МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

МГТУ им Н.Э.Баумана

Факультет ФН
Кафедра вычислительной математики и математической физики

Соколов Арсений Андреевич

Курсовая работа по дифференциальной геометрии

3 курс, группа ФН11-53Б
Вариант 8

Преподаватель
____________ Е. В. Осипов
«___» _______ 2019 г.

Москва, 2019 г.

Содержание

рпз

список исполнителей

реферат

введение

1 Римановы пространства

В механике и особенно в релятивистской физике тензоры широко применяют в n-мерных римановых пространствах, являющихся более общими, чем евклидовы [1]. Дадим определение этих пространств, а затем покажем, как конструируются тензоры в них. Начнём с основополагающего понятия римановых пространств - элементарного многообразия.

1.1 Элементарное многообразие

Определение 1. Элементарным n-мерным многообразием называют такое множество M^n, каждой точке которого взаимнооднозначно поставлен в соответствие упорядоченный набор чисел $(X_1...X_n)$ из некоторой связной области $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^n$, т.е, задано биективное отображение $\varphi : M^n \longrightarrow \mathcal{D} \in \mathbb{R}^n$.

Координатами точки $\mathcal{M} \in M^n$ в системе координат $\mathcal{D}$ называют координаты $X^i \in \mathbb{R}^n$ ее образа $\varphi(\mathcal{M})$, изменяющиеся в области $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^n$. Если для множества M^n имеется другое биективное отображение $\varphi' : M^n \longrightarrow \mathcal{D} \in \mathbb{R}^n$, то координаты точки $\mathcal{M}$ в системах координат $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}'$, связаны соотношениями:

$$X'^i = X'^i(X^j), \quad i, j = 1 \dots n, \tag{1}$$

которые предполагают достаточное число раз дифференцируемыми и невырожденными, т.е. $\det\left(\frac{\partial X'^i}{\partial X^j}\right) \neq 0, \forall X^i \in \mathcal{D}$. Введём обозначения для якобиевых матриц преобразования, а также для их производных:

$$Q^i_{\ j} \equiv \left(\frac{\partial X'^i}{\partial X^j}\right), \quad P^i_{\ j} \equiv \left(\frac{\partial X^i}{\partial X'^j}\right), \quad P^i_{\ jk} \equiv \frac{\partial^2 X^i}{\partial X'^j \partial X'^k}, \tag{2}$$

и кроме того будем использовать обозначения для частных производных:

$$\frac{\partial f}{\partial X^i} \equiv f_{,i}, \quad \frac{\partial f}{\partial X'^i} \equiv f_{|i} = P^j_i f_{,i}. \tag{3}$$

Примером двумерного $(n = 2)$ элементарного многообразия M^2 являются поверхности в $\mathbb{R}^3$, на которых определены криволинейные координаты X_1, X_2 и которые заданы тремя функциями:

$$x^i = x^i(X^1, X^2), \quad i = 1, 2, 3. \tag{4}$$

1.2 Касательное пространство

Определение 2. Кривой $\mathcal{L}$ в многообразии M^n называют отображение $\mathcal{L} : [\xi_1, \xi_2] \in \mathbb{R}^1 \longrightarrow M^n$, которое записывают в виде функции:

$$X^i = X^i(\xi) \quad \forall \xi \in [\xi_1, \xi_2], \quad X^i \in M^n. \tag{5}$$

Здесь X^i - координаты точки $\mathcal{M} \in M^n$, $[\xi_1, \xi_2]$ - некоторый отрезок из $\mathbb{R}^1, (\xi_1 < \xi_2)$, а функции (5) предполагаем непрерывно дифференцируемыми, по крайней мере, два раза.

Зафиксировав значение параметра $\xi \in [\xi_1, \xi_2]$, получим некоторую точку $\mathcal{M} \in \mathcal{L}$, в ней можно вычислить производные от функций (5):

$$a^i = \frac{\mathrm{d}X^i}{\mathrm{d}\xi}. \tag{6}$$

Определение 3. Упорядоченный набор $(a_1 \ldots a_n)$ производных (6) называют компонентами касательного вектора a^i в точке $\mathcal{M}$ кривой $\mathcal{L}$ в M^n.

Если перейти к координатам X'^i той же точки $\mathcal{M} \in \mathcal{L}$, то согласно (1) получаем, что компоненты касательного вектора a'^i в этой системе координат будут иметь вид: $a'^i = \frac{\mathrm{d}X'^i}{\mathrm{d}\xi}$ и связаны с a^i тензорным законом:

$$a'^i = Q^i_{\ j} a^j. \tag{7}$$

Поскольку через фиксированную точку$\mathcal{M} \in M^n$ можно провести различные кривые $\mathcal{L}$, то, вообще говоря, в каждой точке $\mathcal{M}$ имеется множество упорядоченных наборов $(a_1 \dots A_n)$. Определим операции с этими наборами.

Пусть имеется две кривые $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$, заданные в виде функций $X^i_1(\xi), X^i_2(\xi)$, проходящие через точку $\mathcal{L}$, тогда можно построить два набора компонент касательных векторов $a^i_1 = \frac{\mathrm{d}X^i_1}{\mathrm{d}\xi}$ и $a^i_2 = \frac{\mathrm{d}X^i_2}{\mathrm{d}\xi}$.

