1\prime})^2 + (dX^{2\prime})^2}}, \quad \sin \alpha = \frac{dX^{2\prime}}{\sqrt{(dX^{1\prime})^2 + (dX^{2\prime})^2}}. \quad (7.150)$$

Таким образом, мы пришли к следующей теореме.

**ТЕОРЕМА 7.10.** Кривизна  $k_n$  произвольного нормального сечения поверхности связана с главными кривизнами поверхности по формуле (7.149), которую называют формулой Эйлера.

**ТЕОРЕМА 7.11.** В направлениях главных кривизн кривизна нормального сечения поверхности  $k_n$  принимает экстремальные (максимальное и минимальное) значения, равные  $k_1$  и  $k_2$ .

▼ В самом деле, пусть для определенности  $k_1 \geq k_2$ . Рассмотрим  $k_n$  как функцию угла  $\alpha$ , тогда из формулы Эйлера следует:

$$k_n(\alpha) = (k_1 - k_2) \cos^2 \alpha + k_2. \quad (7.151)$$

Отсюда следует, что

$$\forall \alpha \quad k_2 = k_n\left(\frac{\pi}{2}\right) \leq k_n(\alpha) \leq k_n(0) = k_1,$$

это и доказывает утверждение. ▲

### 7.3.4. Гауссова и средняя кривизны

Тензор второй квадратичной формы  $B$ , как всякий двумерный симметричный тензор второго ранга, имеет два независимых инварианта относительно группы преобразований координат, порождаемой (7.143). В качестве этих инвариантов могут быть выбраны главные кривизны  $k_I$ . Важную роль играют два других инварианта тензора  $B$ :

$$H(B) = \frac{1}{2} B \cdot \tilde{E}, \quad (7.152)$$

$$K(B) = \det(B) = \det(b_I^J).$$

Записывая эти инварианты в собственном базисе  $\overset{\circ}{\rho}_I$  тензора  $B$ , получим из (7.141), (7.144):

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^2 k_\alpha (\overset{\circ}{\rho}_\alpha \otimes \overset{\circ}{\rho}_\alpha) \cdot \sum_{\beta=1}^2 (\overset{\circ}{\rho}_\beta \otimes \overset{\circ}{\rho}_\beta) = k_1 + k_2, \quad (7.153)$$

$$K = \det \left( \sum_{\alpha=1}^2 k_\alpha \overset{\circ}{\rho}_\alpha \otimes \overset{\circ}{\rho}_\alpha \right) = k_1 k_2.$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

**Теорема 7.12.** Инвариант  $H$  тензора второй квадратичной формы  $B$  есть полу сумма главных кривизн, и поэтому называется средней кривизной поверхности, а инвариант  $K(B)$  - есть произведение главных кривизн, и называется полной или гауссовой кривизной.

Записывая эти инварианты через компоненты тензоров в произвольной системе координат  $X^I$ , получаем:

$$H = \frac{1}{2} b_{IJ} \tilde{g}^{IJ} = \frac{1}{2} b_I^I = \frac{1}{2\tilde{g}} (b_{11}\tilde{g}_{22} + b_{22}\tilde{g}_{11} - 2b_{12}\tilde{g}_{12}),$$

$$K = \det(b_{IK}\tilde{g}^{KJ}) = \frac{1}{\tilde{g}} \det(b_{IK}) = \frac{b}{\tilde{g}}, \quad (7.154)$$

где

$$b = \det(b_{IK}) = b_{11}b_{22} - b_{12}^2. \quad (7.155)$$

Вспомним теперь, что согласно уравнению Гаусса (7.115)  $b$  выражается через компоненту тензора кривизны  $\tilde{R}_{1212}$ , тогда (7.154) можно записать в виде:

$$K = -\tilde{R}_{1212}/\tilde{g}. \quad (7.156)$$

Из формулы (7.156) следует теорема.

**Теорема 7.13 (основная теорема Гаусса (THEOREMA EGREGIUM)).** Гауссова кривизна поверхности  $K$  зависит только от коэффициентов первой квадратичной формы поверхности  $\tilde{g}_{IJ}$  и их первых и вторых производных.

▼ Действительно, так как  $\tilde{R}_{1212}$  согласно (7.111) выражается только через  $\tilde{\Gamma}_{IJ}^M$  и их производные, а символы Кристоффеля, в свою очередь, только через  $\tilde{g}_{IJ}$  и их производные, то из (7.156) вытекает утверждение теоремы. ▲

Из основной теоремы Гаусса следует, что кривизна  $K$  поверхности может быть определена только по измерениям на поверхности без выхода в окружающее пространство  $\mathbb{R}^3$ .

### 7.3.5. Классификация точек поверхности

Зафиксируем теперь какую-либо точку  $M$  с координатами  $(X^1, X^2)$  на поверхности  $\Sigma$  и возьмем произвольную бесконечно близкую к ней точку  $M'$  с координатами  $(X^1 + dX^1, X^2 + dX^2)$ , соединенную с  $M$  некоторой кривой  $L$ . Кривизна нормального сечения  $k_n$ , плоскость которого проходит через нормаль к поверхности в точке  $M$  и точку  $M'$ , вычисляется по формуле (7.137). Нас будет интересовать вопрос о значениях  $k_n$ , если кривую  $L$  выпускать из точки  $M$  во всех возможных направлениях.

Поскольку в знаменателе (7.137) стоит квадрат длины дуги кривой  $ds^2$ , то он всегда положителен, и знак  $k_n$  определяется знаком числителя. В числителе же стоит вторая квадратичная форма:

$$d^2\varphi = b_{IJ}(X^1, X^2)dX^I dX^J, \quad (7.157)$$

которая при фиксированных значениях  $X^I$  и переменных  $dX^I$  представляет собой алгебраическую поверхность второго порядка (тензорную поверхность Коши) в пространстве  $(dX^1, dX^2)$ . Вид этой поверхности зависит от детерминанта:

$$\det(b_{IJ}) = b = b_{11}b_{22} - b_{12}^2. \quad (7.158)$$

Если  $b > 0$ , то знак этой формы при любых значениях  $dX^I$  всегда одинаков, следовательно, кривизна  $k_n$  любого нормального сечения имеет один и тот же знак. Такая точка  $\mathcal{M}$  поверхности называется *эллиптической*.

Если  $b < 0$ , то знак формы (7.157) меняется при произвольных значениях  $dX^I$ , следовательно, в данной точке  $\mathcal{M}$  имеются нормальные сечения с противоположными значениями кривизны  $k_n$ . Такая точка  $\mathcal{M}$  называется *гиперболической*.

Если  $b = 0$ , то форма (7.157) представляет собой полный квадрат и, следовательно,  $k_n$  не меняет знака для всех  $dX^I$ , т.е. при произвольных нормальных сечениях. Однако имеется одно положение нормального сечения, при котором  $k_n$  обращается в нуль. Такая точка  $\mathcal{M}$  поверхности называется *параболической*.

Если  $b_{IJ} = 0$ , то кривизна  $k_n$  для всех  $dX^I$  равна нулю, и поверхность в окрестности точки  $\mathcal{M}$  представляет собой плоскость. Такая точка  $\mathcal{M}$  называется *точкой уплощения*.

Точка поверхности, в которой нормальные кривизны  $k_n$  одинаковы для всех нормальных сечений, называется *омбилической* (или точкой закругления). Для омбилической точки главные кривизны совпадают  $k_1 = k_2$ .

Поскольку  $\tilde{g} > 0$ , то согласно (7.154) знак  $b$  полностью определяет знак гауссовой кривизны  $K$ , следовательно:

- в эллиптической точке:  $K > 0$ ;
- в гиперболической точке:  $K < 0$ ;
- в параболической точке:  $K = 0$ .

### 7.3.6. Индикатриса Дюпена

Рассмотрим произвольную точку  $\mathcal{M}$  поверхности  $\Sigma$  и построим касательную плоскость  $\Sigma_t$  в этой точке. В касательной плоскости  $\Sigma_t$  в малой окрестности точки  $\mathcal{M}$  построим вспомогательную кривую  $\mathcal{L}_D$  (рис.7.13) следующим образом: расстояние от точки  $\mathcal{M}$  до любой точки  $\mathcal{M}'$  на кривой  $\mathcal{L}_D$  равно  $\sqrt{\pm r_n}$ , где  $r_n$  - радиус кривизны нормального сечения, плоскость которого проходит через точку  $\mathcal{M}$  и точку

$M'$ . Знак  $(\pm)$  выбираем так, чтобы под радикалом была положительная величина.

Кривая  $L_D$ , построенная таким образом, называется индикатрисой Дюпена. Получим ее уравнение.

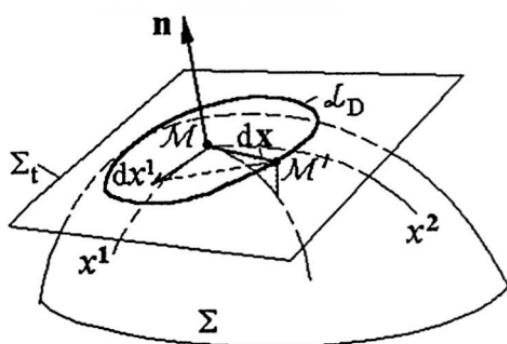


Рис. 7.13. К уравнению индикатрисы Дюпена

Обозначим координаты точки  $M$  на поверхности как  $(X^1, X^2)$ , а координаты точки  $M'$  как

$$(X^1 + dX^1, X^2 + dX^2).$$

Расстояние между этими точками  $ds$  вычисляем как длину радиуса-вектора  $dx$ , связывающего точки  $M$  и  $M'$ :

$$ds = \rho_I dX^I, \quad (7.159)$$

тогда

$$d^2s = dx \cdot dx = \tilde{g}_{IJ} dX^I dX^J. \quad (7.160)$$

Согласно определению индикатрисы Дюпена это расстояние равно  $ds = \sqrt{\pm r_n}$ . Тогда имеем:

$$\tilde{g}_{IJ} dX^I dX^J = \pm r_n. \quad (7.161)$$

Причем при  $r_n > 0$  следует брать знак "+", а при  $r_n < 0$  - знак "-". Или, переходя к нормальной кривизне  $k_n$ , получаем

$$k_n \tilde{g}_{IJ} dX^I dX^J = \pm 1. \quad (7.162)$$

Это и есть искомое уравнение индикатрисы Дюпена.

Поскольку всегда в малой окрестности точки  $M$  поверхности выполнено кроме того уравнение (7.140), то из (7.162) получаем еще одну форму записи индикатрисы Дюпена:

$$b_{IJ} dX^I dX^J = \pm 1. \quad (7.163)$$

В главных осях  $(X'^1, X'^2)$  тензора  $B$  это уравнение будет иметь вид:

$$k_1(dX'^1)^2 + k_2(dX'^2)^2 = \pm 1. \quad (7.164)$$

Отсюда следует, что если точка  $M$  является эллиптической, то индикатриса Дюпена есть эллипс, и в правой части следует брать определенный знак ("+" или "-" в зависимости от знака  $k_1$ ). Если точка

$\mathcal{M}$  является гиперболической, то индикатриса Дюпена представляет собой две сопряженные гиперболы.

Если точка  $\mathcal{M}$  - параболическая, то, как было показано в п.7.3.5, для нее хотя бы одна из главных кривизн равна нулю, тогда из (7.164) получаем:

$$(dX'^\beta)^2 = \pm \frac{1}{k_\beta}, \quad \beta \neq \alpha. \quad (7.165)$$

Знак в правой части (7.165) в этом случае не меняется для всей кривой и выбирается "+", если  $k_\beta > 0$ , или "-", если  $k_\beta < 0$ . Обозначим  $\pm k = 1/l^2$ , тогда из (7.165) получим:

$$dX'^\beta = \pm l. \quad (7.166)$$

Это есть уравнение двух параллельных прямых в окрестности точки  $\mathcal{M}$ .

Во всех трех случаях точка  $\mathcal{M}$  является центром симметрии кривой Дюпена.

### 7.3.7. Линии кривизны

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.16.** *Линиями кривизны называют такие кривые*

$$\mathbf{x}_I = \mathbf{x}(X_I^1(\xi), X_I^2(\xi)), \quad I = 1, 2 \quad (7.167)$$

*на поверхности  $\Sigma$ , направления касательных к которым в каждой точке совпадают с одним из направлений главной кривизны.*

В (7.167) функции  $X_I^J(\xi)$  обозначают криволинейные координаты  $X^J$ , изменяющиеся вдоль кривой в зависимости от некоторого параметра  $\xi$  и соответствующие  $I$ -ой линии кривизны. Поскольку направления главной кривизны соответствуют направлениям собственных векторов  $\overset{\circ}{\rho}_I$  тензора  $B$ , то будем иметь два семейства линий кривизны на поверхности, причем эти семейства взаимно ортогональны.

Получим дифференциальное уравнение линий кривизны. Согласно определению этих линий, направление касательной к ним, определяемое вектором  $d\mathbf{x}/d\xi$ , пропорционально главному направлению, задаваемому вектором  $\overset{\circ}{\rho}_I$ , т.е.

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial X^J} \frac{\partial X_I^J}{\partial \xi} = \gamma \overset{\circ}{\rho}_I, \quad (7.168)$$

где  $\gamma$  - коэффициент пропорциональности.

Разложим векторы  $\gamma \overset{\circ}{\rho}_I$  по локальному базису  $\rho_I$ :

$$\gamma \overset{\circ}{\rho}_I = \lambda_I^J \rho_J, \quad (7.169)$$

где  $\lambda_I^J$  - некоторая матрица коэффициентов. В силу того, что и  $\rho_I$ , и  $\overset{\circ}{\rho}_I$  лежат в касательной плоскости к поверхности, разложение (7.169) действительно имеет место.

Тогда (7.168) с учетом (7.169) и (7.43) можно представить в виде:

$$\frac{\partial X_I^J}{\partial \xi} \rho_J = \lambda_I^J \rho_J, \quad (7.170)$$

или

$$\partial X_I^J / \partial \xi = \lambda_I^J. \quad (7.171)$$

Это и есть дифференциальное уравнение двух линий кривизны:  $I = 1, 2$ . Их также можно записать в виде:

$$\frac{dX_\alpha^1}{dX_\alpha^2} = \frac{\lambda_\alpha^1}{\lambda_\alpha^2} \equiv \hat{\lambda}_\alpha, \quad \alpha = 1, 2. \quad (7.172)$$

Функции  $\hat{\lambda}_\alpha$  можно выразить через коэффициенты первой и второй квадратичных форм. В самом деле, для нахождения собственных векторов  $\overset{\circ}{\rho}_\alpha$  тензора  $\mathbf{B}$  имеем уравнение:

$$(\mathbf{B} - k_\alpha \tilde{\mathbf{E}}) \cdot \overset{\circ}{\rho}_\alpha = 0. \quad (7.173)$$

Или в компонентах, используя (7.169):

$$(b_{IJ} - k_\alpha \tilde{g}_{IJ}) \lambda_\alpha^J = 0. \quad (7.174)$$

Независимое уравнение в (7.174) только одно, например:

$$(b_{11} - k_\alpha \tilde{g}_{11}) \hat{\lambda}_\alpha + (b_{12} - k_\alpha \tilde{g}_{12}) = 0. \quad (7.175)$$

Главные кривизны  $k_\alpha$  являются собственными значениями тензора  $\mathbf{B}$  и определяются из (7.142):

$$(b_{11} - k_\alpha \tilde{g}_{11})(b_{22} - k_\alpha \tilde{g}_{22}) - (b_{12} - k_\alpha \tilde{g}_{12})^2 = 0. \quad (7.176)$$

Выражая из (7.175)  $k_\alpha$  через  $\hat{\lambda}_\alpha$  и подставляя их в (7.176), получим квадратное уравнение для нахождения  $\hat{\lambda}_\alpha$ :

$$(\tilde{g}_{11}b_{12} - \tilde{g}_{12}b_{11})\hat{\lambda}_\alpha^2 + (\tilde{g}_{22}b_{11} - \tilde{g}_{11}b_{22})\hat{\lambda}_\alpha + \tilde{g}_{22}b_{12} - \tilde{g}_{12}b_{22} = 0, \quad (7.177)$$

решая которое, находим два значения  $\hat{\lambda}_1$  и  $\hat{\lambda}_2$  через коэффициенты форм  $\tilde{g}_{JJ}$  и  $b_{IJ}$ .

### 7.3.8. Геодезические линии

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.17.** Геодезическими линиями (или просто геодезическими) называют такие кривые на поверхности  $\Sigma$ , у которых в каждой точке нормаль к кривой совпадает с нормалью к поверхности.

Уравнение геодезической удобно задать в параметрическом виде (7.126). Получим дифференциальное уравнение геодезической линии.

Из определения геодезической следует, что для нее в каждой точке выполняется соотношение:

$$\mathbf{n} = \nu,$$

или

$$k\mathbf{n} = \kappa. \quad (7.178)$$

Воспользуемся теперь разложением (7.129) для вектора кривизны  $\kappa$  кривой по поверхности, тогда (7.178) можно представить в виде:

$$k\mathbf{n} = k_n \mathbf{n} + \kappa_g. \quad (7.179)$$

Поскольку вектор  $\kappa_g$  ортогонален к  $\mathbf{n}$ , то из уравнения (7.179) следует, что

$$\kappa_g = k_g \nu \equiv 0, \quad k = k_n, \quad k_g = 0, \quad (7.180)$$

т.е. вектор геодезической кривизны вдоль геодезической линии равен нулю, а кривизна геодезической совпадает со своей нормальной кривизной. Геодезическая кривизна  $k_g$  также равна нулю.

Подставим теперь в (7.179) вместо  $\kappa$  его выражение (7.128):

$$\rho_{IJ} \frac{dX^I}{ds} \frac{dX^J}{ds} + \rho_I \frac{d^2 X^I}{ds^2} = k_n \mathbf{n}, \quad (7.181)$$

и воспользуемся деривационными формулами (7.81), тогда

$$\tilde{\Gamma}_{IJ}^K \frac{dX^I}{ds} \frac{dX^J}{ds} \rho_K + b_{IJ} \frac{dX^I}{ds} \frac{dX^J}{ds} \mathbf{n} + \rho_I \frac{d^2 X^I}{ds^2} = k_n \mathbf{n}. \quad (7.182)$$

Учитывая, что для нормальной кривизны  $k_n$  имеет место формула (7.137), в которой  $ds^2 = \tilde{g}_{IJ} dX^I dX^J$ , получаем окончательно:

$$\frac{d^2 X^K}{ds^2} + \tilde{\Gamma}_{IJ}^K \frac{dX^I}{ds} \frac{dX^J}{ds} = 0 \quad (7.183)$$

– дифференциальное уравнение геодезической линии.

### 7.3.9. Асимптотические линии

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.18.** Асимптотической линией называют кривую на поверхности  $\Sigma$ , нормальная кривизна которой  $k_n$  в каждой точке равна нулю.

Направления касательных к асимптотическим линиям называются асимптотическими направлениями поверхности.

Из определения следует, что вдоль асимптотической линии согласно (7.137) вторая квадратичная форма равна нулю:

$$b_{IJ} dX^I dX^J = 0. \quad (7.184)$$

Отсюда, в частности, получаем дифференциальное уравнение асимптотической линии:

$$b_{11} \left( \frac{dX^1}{dX^2} \right)^2 + 2b_{12} \frac{dX^1}{dX^2} + b_{22} = 0. \quad (7.185)$$

Из определения эллиптических точек поверхности (п. 7.3.5,  $b > 0$ ) следует, что в них не может быть действительных решений уравнения (7.185), т.е. асимптотические линии - только мнимые.

В гиперболической точке знак квадратичной формы (7.185) меняется, поэтому имеются два различных действительных асимптотических направления.

В параболической точке одно направление, в котором  $k_n = 0$  и имеется единственное решение уравнения (7.185). Следовательно, в параболической точке есть одно асимптотическое направление, которое совпадает с направлением касательной к главному нормальному сечению, имеющему нулевую кривизну.

### 7.3.10. Примеры поверхностей

До сих пор мы говорили о свойствах поверхностей в окрестности локальной точки. Рассмотрим теперь с помощью введенных характеристик - инвариантов  $K$  и  $H$  - примеры описания поверхностей в целом.

Если в каждой точке поверхности инвариант  $H \equiv 0$ , то такая поверхность называется *минимальной*. Для нее, очевидно, главные кривизны равны и имеют разный знак. Свое название минимальная поверхность получила из-за следующего свойства. Пусть имеется некоторая замкнутая кривая в пространстве (контура). Можно бесконечным числом способов построить поверхность в виде односвязной области, край которой был бы ограничен данной кривой, но наименьшей площадью будет обладать именно минимальная поверхность.

Поверхность, для которой инвариант  $K$  одинаков во всех точках  $K = \text{const}$ , называется *поверхностью постоянной кривизны*.

### Упражнения к § 7.3.

**Упражнение 7.3.1.** Используя (7.142) и (7.154), (7.155), показать, что главные кривизны  $k_\alpha$  являются корнями следующего квадратного уравнения:

$$k_\alpha^2 - 2Hk_\alpha + K = 0.$$

**Упражнение 7.3.2.** Показать, что матрица коэффициентов  $\lambda_I^J$  ортонормированных собственных векторов  $\rho_I^0$  может быть вычислена с помощью следующей системы уравнений:

$$\lambda_\alpha^1 / \lambda_\alpha^2 = \hat{\lambda}_\alpha, \quad \tilde{g}_{IJ} \lambda_\alpha^I \lambda_\alpha^J = 1, \quad \alpha = 1, 2,$$

где  $\hat{\lambda}_\alpha$  определяется из уравнения (7.177).

**Упражнение 7.3.3.** Показать, что каждая точка минимальной поверхности является либо точкой уплощения, либо гиперболической точкой.

**Упражнение 7.3.4.** Показать, что для минимальной поверхности и только для нее асимптотические линии образуют ортогональную сетку.

**Упражнение 7.3.5.** Показать, что для сферы и только для нее все точки поверхности являются омбилическими.

**Упражнение 7.3.6.** Доказать, что координатные линии  $X^I = \text{const}$  являются линиями кривизны тогда и только тогда, когда

$$b_{12} = 0, \quad g_{12} = 0$$

вдоль этих линий.

**Упражнение 7.3.7.** Доказать, что координатные линии тогда и только тогда являются асимптотическими линиями, когда вдоль них

$$b_{12} = 0, \quad g_{12} = 0.$$

**Упражнение 7.3.8.** Показать, что если координатные линии  $X^I = \text{const}$  являются линиями кривизны, то главные кривизны вычисляются по формуле:

$$k_\alpha = b_{\alpha\alpha} / g_{\alpha\alpha}, \quad \alpha = 1, 2.$$

**Упражнение 7.3.9.** Показать, что для эллипсоида вращения (см. упр. 7.2.7-7.2.10) главные кривизны вычисляются по формулам:

$$k_1 = \frac{c}{a\sqrt{a^2 \cos^2 X^2 + c^2 \sin^2 X^2}},$$

$$k_2 = \frac{ac}{(a^2 \cos^2 X^2 + c^2 \sin^2 X^2)^{3/2}}.$$

**Упражнение 7.3.10.** Показать, что для эллипсоида вращения (см. упр. 7.2.7-7.2.10) меридианы (кривые  $X^1 = \text{const}$ ) и параллели (кривые  $X^2 = \text{const}$ ) являются линиями кривизны, главные направления совпадают с касательными к меридиану и параллели, гауссова кривизна вычисляется следующим образом:

$$K = c^2 / (a^2 \cos^2 X^2 + c^2 \sin^2 X^2)^2,$$

и все точки поверхности – эллиптические.

**Упражнение 7.3.11.** Показать, что для поверхности вращения (см. упр.7.2.11-7.2.14) главные кривизны вычисляются следующим образом:

$$k_1 = -\frac{f''}{f(1+f'^2)^{3/2}}, \quad k_2 = \frac{1}{f\sqrt{1+f'^2}},$$

а гауссова кривизна – по формуле:

$$K = -\frac{f''}{f^2(1+f'^2)^2}.$$

**Упражнение 7.3.12.** Показать, что для каждой точки  $(X^1, X^2)$  поверхности вращения справедливы следующие утверждения:

- если  $f''(x) < 0$ , то это эллиптическая точка;
- если  $f''(x) > 0$ , то это гиперболическая точка;
- если  $f''(x) = 0$ , то это параболическая точка.

**Упражнение 7.3.13.** Показать, что если для поверхности вращения  $f'' = 0$  (конус или цилиндр) в каждой точке, то у нее имеется единственное семейство асимптотических линий:  $X^2 = \text{const.}$

**Упражнение 7.3.14.** Доказать, что у эллипсоида вращения нет асимптотических линий.

## § 7.4. Геометрия в окрестности поверхности

### 7.4.1. Определение окрестности поверхности

Во многих задачах механики требуется описание физических свойств трехмерного объекта, у которого один из характерных размеров много меньше двух других. Такие трехмерные тела называются *оболочками*, а математически их удобно рассматривать как окрестность некоторой фиксированной поверхности  $\Sigma$ , задаваемой параметрически как и ранее некоторой вектор-функцией, но для которой будем в этом параграфе использовать специальное обозначение:

$$\rho = \rho(X^1, X^2), \tag{7.186}$$

где  $\rho$  – трехмерный радиус-вектор точки  $M$ , принадлежащей поверхности  $\Sigma$ ,  $X^I$  – криволинейные координаты на поверхности.

В компонентной записи (7.186) имеет вид:

$$\rho^i = \rho^i(X^1, X^2). \tag{7.186'}$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.19.** Окрестностью поверхности  $\Sigma$  (7.186) называют трехмерную область в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^3$ , каждая точка  $M'$  в которой имеет радиус-вектор вида:

$$\mathbf{x} = \rho(X^1, X^2) + X^3 \mathbf{n}(X^1, X^2). \quad (7.187)$$

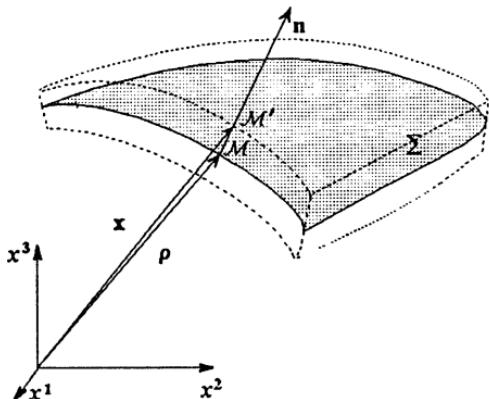


Рис. 7.14. К определению окрестности поверхности

Здесь  $\mathbf{n}$  - вектор нормали к поверхности  $\Sigma$  (рис. 7.14), проходящей через точку  $M'$ ,  $\rho$  - радиус-вектор точки  $M$  на поверхности, из которой выпущена эта нормаль, а  $X^3$  - третья координата, отсчитываемая по нормали к поверхности и изменяющаяся в некоторой области:

$$-\frac{h}{2} < X^3 < \frac{h}{2}. \quad (7.188)$$

Значение  $h$  может быть константой ( $h = \text{const}$ ), тогда говорят об окрестности (оболочке) постоянной толщины; если  $h$  - переменная:  $h = h(X^1, X^2)$ , тогда

говорят, что окрестность (оболочка) имеет переменную толщину.

Термин "окрестность" подразумевает, что максимальное значение  $h$  мало по сравнению с характерным размером  $\dim \Sigma$  поверхности  $\Sigma$ :

$$\max h \ll \dim \Sigma, \quad (7.189)$$

где под  $\dim \Sigma$  понимается, например, наибольшее расстояние между любыми точками поверхности  $\Sigma$ .

Таким образом, если радиус-вектор  $\rho(X^1, X^2)$  точек поверхности  $\Sigma$  зависит только от двух координат, то радиус-вектор  $\mathbf{x}(X^i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , определяемый по (7.187), зависит уже от трех координат, но специальным образом.

#### 7.4.2. Векторы локальных базисов и метрические матрицы в окрестности поверхности

Применим теперь к соотношению (7.187) аппарат гл. 1. Дифференцируя (7.187) по  $X^I$  ( $i = 1, 2, 3$ ), получаем с учетом определения (7.43) и (7.70):

$$\mathbf{R}_I = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial X^I} = \rho_I + X^3 \mathbf{n}_I. \quad (7.190)$$

Используя деривационные формулы (7.96), преобразуем (7.190) к виду:

$$\mathbf{R}_I = \rho_I - X^3 b_I^J \rho_J = (\delta_I^J - X^3 b_I^J) \rho_J. \quad (7.191)$$

Дифференцируя (7.187) по  $X^3$ , имеем

$$\mathbf{R}_3 = \mathbf{n}. \quad (7.192)$$

Формулы (7.191), (7.192) определяют векторы *основного локального базиса в окрестности поверхности*.

Перемножая  $\mathbf{R}_I$  и  $\mathbf{R}_3$  скалярно, получаем:

$$\begin{aligned} g_{IJ} &= \mathbf{R}_I \cdot \mathbf{R}_J = (\delta_I^K - X^3 b_I^K)(\delta_J^L - X^3 b_J^L) \tilde{g}_{KL} = \\ &= \tilde{g}_{IJ} - 2X^3 b_{IJ} + (X^3)^2 b_I^K b_{KJ}, \end{aligned} \quad (7.193)$$

$$g_{I3} = \mathbf{R}_I \cdot \mathbf{R}_3 = (\delta_I^J - X^3 b_I^J) \rho_J \cdot \mathbf{n} = 0,$$

$$g_{33} = \mathbf{R}_3 \cdot \mathbf{R}_3 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1.$$

– компоненты трехмерной *метрической матрицы в окрестности поверхности*  $g_{ij}$ . Здесь мы воспользовались формулой (7.73).

Формулы (7.193) показывают, что  $g_{ij}$  выражаются через коэффициенты первой и второй квадратичной форм поверхности  $\Sigma$ .

Свойство (7.189) "малости" окрестности поверхности является основанием для использования здесь и далее линейного приближения по координате  $X^3$ , при котором слагаемые при  $(X^3)^2$  и выше отбрасываются. Так метрическая матрица в линейном приближении имеет вид:

$$g_{IJ} = \tilde{g}_{IJ} - 2X^3 b_{IJ}, \quad g_{I3} = 0, \quad g_{33} = 1. \quad (7.194)$$

Определитель  $g$  метрической матрицы  $g_{ij}$  вычислим, используя свойство (1.55):

$$\sqrt{g} = (\mathbf{R}_1 \times \mathbf{R}_2) \cdot \mathbf{n} = (\delta_1^I - X^3 b_1^I)(\delta_2^J - X^3 b_2^J)(\rho_I \times \rho_J) \cdot \mathbf{n}.$$

Учитывая, что  $\rho_\alpha \times \rho_\alpha = 0$ , а также определение (7.56) вектора нормали  $\rho_1 \times \rho_2 = \sqrt{\tilde{g}} \mathbf{n}$ , получим:

$$\sqrt{g} = \sqrt{\tilde{g}} (1 - X^3 b_1^I + (X^3)^2 (b_1^1 b_2^2 - b_1^2 b_2^1)).$$

Переходя согласно (7.154) к инвариантам  $H$  и  $K$ , имеем окончательно:

$$\sqrt{g} = \sqrt{\tilde{g}} (1 - 2X^3 H + (X^3)^2 K). \quad (7.195)$$

Компоненты обратной метрической матрицы  $g^{ij}$  в окрестности поверхности при сохранении только линейных по  $X^3$  слагаемых определяются по формулам:

$$g^{IJ} = \tilde{g}^{IJ} + 2X^3 b^{IJ}, \quad g^{I3} = 0, \quad g^{33} = 1, \quad (7.196)$$

которые проверяются непосредственным вычислением:

$$\begin{aligned} g_{IJ}g^{JK} &= (\tilde{g}_{IJ} - 2X^3 b_{IJ})(\tilde{g}^{JK} + 2X^3 b^{JK}) = \\ &= \delta_I^K + 2X^3(\tilde{g}_{IJ}b^{JK} - \tilde{g}^{JK}b_{IJ}) = \delta_I^K. \end{aligned} \quad (7.196')$$

Векторы взаимного базиса  $R^i$  в окрестности поверхности, используя линейное приближение по  $X^3$ , вычисляем следующим образом:

$$\begin{aligned} R^I &= g^{IJ}R_J = (\tilde{g}^{IJ} + 2X^3 b^{IJ})(\delta_J^K - X^3 b_J^K)\rho_K = \\ &= (\delta_J^I + X^3 b_J^I)\rho^J. \end{aligned} \quad (7.197)$$

Трехмерный метрический тензор  $E$  в окрестности поверхности, имеющий компоненты  $g_{ij}$ , в локальном базисе  $R^i \otimes R^j$  записывается в линейном приближении следующим образом:

$$\begin{aligned} E &= R_i \otimes R^i = g_{ij}R^i \otimes R^j = R_I \otimes R^I + n \otimes n = \\ &= (\delta_I^J - X^3 b_I^J)\rho_J \otimes (\delta_K^I + X^3 b_K^I)\rho^K + n \otimes n = \\ &= \rho_I \otimes \rho^I + X^3(-b_K^J \rho_J \otimes \rho^K + b_K^J \rho_J \otimes \rho^K) + n \otimes n, \end{aligned}$$

или, используя определение двумерного метрического тензора  $\tilde{E}$  из п.7.2.3, получим

$$E = \tilde{E} + n \otimes n. \quad (7.198)$$

#### 7.4.3. Деривационные формулы в окрестности поверхности

Рассмотрим вторые производные от радиуса-вектора  $x$  точек из окрестности поверхности:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial X^i \partial X^j} = \frac{\partial R_i}{\partial X^j} = x_{ij}. \quad (7.199)$$

Подставляя вместо  $x$  его выражение (7.187), получим с учетом (7.191) и деривационных формул (7.81) на поверхности:

$$\begin{aligned} x_{IJ} &= \frac{\partial}{\partial X^J}(\rho_I - X^3 b_I^K \rho_K) = \rho_{IJ} - X^3 \left( \frac{\partial b_I^K}{\partial X^J} + b_I^K \rho_{KJ} \right) = \\ &= \left( \tilde{\Gamma}_{IJ}^K - X^3 \left( \frac{\partial}{\partial X^J} b_I^K - \tilde{\Gamma}_{JM}^K b_I^M \right) \right) \rho_K + \\ &+ (\tilde{b}_{IJ} - X^3 b_I^K b_{KJ})n, \end{aligned} \quad (7.200)$$

а также при других комбинациях индексов:

$$x_{I3} = \frac{\partial}{\partial X^3} (\rho_I - X^3 b_I^K \rho_K) = -b_I^K \rho_K,$$

$$x_{3I} = \frac{\partial R_3}{\partial X^I} = n_I = -b_I^K \rho_K, \quad x_{33} = 0. \quad (7.201)$$

Формулы (7.200) и (7.201) представляют собой *деривационные формулы в окрестности поверхности*. Из них при  $X^3 = 0$ , очевидно, следуют деривационные формулы Гаусса-Вейнгартена (7.96), если учесть, что

$$x_{IJ} \Big|_{X^3=0} = \rho_{IJ}. \quad (7.202)$$

#### 7.4.4. Линии кривизны в качестве криволинейных координат

Часто в механике используют частный случай криволинейных координат  $X^I$  поверхности, у которых координатные линии  $X^I = \text{const}$  совпадают с линиями кривизны этой поверхности. Запишем основные соотношения в окрестности поверхности для этого случая.

Как было отмечено в п. 7.3.7, линии кривизны взаимно ортогональны, поэтому координатные линии  $X^I$  также будут ортогональными. Тогда метрические матрицы  $\tilde{g}_{IJ}$ ,  $\tilde{g}^{IJ}$  и вторая квадратичная форма  $b_{IJ}$  являются диагональными:

$$\tilde{g}_{12} = 0, \quad \tilde{g}^{12} = 0, \quad b_{12} = 0, \quad (7.203)$$

и собственные направления тензора  $B$  совпадают с направлениями координатных линий.

Главные кривизны поверхности  $k_\alpha$  находим из уравнения (7.142), которое в данном случае имеет вид:

$$\begin{vmatrix} b_{11} - k_\alpha \tilde{g}_{11} & 0 \\ 0 & b_{22} - k_\alpha \tilde{g}_{22} \end{vmatrix} = 0. \quad (7.204)$$

Из (7.204) получаем:

$$k_\alpha = \frac{b_{\alpha\alpha}}{\tilde{g}_{\alpha\alpha}} \equiv \frac{1}{R_\alpha}. \quad (7.205)$$

Введенные по (7.205) величины  $R_\alpha$  называют *главными радиусами кривизны поверхности*.

