# Лабораторная работа № 5 Интерполяция Лагранжа

### *Вычисление интерполяционного полинома Лагранжа*

***Определение 1*** (интерполяционного полинома Лагранжа и сеточного полинома). Пусть на отрезке $[a;b]$ задана сетка $A = \langle \tau_0, \tau_1, ..., \tau_k \rangle$, где $\tau_0, \tau_1, ..., \tau_k \in [a;b]$ – её узлы, т.е $a \le \tau_0 < \tau_1 < ... < \tau_k \le b$. Кроме того, зафиксирована $A$-сеточная функция $f_A : A \to \mathbb{R}$, обозначаемая далее вектором ${}^{>}\boldsymbol{y} = [y_0, y_1, ..., y_k \rangle \in {}^{>}\underline{\mathbb{R}}^{k+1}(A)$, где $y_0 = f_A(\tau_0), y_1 = f_A(\tau_1), ..., y_k = f_A(\tau_k)$ и ${}^{>}\underline{\mathbb{R}}^{k+1}(A)$ – нормированное пространство $A$-сеточных функций с чебышёвской нормой $\|\bullet\|$, для которой $\|{}^{>}\boldsymbol{y}\| = \max\{|y_0|, |y_1|, ..., |y_k|\}$ ).

Полином $L_k(\tau)$, определённый на отрезке $[a;b]$, для которого выполняются равенства: $L_k(\tau_0) = y_0 = f_A(\tau_0), L_k(\tau_1) = y_1 = f_A(\tau_1), ..., L_k(\tau_k) = y_k = f_A(\tau_k)$, – называется *интерполяционным полиномом Лагранжа для $A$-сеточной функции* ${}^{>}\boldsymbol{y} \in {}^{>}\underline{\mathbb{R}}^{k+1}(A)$.

Полином $\Lambda_A(\tau) = (\tau - \tau_0) \cdot (\tau - \tau_1) \cdot ... \cdot (\tau - \tau_k)$, определённый на отрезке $[a;b]$, называется $A$-*сеточным полиномом*.►

***Теорема 1*** (об аналитическом виде интерполяционного полинома Лагранжа). Интерполяционный полином Лагранжа $L_k = L(A; {}^{>}\boldsymbol{y})$ для $A$-сеточной функции ${}^{>}\boldsymbol{y} \in {}^{>}\underline{\mathbb{R}}^{k+1}(A)$ – единственен и имеет аналитический вид:

$$L_k(\tau) = \sum_{i=0}^{k} \frac{(\tau - \tau_0) \cdot ... \cdot (\tau - \tau_{i-1}) \cdot (\tau - \tau_{i+1}) \cdot ... \cdot (\tau - \tau_k)}{(\tau_i - \tau_0) \cdot ... \cdot (\tau_i - \tau_{i-1}) \cdot (\tau_i - \tau_{i+1}) \cdot ... \cdot (\tau_i - \tau_k)} y_i = \sum_{i=0}^{k} \frac{\Lambda_A(\tau)}{(\tau - \tau_i)\Lambda'_A(\tau_i)} y_i . \blacktriangleright$$

***Определение 2*** (сеточного отображения и остатка интерполяции Лагранжа). Сетка $A = \langle \tau_0, \tau_1, ..., \tau_k \rangle$ отрезка $[a;b]$ определяет $A$-*сеточное отображение* $\hat{A} : C([a;b], \mathbb{R}) \to {}^{>}\underline{\mathbb{R}}^{k+1}(A)$, для которого $\hat{A}(f) = [f(\tau_0), f(\tau_1), ..., f(\tau_k) \rangle \in {}^{>}\underline{\mathbb{R}}^{k+1}(A)$, если $f \in C([a;b], \mathbb{R})$. Кроме того, функция $Rest_A(\tau) = f(\tau) - L_k(\tau)$, где $L_k(\tau)$ – интерполяционный полином Лагранжа для $A$-сеточной функции $\hat{A}(f) \in {}^{>}\underline{\mathbb{R}}^{k+1}(A)$, называется *остатком $A$-интерполяции Лагранжа для функции* $f \in \underline{C}([a;b], \mathbb{R})$ на отрезке $[a;b]$.►

***Теорема 2*** (об остатке интерполяции Лагранжа в форме Коши). Если $f \in \underline{C}^{(k+1)}([a;b], \underline{\mathbb{R}})$, то в обозначениях *определения 4.2* для любой точки $\tau_* \in [a;b]$ остаток $A$-интерполяции Лагранжа $Rest_A(\tau) = f(\tau) - L_k(\tau)$ представим *в форме Коши*:

$$Rest_A(\tau_*) = f^{(k+1)}(\xi(\tau_*)) \cdot \frac{\Lambda_A(\tau_*)}{(k+1)!},$$

где $\xi(\tau_*) \in (a;b)$ – некоторая точка, зависящая от точки $\tau_* \in [a;b]$. Поэтому для чебышевской нормы $\|Rest_A\|$ в пространстве $\underline{C}^{(k+1)}([a;b], \underline{\mathbb{R}})$ справедливо неравенство:

$$\|Rest_A\| \le \frac{\left\|f^{(k+1)}\right\|}{(k+1)!}\cdot\|\Lambda_A\|.\blacktriangleright \qquad (1)$$

***Определение 3*** (уклонения функции от нуля). Если $h \in \underline{C}([a;b],\mathbb{R})$, то значение чебышевской нормы $\|h\| = \max\{|h(\tau)| : \tau \in [a;b]\}$ называется *уклонением функции* $h$ *от нуля на отрезке* $[a;b]$.▶

***Замечание 1*** (об остатке интерполяции Лагранжа). Согласно форме Коши (1) остатка интерполяции Лагранжа абсолютная погрешность такой интерполяции для произвольной $(k+1)$-гладкой на отрезке $[a;b]$ функции лимитируется только абсолютной погрешностью сеточного полинома $\Lambda_A$. Поэтому естественно возникает проблема оптимального расположения узлов сетки $A = \langle \tau_0, \tau_1, ..., \tau_k \rangle$, которое обеспечивало бы минимальное уклонение от нуля на отрезке $[a;b]$ $A$-сеточного полинома $\Lambda_A$.▶

**Теорема 3** (об оптимальном выборе схемы сеток для задачи интерполяции Лагранжа). Для задачи интерполяции Лагранжа на сетке $A = \langle \tau_0, \tau_1, ..., \tau_k \rangle \subset [a;b]$ в классе всех гладких на отрезке $[a;b]$ функций минимальное уклонение от нуля сеточного полинома $\Lambda_A$ будет минимальным, если использовать чебышевскую схему сеток:

$$A = \langle \tau_j = \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2}\cdot\cos\frac{(2j+1)\pi}{2(k+1)} : j = \overline{0,k}\rangle.$$

Если $f \in \underline{C}^{(k+1)}([a;b],\mathbb{R})$, то для остатка $Rest_A(\tau) = f(\tau) - L_k(\tau)$ такой интерполяции Лагранжа функции справедлива оценка:

$$\|Rest_A\| \le \left\|f^{(k+1)}\right\|\cdot\frac{1}{(k+1)!2^k}.\blacktriangleright$$

**Теорема 4** (Чебышёва). Пусть для гладкой функции $f \in \underline{C}^{(1)}([a;b],\mathbb{R})$ на отрезке $[a;b]$ задана схема чебышёвских сеток:

$$A_{(\bullet)} = (A_k = \langle \tau_j = \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2}\cdot\cos\frac{(2j+1)\pi}{2(k+1)} : j = \overline{0,k}\rangle : k \in \mathbb{N}).$$

Тогда $L_k = L(A_k; \hat{A}_k(f)) \xrightarrow[k\to+\infty]{} f$.

## *ЗАДАНИЕ*

Для гладкой на отрезке $[-1;1]$ функции $f(\tau) = \dfrac{10 + 0.5\cdot N}{1 + (20 + 0,25\cdot N)\cdot(1 + 0.05(53 - n))\cdot\tau^2}$ (*N – номер фамилии студента в журнале, n – номер группы)*, используя равномерную сетку с 21 узлом, вычислить интерполяционный полином Лагранжа. Используя равномерную сетку с 41 узлом, представить графики функции $f$ и вычисленного (с 21 равномерными узлами) интерполяционного полинома Лагранжа. Прокомментировать результаты интерполяции.

Для гладкой на отрезке $[-1;1]$ функции $f$, используя чебышевскую сетку с 21 узлом, вычислить интерполяционный полином Лагранжа. Используя равномерную сетку с 41 узлом, представить графики функции $f$ и вычисленного (с 21 чебышевскими узлами) интерполяционного полинома Лагранжа.

Прокомментировать результаты интерполяций с равномерными и чебышевскими узлами.▶