МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

МГТУ им Н.Э.Баумана

Факультет ФН
Кафедра вычислительной математики и математической физики

Соколов Арсений Андреевич

Лабораторная работа №3 по численным методам

3 курс, группа ФН11-53Б
Вариант 6

Преподаватель
_____________ В. А. Кутыркин
«___» _______ 2019 г.

Москва, 2019 г.

Задание 1.1

Задание.
Используя метод простой итерации с нулевым начальным вектором, найти приближённое решение СЛАУ: $A \cdot {}^{>}x = {}^{>}b$, с матрицей, имеющей диагональное преобладание. Абсолютная погрешность приближённого решения не должна превышать величины 0,01. Предполагается, что все компоненты решения заданной СЛАУ равны единице. Матрица A этой СЛАУ приведена ниже в зависимости от варианта задания (см. Таблицы 1а,б). Кроме того, найти в методе простой итерации число шагов, необходимое для того чтобы гарантировать абсолютную погрешность приближённого решения не более 0.01. Сравнить это расчётное количество шагов с реальным количеством шагов, обеспечившим заданную погрешность.
Исходные данные.
$N = 6, n = 53$

$$A = \begin{pmatrix} 10\beta & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 10\beta & 3 & -2 \\ 2 & 3 & 10\beta & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 10\beta \end{pmatrix}$$

$$^{>}x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Решение.
Используя рабочую формулу метода простой итерации для решения СЛАУ:

$$^{>}x = F \cdot {}^{>}x_{(k)} + {}^{>}g,$$

где $F = E - D \cdot A$, ${}^{>}g = D \cdot {}^{>}b$, $k \in \mathbb{N}$.

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 12 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & 12 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 12 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0,083333 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,083333 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,083333 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,083333 \end{pmatrix}$$

$$
{}^{>}b = \begin{pmatrix} 18 \\ 14 \\ 18 \\ 18 \end{pmatrix}
$$

$$
F = \begin{pmatrix} 0,000000 & -0,083333 & -0,166667 & -0,250000 \\ -0,083333 & 0,000000 & -0,250000 & 0,166667 \\ -0,166667 & -0,250000 & 0,000000 & -0,083333 \\ -0,250000 & -0,166667 & -0,083333 & 0,000000 \end{pmatrix}
$$

$$
{}^{>}g = \begin{pmatrix} 1,5000 \\ 1,1667 \\ 1,5000 \\ 1,5000 \end{pmatrix}
$$

Начальный вектор итераций:

$$
{}^{>}x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

Получающаяся последовательность приближенных решений СЛАУ:

$$
{}^{>}x_1 = \begin{pmatrix} 1,50000 \\ 1,16667 \\ 1,50000 \\ 1,50000 \end{pmatrix} \quad \Delta\, {}^{>}x_1 = 0,50000
$$

$$
{}^{>}x_2 = \begin{pmatrix} 0,77778 \\ 0,91667 \\ 0,83333 \\ 0,80556 \end{pmatrix} \quad \Delta\, {}^{>}x_2 = 0,22222
$$

$$
{}^{>}x_3 = \begin{pmatrix} 1,08333 \\ 1,02778 \\ 1,07407 \\ 1,08333 \end{pmatrix} \quad \Delta\, {}^{>}x_3 = 0,08333
$$

$$
{}^{>}x_4 = \begin{pmatrix} 0,9645 \\ 0,9884 \\ 0,9722 \\ 0,9684 \end{pmatrix} \quad \Delta\, {}^{>}x_4 = 0,03549
$$

$$^{>}x_5 = \begin{pmatrix} 1,01350 \\ 1,00463 \\ 1,01145 \\ 1,01312 \end{pmatrix} \qquad \Delta\, ^{>}x_5 = 0,01350$$

$$^{>}x_6 = \begin{pmatrix} 0,9944 \\ 0,9982 \\ 0,9955 \\ 0,9949 \end{pmatrix} \qquad \Delta\, ^{>}x_6 = 0,00557$$

Таким образом, для достижения абсолютной погрешности, не превосходящей 0.01 методом простой итерации, нам потребовалось 6 итераций.

Используя неравенство $\left\| ^{>}x_{(k)} - {}^{>}x^{*} \right\| \leq \frac{\|F\|^k}{1-\|F\|} \cdot \|^{>}g\| + \|F\|^k \cdot \|^{>}x_0\|$ найдём в методе простой итерации теоретическое число шагов, необходимое для того чтобы гарантировать абсолютную погрешность приближённого решения не более 0.01.

$$k \geq \log_{\|F\|} \frac{\varepsilon(1 - \|F\|)}{\|^{>}g\|} \Rightarrow k \geq 8,22882$$

То есть по данной оценке потребуется 9 шагов для достижения абсолютной погрешности, меньшей 0.01. На практике нам потребовалось меньше шагов для достижения требуемой абсолютной погрешности.

Задание 1.2

Задание. Используя метод Зейделя с нулевым начальным вектором, найти приближённое решение СЛАУ: $A \cdot {}^{>}x = {}^{>}b$, с матрицей, имеющей диагональное преобладание. Абсолютная погрешность приближённого решения не должна превышать величины 0,01. Предполагается, что все компоненты решения заданной СЛАУ равны единице. Матрица A этой СЛАУ приведена ниже в зависимости от варианта задания (см. Таблицы 1а,б). Сравнить в методах простой итерации и Зейделя количество шагов для достижения абсолютной погрешности, не превышающей величины 0.01

Решение. Метод Зейделя предлагает следующую рабочую формулу:

$$^{>}y_{(k)} = P \cdot {}^{>}y_{(k-1)} + Q \cdot {}^{>}y_{(k)} + {}^{>}g, \quad k \in \mathbb{N}$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} f_1^1 & 0 & \cdots & 0 \\ f_1^2 & f_2^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ f_1^n & f_2^n & \cdots & f_n^n \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} f_1^1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f_2^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & f_n^n \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{B} - \boldsymbol{D}, \ \boldsymbol{P} = \boldsymbol{F} - \boldsymbol{Q} \ \text{и} \ \boldsymbol{F} = (f_j^i)_n^n \ .$$

Тогда:

$$^{>}y_{(k)} = (E-Q)^{-1} \cdot P \cdot {}^{>}y_{(k-1)} + (E-Q)^{-1} \cdot {}^{>}g, \quad k \in \mathbb{N}$$

$||F|| = 0.50 < 1 \Rightarrow$ метод Зейделя сходится к решению СЛАУ.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,08333 & 0 & 0 & 0 \\ -0,16667 & -0,25 & 0 & 0 \\ -0,25 & -0,16667 & -0,08333 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,08333 & 0 & 0 & 0 \\ -0,16667 & -0,25 & 0 & 0 \\ -0,25 & -0,16667 & -0,08333 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & -0,08333 & -0,16667 & -0,25 \\ 0 & 0 & -0,25 & 0,166667 \\ 0 & 0 & 0 & -0,08333 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Начальный вектор итераций:

$$^{>}y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Получающаяся последовательность приближенных решений СЛАУ:

$$^{>}y_1 = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 1,041667 \\ 0,989583 \\ 0,868924 \end{pmatrix} \quad \Delta\, {}^{>}y_1 = 0,50$$

$$^{>}y_2 = \begin{pmatrix} 1,031033 \\ 0,978172 \\ 1,011208 \\ 0,994946 \end{pmatrix} \quad \Delta\, {}^{>}y_2 = 0,0310$$

$$
^{>}y_3 = \begin{pmatrix} 1,001214581 \\ 0,996254446 \\ 1,001155145 \\ 1,000224352 \end{pmatrix} \quad \Delta\, ^{>}y_3 = 0,0037
$$

Таким образом, для достижения абсолютной погрешности, не превосходящей 0.01 методом Зейделя, нам потребовалось 3 итерации. То есть метод Зейделя дал нам более быструю сходимость.

Задание 2

Задание.
С погрешностью, не превосходящей величину $\varepsilon = 0.0001$, найти все корни уравнения:

$$
\left[N + 5.2 + (-1)^N \alpha\right] \cdot x^3 - \left[2N^2 + 10.4N + (-1)^{N+1}\alpha\right] \cdot x^2 - N^2(N + 5.2)(x - 2N) + (-1)^N \alpha = 0
$$

Нарисовать график функции, стоящей в левой части уравнения. Используя этот график отделить корни уравнения. Для определения левого корня использовать метод касательных, правого – метод секущих. Для определения срединного корня использовать метод деления отрезка пополам.
Исходные данные.
$N = 6, n = 53, \alpha = 0.005(n - 50) = 0.015$
Решение.