Гауссова и средняя кривизны в данном случае имеют вид:

$$K = \frac{b_{11}b_{22}}{\tilde{g}_{11}\tilde{g}_{22}} = \frac{1}{R_1 R_2}, \quad (7.206)$$

$$H = \frac{1}{2\tilde{g}_{11}\tilde{g}_{22}}(b_{11}\tilde{g}_{22} + b_{22}\tilde{g}_{11}) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right).$$

Введем параметры Ламе  $H_\alpha$  в окрестности поверхности и  $A_\alpha$  на поверхности:

$$H_\alpha = \sqrt{g_{\alpha\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{g^{\alpha\alpha}}}, \quad A_\alpha = \sqrt{\tilde{g}_{\alpha\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{\tilde{g}^{\alpha\alpha}}}. \quad (7.207)$$

Тогда коэффициенты второй квадратичной формы поверхности можно представить в виде:

$$b_{\alpha\alpha} = A_\alpha^2 / R_\alpha. \quad (7.208)$$

Согласно (7.194) в линейном приближении  $H_\alpha$  будут иметь вид:

$$H_\alpha = \sqrt{\tilde{g}_{\alpha\alpha} - 2X^3 b_{\alpha\alpha}} = \sqrt{\tilde{g}_{\alpha\alpha}} - \frac{X^3}{\sqrt{\tilde{g}_{\alpha\alpha}}} b_{\alpha\alpha}. \quad (7.209)$$

Используя (7.207), (7.208), получаем:

$$H_\alpha = A_\alpha \left( 1 - \frac{X^3}{R_\alpha} \right). \quad (7.210)$$

Используя свойство (7.203), из (7.90) получаем выражение для ненулевых символов Кристоффеля:

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{\alpha\alpha}^\alpha &= \frac{1}{2\tilde{g}_{\alpha\alpha}} \frac{\partial \tilde{g}_{\alpha\alpha}}{\partial X^\alpha} = \frac{1}{A_\alpha} \frac{\partial A_\alpha}{\partial X^\alpha}, \\ \tilde{\Gamma}_{22}^1 &= -\frac{1}{2\tilde{g}_{11}} \frac{\partial \tilde{g}_{22}}{\partial X^1} = -\frac{A_2}{A_1^2} \frac{\partial A_2}{\partial X^1}, \\ \tilde{\Gamma}_{11}^2 &= -\frac{1}{2\tilde{g}_{22}} \frac{\partial \tilde{g}_{11}}{\partial X^2} = -\frac{A_1}{A_2^2} \frac{\partial A_1}{\partial X^2}, \\ \tilde{\Gamma}_{12}^\alpha &= \frac{1}{2\tilde{g}_{\alpha\alpha}} \frac{\partial \tilde{g}_{\alpha\alpha}}{\partial X^\beta} = \frac{1}{A_\alpha} \frac{\partial A_\alpha}{\partial X^\beta}, \quad \alpha \neq \beta. \end{aligned} \quad (7.211)$$

Запишем уравнение Петерсона-Кодашчи, используя форму (7.108):

$$\frac{\partial b_{\alpha 2}}{\partial X^1} - \frac{\partial b_{\alpha 1}}{\partial X^2} + \tilde{\Gamma}_{\alpha 2}^I b_{1I} - \tilde{\Gamma}_{\alpha 1}^I b_{I2} = 0, \quad \alpha = 1, 2 \quad (7.212)$$

и уравнение Гаусса в форме (7.107):

$$\left( \frac{\partial \tilde{\Gamma}_{12}^M}{\partial X^1} - \frac{\partial \tilde{\Gamma}_{11}^M}{\partial X^2} + \tilde{\Gamma}_{12}^L \tilde{\Gamma}_{L1}^M - \tilde{\Gamma}_{11}^L \tilde{\Gamma}_{L2}^M \right) \tilde{g}_{M2} = -\tilde{g} K. \quad (7.213)$$

Учитывая (7.203) и заменяя  $b_{\alpha\alpha}$  согласно (7.208), а  $\tilde{\Gamma}_{IJ}^M$  согласно (7.211), получаем уравнение Петерсона-Кодаци в виде:

$$\frac{\partial}{\partial X^1} \left( \frac{A_2}{R_2} \right) = \frac{1}{R_1} \frac{\partial A_2}{\partial X^1}, \quad \frac{\partial}{\partial X^2} \left( \frac{A_1}{R_1} \right) = \frac{1}{R_2} \frac{\partial A_1}{\partial X^2}. \quad (7.214)$$

Уравнение Гаусса (7.213) после аналогичных преобразований принимает вид:

$$\frac{\partial}{\partial X^1} \left( \frac{1}{A^1} \frac{\partial A_2}{\partial X^1} \right) + \frac{\partial}{\partial X^2} \left( \frac{1}{A^2} \frac{\partial A_1}{\partial X^2} \right) = -\frac{A_1 A_2}{R_1 R_2}. \quad (7.215)$$

Уравнения (7.214) и (7.215) находят широкое применение в механике.

#### Упражнения к § 7.4.

**Упражнение 7.4.1.** Убедиться непосредственно, что из (7.212) следует (7.214), а из (7.213) следует (7.215).

**Упражнение 7.4.2.** Показать, что для поверхности вращения ненулевые символы Кристоффеля имеют вид:

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{f' f''}{1 + f'^2},$$

$$\Gamma_{22}^1 = -\frac{ff'}{1 + f'^2}, \quad \Gamma_{12}^1 = \frac{f'}{f}.$$

**Упражнение 7.4.3.** Используя результат упр.7.4.2 и (7.183), показать, что если поверхность вращения - цилиндр ( $f = \text{const}$ ), то геодезическими линиями являются винтовые линии (см. упр.7.1.9):

$$\begin{cases} x^1 = b\xi, \\ x^2 = f \cos \xi, \\ x^3 = f \sin \xi. \end{cases}$$

### § 7.5. Уплощенные поверхности в $\mathbb{R}^3$

Для произвольной поверхности  $\Sigma$  в  $\mathbb{R}^3$ , вообще говоря, нельзя ввести единые прямоугольные декартовы координаты  $X'^I$ , с помощью которых можно было бы измерить расстояние между точками поверхности по прямолинейным отрезкам, не выходя при этом с поверхности  $\Sigma$ .

В частном случае, однако, такие поверхности  $\Sigma$  существуют – это плоскости в  $\mathbb{R}^3$ .

На всякой плоскости тензор кривизны  ${}^4\tilde{\mathbf{R}}$  тождественно равен нулю, поскольку на ней всегда можно ввести прямоугольные декартовы координаты  $X'^I$ , в которых  $\tilde{\Gamma}_{IJ}^k \equiv 0$ . Обратное же утверждение, вообще говоря, не верно, так как тензор Римана-Кристоффеля  ${}^4\tilde{\mathbf{R}}$  обращается тождественно в нуль не только для плоскостей, но и для более широкого класса поверхностей, которые обычно называют *уплощеными*.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.20.** Поверхность  $\overset{\circ}{\Sigma}$  в  $\mathbb{R}^3$  называют *уплощенной*, если в окрестности каждой ее точки  $X^I$  существует прямоугольная декартова система координат  $X'^I$ , в которой метрическая матрица единичная:  $\tilde{g}'_{IJ} = \delta_{IJ}$ , а расстояние  $ds$  между бесконечно близкими точками определяется формой:

$$ds^2 = \tilde{g}'_{IJ} dX'^I dX'^J = (dX'^1)^2 + (dX'^2)^2. \quad (7.216)$$

Кроме плоскостей уплощенными являются, например, цилиндрические поверхности: если взять за  $dX'^\alpha = s_\alpha$  длины дуг вдоль оси цилиндра и в окружном направлении, то действительно получим:

$$ds^2 = ds_1^2 + ds_2^2$$

в каждой точке цилиндра.

**ТЕОРЕМА 7.14.** Тензор Римана-Кристоффеля  ${}^4\tilde{\mathbf{R}}$  тождественно равен нулю на уплощенных поверхностях  $\overset{\circ}{\Sigma}$  и только на них:

$${}^4\tilde{\mathbf{R}} = 0 \quad \forall X^I \in \overset{\circ}{\Sigma}. \quad (7.217)$$

▼ Пусть поверхность  $\overset{\circ}{\Sigma}$  – уплощенная, тогда можно ввести единую систему координат  $\tilde{X}^I$ , в каждой точке поверхности совпадающую с локальной декартовой системой  $X'^I$ . В этой системе  $\tilde{X}^I$ :  $\tilde{g}'_{IJ} = \delta_{IJ}$ , и, следовательно, по (7.90) все символы Кристоффеля тождественно равны нулю:  $\tilde{\Gamma}_{IJ}^K \equiv 0$ . Тогда из (7.111) получаем, что действительно

$\tilde{R}_{KIJ}^M \equiv 0$  в каждой точке поверхности  $\overset{\circ}{\Sigma}$ . В одну сторону теорема доказана.

В обратную сторону. Пусть теперь в каждой точке поверхности  $\overset{\circ}{\Sigma}$  имеет место  $\tilde{R}_{KIJ}^M \equiv 0$  в некоторой системе координат  $X^I$ . Тогда из соотношения (7.156) следует, что  $K \equiv 0$  в каждой точке  $\overset{\circ}{\Sigma}$ , т.е.  $\overset{\circ}{\Sigma}$  является поверхностью нулевой гауссовой кривизны. Из (7.153) получаем, что  $K = k_1 k_2 \equiv 0$ , т.е. хотя бы одна из главных кривизн должна быть равна нулю в каждой точке поверхности; пусть для определенности:  $k_1 \equiv 0$ ,  $k_2 \neq 0$ .

Выберем теперь в качестве координат  $X^I$  линии кривизны поверхности  $\overset{\circ}{\Sigma}$ , тогда в каждой точке поверхности имеют место соотношения (7.203), (7.205), т.е.

$$b_{12} \equiv 0, \quad b_{11} = k_1 \tilde{g}_{11} \equiv 0, \quad b_{22} = k_2 \tilde{g}_{22} \neq 0, \quad (7.218)$$

$$\tilde{g}_{11} \neq 0, \quad \tilde{g}_{22} \neq 0, \quad \tilde{g}_{12} \equiv 0. \quad (7.219)$$

Кроме того, для данных координат  $X^I$  уравнения (7.214) Петерсона-Кодаци имают вид:

$$\frac{\partial}{\partial X^1} (k_2 A_2) = k_1 \frac{\partial A_2}{\partial X^1} = 0, \quad k_2 \frac{\partial A_1}{\partial X^2} = \frac{\partial}{\partial X^2} (k_1 A_1) = 0, \quad (7.220)$$

интегрируя которые, получаем, что  $k_2 A_2 = \varphi(X^2)$  – функция от координаты  $X^2$ , а  $A_1 = A_1(X^1)$  – функция только  $X^1$ .

Выражения (7.211) для символов Кристоффеля  $\tilde{\Gamma}_{11}^1$  и  $\tilde{\Gamma}_{11}^2$  с учетом этих результатов записываем следующим образом:

$$\tilde{\Gamma}_{11}^1 = \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_1}{\partial X^1} \quad \text{и} \quad \tilde{\Gamma}_{11}^2 = -\frac{A_1}{A_2^2} \frac{\partial A_1}{\partial X^2} = 0.$$

Воспользуемся еще одним имеющимся в нашем распоряжении уравнением – деривационным уравнением (7.96) при  $I = J = 1$ , которое принимает вид:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial X^1} = \tilde{\Gamma}_{11}^K \rho_K \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \rho_1}{\partial X^1} = \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_1}{\partial X^1} \rho_1. \quad (7.221)$$

Это уравнение можно преобразовать к виду

$$\partial(\rho_1/A_1)/\partial X^1 = 0$$

и проинтегрировать:  $\rho_1/A_1 = a(X^2)$ . Учитывая, что  $\rho_1 = \partial x/\partial X^1$ , проинтегрируем еще раз, в результате получим выражение для радиус-вектора поверхности:

$$x = \psi(X^1) a_1(X^2) + a_2(X^2), \quad \psi(X^1) = \int^{X^1} A_1 dX^1, \quad (7.222)$$

где  $\mathbf{a}_I(X^2)$  – некоторые функции, появившиеся при интегрировании. Эти функции удовлетворяют определенным ограничениям, покажем их. Из (7.222) находим векторы базиса:

$$\rho_1 = A_1 \mathbf{a}_1, \quad \rho_2 = \psi \mathbf{a}_{12} + \mathbf{a}_{22}, \quad (7.223)$$

здесь

$$\mathbf{a}_{12} \equiv \partial \mathbf{a}_I / \partial X^2.$$

Тогда, вспоминая, что  $\tilde{g}_{11} = A_1^2$ , получаем:

$$A_1^2 = \tilde{g}_{11} = \rho_1 \cdot \rho_1 = A_1^2 |\mathbf{a}_1|^2,$$

откуда следует, что вектор  $\mathbf{a}_1$  имеет единичную длину:  $|\mathbf{a}_1| = 1$ . Но для такого вектора имеют место соотношения (7.13), (7.14), поэтому  $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_{12} = 0$ .

Воспользуемся теперь соотношениями (7.219) и (7.218):

$$\tilde{g}_{12} = \rho_1 \cdot \rho_2 = A_1 \mathbf{a}_1 \cdot (\psi \mathbf{a}_{12} + \mathbf{a}_{22}) = A \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_{22} = 0,$$

и

$$\mathbf{b}_{12} = \rho_{12} \cdot (\rho_1 \times \rho_2) = A_1 \mathbf{a}_{12} \cdot (A_1 \mathbf{a}_1 \times (\psi \mathbf{a}_{12} + \mathbf{a}_{22})) = 0.$$

Используя свойство векторного произведения  $\mathbf{a}_{12} \cdot (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_{12}) = 0$ , получаем в итоге систему соотношений ортогональности:

$$\begin{cases} \mathbf{a}_{12} \cdot (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_{22}) = 0, \\ \mathbf{a}_{12} \cdot \mathbf{a}_1 = 0, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \mathbf{a}_{22} \cdot (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_{12}) = 0, \\ \mathbf{a}_{22} \cdot \mathbf{a}_1 = 0. \end{cases} \quad (7.224)$$

Отсюда следует, что возможны три ситуации:

- a)  $\mathbf{a}_{12} = 0, \quad \mathbf{a}_{22} \neq 0;$
- б)  $\mathbf{a}_{12} \neq 0, \quad \mathbf{a}_{22} = 0;$
- в)  $\mathbf{a}_{12}$  и  $\mathbf{a}_{22}$  не равны нулю и коллинеарны, т.е.

$$\mathbf{a}_{12} = \theta(X^2) \mathbf{a}_{22},$$

где  $\theta(X^2)$  – некоторая ненулевая функция.

Случай в) следует из того, что  $\mathbf{a}_{12}$  и  $\mathbf{a}_{22}$  одновременно ортогональны паре ортогональных векторов  $\mathbf{a}_1$  и  $(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_{22})$ . Рассмотрим вначале этот случай, тогда

$$\tilde{g}_{22} = \rho_2 \cdot \rho_2 = (\theta \psi + 1)^2 h^2,$$

где  $h = |\mathbf{a}_{22}|$ .

Составим квадратичную форму:

$$\begin{aligned} ds^2 &= \tilde{g}_{IJ} dX^I dX^J = \tilde{g}_{11}(dX^1)^2 + \tilde{g}_{22}(dX^2)^2 = \\ &= A_1^2(dX^1)^2 + (\theta\psi + 1)^2 h^2(dX^2)^2 \end{aligned} \quad (7.226)$$

и введем новые координаты:

$$\begin{cases} X'^1 = \psi \cos c - \int^{X^2} h \sin c dX^2, \\ X'^2 = \psi \sin c + \int^{X^2} h \cos c dX^2, \end{cases} \quad c(X^2) = \int^{X^2} \theta h dX^2. \quad (7.227)$$

Несложно проверить, что с помощью замены координат (7.227) форма (7.226) может быть приведена к виду (7.216), причем это возможно в каждой точке поверхности  $\overset{\circ}{\Sigma}$ .

Рассмотрим теперь случай а), тогда  $\mathbf{a}_1 = \text{const}$ ,  $\rho_2 = \mathbf{a}_{22}$  и  $\tilde{g}_{22} = h^2(X^2)$ , следовательно:

$$ds^2 = A_1^2(dX^1)^2 + h^2(dX^2)^2.$$

Делая замену координат:

$$X'^1 = \psi, \quad X'^2 = \int^{X^2} h dX^2,$$

снова приводим квадратичную форму  $ds^2$  к виду (7.216) в каждой точке  $\overset{\circ}{\Sigma}$ .

В случае в) имеем:

$$\rho_2 = \psi \mathbf{a}_{12}, \quad \tilde{g}_{22} = \psi^2 f^2,$$

где  $f^2 = |\mathbf{a}_{12}|^2$ , тогда

$$ds^2 = A_1^2(dX^1)^2 + \psi^2 f^2(dX^2)^2.$$

Осуществляя замену координат:

$$\begin{cases} X'^1 = \psi \cos c, \\ X'^2 = \psi \sin c, \end{cases} \quad c = \int^{X^2} f dX^2, \quad (7.228)$$

квадратичная форма  $ds^2$  также может быть приведена к виду (7.216).

Следовательно, во всех трех случаях а), б) и в) поверхность  $\overset{\circ}{\Sigma}$  будет уплощенной. ▲

Три типа поверхностей (7.222) с условиями а), б) и в), а также плоскости (для которых  $k_1 \equiv 0$ ,  $k_2 \equiv 0$ ) представляют собой все возможные виды уплощенных поверхностей.

В случае произвольной, вообще говоря, не уплощенной поверхности, тензор Римана-Кристоффеля не обращается тождественно в нуль, поэтому поверхности  $\Sigma$  в  $\mathbb{R}^3$  представляют собой пример двумерных римановых пространств, более общих, чем евклидовы. Эти пространства рассмотрим далее в главе 8.

### Упражнения к § 7.5.

**Упражнение 7.5.1.** Поверхность (7.40), имеющую вид

$$\mathbf{x}(X^1, X^2) = X^1 \mathbf{a}_1(X^2) + \mathbf{a}_2(X^2),$$

где  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$  – произвольные вектор-функции, такие, что  $|\mathbf{a}_1| = 1$  и  $\mathbf{a}_1, (\mathbf{X}^1 \mathbf{a}_{12} + \mathbf{a}_{22})$  – независимы, называют *линейчатой*, где

$$\mathbf{a}_{12} = \partial \mathbf{a}_1 / \partial X^2.$$

Доказать, что всякая уплощенная поверхность является линейчатой.

**Упражнение 7.5.2.** Доказать, что вектор-функция (7.222) с условием (7.225, а) описывает цилиндрическую поверхность с направляющей  $\mathbf{a}_2(X^2)$ .

**Упражнение 7.5.3.** Доказать, что вектор-функция (7.222) с условием (7.225, б) описывает коническую поверхность с направляющей  $\mathbf{a}_1(X^2)$ .

## ГЛАВА 8

# ТЕНЗОРЫ В РИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ И ПРОСТРАНСТВА АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ

---

### § 8.1. Римановы пространства

В механике и особенно в релятивистской физике тензоры широко применяют в  $n$ -мерных римановых пространствах, являющихся более общими, чем евклидовы. Дадим определение этих пространств, а затем покажем, как конструируются тензоры в них. Начнем с основополагающего понятия римановых пространств – элементарного многообразия.

#### 8.1.1. Элементарное многообразие

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.1.** Элементарным  $n$ -мерным многообразием называют такое множество  $M^n$ , каждой точке которого взаимнооднозначно поставлен в соответствие упорядоченный набор чисел  $(X^1 \dots X^n)$  из некоторой связной области  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ , т.е. задано биективное отображение  $\varphi: M^n \rightarrow \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ .

Координатами точки  $M \in M^n$  в системе координат  $\mathcal{D}$  называют координаты  $X^i \in \mathbb{R}^n$  ее образа  $\varphi(M)$ , изменяющиеся в области  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ .

Если для множества  $M^n$  имеется другое биективное отображение  $\varphi': M^n \rightarrow \mathcal{D}' \subset \mathbb{R}^n$ , то координаты точки  $M$  в системах координат  $\mathcal{D}$  и  $\mathcal{D}'$  связаны соотношениями:

$$X'^i = X'^i(X^j), \quad i, j = 1 \dots n, \quad (8.1)$$

которые предполагают достаточное число раз дифференцируемыми и невырожденными, т.е.  $\det(\partial X'^i / \partial X^j) \neq 0, \forall X^i \in \mathcal{D}$ .

Введем как и ранее обозначения для якобиевых матриц преобразования, а также для их производных:

$$Q^i_j \equiv \left( \frac{\partial X'^i}{\partial X^j} \right), \quad P^i_j \equiv \left( \frac{\partial X^i}{\partial X'^j} \right), \quad P^i_{jk} \equiv \frac{\partial^2 X^i}{\partial X'^j \partial X'^k}, \quad (8.2)$$

и кроме того в этой главе будем использовать обозначения для частных производных:

$$\frac{\partial f}{\partial X^i} \equiv f_{,i}, \quad \frac{\partial f}{\partial X'^i} \equiv f_{|i} = P^j_i f_{,j}. \quad (8.3)$$

Примером двумерного ( $n = 2$ ) элементарного многообразия  $M^2$  являются поверхности в  $\mathbb{R}^3$ , на которых определены криволинейные координаты  $X^1, X^2$  и которые заданы тремя функциями (7.41).

### 8.1.2. Касательное пространство

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.2.** Кривой  $\mathcal{L}$  в многообразии  $M^n$  называют отображение  $\mathcal{L}: [\xi_1, \xi_2] \in \mathbb{R}^1 \rightarrow M^n$ , которое записывают в виде функции:

$$X^i = X^i(\xi) \quad \forall \xi \in [\xi_1, \xi_2], \quad X^i \in M^n. \quad (8.4)$$

Здесь  $X^i$  – координаты точки  $\mathcal{M} \in M^n$ ,  $[\xi_1, \xi_2]$  – некоторый отрезок из  $\mathbb{R}^1$ ,  $(\xi_1 < \xi_2)$ , а функции (8.4) предполагаем непрерывно дифференцируемыми, по крайней мере, два раза.

Зафиксировав значение параметра  $\xi \in [\xi_1, \xi_2]$ , получим некоторую точку  $\mathcal{M} \in \mathcal{L}$ , в ней можно вычислить производные от функций (8.4):

$$a^i = dX^i/d\xi. \quad (8.5)$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.3.** Упорядоченный набор  $(a^1 \dots a^n)$  производных (8.5) называют компонентами касательного вектора  $a^i$  в точке  $\mathcal{M}$  кривой  $\mathcal{L}$  в  $M^n$ .

Если перейти к координатам  $X'^i$  той же точки  $\mathcal{M} \in \mathcal{L}$ , то согласно (8.1) получаем, что компоненты касательного вектора  $a'^i$  в этой системе координат будут иметь вид:  $a'^i = dX'^i/d\xi$  и связаны с  $a^i$  тензорным законом:

$$a'^i = Q^i_j a^j. \quad (8.6)$$

Поскольку через фиксированную точку  $\mathcal{M} \in M^n$  можно провести различные кривые  $\mathcal{L}$ , то, вообще говоря, в каждой точке  $\mathcal{M}$  имеется множество упорядоченных наборов  $(a^1 \dots a^n)$ . Определим операции с этими наборами.

Пусть имеется две кривые  $\mathcal{L}_1$  и  $\mathcal{L}_2$ , заданные в виде функций  $X_1^i(\xi)$ ,  $X_2^i(\xi)$ , проходящие через точку  $\mathcal{M}$ , тогда можно построить два набора компонент касательных векторов  $a_1^i = dX_1^i/d\xi$  и  $a_2^i = dX_2^i/d\xi$ .

Суммой компонент двух касательных векторов назовем набор

$$a_1^i + a_2^i = d(X_1^i + X_2^i)/d\xi,$$

который представляет собой компоненты касательного вектора к кривой  $(X_1^i + X_2^i)(\xi)$  в данной точке  $\mathcal{M}$ .

Аналогично определяем произведение компонент  $a^i$  на вещественное число  $\lambda$ :

$$\lambda a^i = \lambda dX^i/d\xi = d(\lambda X^i)/d\xi.$$

Поскольку набор чисел  $(a^1 \dots a^n)$  является элементом пространства  $\mathbb{R}^n$ , то, выбрав базис  $e_i$  в этом пространстве, можно построить сам касательный вектор  $a$  в точке  $\mathcal{M}$  кривой  $\mathcal{L}$ :  $a = a^i e_i = a'^i e'_i$ , где  $e'_i = P^j_i e_j$  – новый базис.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.4.** Касательным пространством в данной точке  $\mathcal{M}$  элементарного многообразия  $M^n$  называют множество касательных векторов  $a = a^i e_i$ , построенных ко всевозможным кривым  $\mathcal{L}$ , проходящим через данную точку.

**ТЕОРЕМА 8.1.** Касательное пространство в любой точке  $\mathcal{M} \in M^n$  является  $n$ -мерным линейным пространством, которое обозначают как  $T_{\mathcal{M}} M^n$ , а векторы  $e_i$  образуют базис в нем.

▼ Первое утверждение теоремы очевидно, так как операцию сложения и умножения на число касательных векторов  $a_1 = a_1^i e_i$  и  $a_2 = a_2^i e_i$  можно определить с помощью соответствующих операций с компонентами  $a_1^i$  и  $a_2^i$ . Векторы  $e_i$ ,  $i = 1 \dots n$ , являются линейно независимыми и действительно образуют базис. Нам нужно только доказать, что они все принадлежат касательному пространству в данной точке  $\mathcal{M}$ .

Пусть  $X^i$  – координаты точки  $\mathcal{M}$ . Рассмотрим  $n$  кривых  $\mathcal{L}_\alpha$  в  $M^n$ , заданных следующими функциями:

$$X_{(\alpha)}^i(\xi) = X^i + \delta_\alpha^i \xi, \quad \alpha = 1 \dots n \quad \forall \xi \in [0, \xi_1], \quad (8.7)$$

где  $\xi_1$  – некоторое положительное вещественное число. Эти функции проходят через точку  $\mathcal{M}$  при значении параметра  $\xi = 0$ , а производные  $dX_{(\alpha)}^i/d\xi = \delta_\alpha^i$  образуют компоненты некоторых касательных векторов и совпадают с компонентами векторов  $e_\alpha = \delta_\alpha^j e_j$ . Очевидно также, что при переходе к новым координатам  $X'^i(X^j)$  кривые  $\tilde{\mathcal{L}}_\alpha$  преобразуются к виду

$$X'^i_{(\alpha)}(\xi) = X'^i(X^j_{(\alpha)}(\xi)) = X'^i(X^j + \delta_\alpha^j \xi),$$

при этом компоненты касательных векторов преобразуются действительно по тензорному закону:

$$\partial X'^i_{(\alpha)} / \partial \xi = (\partial X'^i / \partial X^j) \delta_\alpha^j.$$

Таким образом, мы нашли такие кривые  $\mathcal{L}_\alpha$  в  $M^n$ , которые проходят через точку  $\mathcal{M}$  и компоненты касательных векторов к которым совпадают с компонентами векторов  $e_\alpha$  в своем же базисе, следовательно,  $e_i \in T_{\mathcal{M}} M^n$ . ▲

### 8.1.3. Определение риманова пространства

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.5.** Элементарное  $n$ -мерное многообразие  $M^n$  называют римановым пространством  $\mathbb{V}^n$ , если в каждой точке  $\mathcal{M} \in M^n$  с координатами  $X^i$  задана матрица  $g_{ij}$   $n$ -го порядка, которая является

1º симметричной,

2º невырожденной:  $\det(g_{ij}) \neq 0$ ,  $\forall X^i$ ,

- $3^o$  компоненты ее являются непрерывно-дифференцируемыми функциями,
- $4^o$  при переходе к другим координатам  $X'^l$  преобразуется по тензорному закону:

$$g_{ij} = Q^k{}_i Q^l{}_j g'_{kl}. \quad (8.8)$$

Двумерные поверхности, рассмотренные нами ранее в  $\mathbb{R}^3$ , очевидно, можно рассматривать как двумерные римановы пространства  $\mathbb{V}^2$  с метрической матрицей  $\tilde{g}_{IJ}$ .

Расстояние в римановом пространстве вводят для бесконечно близких точек  $M$  и  $M'$ , имеющих координаты  $X^i$  и  $X^i + dX^i$ , и определяют его как

$$ds^2 = \varkappa g_{ij} dX^i dX^j, \quad (8.9)$$

где  $\varkappa$  – знаковое число, которое выбирают так, чтобы форма (8.9) была положительной.

Риманово пространство называют *собственно римановым*, если метрическая матрица  $g_{ij}$ ,  $\forall X^i \in \mathcal{D}$ , является положительно-определенной, в противном случае говорят о *псевдоримановых пространствах*.

#### 8.1.4. Скалярное произведение в $\mathbb{V}^n$

Поскольку у нас теперь в каждой точке  $M \in M^n$  определена метрическая матрица  $g_{ij}$ , то в касательном пространстве  $T_M M^n$  можно ввести скалярное произведение.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.6.** Скалярным произведением касательных векторов  $a$  и  $b$  из касательного пространства  $T_M M^n$  называют отображение  $\varphi: T_M M^n \times T_M M^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ , построенное следующим образом:

$$a \cdot b = a^i b^j g_{ij}(X^k), \quad (8.10)$$

где  $a^i$  и  $b^j$  – компоненты касательных векторов в точке  $M \in \mathbb{V}^n$  с координатами  $X^k$ , а  $g_{ij}(X^k)$  – метрическая матрица в данной точке.

Если  $\mathbb{V}^n$  – собственно риманово, то скалярное произведение (8.10) обладает всеми свойствами, приведенными в определении 2.8, и, следовательно, пространство  $T_M M^n$  с введенной на нем операцией (8.10) является евклидовым пространством. Его обозначают как  $T_M \mathbb{V}^n$ .

Если же  $\mathbb{V}^n$  – псевдориманово, то соответствующие пространства  $T_M \mathbb{V}^n$  называют *псевдоевклидовыми*.

Пусть  $e_i$  – базис в  $T_M \mathbb{V}^n$ , в котором касательные векторы  $a$  и  $b$  имеют компоненты  $a^i$ ,  $b^i$ , соответствующие системе координат  $X^i$ . Тогда из (8.10) следует, что

$$a \cdot b = a^i b^j e_i \cdot e_j = a^i b^j g_{ij},$$

откуда получаем

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = g_{ij}. \quad (8.11)$$

Поскольку  $g_{ij}(X^k)$  не вырождена, то можно определить обратную метрическую матрицу  $g^{ij}(X^k)$ :

$$g^{ij} g_{jk} = \delta_k^i, \quad (8.12)$$

а с ее помощью – векторы взаимного базиса  $\mathbf{e}^i$ :

$$\mathbf{e}^i = g^{ij} \mathbf{e}_j, \quad (8.13)$$

которые в соответствии с соглашением о совпадении евклидовых и сопряженных к ним пространств (см. п. 2.4.4) можно рассматривать как элементы из  $T_M \mathbb{V}^n$ . То же самое относится и к псевдоевклидовым пространствам.

### 8.1.5. Определение тензора в элементарном многообразии

После того как мы ввели векторы  $\mathbf{a}$  в касательном пространстве  $T_M M^n$ , можно воспользоваться формализмом, изложенным в § 2.5, и построить в каждой точке  $M \in M^n$  множество наборов касательных векторов

$$(\mathbf{a}_1 \mathbf{b}^{(1)} \mathbf{a}_2 \mathbf{b}^{(2)} \dots \mathbf{a}_n \mathbf{b}^{(n)}) \equiv (\mathbf{a}_i \mathbf{b}^{(i)}),$$

где  $\mathbf{a}_i \in T_M M^n$ ,  $\mathbf{b}^{(i)} \in T_M^* M^n$ , и ввести на этом множестве операции (2.112) сложения и умножения на вещественное число.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.7.** Тензорным касательным пространством  $T_n^{(pq)}(T_M M^n)$  типа  $(pq)$ , где  $p + q = 2$ , в точке  $M$  элементарного многообразия  $M^n$  называют тензорное произведение касательного пространства  $T_M M^n$  на себя:

$$T_n^{(pq)}(T_M M^n) = T_M M^n \otimes T_M M^n \quad \forall M \in M^n, \quad p + q = 2. \quad (8.14)$$

Как и ранее, тензорное произведение вводим как фактор-пространство  $n$ -ой степени декартона квадрата

$$T_M M^n \otimes T_M M^n = [(T_M M^n \times T_M M^n)^n]$$

по отношению к той же самой эквивалентности, введенной определением 2.24. Теорема 2.29 тоже имеет место, и с ее помощью устанавливаем, что  $T_n^{(pq)}(T_M M^n)$  является линейным пространством, причем  $\dim T_n^{(pq)} = n^2$ ,  $p + q = 2$ .

Базисные диады в  $T_n^{(pq)}(T_M M^n)$  введем по формулам (2.118):

$$\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k = [\mathbf{e}_i; (\delta_j^i \mathbf{e}_k)], \quad (8.15)$$

где  $[ ]$  – классы эквивалентности соответствующих наборов касательных векторов. Очевидно, что если рассматриваемое многообразие  $M^2$  является поверхностью  $\Sigma$  в  $\mathbb{R}^3$ , то  $T_M M^2$  совпадает с  $L_{t(x)}$ , введенном в п. 7.2.3, а базисные диады (8.15) с соответствующими диадами  $\rho_I \otimes \rho_K$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.8.** Тензором второго ранга  $A(M)$  типа  $(pq)$  в точке  $M \in M^n$  называют элемент тензорного касательного пространства  $T_n^{(pq)}(T_M M^n)$ ,  $p + q = 2$ .

Подобно тому, как это проделано в §2.5, можно ввести тензоры высших рангов  $k A$  в  $M^n$ .

Всякий тензор  $k$ -го ранга  $k A(M)$  согласно теореме 2.28а можно представить разложением по диадному базису в  $T_n^{(pq)}$ :

$$k A = A_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_q}, \quad p + q = k. \quad (8.16)$$

Поскольку тензор  $k A$  введен как инвариантный объект, то, переходя от координат  $X^i$  точки  $M \in M^n$  к координатам  $X'^i$ , согласно формулам (2.158), получаем

$$A'_{i_1 \dots i_p}^{i_{p+1} \dots i_k} = P_{i_1}^{j_1} \dots P_{i_p}^{j_p} Q_{j_{p+1}}^{i_{p+1}} \dots Q_{j_k}^{i_k} A_{j_1 \dots j_p}^{j_{p+1} \dots j_k}, \quad (8.17)$$

– формулу преобразования его компонент.

### 8.1.6. Определение тензора в римановом пространстве

Если в многообразии  $M^n$  введена метрическая матрица  $g_{ij}$ , то оно становится римановым пространством  $\mathbb{V}^n$ , а касательное пространство в каждой точке  $M \in \mathbb{V}^n$  – евклидовым (или псевдоевклидовым)  $T_M \mathbb{V}^n$ . Тогда используя соглашение о совпадении пространств  $T_M^* \mathbb{V}^n$  и  $T_M \mathbb{V}^n$  (см. п.2.4.4), можно говорить о тензорном касательном пространстве  $T_n^{(k)}(T_M \mathbb{V}^n)$ , заданном на римановом пространстве  $\mathbb{V}^n$ .

### 8.1.7. Алгебраические операции с тензорами в $M^n$ и $\mathbb{V}^n$

Поскольку касательные тензорные пространства  $T_n^{(pq)}(T_M M^n)$  являются линейными пространствами, то для них определены операции сложения и скалярного умножения тензоров на число, операции транспонирования, симметрирования, альтернирования, а также тензорное произведение тензоров. Формальная запись этих операций для тензоров из  $T_n^{(pq)}(T_M M^n)$  совпадает с формулами (2.159) – (2.165).

Для тензоров из  $T_n^{(k)}(T_M \mathbb{V}^n)$  кроме того определены операции опускания и поднятия индексов (2.166) и скалярное умножение тензоров (см. определение 2.29).

### 8.1.8. Коэффициенты связности в $\mathbb{V}^n$

В евклидовом пространстве (см. §6.1) была определена операция ковариантного дифференцирования тензорных полей. Эта же операция может быть введена и для риманова пространства  $\mathbb{V}^n$ . Дадим ее определение.

Поскольку в каждой точке  $\mathcal{M}(X^i) \in \mathbb{V}^n$  введена метрическая матрица  $g_{ij}(X^i)$ , компоненты которой, согласно 3°, являются непрерывно-дифференцируемыми функциями, то можно вычислить производные  $\partial g_{ij}/\partial X^k$  и образовать из них следующие объекты:

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2}(g_{ik,j} + g_{jk,i} - g_{ij,k}). \quad (8.18)$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.9.** Функции  $\Gamma_{ijk}$ , определенные по формулам (8.18), называют коэффициентами связности первого рода в  $\mathbb{V}^n$ . Коэффициенты связности второго рода вводим с помощью обратной матрицы  $g^{ij}$ :

$$\Gamma_{ij}^m = g^{mp} \Gamma_{ijp}. \quad (8.19)$$

Заметим, что в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^n$  аналогичная формула (6.13) является следствием соотношения (6.1), с помощью которого вводились символы Кристоффеля.

В римановом же пространстве две основополагающие формулы (6.1) и (6.2) имеют место только в некоторых частных случаях и записываются следующим образом:

$$\Gamma_{ij}^m = S_k^m (S^{-1})_{i,j}^k, \quad (8.20)$$

$$(S^{-1})_{i,j}^k - (S^{-1})_{j,i}^k = 0, \quad (8.21)$$

где  $S_k^m$  – матрица коэффициентов, связывающая два базиса  $e_k^*$  и  $e_m$  в  $\mathbb{V}^n$ :  $e_k^* = S_k^m e_m$ , которые являются аналогом базисов  $\bar{e}_k$  и  $R_k$  в пространстве  $\mathbb{R}^3$  соответственно. Эти частные случаи мы рассмотрим далее, в общем же случае риманова пространства  $\mathbb{V}^n$  формулы (8.20) и (8.21) не имеют места.

**ТЕОРЕМА 8.2.** Коэффициенты связности  $\Gamma_{ijm}$  и  $\Gamma_{ij}^m$ , введенные в  $\mathbb{V}^n$  по формуле (8.18), не являются компонентами тензоров.

