



Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

**«Московский государственный технический
университет
имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)**

ФАКУЛЬТЕТ «Фундаментальные науки»

КАФЕДРА «Вычислительная математика и математическая физика» (ФН-11)

РАСЧЁТНО - ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

к курсовой работе на тему:

Дифференциальная геометрия и основы тензорного исчисления.

Дисциплина: Дифференциальная геометрия и основы тензорного исчисления

Студент

(Подпись, дата)

А.А. Соколов

(И.О.Фамилия)

Руководитель курсовой работы

(Подпись, дата)

Е.В. Осипов

(И.О.Фамилия)

Москва, 2019

СПИСОК ИСПОЛНИТЕЛЕЙ

Руководитель курсовой _____ Е.В. Осипов
работы подпись, дата

Исполнитель _____ А.А. Соколов
подпись, дата

Нормоконтролер _____ С.С. Кудрявцева
подпись, дата

РЕФЕРАТ

Отчет 27 с., 1 ч., 5 источников.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ, РИМАНОВЫ
ПРОСТРАНСТВА, ГАУССОВА КРИВИЗНА, СРЕДНЯЯ КРИВИЗНА,
СКАЛЯРНАЯ КРИВИЗНА, ГОСТ 7.32-2017.

Цель работы – исследование гауссовых, средних и скалярных кривизн поверхности, полученной вращением эволюты трактрисы вокруг оси ОХ.

В результате работы была произведена устная защита курсовой работы, а также выполнен письменный отчет в соответствии со стандартами оформления научно-технической документации.

ВВЕДЕНИЕ	5
1 Римановы пространства	6
1.1 Элементарное многообразие	6
1.2 Касательное пространство	7
1.3 Определение риманова пространства	9
2 Свойства римановых пространств	10
2.1 Коэффициенты связности в \mathbb{V}^n	10
2.2 Определение аффинной связности	10
2.3 Тензоры в элементарном многообразии	11
2.4 Определение тензора в римановом пространстве	12
2.5 Ковариантное дифференцирование тензоров в \mathbb{V}^n	13
2.6 Ковариантное дифференцирование тензоров в \mathbb{L}^n	13
2.7 Риманово пространство с аффинной связностью	14
2.8 Тензор Римана-Кристоффеля	14
2.9 Тензор Риччи	16
2.10 Тензор Эйнштейна	17
3 Трактриса и ее эволюта	18
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	25
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	26
ПРИЛОЖЕНИЕ А	27

ВВЕДЕНИЕ

Курсовая работа – вид учебной работы обучающегося, в которой присутствуют элементы самостоятельного научного исследования. Работа рассчитана на закрепление и применение полученных навыков в процессе учёбы.

Целью курсовой работы является исследование гауссовых, скалярных и средних кривизн поверхности, получаемой вращением эволюты трактрисы вокруг оси OX .

Задачами курсовой работы являются:

- ознакомление с римановыми пространствами;
- нахождение гауссовой кривизны;
- нахождение средней кривизны;
- нахождение скалярной кривизны.

1 Римановы пространства

В механике и особенно в релятивистской физике тензоры широко применяют в n -мерных римановых пространствах, являющихся более общими, чем евклидовы [1]. Дадим определение этих пространств, а затем покажем, как конструируются тензоры в них. Начнём с основополагающего понятия римановых пространств - элементарного многообразия.

1.1 Элементарное многообразие

Определение 1. Элементарным n -мерным многообразием называют такое множество M^n , каждой точке которого взаимнооднозначно поставлен в соответствие упорядоченный набор чисел $(X_1 \dots X_n)$ из некоторой связной области $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^n$, т.е, задано биективное отображение $\varphi : M^n \longrightarrow \mathcal{D} \in \mathbb{R}^n$.

Координатами точки $\mathcal{M} \in M^n$ в системе координат \mathcal{D} называют координаты $X^i \in \mathbb{R}^n$ ее образа $\varphi(\mathcal{M})$, изменяющиеся в области $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^n$. Если для множества M^n имеется другое биективное отображение $\varphi' : M^n \longrightarrow \mathcal{D}' \in \mathbb{R}^n$, то координаты точки \mathcal{M} в системах координат \mathcal{D} и \mathcal{D}' , связаны соотношениями:

$$X'^i = X'^i(X^j), \quad i, j = 1 \dots n, \quad (1)$$

которые предполагают достаточное число раз дифференцируемыми и невырожденными, т.е. $\det\left(\frac{\partial X'^i}{\partial X^j}\right) \neq 0, \forall X^i \in \mathcal{D}$. Введём обозначения для якобиевых матриц преобразования, а также для их производных:

$$Q^i_j \equiv \left(\frac{\partial X'^i}{\partial X^j}\right), \quad P^i_j \equiv \left(\frac{\partial X^i}{\partial X'^j}\right), \quad P^i_{jk} \equiv \frac{\partial^2 X^i}{\partial X'^j \partial X'^k}, \quad (2)$$

и кроме того будем использовать обозначения для частных производ-

ных:

$$\frac{\partial f}{\partial X^i} \equiv f_{,i}, \quad \frac{\partial f}{\partial X^{\bar{n}}} \equiv f_{|\bar{n}} = P^j_{\bar{n}} f_{,j}. \quad (3)$$

