#*решите краевую задачу для уравнения Лапласа* $\Delta u(r,\varphi,z)=0$ *внутри цилиндра* $r\le R1,\quad 0\le\varphi<2\pi,\quad 0\le z\le h$ *при следующих граничных условиях*: $u\Big|_{r=R1}=0;\ u\Big|_{z=0}=\frac{U_0 r}{R1}cos\varphi;\ u_z\Big|_{z=h}=0.$

#*постановка задачи*

$$\Delta u(r,\varphi,z)=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}u\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}u+\frac{\partial^2}{\partial z^2}u=0:\quad r\le R1,\quad 0\le\varphi<2\pi,\quad 0\le z\le h\qquad(1)$$

$$u\Big|_{r=R1}=0:\qquad(2)$$

$$u\Big|_{z=0}=\frac{U_0 r}{R1}cos\varphi:\qquad(3)$$

$$u_z\Big|_{z=h}=0:\qquad(4)$$

#*Решение:*

#*будем искать функцию* $u(r,\varphi,z)$ в *виде*:

$$u(r,\varphi,z)=w(r,z)\Phi(\varphi),\ где\ \Phi(\varphi)=cos\varphi:\qquad(5)$$

#*подставим (5) в уравнение (1) и граничные условия (2),(3),(4), приходим к краевой задаче относительно функции w(r,z)*

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}w\right)-\frac{1}{r^2}w+\frac{\partial^2}{\partial z^2}w=0:\quad r\le R1,\qquad 0\le z\le h\qquad(6)$$

$$w\Big|_{r=R}=0:\qquad(7)$$

$$w\Big|_{z=0}=\frac{U_0 r}{R1}:\qquad(8)$$

$$w_z\Big|_{z=h}=0:\qquad(9)$$

#*для решения краевое задачи (5)-(9) применим метод Фурье. Функцию w(r,z) будем искать в следующем виде:*

$$w(r,z)=R(r)Z(z)\not\equiv 0\qquad(10)$$

#*подствавим (10) в уравнение (6) и разделим переменные*

$$-\frac{\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}R(r)\right)-\frac{1}{r^2}R(r)}{R(r)}=\frac{Z''(z)}{Z(z)}=\lambda$$

$$-\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}R(r)\right)+\frac{1}{r}R(r)=\lambda r R(r),\quad r\le R1$$

$$Z''(z)-\lambda Z(z)=0,\quad 0\le z\le h$$

функция w(r,z) должна удовлетворять однородному граничному условию при $r=R$, *приходим к задаче Штурма-Лиувилля*

$$-\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}R(r)\right)+\frac{1}{r}R(r)=\lambda r R(r),\quad r\le R1\qquad(11)$$

$$R(R1)=0\qquad(12)$$

$$|R(0)|<\infty\qquad(13)$$

#уравнение (11) можно привести к уравнению Бесселя 1 порядка, общее решение имеет вид

$$R(r) = AJ_1\left(\sqrt{\lambda}\, r\right) + BN_1\left(\sqrt{\lambda}\, r\right)$$

#из условия (13) получаем, что B=0. Полагаем, что A=1. Учитывая граничное условие (12) получаем

$$J_1\left(\sqrt{\lambda}\, R1\right) = 0$$

#обозначим $\mu = \sqrt{\lambda}\, R1$

$$J_1(\mu) = 0 \qquad (14)$$

#если $\mu_n - n -$ й *положительный корень уравнения* (14),

то собственные значения и *собственные функции задачи*$\cdot (11) - (13)$ *имеют вид*

$$\lambda_n = \left(\frac{\mu_n}{R1}\right)^2; \quad R_n = J_1\left(\frac{\mu_n}{R1} r\right),\ n \in N$$

$$Z''_n(z) - \lambda_n Z_n(z) = 0, \quad 0 \le z \le h$$

#общее решение

$$Z_n(z) = a_n sh\left(\sqrt{\lambda_n}\, z\right) + b_n ch\left(\sqrt{\lambda_n}\,(h - z)\right)$$

#подставим R_n и $Z_n(z)$ в (10) и *получаем счетное множество частных решений уравнения* (6), *удовлетворяющих граничному условию* (7)

$$w_n(r,z) = \left[a_n sh\left(\sqrt{\lambda_n}\, z\right) + b_n ch\left(\sqrt{\lambda_n}\,(h - z)\right)\right] J_1\left(\frac{\mu_n}{R1} r\right)$$

#составим ряд

$$w(r,z) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n sh\left(\sqrt{\lambda_n}\, z\right) + b_n ch\left(\sqrt{\lambda_n}\,(h - z)\right)\right] J_1\left(\frac{\mu_n}{R1} r\right) \qquad (15)$$

#определим коэффициенты ряда, чтобы решение (15) удовлетворяло граничным условиям (8), (9)

$$w\Big|_{z=0} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n ch\left(\sqrt{\lambda_n}\, h\right) J_1\left(\frac{\mu_n}{R1} r\right) = \frac{U_0 r}{R1} :$$

$$w_z\Big|_{z=h} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n sh\left(\sqrt{\lambda_n}\ \ h\right) J_1\left(\frac{\mu_n}{R1} r\right) = 0 : \qquad \Rightarrow a_n = 0$$

#вычислим коэффициенты Фурье $c_n \equiv b_n ch\left(\sqrt{\lambda_n}\, h\right)$

$$c_n = \frac{1}{\|J_1\|^2}\int_0^{R1} r \frac{U_0 r}{R1} J_1\left(\frac{\mu_n}{R1} r\right) \mathrm{d}r$$

$$\|J_1\|^2 = \frac{R1^2}{2} J_1'^2\left(\mu_n\right)$$

$$c_n = \frac{1}{\frac{R1^2}{2} J_1'^2(\mu_n)} \int_0^{R1} r \frac{U_0 r}{R1} J_1\left(\frac{\mu_n}{R1} r\right) dr = \left| x = \frac{\mu_n}{R1} r \right| = \frac{1}{\frac{R1^2}{2} J_1'^2(\mu_n)} \int_0^{\mu_n} \frac{U_0 x^2 R1^2}{R1\, \mu_n^2} \frac{J_1(x) R1}{\mu_n} dx$$

$$= \frac{2\, U_0}{\mu_n^3 J_1'^2(\mu_n)} \int_0^{\mu_n} x^2 J_1(x)\, dx = \frac{2\, U_0}{\mu_n^3 J_1'^2(\mu_n)} \mu_n^2 J_2(\mu_n) = \frac{2\, U_0}{\mu_n J_1'^2(\mu_n)} J_2(\mu_n)$$

$$b_n \equiv \frac{c_n}{ch\left(\sqrt{\lambda_n}\, h\right)}$$

#подставим в (15), учитывая, что $\frac{\mu}{R1} = \sqrt{\lambda}$

$$w(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\, U_0}{\mu_n J_1'^2(\mu_n)} J_2(\mu_n) \frac{ch\left(\frac{\mu_n}{R1}(h - z)\right)}{ch\left(\frac{\mu_n}{R1} h\right)} J_1\left(\frac{\mu_n}{R1} r\right) \quad (16)$$

#подставим (16) в (5)
#получили ответ

$$u1(r, \varphi, z) := 2\, U_0 cos\varphi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_2(\mu_n)}{\mu_n J_1'^2(\mu_n)} \frac{ch\left(\frac{\mu_n}{R1}(h - z)\right)}{ch\left(\frac{\mu_n}{R1} h\right)} J_1\left(\frac{\mu_n}{R1} r\right)$$

μ_n — *положительные корни уравнения* $J_1(\mu_n) = 0$

#Проверка
#граничные условия :

$\boldsymbol{u\big|_{r=R1} = 0 :}$

$\boldsymbol{u\big|_{z=0} = \frac{U_0 r}{R1} cos\varphi :}$

$\boldsymbol{u_z\big|_{z=h} = 0 :}$

$$u1\Big|_{r=R1} = u1(R1,\varphi,z) = 2\,U_0 cos\varphi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_2(\mu_n)}{\mu_n J_1'^2(\mu_n)} \frac{ch\left(\frac{\mu_n}{R1}(h-z)\right)}{ch\left(\frac{\mu_n}{R1}h\right)} J_1\left(\frac{\mu_n}{R1}R1\right)$$

$$= 2\,U_0 cos\varphi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_2(\mu_n)}{\mu_n J_1'^2(\mu_n)} \frac{ch\left(\frac{\mu_n}{R1}(h-z)\right)}{ch\left(\frac{\mu_n}{R1}h\right)} J_1(\mu_n) = 0 :$$