▼ В самом деле, если определить коэффициенты связности в системе координат  $X^i$ , а затем воспользоваться формулами перехода (8.8) и обозначениями (8.2), (8.3), то получим:

$$\begin{aligned} \Gamma'_{ijk} &= \frac{1}{2}(g'_{ik|j} + g'_{jk|i} - g'_{ij|k}) = \frac{1}{2}(P_i^l P_k^m g_{lm})_{|j} + \\ &+ \frac{1}{2}(P_j^l P_k^m g_{lm})_{|i} - \frac{1}{2}(P_i^l P_j^m g_{lm})_{|k} = \\ &= \frac{1}{2}P_i^l P_k^m P_j^q (g_{lm,q} + g_{qm,l} - g_{lq,m}) + g_{lm} P_{ij}^m P_k^l = \\ &= P_i^l P_k^m P_j^q \Gamma_{lqm} + g_{lm} P_{ij}^m P_k^l. \end{aligned} \quad (8.22)$$

Используя формулу (8.19), устанавливаем закон преобразования коэффициентов  $\Gamma_{ij}^k$ :

$$\begin{aligned}\Gamma'_{ij}^k &= g'^{km} \Gamma'_{ijm} = Q^k{}_r Q^m{}_p g^{rp} (P^l{}_i P^u{}_m P^q{}_j \Gamma_{lqu} + \\ &+ g_{lu} P^u_{ij} P^l{}_m) = P^l{}_i P^q{}_j Q^k{}_r \Gamma^r_{lq} + Q^k{}_r P^r_{ij}.\end{aligned}\quad (8.23)$$

Оба закона преобразования (8.22) и (8.23) отличаются от тензорного (8.17), что и доказывает теорему. ▲

**Теорема 8.3.** Коэффициенты связности  $\Gamma_{ijm}$  и  $\Gamma_{ij}^m$  в  $\mathbb{V}^n$  симметричны по паре индексов:

$$\Gamma_{ijm} = \Gamma_{jim}, \quad u \quad \Gamma_{ij}^m = \Gamma_{ji}^m. \quad (8.24)$$

▼ Переставляя индексы  $i \leftrightarrow j$  в (8.18) и (8.19), легко убедиться в истинности этого утверждения. ▲

### 8.1.9. Ковариантное дифференцирование тензоров в $\mathbb{V}^n$

Рассмотрим теперь в  $\mathbb{V}^n$  произвольное поле тензора  $k$ -го ранга:

$${}^k\Omega(X^i) = \Omega^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_q}, \quad p+q=k, \quad (8.25)$$

причем его компоненты  $\Omega^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}(X^i)$  будем считать непрерывно-дифференцируемыми функциями координат  $X^i$  точки  $M \in \mathbb{V}^n$ .

**Определение 8.10.** Ковариантной производной от компонент тензора  $\Omega^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$ ,  $k$ -го ранга  ${}^k\Omega$ , определенного в  $\mathbb{V}^n$ , называют следующий объект:

$$\begin{aligned}\nabla_i \Omega^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} &= \frac{\partial}{\partial X^i} \Omega^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} + \sum_{s=1}^p \Gamma_{mi}^{is} \Omega^{i_1 \dots i_s=m \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} + \dots \\ &\dots - \sum_{s=1}^q \Gamma_{js}^m \Omega^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_s=m \dots j_q}, \quad p+q=k.\end{aligned}\quad (8.26)$$

**Теорема 8.4.** Ковариантная производная от компонент тензора в римановом пространстве, определенная по формуле (8.26), сама образует компоненты тензора  $(k+1)$ -го ранга.

▼ Докажем теорему для случая  $k=2$ , для тензоров высших рангов доказательство аналогично. Записывая ковариантную производную

от тензора  $\Omega'^i{}_k$  в новых координатах  $X'^j$  и используя (8.23), получаем:

$$\begin{aligned} \nabla'_j \Omega'^i{}_k &= \Omega'^i{}_{k|j} + \Gamma'{}^i_{jm} \Omega'^m{}_k - \Gamma'{}^m_{jk} \Omega'^i{}_m = \\ &= (Q^i{}_l P^m{}_k \Omega^l{}_m)_{|j} + Q^m{}_p P^l{}_k \Omega^p{}_l (P^u{}_j P^w{}_m Q^i{}_t \Gamma^t_{uw} + Q^i{}_r P^r{}_{jm}) - \\ &- Q^i{}_p P^l{}_m \Omega^p{}_l (P^u{}_j P^w{}_k Q^m{}_t \Gamma^t_{uw} + Q^m{}_r P^r{}_{jk}) = \\ &= Q^i{}_l P^m{}_k P^r{}_j (\Omega^l{}_{m,r} + \Gamma^l_{rw} \Omega^w{}_m - \Gamma^w_{rm} \Omega^l{}_w) = \\ &= Q^i{}_l P^m{}_k P^r{}_j \nabla_r \Omega^l{}_m. \end{aligned} \quad (8.27)$$

Здесь учтено, что

$$Q^i{}_{l|j} = \frac{\partial^2 X'^i}{\partial X^l \partial X'^j} = 0$$

и

$$Q^m{}_p P^r{}_{jm} = \frac{\partial X'^m}{\partial X^p} \frac{\partial^2 X^r}{\partial X'^j \partial X'^m} = \frac{\partial^2 X^r}{\partial X'^j \partial X^p} = 0.$$

Соотношение (8.27) действительно представляет собой тензорный закон преобразования компонент тензора  $(k+1)$ -го ранга (в данном случае – третьего). ▲

С помощью понятия ковариантной производной можно определить *градиент тензора*  $k$ -го ранга  ${}^k\Omega$  в  $\mathbb{V}^n$ :

$$\nabla \otimes {}^k\Omega = \nabla_i \Omega^{i_1 \dots i_p}_{i_{p+1} \dots i_k} e^i \otimes e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes e^{i_{p+1}} \otimes \dots \otimes e^{i_k}, \quad (8.28)$$

который, согласно формуле (8.26), представляет собой тензор  $(k+1)$ -го ранга; а также *дивергенцию тензора*

$$\nabla \cdot {}^k\Omega = \nabla_i \Omega^{i_1 \dots i_p}_{i_{p+1} \dots i_k} e_{i_2} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes e^{i_{p+1}} \otimes \dots \otimes e^{i_k}, \quad (8.29)$$

представляющую собой тензор  $(k-1)$ -го ранга, и *ротор тензора*

$$\nabla \times {}^k\Omega = \frac{1}{\sqrt{g}} \epsilon^{ij i_1} \nabla_i \Omega^{i_2 \dots i_p}_{i_{p+1} \dots i_k} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes e^{i_{p+1}} \otimes \dots \otimes e^{i_k}, \quad (8.30)$$

представляющий собой тензор  $k$ -го ранга.

Заметим, что в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^3$  (и вообще  $\mathbb{R}^n$ ) аналогичные формулы (6.47), (6.48) и (6.52) были установлены как следствие, а определения градиента, дивергенции и ротора тензоров были даны в виде первых формул в (6.47), (6.58) и (6.51). Аналогичные формулы в  $\mathbb{V}^n$ , вообще говоря, не имеют места, также как и (8.20) и (8.21):

$$\nabla \otimes {}^k\Omega \neq e^i \otimes \frac{\partial}{\partial X^i} {}^k\Omega, \quad \nabla \cdot {}^k\Omega \neq e^i \cdot \frac{\partial}{\partial X^i} {}^k\Omega, \quad (8.31)$$

$$\nabla \times {}^k\Omega \neq e^i \times \frac{\partial}{\partial X^i} {}^k\Omega.$$

**ТЕОРЕМА 8.5 (ТЕОРЕМА РИЧЧИ).** *Ковариантная производная (8.26) метрической матрицы  $g_{ij}$  в  $\mathbb{V}^n$  тождественно равна нулю:*

$$\nabla_k g_{ij} = 0 \quad \text{в } \mathbb{V}^n. \quad (8.32)$$

▼ Для доказательства теоремы следует проделать те же самые выкладки, которые приведены для теоремы 6.4. ▲

### 8.1.10. Абсолютная производная тензора

Пусть в  $\mathbb{V}^n$  задано поле тензора  ${}^k\Omega(X^i)$ . Выберем некоторую кривую  $\mathcal{L}$  (8.4), проходящую через точку  $M(X^i)$  с касательным вектором  $a = a^i e_i$ , где  $a^i = \partial X^i / \partial \xi$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.11.** *Абсолютной производной (или производной по направлению вектора  $a$ ) тензора  ${}^k\Omega$ , заданного в  $\mathbb{V}^n$ , называют следующий объект:*

$$\frac{\mathcal{D}^k \Omega}{d\xi} = a \cdot \nabla \otimes {}^k\Omega. \quad (8.33)$$

**ТЕОРЕМА 8.6.** *Абсолютная производная (8.33) от тензора  $k$ -го ранга представляет собой тензор  $k$ -го ранга и имеет следующие компоненты:*

$$\frac{\mathcal{D}^k \Omega}{d\xi} = \frac{\mathcal{D}\Omega^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}}{d\xi} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_q}, \quad p+q = k, \quad (8.34)$$

где

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{D}\Omega^{i_1 \dots i_p}}{d\xi} &= \frac{d\Omega^{i_1 \dots i_p}}{d\xi} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p} + \frac{dX^i}{d\xi} \left( \sum_{s=1}^p \Gamma_{mi}^{i_s} \Omega^{i_1 \dots i_s = m \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{s=1}^q \Gamma_{i_s i}^m \Omega^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_s = m \dots j_q} \right). \end{aligned} \quad (8.35)$$

▼ Тензорный характер абсолютной производной, очевидно, следует из определения 8.11, так как  $a$  и  $\nabla \otimes {}^k\Omega$  являются тензорами. Подставляя в (8.33) выражение для  $a$  и формулы (8.26), (8.28), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{D}^k \Omega}{d\xi} &= \frac{dX^i}{d\xi} e_i \left( \nabla_j \Omega^{i_1 \dots i_p}_{i_{p+1} \dots i_k} e^j \otimes e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes e^{i_{p+1}} \otimes \dots \otimes e^{i_k} \right) = \\ &= \frac{dX^i}{d\xi} \nabla_i \Omega^{i_1 \dots i_p}_{i_{p+1} \dots i_k} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes e^{i_{p+1}} \otimes \dots \otimes e^{i_k}. \end{aligned} \quad (8.36)$$

Учитывая, что

$$\frac{dX^i}{d\xi} \frac{\partial}{\partial X^i} \Omega^{i_1 \dots i_p}_{i_{p+1} \dots i_k} = \frac{d}{d\xi} \Omega^{i_1 \dots i_p}_{i_{p+1} \dots i_k},$$

из формулы (8.36) действительно следует (8.35). ▲

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.12.** Говорят, что тензор  ${}^k\Omega$  в  $\mathbb{V}^n$  параллельно переносится вдоль кривой  $\mathcal{L}$  (8.4) из точки  $X_{\mathcal{M}}^i = X^i(\xi_{\mathcal{M}})$  в точку  $X_{\mathcal{N}}^i = X^i(\xi_{\mathcal{N}})$ , если его абсолютная производная вдоль этой кривой равна нулю:

$$\mathcal{D}^k \Omega / d\xi = 0, \quad \xi_{\mathcal{M}} \leq \xi \leq \xi_{\mathcal{N}}. \quad (8.37)$$

Если записать уравнение параллельного переноса (8.37) с учетом (8.35), например, для вектора:

$$\frac{d}{d\xi} \Omega^i + \Gamma_{jk}^i \frac{dX^k}{d\xi} \Omega^j = 0, \quad (8.38)$$

то из (8.38) получим систему обыкновенных линейных дифференциальных уравнений первого порядка относительно функций  $\Omega^i(X^j)$ . Ее решение с начальным условием  $\xi = \xi_n: \Omega^i = \Omega^i(\mathcal{M})$ , как известно [35], существует, единственно и продолжаемо от точки  $\mathcal{M}$  до  $\mathcal{N}$ . Применяя аналогичное рассуждение для тензора  ${}^k\Omega$ , приходим к следующей теореме.

**ТЕОРЕМА 8.7.** Для любой гладкой кривой  $\mathcal{L}$ , соединяющей точки  $\mathcal{M}$  и  $\mathcal{N}$  в  $M^n$ , результат параллельного переноса всякого тензора  ${}^k\Omega$ , заданного в  $M^n$ , существует, однозначно определяется тензором  ${}^k\Omega(\mathcal{M})$  и линейно зависит от  ${}^k\Omega(\mathcal{M})$ .

Параллельный перенос играет важнейшую роль в римановых пространствах: он позволяет сравнивать тензоры, заданные в различных пространствах  $T_n^{(pq)}(T_{\mathcal{M}} M^n)$  и  $T_n^{(pq)}(T_{\mathcal{N}} M^n)$ . Напомним, что тензорные пространства на  $M^n$  определялись у нас локально в каждой точке  $\mathcal{M} \in M^n$  и, вообще говоря, например, раскладывать тензор  ${}^k A \in T_n^{(pq)}(T_{\mathcal{M}} M^n)$  по базису пространства  $T_n^{(pq)}(T_{\mathcal{N}} M^n)$ , определенному для другой точки  $\mathcal{N}$ , так как это мы проделывали для евклидова пространства  $\mathbb{R}^3$  (см. гл.1), у нас нет никаких оснований. Однако с помощью параллельного переноса вдоль некоторой кривой для каждого тензора  ${}^k A_{(\mathcal{M})} \in T_n^{(pq)}(T_{\mathcal{M}} M^n)$  мы можем однозначно построить его "двойник"  ${}^k A_{(\mathcal{N})}$  в пространстве  $T_n^{(pq)}(T_{\mathcal{N}} M^n)$  и реализовать такое разложение.

Тензор  ${}^k A_{(\mathcal{N})}$ , построенный с помощью параллельного переноса, называют *параллельным* тензором  ${}^k A_{(\mathcal{M})}$ . Заметим однако, что  ${}^k A_{(\mathcal{N})}$  зависит от кривой  $\mathcal{L}$ , соединяющей точки  $\mathcal{M}$  и  $\mathcal{N}$ .

В заключение этого параграфа приведем еще одну важную теорему.

**ТЕОРЕМА 8.8.** При параллельном переносе из точки  $\mathcal{M}$  в точку  $\mathcal{N}$  вдоль любой кривой  $\mathcal{L}$  в  $M^n$  линейная комбинация векторов

из касательного пространства  $T_{\mathcal{M}} M^n$  сохраняется в касательном пространстве  $T_{\mathcal{N}} M^n$ .

▼ Пусть в  $T_{\mathcal{M}} M^n$  определены векторы  $b_{\mathcal{M}}$ ,  $a_{(s)\mathcal{M}}$ ,  $s = 1, \dots$ , причем:  $b_{\mathcal{M}} = \sum_{s=1} \lambda^s a_{(s)\mathcal{M}}$ , где  $\lambda^s$  – вещественные не все нулевые числа. Разложим эти векторы по базису  $e_{i\mathcal{M}}$  в  $T_{\mathcal{M}} M^n$ :  $b_{\mathcal{M}} = b_{\mathcal{M}}^i e_{i\mathcal{M}}$ ,  $a_{(s)\mathcal{M}} = a_{(s)}^i e_{i\mathcal{M}}$ , тогда имеем в  $T_{\mathcal{M}} M^n$ :

$$b_{\mathcal{M}}^i = \sum_{s=1} \lambda^s a_{(s)\mathcal{M}}^i. \quad (8.39)$$

В касательном пространстве  $T_{\mathcal{N}} M^n$  векторам  $b_{\mathcal{M}}$  и  $a_{(s)\mathcal{M}}$  соответствуют векторы  $b(\xi) = b^i(\xi)e_i$  и  $a_{(s)}(\xi) = a_{(s)}^i(\xi)e_i$ , где  $e_i$  – базис в  $T_{\mathcal{N}} M^n$ , причем  $a_{(s)}^i(\xi)$ ,  $b^i(\xi)$  удовлетворяют уравнению параллельного переноса (8.38):

$$\frac{da_{(s)}^i}{d\xi} + \Gamma_{jk}^i a_{(s)}^j \frac{dx^k}{d\xi} = 0, \quad \text{при } \xi = \xi_{\mathcal{M}} : a_{(s)}^i = a_{(s)\mathcal{M}}^i, \quad (8.40a)$$

$$\frac{db^i}{d\xi} + \Gamma_{jk}^i b^j \frac{dx^k}{d\xi} = 0, \quad \text{при } \xi = \xi_{\mathcal{M}} : b^i = b_{\mathcal{M}}^i. \quad (8.40b)$$

Рассмотрим задачу (8.40b) и обозначим ее решение для частного случая начального условия  $\xi = \xi_{\mathcal{M}} : b_{(s)}^i = a_{(s)}^i$  как  $\tilde{b}_{(s)}^i(\xi)$ .

Легко проверить, что тогда функция  $b^i(\xi) = \sum_{s=1} \lambda^s \tilde{b}_{(s)}^i(\xi)$  удовлетворяет уравнению (8.40b) с начальным условием  $\xi = \xi_{\mathcal{M}} : b_{\mathcal{M}}^i = \sum \lambda^s a_{(s)}^i$ . Но в силу теоремы 8.7 решение задачи (8.40b) единственное, значит  $b^i(\xi) = \sum \lambda^s \tilde{b}_{(s)}^i(\xi)$  и есть ее решение.

По той же теореме 8.7 получаем, что решение задачи (8.40a)  $a_{(s)}^i(\xi)$  вдоль той же самой кривой  $\mathcal{L}$  также единственное, а поскольку задача (8.40a) отличается от задачи (8.40b) при условии  $\xi = \xi_{\mathcal{M}} : b_{(s)}^i = a_{(s)}^i$  только обозначением неизвестных, то решения их совпадают, т.е.  $a_{(s)}^i(\xi) = b_{(s)}^i(\xi)$ .

В итоге получаем:

$$b^i(\xi) = \sum_{s=1} \lambda^s a_{(s)}^i(\xi), \quad \xi_{\mathcal{M}} \leq \xi \leq \xi_{\mathcal{N}}. \quad (8.41)$$

Сравнивая (8.39) и (8.41), получаем, что линейная комбинация векторов при параллельном переносе действительно сохраняется (т.е.  $\lambda^s$  не меняются). ▲

## Упражнения к § 8.1.

**Упражнение 8.1.1.** Аналогично определению (2.29), дать определение операции скалярного умножения тензоров второго ранга из тензорного касательного пространства  $T_n^{(2)}(T_M \mathbb{V}^n)$ .

**Упражнение 8.1.2.** Показать, что в собственно римановом пространстве  $\mathbb{V}^n$  для символов Кристоффеля имеют место соотношения, аналогичные (6.11).

## § 8.2. Пространства аффинной связности

### 8.2.1. Определение аффинной связности

Обратим внимание, что в формулу (8.26) ковариантного дифференцирования явным образом не входит метрическая матрица  $g_{ij}$ , а только коэффициенты связности  $\Gamma_{ij}^m$ . На этом факте основано построение пространств, еще более общих, чем римановы – пространств аффинной связности, в которых разделены понятия метрики  $g_{ij}$  (т.е. скалярного произведения) и связности  $\Gamma_{ij}^m$  (т.е. ковариантного дифференцирования и параллельного переноса) в элементарном многообразии  $M^n$ . Математически это означает, что в таком пространстве мы, вообще говоря, не требуем связи  $\Gamma_{ij}^m$  с векторами базиса  $e_i$  (т.е. отказываемся от соотношений (8.20) и (8.21)) и с метрической матрицей  $g_{ij}$  (в общем случае отказываемся от (8.18)). Более того, понятие метрики в  $M^n$  может вообще не вводиться, а коэффициенты связности, тем не менее, используются.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.13.** Элементарное  $n$ -мерное многообразие  $M^n$  называют пространством аффинной связности  $\mathbb{L}^n$ , если в каждой точке  $M \in M^n$  с координатами  $X^i$  задана система

функций  $\overset{*}{\Gamma}_{ij}^m$ , которые

- 1º являются непрерывно-дифференцируемыми функциями,
- 2º при переходе к другим координатам  $X'^i$  преобразуются следующим образом:

$$\overset{*}{\Gamma}_{ij}^{l'm} = P^l_i P^q_j Q^m_r \overset{*}{\Gamma}_{lq}^r + Q^m_r P^r_{ij}. \quad (8.42)$$

Функции  $\overset{*}{\Gamma}_{ij}^m$ , заданные в  $\mathbb{L}^n$ , называют коэффициентами аффинной связности (или просто аффинной связностью). (Мы перешли от обозначений  $\Gamma_{ij}^m$  к  $\overset{*}{\Gamma}_{ij}^m$  с той целью, чтобы сохранить  $\Gamma_{ij}^m$  для случая, когда соотношение (8.18) все же имеет место, см. об этом далее).

Так же, как и для многообразия  $M^n$ , для  $\mathbb{L}^n$  можно определить тензорное касательное пространство  $T_n^{(pq)}(T_M \mathbb{L}^n)$ , построенное с по-

мощью касательного пространства  $T_M \mathbb{L}^n$ :

$$\mathcal{T}_n^{(pq)}(T_M \mathbb{L}^n) = \underbrace{T_M^* \mathbb{L}^n \otimes \dots \otimes T_M^* \mathbb{L}^n}_{p} \otimes \underbrace{T_M \mathbb{L}^n \otimes \dots \otimes T_M \mathbb{L}^n}_{q}. \quad (8.43)$$

Для тензоров  ${}^k A$  из  $\mathcal{T}_n^{(pq)}(T_M \mathbb{L}^n)$  определены все те же алгебраические операции, что и для тензоров из  $\mathcal{T}_n^{(pq)}(M^n)$  (см. п.8.1.7).

### 8.2.2. Ковариантное дифференцирование в $\mathbb{L}^n$

Наличие связности  $\Gamma_{ij}^m$  в  $\mathbb{L}^n$  означает, что в этом пространстве определена операция ковариантного дифференцирования.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.14.** *Ковариантной производной от компонент тензора  ${}^k A \in \mathcal{T}_n^{(pq)}(T_M \mathbb{L}^n)$ ,  $k = p + q$ , (или иначе ковариантной производной относительно связности  $\Gamma_{ij}^m$ ) называют следующий объект:*

$$\begin{aligned} {}^* \nabla_i A^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} &= A^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q, i} + \sum_{s=1}^p {}^* \Gamma_{mi}^{i_s} A^{i_1 \dots i_s=m \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} - \\ &- \sum_{s=1}^q {}^* \Gamma_{i_s i}^m A^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_s=m \dots j_q}. \end{aligned} \quad (8.44)$$

Аналогично теореме 8.4, несложно показать, что ковариантная производная (8.44) от компонент тензора  $k$ -го ранга является компонентами тензора  $(k+1)$ -го ранга  $\nabla \otimes {}^k A$  в  $\mathbb{L}^n$ , называемого *градиентом тензора*:

$${}^* \nabla \otimes {}^k A = {}^* \nabla_i A^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} e^i \otimes e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_q}, \quad p + q = k. \quad (8.45)$$

Поскольку скалярное произведение в  $\mathbb{L}^n$  у нас не определено, то, в отличие от (8.33), абсолютной производной тензора  ${}^k \Omega$ , заданного в  $\mathbb{L}^n$ , назовем тензор  $k$ -го ранга

$$\frac{D^k \Omega}{d\xi} = \frac{D\Omega^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}}{d\xi} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_q}, \quad p + q = k, \quad (8.46)$$

где

$$\frac{D\Omega^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}}{d\xi} = \frac{dX^i}{d\xi} {}^* \nabla_i \Omega^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}.$$

Тогда уравнение параллельного переноса относительно связности  $\overset{*}{\Gamma}_{ij}^m$  для тензора  ${}^k\Omega$  вдоль кривой  $\mathcal{L}$  имеет вид:

$$\overset{*}{D}{}^k\Omega/d\xi = 0, \quad (8.47)$$

где  $a = (dX^i/d\xi)e_i$  – касательный вектор к  $\mathcal{L}$ .

В частности, уравнение параллельного переноса вектора вдоль  $\mathcal{L}$  имеет вид, подобный (8.38):

$$\frac{d}{d\xi}\Omega^i + \overset{*}{\Gamma}_{jk}^i \frac{dX^k}{d\xi}\Omega^j = 0. \quad (8.48)$$

Из (8.47) следует, что для одного и того же многообразия  $M^n$ , вводя различные связности  $\overset{*}{\Gamma}_{ij}^m$ , получаем различные способы параллельного переноса тензоров.

### 8.2.3. Геодезические линии в $\mathbb{L}^n$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.15.** Кривая  $\mathcal{L}$  в пространстве  $\mathbb{L}^n$  называется геодезической линией, если любой ненулевой вектор  $a$ , касательный к  $\mathcal{L}$  в некоторой точке  $M$ , является касательным при параллельном переносе вдоль  $\mathcal{L}$ .

Найдем уравнение геодезической линии в  $\mathbb{L}^n$ .

**ТЕОРЕМА 8.9.** Дифференциальное уравнение геодезической линии в  $\mathbb{L}^n$  имеет вид:

$$\frac{d^2X^m}{d\xi^2} + \overset{*}{\Gamma}_{ij}^m \frac{dX^i}{d\xi} \frac{dX^j}{d\xi} = 0, \quad \xi \in [\xi_1, \xi_2]. \quad (8.49)$$

▼ Действительно, всякую кривую в  $\mathbb{L}^n$  можно задать в параметрическом виде (8.4):  $X^i = X^i(\xi)$ ,  $\xi \in [\xi_1, \xi_2]$ . Но по определению 8.15 любой касательный вектор  $a^i = dX^i/d\xi$  к  $\mathcal{L}$  в точке  $M$  параллельно переносится вдоль нее, т.е. удовлетворяет уравнению (8.48):

$$\frac{da^m}{d\xi} + \overset{*}{\Gamma}_{ji}^m \frac{dX^i}{d\xi} a^j = \frac{d^2X^m}{d\xi^2} + \overset{*}{\Gamma}_{jk}^m \frac{dX^i}{d\xi} \frac{dX^j}{d\xi} = 0. \quad (8.50)$$

Поскольку  $a^i$  является касательным в каждой точке кривой  $\mathcal{L}$ , то уравнение (8.50) имеет место для всех  $\xi \in [\xi_1, \xi_2]$ , что и доказывает формулу (8.49). ▲

### 8.2.4. Тензор кручения

Поскольку в определение 8.13 аффинной связности  $\overset{*}{\Gamma}_{ij}^m$  не входило требование ее симметричности, то, вообще говоря,  $\overset{*}{\Gamma}_{ij}^m$  следует полагать несимметричной. В этом случае целесообразно рассмотреть объект  $\overset{*}{\Gamma}_{ij}^m - \overset{*}{\Gamma}_{ji}^m$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.16.** Тензором кручения  ${}^3\Omega$  в пространстве  $\mathbb{L}^n$  называют следующий элемент пространства  $T_n^{(21)}(T_M \mathbb{L}^n)$ :

$${}^3\Omega = \Omega_{ij}{}^m e^i \otimes e^j \otimes e_m, \quad (8.51)$$

$$\Omega_{ij}{}^m = \frac{1}{2} (\overset{*}{\Gamma}_{ji}^m - \overset{*}{\Gamma}_{ij}^m). \quad (8.52)$$

**ТЕОРЕМА 8.10.** Тензор  ${}^3\Omega$ , введенный по формуле (8.51), действительно является тензором третьего ранга.

▼ Для доказательства достаточно записать компоненты  $\Omega'_{ij}{}^m$  в новой системе координат и воспользоваться формулами (8.42):

$$\begin{aligned} \Omega'_{ij}{}^m &= \frac{1}{2} (\overset{*}{\Gamma}_{ji}^m - \overset{*}{\Gamma}_{ij}^m) = \frac{1}{2} P^l{}_j P^q{}_i Q^m{}_r (\overset{*}{\Gamma}_{lq}^r - \overset{*}{\Gamma}_{ql}^r) + \frac{1}{2} Q^m{}_r (P^r{}_{ji} - P^r{}_{ij}) = \\ &= P^l{}_j P^q{}_i Q^m{}_r \Omega_{ij}{}^m, \end{aligned} \quad (8.53)$$

так как  $P^r{}_{ij}$  согласно (8.2) симметричен по нижним индексам. ▲

### 8.2.5. Пространство $\mathbb{L}_0^n$ аффинной связности без кручения

Рассмотрим теперь частные случаи пространств аффинной связности  $\mathbb{L}^n$ .

Важный случай представляет пространство  $\mathbb{L}_0^n$  аффинной связности без кручения, когда

$$\Omega_{ij}{}^m \equiv 0, \quad \forall X^i \in \mathbb{L}_0^n. \quad (8.54)$$

Для такого пространства в силу определения (8.52) связность  $\overset{*}{\Gamma}_{ij}^m$  симметрична:

$$\overset{*}{\Gamma}_{ij}^m = \overset{*}{\Gamma}_{ji}^m.$$

**ТЕОРЕМА 8.11.** В каждой точке  $\mathcal{M}$  пространства  $\mathbb{L}_0^n$  существует такая система координат  $X^i$ , в которой коэффициенты аффинной связности обращаются в нуль:  $\overset{*}{\Gamma}_{ij}^m(\mathcal{M}) = 0$ .

▼ Пусть  $X'^i$  – некоторая система координат. Выберем произвольную точку  $\mathcal{M}$  с координатами  $X'^i_{\mathcal{M}}$  из  $\mathbb{L}_0^n$  и определим в окрестности этой точки следующие преобразования координат:

$$X^i = A^i{}_j (X'^j - X'^j_{\mathcal{M}}) + \frac{1}{2} A^i{}_m \overset{*}{\Gamma}_{jl}^m (X'^j - X'^j_{\mathcal{M}})(X'^l - X'^l_{\mathcal{M}}), \quad (8.55)$$

где  $A^i{}_j$  – некоторая неособенная матрица с постоянными коэффициентами, а  $\overset{*}{\Gamma}{}^m_{jl}$  – коэффициенты связности в системе координат  $X'^i$ . Вычислим якобиевы матрицы для такого преобразования координат в фиксированной точке  $X^i_M$ :  $P^i{}_j = A^i{}_j$ ,  $Q^j{}_i = (A^{-1})^j{}_i$ , а также определим  $P^i{}_{jk} = \partial^2 X^i / \partial X'^j \partial X'^k = A^i{}_m \overset{*}{\Gamma}{}^m_{jl} (M)$ .

Коэффициенты связности  $\overset{*}{\Gamma}{}^m_{jl}$  в новой системе координат  $X^i$  удовлетворяют соотношениям (8.42), т.е. имеют место соотношения:

$$\overset{*}{\Gamma}{}^m_{ij} = A^l{}_i A^q{}_j (A^{-1})^m{}_r \overset{*}{\Gamma}{}^r_{lq} + (A^{-1})^m{}_r A^r{}_t \overset{*}{\Gamma}{}^t_{ij}.$$

Откуда, очевидно, следует, что  $\overset{*}{\Gamma}{}^r_{lq}(M) = 0$  в точке  $M$ .

Заметим, что условие отсутствия кручения пространства  $\mathbb{L}_0^n$  использовано нами существенным образом при составлении квадратичной формы (8.55). ▲

### 8.2.6. Пространство абсолютного параллелизма

Рассмотрим еще один важный частный случай пространства  $\mathbb{L}^n$ , в котором связность  $\overset{*}{\Gamma}{}^m_{ij}$  выбирается специальным образом, а именно предполагаем справедливой для  $\overset{*}{\Gamma}{}^m_{ij}$  только одну формулу (8.20), отказываясь от двух других (8.18) и (8.21) по сравнению с пространством  $\mathbb{R}^n$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.17.** Пространство аффинной связности  $\mathbb{L}^n$  называют пространством абсолютного параллелизма  $\mathbb{A}^n$ , если в каждой точке  $X^i$  из  $\mathbb{A}^n$  существует  $n$  линейно независимых непрерывно-дифференцируемых касательных векторов  $\overset{*}{e}_i(X^j)$ , таких, что связность  $\overset{*}{\Gamma}{}^m_{ij}$  имеет вид:

$$\overset{*}{\Gamma}{}^m_{ij} = S^m{}_k (S^{-1})^k{}_{ij}, \quad (8.56)$$

где  $S^m{}_k$  – матрица коэффициентов разложения векторов  $\overset{*}{e}_i = S^m{}_i e_m$ , а  $(S^{-1})^k{}_i$  – обратная к ней матрица.

Обратная матрица, очевидно, существует в силу линейной независимости векторов  $\overset{*}{e}_i$ .

**ТЕОРЕМА 8.12.** Коэффициенты связности (8.56) при переходе в новую систему координат  $X'^i$  преобразуются по закону (8.42).

▼ Поскольку по определению  $\overset{*}{e}_i$  при каждом фиксированном  $i$  являются векторами, то коэффициенты  $S^j_i$  с фиксированным нижним индексом  $i$  при переходе в  $X'^i$  преобразуются как компоненты вектора:

$$S'^j_i = Q^j_k S^k_i, \quad (S'^{-1})^j_i = (S^{-1})^j_k P^k_i. \quad (8.57)$$

тогда производные  $(S'^{-1})^k_{i|j}$  при переходе в систему координат  $X'^i$  преобразуются следующим образом:

$$(S'^{-1})^k_{i|j} = ((S^{-1})^k_t P^t_i)_{|u} = (S^{-1})^k_{t,u} P^t_i P^u_t + (S^{-1})^k_t P^t_{ij}. \quad (8.58)$$

Записывая связность (8.56) в новой системе координат, получаем

$$\begin{aligned} \overset{*}{\Gamma}_{ij}^m &= S'^m_k (S'^{-1})^k_{i|j} = Q^m_r S^r_k ((S^{-1})^k_{t,u} P^t_i P^u_j + (S^{-1})^k_t P^t_{ij}) = \\ &= Q^m_r P^t_i P^u_j S^r_k (S^{-1})^k_{t,u} + Q^m_t P^t_{ij}. \end{aligned} \quad (8.59)$$

С учетом (8.56) действительно получаем правило преобразования связности (8.42). ▲

Рассмотрим некоторые свойства пространства  $A^n$ .

**ТЕОРЕМА 8.13.** Векторы  $\overset{*}{e}_i$  в  $A^n$  являются ковариантно-постоянными, т.е. ковариантная производная их компонент тождественно равна нулю:

$$\overset{*}{\nabla} \otimes \overset{*}{e}_i = 0, \quad \overset{*}{\nabla}_i S^m_j = 0, \quad \overset{*}{\nabla}_i (S^{-1})^m_j = 0 \text{ в } A^n. \quad (8.60)$$

▼ В самом деле, используя определение (8.45) ковариантной производной относительно связности (8.56), для векторов  $\overset{*}{e}_i = S^j_i e_j$  (нижний индекс у  $S^j_i$  фиксирован), получаем:

$$\overset{*}{\nabla}_i S^m_j = S^m_{j,i} + \overset{*}{\Gamma}^m_{ki} S^k_j = S^k_{j,i} - (S^{-1})^l_k S^m_{l,i} S^k_j = 0.$$

Здесь мы использовали результат упражнения 8.2.1. ▲

**ТЕОРЕМА 8.14.** В пространстве  $A^n$  и только в нем параллельный перенос из точки  $M$  в точку  $N$ , определяемый с помощью уравнения (8.47), не зависит от выбора кривой  $L$ , соединяющей эти точки.

▼ Рассмотрим пространство  $A^n$  и некоторый вектор  $b \in T_M M^n$ , параллельно переносимый из точки  $M$  в точку  $N$  этого пространства. Разложим вектор  $b$  по некоторому базису в точке  $M$ , в качестве которого выберем систему векторов  $\overset{*}{e}_i$ :  $b(M) = \overset{*}{b}{}^i \overset{*}{e}_i(M)$ , тогда в результате параллельного переноса в точку  $N$  вдоль некоторой кривой

$\mathcal{L}$  получим вектор  $b(\mathcal{N}) = \overset{*}{b^i} \overset{*}{e_i}(\mathcal{N})$ , причем компоненты  $\overset{*}{b^i}$  в силу теоремы 8.8 не зависят ни от точки  $\mathcal{N}$ , ни от кривой  $\mathcal{L}$ . Но параллельный перенос векторов  $\overset{*}{e_i}(\mathcal{N})$  не зависит от кривой  $\mathcal{L}$ , так как в силу теоремы 8.13:  $\overset{*}{D} e_i / d\xi = a \cdot \overset{*}{\nabla} \otimes \overset{*}{e_i} \equiv 0$  для любого  $a$ . Следовательно, и перенос вектора  $b$  не зависит от кривой  $\mathcal{L}$ .

В одну сторону теорема доказана.

В обратную сторону. Рассмотрим снова произвольный вектор  $b$  в точке  $M \in \mathbb{L}^n$ . Выберем некоторую линейно независимую систему  $n$  векторов  $\overset{*}{e_i}(M)$  и построим разложение  $b(M) = \overset{*}{b^i} \overset{*}{e_i}(M)$ . При параллельном переносе в точку  $N \in \mathbb{L}^n$ , получим новый вектор  $b(N) = \overset{*}{b^i} \overset{*}{e_i}(N)$ , причем  $\overset{*}{e_i}(N)$  является значением параллельного переноса  $\overset{*}{e_i}(M)$  в точку  $N$ , т.е. удовлетворяет уравнению:  $\overset{*}{D} \overset{*}{e_i} / d\xi = 0$ . Записывая  $\overset{*}{e_i} = S^j_i e_j$  в некотором базисе  $e_j$ , получаем:

$$\frac{dS_p^k}{d\xi} + \overset{*}{\Gamma}_{ij}^k S^i_p \frac{dX^j}{d\xi} = 0. \quad (8.61)$$

Поскольку  $S_p^k$  есть функция от  $X^j$ , то преобразуем это соотношение следующим образом:

$$(S_{p,j}^k + \overset{*}{\Gamma}_{ij}^k S^i_p) \frac{dX^j}{d\xi} = 0. \quad (8.62)$$

Так как  $\overset{*}{e_i}$  и  $S^j_i$ , по условию теоремы, не зависят от кривой (т.е. от касательного вектора  $dX^j/d\xi$ ), соединяющей точки  $M$  и  $N$ , то соотношение (8.62) выполняется тогда и только тогда, когда обращается в нуль выражение в скобке. Откуда получаем

$$\overset{*}{\Gamma}_{ij}^k = -(S^{-1})_i^p S_{p,j}^k. \quad (8.63)$$

Учитывая результат упражнения 8.2.1, это выражение эквивалентно выражению (8.56), что и завершает доказательство теоремы. ▲

Вычислим компоненты тензора кручения  ${}^3\Omega$  (8.52) для связности  $\overset{*}{\Gamma}_{ij}^m$  в  $\mathbb{A}^n$ . Согласно (8.56) имеем:

$$\Omega_{ij}^m = \frac{1}{2} ((S^{-1})_{j,i}^k - (S^{-1})_{i,j}^k) S^m_k. \quad (8.64)$$

Заметим, что если бы матрица  $(S^{-1})_j^k$  удовлетворяла соотношениям (8.21), то кручение обращалось бы в нуль, и наоборот.