Суммой компонент двух касательных векторов назовём набор

$$a^i_1 + a^i_2 = \frac{\mathrm{d}X^i_1 + X^i_2}{\mathrm{d}\xi}, \tag{8}$$

который представляет собой компоненты касательного вектора к кривой $(X^i_1 + X^i_2)(\xi)$ в данной точке $\mathcal{M}$.

Аналогично определяем произведение компонент ^{i} на вещественное число λ:

$$\lambda a^i = \lambda \frac{\mathrm{d}X^i}{\mathrm{d}\xi} = \frac{\mathrm{d}\lambda X^i}{\mathrm{d}\xi}. \tag{9}$$

Поскольку набор чисел $(a_1 ... a_n)$ является элементом пространства $\mathbb{R}$, то, выбрав базис e_i в этом пространстве, можно построить сам касательный вектор a в точке $\mathcal{M}$ кривой $\mathcal{L} : a = a^i e_i = a'^i e'_i$, где $e'_i = P^j_{\ i} e_j$ - новый базис.

Определение 4. Касательным пространством в данной точке $\mathcal{M}$ элементарного многообразия M^n называют множество касательных векторов $= a^i e_i$, построенных ко всевозможным кривым $\mathcal{L}$, проходящим через данную точку.

Теорема 1. Касательное пространство в любой точке $\mathcal{M} \in M^n$ является n-мерным линейным пространством, которое обозначают как $T_{\mathcal{M}} M^n$, а векторы e, образуют базис в нем.

1.3 Определение риманова пространства

Определение 5. Элементарное n-мерное многообразие M^n называют римановым пространством $\mathbb{V}^n$, если в каждой точке $\mathcal{M} \in M^n$ с координатами X^i задана матрица g_{ij} n-го порядка, которая является

1) симметричной,
2) невырожденной: $\det(\tilde{g}_{ij}) \neq 0, \quad \forall X^i$,
3) компоненты её являются непрерывно-дифференцируемыми функциями,
4) при переходе к другим координатам X'^l преобразуется по тензорному закону:

$$g_{ij} = Q^k_i Q^l{}_j g'_{kl}. \tag{10}$$

Двумерные поверхности в $\mathbb{R}^3$, очевидно, можно рассматривать как двумерные римановы пространства $\mathbb{V}^2$ с метрической матрицей $\tilde{g}_{IJ}$.

Расстояние в римановом пространстве вводят для бесконечно близких точек $\mathcal{M}$ и $\mathcal{M}'$, имеющих кординаты X^i и $X^i + dX^i$, и определяют его как

$$ds^2 = \varkappa g_{ij} dX^i dX^j, \tag{11}$$

где κ – знаковое число, которое выбирают так, чтобы форма (11) была положительной.

Риманово пространство называют собственно римановым, если метрическая матрица $g_{ij}, \forall X^i \in \mathcal{D}$ является положительно-определённой, в противном случае говорят о псевдоримановых пространствах.

2 Свойства римановых пространств

Рассмотрим некоторые свойства римановых пространств, которые понадобятся нам для введения тензора Эйнштейна, чтобы указать связь римановых пространств с общей теорией относительности.

2.1 Коэффициенты связанности в $\mathbb{V}^n$

Поскольку в каждой точке $\mathcal{M}(X^i) \in \mathbb{V}^n$ введена метрическая матрица $g_{ij(X^i)}$ компоненты которой, согласно п.3 определения 5, являются непрерывно дифференцируемыми функциями, то можно вычислить производные $\frac{\partial g_{ij}}{\partial X^k}$ и образовать из них следующие объекты:

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2}(g_{ik,j} + g_{jk,i} - g_{ij,k}). \tag{12}$$

Определение 6. Функции Γ_{ijk} определённые по формулам (12), называют коэффициентами связности первого рода в $\mathbb{V}^n$. Коэффициенты связности второго рода вводим с помощью обратной матрицы g^{ij}:

$$\Gamma^m_{ij} = g^{mp}\Gamma_{ijp}. \tag{13}$$

2.2 Определение аффинной связности

Определение 7. Элементарное n-мерное многообразие M^n называют пространством аффинной связности $\mathbb{L}^n$, если в каждой точке $\mathcal{M} \in M^n$ с координатами X^i задана система функций $\overset{*}{\Gamma}{}^m_{ij}$, которые

1) являются непрерывно-дифференцируемыми функциями,

2) при переходе к другим координатам X'^i преобразуются следующим

образом:

$$\overset{*}{\Gamma}{}'^{m}_{ij} = P^l{}_i \, P^q{}_j \, Q^m{}_r \, \overset{*}{\Gamma}{}^r_{lq} + Q^m{}_r P^r{}_{ij} \, . \tag{14}$$

Функции $\overset{*}{\Gamma}{}^m_{ij}$, заданные в $\mathbb{L}^n$, называют коэффициентами аффинной связности (или просто аффинной связностью).