Исходное уравнение:

$$
11.215x^3 - 134.385x^2 - 403.2x + 4838.42
$$

Корни уравнения найдём с помощью сервиса WolframAlpha:

$$
x_1 = -5.99889 \quad x_2 = 6.00472 \quad x_3 = 11.97680
$$

Рабочая формула метода касательных (для определения левого корня уравнения):

$$
x_k = x_{k-1} - \left(f'\left(x_{k-1}\right)\right)^{-1} \cdot f\left(x_{k-1}\right)
$$

Пусть начальное приближение $x_0 = -7$
Получающаяся последовательность приближенных корней уравнения:

$$
x_1 = -6,113854602 \quad \Delta x_1 = 0,114964602
$$

$$
x_2 = -6,000683418 \quad \Delta x_2 = 0,001793418
$$

$$
x_3 = -5,998891065 \quad \Delta x_3 = 1,06466E - 06
$$

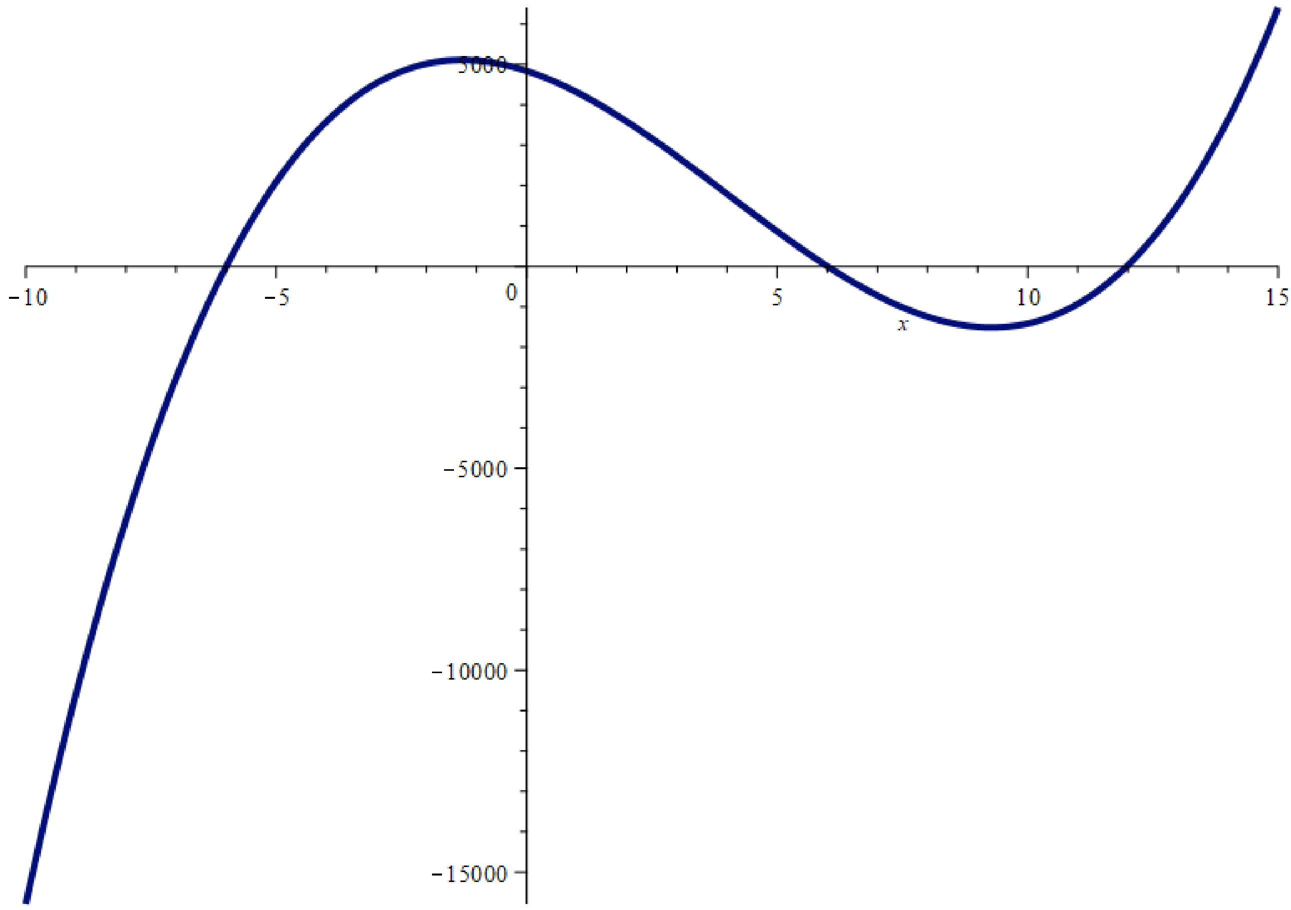

Рис. 1: График левой части уравнения

На третьей итерации достигли значения, абсолютная погрешность которого не превышает 0.0001

Для определения правого корня используем метод секущих. Если $f(a) \cdot f(b) < 0$ и $f(b) \cdot f'' > 0$ на $[a, b]$, то целесообразно использовать метод, не выпускающий корень $x_* \in [a, b]$ из найденной «вилки» и использующий рабочую формулу:

$$x_k = x_{k-1} - \frac{(b - x_{k-1}) f(x_{k-1})}{f(b) - f(x_{k-1})} (k \in N)$$

Пусть начальное приближение $x_0 = 12$ при $b = 13$

Получающаяся последовательность приближенных корней уравнения:

$$x_1 = 11,98123259 \quad \Delta x_1 = 0,00443259$$

$$x_2 = 11,97763924 \quad \Delta x_2 = 0,000839244$$

$$x_3 = 11,97694896 \quad \Delta x_3 = 0,00014896$$

На третьей итерации достигли значения, абсолютная погрешность которого не превышает 0.0001

Срединный корень определим методом деления отрезка пополам.

Пусть начальное приближение $a_0 = 5, b_0 = 7$ Получающаяся последовательность приближенных корней уравнения:

$$
\begin{array}{rrrr}
a_1 = 10.000000 & b_1 = 11.000000 & x_1 = 10.000000 & \varepsilon_1 = 0.005443 \\
a_2 = 10.000000 & b_2 = 10.500000 & x_2 = 10.500000 & \varepsilon_2 = 0.494557 \\
a_3 = 10.000000 & b_3 = 10.250000 & x_3 = 10.250000 & \varepsilon_3 = 0.244557 \\
a_4 = 10.000000 & b_4 = 10.125000 & x_4 = 10.125000 & \varepsilon_4 = 0.119557 \\
a_5 = 10.000000 & b_5 = 10.062500 & x_5 = 10.062500 & \varepsilon_5 = 0.057057 \\
a_6 = 10.000000 & b_6 = 10.031250 & x_6 = 10.031250 & \varepsilon_6 = 0.025807 \\
a_7 = 10.000000 & b_7 = 10.015625 & x_7 = 10.015625 & \varepsilon_7 = 0.010182 \\
a_8 = 10.000000 & b_8 = 10.007812 & x_8 = 10.007812 & \varepsilon_8 = 0.002370 \\
a_9 = 10.003906 & b_9 = 10.007812 & x_9 = 10.003906 & \varepsilon_9 = 0.001536 \\
a_{10} = 10.003906 & b_{10} = 10.005859 & x_{10} = 10.005859 & \varepsilon_{10} = 0.000417 \\
a_{11} = 10.004883 & b_{11} = 10.005859 & x_{11} = 10.004883 & \varepsilon_{11} = 0.000560 \\
a_{12} = 10.005371 & b_{12} = 10.005859 & x_{12} = 10.005371 & \varepsilon_{12} = 0.000072
\end{array}
$$

На четырнадцатой итерации достигли значения, абсолютная погрешность которого не превышает 0.0001

В итоге можем сделать вывод, что метод касательных и метод секущих дают быстрое приближение результата к истинному значению, метод деления отрезка пополам – сильно уступает по скорости сходимости.