Но условие (8.21) является необходимым и достаточным для того, чтобы дифференциальная форма  $(S^{-1})^k_j dX^j$  имела полный дифференциал, который, умножая форму на  $\hat{e}_k$ , можно записать как

$$dx = e_j dX^j. \quad (8.65)$$

Таким образом, тождественное равенство  $\Omega_{ij}^m \equiv 0$  в  $A^n$  эквивалентно существованию "потенциала" для векторов базиса  $e_j$  в  $A^n$ . Такой потенциал существует в евклидовом пространстве  $R^n$  (см. формулу (6.23)), однако в  $A^n$ , вообще говоря, условия  $\Omega_{ij}^m \equiv 0$  не выполняются, и, следовательно, дифференциальная форма (8.65) не интегрируема. Поэтому компоненты тензора кручения  $\Omega_{ij}^m$  в  $A^n$  называют еще *объектом неголономности*, а векторы базиса  $e_j$  – *неголономным базисом*.

### 8.2.7. Локально-аффинное пространство

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.18.** Пространство  $L^n$  называют локально-аффинным пространством  $L_A^n$ , если для всякой его точки  $M \in L^n$  существует такая система координат  $X'^i$ , в которой коэффициенты связности  $\Gamma_{ij}^m$  обращаются тождественно в нуль в некоторой окрестности точки  $M$ .

Если же система координат  $X'^i$ , в которой  $\Gamma_{ij}^m \equiv 0$ , является единой для всех точек  $M \in L_A^n$ , то пространство  $L_A^n$  является, очевидно, линейным (аффинным) пространством, изоморфным пространству  $R^n$ . Примером локально-аффинного пространства  $L_A^2$  является круговой цилиндр в пространстве  $R^3$ , а примером аффинного пространства является любая плоскость в  $R^3$ .

**ТЕОРЕМА 8.15.** Пространство  $A^n$  без кручения (т.е.  ${}^3\Omega \equiv 0$ ) является локально-аффинным.

▼ Поскольку в каждой точке  $M$  пространства  $A^n$  существует  $n$  линейно независимых векторов  $\hat{e}_i$ , то можно попытаться построить такую систему координат  $X'^i$ , для которой касательные векторы  $\partial X^k / \partial X'^i$  к координатным линиям  $X'^i$  совпадают с  $\hat{e}_i$  в некоторой окрестности точки  $M$ . Для этого рассмотрим систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial X^k}{\partial X'^i} = S_i^k(X^m) \quad (8.66)$$

относительно функций  $X^k = X^k(X'^i)$ , где  $S_i^k(X^m)$  – заданные функции от  $X^m$ . Дифференцируя соотношение (8.66) по  $X'^j$ , получаем

$$\frac{\partial^2 X^k}{\partial X'^i \partial X'^j} = S_{i,l}^k S_l^j. \quad (8.67)$$

Поскольку левая часть этого выражения симметрична относительно замены  $i \leftrightarrow j$ , то и правая часть также должна быть симметрична. Чтобы проверить это, умножим выражение для связности  $\overset{*}{\Gamma}_{tl}^k = -(S^{-1})^m{}_t S^k{}_{m,l}$  (см. упражнение 8.2.1) на  $S^t{}_i S^l{}_j$ :

$$S^k{}_{i,l} S^l{}_j = -\overset{*}{\Gamma}_{tl}^k S^t{}_i S^l{}_j. \quad (8.68)$$

Поскольку по условию теоремы  $\overset{*}{\Gamma}_{tl}^k = \overset{*}{\Gamma}_{lt}^k$ , то выражение в правой части (8.68) симметрично по  $i, j$ , и, тем самым, симметрична правая часть (8.67):  $S^k{}_{i,l} S^l{}_j = S^k{}_{j,l} S^l{}_i$ . Это условие является условием интегрируемости системы (8.66), которое обеспечивает существование ее решения с начальными условиями:  $X'^m = X'^m_M$ ,  $X'^k = X'^k_M$  в некоторой окрестности точки  $M$ . Следовательно, существует и обратная функция  $X'^i = X'^i(X^k)$ .

Воспользуемся теперь тем, что система координат  $X^i$ , в которой записано выражение (8.56) для связности, была выбрана произвольно, а система  $X'^i$  определяется по  $X^i$  указанным выше способом. Тогда выберем в качестве векторов базиса  $e_i$  касательные векторы к координатным линиям  $X^i$ , а сами координаты всегда можно выбрать совпадающими с  $X'^i$ . В этом случае получим, что  $\overset{*}{e}_i = e_i$ , т.е.  $S^j{}_i = \delta^j{}_i$ , и, следовательно,  $\overset{*}{\Gamma}_{tl}^k = -(S^{-1})^m{}_t S^k{}_{m,l} = 0$ . Поскольку существование системы координат  $X'^i$  нами показано в некоторой окрестности точки  $M$ , то и тождество  $\overset{*}{\Gamma}_{tl}^k = 0$  будет выполнено в этой окрестности, что и означает локальную аффинность пространства  $A^n$  без кручения. ▲

### Упражнения к § 8.2.

**Упражнение 8.2.1.** Показать, что связность пространства  $A^n$  (8.56) можно представить в виде:

$$\overset{*}{\Gamma}_{ij}^m = -(S^{-1})^k{}_i S^m{}_{k,j}.$$

## § 8.3. Риманово пространство с аффинной связностью

### 8.3.1. Определение пространства $W^n$

В римановом пространстве  $V^n$  у нас была определена метрика  $g_{ij}$  (ей соответствовала вполне определенная связность  $\overset{*}{\Gamma}_{ij}^m$ ), в пространстве же  $L^n$  – только связность  $\overset{*}{\Gamma}_{ij}^m$ . Можно однако построить такое пространство, в котором будет одновременно определена и метрика

$g_{ij}$ , и некоторая "самостоятельная" связность  $\overset{*}{\Gamma}_{ij}^m$ , для которой уже не имеют места соотношения (8.18), согласующие  $\overset{*}{\Gamma}_{ij}^m$  и  $g_{ij}$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.19.** Элементарное  $n$ -мерное многообразие  $M^n$  называют римановым пространством с аффинной связностью  $\mathbb{W}^n$ , если в каждой точке  $M \in M^n$  с координатами  $x^i$  заданы две системы функций  $g_{ij}$  и  $\overset{*}{\Gamma}_{ij}^m$ , вообще говоря, не связанные никакими соотношениями и удовлетворяющие свойствам 1° – 4° из определения 8.5 и 1°, 2° из определения 8.13, соответственно.

Ни одно из соотношений (8.18), (8.20) и (8.21) для  $\overset{*}{\Gamma}_{ij}^m$ , вообще говоря, не имеет места. Однако поскольку в  $\mathbb{W}^n$  определена метрическая матрица  $g_{ij}$ , то ничто не мешает нам образовать из нее символы  $\overset{*}{\Gamma}_{ij}^m$  по формуле (8.19):

$$\overset{*}{\Gamma}_{ij}^m = \frac{1}{2} g^{mk} (g_{ik,j} + g_{jk,i} - g_{ij,k}). \quad (8.69)$$

Символы  $\overset{*}{\Gamma}_{ij}^m$  уже не являются связностью:  $\overset{*}{\Gamma}_{ij}^m \neq \overset{*}{\Gamma}_{ij}^m$ , т.е. параллельный перенос в  $\mathbb{W}^n$  осуществляется с помощью операции ковариантного дифференцирования  $\overset{*}{\nabla}$  (8.44), но не операции  $\nabla$ , выражаемой формулой (8.26) (хотя сама операция  $\nabla$  (8.26) также определена в  $\mathbb{W}^n$ ). Этим пространство  $\mathbb{W}^n$  отличается от  $\mathbb{V}^n$ .

Но  $\mathbb{W}^n$  отличается и от  $\mathbb{L}^n$ , так как в  $\mathbb{W}^n$  с помощью  $g_{ij}$  можно уже ввести скалярное произведение по формуле (8.10).

Тензорное касательное пространство на  $\mathbb{W}^n$  определяем также, как и на римановом  $\mathbb{V}^n$ :

$$\mathcal{T}_n^{(k)}(T_M \mathbb{W}^n) = \underbrace{T_M \mathbb{W}^n \otimes \dots \otimes T_M \mathbb{W}^n}_k, \quad \forall M \in \mathbb{W}^n.$$

Причем с тензорами  ${}^k A \in \mathcal{T}_n^{(k)}(T_M \mathbb{W}^n)$  определены не только алгебраические операции сложения, умножения на число, транспонирования, симметрирования, альтернирования и тензорного произведения, но и скалярного умножения, и поднятия – опускания индексов, подобно тензорам на  $\mathbb{V}^n$ .

### 8.3.2. Риманова связность

Риманово пространство  $\mathbb{V}^n$  является частным случаем пространства  $\mathbb{W}^n$ , о чем свидетельствует следующая теорема.

**ТЕОРЕМА 8.16.** Пространство  $\mathbb{W}^n$  является римановым  $\mathbb{V}^n$  тогда и только тогда, когда оно обладает свойствами:

- 1° его кручение тождественно равно нулю:  $\Omega_{ij}^m \equiv 0$ ,  
 2° скалярное произведение любых векторов  $b, c \in T_M M^n$ , параллельно переносимых вдоль всякой кривой  $\mathcal{L}$ , не меняется.

▼ Необходимость. Условие 1° для пространства  $\mathbb{V}^n$  всегда выполнено в силу теоремы 8.3. Для доказательства 2° рассмотрим два касательных вектора  $b, c \in T_M M^n$ , параллельно переносимых вдоль произвольной кривой  $\mathcal{L}$ , проходящей через точку  $M$ , т.е. эти векторы удовлетворяют уравнениям (8.36), (8.37):

$$\frac{dX^i}{d\xi} \nabla_i b^j = 0, \quad \frac{dX^i}{d\xi} \nabla_i c^j = 0, \quad \xi_M \leq \xi \leq \xi_N.$$

Образуем скалярное произведение этих векторов в каждой точке кривой  $\mathcal{L}$ :  $b \cdot c = g_{ij} b^i c^j$  и вычислим его абсолютную производную (8.33):

$$\frac{D}{d\xi} (b \cdot c) = \frac{dX^k}{d\xi} \nabla_k (g_{ij} b^i c^j) = g_{ij} \left( c^j \frac{dX^k}{d\xi} \nabla_k b^i + b^i \frac{dX^k}{d\xi} \nabla_k c^j \right) = 0. \quad (8.70)$$

Здесь мы воспользовались теоремой 8.5 Риччи о ковариантной постоянности  $g_{ij}$  относительно римановой связности. Таким образом, условие 2° доказано.

Достаточность. Пусть выполнены условия 1° и 2° в  $\mathbb{W}^n$ , тогда в произвольной точке  $M \in \mathbb{W}^n$  рассмотрим уравнение параллельного переноса двух векторов  $b$  и  $c$ :

$$\overset{*}{\frac{D}{d\xi}} (b \cdot c) = \overset{*}{\frac{D}{d\xi}} (g_{ij} b^i c^j) = 0.$$

Поскольку  $(b \cdot c)$  – скаляр, то по определению его абсолютная производная (8.46) совпадает с полной производной по  $\xi$ :

$$\overset{*}{\frac{D}{d\xi}} (b \cdot c) = \frac{d}{d\xi} (g_{ij} b^i c^j) = \frac{dg_{ij}}{d\xi} + g_{ij} \left( \frac{db^i}{d\xi} c^j + \frac{dc^j}{d\xi} b^i \right) = 0. \quad (8.71)$$

Поскольку векторы  $b$  и  $c$  параллельно переносятся, то они удовлетворяют уравнению (8.48):

$$\frac{dc^j}{d\xi} = -\overset{*}{\Gamma}_{mk}^j c^m \frac{dX^k}{d\xi}, \quad \frac{db^i}{d\xi} = -\overset{*}{\Gamma}_{mk}^i b^m \frac{dX^k}{d\xi}.$$

Подставим эти выражения в (8.71) и учтем, что

$$dg_{ij}/d\xi = (\partial g_{ij}/\partial X^k)(dX^k/d\xi),$$

тогда получим:

$$\left( \frac{\partial g_{ij}}{\partial X^k} - \overset{*}{\Gamma}_{ik}^m g_{mj} - \overset{*}{\Gamma}_{jk}^m g_{mi} \right) b^i c^j \frac{dX^k}{d\xi} = 0. \quad (8.72)$$

Поскольку это уравнение должно выполняться при любых  $b^i, c^j$  и  $(dX^k/d\xi)$  (т.е. он о представляет собой тождество), то это возможно только, когда скобка обращается в нуль:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial X^k} = \overset{*}{\Gamma}_{ik}^m g_{mj} + \overset{*}{\Gamma}_{jk}^m g_{mi}. \quad (8.73)$$

В силу симметрии связности  $\overset{*}{\Gamma}_{ij}^m$ , это уравнение можно разрешить относительно  $\overset{*}{\Gamma}_{ij}^m$  так же, как это было проделано при доказательстве теоремы 6.1, в результате получим

$$\overset{*}{\Gamma}_{ij}^m = \Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2} g^{km} \left( \frac{\partial g_{kj}}{\partial X^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial X^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial X^k} \right), \quad (8.74)$$

т.е. связность в рассматриваемом пространстве является римановой, следовательно, в данном случае  $\mathbb{W}^n$  совпадает с  $\mathbb{V}^n$ . ▲

**Теорема 8.17.** *Пространство  $\mathbb{W}^n$  является римановым  $\mathbb{V}^n$  тогда и только тогда, когда*

1° *его кручение равно нулю:  $\Omega_{ij}^m = 0$ ,*  $(8.75)$

2° *ковариантная производная от метрической матрицы  $g_{ij}$  в  $\mathbb{W}^n$  тождественно равна нулю:  $\overset{*}{\nabla}_k g_{ij} = 0$ .*  $(8.76)$

▼ Если  $\mathbb{W}^n$  – риманово пространство  $\mathbb{V}^n$ , то в силу теорем 8.4 и 8.5 условия 1° и 2° выполнены.

Для доказательства достаточности рассмотрим абсолютную производную от скалярного произведения двух векторов  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$ , параллельно переносимых вдоль некоторой кривой  $\mathcal{L}$ :

$$\frac{\overset{*}{\mathcal{D}}}{d\xi} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) = \frac{dX^k}{d\xi} \overset{*}{\nabla}_k (g_{ij} b^i c^j) = \frac{dX^k}{d\xi} \left( g_{ij} (\overset{*}{\nabla}_k b^i c^j + b^i \overset{*}{\nabla}_k c^j) + (\overset{*}{\nabla}_k g_{ij}) b^i c^j \right), \quad (8.77)$$

но так как  $\overset{*}{\nabla}_k g_{ij} = 0$ , а  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  параллельно переносятся, т.е.

$$\frac{dX^k}{d\xi} \overset{*}{\nabla}_k b^i = 0 \quad \text{и} \quad \frac{dX^k}{d\xi} \overset{*}{\nabla}_k c^i = 0,$$

то выражение в правой части (8.77) обращается в нуль. Следовательно,

$$\frac{\overset{*}{\mathcal{D}}}{d\xi} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) = 0$$

для любой кривой  $\mathcal{L}$ , т.е. выполнены условия теоремы 8.16, а значит  $\mathbb{W}^n$  – риманово пространство  $\mathbb{V}^n$ .  $\blacktriangle$

### 8.3.3. Риманово пространство абсолютного параллелизма

Пространство  $\mathbb{W}^n$  с римановой связностью нам уже было по сути известно, в п.8.3.2 мы лишь показали его место среди пространств с аффинной связностью. Рассмотрим теперь важный пример пространства  $\mathbb{W}^n$  с неримановой связностью.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.20.** Пространство  $\mathbb{W}^n$  называют *римановым пространством абсолютного параллелизма*  $\mathbb{A}_V^n$ , если его связность  $\overset{*}{\Gamma}_{ij}^m$  обладает свойством (8.56), т.е. в каждой точке  $M \in \mathbb{W}^n$  существует  $n$  линейно независимых касательных векторов  $\overset{*}{e}_i = S^k_i e_k$ , таких, что

$$\overset{*}{\Gamma}_{ij}^m = S^m_k (S^{-1})^k_{i,j}. \quad (8.78)$$

Здесь, как и в п.8.2.6,  $S^k_i$  – матрица компонентов векторов  $\overset{*}{e}_i$  в базисе  $e_i$  пространства  $T_M M^n$ , а  $(S^{-1})^k_i$  – обратная к ней матрица.

Сравнивая определения 8.17 и 8.20, заключаем, что  $\mathbb{A}_V^n$  – это пространство  $\mathbb{A}^n$  с введенной в нем метрикой, поэтому теоремы 8.12 – 8.14 имеют место и в  $\mathbb{A}_V^n$ . Установим теперь свойства, присущие пространству  $\mathbb{A}_V^n$ .

Введем кроме  $g_{ij}$  в пространстве  $\mathbb{A}_V^n$  матрицы

$$\overset{*}{g}_{ij} = \overset{*}{e}_i \cdot \overset{*}{e}_j \quad \text{и} \quad \overset{*}{g}^{ij} \overset{*}{g}_{jk} = \delta^i{}_k. \quad (8.79)$$

**ТЕОРЕМА 8.18.** В пространстве  $\mathbb{A}_V^n$  метрические матрицы  $g_{ij}$ ,  $g^{ij}$  и  $\overset{*}{g}_{ij}$ ,  $\overset{*}{g}^{ij}$  – ковариантно-постоянны, т.е. тождественно равны нулю их ковариантные производные:

$$\overset{*}{\nabla}_i g_{kl} = 0, \quad \overset{*}{\nabla}_i g^{kl} = 0, \quad \overset{*}{\nabla}_i \overset{*}{g}_{kl} = 0, \quad \overset{*}{\nabla}_i \overset{*}{g}^{kl} = 0. \quad (8.80)$$

▼ Используя формулу (8.45), вычислим  $\overset{*}{\nabla}_i \overset{*}{g}_{kl}$ , рассматривая его как градиент от скаляра при фиксированных  $k$  и  $l$ :

$$\overset{*}{\nabla}_i \overset{*}{g}_{kl} = \overset{*}{\nabla}(\overset{*}{e}_k \cdot \overset{*}{e}_l) = (\overset{*}{\nabla} \otimes \overset{*}{e}_k) \cdot \overset{*}{e}_l + (\overset{*}{\nabla} \otimes \overset{*}{e}_l) \cdot \overset{*}{e}_k = 0. \quad (8.81)$$

Здесь мы воспользовались теоремой 8.13. Тогда по определению (8.45) получаем:  $\overset{*}{\nabla}_i \overset{*}{g}_{kl} = \overset{*}{\nabla}_i \overset{*}{g}_{kl} e^i = 0$ , откуда следует  $\overset{*}{\nabla}_i \overset{*}{g}_{kl} = 0$ . Дифференцируя второе соотношение в (8.79), находим:

$$(\overset{*}{\nabla}_l \overset{*}{g}^{ij}) \overset{*}{g}_{jk} = -(\overset{*}{\nabla}_l \overset{*}{g}_{jk}) \overset{*}{g}^{ij} = 0,$$

поэтому  $\overset{*}{\nabla}_l g^{ij} = 0$ .

Для доказательства первого соотношения в (8.80), используем связь векторов  $\overset{*}{e}_i$  и  $e_i$  из определения 8.17, тогда

$$g_{ij} = e_i \cdot e_j = (S^{-1})_i^k (S^{-1})_j^l \overset{*}{e}_k \cdot \overset{*}{e}_l = (S^{-1})_i^k (S^{-1})_j^l \overset{*}{g}_{kl}.$$

Поскольку матрицы  $(S^{-1})_i^k$  и  $\overset{*}{g}_{kl}$  – ковариантно-постоянны (см. (8.58) и (8.80)), то и  $g_{ij}$ , а вместе с ней и  $g^{ij}$  также ковариантно-постоянны.

▲

Заметим, что хотя  $g_{ij}$  – ковариантно-постоянна, но кручение  $\Omega_{ij}^m$  связности (8.78) не равно нулю, поэтому пространство  $A_V^n$  не является римановым  $V^n$ .

Установим теперь соотношение между связностью  $\overset{*}{\Gamma}_{ij}^m$  и символами Кристоффеля  $\Gamma_{ij}^m$ , которые определены в  $A_V^n$  формулой (8.19). Будем, как и в пространстве  $V^n$ , обозначать ковариантную относительно символов  $\Gamma_{ij}^m$  производную как  $\nabla_j$ , и введем новый объект:

$$T_{ij}^m = S^m_k \nabla_j (S^{-1})_i^k, \quad (8.82)$$

называемый *коэффициентами вращения Риччи* (если бы в этой формуле стояла производная  $\overset{*}{\nabla}_j$ , то все выражение обратилось бы в нуль), здесь  $\nabla_j (S^{-1})_i^k = (S^{-1})_{i,j}^k - \Gamma_{ij}^l (S^{-1})_l^k$ .

**ТЕОРЕМА 8.19.** Связность в пространстве  $A_V^n$  может быть представлена в виде:

$$\overset{*}{\Gamma}_{ij}^m = \Gamma_{ij}^m + T_{ij}^m. \quad (8.83)$$

▼ Для доказательства воспользуемся третьей формулой в (8.60), которую умножим на матрицу  $S^m_k$ :

$$\begin{aligned} 0 &= S^m_k \overset{*}{\nabla}_j (S^{-1})_i^k = S^m_k (S^{-1})_{i,j}^k - S^m_k \overset{*}{\Gamma}_{ij}^l (S^{-1})_l^k = \\ &= S^m_k (S^{-1})_{i,j}^k - \Gamma_{ij}^m + \Gamma_{ij}^m + \overset{*}{\Gamma}_{ij}^m. \end{aligned} \quad (8.84)$$

Здесь мы добавили и вычли символы Кристоффеля  $\overset{*}{\Gamma}_{ij}^m$ , тогда, сравнивая с (8.82), получаем

$$\overset{*}{\Gamma}_{ij}^m = \Gamma_{ij}^m + S^m_k ((S^{-1})_{i,j}^k - \Gamma_{ij}^l (S^{-1})_l^k) = \Gamma_{ij}^m + T_{ij}^m. \quad \blacktriangle \quad (8.85)$$

**Теорема 8.20.** Коэффициенты вращения Риччи являются компонентами тензора третьего ранга и могут быть выражены через тензор кручения следующим образом:

$${}^3T = {}^3\Omega + {}^3\Omega^{(132)} - {}^3\Omega^{(312)}. \quad (8.86)$$

▼ Вначале установим вспомогательную формулу, имеющую и самостоятельный интерес. Из теоремы 8.18 следует, что  $\overset{*}{\nabla}_i g_{kl} = g_{kl,i} - \overset{*}{\Gamma}_{ki}^m g_{ml} - \overset{*}{\Gamma}_{li}^m g_{mk} = 0$ , откуда получаем:

$$g_{kl,i} = \overset{*}{\Gamma}_{ki}^m g_{ml} + \overset{*}{\Gamma}_{li}^m g_{mk}. \quad (8.87)$$

Подставим эти производные в выражение (8.69) для символов Кристоффеля  $\overset{*}{\Gamma}_{ij}^m$ :

$$\overset{*}{\Gamma}_{ij}^m = \frac{1}{2} g^{mp} (\overset{*}{\Gamma}_{ij}^t g_{tp} + \overset{*}{\Gamma}_{pj}^t g_{mi} + \overset{*}{\Gamma}_{ji}^t g_{tp} + \overset{*}{\Gamma}_{pi}^t g_{tj} - \overset{*}{\Gamma}_{ip}^t g_{tj} - \overset{*}{\Gamma}_{jp}^t g_{ti}). \quad (8.88)$$

Введем обозначение

$$\overset{*}{\Gamma}_{(ij)}^t = \frac{1}{2} (\overset{*}{\Gamma}_{ij}^t + \overset{*}{\Gamma}_{ji}^t) \quad (8.89)$$

для симметризованной связности и используем определение (8.52) тензора кручения, тогда получим

$$\overset{*}{\Gamma}_{ij}^m = \overset{*}{\Gamma}_{(ij)}^m - g^{mp} (g_{ti} \overset{*}{\Omega}_{pj}^t + g_{tj} \overset{*}{\Omega}_{pi}^t) \quad (8.90)$$

— искомое соотношение между связностями  $\overset{*}{\Gamma}_{ij}^m$ ,  $\overset{*}{\Gamma}_{ij}^m$  и метрической матрицей  $g_{ti}$ .

Подставим теперь формулу (8.90) в (8.83) и выразим из нее  $T_{ij}^m$ , в результате получим

$$T_{ij}^m = -\overset{*}{\Omega}_{ij}^m + g^{mp} (g_{ti} \overset{*}{\Omega}_{pj}^t + g_{tj} \overset{*}{\Omega}_{pi}^t). \quad (8.91)$$

Поскольку в правой части этого выражения стоят компоненты тензоров, то и коэффициенты вращения Риччи  $T_{ij}^m$  являются компонентами тензора третьего ранга:

$${}^3T = T_{ij}^m e_m \otimes e^i \otimes e^j. \quad (8.92)$$

Подставляя соотношение (8.91) в (8.92), получаем соотношение

$${}^3T = (-\overset{*}{\Omega}_{ij}^m + \overset{*}{\Omega}_{ji}^m + \overset{*}{\Omega}_{ij}^m) e_m \otimes e^i \otimes e^j = {}^3\Omega + {}^3\Omega^{(132)} - {}^3\Omega^{(312)}, \quad (8.93)$$

которое и доказывает теорему. ▲

Поскольку  ${}^3T$  – тензор, то для него в пространстве  $\mathbb{A}_V^n$  определена операция поднятия – опускания индексов, поэтому коэффициенты  $T_{ij}^m$  следует писать как  $T^m_{ij}$ . Условимся однако для этой конкретной комбинации индексов использовать оба обозначения:  $T_{ij}^m = T^m_{ij}$ .

## § 8.4. Тензор Римана-Кристоффеля

### 8.4.1. Тензор кривизны пространства $\mathbb{L}^n$

В §7.2 мы ввели понятие тензора кривизны  ${}^4\tilde{R}$  – Римана-Кристоффеля для поверхностей в  $\mathbb{R}^3$ . Покажем теперь как можно ввести этот тензор в пространстве аффинной связности  $\mathbb{L}^n$ .

Рассмотрим в точке  $M \in \mathbb{L}^n$  произвольный вектор  $b = b^k e_k$  из  $T_M \mathbb{L}^n$  и вычислим его ковариантную производную относительно связности  $\overset{*}{\Gamma}_{ij}^m$  (8.42):

$$\overset{*}{\nabla}_i b^k = \frac{\partial b^k}{\partial X^i} + \overset{*}{\Gamma}_{si}^k b^s. \quad (8.94)$$

Вычислим вторую ковариантную производную:

$$\begin{aligned} \overset{*}{\nabla}_j \overset{*}{\nabla}_i b^k &= \frac{\partial}{\partial X^j} (\overset{*}{\nabla}_i b^k) + \overset{*}{\Gamma}_{mj}^k \overset{*}{\nabla}_i b^m - \overset{*}{\Gamma}_{ij}^m \overset{*}{\nabla}_m b^k = \frac{\partial^2 b^k}{\partial X^j \partial X^i} + \frac{\partial \overset{*}{\Gamma}_{si}^k}{\partial X^j} b^s + \\ &+ \overset{*}{\Gamma}_{si}^k \frac{\partial b^s}{\partial X^j} + \overset{*}{\Gamma}_{mj}^k \left( \frac{\partial b^m}{\partial X^i} + \overset{*}{\Gamma}_{si}^m b^s \right) - \overset{*}{\Gamma}_{ij}^m \left( \frac{\partial b^k}{\partial X^m} + \overset{*}{\Gamma}_{sm}^k b^s \right). \end{aligned} \quad (8.95)$$

Поменяем теперь индексы  $i$  и  $j$  и образуем разность:

$$\begin{aligned} \overset{*}{\nabla}_j \overset{*}{\nabla}_i b^k - \overset{*}{\nabla}_i \overset{*}{\nabla}_j b^k &= \left( \frac{\partial \overset{*}{\Gamma}_{si}^k}{\partial X^j} - \frac{\partial \overset{*}{\Gamma}_{sj}^k}{\partial X^i} + \overset{*}{\Gamma}_{mj}^k \overset{*}{\Gamma}_{si}^m - \overset{*}{\Gamma}_{mi}^k \overset{*}{\Gamma}_{sj}^m \right) b^s - \\ &- (\overset{*}{\Gamma}_{ij}^m - \overset{*}{\Gamma}_{ji}^m) \overset{*}{\nabla}_m b^k. \end{aligned} \quad (8.96)$$

Коэффициенты, стоящие в первой скобке, обозначим следующим образом:

$$\overset{*}{R}_{jis}^k = \overset{*}{\Gamma}_{si,j}^k - \overset{*}{\Gamma}_{sj,i}^k + \overset{*}{\Gamma}_{mi}^m \overset{*}{\Gamma}_{mj}^k - \overset{*}{\Gamma}_{sj}^m \overset{*}{\Gamma}_{mi}^k. \quad (8.97)$$

Здесь, как и ранее,  $\overset{*}{\Gamma}_{si,j}^k = \partial \overset{*}{\Gamma}_{si}^k / \partial X^j$ . Выражение во второй скобке в (8.96) представляет собой компоненты тензора кручения (8.52). Тогда получим

$$\overset{*}{\nabla}_j \overset{*}{\nabla}_i b^k - \overset{*}{\nabla}_i \overset{*}{\nabla}_j b^k = \overset{*}{R}_{jis}^k b^s - 2\Omega_{ji}^m \overset{*}{\nabla}_m b^k. \quad (8.98)$$

**ТЕОРЕМА 8.21.** Система коэффициентов  $\overset{*}{R}_{j;i}^k$ , образованная по формуле (8.97), представляет собой компоненты тензора  ${}^4\overset{*}{R}$  четвертого ранга из пространства  $T_n^{(31)}(T_M \mathbb{L}^n)$ :

$${}^4\overset{*}{R} = \overset{*}{R}_{j;i}^k e^j \otimes e^i \otimes e^s \otimes e_k. \quad (8.99)$$

▼ Доказательство следует из формулы (8.98), поскольку в левой части этой формулы стоят компоненты тензора третьего ранга (см. п.8.2.2), а  $\nabla_m b^k$ ,  $\Omega_{j;i}^m$ ,  $b^s$  также являются компонентами тензоров (см. теорему 8.10). ▲

Тензор (8.99) называют тензором *кривизны пространства*  $\mathbb{L}^n$  относительно связности  $\overset{*}{\Gamma}_{ij}^m$  (или тензором Римана-Кристоффеля).

Вместо ковариантной производной в (8.98) можно рассмотреть абсолютную производную вектора. Пусть имеются две кривые  $X^i(\xi)$  и  $X^i(\eta)$ , проходящие через точку  $M$ . Вычислим абсолютные производные некоторого вектора  $b$  вдоль этих кривых:

$$\frac{\mathcal{D}b^k}{d\xi} = \frac{dX^i}{d\xi} \overset{*}{\nabla}_i b^k \quad \text{и} \quad \frac{\mathcal{D}b^k}{d\eta} = \frac{dX^i}{d\eta} \overset{*}{\nabla}_i b^k,$$

а затем вычислим вторую абсолютную производную

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{D}}{d\eta} \frac{\mathcal{D}b^k}{d\xi} &= \frac{dX^i}{d\eta} \overset{*}{\nabla}_i \left( \frac{\mathcal{D}b^k}{d\xi} \right) = \frac{dX^i}{d\eta} \overset{*}{\nabla}_i \left( \frac{dX^j}{d\xi} \overset{*}{\nabla}_j b^k \right) = \frac{dX^i}{d\eta} \left( (\overset{*}{\nabla}_i \frac{dX^j}{d\xi}) \overset{*}{\nabla}_j b^k + \right. \\ &\left. + \frac{dX^j}{d\xi} \overset{*}{\nabla}_i \overset{*}{\nabla}_j b^k \right) = \frac{dX^i}{d\eta} \frac{dX^j}{d\xi} (\overset{*}{\nabla}_i \overset{*}{\nabla}_j b^k + \overset{*}{\Gamma}_{ji}^m \overset{*}{\nabla}_m b^k). \end{aligned} \quad (8.100)$$

Здесь мы учли, что  $\frac{\partial}{\partial X^j} \left( \frac{dX^i}{d\xi} \right) = \frac{d}{d\xi} \frac{\partial X^i}{\partial X^j} = \frac{d}{d\xi} \delta_i^j = 0$ , и поэтому

$$\overset{*}{\nabla}_i \left( \frac{dX^j}{d\xi} \right) = \frac{\partial}{\partial X^j} \left( \frac{dX^j}{d\xi} \right) + \overset{*}{\Gamma}_{mj}^i \frac{dX^m}{d\xi} = \overset{*}{\Gamma}_{mj}^i \frac{dX^m}{d\xi}.$$

Если теперь вычислить абсолютную производную в обратном порядке, то получим

$$\frac{\mathcal{D}}{d\xi} \frac{\mathcal{D}b^k}{d\eta} = \frac{dX^i}{d\xi} \frac{dX^j}{d\eta} (\overset{*}{\nabla}_j \overset{*}{\nabla}_i b^k + \overset{*}{\Gamma}_{ij}^m \overset{*}{\nabla}_m b^k). \quad (8.101)$$

Вычитая (8.101) из (8.100), находим

$$\frac{\mathcal{D}}{d\xi} \frac{\mathcal{D}b^k}{d\eta} - \frac{\mathcal{D}}{d\eta} \frac{\mathcal{D}b^k}{d\xi} = (\overset{*}{\nabla}_j \overset{*}{\nabla}_i b^k - \overset{*}{\nabla}_i \overset{*}{\nabla}_j b^k + (\overset{*}{\Gamma}_{ij}^m - \overset{*}{\Gamma}_{ji}^m) \overset{*}{\nabla}_m b^k) \frac{dX^i}{d\eta} \frac{dX^j}{d\xi}. \quad (8.102)$$

Левую часть выражения (8.102) называют альтернированным вторым абсолютным дифференциалом. Учитывая (8.98), приходим к следующей теореме.

**Теорема 8.22.** Альтернированный второй абсолютный дифференциал всякого касательного вектора из  $\mathbb{L}^n$  определяется тензором кривизны пространства  ${}^4\overset{*}{R}$ :

$$\frac{\mathcal{D}}{d\xi} \frac{\mathcal{D}b^k}{d\eta} - \frac{\mathcal{D}}{d\eta} \frac{\mathcal{D}b^k}{d\xi} = {}^*R_{j;is}^k b^s \frac{dX^i}{d\eta} \frac{dX^j}{d\xi}. \quad (8.103)$$

Иначе говоря, вторая абсолютная производная зависит от порядка вычисления первых абсолютных производных.

#### 8.4.2. Тензор кривизны пространства $\mathbb{A}^n$

Покажем, что кривизна пространства  $\mathbb{L}^n$  непосредственно связана с независимостью параллельного переноса тензоров от пути.

**Теорема 8.23.** В пространстве  $\mathbb{A}^n$  (в случае односвязного  $\mathbb{L}^n$ ) и только в нем тензор кривизны  ${}^4\overset{*}{R}$  тождественно обращается в нуль:

$${}^4\overset{*}{R} = 0 \quad \text{в } \mathbb{A}^n. \quad (8.104)$$

▼ Необходимость. Рассмотрим пространство  $\mathbb{A}^n$ . Разумеется, можно непосредственно подставить связность (8.56) в (8.97) и убедиться, что выполняется (8.101). Однако мы поступим по-другому.

Выберем произвольный касательный вектор  $b$  в точке  $M \in \mathbb{A}^n$  и параллельно перенесем его в точку  $N \in \mathbb{A}^n$ , тогда  $b$  будет удовлетворять уравнению (8.47), т.е.  $\frac{dX^i}{d\xi} {}^*\bar{\nabla}_i b^j = 0$ .

Поскольку мы находимся в пространстве  $\mathbb{A}^n$ , то результат параллельного переноса не зависит от кривой, соединяющей точки  $M$  и  $N$ , т.е. от вектора  $(dX^i/d\xi)$ , касательного к кривой, и, следовательно, имеет место соотношение  ${}^*\bar{\nabla}_i b^j = 0$ . Тогда, подставляя этот результат в (8.98), получим, что должно иметь место тождество  ${}^*R_{j;is}^k b^s = 0$  для любого вектора  $b^s$ . Следовательно, действительно имеет место тождество (8.101).

Достаточность. Пусть в пространстве  $\mathbb{L}^n$  тензор  ${}^4\overset{*}{R}$  тождественно равен нулю. Рассмотрим в этом пространстве некоторую кривую  $X^i(\xi)$ ,  $\xi_M \leq \xi \leq \xi_N$ . Для нее всегда можно ввести семейство кривых  $X^i(\xi, \eta)$ ,  $\eta_1 \leq \eta \leq \eta_2$  с совпадающими крайними точками  $X^i(\xi_M, \eta) = X_M^i$ ,  $X^i(\xi_N, \eta) = X_N^i$  для любого  $\eta$ , причем для определенности положим, что  $X^i(\xi, \eta_1) = X^i(\xi)$ .