2.3 Тензоры в элементарном многообразии

Построим в каждой точке $\mathcal{M} \in M^n$ множество наборов касательных векторов:

$$(a_1 b^{(1)} a_2 b^{(2)} \dots a_n b^{(n)} \equiv (a_i b^{(i)}), \tag{15}$$

где $a_i \in T_{\mathcal{M}} M^n$, $b^{(i)} T^*_{\mathcal{M}} M^n$, и введём на этом множестве операции сложения и умножения на вещественное число s:

$$(a_i b^{(i)}) + (a_i c^{(i)}) = (a_i (b^{(i)} + c^{(i)})), \tag{16}$$

$$(a_i b^{(i)}) + (d_i b^{(i)}) = ((a_i + d_i)) b^{(i)}), \tag{17}$$

$$s(a_i b^{(i)}) = ((s a_i) b^{(i)}) = (a_i (s b^{(i)})). \tag{18}$$

Определение 8. Тензорным касательным пространством $\mathcal{T}_n^{(pq)}(T_{\mathcal{M}} M^n)$ типа pq, где $p+q = 2$, в точке $\mathcal{M}$ элементарного многообразия M^n называют тензорное произведение касательного пространства $T_{\mathcal{M}} M^n$ на себя:

$$\mathcal{T}_n^{(pq)} (T_{\mathcal{M}} M^n) = T_{\mathcal{M}} M^n \otimes T_{\mathcal{M}} M^n \quad \forall \mathcal{M} \in M^n, \quad p + q = 2, \tag{19}$$

где тензорное произведение вводится как фактор-пространство $n-$ой степени декартова квадрата

$$T_{\mathcal{M}}M^n \otimes T_{\mathcal{M}}M^n = [(T_{\mathcal{M}}M^n \times T_{\mathcal{M}}M^n)^n] \tag{20}$$

Базисные диады в $\mathcal{T}_n^{(pq)}(T_{\mathcal{M}}M^n)$ введём как

$$e_j \otimes e_k = [e_i(\delta_j^i e_k)], \tag{21}$$

где [ ] – классы эквивалентности соответствующих наборов касательных векторов. Очевидно, что если рассматриваемое многообразие M^2 является поверхностью $\Sigma \in \mathbb{R}^3$, то базисные диады совпадают с соответствующими диадами $\rho_I \otimes \rho_K$.

Определение 9. Тензором второго ранга $A(\mathcal{M})$ типа (pq) в точке $\mathcal{M} \in M^n$ называют элемент тензорного произведения касательного пространства $\mathcal{T}_n^{(pq)}(T_{\mathcal{M}}M^n), p+q=2$.

Тензор $k-$го ранга ${}^kA(\mathcal{M})$ введём как

$${}^kA = A_{i_1 \ldots i_p}{}^{j_1 \ldots j_q} e^{i_1} \otimes \ldots \otimes e^{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes \ldots \otimes e_{j_q}, \quad p+q=k. \tag{22}$$

2.4 Определение тензора в римановом пространстве

Если в многообразии M^n введена метрическая матрица g_{ij} то оно становится римановым пространством $\mathbb{V}$, а касательное пространство в каждой точке $\mathcal{M} \in \mathbb{V}^n$ - евклидовым (или псевдоевклидовым) $T\mathcal{M}\mathbb{V}^n$. Тогда используя соглашение о совпадении пространств $T^*_{\mathcal{M}}\mathbb{V}^n$ и $T_{\mathcal{M}}V^n$, можно говорить о тензорном касательном пространстве $\mathcal{T}_n^{(k)}(T_{\mathcal{M}}\mathbb{V}^n)$, заданном на римановом пространстве $\mathbb{V}^n$.

2.5 Ковариантное дифференцирование тензоров в $\mathbb{V}^n$

Рассмотрим в $\mathbb{V}^n$ произвольное поле тензора k-го ранга:

$$
{}^k\Omega\left(X^i\right) = \Omega^{i_1\dots i_p}{}_{j_1\dots j_q}\mathbf{e}_{i_1}\otimes\ldots\otimes\mathbf{e}_{i_p}\otimes\mathbf{e}^{j_1}\otimes\ldots\otimes\mathbf{e}^{j_q},\quad p+q=k, \tag{23}
$$

причём его компоненты $\Omega^{i_1\dots i_p}{}_{j_1\dots j_q}$ будем считать непрерывно дифференцируемыми функциями координат X^i точки $\mathcal{M}\in\mathbb{V}^n$

Определение 10. Ковариантной производной от компонент тензора $\Omega^{i_1\dots i_p}{}_{j_1\dots j_q}$ k-го ранга ${}^k\Omega$, определённого в $\mathbb{V}^n$, называют следующий объект:

$$
\nabla_i\Omega^{i_1\dots i_p}{}_{j_1\dots j_q} = \frac{\partial}{\partial X^i}\Omega^{i_1\dots i_p}{}_{j_1\dots j_q} + \sum_{s=1}^{p}\Gamma^{i_s}_{mi}\Omega^{i_1\dots i_p=m\dots i_p}{}_{j_1\dots j_q} + \ldots
$$

$$
\ldots - \sum_{s=1}^{q}\Gamma^{m}_{j_s i}\Omega^{i_1\dots i_p}{}_{j_1\dots j_q=m\dots i_q}, p+q=k. \tag{24}
$$

2.6 Ковариантное дифференцирование тензоров в $\mathbb{L}^n$

Наличие связанности Γ^m_{ij} в $\mathbb{L}^n$ означает, что в этом пространстве определена операция ковариантного дифференцирования.