Примером двумерного ($n = 2$) элементарного многообразия M^2 являются поверхности в \mathbb{R}^3 , на которых определены криволинейные координаты X_1, X_2 и которые заданы тремя функциями:

$$x^i = x^i(X^1, X^2), \quad i = 1, 2, 3. \quad (4)$$

1.2 Касательное пространство

Определение 2. Кривой \mathcal{L} в многообразии M^n называют отображение $\mathcal{L} : [\xi_1, \xi_2] \in \mathbb{R}^1 \longrightarrow M^n$, которое записывают в виде функции:

$$X^i = X^i(\xi) \quad \forall \xi \in [\xi_1, \xi_2], \quad X^i \in M^n. \quad (5)$$

Здесь X^i - координаты точки $\mathcal{M} \in M^n$, $[\xi_1, \xi_2]$ - некоторый отрезок из \mathbb{R}^1 , ($\xi_1 < \xi_2$), а функции (5) предполагаем непрерывно дифференцируемыми, по крайней мере, два раза.

Зафиксировав значение параметра $\xi \in [\xi_1, \xi_2]$, получим некоторую точку $\mathcal{M} \in \mathcal{L}$, в ней можно вычислить производные от функций (5):

$$a^i = \frac{dX^i}{d\xi}. \quad (6)$$

Определение 3. Упорядоченный набор $(a_1 \dots a_n)$ производных (6) называют компонентами касательного вектора a^i в точке \mathcal{M} кривой \mathcal{L} в M^n .

Если перейти к координатам $X^{\bar{n}}$ той же точки $\mathcal{M} \in \mathcal{L}$, то согласно (1)

получаем, что компоненты касательного вектора a'^i в этой системе координат будут иметь вид: $a'^i = \frac{dX'^i}{d\xi}$ и связаны с a^i тензорным законом:

$$a'^i = Q^i_j a^j. \quad (7)$$

Поскольку через фиксированную точку $\mathcal{M} \in M^n$ можно провести различные кривые \mathcal{L} , то, вообще говоря, в каждой точке \mathcal{M} имеется множество упорядоченных наборов $(a_1 \dots a_n)$. Определим операции с этими наборами.

Пусть имеется две кривые \mathcal{L}_1 и \mathcal{L}_2 , заданные в виде функций $X_1^i(\xi)$, $X_2^i(\xi)$, проходящие через точку \mathcal{L} , тогда можно построить два набора компонент касательных векторов $a_1^i = \frac{dX_1^i}{d\xi}$ и $a_2^i = \frac{dX_2^i}{d\xi}$.

Суммой компонент двух касательных векторов назовём набор

$$a_1^i + a_2^i = \frac{dX_1^i + X_2^i}{d\xi}, \quad (8)$$

который представляет собой компоненты касательного вектора к кривой $(X_1^i + X_2^i)(\xi)$ в данной точке \mathcal{M} .

Аналогично определяем произведение компонент a^i на вещественное число λ :

$$\lambda a^i = \lambda \frac{dX^i}{d\xi} = \frac{d\lambda X^i}{d\xi}. \quad (9)$$

Поскольку набор чисел $(a_1 \dots a_n)$ является элементом пространства \mathbb{R} , то, выбрав базис e_i в этом пространстве, можно построить сам касательный вектор a в точке \mathcal{M} кривой \mathcal{L} : $a = a^i e_i = a'^i e'_i$, где $e'_i = P^j_i e_j$ - новый базис.

Определение 4. Касательным пространством в данной точке \mathcal{M} элементарного многообразия M^n называют множество касательных векторов $= a^i e_i$, построенных ко всевозможным кривым \mathcal{L} , проходящим через данную точку.

Теорема 1. Касательное пространство в любой точке $\mathcal{M} \in M^n$ является n -мерным линейным пространством, которое обозначают как $T_{\mathcal{M}} M^n$,

а векторы e , образуют базис в нем.

1.3 Определение риманова пространства

Определение 5. Элементарное n -мерное многообразие M^n называют римановым пространством \mathbb{V}^n , если в каждой точке $\mathcal{M} \in M^n$ с координатами X^i задана матрица g_{ij} n -го порядка, которая является

- 1) симметричной,
- 2) невырожденной: $\det(\tilde{g}_{ij}) \neq 0, \quad \forall X^i$,
- 3) компоненты её являются непрерывно-дифференцируемыми функциями,
- 4) при переходе к другим координатам X'^l преобразуется по тензорному закону:

$$g_{ij} = Q^k_i Q^l_j g'_{kl}. \quad (10)$$

Двумерные поверхности в \mathbb{R}^3 , очевидно, можно рассматривать как двумерные римановы пространства \mathbb{V}^2 с метрической матрицей \tilde{g}_{IJ} .

Расстояние в римановом пространстве вводят для бесконечно близких точек \mathcal{M} и \mathcal{M}' , имеющих координаты X^i и $X^i + dX^i$, и определяют его как

$$ds^2 = \kappa g_{ij} dX^i dX^j, \quad (11)$$

где κ – знаковое число, которое выбирают так, чтобы форма (11) была положительной.

Риманово пространство называют собственно римановым, если метрическая матрица $g_{ij}, \forall X^i \in \mathcal{D}$ является положительно-определённой, в противном случае говорят о псевдоримановых пространствах.

2 Свойства римановых пространств

Рассмотрим некоторые свойства римановых пространств, которые понадобятся нам для введения тензора Эйнштейна, чтобы указать связь римановых пространств с общей теорией относительности.

