

Лабораторная работа №4

Итерационный метод Якоби для полного решения задачи вычисления собственных значений и собственных векторов квадратной симметричной матрицы

Далее $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ и $A = (a_{ij}^i)_n^n = \langle \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \rangle = [\mathbf{a}^1, \dots, \mathbf{a}^n] \in L(\mathbb{R}; n)$ - заданная симметричная матрица, т.е. ${}^T A = A$ ($a_{ij}^i = a_{ji}^j$ для любых $i, j = \overline{1, n}$), где \mathbf{a}_j (\mathbf{a}^i) - j -ый (i -ая) столбец (строка) матрицы A , если $j = \overline{1, n}$ ($i = \overline{1, n}$). Кроме того, если $Q \in OL(\mathbb{R}; n)$ - ортогональная матрица, то, в силу свойств ортогональных преобразований стандартного арифметического евклидова пространства \mathbb{E}^n , для любого $i = \overline{1, n}$ справедливы равенства:

$$\langle \mathbf{a}_i, {}^T Q \cdot Q \cdot \mathbf{a}_i \rangle = \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_i \rangle. \quad (1)$$

Следовательно, сумма квадратов элементов матрицы A совпадает с суммой квадратов элементов матриц $Q \cdot A = \langle Q \cdot \mathbf{a}_1, \dots, Q \cdot \mathbf{a}_n \rangle$ и $A \cdot Q = [\mathbf{a}^1 \cdot Q, \dots, \mathbf{a}^n \cdot Q]$.

Метод Якоби

Приведём итерационный метод вращений Якоби для вычисления собственных значений и векторов матрицы A , полагая, что $A[0] = A$ - начальная матрица рассматриваемого метода вращений.

Пусть номера $\alpha, \beta \in \overline{1, n}$, где $\alpha < \beta$, таковы, что элемент $a_{\alpha\beta}^\beta$ матрицы A является ненулевым и максимальным по модулю среди всех внедиагональных элементов матрицы $A = A[0]$.

В пространстве \mathbb{E}^n рассмотрим ортогональное табличное преобразование $\hat{Q}(\alpha, \beta; \varphi)$ - поворота на угол $\varphi \in [0; 2\pi)$ в подпространстве $[e_\alpha, e_\beta] \subseteq_{aM} \mathbb{E}^n$, натянутом на стандартные векторы e_α и e_β пространства \mathbb{E}^n ($\langle e_1, \dots, e_n \rangle$ - стандартный базис пространства \mathbb{E}^n). Матрица $Q(\alpha, \beta; \varphi)$ такого преобразования имеет вид:

$$Q(\alpha, \beta; \varphi) = \langle e_1, \dots, e_{\alpha-1}, \mathbf{s}(\alpha, \beta; \varphi), e_{\alpha+1}, \dots, e_{\beta-1}, \mathbf{t}(\alpha, \beta; \varphi), e_{\beta+1}, \dots, e_n \rangle, \quad (2)$$

где

$$\begin{cases} \mathbf{s}(\alpha, \beta; \varphi) = \sum_{k=1}^n (\delta_\alpha^k \cos \varphi + \delta_\beta^k \sin \varphi) e_k; \\ \mathbf{t}(\alpha, \beta; \varphi) = \sum_{k=1}^n (-\delta_\alpha^k \sin \varphi + \delta_\beta^k \cos \varphi) e_k. \end{cases} \quad (3)$$

$$\text{В частности, если } \alpha = 1 \text{ и } \beta = 3, \text{ то } Q(1, 3; \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & 0 & -\sin \varphi & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \sin \varphi & 0 & \cos \varphi & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & \ddots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Угол $\varphi \in [0; 2\pi)$ выберем таким образом, чтобы элемент b_{β}^α матрицы $B = (b_{ij}^i)_n^n = {}^T Q(\alpha, \beta; \varphi) \cdot A[0] \cdot Q(\alpha, \beta; \varphi) = A[1]$ был нулевым. Тогда получим:

$$\begin{aligned}
1) \quad & b_{\alpha}^{\alpha} = a_{\alpha}^{\alpha} \cos^2 \varphi + a_{\beta}^{\beta} \sin^2 \varphi + 2a_{\beta}^{\alpha} \sin \varphi \cdot \cos \varphi; \\
& b_{\beta}^{\beta} = a_{\alpha}^{\alpha} \sin^2 \varphi + a_{\beta}^{\beta} \cos^2 \varphi - 2a_{\beta}^{\alpha} \sin \varphi \cdot \cos \varphi; \\
2) \quad & 0 = b_{\beta}^{\alpha} = b_{\alpha}^{\beta} = -(a_{\alpha}^{\alpha} - a_{\beta}^{\beta}) \sin \varphi \cdot \cos \varphi + a_{\beta}^{\alpha} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi); \\
3) \quad & b_k^{\alpha} = b_{\alpha}^k = a_k^{\alpha} \cos \varphi + a_k^{\beta} \sin \varphi \text{ для } k \in \overline{1, n}, k \neq \alpha \text{ и } k \neq \beta; \\
4) \quad & b_{\beta}^k = b_k^{\beta} = -a_{\alpha}^k \sin \varphi + a_{\beta}^k \cos \varphi \text{ для } k \in \overline{1, n}, k \neq \alpha \text{ и } k \neq \beta; \\
5) \quad & b_m^k = b_k^m = a_m^k \text{ для } k, m \in \overline{1, n}, k \neq \alpha, k \neq \beta, m \neq \alpha \text{ и } m \neq \beta.
\end{aligned} \tag{4}$$

Кроме того, сумма квадратов элементов матрицы $A[1] = B$ равна сумме квадратов элементов матрицы A . Более того, из пунктов 1)–3) формул (4) получаем:

$$(b_{\alpha}^{\alpha})^2 + (b_{\beta}^{\beta})^2 = (a_{\alpha}^{\alpha})^2 + (a_{\beta}^{\beta})^2 + 2(a_{\beta}^{\alpha})^2$$

Поскольку $b_i^i = a_i^i$, если $i \in \overline{1, n}$, $i \neq \alpha$ и $i \neq \beta$, то, используя инвариантность суммы квадратов элементов матрицы A , отсюда получаем, что сумма квадратов диагональных элементов матрицы $A[1] = B$ больше аналогичной суммы квадратов диагональных элементов матрицы $A[0] = A$ на ту же величину, на которую уменьшается сумма квадратов внедиагональных элементов матрицы $A[0]$.

Аналогично строятся матрицы $A[2]$, $A[3]$, ..., $A[k]$, ... рассматриваемого процесса Якоби, где

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} A[k] = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}, \text{Spr}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}, \tag{5}$$

т.к. при каждом шаге этого процесса сумма всех квадратов диагональных (внедиагональных) элементов текущей матрицы $A[k]$ увеличивается (уменьшается до «нуля»). В силу этого, с ростом $k \in \mathbb{N}$ текущая матрица $A[k]$ «превращается» в диагональную матрицу, где на диагонали стоят все собственные значения матрицы A . Кроме того, при достаточно большом $k \in \mathbb{N}$ в столбцах матрицы $Q[k] \in \text{OL}(\mathbb{R}; n)$ ($A[k] = {}^T Q[k] \cdot A \cdot Q[k]$) ($Q[k] = Q_1 \cdot \dots \cdot Q_k$, где Q_i - матрица вида (2) для $i \in \overline{1, k}$) «появляются» стоящие в соответствующем порядке нормированные собственные векторы матрицы A , образующие базис пространства ${}^>\mathbb{E}^n$. Следовательно, $\lim_{k \rightarrow +\infty} Q[k] = Q = \langle {}^>q_1, \dots, {}^>q_n \rangle \in \text{OL}(\mathbb{R}; n)$, где

$$A \cdot {}^>q_i = \lambda_i \cdot {}^>q_i \text{ для любого } i \in \overline{1, n} \text{ и } {}^T Q \cdot A \cdot Q = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}, \text{ где } \text{Spr}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}.$$

Из пункта 2) формул (4) получения из текущей матрицы $A[k]$ ($k \in \mathbb{N}$) итерационного процесса вращений (Якоби) последующей матрицы $A[k+1]$ получаем, что угол $\varphi \in [0; 2\pi)$, удовлетворяющий пункту 2) формул (4) вычисляется из условия:

$$\text{ctg } 2\varphi = \frac{a_{\alpha}^{\alpha}[k] - a_{\beta}^{\beta}[k]}{2a_{\beta}^{\alpha}[k]}, \quad \varphi = \frac{1}{2} \text{arcctg} \frac{a_{\alpha}^{\alpha}[k] - a_{\beta}^{\beta}[k]}{2a_{\beta}^{\alpha}[k]}.$$