Рассмотрим семейство векторов  $b(\xi, \eta) \in T_M M^n$ , параллельно переносимых вдоль соответствующей кривой из семейства  $X^i(\xi, \eta)$ . Тогда  $b(\xi, \eta)$  удовлетворяет уравнению  $\mathcal{D}b/d\xi = 0$  для любого  $\eta$ . Образуем альтернированный второй дифференциал касательного вектора

$\mathbf{b}$ , в силу отсутствия кривизны пространства  $\mathbb{L}^n$  получаем

$$\frac{\mathcal{D}}{d\xi} \frac{\mathcal{D}}{d\eta} b^k - \frac{\mathcal{D}}{d\eta} \frac{\mathcal{D}}{d\xi} b^k = \frac{\mathcal{D}}{d\xi} \frac{\mathcal{D}}{d\eta} b^k = 0. \quad (8.105)$$

Здесь  $\mathcal{D}b^k/d\eta = (db^k/d\eta) + \overset{*}{\Gamma}_{mi}^k b^m (dX^i/d\eta)$ . Поскольку по построению все кривые семейства  $X^i(\xi, \eta)$  совпадают в крайних точках, то  $dX^i/d\eta = 0$  для  $\xi = \xi_M$  и  $\xi = \xi_N$ . Поэтому в точках  $M$  и  $N$  имеем  $\mathcal{D}b^k/d\eta = (db^k/d\eta)$  для любого  $\eta$ . Но в силу того же построения в точке  $M$  все векторы  $\mathbf{b}$  совпадают, поэтому  $db^k/d\eta = \mathcal{D}b^k/d\eta = 0$  в точке  $M$ . Если теперь мы обратимся к уравнению (8.105), то его можно рассматривать как параллельный перенос вектора  $\mathcal{D}b^k/d\eta$  вдоль кривой  $X^i(\xi, \eta)$ ,  $\xi_M \leq \xi \leq \xi_N$ , т.е.  $(dX^i/d\xi) \overset{*}{\nabla}_i (\mathcal{D}b^k/d\eta) = 0$ . Однако мы установили, что вектор  $\mathcal{D}b^k/d\eta = 0$  в точке  $M$  для любого  $\eta$ , тогда результат параллельного переноса вдоль  $X^i(\xi, \eta)$  также даст вектор нуль, т.е. в частности  $\mathcal{D}b^k/d\eta = 0$  и в точке  $N$  для любого  $\eta$ . Это, в свою очередь, означает, что результат параллельного переноса из точки  $M$  в  $N$  не зависит от той кривой семейства, по которой осуществляется перенос.

Если  $\mathbb{L}^n$  – односвязное, то любые две кривые, соединяющие точки  $M$  и  $N$  этого пространства могут быть объединены в одно семейство  $X^i(\xi, \eta)$  непрерывным переходом. Следовательно, полученный выше результат о независимости параллельного переноса от пути справедлив для любых кривых. Тогда согласно теореме 8.14, рассматриваемое пространство  $\mathbb{L}^n$  является пространством абсолютного параллелизма  $\mathbb{A}^n$ . ▲

#### 8.4.3. Тензор кривизны пространства $\mathbb{L}_0^n$

Покажем теперь, что при отсутствии кручения кривизна пространства  $\mathbb{L}^n$  связана со свойством его локальной аффинности (см. п.8.2.7).

**Теорема 8.24.** Для того, чтобы пространство  $\mathbb{L}^n$  было локально-аффинным  $\mathbb{L}_A^n$  необходимо и достаточно, чтобы оно обладало нулевой кривизной и нулевым кручением:

$${}^3\Omega = 0 \quad \text{и} \quad {}^4\overset{*}{R} = 0 \quad \text{в } \mathbb{L}^n. \quad (8.106)$$

▼ Необходимость условий (8.106) очевидна, так как если  $\mathbb{L}^n$  – локально-аффинное, то в окрестности любой точки существует система координат, в которой  $\overset{*}{\Gamma}_{ij}^m \equiv 0$ , а, следовательно, по (8.97)  $\overset{*}{R}_{ijk}^l \equiv 0$  и по (8.52)  $\Omega_{ij}^k \equiv 0$ . Но поскольку  $\overset{*}{R}_{ijk}^l$  и  $\Omega_{ij}^k$  являются компонентами тензоров, то они будут нулевыми в любой системе координат во всем  $\mathbb{L}^n$ .

Покажем достаточность. Разобьем  $\mathbb{L}^n$  на односвязные области, тогда каждая из этих областей имеет нулевую кривизну и по теореме 8.23 должна обладать абсолютным параллелизмом. Но в этих областях нет и кручения, тогда по теореме 8.15 они представляют собой локально-аффинное пространство. ▲

#### 8.4.4. Тождества Бианки в пространстве $\mathbb{L}_0^n$

**ТЕОРЕМА 8.25.** В пространстве  $\mathbb{L}_0^n$  тензор кривизны  ${}^4\overset{*}{R}$  удовлетворяет следующим тождествам:

$$\overset{*}{\nabla}_q \overset{*}{R}_{njik} + \overset{*}{\nabla}_j \overset{*}{R}_{qnik} + \overset{*}{\nabla}_n \overset{*}{R}_{jqik} = 0, \quad (8.107)$$

которые называют тождествами Бианки.

▼ Поскольку  $\overset{*}{R}_{njik}$  являются компонентами тензора, и ковариантные производные от компонент тензора снова образуют компоненты тензора, то уравнения (8.107) имеют тензорный характер. Это означает, что если мы покажем обращение левой части (6.169) в нуль в какой-либо системе координат  $X^{i'}$ , то в любой другой системе координат  $X^i$  оно также обращается в нуль.

Согласно теореме 8.11, в каждой точке пространства  $\mathbb{L}_0^n$  можно выбрать такую систему координат  $X^i$ , в которой символы Кристоффеля обращаются в нуль:  $\overset{*}{\Gamma}_{ij}^m = 0$  (и  $\overset{*}{\Gamma}_{ijk} = 0$ ), такие координаты называют геодезическими. Заметим, что производные  $\partial \overset{*}{\Gamma}_{ijk} / \partial X^n$  в этих точках уже, вообще говоря, отличны от нуля, тогда на основании (8.97) имеем:

$$\overset{*}{\nabla}_q \overset{*}{R}_{njik} = \frac{\partial^2 \overset{*}{\Gamma}_{ijk}}{\partial X^n \partial X^q} - \frac{\partial^2 \overset{*}{\Gamma}_{ink}}{\partial X^j \partial X^q}. \quad (8.108)$$

Меняя в этом выражении циклическим образом первые три индекса, а затем складывая полученные результаты, находим

$$\begin{aligned} \overset{*}{\nabla}_q \overset{*}{R}_{njik} + \overset{*}{\nabla}_j \overset{*}{R}_{qnik} + \overset{*}{\nabla}_n \overset{*}{R}_{jqik} &= \frac{\partial^2 \overset{*}{\Gamma}_{ijk}}{\partial X^n \partial X^q} - \frac{\partial^2 \overset{*}{\Gamma}_{ink}}{\partial X^j \partial X^q} + \\ &+ \frac{\partial^2 \overset{*}{\Gamma}_{ink}}{\partial X^q \partial X^j} - \frac{\partial^2 \overset{*}{\Gamma}_{iqk}}{\partial X^n \partial X^j} + \frac{\partial^2 \overset{*}{\Gamma}_{iqk}}{\partial X^j \partial X^n} - \frac{\partial^2 \overset{*}{\Gamma}_{ijk}}{\partial X^q \partial X^n} = 0, \end{aligned} \quad (8.109)$$

откуда действительно следует тождество Бианки. ▲

#### 8.4.5. Тензор кривизны пространства $\mathbb{V}^n$

В римановом пространстве  $\mathbb{V}^n$  связность  $\overset{*}{\Gamma}_{ij}^m$  является римановой, т.е.  $\overset{*}{\Gamma}_{ij}^m = \overset{*}{\Gamma}_{ij}^m$ , где  $\overset{*}{\Gamma}_{ij}^m$  определяется формулой (8.19). Для тензора

Римана-Кристоффеля, порожденного этой связностью, будем использовать специальное обозначение  $\overset{*}{R}_{nji}^m = R_{nji}^m$ , где

$$R_{nji}^m = \frac{\partial \Gamma_{ij}^m}{\partial X^n} - \frac{\partial \Gamma_{in}^m}{\partial X^j} + \Gamma_{ij}^k \Gamma_{kn}^m - \Gamma_{in}^k \Gamma_{kj}^m. \quad (8.110)$$

Поскольку  $\Gamma_{ij}^m$  связаны с метрической матрицей, то и  $R_{nji}^m$  можно выразить через метрическую матрицу:

$$\Gamma_{ijk} + \Gamma_{kji} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial X^j} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{kj}}{\partial X^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial X^k} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial X^k} - \frac{\partial g_{kj}}{\partial X^i} \right) = \frac{\partial g_{ik}}{\partial X^j}. \quad (8.111)$$

Чисто ковариантные компоненты тензора Римана-Кристоффеля определяют следующим образом:

$$R_{nji}^k = R_{nji}^m g_{mk} = g_{mk} \left( \frac{\partial(\Gamma_{ijl} g^{ml})}{\partial X^n} - \frac{\partial(\Gamma_{ikl} g^{ml})}{\partial X^j} \right) + \\ + g^{sl} (\Gamma_{ijl} \Gamma_{snk} - \Gamma_{inl} \Gamma_{sjk}). \quad (8.112)$$

Используя соотношение

$$g_{mk} (\partial g^{ml} / \partial X^n) = -g^{ml} (\partial g_{mk} / \partial X^n) = -g^{ml} (\Gamma_{mnk} + \Gamma_{knm}),$$

приводим  $R_{nji}^k$  к виду

$$R_{nji}^k = \frac{\partial \Gamma_{ijk}}{\partial X^n} - \frac{\partial \Gamma_{ink}}{\partial X^j} - \Gamma_{ijl} (\Gamma_{mnk} + \Gamma_{knm}) g^{ml} + \\ + g^{ml} \Gamma_{inl} (\Gamma_{kjm} + \Gamma_{mjn}) + g^{sl} (\Gamma_{ijl} \Gamma_{snk} - \Gamma_{inl} \Gamma_{sjk}) = \\ = \frac{\partial \Gamma_{ijk}}{\partial X^n} - \frac{\partial \Gamma_{ink}}{\partial X^j} - g^{ml} (\Gamma_{inl} \Gamma_{kjm} - \Gamma_{ijl} \Gamma_{knm}). \quad (8.113)$$

Подставляя теперь вместо производных от  $\Gamma_{ijk}$  их выражения (8.18) через метрическую матрицу, находим

$$R_{nji}^k = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial X^j \partial X^n} + \frac{\partial^2 g_{kj}}{\partial X^i \partial X^n} - \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial X^k \partial X^n} - \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial X^n \partial X^j} - \right. \\ \left. - \frac{\partial^2 g_{kn}}{\partial X^i \partial X^j} + \frac{\partial^2 g_{in}}{\partial X^k \partial X^j} \right) + g^{ml} (\Gamma_{inl} \Gamma_{kjm} - \Gamma_{ijl} \Gamma_{knm}) = \\ = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 g_{kj}}{\partial X^i \partial X^n} - \frac{\partial^2 g_{kn}}{\partial X^i \partial X^j} + \frac{\partial^2 g_{in}}{\partial X^k \partial X^j} - \frac{\partial^2 g_{kn}}{\partial X^i \partial X^j} \right) + \\ + g^{ml} (\Gamma_{inl} \Gamma_{kjm} - \Gamma_{ijl} \Gamma_{knm}), \quad (8.114)$$

таким образом, получаем следующую теорему.

**Теорема 8.26.** В римановом пространстве  $\mathbb{V}^n$  тензор кривизны Римана-Кристоффеля можно выразить с помощью метрической матрицы  $g_{ij}$ :

$$\begin{aligned} R_{njik} = & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 g_{kj}}{\partial X^i \partial X^n} - \frac{\partial^2 g_{kn}}{\partial X^i \partial X^j} + \frac{\partial^2 g_{in}}{\partial X^k \partial X^j} - \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial X^k \partial X^n} \right) + \\ & + g^{ml} (\Gamma_{inl} \Gamma_{kjm} - \Gamma_{ijl} \Gamma_{km}) . \end{aligned} \quad (8.115)$$

**Определение 8.21.** Локально-евклидовым (или уплощенным)  $\mathbb{V}_E^n$  называют пространство  $\mathbb{V}^n$ , для каждой точки  $M \in \mathbb{V}^n$  которого существует такая система координат  $X'^i$ , что метрическая матрица  $g_{ij}(M)$  является постоянной в некоторой окрестности точки  $M$ .

Очевидно, что уплощенное пространство представляет собой локально-аффинное пространство с римановой связностью (8.18).

**Теорема 8.27.** Риманово пространство  $\mathbb{V}^n$  является уплощенным тогда и только тогда, когда тензор кривизны  ${}^4R$  в нем тождественно обращается в нуль:  ${}^4R \equiv 0$ .

▼ Необходимость очевидна, так как если  $\mathbb{V}^n$  – локально-евклидово, то в каждой точке  $M \in \mathbb{V}^n$  можно найти такую систему координат  $X'^i$ , что  $g_{ij} = \text{const}$  в некоторой окрестности точки  $M$ , поэтому все частные производные от  $g_{ij}$  обращаются в нуль. Следовательно,  $\Gamma_{ij}^m \equiv 0$  в этой системе координат, и по (8.110) получаем, что  $R_{njik} \equiv 0$  в системе  $X'^i$ , а значит и в любой другой.

Покажем достаточность. Пусть  ${}^4R \equiv 0$  в  $\mathbb{V}^n$ . Так как  $\mathbb{V}^n$  можно рассматривать как пространство  $\mathbb{L}^n$  со специальной связностью  $\Gamma_{ij}^m$  и без кручения (см. теорему 8.3), то согласно теореме 8.24 оно является локально-аффинным. Тогда в каждой точке  $M$  этого пространства  $\mathbb{V}^n$  существует такая система координат  $X'^i$ , в которой  $\Gamma_{ij}^m \equiv 0$ . Но тогда, используя формулу (8.111), получаем  $g_{ik,j} = \Gamma_{ijk} + \Gamma_{kji} \equiv 0$  в окрестности точки  $M$ . Откуда получаем, что  $g_{ik} = \text{const}$  в этой окрестности, что и доказывает локальную евклидовость данного пространства  $\mathbb{V}^n$ . ▲

Теорема 8.27 обобщает доказанную ранее теорему 7.14, имеющую место для пространства  $\mathbb{V}^2$ , т.е. для двумерных поверхностей в пространстве  $\mathbb{R}^3$ .

#### 8.4.6. Свойства тензора Римана-Кристоффеля

**Теорема 8.28.** В пространстве  $\mathbb{V}^n$  компоненты тензора кривизны  $R_{njik}$  имеют симметрию по парам индексов  $n, j$  и  $i, k$ , а также кососимметрию по индексам  $n, j$  и  $i, k$ :

$$R_{njik} = R_{iknj}, \quad (8.116)$$

$$-R_{njik} = R_{njk i}, \quad R_{njik} = -R_{jnki}, \quad (8.117)$$

а также имеет место следующее тождество Риччи:

$$R_{njik} + R_{jink} + R_{injk} = 0. \quad (8.118)$$

▼ Доказательство очевидно следует из формулы (8.115), например, поскольку в тождестве Риччи четвертый индекс  $k$  стоит на месте, а три другие меняются круговой перестановкой, то из индексов  $nji$  один равен  $k$ . Тогда положив, например,  $n = \alpha$  и  $k = \alpha$ , получаем сумму:  $R_{\alpha jia} + R_{jia \alpha} + R_{ia \alpha j}$ . Несложно проверить, что второе слагаемое и сумма первого и третьего действительно обращаются в нуль. ▲

#### 8.4.7. Тензор кривизны пространства $\mathbb{A}_V^n$

Рассмотрим теперь риманово пространство абсолютного параллелизма  $\mathbb{A}_V^n$ .

**ТЕОРЕМА 8.29.** Тензор Римана-Кристоффеля  ${}^4R$  относительно связности  $\overset{*}{\Gamma}_{ij}^n$  (8.56) в пространстве  $\mathbb{A}_V^n$  тождественно равен нулю.

▼ Поскольку пространство  $\mathbb{A}_V^n$  является одновременно пространством абсолютного параллелизма  $\mathbb{A}^n$ , то утверждение данной теоремы является следствием доказанной выше теоремы 8.23. Проверим однако теорему непосредственным вычислением, которое представляет самостоятельный интерес.

Из формулы (8.56) находим, что  $(S^{-1})_{i,j}^k = \overset{*}{\Gamma}_{ij}^m (S^{-1})_m^k$ . Дифференцируя это соотношение по индексу  $n$ , получаем

$$(S^{-1})_{i,jn}^k = \overset{*}{\Gamma}_{ij,n}^m (S^{-1})_m^k + \overset{*}{\Gamma}_{ij}^m (S^{-1})_{m,n}^k = (\overset{*}{\Gamma}_{ij,n}^m + \overset{*}{\Gamma}_{ij}^m \overset{*}{\Gamma}_{mn}^p) (S^{-1})_p^k. \quad (8.119)$$

Поменяем здесь индексы  $j \leftrightarrow n$  и получившийся результат вычтем из (8.119), тогда получим

$$\begin{aligned} (S^{-1})_{i,jn}^k - (S^{-1})_{i,nj}^k &= (\overset{*}{\Gamma}_{ij,n}^p - \overset{*}{\Gamma}_{in,j}^p + \overset{*}{\Gamma}_{ij}^m \overset{*}{\Gamma}_{mn}^p - \overset{*}{\Gamma}_{in}^m \overset{*}{\Gamma}_{mj}^p) (S^{-1})_p^k = \\ &= \overset{*}{R}_{ijn}^p (S^{-1})_p^k. \end{aligned} \quad (8.120)$$

Поскольку левая часть этого выражения тождественно обращается в нуль (так как там стоят обычные частные производные), то и выражение в правой части должно быть нулем. Но  $(S^{-1})_p^k$  не может быть тождественным нулем, поэтому получаем, что  $\overset{*}{R}_{ijk}^p = 0$  для любого  $M \in \mathbb{A}^n$ . ▲

Поскольку в пространстве  $\mathbb{W}^n$  кроме связности  $\overset{*}{\Gamma}_{ij}^m$  определены символы  $\overset{*}{\Gamma}_{ij}^m$  (см. (8.69)), то с их помощью по формуле, аналогичной (8.97), можно образовать тензор четвертого ранга  ${}^4R$  с компонентами

$$R_{jis}^k = \overset{*}{\Gamma}_{si,j}^k - \overset{*}{\Gamma}_{sj,i}^k + \overset{*}{\Gamma}_{si}^m \overset{*}{\Gamma}_{mj}^k - \overset{*}{\Gamma}_{sj}^m \overset{*}{\Gamma}_{mi}^k, \quad (8.121)$$

который однако уже не является тензором кривизны пространства  $\mathbb{W}^n$  (т.е.  $R_{jis}^k \neq \overset{*}{R}_{jis}^k$ ). Для этого тензора имеет место следующая теорема.

**ТЕОРЕМА 8.30.** *Тензор  ${}^4R$  (8.121) в пространстве  $\mathbb{A}_V^n$ , вообще говоря, отличен от нуля и определяется коэффициентами вращения Риччи:*

$$R_{isj}^k = \nabla_i T_{sj}^k - \nabla_j T_{si}^k + T_{sj}^m T_{mi}^k - T_{si}^m T_{mj}^k. \quad (8.122)$$

▼ Так как тензор  ${}^4R$  в  $\mathbb{A}_V^n$  тождественно равен нулю, то, используя его определение (8.97), получаем

$$\overset{*}{R}_{jis}^k = \overset{*}{\Gamma}_{si,j}^k - \overset{*}{\Gamma}_{sj,i}^k + \overset{*}{\Gamma}_{si}^m \overset{*}{\Gamma}_{mj}^k - \overset{*}{\Gamma}_{sj}^m \overset{*}{\Gamma}_{mi}^k \equiv 0. \quad (8.123)$$

Согласно теореме 8.19, связность  $\overset{*}{\Gamma}_{ij}^m$  можно выразить через  $\overset{*}{\Gamma}_{ij}^m$  и коэффициенты вращения Риччи:  $\overset{*}{\Gamma}_{ij}^m = \overset{*}{\Gamma}_{ij}^m + T_{ij}^m$ . Подставим эти соотношения в формулу (8.123) и выделим в ней компоненты тензора  $R_{jis}^k$  (8.121):

$$\begin{aligned} \overset{*}{R}_{jis}^k &= R_{jis}^k + (T_{si,j}^k - T_{sj,i}^k + \overset{*}{\Gamma}_{si}^m T_{mj}^k + T_{si}^m \overset{*}{\Gamma}_{mj}^k - \overset{*}{\Gamma}_{sj}^m T_{mi}^k - T_{sj}^m \overset{*}{\Gamma}_{mi}^k + \\ &\quad + \overset{*}{\Gamma}_{is}^m T_{mj}^k - \overset{*}{\Gamma}_{si}^m T_{mj}^k) + T_{si}^m T_{mj}^k - T_{sj}^m T_{mi}^k = 0. \end{aligned} \quad (8.124)$$

Поскольку символы Кристоффеля  $\overset{*}{\Gamma}_{ij}^m$  симметричны по  $i, j$  (см. (8.69)), то в формуле (8.124) добавлено тождество  $\overset{*}{\Gamma}_{ij}^m T_{sm}^k - \overset{*}{\Gamma}_{ji}^m T_{sm}^k \equiv 0$ . Заметим теперь, что выражение в скобках в (8.124) представляет собой ковариантную производную  $\nabla$  (8.26) относительно символов  $T_{si}^m$ , т.е.

$$\nabla_j T_{si}^k = T_{si,j}^k + \overset{*}{\Gamma}_{mj}^k T_{si}^m - \overset{*}{\Gamma}_{sj}^m T_{mi}^k - \overset{*}{\Gamma}_{ij}^m T_{sm}^k. \quad (8.125)$$

Подставляя эту и альтернированную по  $i, j$  формулу в (8.124), убеждаемся в справедливости соотношения (8.122). ▲

**Теорема 8.31.** Тензор  ${}^4R$  в пространстве  $\mathbb{A}_V^n$  можно выразить с помощью матрицы  $S_p^k$ :

$$R_{jil}^k = S_p^k (\nabla_i \nabla_j (S^{-1})^p)_l - \nabla_j \nabla_i (S^{-1})^p_l. \quad (8.126)$$

▼ Для доказательства вычислим ковариантные производные  $\nabla_i T_{lj}^k$  от коэффициентов вращения Риччи (8.82):

$$T_{lj}^k = S_p^k \nabla_j (S^{-1})^p_l = -(S^{-1})^p_l \nabla_j S_p^k, \quad (8.127)$$

а также их произведения  $T_{lj}^m T_{mi}^k$ . Получим следующие выражения:

$$\nabla_i T_{lj}^k = \nabla_i S_p^k \nabla_j (S^{-1})^p_l + S_p^k \nabla_i \nabla_j (S^{-1})^p_l, \quad (8.128)$$

$$T_{lj}^m T_{mi}^k = -S_p^m \nabla_j (S^{-1})^p_l (S^{-1})^t_m \nabla_i S_t^k = -\nabla_i S_p^k \nabla_j (S^{-1})^p_l.$$

Подставляя эти и альтернированные по  $i, j$  выражения в формулу (8.122), действительно приходим к соотношению (8.126). ▲

#### 8.4.8. Тензор Риччи

В пространстве  $\mathbb{W}^n$  из тензора Римана-Кристоффеля можно образовать несколько тензоров второго ранга. Свертка транспонированного тензора Римана-Кристоффеля  ${}^4R$  с метрическим тензором образует тензор второго ранга:

$$\overset{*}{\mathcal{R}} = {}^4R^{(2314)} \cdot \cdot E, \quad (8.129)$$

называемый *тензором Риччи*. Компоненты этого тензора имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \overset{*}{\mathcal{R}} &= \overset{*}{R}_{ji} e^j \otimes e^i = \overset{*}{R}_{i_1 i_2 i_3 i_4} e^{i_2} \otimes e^{i_3} \otimes e^{i_1} \otimes e^{i_4} \cdot \cdot e^k \otimes e_k = \\ &= \overset{*}{R}_{i_1 i_2 i_3 i_4} \delta_k^{i_1} g^{i_4 k} e^{i_2} \otimes e^{i_3} = \overset{*}{R}_{kji}^k e^j \otimes e^i, \end{aligned}$$

т.е.

$$\overset{*}{R}_{ji} = \overset{*}{R}_{kji}^k = \overset{*}{R}_{nji}^k \delta_k^n. \quad (8.130)$$

Подставляя в (8.130) выражение (8.97) для компонент тензора Римана-Кристоффеля, получаем:

$$\overset{*}{R}_{ji} = \frac{\partial \overset{*}{\Gamma}_{ij}^k}{\partial X^k} - \frac{\partial \overset{*}{\Gamma}_{ik}^k}{\partial X^j} + \overset{*}{\Gamma}_{ij}^n \overset{*}{\Gamma}_{nk}^k - \overset{*}{\Gamma}_{ik}^n \overset{*}{\Gamma}_{nj}^k. \quad (8.131)$$

Аналогичным образом, если вместо  ${}^4R^*$  использовать тензор  ${}^4R$ , определенный по формуле (8.121), то можно ввести тензор Риччи относительно символов  $\Gamma_{ij}^k$ , т.е.

$$R_{ji} = R_{kji}^k = R_{nji}^k \delta_k^n, \quad (8.132)$$

и

$$R_{ji} = \Gamma_{ij,k}^k - \Gamma_{ik,j}^k + \Gamma_{ij}^m \Gamma_{mk}^k - \Gamma_{ik}^m \Gamma_{kj}^k. \quad (8.133)$$

Выражение для компонент тензора Риччи  $R_{ji}$  в пространстве  $A_V^n$  находим, подставляя формулу (8.122) в (8.132):

$$R_{ji} = \nabla_i T_{jk}^k - \nabla_k T_{ji}^k + T_{jk}^m T_{mi}^k - T_{ji}^m T_{mk}^k. \quad (8.134)$$

Тензор  $R^*$  в пространстве  $A_V^n$  тождественно обращается в нуль:  $R^* \equiv 0$ .

Так как  $R_{njik}^* = R_{njik} \equiv 0$  в локально-евклидовом пространстве  $V_E^n$ , то и тензор Риччи тождественно равен нулю в этом пространстве:  $R_{ji}^* = R_{ji} = 0$ .

#### 8.4.9. Тензор Эйнштейна

Тензоры Эйнштейна  $\hat{G}$  и  $G$  образуются из тензоров Риччи  $R^*$  и  $R$  следующим образом:

$$\hat{G} = R^* - \frac{1}{2} R^* E, \quad G = R - \frac{1}{2} R E, \quad (8.135)$$

где

$$\hat{R} = R^* \cdot E \quad \text{и} \quad R = R \cdot E \quad (8.136)$$

— свертки тензоров Риччи с метрическим тензором.

В локально-евклидовом пространстве  $V_E^n$  тензоры Эйнштейна тождественно равны нулю:  $\hat{G} = G \equiv 0$ . В римановом пространстве  $V^n$  тензоры  $\hat{G}$  и  $G$  совпадают:  $\hat{G} = G$ , но, вообще говоря, отличны от тождественного нуля.

**ТЕОРЕМА 8.32.** В римановом пространстве  $V^n$  тензор Эйнштейна  $G$  удовлетворяет следующему уравнению:

$$\nabla_i G^i_j = 0, \quad \text{где} \quad G^i_j = R^i_j - \frac{1}{2} R \delta^i_j. \quad (8.137)$$

▼ Поскольку риманово пространство  $V^n$  обладает нулевым кручением, то его можно рассматривать как пространство  $L_0^n$ , в котором введена специальным образом связность  $\Gamma_{ij}^m$  по формуле (8.74). Тогда для  $V^n$  справедливы тождества Бианки (8.107).

Используем эти тождества Бианки, домножив их на  $g^{nk} g^{ij}$ , а также используем кососимметричность тензора Римана-Кристоффеля и определение тензора Риччи:

$$g^{ij} \nabla_q R_{ij} - g^{ij} \nabla_j R_{iq} - g^{nk} \nabla_n R_{kq} = 0. \quad (8.138)$$

Внося обратную метрическую матрицу на основании теоремы Риччи (8.32) под знак ковариантной производной, получаем:

$$\nabla_q R - 2 \nabla_j R^j{}_q = 0. \quad (8.139)$$

Это уравнение можно привести к виду:

$$\nabla_j \left( R^j{}_q - \frac{1}{2} \delta^j_q R \right) = 0. \quad (8.140)$$

Откуда, очевидно, следует (8.137). ▲

В тензорном виде уравнение (8.137) имеет вид:

$$\nabla \cdot \mathbf{G} = \nabla_i G^i{}_j \mathbf{R}^j = 0. \quad (8.140)$$

В пространстве  $\mathbb{W}^n$  тензоры  $\overset{*}{\mathbf{G}}$  и  $\mathbf{G}$ , вообще говоря, уже различны.

**ТЕОРЕМА 8.33.** В пространстве  $\mathbb{A}_V^n$  тензор Эйнштейна  $\overset{*}{\mathbf{G}}$  тождественно равен нулю, а  $\mathbf{G}$ , вообще говоря, отличен от нуля и может быть выражен с помощью матрицы  $S_p^k$ :

$$\overset{*}{\mathbf{G}} = 0, \quad \mathbf{G} = G_{lt} \mathbf{e}^l \otimes \mathbf{e}^t, \quad (8.140)$$

$$G_{lt} = S_p^k (\nabla_i \nabla_k (S^{-1})^p{}_m - \nabla_k \nabla_i (S^{-1})^p{}_m) B^{mi}{}_{lt}, \quad (8.141)$$

где

$$B^{mi}{}_{lt} = \delta_l^i \delta_t^m - \frac{1}{2} g_{lt} g^{im}. \quad (8.142)$$

▼ Первое утверждение теоремы очевидно, так как в  $\mathbb{A}_V^n$  тензор кривизны тождественно равен нулю:  ${}^4\overset{*}{\mathbf{R}} \equiv 0$ .

Для доказательства второго утверждения рассмотрим ковариантные компоненты  $G_{lt}$  тензора  $\mathbf{G}$ :

$$G_{lt} = R_{lt} - \frac{1}{2} R g_{lt} = R_{im} (\delta_l^i \delta_t^m - g^{im} g_{lt}) = R_{im} B^{im}{}_{lt}, \quad (8.143)$$

где  $B^{im}{}_{lt}$  определяется формулой (8.142).

Выразим теперь компоненты тензора вращения Риччи  $R_{im}$  через матрицу  $S_p^k$ , подставив для этого формулу (8.126) в (8.132):

$$R_{im} = S_p^k (\nabla_i \nabla_k (S^{-1})^p_m - \nabla_k \nabla_i (S^{-1})^p_m). \quad (8.144)$$

Подставляя (8.144) в (8.143), действительно приходим к соотношению (8.141). ▲

Тензор Эйнштейна играет важную роль в общей теории относительности (см., например, [32], [35], [45]).

### Упражнения к § 8.4.

**Упражнение 8.4.1.** Показать, что в пространстве  $\mathbb{L}^n$  компоненты тензора кривизны обладают следующей симметрией:  $\overset{*}{R}_{jis}{}^k = -\overset{*}{R}_{ij}s{}^k$ , а в пространстве  $\mathbb{L}_0^n$  имеют место тождества Риччи:

$$\overset{*}{R}_{jis}{}^k + \overset{*}{R}_{isj}{}^k + \overset{*}{R}_{sji}{}^k = 0.$$

**Упражнение 8.4.2.** Используя соотношения (8.116) и (8.117), показать, что в римановом пространстве  $\mathbb{V}^3$  из общего числа 81 компоненты тензора  $R_{njik}$  независимых – только 6, в качестве которых можно выбрать:  $R_{1212}, R_{2323}, R_{3131}, R_{1223}, R_{1231}, R_{2331}$ , тогда остальные либо равны нулю, либо выражаются через них.

**Упражнение 8.4.3.** Используя результат упр. 8.1.2, показать, что в собственно римановом пространстве  $\mathbb{V}^n$  из формулы (8.133) следует соотношение

$$R_{ji} = \frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial X^k} - \frac{\partial^2 \ln \sqrt{g}}{\partial X^i \partial X^j} + \Gamma_{ij}^n \frac{\partial \ln \sqrt{g}}{\partial X^n} - \Gamma_{ik}^n \Gamma_{nj}^k.$$

Переставляя в этом выражении индексы  $i, j$ , убедиться, что правая часть остается без изменений, откуда следует, что тензор Риччи  $\mathcal{R}$  является симметричным.

**Упражнение 8.4.4.** В собственно-римановом пространстве  $\mathbb{V}^3$  еще один тензор второго ранга, называемый **тензором несовместности**  $S$ , образуется из  ${}^4\mathcal{R}$  сверткой с двумя тензорами Леви-Чивиты:

$$S = S^{ij} R_i \otimes R_j = (1/4)\epsilon \cdot {}^4\mathcal{R} \cdot \epsilon.$$

Доказать, что компоненты этого тензора имеют вид:

$$S^{ij} = (1/4g)\epsilon^{ikl}\epsilon^{jmn}R_{klmn}.$$

**Упражнение 8.4.5.** Показать, что тензор несовместности, введенный в упр. 8.4.4, является симметричным.

**Упражнение 8.4.6.** Показать, что тензор несовместности, введенный в упр. 8.4.4, удовлетворяет соотношению  $R_{prst} = g\epsilon_{ipr}\epsilon_{jst}S^{ij}$ , или  ${}^4\mathcal{R} = \epsilon \cdot S \cdot \epsilon$ .

**Упражнение 8.4.7.** Используя свойства тензора Римана-Кристоффеля (8.116), (8.117), показать, что явное выражение для компонент тензора несовместности имеет вид:

$$S^{11} = \frac{1}{g}R_{2323}, \quad S^{12} = \frac{1}{g}R_{2331}, \quad S^{13} = \frac{1}{g}R_{2312},$$

$$S^{22} = \frac{1}{g}R_{3131}, \quad S^{23} = \frac{1}{g}R_{3112}, \quad S^{33} = \frac{1}{g}R_{1212}.$$

## ГЛАВА 9

### ИНТЕГРИРОВАНИЕ ТЕНЗОРОВ

---

Важную роль в механике и физике играет операция интегрирования тензоров  ${}^n\Omega(x^i)$ , заданных в некоторой области  $V$  трехмерного евклидова пространства  $\mathbb{R}^3$ , либо либо на двумерной поверхности  $\Sigma$ , либо на некоторой кривой  $\mathcal{L}$  в  $\mathbb{R}^3$ . Введем эту операцию для тензоров с помощью операций интегрирования обычных скалярных функций скалярного аргумента, более детальное изложение которых можно найти, например, в [39].

#### § 9.1. Криволинейные интегралы от тензоров

##### 9.1.1. Определение интеграла от тензора, заданного вдоль кривой

Пусть имеется некоторая кривая  $\mathcal{L}$ , заданная в трехмерном евклидовом пространстве, например, параметрическим способом (7.1). Точки  $x(\xi_0)$  и  $x(\xi_N)$  назовем началом и концом этой кривой. Предполагаем, что вдоль этой кривой задан тензор  ${}^n\Omega(x^i)$   $n$ -ого ранга, имеющий в декартовом базисе следующий вид:

$${}^n\Omega(x^i) = \bar{\Omega}^{i_1 \dots i_n}(x^i) \bar{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \bar{e}_{i_n}. \quad (9.1)$$

Компоненты этого тензора  $\bar{\Omega}^{i_1 \dots i_n}$  являются функциями декартовых координат  $x^i$ , которые изменяются вдоль кривой  $\mathcal{L}$ :

$$x = x(\xi) \quad \text{или} \quad x^i = x^i(\xi), \quad \xi_0 \leq \xi \leq \xi_N. \quad (9.2)$$

Разобьем отрезок  $[\xi_0, \xi_N]$  на  $N$  частей:  $[\xi_0, \xi_1], \dots, [\xi_{\alpha-1}, \xi_\alpha], \dots, [\xi_{N-1}, \xi_N]$ . Этим отрезкам соответствуют  $N$  частей кривой  $\mathcal{L}$  (см. рис.9.1), началом и концом которых являются пары точек:

$$x(0), x(1); \dots; x(\alpha-1), x(\alpha); \dots; x(N-1), x(N); \quad (9.3)$$

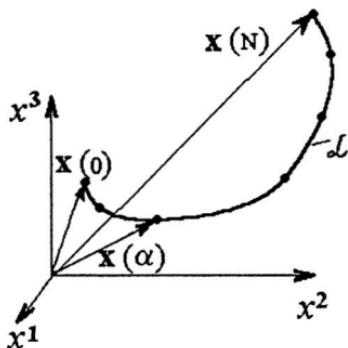
где

$$x(\alpha) = x(\xi_\alpha) \quad \text{или} \quad x_{(\alpha)}^i = x^i(\xi_\alpha), \quad \alpha = 0, \dots, N,$$

— их координаты в пространстве.

Длины дуг этих частей кривой обозначим как

$$\Delta S_\alpha = \int_{\xi_{\alpha-1}}^{\xi_\alpha} ds, \quad \alpha = 1 \dots N, \quad (9.4)$$



и введем максимальное значение среди  $\Delta S_i$ :

$$\Delta l = \max_{\alpha=1 \dots N} \{ \Delta s_\alpha \},$$

называемое *максимальным шагом разбиения кривой*.

На каждом отрезке  $[\xi_\alpha, \xi_{\alpha+1}]$  возьмем еще по одной точке  $\xi_\alpha$  с координатами:

$$\bar{x}_{(\alpha)}^i = x^i(\xi_\alpha) \quad \alpha = 1 \dots N, \quad (9.5)$$

Рис. 9.1. Разбиение кривой на  $N$  частей

и образуем следующий тензор интегральных сумм:

$${}^n S_{(N)} = \sum_{\alpha=1}^N {}^n \Omega(\bar{x}_{(\alpha)}) \Delta s_\alpha, \quad (9.6)$$

который, очевидно, является тензором того же ранга, что и  ${}^n \Omega$ .