2.1 Коэффициенты связности в \mathbb{V}^n

Поскольку в каждой точке $\mathcal{M}(X^i) \in \mathbb{V}^n$ введена метрическая матрица $g_{ij}(X^i)$ компоненты которой, согласно п.3 определения 5, являются непрерывно дифференцируемыми функциями, то можно вычислить производные $\frac{\partial g_{ij}}{\partial X^k}$ и образовать из них следующие объекты:

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2}(g_{ik,j} + g_{jk,i} - g_{ij,k}). \quad (12)$$

Определение 6. Функции Γ_{ijk} определённые по формулам (12), называют коэффициентами связности первого рода в \mathbb{V}^n . Коэффициенты связности второго рода вводим с помощью обратной матрицы g^{ij} :

$$\Gamma_{ij}^m = g^{mp}\Gamma_{ijp}. \quad (13)$$

2.2 Определение аффинной связности

Определение 7. Элементарное n -мерное многообразие M^n называют пространством аффинной связности \mathbb{L}^n , если в каждой точке $\mathcal{M} \in M^n$ с координатами X^i задана система функций Γ_{ij}^{*m} , которые

- 1) являются непрерывно-дифференцируемыми функциями,
- 2) при переходе к другим координатам X'^i преобразуются следующим

образом:

$$\Gamma_{ij}^{*m} = P_i^l P_j^q Q_r^m \Gamma_{lq}^{*r} + Q_r^m P_{ij}^r. \quad (14)$$

Функции Γ_{ij}^{*m} , заданные в \mathbb{L}^n , называют коэффициентами аффинной связности (или просто аффинной связностью).

2.3 Тензоры в элементарном многообразии

Построим в каждой точке $\mathcal{M} \in M^n$ множество наборов касательных векторов:

$$(a_1 b^{(1)} a_2 b^{(2)} \dots a_n b^{(n)}) \equiv (a_i b^{(i)}), \quad (15)$$

где $a_i \in T_{\mathcal{M}} M^n$, $b^{(i)} \in T_{\mathcal{M}}^* M^n$, и введём на этом множестве операции сложения и умножения на вещественное число s :

$$(a_i b^{(i)}) + (a_i c^{(i)}) = (a_i (b^{(i)} + c^{(i)})), \quad (16)$$

$$(a_i b^{(i)}) + (d_i b^{(i)}) = ((a_i + d_i) b^{(i)}), \quad (17)$$

$$s(a_i b^{(i)}) = ((sa_i) b^{(i)}) = (a_i (sb^{(i)})). \quad (18)$$

Определение 8. Тензорным касательным пространством $\mathcal{T}_n^{(pq)}(T_{\mathcal{M}} M^n)$ типа pq , где $p+q = 2$, в точке \mathcal{M} элементарного многообразия M^n называют тензорное произведение касательного пространства $T_{\mathcal{M}} M^n$ на себя:

$$\mathcal{T}_n^{(pq)}(T_{\mathcal{M}} M^n) = T_{\mathcal{M}} M^n \otimes T_{\mathcal{M}} M^n \quad \forall \mathcal{M} \in M^n, \quad p+q = 2, \quad (19)$$

где тензорное произведение вводится как фактор-пространство n -ой степе-

ни декартова квадрата

$$T_{\mathcal{M}}M^n \otimes T_{\mathcal{M}}M^n = [(T_{\mathcal{M}}M^n \times T_{\mathcal{M}}M^n)^n] \quad (20)$$

Базисные диады в $\mathcal{T}_n^{(pq)}(T_{\mathcal{M}}M^n)$ введём как

$$e_j \otimes e_k = [e_i(\delta_j^i e_k)], \quad (21)$$

где $[\]$ – классы эквивалентности соответствующих наборов касательных векторов. Очевидно, что если рассматриваемое многообразие M^2 является поверхностью $\Sigma \in \mathbb{R}^3$, то базисные диады совпадают с соответствующими диадами $\rho_I \otimes \rho_K$.

Определение 9. Тензором второго ранга $A(\mathcal{M})$ типа (pq) в точке $\mathcal{M} \in M^n$ называют элемент тензорного произведения касательного пространства $\mathcal{T}_n^{(pq)}(T_{\mathcal{M}}M^n)$, $p + q = 2$.

Тензор k -го ранга ${}^k A(\mathcal{M})$ введём как

$${}^k A = A_{i_1 \dots i_p}{}^{j_1 \dots j_q} e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_q}, \quad p + q = k. \quad (22)$$

2.4 Определение тензора в римановом пространстве

Если в многообразии M^n введена метрическая матрица g_{ij} то оно становится римановым пространством \mathbb{V} , а касательное пространство в каждой точке $\mathcal{M} \in \mathbb{V}^n$ - евклидовым (или псевдоевклидовым) $T_{\mathcal{M}}\mathbb{V}^n$. Тогда используя соглашение о совпадении пространств $T_{\mathcal{M}}^*\mathbb{V}^n$ и $T_{\mathcal{M}}\mathbb{V}^n$, можно говорить о тензорном касательном пространстве $\mathcal{T}_n^{(k)}(T_{\mathcal{M}}\mathbb{V}^n)$, заданном на римановом пространстве \mathbb{V}^n .