Так как μ_n *— положительные корни уравнения* $J_1(\mu_n) = 0$

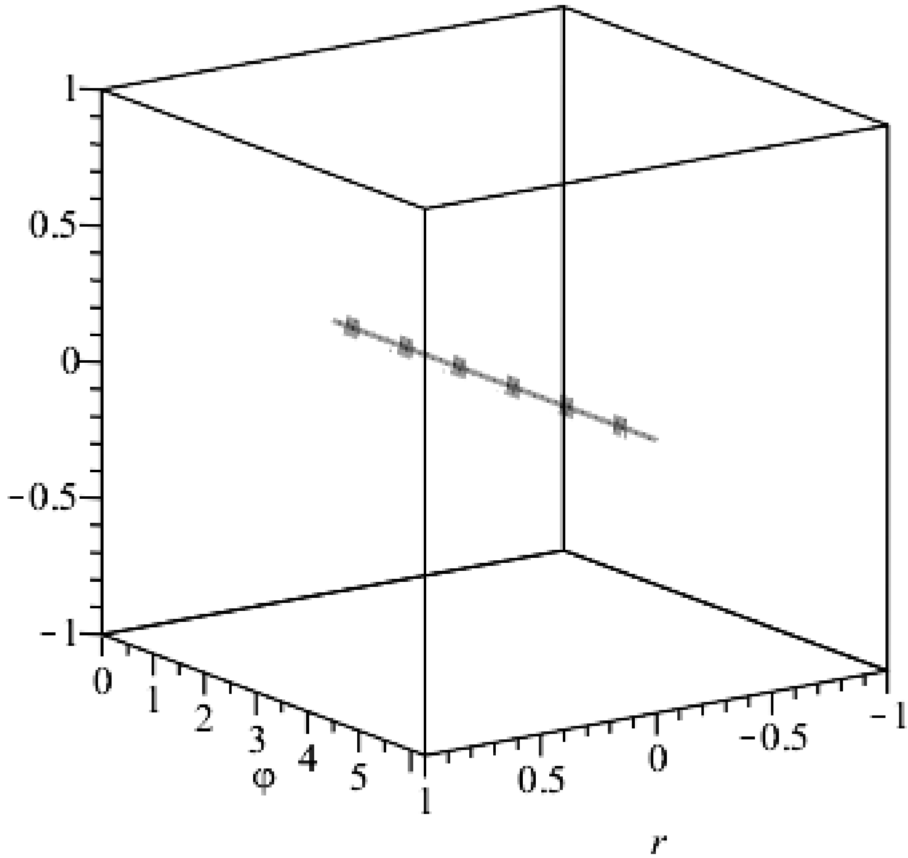
$$u1\Big|_{z=0} = u1(r,\varphi) := 2\,U_0 cos\varphi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_2(\mu_n)}{\mu_n J_1'^2(\mu_n)} \frac{ch\left(\frac{\mu_n}{R1}(h-0)\right)}{ch\left(\frac{\mu_n}{R1}h\right)} J_1\left(\frac{\mu_n}{R1}r\right)$$

$$= 2\,U_0 cos\varphi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_2(\mu_n)}{\mu_n J_1'^2(\mu_n)} J_1\left(\frac{\mu_n}{R1}r\right) :$$

#Построим совмещенный график граничного условия и функции, полученной выше, для проверки верности решения

$$u1(r,\varphi) := 2\cdot U_0 \cos(\varphi)\cdot \sum_{n=1}^{100} \frac{\mathrm{BesselJ}(2,\mu_n)}{\mu_n\left(\frac{\partial}{\partial \mu_n}\mathrm{BesselJ}(1,\mu_n)\right)^2}\ \mathrm{BesselJ}\left(1, \frac{\mu_n}{R\_1}r\right) :$$

$$plot3d\left(\left[\frac{U_0 r}{R\_1}\cos(\varphi), u1(r,\varphi)\right], r = 0..R\_1, \varphi = 0..2\cdot\pi, linestyle = [solid, dot], symbol = [point, diamond], thickness = [2, 7]\right)$$



#графики одинаковые, следовательно, проверка сошлась

$$u1_z = 2\,U_0 cos\varphi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_2(\mu_n)}{\mu_n J_1'^2(\mu_n)} \quad \frac{-\frac{\mu_n}{R1} sh\left(\frac{\mu_n}{R1}(h-z)\right)}{ch\left(\frac{\mu_n}{R1} h\right)} J_1\left(\frac{\mu_n}{R1} R1\right)$$

$$u1_z\Big|_{z=h} = 2\,U_0 cos\varphi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_2(\mu_n)}{\mu_n J_1'^2(\mu_n)} \quad \frac{-\frac{\mu_n}{R1} sh\left(\frac{\mu_n}{R1}(h-h)\right)}{ch\left(\frac{\mu_n}{R1} h\right)} J_1\left(\frac{\mu_n}{R1} R1\right)$$

$$= 2\,U_0 cos\varphi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_2(\mu_n)}{\mu_n J_1'^2(\mu_n)} \quad \frac{-\frac{\mu_n}{R1} sh(0)}{ch\left(\frac{\mu_n}{R1} h\right)} J_1\left(\frac{\mu_n}{R1} R1\right) = 0$$