Компоненты этого тензора  $\bar{S}^{i_1 \dots i_n}$  в декартовой системе координат связаны с  $\bar{\Omega}^{i_1 \dots i_n}$  следующим образом:

$$\bar{S}_{(N)}^{i_1 \dots i_n} = \sum_{\alpha=1}^N \bar{\Omega}^{i_1 \dots i_n}(\bar{x}_{(\alpha)}^i) \Delta s_\alpha, \quad (9.7)$$

где

$${}^n S_{(N)} = \bar{S}_{(N)}^{i_1 \dots i_n} \bar{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \bar{e}_{i_n}. \quad (9.8)$$

Поскольку каждая компонента  $\bar{\Omega}^{i_1 \dots i_n}$  является обычной классической функцией координат  $x^i$ , то для нее можно положить, что существуют пределы сумм (9.7) при  $N \rightarrow \infty$  и стремлении к нулю максимального шага разбиения кривой  $\Delta l \rightarrow 0$ :

$$\bar{S}^{i_1 \dots i_n} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \sum_{\alpha=1}^N \bar{\Omega}^{i_1 \dots i_n}(\bar{x}_{(\alpha)}^i) \Delta s_\alpha. \quad (9.9)$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9.1.** Предел (9.9) называют интегралом от компонент тензора вдоль кривой  $\mathcal{L}$  (или криволинейным интегралом от компонент тензора) и обозначают как

$$\int_{\mathcal{L}} \bar{\Omega}^{i_1 \dots i_n}(x^i) ds = \bar{S}^{i_1 \dots i_n}. \quad (9.19)$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9.2.** Криволинейным интегралом первого рода от тензора  ${}^n\Omega$ , заданного вдоль кривой  $\mathcal{L}$  называют следующий объект:

$${}^n S = \bar{S}^{i_1 \dots i_n} \bar{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \bar{e}_{i_n} = \int_{\mathcal{L}} {}^n \Omega(x) ds. \quad (9.11)$$

**Теорема 9.1.** Введенный по формулам (9.9), (9.11) объект  ${}^n S$  является тензором  $n$ -го ранга.

▼ В самом деле, так как  ${}^n \Omega(\bar{x}_{(\alpha)})$ ,  $\alpha = 1 \dots N$ , представляют собой  $N$  различных тензоров, то их компоненты преобразуются при переходе из декартова базиса в какой-либо базис  $R_k = Q^i_k \bar{e}_i$  следующим образом:

$$\bar{\Omega}^{i_1 \dots i_n}(\bar{x}_{(\alpha)}^i) = \Omega_{(\alpha)}^{k_1 \dots k_n} Q_{k_1}^{i_1} \dots Q_{k_n}^{i_n}. \quad (9.12)$$

Здесь  $\Omega_{(\alpha)}^{k_1 \dots k_n}$  – компоненты тензора  ${}^n \Omega(x_{(\alpha)})$  в базисе  $R_k$ .

Поскольку якобиева матрица  $Q^i_k$  одинакова для всех членов суммы (9.9) и не зависит от числа разбиений  $N$ , то используя известные свойства пределов, можно вынести произведение якобиевых матриц за знак предела, тогда получим:

$$\bar{S}^{i_1 \dots i_n} = Q_{k_1}^{i_1} \dots Q_{k_n}^{i_n} S^{k_1 \dots k_n}, \quad (9.13)$$

где

$$S^{k_1 \dots k_n} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \sum_{\alpha=1}^N \Omega_{(\alpha)}^{k_1 \dots k_n} \Delta s_{\alpha}, \quad (9.14)$$

так как длины дуг  $\Delta s_{\alpha}$  не зависят от выбора базиса, то из (9.13) и (9.14) следует, что  $\bar{S}^{i_1 \dots i_n}$  являются компонентами тензора. ▲

Если кривую  $\mathcal{L}$  задать в параметрическом виде (7.8) как функцию длины дуги:

$$x^i = x^i(s), \quad 0 \leq s \leq l, \quad (9.15)$$

где  $l$  – длина всей кривой  $\mathcal{L}$ :

$$l = \int_{\xi_0}^{\xi_N} ds, \quad (9.16)$$

то тензор  ${}^n\bar{\Omega}$  (его компоненты  $\bar{\Omega}^{i_1 \dots i_n}$ ) также можно рассматривать как функцию от  $s$ :  ${}^n\Omega(x(s)) = {}^n\Omega(s)$ . Интеграл (9.11) в этом случае будет обычным одномерным определенным интегралом с переменной интегрирования  $s$ , изменяющейся от 0 до  $l$ :

$${}^nS = \int_0^l {}^n\Omega(s)ds, \quad (9.17)$$

причем компоненты  $\bar{S}^{i_1 \dots i_n}$  этого тензора имеют вид:

$$\bar{S}^{i_1 \dots i_n} = \int_0^l \bar{\Omega}^{i_1 \dots i_n}(s)ds. \quad (9.18)$$

### 9.1.2. Криволинейные интегралы второго рода от тензора

Криволинейный интеграл от тензора можно образовать иным способом.

Пусть имеется разбиение (9.3) кривой  $\mathcal{L}$  точками  $x_{(\alpha)}$ ,  $\alpha = 0 \dots N$ . Векторы, соединяющие эти точки, обозначим как

$$\begin{aligned} \Delta x_{(\alpha)} &= x_{(\alpha)} - x_{(\alpha-1)} \quad \text{или} \quad \Delta x_{(\alpha)}^i = x_{(\alpha)}^i - x_{(\alpha-1)}^i, \\ x_{(\alpha)} &= x(\xi_{(\alpha)}), \quad \alpha = 1 \dots N. \end{aligned} \quad (9.19)$$

Им соответствуют приращения параметра  $\xi$ :

$$\Delta \xi_\alpha = \xi_\alpha - \xi_{\alpha-1},$$

среди которых имеется максимальное  $\Delta \xi = \max \{\Delta \xi_\alpha\}$ .

Тензор интегральных сумм составим, в отличие от (9.8), путем скалярного умножения векторов  $\Delta x_{(\alpha)}$  на транспонированные тензоры  $({}^n\Omega(\bar{x}_{(\alpha)}))^{(m_1 \dots m_n)}$  (см. гл.1):

$${}^{n-1}T_{(N)} = \sum_{\alpha=1}^N \Delta x_{(\alpha)} \cdot {}^n\Omega(\bar{x}_{(\alpha)})^{(m_1 \dots m_n)}, \quad (9.20)$$

где  $(m_1 \dots m_n)$  означает некоторую подстановку индексов, одинаковую для всех тензоров  ${}^n\Omega(\bar{x}_{(\alpha)})$  (каждое из  $m_1 \dots m_n$  принимает какое-то из значений индексов  $i_1 \dots i_n$  (см. §1.8)).

Тензор  ${}^{n-1}T_{(N)}$  имеет ранг на единицу меньше, чем  ${}^n\Omega$  (т.е.  $(n-1)$ ), и его компоненты в декартовой системе координат имеют следующий вид:

$${}^{n-1}T_{(N)} = \bar{T}_{(N)}^{i_2 \dots i_n} \bar{e}_{i_2} \otimes \dots \otimes \bar{e}_{i_n}, \quad (9.21)$$

$$\bar{T}_{(N)}^{i_2 \dots i_n} = \sum_{\alpha=1}^N \bar{\Omega}_{i_1}^{i_{w_1} \dots i_{w_n}}(\bar{x}_{(\alpha)}) \Delta x_{(\alpha)}^{i_1}.$$

Здесь и далее запись  $\bar{\Omega}_{i_1}^{i_{w_1} \dots i_{w_n}}$  означает, что  $(n - 1)$  компонента  $i_{w_1} \dots i_{w_n}$  принимают значения  $i_2 \dots i_n$ , а по  $i_1$  идет суммирование.

Заметим, что хотя формально в (9.21) свободные индексы слева и справа не совпадают, тем не менее формула (9.21) записана по обычным правилам расстановки индексов, и ее следует расшифровывать так. При конкретных значениях подстановки  $(m_1 \dots m_n)$ , например  $(n, n-1, n-2, \dots, 1)$ , индексы  $i_{w_1}, \dots, i_{w_n}$  всегда принимают значения из набора  $\{i_1 \dots i_n\}$ . Для нашего примера это  $\{i_n, i_{n-1}, \dots, i_1\}$ . При этом по индексу  $i_1$  в (9.21) идет суммирование, для нашего примера это  $\Delta x_{(\alpha)}^{i_1} \bar{\Omega}_{i_1}^{i_{n-1} \dots i_2}$ . Такая запись будет использоваться и в дальнейшем.

Устремляя максимальное приращение параметра  $\Delta\xi$  к нулю:  $\Delta\xi \rightarrow 0$ , а  $N \rightarrow \infty$ , предполагаем, что при этом существуют следующие пределы для каждого набора индексов  $i_1 \dots i_{n-1}$ :

$$\bar{T}^{i_2 \dots i_n} = \lim_{\Delta\xi \rightarrow 0} \sum_{\alpha=1}^N \bar{\Omega}_{i_1}^{i_{w_1} \dots i_{w_n}}(\bar{x}_{(\alpha)}) \Delta x_{(\alpha)}^{i_1}. \quad (9.22)$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9.3.** Пределы (9.22) называют скалярными криволинейными интегралами в *второго рода* от компонент тензора и обозначают следующим образом:

$$\int_{\mathcal{L}} \bar{\Omega}_{i_1}^{i_{w_1} \dots i_{w_n}}(x^i) dx^{i_1} = \bar{T}^{i_2 \dots i_n}. \quad (9.23)$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9.4.** Скалярным криволинейным интегралом *второго рода* от тензора  ${}^n\Omega$ , заданного вдоль кривой  $\mathcal{L}$ , называют тензор  $(n - 1)$ -го ранга  ${}^{n-1}\mathbf{T}$  с компонентами  $\bar{T}^{i_1 \dots i_{n-1}}$ , определяемыми по формуле (9.23).

Для этого тензора также используют интегральное обозначение:

$${}^{n-1}\mathbf{T} = \bar{T}^{i_2 \dots i_n} \bar{\mathbf{e}}_{i_2} \otimes \dots \otimes \bar{\mathbf{e}}_{i_n} = \int_{\mathcal{L}} d\mathbf{x} \cdot {}^n\Omega^{(m_1 \dots m_n)}(\mathbf{x}). \quad (9.24)$$

Обозначение для элементарного радиуса-вектора  $d\mathbf{x} = dx^i \bar{\mathbf{e}}_i$  использовано в (9.23) и (9.24) на том основании, что при  $\Delta\xi \rightarrow 0$  малые векторы  $\Delta\mathbf{x}_{(\alpha)}$ , как было отмечено в п. 7.1.2, стремятся к элементарному вектору  $d\mathbf{x}$  вдоль кривой  $\mathcal{L}$ .

Если в формулах (9.20) – (9.24) мы поменяем знак скалярного умножения ( $\cdot$ ) на знак векторного умножения ( $\times$ ), то получим *векторные криволинейные интегралы второго рода*:

$${}^n T = \bar{T}^{i_1 \dots i_n} \bar{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \bar{e}_{i_n} = \int_{\mathcal{L}} d\mathbf{x} \times {}^n \Omega^{(m_1 \dots m_n)}(\mathbf{x}), \quad (9.25)$$

$$\bar{T}^{k i_2 \dots i_n} = \epsilon^{k j i_1} \delta_{ij} \int_{\mathcal{L}} \bar{\Omega}^{i_{\omega_1} \dots i_{\omega_n}}_{\quad i_1} (x^\alpha) dx^i. \quad (9.26)$$

Здесь  $\epsilon^{k j i}$  – символ Леви-Чивиты (см.п.1.4.1).

Если в формулах (9.20) – (9.24) также поменять знак ( $\cdot$ ) на знак  $\otimes$  тензорного умножения, то получим *тензорный криволинейный интеграл второго рода*:

$${}^{n+1} T = \bar{T}^{i_1 \dots i_{n+1}} \bar{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \bar{e}_{i_{n+1}} = \int_{\mathcal{L}} d\mathbf{x} \otimes {}^n \Omega(\mathbf{x}), \quad (9.27)$$

где

$$\bar{T}^{i_1 \dots i_{n+1}} = \int_{\mathcal{L}} \bar{\Omega}^{i_2 \dots i_{n+1}} (x^i) dx^{i_1}. \quad (9.28)$$

### 9.1.3. Связь между криволинейными интегралами первого и второго рода

Тем же способом, что и в п.9.1.1, можно показать, что компоненты  $\bar{T}^{i_2 \dots i_n}$ ,  $\bar{T}^{i_1 \dots i_n}$ ,  $\bar{T}^{i_1 \dots i_{n+1}}$ , определяемые по формулам (9.23), (9.26) и (9.28) преобразуются по тензорному закону при переходе в новую систему координат, и, следовательно, криволинейные интегралы второго рода (9.24), (9.25) и (9.27) являются тензорами  $(n - 1)$ -го,  $n$ -го и  $(n + 1)$ -го рангов, соответственно.

Установим теперь связь между криволинейными интегралами первого и второго рода.

Пусть кривая  $\mathcal{L}$  задана в параметрическом виде (9.15). Используя формулы (7.9) и (7.10), от элементарного вектора  $d\mathbf{x}$  можно перейти к элементарной длине дуги:

$$d\mathbf{x} = t ds, \quad t = \bar{t}^i \bar{e}_i. \quad (9.29)$$

Тогда интеграл (9.24) можно представить в виде обычного определенного интеграла:

$${}^{n-1} T = \int_0^l t \cdot {}^n \Omega^{(m_1 \dots m_n)}(s) ds, \quad (9.30)$$

здесь длина дуги выступает в роли переменной интегрирования, изменяющейся от 0 до  $l$ .

В компонентной записи формула (9.30) имеет вид:

$$\bar{T}^{i_2 \dots i_n} = \int_0^l \bar{\Omega}_{i_1}^{i_{w_1} \dots i_{w_n}}(s) \bar{t}^{i_1}(s) ds. \quad (9.31)$$

Здесь  $\bar{t}^i(s)$  - компоненты единичного вектора касательной к кривой  $\mathcal{L}$  (т.е. косинусы углов, которые имеет касательная к кривой с осями декартовой системы координат).

Аналогичным образом можно преобразовать векторный криволинейный интеграл (9.25):

$${}^n T = \int_0^l t(s) \times {}^n \Omega^{(m_1 \dots m_n)}(s) ds, \quad \bar{T}^{k i_2 \dots i_n} = \epsilon^{k i i_1} \int_0^l \bar{t}_i(s) \bar{\Omega}_{i_1}^{i_{w_1} \dots i_{w_n}}(s) ds; \quad (9.32)$$

и тензорный криволинейный интеграл (9.27):

$${}^{n+1} T = \int_0^l t(s) \otimes {}^n \Omega(s) ds, \quad \bar{T}^{i_1 \dots i_{n+1}} = \int_0^l \bar{t}^{i_1}(s) \bar{\Omega}^{i_2 \dots i_{n+1}}(s) ds. \quad (9.33)$$

Формулы (9.17) и (9.30), (9.32), (9.33) устанавливают связь между криволинейными интегралами первого и второго рода.

Если кривая  $\mathcal{L}$  задана в параметрическом виде (9.2), то криволинейные интегралы первого и второго рода (9.17) и (9.30) можно представить следующим образом:

$${}^n S = \int_{\xi_0}^{\xi_N} {}^n \Omega(\xi) \left| \frac{dx}{d\xi} \right| d\xi,$$

$$\bar{S}^{i_1 \dots i_n} = \int_{\xi_0}^{\xi_N} \bar{\Omega}^{i_1 \dots i_n}(\xi) \left( \sum_{\alpha=1}^3 \left( \frac{dx^\alpha}{d\xi} \right)^2 \right)^{1/2} d\xi, \quad (9.34)$$

а также

$${}^{n-1} T = \int_{\xi_0}^{\xi_N} \frac{dx}{d\xi} \cdot {}^n \Omega^{(m_1 \dots m_n)}(\xi) \cdot d\xi, \quad \bar{T}^{i_2 \dots i_n} = \int_{\xi_0}^{\xi_N} \bar{\Omega}_{i_1}^{i_{w_1} \dots i_{w_n}}(\xi) \frac{dx^{i_1}}{d\xi} d\xi. \quad (9.35)$$

То же самое представление можно получить и для векторного и тензорного криволинейных интегралов.

Если направление интегрирования по  $\xi$  или по  $z$  меняется, то меняются местами точки  $x_{(0)} = x(\xi_0)$  и  $x_{(N)} = x(\xi_N)$ , а у интегралов (9.17), (9.30), (9.32), (9.33) – пределы интегрирования и знак “+” на “–” перед интегралом.

### 9.1.4. Независимость скалярного криволинейного интеграла от пути интегрирования

Пусть теперь тензор  ${}^n\Omega$  является не произвольным, а потенциальным (см. §6.2):

$${}^n\Omega = \nabla \otimes {}^{n-1}\Psi = \nabla_{i_1} \Psi^{i_2 \dots i_n} R^{i_1} \otimes R_{i_2} \otimes \dots \otimes R_{i_n}, \quad (9.36)$$

где  ${}^{n-1}\Psi$  – тензор-потенциал  $(n-1)$ -го ранга.

Вычислим для него подынтегральное выражение в скалярном криволинейном интегrade (9.24), выбирая подстановку транспонирования специальным образом:

$$(m_1 \dots m_n) = (1, m_2, \dots, m_n), \quad (9.37)$$

т.е. на первом месте обязательно стоит индекс  $i_1$ , а все остальные индексы произвольны.

Тогда подынтегральное выражение

$$\begin{aligned} dx \cdot {}^n\Omega^{(1m_2 \dots m_n)} &= (dX^i R_i) \cdot \nabla_{i_1} \Psi^{i_{w_2} \dots i_{w_n}} R^{i_1} \otimes R_{i_2} \otimes \dots \otimes R_{i_n} = \\ &= \nabla_i \Psi^{i_{w_1} \dots i_{w_{n-1}}} dX^i R_{i_1} \otimes \dots \otimes R_{i_{n-1}} = \frac{\partial}{\partial X^i} {}^{n-1}\Psi^{m_1 \dots m_{n-1}} dX^i = \\ &= d^{n-1}\Psi^{m_1 \dots m_{n-1}} \end{aligned} \quad (9.38)$$

представляет собой полный дифференциал от тензора потенциала.

Записывая формулу (9.38) в декартовой системе координат ( $X^i = x^i$ ), подставим ее в (9.24), в результате получим:

$$\begin{aligned} {}^{n-1}T &= \int_{\mathcal{L}} d^{n-1}\Psi^{m_1 \dots m_{n-1}}(x) = \\ &= {}^{n-1}\Psi^{m_1 \dots m_{n-1}}(x_{(N)}) - {}^{n-1}\Psi^{m_1 \dots m_{n-1}}(x_{(0)}), \end{aligned} \quad (9.39)$$

где использована формула Ньютона-Лейбница интегрирования дифференциала от обычных функций.

Таким образом, доказана следующая теорема.

**ТЕОРЕМА 9.2.** *Если тензор  ${}^n\Omega$  – потенциален, т.е. удовлетворяет (9.36), то скалярный криволинейный интеграл второго рода от него не зависит от кривой  $\mathcal{L}$ , по которой происходит интегрирование (т.е. от "пути интегрирования"), и определяется только разностью значений тензора потенциала  ${}^{n-1}\Psi$  в конечной и начальной точках.*

### 9.1.5. Криволинейные интегралы по замкнутому контуру

Если у кривой  $\mathcal{L}$  начальная и конечная точки совпадают:  $x(0) = x(N)$ , то такая кривая называется *замкнутой* или *замкнутым контуром*.

Криволинейные интегралы первого и второго рода (9.11), (9.24), (9.25) и (9.27) в этом случае обозначаются следующим образом:

$${}^n S = \oint_{\mathcal{L}} {}^n \Omega(x) ds, \quad {}^{n-1} T = \oint_{\mathcal{L}} dx \cdot {}^n \Omega^{(m_1 \dots m_n)}(x), \quad (9.40)$$

$${}^n T = \oint_{\mathcal{L}} dx \times {}^n \Omega^{(m_1 \dots m_n)}(x), \quad {}^{n+1} T = \oint_{\mathcal{L}} dx \otimes {}^n \Omega(x).$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9.5.** Скалярный криволинейный интеграл в (9.40) по замкнутому контуру называют *циркуляцией* тензора  ${}^n \Omega$ .

Если тензор  ${}^n \Omega$  потенциален, то для него имеет место формула (9.39), но если скалярный криволинейный интеграл берется по замкнутому контуру, то начальная и конечная точки кривой совпадают, а значит и значения тензора потенциала  ${}^{n-1} \Psi$  в них также совпадают. Таким образом, имеет место следующая теорема.

**ТЕОРЕМА 9.3** (о циркуляции потенциального тензора). *Если тензор  ${}^n \Omega$  потенциален*

$${}^n \Omega = \nabla \otimes {}^{n-1} \Psi,$$

*то циркуляция любого его транспонированного тензора  ${}^n \Omega^{(1m_2 \dots m_n)}$  равна нулю:*

$$\oint_{\mathcal{L}} dx \cdot {}^n \Omega^{(1m_2 \dots m_n)} = 0. \quad (9.41)$$

**Упражнения к § 9.1.**

**Упражнение 9.1.1.** Показать, что для вектора  $a$  при  $n = 1$  криволинейные интегралы второго рода (9.24), (9.25) и (9.27) могут быть представлены в виде:

$$t = \int_{\mathcal{L}} dx \cdot a = \int_{\mathcal{L}} a \cdot dx, \quad t = \int_{\mathcal{L}} dx \times a = - \int_{\mathcal{L}} a \times dx,$$

$$T = \int_{\mathcal{L}} dx \otimes a = \left( \int_{\mathcal{L}} a \otimes dx \right)^T.$$

**Упражнение 9.1.2.** Показать, что если  $n = 2$ , то криволинейные интегралы второго рода (9.24), (9.25) и (9.27) могут быть представлены следующим образом:

$$t = \int_{\mathcal{L}} dx \cdot \Omega = \int_{\mathcal{L}} \Omega^T \cdot dx, \quad T = \int_{\mathcal{L}} dx \times \Omega = - \left( \int_{\mathcal{L}} \Omega^T \times dx \right)^T,$$

$${}^3T = \int_{\mathcal{L}} dx \otimes \Omega = \left( \int_{\mathcal{L}} \Omega \otimes dx \right)^{(231)}.$$

**Упражнение 9.1.3.** Показать, что для двусвязной области  $V$  в трехмерном евклидовом пространстве циркуляция потенциального тензора является постоянным тензором (не зависящим от координат):

$$\oint_{\mathcal{L}} dx \cdot {}^n\Omega^{(1m_2\dots m_n)} = {}^{n-1}T = \text{const},$$

если интеграл берется по любому, лежащему в области  $V$  контуру, несводимому непрерывным преобразованием в точку, причем тензор  ${}^{n-1}T$  одинаков для всех таких контуров.

## § 9.2. Поверхностные интегралы от тензора

### 9.2.1. Поверхностный интеграл первого рода

Рассмотрим теперь некоторую ограниченную поверхность  $\Sigma$  в трехмерном евклидовом пространстве, заданную параметрическим образом (7.40):

$$x^i = x^i(X^1, X^2), \quad i = 1, 2, 3, \quad (9.42)$$

где  $X^I$  - криволинейные координаты на поверхности.

Предполагаем известными (см. например [39]) сведения о том, как определяется поверхностный интеграл

$$\int_{\Sigma} f(x^i) d\Sigma$$

от классической функции  $f(x^i)$ , заданной на поверхности  $\Sigma$ . Здесь  $d\Sigma$  - площадь элементарной площадки поверхности, определяемая по формуле (7.63).

Пусть на этой поверхности  $\Sigma$  задан тензор  $n$ -го ранга  ${}^n\Omega(x^i)$  с декартовыми компонентами  $\bar{\Omega}^{i_1\dots i_n}(x^i(X^1, X^2))$  (этот трехмерный тензор, вообще говоря, не совпадает с двумерным тензором на поверхности, введенным в п.7.2.3.).

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9.6.** Поверхностным интегралом первого рода от тензора  ${}^n\Omega$  называют тензор  $n$ -го ранга  ${}^nS$ , компонентами которого в декартовой системе координат  $\bar{S}^{i_1\dots i_n}$  являются поверхностные интегралы от компонент  $\bar{\Omega}^{i_1\dots i_n}$ , т.е.

$${}^nS = \bar{S}^{i_1\dots i_n} \bar{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \bar{e}_{i_n} = \int_{\Sigma} {}^n\Omega(x) d\Sigma, \quad (9.43)$$

где

$$\bar{S}^{i_1 \dots i_n} = \int_{\Sigma} \bar{\Omega}^{i_1 \dots i_n}(x^i) d\Sigma. \quad (9.44)$$

Так же как это было проделано в п.9.1.1, можно показать, что  $\bar{S}^{i_1 \dots i_n}$  преобразуются по тензорному закону:

$$S^{i_1 \dots i_n} = P_{k_1}^{i_1} \dots P_{k_n}^{i_n} \bar{S}^{k_1 \dots k_n} \quad (9.45)$$

при переходе в другую систему координат:  $R_k = Q^i{}_k \bar{e}_i$ .

Заметим, что здесь якобиевы матрицы  $Q^i{}_k$  и  $P^i{}_k$  не зависят от координат  $x^i$ .

Формула (9.45) позволяет получить компоненты тензора  ${}^n S$  поверхности интеграла в любой системе координат.

Используя формулу (7.63) для  $d\Sigma$  можно записать поверхностный интеграл (9.43) в виде:

$${}^n S = \iint_{\Sigma_X} {}^n \Omega(X^I) \sqrt{\tilde{g}} dX^1 dX^2, \quad (9.46)$$

где тензор  ${}^n \Omega(x^i(X^I)) = {}^n \Omega(X^I)$  рассматривается как функция криволинейных координат, а  $\Sigma_X$  представляет собой двумерную область значений этих координат  $X^I$ , соответствующую поверхности  $\Sigma$  в трехмерном пространстве. В этом случае для поверхностного интеграла используется обозначение в виде двойного интеграла.

Формула (9.46) называется *формулой замены переменных* в поверхностном интеграле.

## 9.2.2. Поверхностные интегралы второго рода

Если для определения криволинейных интегралов второго рода использовался элементарный радиус-вектор кривой  $dx$ , то для аналогичных поверхностных интегралов второго рода применяется вектор ориентированной площадки (7.63):  $nd\Sigma$ , который согласно (7.62) можно представить в виде:

$$nd\Sigma = \rho_1 \times \rho_2 dX^1 dX^2, \quad (9.47)$$

здесь  $n$  - вектор нормали к поверхности  $\Sigma$ .

В декартовом базисе этот вектор на основании (7.44) имеет вид:

$$\begin{aligned} nd\Sigma &= \sum_{\alpha=1}^3 \rho_1^\alpha \rho_2^\beta \bar{e}_\gamma (P_k^1 P_l^2 dx^k dx^l) = \\ &= \sum_{\alpha=1}^3 dx^\alpha dx^\beta \bar{e}_\gamma, \quad \alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha, \quad \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (9.48)$$

где  $\rho^i{}_I$  - якобиева матрица поверхности (7.44), а  $P_k^I$  – обратная якобиева матрица на поверхности:

$$P_k^I = \frac{\partial X^I}{\partial x^k}, \quad \rho^i{}_I = \frac{\partial x^i}{\partial X^I}. \quad (9.49)$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9.7.** Скалярным поверхностным интегралом второго рода от тензора  ${}^n\Omega^{(m_1 \dots m_n)}$  называют следующий тензор  $(n-1)$ -го ранга:

$${}^{n-1}T = \bar{T}^{i_2 \dots i_n} \bar{e}_{i_2} \otimes \dots \otimes \bar{e}_{i_n} = \int_{\Sigma} n \cdot {}^n\Omega^{(m_1 \dots m_n)}(x) d\Sigma. \quad (9.50)$$

Здесь

$$\bar{T}^{i_2 \dots i_n} = \sum_{\alpha=1}^3 \iint_{\Sigma_x} \bar{\Omega}_{i_1}^{i_{w_1} \dots i_{w_n}}(x^i) \delta_{\gamma}^{i_1} dx^{\alpha} dx^{\beta} \quad (9.51)$$

– двойной интеграл, определяемый как для обычных классических функций. Областью интегрирования здесь является двумерная область  $\Sigma_x$  изменения координат  $x^{\alpha}$ ,  $\alpha = 1, 2$ , соответствующая поверхности  $\Sigma$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9.8.** Векторным поверхностным интегралом второго рода от тензора  ${}^n\Omega^{(m_1 \dots m_n)}$  называют тензор  $n$ -го ранга  ${}^nT$ , определяемый по формуле:

$${}^nT = \bar{T}^{i_1 \dots i_n} \bar{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \bar{e}_{i_n} = \int_{\Sigma} n \times {}^n\Omega^{(m_1 \dots m_n)}(x) d\Sigma. \quad (9.52)$$

Тензор  ${}^nT$  имеет следующие компоненты в декартовом базисе:

$$\bar{T}^{ki_2 \dots i_n} = \sum_{\alpha=1}^3 \epsilon^{k\alpha i_1} \iint_{\Sigma_x} \bar{\Omega}^{i_{w_1} \dots i_{w_n}}(x^i) dx^{\beta} dx^{\gamma}. \quad (9.53)$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9.9.** Тензорным поверхностным интегралом второго рода от тензора  ${}^n\Omega$  называют тензор  $(n+1)$ -го ранга  ${}^{n+1}T$ :

$${}^{n+1}T = \bar{T}^{i_1 \dots i_{n+1}} \bar{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \bar{e}_{i_{n+1}} = \int_{\Sigma} n \otimes {}^n\Omega(x) d\Sigma. \quad (9.54)$$

Компоненты этого тензора в декартовом базисе имеют вид:

$$\bar{T}^{i_1 \dots i_{n+1}} = \sum_{\alpha=1}^3 \iint_{\Sigma_x} \bar{\Omega}^{i_1 \dots i_n} \delta_{\gamma}^{i_{n+1}} dx^{\alpha} dx^{\beta}. \quad (9.55)$$

### 9.2.3. Формула Стокса

Эти формулы позволяют от поверхностных интегралов переходить к криволинейным.

Предполагаем известной (см. например [39]) формулу Стокса для классической, непрерывной вместе со своими производными скалярной функции  $f(x^i)$ , заданной на некоторой кусочно-гладкой незамкнутой поверхности  $\Sigma$ , ограниченной кусочно-гладким замкнутым контуром  $\mathcal{L}$ :

$$\oint_{\mathcal{L}} f(x^i) dx^j = \epsilon^{jkl} \int_{\Sigma} \bar{n}_k \frac{\partial f}{\partial x^l} d\Sigma. \quad (9.56)$$

Формула записана в декартовой системе координат, где  $\bar{n}_k$  - компоненты вектора нормали  $n$  к поверхности  $\Sigma$ , направление которого выбирается согласованно с направлением обхода контура  $\mathcal{L}$  от начальной точки к конечной: из конца вектора  $n$ , проведенного в любой точке поверхности, обход контура  $\mathcal{L}$  виден осуществляемым против часовой стрелки.

Умножая (9.56) на вектор базиса  $\bar{e}_j$ , получим инвариантную форму записи *формулы Стокса*:

$$\oint_{\mathcal{L}} f(x^i) dx^j \bar{e}_j = \int_{\Sigma} \epsilon^{klj} \bar{n}_k \frac{\partial f}{\partial x^l} \bar{e}_j d\Sigma,$$

или

$$\oint_{\mathcal{L}} f(x) dx = \int_{\Sigma} n \times \nabla f d\Sigma. \quad (9.57)$$

Здесь использованы определения векторного произведения (1.33) и градиента скаляра (6.15').

Обобщением формулы Стокса (9.57) на случай тензора произвольного  $n$ -го ранга является следующая формула:

$$\oint_{\mathcal{L}} dx \otimes {}^n\Omega(x) = \int_{\Sigma} n \times \nabla \otimes {}^n\Omega(x) d\Sigma. \quad (9.58)$$

В декартовых компонентах эта формула имеет вид:

$$\oint_{\mathcal{L}} \bar{\Omega}^{i_2 \dots i_{n+1}}(x^i) dx^{i_1} = \epsilon^{i_1 k l} \int_{\Sigma} \bar{n}_k \frac{\partial}{\partial x^l} \bar{\Omega}^{i_2 \dots i_{n+1}}(x^i) d\Sigma. \quad (9.59)$$

Справедливость формулы (9.59) непосредственно следует из (9.56), поскольку при каждом фиксированном наборе индексов  $i_2 \dots i_{n+1}$  формула (9.59) в точности совпадает с (9.56).

Эта формула (9.56) называется *тензорной формулой Стокса*.

Для тензоров имеет место также *скалярная формула Стокса*:

$$\oint_{\mathcal{L}} dx \cdot {}^n\Omega(x) = \int_{\Sigma} (n \times \nabla) \cdot {}^n\Omega(x) d\Sigma. \quad (9.60)$$

В декартовом базисе эта формула имеет вид:

$$\oint_{\mathcal{L}} dx^{i_1} \bar{\Omega}_{i_1}^{i_2 \dots i_n}(x^i) = \epsilon^{i_1 k l} \int_{\Sigma} \bar{n}_k \frac{\partial}{\partial x^l} \bar{\Omega}_{i_1}^{i_2 \dots i_n}(x^i) d\Sigma. \quad (9.61)$$

Перепишем формулу (9.61) следующим образом:

$$\sum_{\alpha=1}^3 \left( \oint_{\mathcal{L}} dx^{\alpha} \bar{\Omega}_{\alpha}^{i_2 \dots i_n}(x^i) - \epsilon^{\alpha k l} \int_{\Sigma} \bar{n}_k \frac{\partial}{\partial x^l} \bar{\Omega}_{\alpha}^{i_2 \dots i_n} d\Sigma \right) = 0.$$

Фиксируя какой-либо набор индексов  $i_2 \dots i_n$ , для каждого из значений  $\alpha = 1, 2, 3$  в скобках мы снова получим формулу Стокса (9.56), где роль  $f$  играет функция  $\bar{\Omega}_{\alpha}^{i_2 \dots i_n}$ . Таким образом, из (9.56) следует истинность скалярной формулы Стокса (9.60). Очевидно, что любая перестановка индексов  $i_1 \dots i_n$  не изменит сути доказательства, поэтому имеет место скалярная формула Стокса, обобщающая (9.60):

$$\oint_{\mathcal{L}} dx \cdot {}^n\Omega^{(m_1 \dots m_n)} = \int_{\Sigma} (\mathbf{n} \times \nabla) \cdot {}^n\Omega^{(m_1 \dots m_n)} d\Sigma. \quad (9.62)$$

Наконец, имеет место *векторная формула Стокса*:

$$\oint_{\mathcal{L}} dx \times {}^n\Omega = \int_{\Sigma} (\mathbf{n} \times \nabla) \times {}^n\Omega d\Sigma, \quad (9.63)$$

которая в декартовой системе координат выглядит следующим образом:

$$\epsilon_{s k i_1} \oint_{\mathcal{L}} dx^k \bar{\Omega}^{i_1 i_2 \dots i_n}(x^i) = \epsilon_{s j i_1} \epsilon^{j k l} \int_{\Sigma} \bar{n}_k \frac{\partial}{\partial x^l} \bar{\Omega}^{i_1 i_2 \dots i_n}(x^i) d\Sigma. \quad (9.64)$$

Преобразуем это выражение к виду:

$$\epsilon_{s j i_1} \left( \oint_{\mathcal{L}} dx^j \bar{\Omega}^{i_1 i_2 \dots i_n}(x^i) - \epsilon^{j k l} \int_{\Sigma} \bar{n}_k \frac{\partial}{\partial x^l} \bar{\Omega}^{i_1 \dots i_n} d\Sigma \right) = 0. \quad (9.65)$$

Сравнивая (9.56) с выражением в скобках при каждом фиксированном наборе индексов  $i_1 \dots i_n$ , убеждаемся в том, что из (9.56), очевидно, вытекает (9.65), что и доказывает истинность векторной формулы Стокса (9.62).

### Упражнения к § 9.2.

**Упражнение 9.2.1.** Используя (6.29), (6.31), показать, что при  $n = 1$  из (9.63) следует:

$$\oint_{\mathcal{L}} d\mathbf{x} \times \mathbf{a} = \int_{\Sigma} (\mathbf{n} \cdot (\nabla \otimes \mathbf{a})^T - \mathbf{n} \otimes \nabla \cdot \mathbf{a}) d\Sigma,$$

где  $\mathbf{a}$  есть вектор  ${}^n\Omega$  при  $n = 1$ .

**Упражнение 9.2.2.** Используя результат упр. 9.2.1 и п. 6.1.6, показать, что если в качестве  $\mathbf{a}$  выбрать радиус-вектор  $\mathbf{X}$ , то

$$\oint_{\mathcal{L}} d\mathbf{x} \times \mathbf{x} = -2 \int_{\Sigma} n d\Sigma.$$

**Упражнение 9.2.3.** Показать, что из (9.58) и (9.60) при  $n = 1$  следует:

$$\oint_{\mathcal{L}} d\mathbf{x} \cdot \mathbf{a} = \oint_{\mathcal{L}} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{x} = \int_{\Sigma} (\mathbf{n} \times \nabla) \cdot \mathbf{a} d\Sigma = \int_{\Sigma} \mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) d\Sigma,$$

$$\oint_{\mathcal{L}} d\mathbf{x} \otimes \mathbf{a} = \int_{\Sigma} (\mathbf{n} \times \nabla) \otimes \mathbf{a} d\Sigma.$$

**Упражнение 9.2.4.** Показать, что из (9.60) и (9.65) при  $n = 2$  следует:

$$\oint_{\mathcal{L}} d\mathbf{x} \cdot \Omega = \oint_{\mathcal{L}} \Omega^T \cdot d\mathbf{x} = \int_{\Sigma} (\mathbf{n} \times \nabla) \cdot \Omega d\Sigma,$$

$$\oint_{\mathcal{L}} d\mathbf{x} \times \Omega = \int_{\Sigma} (\mathbf{n} \times \nabla) \times \Omega d\Sigma.$$

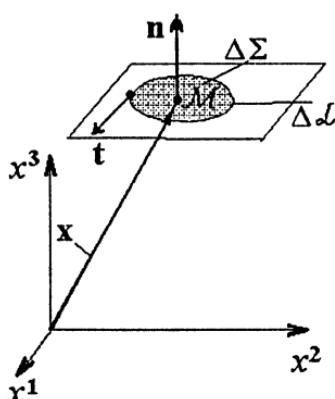


Рис. 9.2. К упр. 9.2.5.

**Упражнение 9.2.5.** Используя скалярную формулу Стокса для вектора (см. упр. 9.2.3) и теорему о среднем для поверхностного интеграла, показать, что

$$\begin{aligned} (\nabla \times \mathbf{a})_n &\equiv \mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) = \\ &= \lim_{\Delta \Sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta \Sigma} \oint_{\Delta L} \mathbf{a} \cdot \mathbf{t} ds, \end{aligned}$$

т.е. проекция ротора вектора  $\mathbf{a}$  на произвольное направление с вектором  $\Pi$  в точке  $M$  (с вектором  $X$ ) есть предел отношения циркуляции этого вектора  $\mathbf{a}$  вдоль малого контура  $\Delta L$ , ограничивающего малую плоскую площадку  $\Delta \Sigma$ , которая содержит точку  $M$ , к площади этой площадки  $\Delta \Sigma$  (см. рис. 9.2).

### § 9.3. Объемные интегралы от тензора

#### 9.3.1. Элементарный объем

Как и в случае поверхностного интеграла, предполагаем известным определение объемного интеграла (см.например [39])

$$\int_V f(x^i) dV \quad (9.66)$$

от функции  $f(x^i)$ , заданной в области  $V$  трехмерного евклидова пространства. В формуле (9.66)  $dV$  – это элементарный объем, который определим следующим образом. Возьмем произвольную точку  $\mathcal{M}$  и выпустим из нее три элементарных радиуса-вектора  $dx_\alpha$  вдоль координатных линий  $X^\alpha$ . Эти три вектора всегда будут линейно независимы, поэтому можно получить некоторый объем  $dV$ , вычислив по (1.58) смешанное произведение этих трех векторов:

$$dV = dx_1 \cdot (dx_2 \times dx_3). \quad (9.67)$$

Так как

$$dx_\alpha = \frac{\partial x}{\partial X^\alpha} dX^\alpha = R_\alpha dX^\alpha, \quad (9.68)$$

то получаем с учетом (1.58):

$$dV = R_1 \cdot (R_2 \times R_3) dX^1 dX^2 dX^3 = \sqrt{g} dX^1 dX^2 dX^3 \quad (9.69)$$

– выражение для элементарного объема параллелепипеда, построенного на векторах  $dx_\alpha$ .

#### 9.3.2. Определение объемного интеграла от тензора

Пусть имеется тензор  ${}^n\Omega(x)$ , заданный в некоторой области  $V$  евклидова трехмерного пространства. Объемным интегралом от компонент тензора назовем интеграл вида:

$$\int_V \bar{\Omega}^{i_1 \dots i_n}(x^i) dV = \bar{T}^{i_1 \dots i_n}, \quad (9.70)$$

где при каждом фиксированном наборе индексов  $i_1 \dots i_n$  имеем обычный объемный интеграл (9.66) от классической функции.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9.10.** *Объемным интегралом от тензора  ${}^n\Omega$  называют тензор  $n$ -го ранга  ${}^nT$ , имеющий компоненты в декартовом базисе, вычисляемые по (9.70). Для этого интеграла используем обозначение:*

$${}^nT = \bar{T}^{i_1 \dots i_n} \bar{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \bar{e}_{i_n} = \int_V {}^n\Omega(x) dV. \quad (9.71)$$

Используя формулу (9.69), объемный интеграл (9.71) можно представить в виде *тройного интеграла*:

$${}^n T = \iiint_{V_x} {}^n \Omega(X^i) \sqrt{g} dX^1 dX^2 dX^3, \quad (9.72)$$

здесь тензор  ${}^n \Omega$  рассматривается как функция криволинейных координат, а  $V_x$  представляет собой трехмерную область значений этих координат  $X^i$ , соответствующую области  $V$  в трехмерном пространстве. Формула (9.72) называется также формулой *замены переменных в объемном интеграле*.

### 9.3.3. Формула Гаусса-Остроградского

Формула Гаусса-Остроградского является аналогом формулы Стокса и позволяет переходить от объемных интегралов к поверхностным и наоборот.

Полагаем известной (см. например [39]) формулу Гаусса-Остроградского для классических функций  $f(x^i)$ , заданных в некоторой замкнутой трехмерной области  $V$ , ограниченной кусочно-гладкой поверхностью  $\Sigma$ :

$$\int_{\Sigma} f(x^i) \bar{n}_j d\Sigma = \int_V \frac{\partial f}{\partial x^j} dV, \quad (9.73)$$

где функция  $f(x^i)$  предполагается непрерывной вместе со своими производными вплоть до границы  $\Sigma$  области  $V$ .

Формула (9.73) записана в декартовой системе координат, где  $\bar{n}_j$  - компоненты вектора нормали к поверхности  $\Sigma$ , направленной во внешнюю сторону по отношению к области  $V$ .

Умножая (9.73) на векторы базиса, приходим к инвариантной записи:

$$\int_{\Sigma} f(x^i) \bar{n}_j \bar{e}^j d\Sigma = \int_V \frac{\partial f}{\partial x^j} \bar{e}^j dV,$$

или

$$\int_{\Sigma} f(x) n d\Sigma = \int_V \nabla f dV. \quad (9.74)$$

### 9.3.4. Формулы Гаусса-Остроградского для тензоров

Обобщением формулы (9.74) на случай тензора  $n$ -го ранга является *тензорная формула Гаусса-Остроградского*:

$$\int_{\Sigma} n \otimes {}^n \Omega(x) d\Sigma = \int_V \nabla \otimes {}^n \Omega dV. \quad (9.75)$$

В декартовых координатах она имеет вид:

$$\int_{\Sigma} \bar{n}_{i_1} \bar{\Omega}^{i_2 \dots i_{n+1}}(x^i) d\Sigma = \int_V \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \bar{\Omega}^{i_2 \dots i_{n+1}} dV. \quad (9.76)$$

Формула (9.76) является очевидным следствием (9.73), т.к. фиксируя какой-либо набор значений индексов  $i_2 \dots i_{n+1}$ , мы сразу получаем формулу Гаусса-Остроградского (9.73) для классических функций.

*Скалярной формулой Гаусса-Остроградского* называется следующее обобщение формулы (9.73) для тензоров:

$$\int_{\Sigma} \mathbf{n} \cdot {}^n\Omega d\Sigma = \int_V \nabla \cdot {}^n\Omega dV. \quad (9.77)$$

В компонентах эта формула имеет вид:

$$\int_{\Sigma} n_{i_1} \Omega^{i_1 \dots i_n}(x^i) d\Sigma = \int_V \nabla_{i_1} \Omega^{i_1 \dots i_n}(x^i) dV. \quad (9.78)$$

Для доказательства этой формулы перепишем ее в декартовом базисе:

$$\sum_{\alpha=1}^3 \left( \int_{\Sigma} \bar{n}_{\alpha} \bar{\Omega}^{\alpha i_2 \dots i_n} d\Sigma - \int_V \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \bar{\Omega}^{\alpha i_2 \dots i_n} dV \right) = 0.$$

Зафиксировав какой-либо набор индексов  $i_2 \dots i_n$ , для каждого из значений  $\alpha = 1, 2, 3$  в скобках вновь получим формулу Гаусса-Остроградского (9.73), где роль  $f$  играет функция  $\Omega^{\alpha i_2 \dots i_n}$ . Следовательно, из (9.73) немедленно вытекает истинность (9.78) и (9.77).

Очевидно, что для любой перестановки индексов  $i_1 \dots i_n$  ход доказательства будет таким же, поэтому имеет место формула, обобщающая (9.77):

$$\int_{\Sigma} \mathbf{n} \cdot {}^n\Omega^{(m_1 \dots m_n)} d\Sigma = \int_V \nabla \cdot {}^n\Omega^{(m_1 \dots m_n)} dV. \quad (9.79)$$

*Векторной формулой Гаусса-Остроградского* называют следующее обобщение формулы (9.73):

$$\int_{\Sigma} \mathbf{n} \times {}^n\Omega d\Sigma = \int_V \nabla \times {}^n\Omega dV, \quad (9.80)$$

которое в декартовой системе координат имеет вид:

$$\epsilon^{ij i_1} \int_{\Sigma} \bar{n}_j \bar{\Omega}_{i_1}^{i_2 \dots i_n} d\Sigma = \epsilon^{ij i_1} \int_V \frac{\partial}{\partial x^j} \bar{\Omega}_{i_1}^{i_2 \dots i_n} dV. \quad (9.81)$$

Доказательство того, что (9.81) является следствием (9.73) проводится так же, как и для скалярной формулы Гаусса-Остроградского.

Формулу (9.80) можно также применить и для транспонированного тензора:

$$\int_{\Sigma} \mathbf{n} \times {}^n\Omega^{(m_1 \dots m_n)} d\Sigma = \int_V \nabla \times {}^n\Omega^{(m_1 \dots m_n)} dV, \quad (9.82)$$

или в базисе  $\bar{\mathbf{e}}_i$ :

$$\epsilon^{ij_1} \int_{\Sigma} \bar{n}_j \bar{\Omega}_{i_1}^{i_{w_1} \dots i_{w_n}} d\Sigma = \epsilon^{ij_1} \int_V \frac{\partial}{\partial x^j} \bar{\Omega}_{i_1}^{i_{w_1} \dots i_{w_n}} dV. \quad (9.83)$$

### Упражнения к § 9.3.

**Упражнение 9.3.1.** Показать, что в цилиндрической системе координат элементарный объем (9.69) имеет вид:

$$dV = r dr d\varphi dz.$$

**Упражнение 9.3.2.** Показать, что в сферической системе координат элементарный объем (9.69) имеет вид:

$$dV = r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi.$$

**Упражнение 9.3.3.** Показать, что из (9.75), (9.77), (9.80) для вектора при  $n = 1$  следует:

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \mathbf{n} \otimes \mathbf{a} d\Sigma &= \int_V \nabla \otimes \mathbf{a} dV, & \int_{\Sigma} \mathbf{a} \otimes \mathbf{n} d\Sigma &= \int_V (\nabla \otimes \mathbf{a})^T dV, \\ \int_{\Sigma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{a} d\Sigma &= \int_V \nabla \cdot \mathbf{a} dV, & \int_{\Sigma} \mathbf{n} \times \mathbf{a} d\Sigma &= \int_V \nabla \times \mathbf{a} dV. \end{aligned}$$

**Упражнение 9.3.4.** Показать, что из (9.75), (9.77) и (9.80) для тензора второго ранга при  $n = 2$  следует:

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \mathbf{n} \otimes \Omega d\Sigma &= \int_V \nabla \otimes \Omega dV, & \int_{\Sigma} \mathbf{n} \times \Omega d\Sigma &= \int_V \nabla \times \Omega dV, \\ \int_{\Sigma} \mathbf{n} \cdot \Omega d\Sigma &= \int_{\Sigma} \Omega^T \cdot \mathbf{n} d\Sigma = \int_V \nabla \cdot \Omega dV. \end{aligned}$$

**Упражнение 9.3.5.** Используя результаты упр. 9.3.4 и соотношение (6.73), показать справедливость формулы:

$$\int_{\Sigma} \mathbf{n} \cdot \Omega \cdot \mathbf{a} d\Sigma = \int_V \nabla \cdot (\Omega \cdot \mathbf{a}) dV = \int_V ((\nabla \cdot \Omega) \cdot \mathbf{a} + \Omega \cdot (\nabla \otimes \mathbf{a})^T) dV.$$

**Упражнение 9.3.6.** Доказать справедливость формулы:

$$\int_{\Sigma} \mathbf{x} \times \mathbf{n} \cdot \Omega d\Sigma = - \int_{\Sigma} (\mathbf{n} \cdot \Omega) \times \mathbf{x} d\Sigma = \int_V (\mathbf{x} \times \nabla \cdot \Omega) dV - 2 \int_V \omega dV,$$

где  $\omega$  – вектор, сопутствующий кососимметричной части тензора  $\Omega$ .

**Упражнение 9.3.7.** Используя скалярную формулу Гаусса-Остроградского для вектора (см. упр. 9.3.3) и теорему о среднем, показать, что

$$\nabla \cdot \mathbf{a} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta \Sigma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{a} d\Sigma,$$

т.е. дивергенция вектора в точке  $X$  области есть предел отношения потока вектора через малую замкнутую поверхность  $\Delta \Sigma$ , окружающую точку  $X$ , к объему  $\Delta V$ , ограниченному этой поверхностью.

## Приложение

# ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ И КВАЗИЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ПАРЫ ТЕНЗОРОВ

---

В механике сплошных сред очень важную роль играют определенные пары тензоров второго ранга, связанных через так называемую работу внешних поверхностных сил. Существование этих пар тензоров при условии потенциальности (см. гл.5) позволяет получить альтернативные тензорные функции для описания различных физико-математических процессов. Рассмотрим эти пары, начав с некоторого важного свойства невырожденных тензоров в пространстве  $\mathbb{R}^3$ .

**Теорема П1 (о полярном разложении).** *Всякий невырожденный тензор второго ранга  $F$  можно представить в виде скалярного произведения двух тензоров второго ранга:*

$$F = O \cdot U \quad \text{или} \quad F = V \cdot O, \quad (\text{П.1})$$

где  $U$  и  $V$  – симметричные, положительно определенные тензоры, а  $O$  – ортогональный тензор, причем каждое из представлений (П.1) единственно.

▼ Доказательство существования разложения (П.1) приведем конструктивно, т.е. построив тензоры  $U$ ,  $V$  и  $O$ . Для этого рассмотрим свертки тензора  $F$  со своим транспонированным:  $F^T \cdot F$  и  $F \cdot F^T$ . Оба эти тензора являются симметричными, так как

$$(F^T \cdot F)^T = F^T \cdot (F^T)^T = F^T \cdot F \quad \text{и} \quad (F \cdot F^T)^T = (F^T)^T \cdot F^T = F \cdot F^T,$$

а также положительно определенными (см. определение 1.25):

$$a \cdot (F^T \cdot F) \cdot a = (a \cdot F^T) \cdot (F \cdot a) = (F \cdot a) \cdot (F \cdot a) = b \cdot b = |b|^2 > 0 \quad (\text{П.2})$$

для любого ненулевого вектора  $a$ , где  $b = F \cdot a$ . Тогда, согласно теоремам 1.13 и 1.14, у тензоров  $F^T \cdot F$  и  $F \cdot F^T$  все три собственные значения вещественны и положительны, обозначим их как  $\overset{\circ}{\lambda}_\alpha^2$  и  $\overset{\circ}{\lambda}_\alpha^2$ , причем согласно (1.187)

$$F^T \cdot F = \sum_{\alpha=1}^3 \overset{\circ}{\lambda}_\alpha^2 \overset{\circ}{p}_\alpha \otimes \overset{\circ}{p}_\alpha, \quad F \cdot F^T = \sum_{\alpha=1}^3 \overset{\circ}{\lambda}_\alpha^2 p_\alpha \otimes p_\alpha, \quad (\text{П.3})$$

где  $\overset{\circ}{p}_\alpha$  – собственные векторы тензора  $F^T \cdot F$ , а  $p_\alpha$  – тензора  $F \cdot F^T$ , являющиеся согласно (1.185) ортонормированными:

$$\overset{\circ}{p}_\alpha \cdot \overset{\circ}{p}_\beta = \delta_{\alpha\beta}, \quad p_\alpha \cdot p_\beta = \delta_{\alpha\beta}, \quad (\text{П.4})$$

Правые части в (П.3) представляют собой квадраты некоторых тензоров  $\mathbf{U}$  и  $\mathbf{V}$ , определенных как

$$\mathbf{U} = \sum_{\alpha=1}^3 \overset{\circ}{\lambda}_\alpha \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha \otimes \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha, \quad \overset{\circ}{\lambda}_\alpha > 0; \quad \mathbf{V} = \sum_{\alpha=1}^3 \lambda_\alpha \mathbf{p}_\alpha \otimes \mathbf{p}_\alpha, \quad \lambda_\alpha > 0, \quad (\text{П.5})$$

где знаки у  $\lambda_\alpha$  выбираем положительными. При этом имеют место соотношения:

$$\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} = \mathbf{U}^2, \quad \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T = \mathbf{V}^2. \quad (\text{П.6})$$

Построенные тензоры  $\mathbf{V}$  и  $\mathbf{U}$  являются симметричными, что следует из формулы (П.5), а также положительно определенными, так как для любого ненулевого вектора  $\mathbf{a}$  выполнено:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{a} = \sum_{\alpha=1}^3 \overset{\circ}{\lambda}_\alpha \mathbf{a} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha \otimes \overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha \cdot \mathbf{a} = \sum_{\alpha=1}^3 \lambda_\alpha (\mathbf{a} \cdot \mathbf{p}_\alpha)^2 > 0, \quad (\text{П.7})$$

ввиду того, что  $\overset{\circ}{\lambda}_\alpha > 0$ . Аналогично доказываем положительную определенность тензора  $\mathbf{V}$ .

Оба тензора  $\mathbf{V}$  и  $\mathbf{U}$  невырождены, так как по условию теоремы  $\mathbf{F}$  – невырожден, и из (П.6) следует  $(\det \mathbf{U})^2 = \det \mathbf{U}^2 = \det (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}) = = (\det \mathbf{F})^2 \neq 0$ . Тогда существуют обратные тензоры  $\mathbf{U}^{-1}$  и  $\mathbf{V}^{-1}$ , с помощью которых можно построить еще два новых тензора

$$\overset{\circ}{\mathbf{O}} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{U}^{-1}, \quad \mathbf{O} = \mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{F}, \quad (\text{П.8})$$

являющихся ортогональными. В самом деле,  $\overset{\circ}{\mathbf{O}}^T \cdot \overset{\circ}{\mathbf{O}} = = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{U}^{-1})^T \cdot (\mathbf{F} \cdot \mathbf{U}^{-1}) = (\mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{U}^{-1}) = \mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{U}^2 \cdot \mathbf{U}^{-1} = \mathbf{E}$ , что согласно (1.209) означает ортогональность тензора  $\overset{\circ}{\mathbf{O}}$ , аналогично показываем ортогональность тензора  $\mathbf{O}$ .

Таким образом, мы действительно построили тензоры  $\mathbf{U}$  и  $\mathbf{O}$ , а также  $\mathbf{V}$  и  $\mathbf{O}$ , произведение которых согласно (П.8) образует исходный тензор  $\mathbf{F}$ :

$$\mathbf{F} = \overset{\circ}{\mathbf{O}} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{O}, \quad (\text{П.9})$$

причем  $\mathbf{U}$  и  $\mathbf{V}$  – симметричные, положительно определенные, а  $\mathbf{O}$  и  $\overset{\circ}{\mathbf{O}}$  – ортогональные.

Покажем единственность каждого из разложений (П.9). Пусть противное, т.е. существует еще одно разложение, например,  $\mathbf{F} = \overset{\circ}{\mathbf{O}} \cdot \widetilde{\mathbf{U}}$ . Но тогда  $\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} = \widetilde{\mathbf{U}}^2 = \mathbf{U}^2$ , откуда следует, что  $\widetilde{\mathbf{U}} = \mathbf{U}$ , так как разложение тензора  $\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}$  по собственному базису единственно, а знаки

у  $\lambda_\alpha$  и  $\tilde{\lambda}_\alpha$  по условию выбираем положительными. Совпадение  $U$  и  $\tilde{U}$  влечет за собой совпадение  $\overset{\circ}{O}$  и  $\overset{\circ}{O}$ , так как  $\overset{\circ}{O} = F \cdot \tilde{U}^{-1} = F \cdot U^{-1} = \overset{\circ}{O}$ , что и доказывает единственность разложения (П.9). Единственность разложения  $F = V \cdot O$  доказывается аналогично.

Нам осталось только показать, что ортогональные тензоры  $\overset{\circ}{O}$  и  $O$  совпадают, т.е. что из (П.9) следует (П.1). Для этого образуем тензор  $F \cdot \overset{\circ}{O}^T = \overset{\circ}{O} \cdot U \cdot \overset{\circ}{O}^T$ . В силу (П.9) для этого тензора выполнено соотношение:

$$\overset{\circ}{O} \cdot U \cdot \overset{\circ}{O}^T = V \cdot O \cdot \overset{\circ}{O}^T. \quad (\text{П.10})$$

Тензор  $O \cdot \overset{\circ}{O}^T$  является ортогональным, так как  $(O \cdot \overset{\circ}{O}^T)^T \cdot (O \cdot \overset{\circ}{O}^T) = \overset{\circ}{O} \cdot O^T \cdot O \cdot \overset{\circ}{O}^T = \overset{\circ}{O} \cdot \overset{\circ}{O}^T = E$ , тогда на соотношение (П.10) можно смотреть как на полярное разложение тензора  $\overset{\circ}{O} \cdot U \cdot \overset{\circ}{O}^T$ . Но этот тензор симметричен, так как  $(\overset{\circ}{O} \cdot U \cdot \overset{\circ}{O}^T)^T = (\overset{\circ}{O}^T)^T \cdot (\overset{\circ}{O} \cdot U)^T = \overset{\circ}{O} \cdot U \cdot \overset{\circ}{O}^T$ . Тогда формальное равенство  $\overset{\circ}{O} \cdot U \cdot \overset{\circ}{O}^T = \overset{\circ}{O} \cdot U \cdot \overset{\circ}{O}^T$  также представляет собой еще одно его полярное разложение. Однако выше мы показали единственность полярного разложения, значит должны иметь место соотношения:

$$V = \overset{\circ}{O} \cdot U \cdot \overset{\circ}{O}^T \quad \text{и} \quad O \cdot \overset{\circ}{O}^T = E, \quad (\text{П.11})$$

откуда и вытекает совпадение ортогональных тензоров  $O = \overset{\circ}{O}$ . ▲

**ТЕОРЕМА П2.** Собственные значения тензоров  $U$  и  $V$ , определенных по (П.5), совпадают:  $\lambda_\alpha = \overset{\circ}{\lambda}_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$ .

▼ Для доказательства воспользуемся определением (П.5) и первой формулой в (П.11):

$$V = \sum_{\alpha=1}^3 \lambda_\alpha p_\alpha \otimes p_\alpha = O \cdot U \cdot O^T = \sum_{\alpha=1}^3 \overset{\circ}{\lambda}_\alpha \overset{\circ}{O} \cdot \overset{\circ}{p}_\alpha \otimes (\overset{\circ}{O} \cdot \overset{\circ}{p}_\alpha) = \sum_{\alpha=1}^3 \overset{\circ}{\lambda}_\alpha p'_\alpha \otimes p'_\alpha,$$

где  $p'_\alpha = \overset{\circ}{O} \cdot \overset{\circ}{p}_\alpha$ . Согласно этому соотношению мы получили два различных собственных базиса тензора  $V$  и два набора собственных значений, что невозможно, следовательно,  $p'_\alpha = \overset{\circ}{O} \cdot \overset{\circ}{p}_\alpha = p_\alpha$  и  $\lambda_\alpha = \overset{\circ}{\lambda}_\alpha$ , что и требовалось доказать. ▲

Для всякого тензора  $F$ , согласно определению (5.89), можно ввести дифференциал  $dF$ , тогда имеет место следующая основная теорема.

**ТЕОРЕМА П3.** Пусть имеется два тензора второго ранга  $F$  и  $P$ , причем  $1^\circ$   $F$  невырожден,

Таблица П1. Энергетические пары тензоров

Номер пары $n$	Энергетические тензоры $T^{(n)}$	Энергетические тензоры $C^{(n)}$
I	$F^T \cdot T \cdot F$	$\Lambda = \frac{1}{2}(E - U^{-2})$
II	$\frac{1}{2}(F^T \cdot T \cdot O + O^T \cdot T \cdot F)$	$E - U^{-1}$
III	$O^T \cdot T \cdot O$	$B$
IV	$\frac{1}{2}(F^{-1} \cdot T \cdot O + O^T \cdot T \cdot F^{-1T})$	$U - E$
V	$F^{-1} \cdot T \cdot F^{-1T}$	$C = \frac{1}{2}(U^2 - E)$

$2^\circ$  скалярное произведение  $P$  и  $F$  образует симметричный тензор  $T = F \cdot P$ , тогда двойное скалярное произведение тензоров

$$d'A = P \cdot dF \quad (П.12)$$

можно представить в виде свертки одной из следующих пяти пар тензоров:

$$d'A = T^{(n)} \cdot dC^{(n)}, \quad n = I, II, III, IV, V, \quad (П.13)$$

где  $T^{(n)}$  и  $C^{(n)}$  – симметричные тензоры второго ранга, представленные в табл. П1.

Тензор  $B$  определяется с помощью своего дифференциала:

$$dB = \frac{1}{2}(dU \cdot U^{-1} + U^{-1} \cdot dU). \quad (П.14)$$

В механике сплошной среды всем величинам, входящим в (П.12), (П.13), придается определенный физический смысл: тензор  $P$  характеризует условные напряжения в элементарном объеме сплошной среды и называется тензором Пиола-Кирхгофа, тензор  $F$  называется градиентом деформаций,  $U$  и  $V$  – соответственно правым и левым тензорами искажений, а  $O$  – тензором ротации. Скаляр  $d'A$  в механике представляет собой элементарную работу внешних поверхностных

сил. Именно поэтому тензорные пары  $T$  и  $C$  называют связанными через работу или иначе энергетическими парами тензоров.

▼ Доказательство теоремы проведем отдельно для каждой энергетической пары.

Пара  $\Lambda \sim T^{(I)}$

Подставим в выражение (П.12) вместо тензора  $P$  тензор  $T$  и воспользуемся правилами (1.137) перемены мест множителей в тройном скалярном произведении:

$$d'A = P \cdot dF = (F^{-1} \cdot T) \cdot dF = T \cdot dF \cdot F^{-1}. \quad (П.15)$$

Продифференцируем теперь тождество  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{E}$ , в результате получим:  $d\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{-1} + \mathbf{F} \cdot d\mathbf{F}^{-1} = 0$ . Тогда скаляр  $d'A$  можно представить в виде:

$$-d'A = \mathbf{T} \cdot \mathbf{F} \cdot d\mathbf{F}^{-1}. \quad (\text{П.16})$$

Разобьем правую часть этого выражения на два слагаемых:

$$-d'A = \frac{1}{2}\mathbf{T} \cdot \mathbf{F} \cdot d\mathbf{F}^{-1} + \frac{1}{2}\mathbf{T} \cdot \mathbf{F} \cdot d\mathbf{F}^{-1} = \frac{1}{2}\mathbf{T} \cdot d\mathbf{F}^{-1T} \cdot \mathbf{F}^T + \frac{1}{2}\mathbf{T} \cdot \mathbf{F} \cdot d\mathbf{F}^{-1}. \quad (\text{П.17})$$

Здесь мы воспользовались свойством скалярного произведения тензоров по двум индексам  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{B}^T$ , а также симметрией тензора  $\mathbf{T}$ .

Представим теперь в этом выражении тензоры  $d\mathbf{F}$  и  $d\mathbf{F}^{-1}$  как тензорное произведение самих себя на метрический тензор  $\mathbf{E}$ :

$$\begin{aligned} d\mathbf{F}^{-1T} &= \mathbf{E} \cdot d\mathbf{F}^{-1T} = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{-1}) \cdot d\mathbf{F}^{-1T}, \\ d\mathbf{F}^{-1} &= d\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{E} = d\mathbf{F}^{-1} \cdot (\mathbf{F}^{-1T} \cdot \mathbf{F}^T). \end{aligned} \quad (\text{П.18})$$

Подставляя эти выражения в (П.17), получим

$$-d'A = \frac{1}{2}\mathbf{T} \cdot (\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot d\mathbf{F}^{-1T}) \cdot \mathbf{F}^T + \frac{1}{2}\mathbf{T} \cdot (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F}^{-1T}) \cdot \mathbf{F}^T. \quad (\text{П.19})$$

Воспользуемся еще раз правилом (1.137) перестановки скалярного умножения трех произвольных тензоров:

$$\begin{aligned} -d'A &= \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}) \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot d\mathbf{F}^{-1T} + \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F}^{-1T} = \\ &= \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{F} \cdot \frac{1}{2}(\mathbf{F}^{-1} \cdot d\mathbf{F}^{-1T} + d\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F}^{-1T}) = -\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{F} \cdot d\Lambda. \end{aligned} \quad (\text{П.20})$$

Здесь мы использовали выражение для дифференциала тензора  $\Lambda = \frac{1}{2}(\mathbf{E} - \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F}^{-1T}) = \frac{1}{2}(\mathbf{E} - \mathbf{U}^{-2})$ , тогда

$$-d\Lambda = \frac{1}{2}(d\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F}^{-1T} + \mathbf{F}^{-1} \cdot d\mathbf{F}^{-1T}). \quad (\text{П.21})$$

Тогда, вводя новый тензор

$$\overset{(I)}{\mathbf{T}} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}, \quad (\text{П.22})$$

получим из (П.20):

$$d'A = \overset{(I)}{\mathbf{T}} \cdot d\Lambda, \quad (\text{П.23})$$

т.е. представление (П.13) действительно существует, а в качестве первой энергетической пары тензоров выступает пара

$$\overset{(I)}{\mathbf{T}} \sim \overset{(I)}{\mathbf{C}}.$$

Пара:  $\overset{(V)}{\mathbf{T}} \sim \mathbf{C}$

Введем новый тензор:

$$\overset{(V)}{\mathbf{T}} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}^{-1T} \quad (\text{П.24})$$

и преобразуем выражение (П.12) следующим образом:

$$\begin{aligned} d'A &= \mathbf{P} \cdot d\mathbf{F} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{T} \cdot d\mathbf{F} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}^{-1T} \cdot \mathbf{F}^T \cdot d\mathbf{F} = \\ &= \overset{(V)}{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{F}^T \cdot d\mathbf{F} = \overset{(V)}{\mathbf{T}} \cdot \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \cdot d\mathbf{F} + \mathbf{F}^T \cdot d\mathbf{F}) = \\ &= \overset{(V)}{\mathbf{T}} \cdot \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \cdot d\mathbf{F} + d\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}) = \overset{(V)}{\mathbf{T}} \cdot d\mathbf{C}, \end{aligned} \quad (\text{П.25})$$

Здесь мы использовали свойство (см. упр. 1.6.1) скалярного произведения тензоров  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{B}$  и учли симметрию тензора  $\overset{(V)}{\mathbf{T}}$ :

$$\overset{(V)}{\mathbf{T}}^T = (\mathbf{T} \cdot \mathbf{F}^{-1T})^T \cdot (\mathbf{F}^{-1})^T = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}^{-1T} = \overset{(V)}{\mathbf{T}}, \quad (\text{П.26})$$

а также учли выражение для дифференциала энергетического тензора  $\mathbf{C}$ :

$$\mathbf{C} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{E}) = \frac{1}{2} (\mathbf{U}^2 - \mathbf{E}), \quad d\mathbf{C} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \cdot d\mathbf{F} + d\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}). \quad (\text{П.27})$$

Таким образом, существует вторая энергетическая пара тензоров  $\overset{(V)}{\mathbf{T}} \sim \overset{(V)}{\mathbf{C}} = \mathbf{C}$ .

Пара:  $\overset{(IV)}{\mathbf{T}} \sim \mathbf{U}$

Для вывода третьей энергетической пары преобразуем выражение (П.25), перейдя от  $\overset{(V)}{\mathbf{T}}$  к  $\mathbf{T}$  (П.24) и от  $\mathbf{C}$  к тензору  $\mathbf{U}$  (П.27). Тогда из (П.26) получим

$$d'A = \overset{(IV)}{\mathbf{T}} \cdot d\mathbf{C} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}^{-1T}) \cdot (\mathbf{U} \cdot d\mathbf{U} + d\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}). \quad (\text{П.28})$$

Раскроем скобки и воспользуемся правилами (1.137) перестановки порядка скалярного умножения трех тензоров:

$$d'A = \frac{1}{2} \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}^{-1T} \cdot \mathbf{U} \cdots d\mathbf{U} + \frac{1}{2} \mathbf{U} \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}^{-1T} \cdots d\mathbf{U}. \quad (\text{П.29})$$

Учитывая полярное разложение (П.1):

$$\mathbf{F} = \mathbf{O} \cdot \mathbf{U}, \quad \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{O}^T, \quad \mathbf{F}^{-1T} = \mathbf{O} \cdot \mathbf{U}^{-1}, \quad (\text{П.30})$$

получаем окончательно

$$d'A = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{O} + \mathbf{O}^T \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}^{-1T}) \cdots d\mathbf{U} = \overset{\text{(IV)}}{\mathbf{T}} \cdots d\mathbf{U}. \quad (\text{П.31})$$

Здесь введен четвертый энергетический тензор  $\overset{\text{(IV)}}{\mathbf{T}}$ :

$$\overset{\text{(IV)}}{\mathbf{T}} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{O} + \mathbf{O}^T \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}^{-1T}), \quad (\text{П.32})$$

парным к которому является тензор  $\mathbf{U}$ :  $\overset{\text{(IV)}}{\mathbf{C}} = \mathbf{U}$ .

**Пара:**  $\overset{\text{(II)}}{\mathbf{T}} \sim -\mathbf{U}^{-1}$

Преобразуем теперь первую энергетическую пару (П.23), заменив тензор  $\Lambda$  тензором  $\mathbf{U}^{-1}$ :

$$\Lambda = \frac{1}{2} (\mathbf{E} - \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F}^{-1T}) = \frac{1}{2} (\mathbf{E} - \mathbf{U}^{-2}), \quad (\text{П.33})$$

где  $\mathbf{U}^{-2} = \mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{U}^{-1}$ . Тогда из (П.23) получаем:

$$\begin{aligned} d'A &= -\frac{1}{2} \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{F} \cdots (\mathbf{U}^{-1} \cdot d\mathbf{U}^{-1} + d\mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{U}^{-1}) = \\ &= -\frac{1}{2} \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{U}^{-1} \cdots d\mathbf{U}^{-1} - \frac{1}{2} \mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{F} \cdots d\mathbf{U}^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{П.34})$$

Используя свойства (П.30) полярного разложения, получим выражение для  $d'A$  в виде:

$$d'A = \overset{\text{(II)}}{\mathbf{T}} \cdots d(-\mathbf{U}^{-1}), \quad (\text{П.35})$$

где введен второй энергетический тензор:

$$\overset{\text{(II)}}{\mathbf{T}} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{O} + \mathbf{O}^T \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}), \quad (\text{П.36})$$

парным к которому является тензор  $-U^{-1} = \overset{(II)}{C}$ .

Пара:  $\overset{(III)}{T} \sim B$

Еще одну энергетическую пару можно получить из уравнения (П.29), если вместо  $F^{-1}$  и  $F^{-1T}$  подставить их полярное разложение (П.30):

$$d'A = \frac{1}{2} U^{-1} \cdot O^T \cdot T \cdot O \cdot U^{-1} \cdot U \cdot dU + \frac{1}{2} U \cdot U^{-1} \cdot O^T \cdot T \cdot O \cdot U^{-1} \cdot dU. \quad (\text{П.37})$$

Меняя порядок скалярного умножения, получаем

$$d'A = \frac{1}{2} O^T \cdot T \cdot O \cdot dU \cdot U^{-1} + \frac{1}{2} O^T \cdot T \cdot O \cdot U^{-1} \cdot dU. \quad (\text{П.38})$$

Отсюда следует существование пятой энергетической пары:

$$d'A = \overset{(III)}{T} \cdot dB, \quad (\text{П.39})$$

где  $\overset{(III)}{T}$  – третий энергетический тензор:

$$\overset{(III)}{T} = O^T \cdot T \cdot O, \quad (\text{П.40})$$

$a B = \overset{(III)}{C}$  – тензор Бюо, который вводят с помощью выражения (П.14).

На этом доказательство теоремы завершено. ▲

Обратим внимание на то, что все энергетические тензоры  $\overset{(n)}{C}$  образованы некоторой степенью правого тензора  $U$  и могут быть выражены общей формулой:

$$\overset{(n)}{C} = \frac{1}{(n - III)} (U^{n-III} - E), \quad n = I, II, IV, V. \quad (\text{П.41})$$

Здесь при каждом  $n$  следует сначала вычислить  $(n - III)$  в римских цифрах, а затем перейти к соответствующим арабским цифрам. Выражение для тензора  $\overset{(III)}{C} = B$  представляет собой некоторый аналог "нулевой степени" от  $U$ .

С помощью левого тензора  $V$  также можно ввести пары тензоров  $\overset{(n)}{S}$  и  $\overset{(n)}{A}$ , однако при этом скаляр  $d'A$  будет зависеть еще и от дифференциала тензора ротации  $dO^T$ , поэтому такие пары  $(\overset{(n)}{S}, \overset{(n)}{A})$  назовем **квазиэнергетическими**.

Таблица П2. Квазиэнергетические пары тензоров

Номер пары $n$	Квазиэнергетические тензоры $S^{(n)}$	Квазиэнергетические тензоры $A^{(n)}$
I	$V \cdot T \cdot V$	$A = \frac{1}{2}(E - V^2)$
II	$\frac{1}{2}(V \cdot T + T \cdot V)$	$E - V^{-1}$
III	$T$	$Y$
IV	$\frac{1}{2}(V^{-1} \cdot T + T \cdot V^{-1})$	$V - E$
V	$V^{-1} \cdot T \cdot V^{-1}$	$J = \frac{1}{2}(V^2 - E)$

ТЕОРЕМА П4. Пусть выполнены условия теоремы П3, тогда скаляр  $d'A = P \cdot dF$  можно выразить с помощью одной из следующих пяти квазиэнергетических пар тензоров:

$$d'A = S^{(n)} \cdot dA + \overset{\circ}{S} \cdot dO^T, \quad n = I, \dots, V, \quad (\text{П.42})$$

где  $S^{(n)}, A^{(n)}$  – симметричные тензоры второго ранга, выражения для которых представлены в табл. П2, а  $\overset{\circ}{S}$  – некоторый дополнительный тензор.