2.5 Ковариантное дифференцирование тензоров в \mathbb{V}^n

Рассмотрим в \mathbb{V}^n произвольное поле тензора k -го ранга:

$${}^k\Omega(X^i) = \Omega^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} \mathbf{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i_p} \otimes \mathbf{e}^{j_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}^{j_q}, \quad p + q = k, \quad (23)$$

причём его компоненты $\Omega^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$ будем считать непрерывно дифференцируемыми функциями координат X^i точки $\mathcal{M} \in \mathbb{V}^n$

Определение 10. Ковариантной производной от компонент тензора $\Omega^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$ k -го ранга ${}^k\Omega$, определённого в \mathbb{V}^n , называют следующий объект:

$$\begin{aligned} \nabla_i \Omega^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} = & \frac{\partial}{\partial X^i} \Omega^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} + \sum_{s=1}^p \Gamma_{mi}^s \Omega^{i_1 \dots i_p = m \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} + \dots \\ & \dots - \sum_{s=1}^q \Gamma_{js}^m \Omega^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q = m \dots i_q}, \quad p + q = k. \end{aligned} \quad (24)$$

2.6 Ковариантное дифференцирование тензоров в \mathbb{L}^n

Наличие связности Γ_{ij}^m в \mathbb{L}^n означает, что в этом пространстве определена операция ковариантного дифференцирования.

Определение 11. Ковариантной производной от компонент тензора ${}^k A \in \mathcal{T}_n^{pq}(T\mathcal{M}\mathbb{L}^n)$, $k = p + q$, (или иначе ковариантной производной относительно связности Γ_{ij}^m) называют следующий объект:

$$\nabla_i^* A^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} + \sum_{s=1}^p \Gamma_{mi}^s A^{i_1 \dots i_s = m \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} - \sum_{s=1}^q \Gamma_{js}^m A^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_s = m \dots i_q}. \quad (25)$$

Теорема 2. Ковариантная производная от компонент тензора k -го ранга является компонентами тензора $(k+1)$ -го ранга $\nabla \otimes^k A$ в \mathbb{L}^n , называемого

градиентом тензора:

$$\nabla^* \otimes^k A = A^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} e^i \otimes e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_q}, \quad p + q = k. \quad (26)$$

2.7 Риманово пространство с аффинной связностью

В римановом пространстве \mathbb{V}^n у нас была определена метрика g_{ij} (ей соответствовала вполне определённая связность Γ_{ij}^m). Можно однако построить такое пространство, в котором будет одновременно определена и метрика g_{ij} , и некоторая «самостоятельная» связность Γ_{ij}^{m*} , для которой уже не имеют места соотношения (12).

Определение 12. Элементарное n –мерное многообразие M^n называют римановым пространством аффинной связностью \mathbb{W}^n , если в каждой точке $\mathcal{M} \in M^n$ с координатами x^i заданы две системы функций g_{ij} и Γ_{ij}^{m*} , вообще говоря, не связанные никакими соотношениями и удовлетворяющие свойствам 1-4 из определения 5 и 1,2 из определения 7 соответственно.

Поскольку в \mathbb{W}^n определена метрическая матрица g_{ij} , то можно образовывать из неё символы Γ_{ij}^m по формуле (13)

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2} g^{mk} (g_{ik,j} + g_{jk,i} - g_{ij,k}). \quad (27)$$

Символы Γ_{ij}^{m*} уже не являются связностью: $\Gamma_{ij}^{m*} \neq \Gamma_{ij}^m$.

2.8 Тензор Римана-Кристоффеля

Рассмотрим в точке $\mathcal{M} \in \mathbb{L}^n$ произвольный вектор $b = b^k e_k$ из $T_{\mathbb{L}^n}$ и вычислим его ковариантную производную относительно связности Γ_{ij}^{m*} :

$$\nabla_i^* b^k = \frac{\partial b^k}{\partial X^i} + \Gamma_{si}^k b^s. \quad (28)$$

Вычислим вторую ковариантную производную:

$$\begin{aligned} \nabla_j^* \nabla_i^* b^k &= \frac{\partial}{\partial X^j} + \Gamma_{mj}^* \nabla_i^* b^m - \Gamma_{ij}^m \nabla_m b^k = \frac{\partial^2 b^k}{\partial X^j \partial X^i} + \frac{\partial \Gamma_{si}^k}{\partial X^j} b^s + \Gamma_{si}^* \frac{\partial b^s}{\partial X^j} + \\ &+ \Gamma_{mj}^* \left(\frac{\partial b^m}{\partial X^i} + \Gamma_{mj}^* b^s \right) - \Gamma_{ij}^m \left(\frac{\partial b^k}{\partial X^m} + \Gamma_{sm}^* b^s \right). \end{aligned} \quad (29)$$

Поменяем теперь индексы i и j и образуем разность:

$$\nabla_j^* \nabla_i^* b^k - \nabla_i^* \nabla_j^* b^k = \left(\frac{\partial \Gamma_{si}^k}{\partial X^j} - \frac{\partial \Gamma_{sj}^k}{\partial X^i} + \Gamma_{mj}^* \Gamma_{si}^m - \Gamma_{mi}^* \Gamma_{sj}^m \right) b^s - (\Gamma_{ij}^m - \Gamma_{ji}^m) \nabla_m^* b^k. \quad (30)$$

Коэффициенты, стоящие в первой скобке, обозначим следующим образом:

$$R_{jis}^{*k} = \Gamma_{si,j}^k - \Gamma_{sj,i}^k + \Gamma_{si}^* \Gamma_{mj}^* + \Gamma_{sj}^* \Gamma_{mi}^*. \quad (31)$$

Здесь, как и ранее, $\Gamma_{si,j}^k = \partial \Gamma_{si}^k / \partial X^j$.