Определение 11. Ковариантной производной от компонент тензора ${}^kA\in\mathcal{T}^{pq}_n(T_{\mathcal{M}}\mathbb{L}^n)$, $k=p+q$, (или иначе ковариантной производной относительно связности Γ^m_{ij}) называют следующий объект:

$$
\overset{*}{\nabla}_i A^{i_1\dots i_p}{}_{j_1\dots j_q} + \sum_{s=1}^{p}\overset{*}{\Gamma}{}^{i,}_{mi}A^{i_1\dots i_s=m\dots i_p}{}_{j_1\dots j_q} - \sum_{s=1}^{q}\overset{*}{\Gamma}{}^{m}_{i,i}A^{i_1\dots i_p}{}_{j_1\dots j_s=m\dots j_q}. \tag{25}
$$

Теорема 2. Ковариантная производная от компонент тензора $k-$го ранга является компонентами тензора $(k+1)-$го ранга $\nabla\otimes{}^kA$ в $\mathbb{L}^n$, называемого градиентом тензора:

$$\overset{*}{\nabla} \otimes {}^k A = A^{i_1 \dots i_p}{}_{j_1 \dots j_q} e^i \otimes e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \dots e^{j_q}, \qquad p + q = k. \quad (26)$$

2.7 Риманово пространство с аффинной связностью

В римановом пространстве $\mathbb{V}^n$ у нас была определена метрика g_{ij} (ей соответствовала вполне определённая связность Γ^m_{ij}). Можно однако построить такое пространство, в котором будет одновременно определена и метрика g_{ij}, и некоторая «самостоятельная» связность $\overset{*}{\Gamma}{}^m_{ij}$, для которой уже не имеют места соотношения (12).

Определение 12. Элементарное $n-$мерное многообразие M^n называют римановым пространством аффинной связностью $\mathbb{W}^n$, если в каждой точке $\mathcal{M} \in M^n$ с координатами x^i заданы две системы функций g_{ij} и $\overset{*}{\Gamma}{}^m_{ij}$, вообще говоря, не связанные никакими соотношениями и удовлетворяющие свойствам 1-4 из определения 5 и 1,2 из определения 7 соответственно.

Поскольку в $\mathbb{W}^n$ определена метрическая матрица g_{ij}, то можно образовать из неё символы Γ^m_{ij} по формуле (13)

$$\Gamma^m_{ij} = \frac{1}{2} g^{mk} (g_{ik,j} + g_{jk,i} - g_{ij,k}). \quad (27)$$

Символы Γ^m_{ij} уже не являются связностью: $\overset{*}{\Gamma}{}^m_{ij} \neq \Gamma^m_{ij}$.

2.8 Тензор Римана-Кристоффеля

Рассмотрим в точке $\mathcal{M} \in \mathbb{L}^n$ произвольный вектор $b = b^k e_k$ из $T_{\mathbb{L}^n}$ и вычислим его ковариантную производную относительно связности $\overset{*}{\Gamma}{}^m_{ij}$:

$$\overset{*}{\nabla}_i b^k = \frac{\partial b^k}{\partial X^i} + \overset{*}{\Gamma}{}^k_{si} b^s. \quad (28)$$

Вычислим вторую ковариантную производную:

$$\overset{*}{\nabla}_j \overset{*}{\nabla}_i b^k = \frac{\partial}{\partial X^j} + \overset{*}{\Gamma}{}^k_{mj} \overset{*}{\nabla}_i b^m - \overset{*}{\Gamma}{}^m_{ij} \overset{*}{\nabla}_m b^k = \frac{\partial^2 b^k}{\partial X^j \partial X^i} + \frac{\partial \overset{*}{\Gamma}{}^k_{si}}{\partial X^j} b^s + \overset{*}{\Gamma}{}^k_{si} \frac{\partial b^s}{\partial X^j} +$$
$$+ \overset{*}{\Gamma}{}^k_{mj} (\frac{\partial b^m}{\partial X^i} + \overset{*}{\Gamma}{}^k_{mj} b^s) - \overset{*}{\Gamma}{}^m_{ij} (\frac{\partial b^k}{\partial X^m} + \overset{*}{\Gamma}{}^k_{sm} b^s). \tag{29}$$

Поменяем теперь индексы i и j и образуем разность:

$$\overset{*}{\nabla}_j \overset{*}{\nabla}_i b^k - \overset{*}{\nabla}_i \overset{*}{\nabla}_j b^k = (\frac{\partial \overset{*}{\Gamma}{}^k_{si}}{\partial X^j} - \frac{\partial \overset{*}{\Gamma}{}^k_{sj}}{\partial X^i} + \overset{*}{\Gamma}{}^k_{mj} \overset{*}{\Gamma}{}^m_{si} - \overset{*}{\Gamma}{}^k_{mi} \overset{*}{\Gamma}{}^m_{sj}) b^s - (\overset{*}{\Gamma}{}^m_{ij} - \overset{*}{\Gamma}{}^m_{ji}) \overset{*}{\nabla}_m b^k. \tag{30}$$

Коэффициенты, стоящие в первой скобке, обозначим следующим образом:

$$\overset{*}{R}_{jis}{}^k = \overset{*}{\Gamma}{}^k_{si,j} - \overset{*}{\Gamma}{}^k_{sj,i} + \overset{*}{\Gamma}{}^m_{si} \overset{*}{\Gamma}{}^k_{mj} + \overset{*}{\Gamma}{}^m_{sj} \overset{*}{\Gamma}{}^k_{mi}. \tag{31}$$

Здесь, как и ранее, $\Gamma^k_{si,j} = \partial \Gamma^k_{si} \big/ \partial X^j$.