▼ Доказательство также проведем отдельно для каждой пары.

Пара:  $\overset{(I)}{S} \sim A$

Рассмотрим первую энергетическую пару (П.23) и перейдем от тензора  $U^{-2}$  к  $V^{-2}$  с помощью соотношений (П.11)  $U^{-2} = O^T \cdot V^{-2} \cdot O$ :

$$\begin{aligned} d'A = -\frac{1}{2}F^T \cdot T \cdot F \cdot dU^{-2} &= -\frac{1}{2}F^T \cdot T \cdot F \cdot (dO^T \cdot V^{-2} \cdot O + \\ &+ O^T \cdot dV^{-2} \cdot O + O^T \cdot V^{-2} \cdot dO). \end{aligned} \quad (\text{П.43})$$

Раскрывая скобки и используя полярное разложение (П.1) и правила (1.137) перемены порядка скалярного умножения тензоров, получим

$$\begin{aligned} d'A = -\frac{1}{2} &\left( V^{-1} \cdot T \cdot V \cdot O \cdot dO^T + V \cdot T \cdot V \cdot dV^{-2} + \right. \\ &\left. + V \cdot T \cdot V^{-1} \cdot dO \cdot O^T \right). \end{aligned} \quad (\text{П.44})$$

Учитывая, что  $O \cdot O^T = E$  и, следовательно,

$$dO \cdot O^T = -O \cdot dO^T, \quad (\text{П.45})$$

получим окончательное выражение вида (П.42):

$$d'A = \overset{(I)}{S} \cdot \cdot d \left( -\frac{1}{2} V^{-2} \right) + \overset{\circ}{S} \cdot \cdot d O^T, \quad (\text{П.46})$$

где первые квазиэнергетические тензоры  $\overset{(I)}{S}$ ,  $\overset{(I)}{A}$  и вспомогательный тензор  $\overset{\circ}{S}$  можно выразить следующим образом:

$$\overset{(I)}{S} = V \cdot T \cdot V, \quad \overset{\circ}{S} = \frac{1}{2} (V \cdot T \cdot V^{-1} - V^{-1} \cdot T \cdot V) \cdot O, \quad (\text{П.47})$$

$$\overset{(I)}{A} = A = \frac{1}{2} (E - V^{-2}) = \frac{1}{2} (E - F^{-1T} \cdot F^{-1}). \quad (\text{П.48})$$

Таким образом, доказано существование первой квазиэнергетической пары  $\overset{(I)}{S} \sim \overset{I}{A}$ .

Пара:  $\overset{(II)}{S} \sim (-V^{-1})$

Если в (П.46) от дифференциала  $dV^{-2}$  перейти к  $dV^{-1}$ , то получим

$$\begin{aligned} d'A &= \overset{\circ}{S} \cdot \cdot d O^T - \frac{1}{2} V \cdot T \cdot V \cdot (V^{-1} \cdot dV^{-1} + dV^{-1} \cdot V^{-1}) = \\ &= \overset{\circ}{S} \cdot \cdot d O^T - \frac{1}{2} (V \cdot T + T \cdot V) \cdot dV^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{П.49})$$

Здесь вновь использовано правило (1.137). В результате приходим ко второй квазиэнергетической паре:

$$d'A = \overset{(II)}{S} \cdot \cdot d(E - V^{-1}) + \overset{\circ}{S} \cdot \cdot d O^T, \quad (\text{П.50})$$

где обозначен второй квазиэнергетический тензор  $\overset{(II)}{S}$ :

$$\overset{(II)}{S} = \frac{1}{2} (V \cdot T + T \cdot V), \quad (\text{П.51})$$

а в качестве  $\overset{(II)}{A}$ , очевидно, выступает тензор  $\overset{(II)}{A} = E - V^{-1}$ .

**Пара:  $T \sim Y$**

Воспользуемся третьей энергетической парой (П.39) и перейдем от дифференциала  $dU$  к  $dV$ :

$$\begin{aligned} d'A &= \frac{1}{2} \mathbf{O}^T \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{O} \cdots (d\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}^{-1} + \mathbf{U}^{-1} \cdot d\mathbf{U}) = \frac{1}{2} \mathbf{O}^T \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{O} \cdots \\ &(\mathbf{d}\mathbf{O}^T \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{O} + \mathbf{O}^T \cdot d\mathbf{V} \cdot \mathbf{O} + \mathbf{O}^T \cdot \mathbf{V} \cdot d\mathbf{O}) \cdot \mathbf{O}^T \cdot \mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{O} + \frac{1}{2} \mathbf{O}^T \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{O} \cdots \\ &\cdots \mathbf{O}^T \cdot \mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{O} (\mathbf{d}\mathbf{O}^T \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{O} + \mathbf{O}^T \cdot d\mathbf{V} \cdot \mathbf{O} + \mathbf{O}^T \cdot \mathbf{V} \cdot d\mathbf{O}). \end{aligned} \quad (\text{П.52})$$

Меняя порядок скалярного умножения тензоров в каждом из этих слагаемых, получим

$$\begin{aligned} d'A &= \frac{1}{2} (\mathbf{T} \cdots \mathbf{O} \cdot d\mathbf{O}^T + \mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{T} \cdots d\mathbf{V} + \mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{V} \cdots d\mathbf{O} \cdot \mathbf{O}^T + \\ &+ \mathbf{V} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{V}^{-1} \cdots \mathbf{O} d\mathbf{O}^T + \mathbf{T} \cdot \mathbf{V}^{-1} \cdots d\mathbf{V} + \mathbf{T} \cdots d\mathbf{O} \cdot \mathbf{O}^T). \end{aligned} \quad (\text{П.53})$$

Используя соотношение (П.45), получаем, что первое и последнее слагаемые взаимно сокращаются, и выражение (П.53) можно привести к виду:

$$d'A = \mathbf{T} \cdots d\mathbf{Y} + \overset{\circ}{\mathbf{S}} \cdots d\mathbf{O}^T, \quad (\text{П.54})$$

где введен новый тензор  $\mathbf{Y}$ , подобный тензору Био  $\mathbf{B}$ , определенный своим дифференциалом:

$$d\mathbf{Y} = \frac{1}{2} (d\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}^{-1} + \mathbf{V}^{-1} \cdot d\mathbf{V}), \quad (\text{П.55})$$

который является третьим квазиэнергетическим тензором:

$$\overset{\text{(III)}}{\mathbf{A}} = \mathbf{Y}, \quad \overset{\text{(III)}}{\mathbf{S}} = \mathbf{T}. \quad (\text{П.56})$$

**Пара:  $S^{(IV)} \sim V$**

Выражение (П.54) с учетом (П.55) можно легко преобразовать к виду:

$$d'A = \frac{1}{2} (\mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{T} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{V}^{-1}) \cdots d\mathbf{V} + \overset{\circ}{\mathbf{S}} \cdots d\mathbf{O}^T, \quad (\text{П.57})$$

что доказывает существование четвертой квазиэнергетической пары:

$$d'A = \overset{\text{(IV)}}{\mathbf{S}} \cdots d\mathbf{V} + \overset{\circ}{\mathbf{S}} \cdots d\mathbf{O}^T, \quad (\text{П.58})$$

где определены четвертые квазиэнергетические тензоры:

$$\overset{(IV)}{S} = \frac{1}{2}(V^{-1} \cdot T + T \cdot V^{-1}), \quad \overset{(IV)}{A} = E + V. \quad (\text{П.59})$$

Пара:  $\overset{(V)}{S} \sim J$

Преобразуем выражение (П.57) следующим образом:

$$\begin{aligned} d'A &= \frac{1}{2}(V^{-1} \cdot T \cdot V^{-1} \cdot V \cdot dV + T \cdot V^{-1} \cdot dV \cdot V \cdot V^{-1}) + \overset{\circ}{S} \cdot dO^T = \\ &= V^{-1} \cdot T \cdot V^{-1} \cdot \frac{1}{2}(V \cdot dV + dV \cdot V) + \overset{\circ}{S} \cdot dO^T. \end{aligned} \quad (\text{П.60})$$

Отсюда следует существование пятой квазиэнергетической пары:

$$d'A = \overset{(V)}{S} \cdot dJ + \overset{\circ}{S} \cdot dO^T, \quad (\text{П.61})$$

где пятый квазиэнергетический тензор определим следующим образом:

$$\overset{(V)}{S} = V^{-1} \cdot T \cdot V^{-1}. \quad (\text{П.62})$$

Парным к нему является тензор

$$\overset{(V)}{A} = J = \frac{1}{2}(V^2 - E) = \frac{1}{2}(F \cdot F^T - E). \quad (\text{П.63})$$

Доказательство теоремы П4 закончено. ▲

Заметим, что все квазиэнергетические тензоры  $\overset{(n)}{A}$  образованы ( $n - III$ ) степенью левого тензора  $V$ :

$$\overset{(n)}{A} = \frac{1}{n - III}(V^{n-III} - E), \quad n = I, II, IV, V, \quad (\text{П.64})$$

а выражение для тензора  $\overset{(III)}{A} = Y$  представляет собой аналог "нулевой" степени от  $V$ .

В заключение приведем еще две теоремы, поясняющие смысл введения энергетических и квазиэнергетических пар тензоров.

**ТЕОРЕМА П5.** *Пусть выполнены условия теоремы П3, и кроме того скаляр  $d'A$  является полным дифференциалом скалярной тензорной функции  $\psi$  от  $\overset{(n)}{C}$ , т.е.*

$$d'A = d\psi, \quad \psi = \psi(\overset{(n)}{C}) \quad \forall n \in \{I, \dots, V\}, \quad (\text{П.65})$$

тогда энергетические тензоры  $\overset{(n)}{T}$  являются потенциальными тензорными функциями от энергетических тензоров  $\overset{(n)}{C}$ .

▼ Доказательство очевидно, так как из (П.13) и (П.65)  $d\psi = (\partial\psi/\partial \overset{(n)}{C}) \cdot d\overset{(n)}{C} = \overset{(n)}{T} \cdot d\overset{(n)}{C}$ , откуда в силу независимости  $d\overset{(n)}{C}$  получаем:

$$\overset{(n)}{T} = \partial\psi/\partial \overset{(n)}{C}. \quad \blacktriangle \quad (\text{П.66})$$

**ТЕОРЕМА П6.** Пусть выполнены условия теоремы П3, и кроме того скаляр  $d'A$  является полным дифференциалом скалярной тензорной функции  $\psi$  от двух тензорных аргументов  $A$  и  $O$ , т.е.

$$d'A = d\psi, \quad \psi = \psi(\overset{(n)}{A}, \overset{(n)}{O}), \quad (\text{П.67})$$

тогда квазиэнергетические тензоры  $\overset{(n)}{S}$  и  $\overset{(n)}{A}$  связаны псевдопотенциальными тензорными функциями.

▼ Доказательство легко следует из (П.42) и (П.67), так как

$$d\psi = (\partial\psi/\partial \overset{(n)}{A}) \cdot d\overset{(n)}{A} + (\partial\psi/\partial \overset{(n)}{O}) \cdot d\overset{(n)}{O} = d'A = \overset{(n)}{S} \cdot \overset{(n)}{A} + \overset{\circ}{S} \cdot d\overset{\circ}{O}^T.$$

В силу независимости дифференциалов  $d\overset{(n)}{A}$  и  $d\overset{\circ}{O}$  (тензор  $\overset{(n)}{A}$  – симметричный и имеет шесть независимых компонент, а  $\overset{\circ}{O}$  – ортогональный и содержит три независимые компоненты), получаем:

$$\overset{(n)}{S} = \partial\psi/\partial \overset{(n)}{A}, \quad (\text{П.68})$$

$$\overset{\circ}{S} = \partial\psi/\partial \overset{\circ}{O}. \quad (\text{П.69})$$

Соотношения (П.68) и (П.67) представляют собой согласно определению 5.18 псевдопотенциальную тензорную функцию, а уравнение (П.69) накладывает определенное ограничение на вид функции  $\psi$  (П.67). ▲

Энергетические пары при  $n = I, III, IV$  и  $V$  в систематическом виде были получены Хиллом [50], пара при  $n = II$  была установлена К.Ф.Черных [43], а квазиэнергетические пары – автором данной книги [14].

## Список литературы

1. Акивис М.А., Гольдберг В.В. *Тензорное исчисление*. М.: Наука, 1972, 352 с.
2. Анчиков А.М. *Основы векторного и тензорного анализа*. Казань, 1988.
3. Багавантам С., Венкатарайуду Т. *Теория групп и ее применение к физическим проблемам*. М.: ИЛ, 1959.
4. Беклемишев Д.В. *Курс аналитической геометрии и линейной алгебры*. М.: Физматгиз, 1980, 336 с.
5. Борисенко А.И., Тарапов И.Е. *Векторный анализ и начала тензорного исчисления*. М.: Высшая школа, 1966.
6. Вакуленко А.А. *Полилинейная алгебра и тензорный анализ в механике*. Л.: Изд-во ЛГУ, 1972.
7. Вейль Г. *Классические группы, их инварианты и представления*. М.: ИЛ, 1948.
8. Векуа И.Н. *Основы тензорного анализа и теории ковариантов*. М.: Наука, 1978, 296 с.
9. Вустер У. *Применение тензоров и теории групп для описания физических свойств кристаллов*. М.: Мир, 1977, 384 с.
10. Горшков А.Г., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В. *Основы тензорного анализа и механика сплошной среды*. М.: Наука, 2000.
11. Грин А., Адкинс Дж. *Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды*. М.: Мир, 1965, 455 с.
12. Гуревич Г.Б. *Основы теории алгебраических инвариантов*. М.-Л.: ГТТИ, 1948.
13. Димитриенко Ю.И. *Механика композиционных материалов при высоких температурах*. М.: Машиностроение, 1997, 368 с.
14. Димитриенко Ю.И., Дашибаев И.З. *Модели вязкоупругого поведения эластомеров при конечных деформациях* // *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана, сер. Естественные науки*, 2001, N 1.
15. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. *Современная геометрия: методы и приложения*. М.: Наука, 1986, 760 с.
16. Ефимов Н.В. *Введение в теорию внешних форм*. М.: Наука, 1977.
17. Желобенко Д.П., Штерн А.И. *Представления групп Ли*. М.: Наука, 1983.
18. Канатников А.Н., Крищенко А.П. *Линейная алгебра*/ Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1998, 336 с. (Сер. Математика в техническом университете, вып. IV).
19. Кильчевский Н.А. *Основы тензорного исчисления с приложениями к механике*. Киев: Наукова думка, 1972.
20. Коренев Г.В. *Тензорное исчисление*. М.: Изд-во МФТИ, 1996.
21. Кострикин А.И. *Введение в алгебру*. М.: Наука, 1977, 496 с.
22. Кочин Н.Е. *Векторное исчисление и начало тензорного исчисления*. М.: Наука, 1965, 436 с.
23. Курош А.Г. *Теория групп*. М.: Наука, 1967, 648 с.
24. Лохин В.В., Седов Л.И. *Нелинейные тензорные функции от нескольких тензорных аргументов* // *ПММ*, 1963, 27, N3, с. 393.

25. Лурье А.И. *Нелинейная теория упругости*. М.: Наука, 1980, 512 с.
26. Любарский Г.Я. *Теория групп и ее применение в физике*. М.: Физматгиз, 1958.
27. Мак-Конел А.Дж. *Введение в тензорный анализ*. М.: Физматгиз, 1963, 412 с.
28. Малолеткин Г.Н., Фомин В.Л. *Тензорные базисы в кристаллофизике*. Л.: Изд-во ЛГУ, 1972.
29. Мантуров О.В. *Элементы тензорного исчисления*. М.: Прогресс, 1991, 256 с.
30. Мурнаган Ф. *Теория представлений групп*. М., 1950.
31. Най Дж. *Физические свойства кристаллов*. М.: ИЛ, 1960, 386 с.
32. Петров А.З. *Пространства Эйнштейна*. М.: Физматгиз, 1961, 464 с.
33. Победря Б.Е. *Лекции по тензорному анализу*. М.: Изд-во МГУ, 1986, 286 с.
34. Постников М.М. *Лекции по геометрии. Семестр II: Линейная алгебра*. М.: Наука, 1986, 400 с.
35. Рашевский П.К. *Риманова геометрия и тензорный анализ*. М.: Наука, 1967, 664 с.
36. Седов Л.И. *Механика сплошной среды. Т.1, 2*. М.: Наука, 1976, 536 с., 574 с.
37. Сиротин Ю.И. Целые рациональные базисы тензорных инвариантов кристаллографических групп // *ДАН СССР*, 1963, 51.
38. Сиротин Ю.И., Шаскольская Н.П. *Основы кристаллофизики*. М.: Наука, 1979, 640 с.
39. Смирнов В.И. *Курс высшей математики. Т.2*. М.: Наука, 1974, 656 с.
40. Сокольников И.С. *Тензорный анализ*. М.: Наука, 1971, 376 с.
41. Спенсер Э. *Теория инвариантов*. М.: Мир, 1974, 156 с.
42. Схоутен Я.А. *Тензорный анализ для физиков*. М.: Наука, 1965, 456 с.
43. Хамермеш М. *Теория групп и ее применение к физическим проблемам*. М.: Мир, 1966, 588 с.
44. Черных К.Ф., Литвиненкова З.Н. *Теория больших упругих деформаций*. Изд-во ЛГУ, 1988.
45. Шипов Г.И. *Теория физического вакуума*. НТ-Центр, 1993, 362с.
46. Широков П.А., Широков А.П. *Аффинная дифференциальная геометрия*. М.: Физматгиз, 1959, 320 с.
47. Шубников А.В. *Симметрия и антисимметрия конечных фигур*. М., 1951.
48. Шубников А.В., Флинт Е.Е., Бокий Г.Г. *Основы кристаллографии*. М., 1940.
49. Яковенко М.Г., Феоктистов В.В., Граник И.С. / под ред. Яковенко М.Г. *Применение тензорного исчисления в задачах механики сплошных сред*. М.: Изд-во МГТУ, 1982.
50. Hill R. Constitutive inequalities for isotropic elastic solids under finite strain // *Proc. Roy. Soc., London*, 1970, A314, 1519.

# ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Алгебра Грассмана** 156  
**Алгебраическое дополнение** 56  
**Альтернирование** 137  
**Анизотропия** 201  
**Аффинная связность** 507  
**Базис** 89
  - взаимный 121
  - декартов 17
  - диадный 50, 130
  - кристаллофизический 174, 193
  - локальный
  - - взаимный 20
  - - в окрестности поверхности 486
  - - - поверхности 451
  - - основной в окрестности поверхности 485
  - минимальный целый рациональный 246
  - неголономный 514
  - ортонормированный 14, 71, 95
  - полиадный 74
  - тензорный 205
  - тетрадный 74
  - триадный 74
  - функциональный 245
  - - совместных инвариантов 381**Вектор** 13
  - аксиальный 65, 83
  - базиса локальный 18
  - бинормали единичный 442
  - вихря 406
  - главной нормали 442
  - Дарбу 446
  - закрепленный 16
  - индифферентный  $\pi$ -ого уровня 216
  - касательный 496
  - - единичный 441
  - кривизны 442
  - - нормальной 469
  - - геодезической 469
  - - кручения 443
  - нормали единичный 454
  - нулевой 13
  - ортогональный 14, 94
  - полярный 82
  - свободный 16
  - скользящий 16
  - скорости движения по кривой 440
  - сопутствующий кососимметричному тензору 65**Вектор-функция** 439  
**Геодезическая линия** 480, 509

- Градиент**
  - вектора 405
  - - правый 408
  - от градиента скаляра 419
  - - вектора 422
  - - тензора 423
  - от ротора вектора 422
  - скаляра 404
  - тензора 503**Группа** 171
  - изомерная 204
  - коммутативная 171, 179
  - максимальная 173
  - непрерывная 171
  - преобразований 174
  - - ортогональных 175
  - - собственно-ортогональных 175
  - симметрии
  - - тензора 202
  - - тензорной функции 268
  - симметрическая 174
  - - унимодулярная
  - - собственная 175
  - - полная 175
  - - точечная 171**Девиатор обобщенный** 330  
**Детерминант** 19
  - матрицы 100
  - тензора 55**Диада** 51
  - базисная 128
  - - сопряженная 132**Дивергенция**
  - вектора 407
  - - правая 408
  - от градиента
  - - вектора 422
  - - скаляра 420
  - - тензора 423
  - от дивергенции тензора 424
  - от ротора
  - - вектора 422
  - - тензора 423
  - тензора 412, 503**Дифференциал**
  - тензора 411
  - частичный 390**Длина**
  - вектора 94
  - дуги 441
  - - элементарная 440**Знак перестановки** 100

**Изотропия** 172, 208, 248

- трансверсальная 159

**Инвариант**

- главный 253
- квадратичный 251
- спектральный 331
- кубический 251
- линейный 251
- спектральный 331
- неприводимый 246
- полиномиальный 245
- приводимый 246
- скалярный 238
- совместный 380
- неприводимый 381
- функционально независимый 239, 380

**Инверсия** 162**Индексы**

- немые 22
- свободные 22

**Индикатриса Дюпена** 477**Интеграл**

- криволинейный
- от компонент тензора 537
- второго рода 539
- - векторный 539
- - скалярный 539
- - - от тензора 539
- - тензорный 540
- - первого рода 537
- от компонент тензора вдоль кривой 537
- поверхностный
- - первого рода 544
- - второго рода 545
- - - векторный 546
- - - скалярный 545
- - - тензорный 546
- - тройной 551
- объемный от тензора 550

**Интенсивность** 333**Квадрат тензора** 55**Класс** 171

- (*A*)-ромбоздрический 256, 276, 283, 291, 315
- (*B*)-ромбоздрический 256, 276, 283, 316
- гексагональный 257, 276, 284, 292, 316
- изотропии 257, 276, 294, 316
- квазизотропный 257, 276, 316, 334
- квазитрансверсально-изотропный 256, 276, 282, 290, 315, 339
- кубический 285, 294, 334
- моноклинный 255, 275, 288, 314
- ортотропии 255, 276, 288, 314, 342
- тетрагональный 256, 276, 289, 314

- трансверсально-изотропный 257, 276, 285, 292, 316, 336
- триклинический 255, 275, 287, 313, 343
- сопряженных элементов 179, 181
- эквивалентности 124

**Ковектор** 121**Компоненты**

- вектора 89
- - касательного 496
- - ковариантные
- - вектора 25
- - тензора 53
- - контравариантные
- - вектора 25
- - тензора 39, 52
- - независимые 138
- - полилинейной формы 141
- - тензора 39, 49
- - в диадном базисе 131
- - в полиадном базисе 132
- физические 72, 262
- функционала 118

**Контур замкнутый** 542**Координатные**

- столбцы 89, 120
- строки 89, 119

**Координаты**

- вектора 15
- геодезические 526
- кристаллографические 190
- точки 495

**Коэффициенты**

- аффинной связности 507
- вращения Риччи 520
- второй квадратичной формы 457
- первой квадратичной формы 455
- связности 401
- - второго рода 501
- - первого рода 501

**Кривая** 439

- в многообразии 496
- замкнутая 542
- плоская 443

**Кривизна**

- геодезическая 470
- кривой 442
- нормальная 470
- нормального сечения 470
- поверхности
- - гауссова 475
- - главная 473
- - полная 475
- - средняя 475

**Кристалл**

- с примитивной решеткой 190

**Кручение кривой** 444**Куб тензора** 55

- Лапласиан** 420  
 - вектора 422  
 - тензора 423
- Линейная зависимость** 88
- Линейная комбинация векторов** 88  
 - тривиальная 88
- Линия**  
 - асимптотическая 481  
 - винтовая 448  
 - геодезическая 480, 509  
 - действия вектора 13  
 - кривизны 478
- Максимальный шаг разбиения кривой** 536
- Массив перегородок** 102
- Матрица** 18, 97  
 - блочная 101  
 - Грама 95  
 - квадратная 97  
 - квазидиагональная 104  
 - кососимметрична 98  
 - линейного преобразования 110  
 - метрическая 20  
 -- в окрестности поверхности 485  
 -- обратная 486  
 -- поверхности 450  
 - обратная 101  
 - метрическая 20  
 - ортогональная 98, 158  
 - положительно определенная 100  
 - порождающая 196  
 - порожденная 196  
 - равная 97  
 - симметризованная  $n$ -ого уровня 227  
 - симметричная 98  
 - треугольная 105  
 -- верхняя 105  
 -- нижняя 105  
 - фундаментальная 95  
 - якобиева 19  
 -- обратная 19  
 -- на поверхности 545
- Мгновенное положение** 446
- Метод**  
 - компонентный 388  
 - ортогонализации Грама-Шмидта 95
- Минор** 100
- Модель**  
 - простейшая нелинейная 364, 356, 357
- Набла-оператор** 404, 405
- Набор векторный** 126  
 - однотипный 126
- Направление**  
 - главное 472  
 - поверхности асимптотическое 481
- Неравенство Коши-Буняковского**
- Несовместность тензора** 423
- Нормаль к поверхности** 453
- Оболочка** 483  
 - линейная 92
- Образ** 109
- Объект неголономности** 514
- Окрестность поверхности** 484
- Оператор** 109  
 - линейный 109
- Операция**  
 - нелинейная дифференциальная 408  
 - свертки 54  
 - скалярного умножения 14, 94  
 - сложения векторов 13, 87  
 - умножения вектора на число 13, 87
- Определитель** 19, 100  
 - Вандермонда 375  
 - метрической матрицы 20
- Ортогональная система** 94  
 - ортонормированная 94
- Ось**  
 - анизотропии 174  
 - бесконечного порядка 178  
 -- зеркально-поворотная 179  
 - кристаллографическая 158  
 -  $n$ -ого порядка  
 -- зеркально-поворотная 179  
 -- инверсионно-поворотная 179  
 - симметрии  
 -- главная 178  
 --  $n$ -ого порядка 177
- Отношение**  
 - эквивалентности 124
- Отображение** 109  
 - биективное 109  
 - взаимнооднозначное 109  
 - инъективное 109  
 - линейное 109  
 - сюръективное 109
- Параллельный перенос тензора** 505
- Параметры Ламе** 70
- Пары тензоров**  
 - квазинергетические 561  
 - энергетические 557
- Пересечение линейных подпространств** 70
- Периодическая структура** 189  
 - криволинейная 190
- Плоское состояние** 357
- Плоскость**  
 - касательная к поверхности 451  
 - кристаллографическая 158  
 - наклонного сечения 470  
 - нормальная 443  
 - нормального сечения 469

- симметрии 178
- соприкасающаяся 443
- спрямляющая 443
- Поверхность** 449
  - вращения 467
  - линейчатая 494
  - минимальная 481
  - постоянной кривизны 481
  - уплощенная 490
- Подгруппа** 173
- Подпространство**
  - инвариантное 112
  - индифферентное 216
  - линейное 92
  - несобственное 92
  - собственное 92
- Подстановка**
  - обратная 76
  - ортогональная 77
- Поле векторное** 24
- Полиада базисная** 74, 132
- Поливектор** 146
- Полином** 96, 246
  - характеристический 253
- Потенциал** 308
- Потенциальность по  $k$ -ому аргументу** 396
- Представитель класса** 124
- Представление**
  - задающего тензора
  - второе 273
  - первое 273
  - третье 274
  - индифферентной линейной тензорной функции
  - второе 273
  - матричное 274
  - первое 273
  - компонентное функции 267
  - матричное 277, 286
    - группы 198
    - изомерное 198
    - неприводимое 199
    - преобразований 157
    - приведенное 199
    - приводимое 199
    - эквивалентное 198
  - непотенциальной функции в тензорном базисе 360
  - потенциальной тензорной функции в тензорном базисе 310
  - спектральное 330
    - квазилинейной тензорной функции 349
    - полное 349
    - приращения потенциала 347
    - укороченное 349
- Преобразование**
  - аффинное 157
  - зеркального отражения 160
  - зеркально-поворотное 179
  - инверсии 162
  - линейное 157
  - ортогональное 158
    - собственное 159
    - тождественное 159
  - трансверсальной изотропии 159
  - трансляционное 189
  - унимодулярное 158
  - центральное 157
- Принцип Неймана** 201
- Произведение**
  - вектора на число 87
  - векторное 29
    - вектора на тензор справа и слева 54
    - двойное 31
    - внешнее
    - векторов 145
      - кососимметричных тензоров 154
    - декартово 124
    - подстановок 77
    - прямое 195
    - скалярное 15
      - двойное двух тензоров 44, 49
      - касательных векторов 498
      - $k$ -кратное 138
        - двух базисных полиад 74
      - матриц 98
      - матрицы на координатный столбец 99
      - смешанное 31
      - тензорное 136
      - базисных полиад 75
      - линейных пространств 49, 50, 127
      - матриц 195
      - функционала на число 119
  - Производная**
    - абсолютная тензора 504
    - ковариантная
      - ковариантных компонент
      - вектора 404
        - тензора 411
      - компонент тензора 411, 502
      - контравариантных компонент
      - вектора 404
        - тензора 411
      - на поверхности 461
      - относительно связности 508
      - скаляра 404
      - тензора второго ранга 410
      - контравариантная 411
        - от ковариантных компонент
    - вектора 404

- - от контравариантных компонент вектора 404
  - по направлению вектора 504
- Прообраз** 109
- Пространство**
- абсолютного параллелизма 511
  - арифметическое 96
  - аффинное 87
  - аффинной связности 507
  - без кручения 510
  - бесконечномерное 91
  - векторное 87
  - евклидово 16, 94
  - - трехмерное 17
  - изоморфное 117
  - касательное 497
  - - тензорное 451, 499
  - линейное 87
  - - действительное 87
  - - евклидово 94
  - - комплексное 87
  - -  $n$ -мерное 91
  - локально-аффинное 514
  - локально-евклидово 528
  - псевдоевклидово 498
  - псевдориманово 498
  - риманово 497
  - - абсолютного параллелизма 519
  - - с аффинной связностью 516
  - собственно риманово 498
  - сопряженное 120
  - уплощенное 528
- Псевдовектор** 83
- Псевдопотенциальность** 396
- Псевдотензор** 80
- $n$ -ого ранга 85
  - - относительный веса  $w$  85
- Радиус**
- кривизны 442
  - - поверхности главный 487
  - - кручения 444
- Радиус-вектор** 17
- Разбиение тензора на шаровую и девиаторную части** 333
- Разложение вектора по декартову базису** 15
- Размерность пространства** 91
- Разность векторов** 88
- Решетка** 190
- базоцентрированная 191
  - Бравз 191
  - гранецентрированная 191
  - моноклиновая 191
  - объемноцентрированная 191
  - триклиновая 191
- Ротор**
- вектора 406
  - - правый 408
  - от градиента
  - - вектора 422
  - - скаляра 421
  - от дивергенции тензора 424
  - от ротора
  - - вектора 422
  - - тензора 423
  - - тензора 412, 503
- Свертка** 54
- Свойство ортогональности матричных представлений** 222
- Сечение нормальное главное** 473
- Сизигия** 246, 386
- Символ**
- Кристоффеля 401
  - - двумерный 460
  - - первого рода 403
  - - второго рода 403
  - Кронекера
  - - ковариантный 19
  - - контравариантный 19
  - - обобщенный 147
  - - смешанный 19
  - Леви-Чивиты 30, 83
  - -  $n$ -мерный 152
- Сингония** 171
- гексагональная 172, 248, 274
  - кубическая 172, 208, 248, 274
  - моноклиновая 172, 207, 247, 274
  - ромбическая 172, 208, 247, 274
  - ромбоэдрическая 172, 208, 248, 274
  - тетрагональная 172, 208, 247, 274
  - триклиновая 172, 207, 247, 274
- Сложение двух векторов** 13
- Система**
- скалярных инвариантов
  - - функционально зависимая 240
  - - функционально независимая 240
  - совместных инвариантов
  - - функционально зависимая 381
  - - функционально независимая 381
- Собственные**
- векторы 59, 113
  - - значения 59, 113
  - - координаты 64
- Соотношения полиномиальные** 246
- Сопровождающий трехгранник**
- поверхности 459
  - пространственной кривой 443

**Способ задания**

- кривой
- естественный 445
- неявный 440
- параметрический 439
- поверхности
- неявный 449
- явный 466

**Степень  $n$ -ая**

- декартова 124
- тензора 55

**Сумма**

- векторов 13
- компонент двух касательных векторов 496
- линейных подпространств 93
- прямая 93
- прямая ортогональных подпространств 329
- тензоров 37
- функционалов линейных 119

**Текстуры 173****Тело 175**

- конечное 175
- кусочно-однородное 175
- неоднородное 175
- однородное 175
- симметричное 176
- относительно группы  $G$ , 177
- центрально-симметричное 179

**Тензор**

- вихря 407
- второго ранга 36, 48, 131, 500
- деформации
- левый
- отрицательный 408
- положительный 408
- линейный 407
- правый
- отрицательный 409
- положительный 409
- единичный (метрический) 43, 49, 75
- задающий линейную функцию 269
- изомерный 165
- индифферентный 202
- относительно группы 202
- интегральных сумм 536
- истинный 85
- ковариантный 132
- кососимметричный 65, 144
- по группе индексов 137
- кривизны
- поверхности 463
- пространства 523
- кручения 510
- линейных преобразований 164
- на линейных пространствах 128

- на поверхности 452
  - метрический 453
  - направляющий 206, 245
  - неособенный 57
  - несовместности 534
  - нулевой 53
  - $n$ -ого ранга 73
  - образующий 206
  - обратный 46
  - ортогональный 47, 66
  - относительный  $n$ -ого ранга 84
  - веса  $w$  85
  - параллельный тензору 505
  - положительно определенный 62
  - производной 297
  - скаляра по тензорному аргументу 297
  - тензорной функции по тензорному аргументу 376
  - ранга  $k$  132
  - Римана-Кристоффеля 523
  - Риччи 531
  - симметрированный по группе индексов 136
  - симметричный 45, 62
  - по группе индексов 136
  - четвертого ранга 77
  - шестого ранга 78
  - смешанный 133
  - соосный 64
  - типа  $(p, q)$  133
  - транспонированный 45, 54
  - третьего ранга 131
  - частной производной скалярной функции 390
  - Эйнштейна 532
- Тензорная поверхность 64**
- Тензорная функция 267**
- Тензорный закон 41**
- Тензорный признак**
- обратный 58
  - прямой 57
- Теорема**
- Гамильтона-Кэли 255
  - Гаусса основная 475
  - Менье 470
  - о полярном разложении 554
  - о циркуляции потенциального тензора 543
  - Рисса 122
  - Риччи 413, 504
  - теории поверхностей основная 465
  - Холецкого 105
- Тождество**
- Бианки 526
  - Риччи 529

**Точка**

- гиперболическая 476
- омбилическая 476
- параболическая 476
- уплощения 476
- эллиптическая 476

**Триада базисная** 131**Умножение**

- скалярное
- тензора на вектор 38, 49
- двух тензоров 43, 49
- тензора на скаляр 39, 48

**Уравнение**

- Гаусса 464
- параллельного переноса 505
- Петерсона-Кодации 464

**Условия интегрируемости** 462**Фактор-пространство** 126**Форма**

- билинейная 99
- внешняя 146
- базисная 150
- квадратичная 100
- поверхности
- первая квадратичная 455
- вторая квадратичная 457
- полилинейная 141

**Формула**

- Гаусса-Вейнгартена 461
- Гаусса-Остроградского
- векторная 552
- скалярная 552
- тензорная 551
- Гельмгольца 407
- деривационная 461
- в окрестности поверхности 487
- замены переменных
- в объемном интеграле 551
- в поверхностном интеграле 545
- Стокса 547
- векторная 548
- скалярная 547
- тензорная 547
- Френе 445
- Эйлера 474

**Функционал** 109

- линейный 118

**Функция**

- нелинейная 354
- нетривиальная 239
- полиномиальная 372
- потенциальная
- квазилинейная 318
- скалярная
- индифферентная 380
- индифферентная относительно группы линейных преобразований 295
- нескольких тензорных аргументов 380
- тензорного аргумента 295
- тензорная 267
- индифферентная 268, 395
- относительно группы 268
- линейная 269
- нескольких тензорных аргументов 395
- потенциальная 308
- потенциальная по  $k$ -ому тензорному аргументу 369
- псевдопотенциальная 369
- центрированная 269
- тривиальная 239
- целая рациональная 96

**Характер**

- матрицы 200
- матричного представления 200

**Характеристическое уравнение** 60**Циркуляция тензора** 543**Число независимых компонент тензора** 139**Эквивалентные элементы** 124**Элементарная длина дуги** 440**Элементарное  $n$ -мерное многообразие** 495**Элементы**

- матрицы 97
- симметрии 179
- эквивалентные 124, 127

**Ячейка периодичности** 190

*Учебное издание*

**Димитренко Юрий Иванович**

**ТЕНЗОРНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ**

*Редактор В. А. Козлов*

*Художник К. Э. Семенков*

*Художественный редактор Ю. Э. Иванова*

ЛР № 010146 от 25.12.96. Изд. № ФМ-222. Сдано в набор 16.05.2001  
Подп. в печать 20.07.2001. Формат 60x90<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бум. газетная. Гарнитура Таймс  
Печать офсетная. Объем 36,0 усл. печ. л., 36,0 усл. кр.-отт.  
Тираж 6000 экз. Заказ № 1592

ГУП «Издательство «Высшая школа», 127994, Москва, ГСП-4,  
Неглинная ул., д. 29/14

Факс: 200-03-01, 200-06-87

E-mail: V-Shkola@g23.relcom.ru http://www.v-shkola.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов  
во ФГУП ИПК «Ульяновский Дом печати»  
432980, г. Ульяновск, ул. Гончарова, 14