Теорема 3. Система коэффициентов R_{jis}^{*k} , образованная по формуле (31), представляет собой компоненты тензора ${}^4_* R$ четвёртого ранга из пространства $\mathcal{T}_n^{(31)}(T_M \mathbb{L}^n)$:

$${}^4_* R = R_{jis}^{*k} e^j \otimes e^i \otimes e^s \otimes e_k \quad (32)$$

Определение 13. Тензор (32) называют тензором кривизны пространства \mathbb{L}^n относительно связности Γ_{ij}^m (или тензором Римана-Кристоффеля).

2.9 Тензор Риччи

В пространстве \mathbb{W}^n из тензора Римана-Кристоффеля можно образовать несколько тензоров второго ранга. Свёртка транспонированного тензора Римана-Кристоффеля 4R с метрическим тензором образует тензор второго ранга:

$$\mathcal{R}^* = {}^4R^{(2314)} \cdot \cdot E, \quad (33)$$

называемый тензором Риччи. Компоненты этого тензора имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^* &= R_{ji}^* e^j \otimes R_{i_1 i_2 i_3 i_4}^* e^{i_2} \otimes e^{i_3} \otimes e^{i_1} \otimes e^{i_4} \cdot \cdot e^{i_4} \cdot \cdot e^k \otimes e_k = \\ &= R_{i_1 i_2 i_3 i_4}^* \delta_k^{i_1} g^{i_4 k} e^{i_2} \otimes e^{i_3} = R_{kji}^* e^j \otimes e^i, \end{aligned} \quad (34)$$

то есть

$$R_{ji}^* = R_{kji}^*{}^k = R_{nji}^*{}^k \delta_k^n. \quad (35)$$

Подставляя в (35) выражение (31) для компонент тензора Римана-Кристоффеля, получаем:

$$R_{ji}^* = \frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial X^k} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^k}{\partial X^j} + \Gamma_{ij}^* \Gamma_{nk}^* - \Gamma_{ik}^* \Gamma_{nj}^*. \quad (36)$$

Аналогичным образом можно ввести тензор Риччи относительно символов Γ_{ij}^k :

$$R_{ji} = R_{kji}{}^k = R_{nji}{}^k \delta_k^n, \quad (37)$$

и

$$R_{ji} = \Gamma_{ij,k}^k - \Gamma_{ik,j}^k + \Gamma_{ij}^m \Gamma_{mk}^k - \Gamma_{ik}^m \Gamma_{kj}^k. \quad (38)$$

2.10 Тензор Эйнштейна

Тензоры Эйнштейна $\overset{*}{G}$ и G образуются из тензоров Риччи $\overset{*}{\mathcal{R}}$ и \mathcal{R} следующим образом:

$$\overset{*}{G} = \overset{*}{\mathcal{R}} - \frac{1}{2} \overset{*}{\mathcal{R}} E, \quad G = \mathcal{R} - \frac{1}{2} \mathcal{R} E, \quad (39)$$

где $\overset{*}{\mathcal{R}} = \overset{*}{R} \cdot \cdot E$ и $\mathcal{R} = R \cdot \cdot E$ – свертки тензоров Риччи с метрическим тензором.

Тензор Эйнштейна играет важную роль в общей теории относительности (см., например, [2], [3], [4]).

3 Трактриса и её эволюта

Практическую часть курсовой работы будем выполнять в среде Maple18.

Определение 14. Трактриса (линия влечения) – плоская кривая, для которой длина отрезка касательной от точки касания до точки пересечения с фиксированной прямой является постоянной величиной. Её параметрическое описание имеет вид:

$$x(t) = a(\cos t + \ln \tan \frac{t}{2}), \quad (40)$$

$$y(t) = \sin t, \quad (41)$$

$$0 < t < \pi. \quad (42)$$

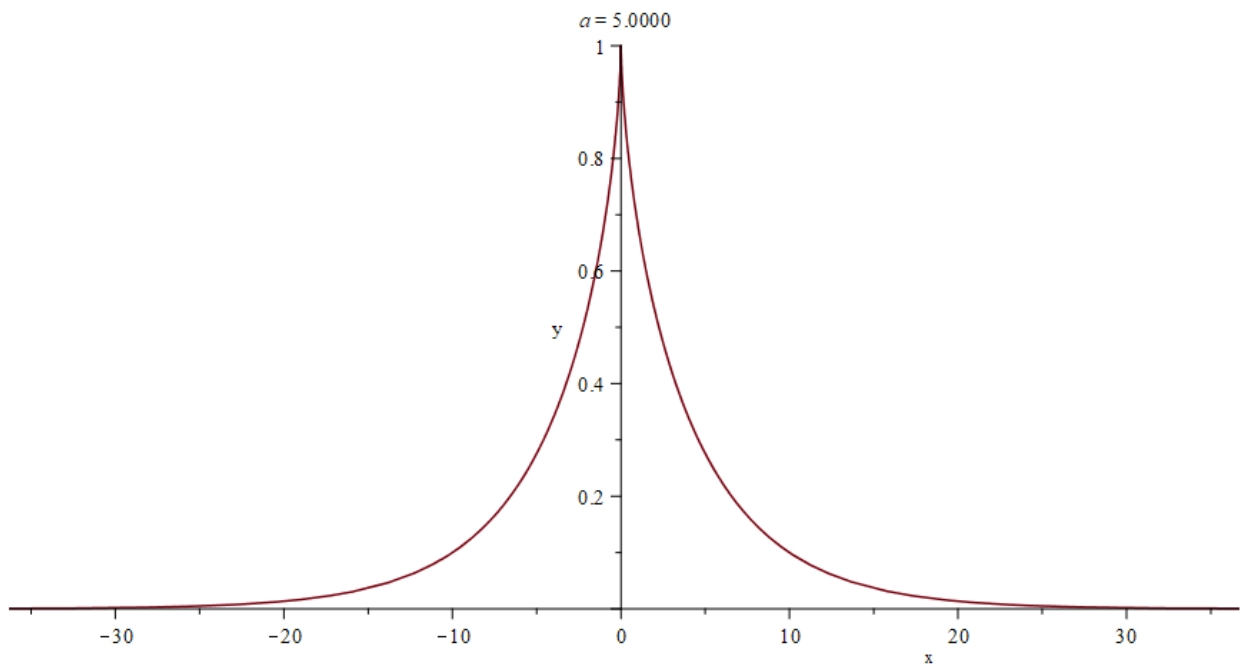


Рисунок 1 – График трактрисы при $a = 5$.

Если линия задана параметрически, то её эволюта имеет уравнение:

$$X(t) = x(t) - y' \frac{x^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'}, \quad (43)$$

$$Y(t) = y(t) + x' \frac{x^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'}. \quad (44)$$

Подставляя уравнение трактрисы в (43) и (44) и сокращая, получим:

$$X(t) = \frac{-\cos(t)^3 a^2 + \ln\left(\frac{1-\cos(t)}{\sin(t)}\right) a^2 + \cos(t)^3 + \cos(t) a^2 - \cos(t)}{a}, \quad (45)$$

$$Y(t) = \frac{1 + (a^2 - 1) (\cos(t))^4}{\sin(t)}. \quad (46)$$

Избавляясь в полученной системе от t придём к уравнению эволюты, зависящей только от x :

$$evoluta(x) = a \cdot \cosh \frac{x}{a}. \quad (47)$$

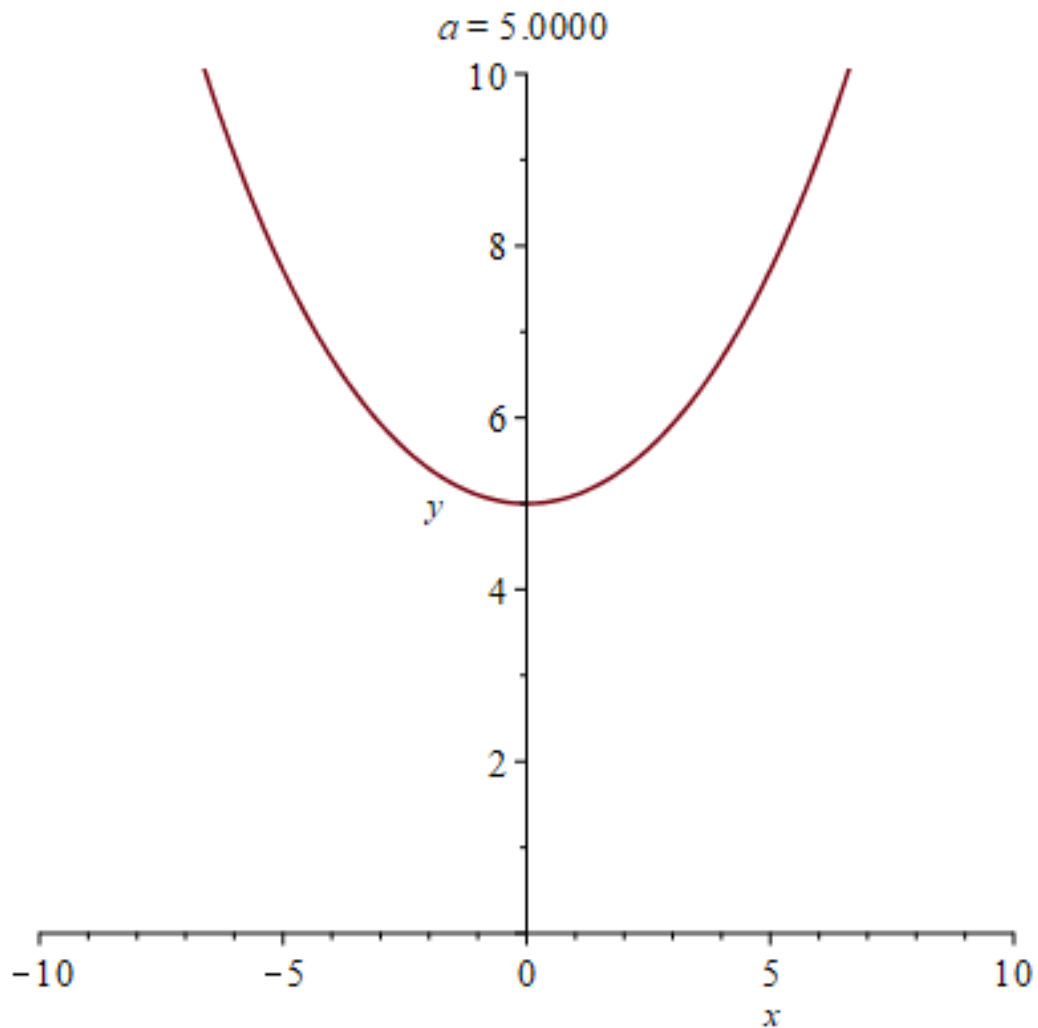


Рисунок 2 – График эволюты трактрисы при $a = 5$.