Теорема 3. Система коэффициентов $\overset{*}{R}_{jis}{}^k$, образованная по формуле (31), представляет собой компоненты тензора $\overset{4}{\overset{*}{R}}$ четвёртого ранга из пространства $\mathcal{T}^{(31)}_n(T_{\mathcal{M}}\mathbb{L}^n)$:

$$\overset{4}{\overset{*}{R}} = \overset{*}{R}_{jis}{}^k e^j \otimes e^i \otimes e^s \otimes e_k \tag{32}$$

Определение 13. Тензор (32) называют тензором кривизны пространства $\mathbb{L}^n$ относительно связности $\overset{*}{\Gamma}{}^m_{ij}$ (или тензором Римана-Кристоффеля).

2.9 Тензор Риччи

В пространстве $\mathbb{W}^n$ из тензора Римана-Кристоффеля можно образовать несколько тензоров второго ранга. Свёртка транспонированного тензора Римана-Кристоффеля ${}^4R$ с метрическим тензором образует тензор второго ранга:

$$\overset{*}{\mathcal{R}} = {}^4R^{(2314)} \cdot\cdot E, \tag{33}$$

называемый тензором Риччи. Компоненты этого тензора имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \overset{*}{\mathcal{R}} &= \overset{*}{R}_{ji} e^j \otimes \overset{*}{R}_{i_1 i_2 i_3 i_4} e^{i_2} \otimes e^{i_3} \otimes e^{i_1} \otimes e^{i_4} \cdot\cdot e^{i_4} \cdot\cdot e^k \otimes e_k = \\ &= \overset{*}{R}_{i_1 i_2 i_3 i_4} \delta_k^{i_1} g^{i_4 k} e^{i_2} \otimes e^{i_3} = \overset{*}{R_{kji}}{}^k e^j \otimes e^i, \end{aligned} \tag{34}$$

то есть

$$\overset{*}{R}_{ji} = \overset{*}{R_{kji}}{}^k = \overset{*}{R_{nji}}{}^k \delta_k^n. \tag{35}$$

Подставляя в (35) выражение (31) для компонент тензора Римана-Кристоффеля, получаем:

$$\overset{*}{R}_{ji} = \frac{\partial \overset{*}{\Gamma}{}^k_{ij}}{\partial X^k} - \frac{\partial \overset{*}{\Gamma}{}^k_{ik}}{\partial X^j} + \overset{*}{\Gamma}{}^n_{ij} \overset{*}{\Gamma}{}^k_{nk} - \overset{*}{\Gamma}{}^n_{ik} \overset{*}{\Gamma}{}^k_{nj}. \tag{36}$$

Аналогичным образом можно ввести тензор Риччи относительно символов Γ^k_{ij}:

$$R_{ji} = R_{kji}{}^k = R_{nji}{}^k \delta_k^n, \tag{37}$$

и

$$R_{ji} = \Gamma^k_{ij,k} - \Gamma^k_{ik,j} + \Gamma^m_{ij}\Gamma^k_{mk} - \Gamma^m_{ik}\Gamma^k_{kj}. \qquad (38)$$

2.10 Тензор Эйнштейна

Тензоры Эйнштейна $\overset{*}{G}$ и G образуются из тензоров Риччи $\overset{*}{\mathcal{R}}$ и $\mathcal{R}$ следующим образом:

$$\overset{*}{G} = \overset{*}{\mathcal{R}} - \frac{1}{2}\overset{*}{\mathcal{R}}E, \qquad G = \mathcal{R} - \frac{1}{2}\mathcal{R}E, \qquad (39)$$

где $\mathcal{R} = \overset{*}{R} \cdot \cdot E$ и $\mathcal{R} = R \cdot \cdot E$ – свертки тензоров Риччи с метрическим тензором.

Тензор Эйнштейна играет важную роль в общей теории относительности (см., например, [2], [3], [4]).

3 Трактриса и её эволюта

Практическую часть курсовой работы будем выполнять в среде Maple18.
Определение 14. Трактриса (линия влечения) – плоская кривая, для которой длина отрезка касательной от точки касания до точки пересечения с фиксированной прямой является постоянной величиной. Её параметрическое описание имеет вид:

$$x(t) = a(\cdot \cos t + \ln \tan \frac{t}{2},) \tag{40}$$

$$y(t) = \sin t, \tag{41}$$

$$0 < t < \pi. \tag{42}$$

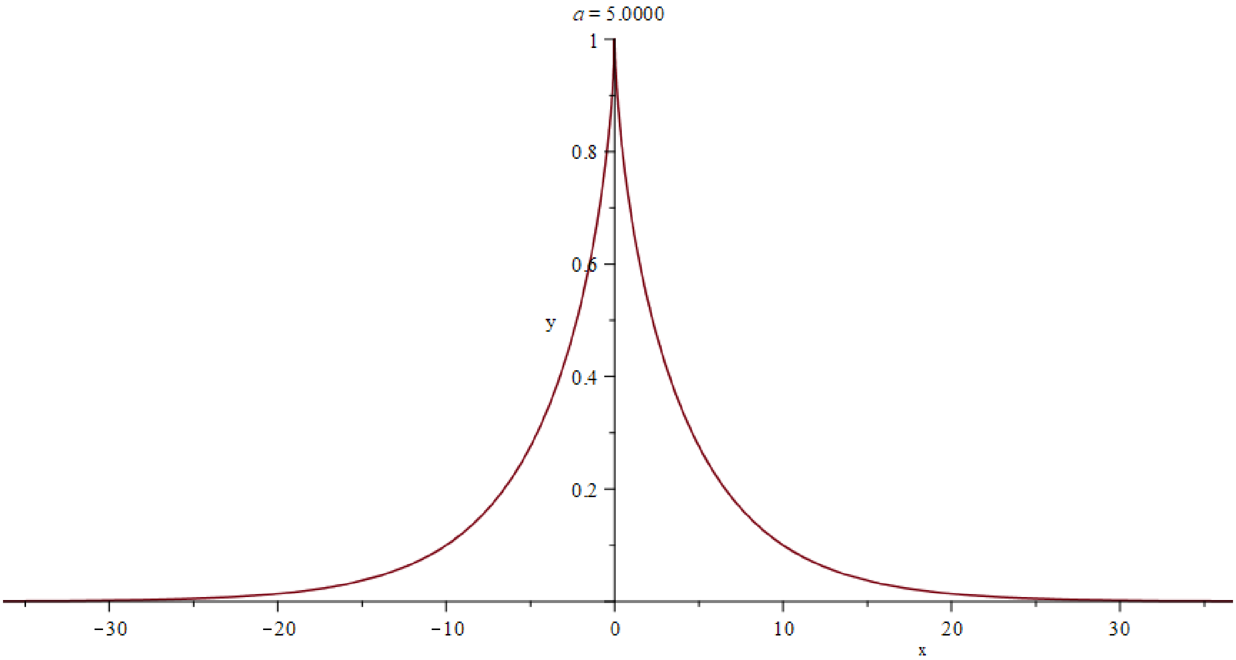

Рисунок 1 – График трактрисы при $a = 5$.

Если линия задана параметрически, то ее эволюта имеет уравнение:

$$X(t) = x(t) - y' \frac{x^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'}, \tag{43}$$

$$Y(t) = y(t) + x' \frac{x^2 + y^2}{x'y'' - x''y'}. \tag{44}$$

Подставляя уравнение трактрисы в (43) и (44) и сокращая, получим:

$$X(t) = \frac{-\cos(t)^3 a^2 + \ln\left(\frac{1-\cos(t)}{\sin(t)}\right) a^2 + \cos(t)^3 + \cos(t)a^2 - \cos(t)}{a}, \tag{45}$$

$$Y(t) = \frac{1 + \left(a^2 - 1\right)\left(\cos\left(t\right)\right)^4}{\sin\left(t\right)}. \tag{46}$$

Избавляясь в полученной системе от t придём к уравнению эволюты, зависящей только от x:

$$evoluta(x) = a \cdot \cosh\frac{x}{a}. \tag{47}$$

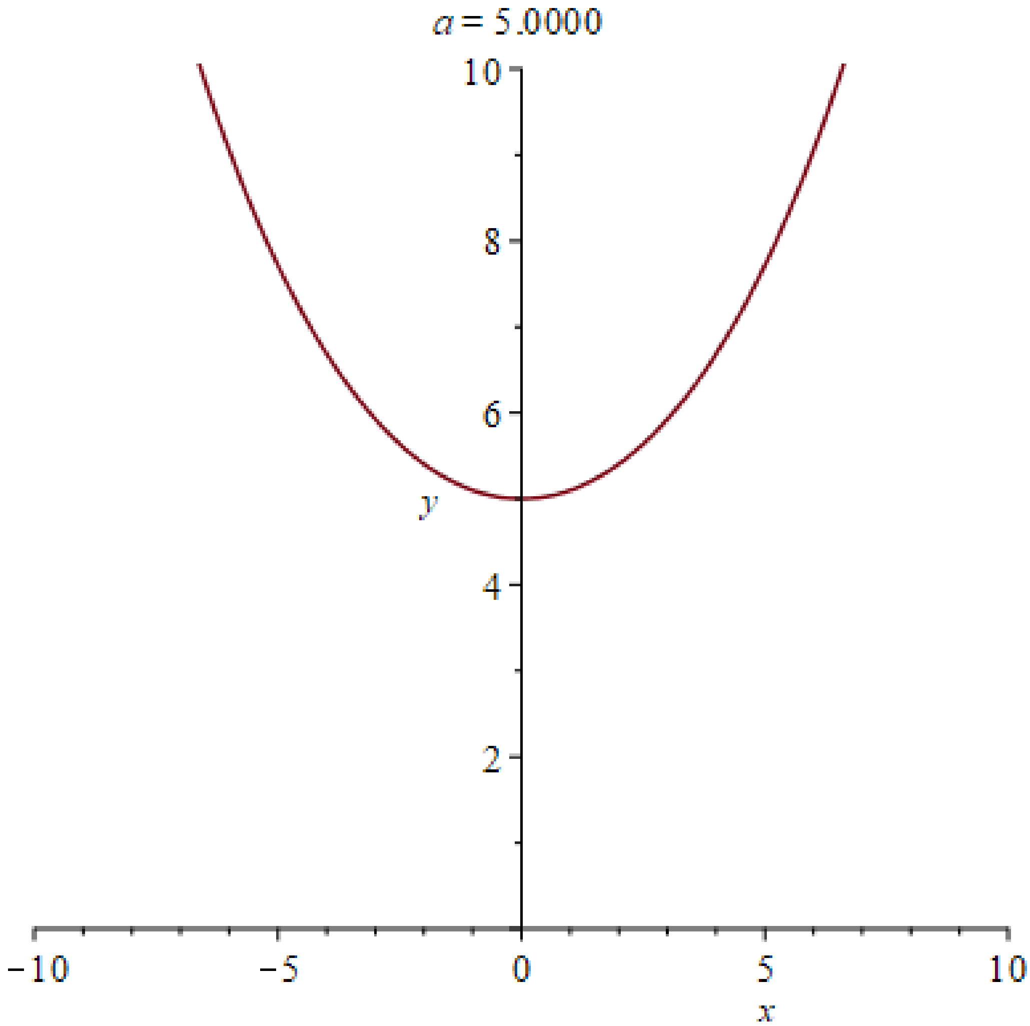

Рисунок 2 – График эволюты трактрисы при $a = 5$.

Получили, что эволютой трактрисы является цепная линия.

Определение 15. Цепная линия — линия, форму которой принимает гибкая однородная нерастяжимая тяжёлая нить или цепь (отсюда название) с закреплёнными концами в однородном гравитационном поле. Является плоской кривой. Её уравнением является (47).

Вращая полученную эволюту вокруг оси OX получаем поверхность вращения, называемую катеноидом. Катеноид можно задать параметрически:

$$x_{kat}(u,v) = a \cdot \cosh\frac{v}{a}\cos u, \tag{48}$$
$$y_{kat}(u,v) = a \cdot \cosh\frac{v}{a}\sin u, \tag{49}$$
$$z_{kat}(u,v) = u, \tag{50}$$

где $-\pi \leq u \leq \pi$ и $v \in \mathbb{R}$.

Построим полученную поверхность.

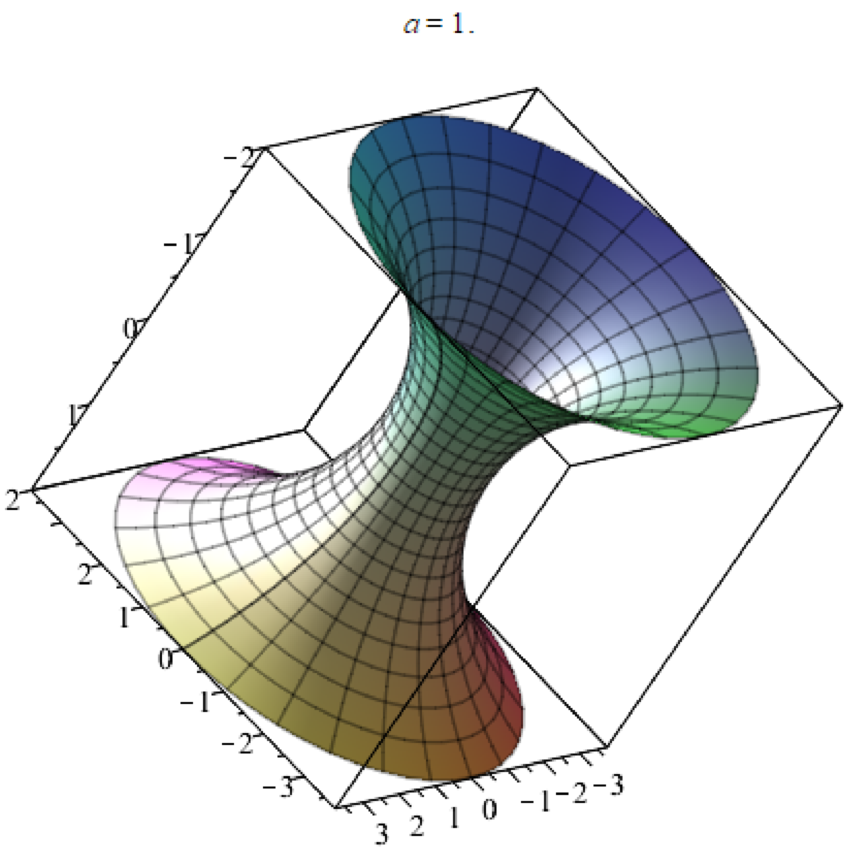

Рисунок 3 – Катеноид при $a = 1$.

Для вычисления Гауссовой и средней кривизн воспользуемся формулами из ([5]), позволяющими написать универсальный программный код.

Пусть K – Гауссова кривизна, а H – средняя. Введём дополнительные обозначения:

$$E = x_u \cdot x_u, \tag{51}$$

$$F = x_u \cdot x_v, \tag{52}$$

$$G = x_v \cdot x_v, \tag{53}$$

$$l = U \cdot x_{uu}, \tag{54}$$

$$m = U \cdot x_{uv}, \tag{55}$$

$$n = U \cdot x_{vv}, \tag{56}$$

где U – единичный вектор нормали к поверхности:

$$U = \frac{x_u \times x_v}{|x_u \times x_v|}. \tag{57}$$

Тогда Гауссова кривизна будет рассчитываться как

$$K = \frac{lm - m^2}{EG - F^2}, \tag{58}$$

а средняя кривизна:

$$H = \frac{Gl + En - 2Fm}{2(EG - F^2)}. \tag{59}$$

Рассчитаем введённые выше величины для нашего катеноида (48)-(50):

$$
\begin{aligned}
E &= x_u \cdot x_u = \\
&= (1, \sinh\frac{u}{a}\cos v, \sinh\frac{u}{a}\sin v)\cdot(1, \sinh\frac{u}{a}\cos v, \sinh\frac{u}{a}\sin v) = \\
&= 1 + \sinh\frac{u}{a}^2 \cdot \cos^2 v + \sinh\frac{u}{a}^2 \cdot \sin^2 v.
\end{aligned} \tag{60}
$$

$$
\begin{aligned}
F &= x_u \cdot x_v = \\
&= (1, \sinh\frac{u}{a}\cos v, \sinh\frac{u}{a}\sin v)\cdot(0, -a\cosh\frac{u}{a}\sin v, a\cosh\frac{u}{a}\cos v) = \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{61}
$$

$$
\begin{aligned}
G &= x_v \cdot x_v = \\
&= (0, -a\cosh\frac{u}{a}\sin v, a\cosh\frac{u}{a}\cos v)\cdot(0, -a\cosh\frac{u}{a}\sin v, a\cosh\frac{u}{a}\cos v) = \\
&= a^2\cosh^2\frac{u}{a}\sin^2 v + a^2\cosh^2\frac{u}{a}\cos^2 v.
\end{aligned} \tag{62}
$$

$$
\begin{aligned}
U &= \frac{x_u \times x_v}{|x_u \times x_v|} = \\
&= \frac{(0, -a\cosh\frac{u}{a}\sin v, a\cosh\frac{u}{a}\cos v)\times(0, -a\cosh\frac{u}{a}\sin v, a\cosh\frac{u}{a}\cos v)}{|(0, -a\cosh\frac{u}{a}\sin v, a\cosh\frac{u}{a}\cos v)\times(0, -a\cosh\frac{u}{a}\sin v, a\cosh\frac{u}{a}\cos v)|} = \\
&= \frac{(a\cosh\frac{u}{a}\sinh\frac{u}{a}, -a\cosh\frac{u}{a}\cos v, -a\cosh\frac{u}{a}\sin v)}{\sqrt{\cosh^4\frac{u}{a}a^2}} = \\
&= (\frac{\sinh\frac{u}{a}}{\cosh\frac{u}{a}}, -\frac{\cos v}{\cosh\frac{u}{a}}, -\frac{\sin v}{\cosh\frac{u}{a}}).
\end{aligned} \tag{63}
$$

$$
\begin{aligned}
&l = U \cdot x_{uu} = \\
&= \left(\frac{\sinh \frac{u}{a}}{\cosh \frac{u}{a}}, -\frac{\cos v}{\cosh \frac{u}{a}}, -\frac{\sin v}{\cosh \frac{u}{a}}\right) \cdot \left(0, \frac{\cosh \frac{u}{a} \cos v}{a}, \frac{\cosh \frac{u}{a} \sin v}{a}\right) = \\
&= -\frac{1}{a}.
\end{aligned} \tag{64}
$$

$$
\begin{aligned}
&m = U \cdot x_{uv} = \\
&= \left(\frac{\sinh \frac{u}{a}}{\cosh \frac{u}{a}}, -\frac{\cos v}{\cosh \frac{u}{a}}, -\frac{\sin v}{\cosh \frac{u}{a}}\right) \cdot \left(0, -\sinh \frac{u}{a} \sin v, \sinh \frac{u}{a} \cos v\right) = \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{65}
$$

$$
\begin{aligned}
&n = U \cdot x_{vv} = \\
&= \left(\frac{\sinh \frac{u}{a}}{\cosh \frac{u}{a}}, -\frac{\cos v}{\cosh \frac{u}{a}}, -\frac{\sin v}{\cosh \frac{u}{a}}\right) \cdot \left(0, -a \cosh \frac{u}{a} \cos v, -a \cosh \frac{u}{a} \sin v\right) = \\
&= a.
\end{aligned} \tag{66}
$$

Теперь мы можем рассчитать Гауссову кривизну по формуле (58):

$$
K = \frac{lm - m^2}{EG - F^2} = -\frac{1}{\cosh^4 \frac{u}{a} a^2}. \tag{67}
$$

И среднюю кривизну по формуле (59):

$$
H = \frac{Gl + En - 2Fm}{2(EG - F^2)} = 0. \tag{68}
$$

$$H = \frac{GL + EN - 2FM}{2(EG - F^2)} = 0. \tag{69}$$

Также из [5] известно, что скалярная кривизна равняется удвоенной гауссовой кривизне для римановых многообразий. Так что, обозначая скалярную кривизну за SK имеем:

$$SK = 2K = -\frac{2}{\cosh^4 \frac{u}{a} a^2}. \tag{70}$$

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

[1] Димитриенко Ю.И. Тензорное исчисление: Учеб.пособие для вузов. М.: Высш, шк., 2001, 575 с.

[2] Петров А.З. Пространства Эйнштейна. М.: Физматгиз, 1961, 464 с.

[3] Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Наука, 1967, 664 с.

[4] Шипов Г.И. Теория физического вакуума. НТ-Центр, 1993, 362 с.

[5] Шипов Г.И. Теория физического вакуума. НТ-Центр, 1993, 362 с.