ЗАДАНИЕ (N – номер фамилии студента в журнале, $\beta = 1 + 0,1(n - 51)$, n – номер группы)

Используя метод Якоби, найти приближённое решение полной спектральной задачи для матрицы A , приведённой в таблицах ниже. Останов выбрать на том шаге итерации, когда максимальный по модулю внедиагональный элемент преобразованной матрицы станет меньше $\varepsilon = 0.01$. Проверить найденные приближённые собственные векторы и отвечающие им собственные значения матрицы A .

N	A	N	A
1	$\begin{pmatrix} 10\beta & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 10\beta & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 10\beta & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 10\beta \end{pmatrix}$	2	$\begin{pmatrix} 10\beta & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 10\beta & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 10\beta & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 10\beta \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 10\beta & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 10\beta & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 10\beta & -1 \\ 3 & 2 & -1 & 10\beta \end{pmatrix}$	4	$\begin{pmatrix} 10\beta & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 10\beta & -3 & 2 \\ 2 & -3 & 10\beta & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 10\beta \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} 10\beta & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 10\beta & 3 & 2 \\ -2 & 3 & 10\beta & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 10\beta \end{pmatrix}$	6	$\begin{pmatrix} 10\beta & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 10\beta & 3 & -2 \\ 2 & 3 & 10\beta & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 10\beta \end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix} 10\beta & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 10\beta & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 10\beta & 1 \\ -3 & 2 & 1 & 10\beta \end{pmatrix}$	8	$\begin{pmatrix} 10\beta & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 10\beta & 3 & 2 \\ -2 & 3 & 10\beta & -1 \\ 3 & 2 & -1 & 10\beta \end{pmatrix}$

N	A	N	A
9	$\begin{pmatrix} 10\beta & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 10\beta & -3 & 2 \\ 2 & -3 & 10\beta & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 10\beta \end{pmatrix}$	10	$\begin{pmatrix} 10\beta & -1 & -2 & 3 \\ -1 & 10\beta & 3 & 2 \\ -2 & 3 & 10\beta & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 10\beta \end{pmatrix}$
11	$\begin{pmatrix} 10\beta & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 10\beta & -3 & 2 \\ 2 & -3 & 10\beta & 1 \\ -3 & 2 & 1 & 10\beta \end{pmatrix}$	12	$\begin{pmatrix} 10\beta & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 10\beta & -3 & 2 \\ 2 & -3 & 10\beta & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 10\beta \end{pmatrix}$
13	$\begin{pmatrix} 10\beta & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 10\beta & -3 & -2 \\ 2 & -3 & 10\beta & -1 \\ 3 & -2 & -1 & 10\beta \end{pmatrix}$	14	$\begin{pmatrix} 10\beta & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 10\beta & 3 & -2 \\ -2 & 3 & 10\beta & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 10\beta \end{pmatrix}$

15	$\begin{pmatrix} 10\beta & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 10\beta & -3 & 2 \\ -2 & -3 & 10\beta & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 10\beta \end{pmatrix}$	16	$\begin{pmatrix} 10\beta & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 10\beta & -3 & -2 \\ 2 & -3 & 10\beta & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 10\beta \end{pmatrix}$
17	$\begin{pmatrix} 10\beta & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 10\beta & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 10\beta & -4 \\ 3 & 2 & -4 & 10\beta \end{pmatrix}$	18	$\begin{pmatrix} 10\beta & -2 & 2 & 3 \\ -2 & 10\beta & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 10\beta & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 10\beta \end{pmatrix}$
19	$\begin{pmatrix} 10\beta & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 10\beta & -3 & 0 \\ 2 & -3 & 10\beta & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 10\beta \end{pmatrix}$	20	$\begin{pmatrix} 10\beta & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 10\beta & -4 & 2 \\ 2 & -4 & 10\beta & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 10\beta \end{pmatrix}$
21	$\begin{pmatrix} 10\beta & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 10\beta & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 10\beta & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 10\beta \end{pmatrix}$	22	$\begin{pmatrix} 10\beta & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 10\beta & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 10\beta & 5 \\ 3 & 0 & 5 & 10\beta \end{pmatrix}$