Получили, что эволютой трактрисы является цепная линия.

Определение 15. Цепная линия — линия, форму которой принимает гибкая однородная нерастяжимая тяжёлая нить или цепь (отсюда название) с закреплёнными концами в однородном гравитационном поле. Является плоской кривой. Её уравнением является (47).

Вращая полученную эволюту вокруг оси OX получаем поверхность вращения, называемую катеноидом. Катеноид можно задать параметрически:

$$x_{kat}(u, v) = a \cdot \cosh \frac{v}{a} \cos u, \quad (48)$$

$$y_{kat}(u, v) = a \cdot \cosh \frac{v}{a} \sin u, \quad (49)$$

$$z_{kat}(u, v) = u, \quad (50)$$

где $-\pi \leq u \leq \pi$ и $v \in \mathbb{R}$.

Построим полученную поверхность.

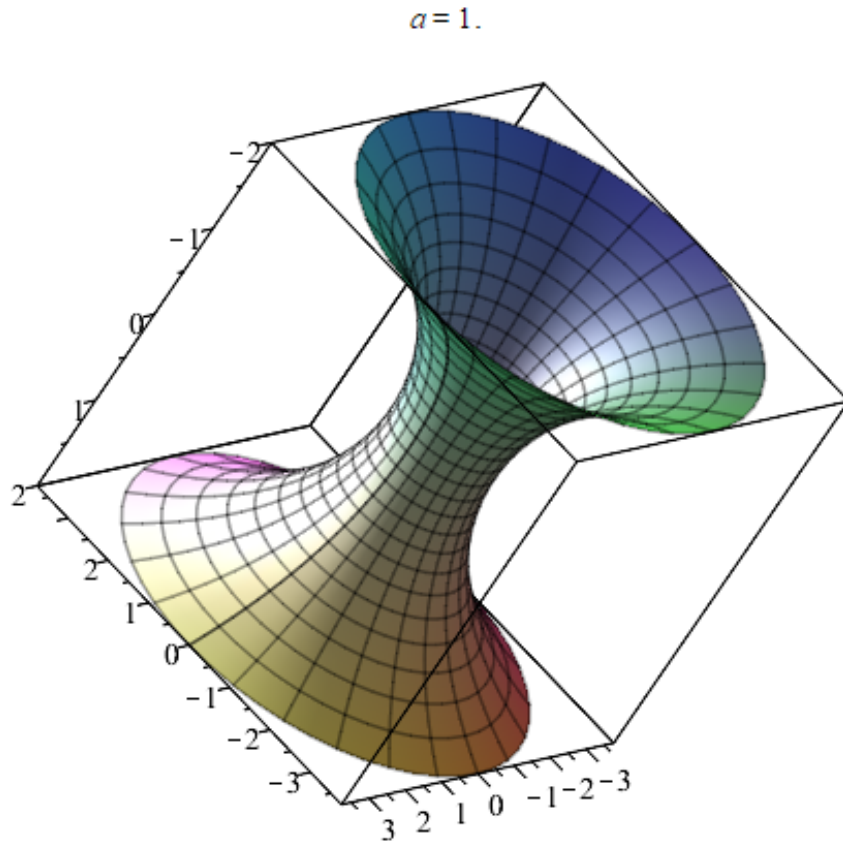


Рисунок 3 – Катеноид при $a = 1$.

Для вычисления Гауссовой и средней кривизн воспользуемся формулами из ([5]), позволяющими написать универсальный программный код.

Пусть K – Гауссова кривизна, а H – средняя. Введём дополнительные обозначения:

$$E = x_u \cdot x_u, \quad (51)$$

$$F = x_u \cdot x_v, \quad (52)$$

$$G = x_v \cdot x_v, \quad (53)$$

$$l = U \cdot x_{uu}, \quad (54)$$

$$m = U \cdot x_{uv}, \quad (55)$$

$$n = U \cdot x_{vv}, \quad (56)$$

где U – единичный вектор нормали к поверхности:

$$U = \frac{x_u \times x_v}{|x_u \times x_v|}. \quad (57)$$

Тогда Гауссова кривизна будет рассчитываться как

$$K = \frac{lm - m^2}{EG - F^2}, \quad (58)$$

а средняя кривизна:

$$H = \frac{Gl + En - 2Fm}{2(EG - F^2)}. \quad (59)$$

Рассчитаем введенные выше величины для нашего катеноида (48)-(50):

$$\begin{aligned}
E &= x_u \cdot x_u = \\
&= \left(1, \sinh \frac{u}{a} \cos v, \sinh \frac{u}{a} \sin v\right) \cdot \left(1, \sinh \frac{u}{a} \cos v, \sinh \frac{u}{a} \sin v\right) = \\
&= 1 + \sinh^2 \frac{u}{a} \cdot \cos^2 v + \sinh^2 \frac{u}{a} \cdot \sin^2 v.
\end{aligned} \tag{60}$$

$$\begin{aligned}
F &= x_u \cdot x_v = \\
&= \left(1, \sinh \frac{u}{a} \cos v, \sinh \frac{u}{a} \sin v\right) \cdot \left(0, -a \cosh \frac{u}{a} \sin v, a \cosh \frac{u}{a} \cos v\right) = \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{61}$$

$$\begin{aligned}
G &= x_v \cdot x_v = \\
&= \left(0, -a \cosh \frac{u}{a} \sin v, a \cosh \frac{u}{a} \cos v\right) \cdot \left(0, -a \cosh \frac{u}{a} \sin v, a \cosh \frac{u}{a} \cos v\right) = \\
&= a^2 \cosh^2 \frac{u}{a} \sin^2 v + a^2 \cosh^2 \frac{u}{a} \cos^2 v.
\end{aligned} \tag{62}$$

$$\begin{aligned}
U &= \frac{x_u \times x_v}{|x_u \times x_v|} = \\
&= \frac{(0, -a \cosh \frac{u}{a} \sin v, a \cosh \frac{u}{a} \cos v) \times (0, -a \cosh \frac{u}{a} \sin v, a \cosh \frac{u}{a} \cos v)}{|(0, -a \cosh \frac{u}{a} \sin v, a \cosh \frac{u}{a} \cos v) \times (0, -a \cosh \frac{u}{a} \sin v, a \cosh \frac{u}{a} \cos v)|} = \\
&= \frac{(a \cosh \frac{u}{a} \sinh \frac{u}{a}, -a \cosh \frac{u}{a} \cos v, -a \cosh \frac{u}{a} \sin v)}{\sqrt{\cosh^4 \frac{u}{a} a^2}} = \\
&= \left(\frac{\sinh \frac{u}{a}}{\cosh \frac{u}{a}}, -\frac{\cos v}{\cosh \frac{u}{a}}, -\frac{\sin v}{\cosh \frac{u}{a}}\right).
\end{aligned} \tag{63}$$

$$\begin{aligned}
l &= U \cdot x_{uu} = \\
&= \left(\frac{\sinh \frac{u}{a}}{\cosh \frac{u}{a}}, -\frac{\cos v}{\cosh \frac{u}{a}}, -\frac{\sin v}{\cosh \frac{u}{a}} \right) \cdot \left(0, \frac{\cosh \frac{u}{a} \cos v}{a}, \frac{\cosh \frac{u}{a} \sin v}{a} \right) = \\
&= -\frac{1}{a}.
\end{aligned} \tag{64}$$

$$\begin{aligned}
m &= U \cdot x_{uv} = \\
&= \left(\frac{\sinh \frac{u}{a}}{\cosh \frac{u}{a}}, -\frac{\cos v}{\cosh \frac{u}{a}}, -\frac{\sin v}{\cosh \frac{u}{a}} \right) \cdot \left(0, -\sinh \frac{u}{a} \sin v, \sinh \frac{u}{a} \cos v \right) = \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{65}$$

$$\begin{aligned}
n &= U \cdot x_{vv} = \\
&= \left(\frac{\sinh \frac{u}{a}}{\cosh \frac{u}{a}}, -\frac{\cos v}{\cosh \frac{u}{a}}, -\frac{\sin v}{\cosh \frac{u}{a}} \right) \cdot \left(0, -a \cosh \frac{u}{a} \cos v, -a \cosh \frac{u}{a} \sin v \right) = \\
&= a.
\end{aligned} \tag{66}$$

Теперь мы можем рассчитать Гауссову кривизну по формуле (58):

$$K = \frac{lm - m^2}{EG - F^2} = -\frac{1}{\cosh^4 \frac{u}{a} a^2}. \tag{67}$$

И среднюю кривизну по формуле (59):

$$H = \frac{Gl + En - 2Fm}{2(EG - F^2)} = 0. \tag{68}$$

Также из [5] известно, что скалярная кривизна равняется удвоенной гауссовой кривизне для римановых многообразий. Так что, обозначая ска-

лярную кривизну за SK имеем:

$$SK = 2K = -\frac{2}{\cosh^4 \frac{u}{a} a^2}. \quad (69)$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение хотелось бы сказать, что в ходе курсовой работы было проведено исследование гауссовых, скалярных и средних кривизн поверхности, полученной вращением эволюты трактрисы вокруг оси OX .

Также были решены следующие задачи:

- ознакомление с римановыми пространствами;
- нахождение гауссовой кривизны;
- нахождение скалярной кривизны;
- нахождение средней кривизны.

Кроме того, в результате выполнения работы были получены сведения о таких понятиях, как трактриса, эволюта, цепная линия, катеноид.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Димитриенко Ю.И. Тензорное исчисление: Учеб.пособие для вузов. М.:Высш, шк., 2001, 575 с.
2. Петров А.З. Пространства Эйнштейна. М.: Физматгиз, 1961, 464 с.
3. Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Наука, 1967, 664 с.
4. Шипов Г.И. Теория физического вакуума. НТ-Центр, 1993, 362 с.
5. Oprea J.F. Differential geometry and its applications. London: Prentice-Hall International, 1997, 387 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ А