Теорема 4. *В каждом конечном интервале оси λ находится конечное число характеристических чисел. Число m характеристических чисел, лежащих в интервале $-l < \lambda < l$, определяется неравенством*

$$m \leqslant l^2 B^2.$$

В том случае, когда ядро $K(x, t)$ интегрального уравнения (1) является функцией Грина некоторой однородной задачи Штурма—Лиувилля, нахождение характеристических чисел и собственных функций сводится к решению указанной задачи Штурма—Лиувилля.

Пример 4. Найти характеристические числа и собственные функции однородного уравнения

$$\varphi(x) - \lambda \int\limits_0^\pi K(x, t)\,\varphi(t)\,dt = 0,$$

где

$$K(x, t) = \begin{cases} \cos x \sin t, & 0 \leqslant x \leqslant t, \\ \cos t \sin x, & t \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$$

Решение. Данное уравнение представим в виде

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_0^x K(x, t)\,\varphi(t)\,dt + \lambda \int\limits_x^\pi K(x, t)\,\varphi(t)\,dt,$$

или

$$\varphi(x) = \lambda \sin x \int\limits_0^x \varphi(t)\,\cos t\,dt + \lambda \cos x \int\limits_x^\pi \varphi(t)\,\sin t\,dt. \tag{15}$$

Дифференцируя обе части (15), находим

$$\varphi'(x) = \lambda \cos x \int\limits_0^x \varphi(t)\,\cos t\,dt + \lambda \sin x \cos x\,\varphi(x) -$$

$$- \lambda \sin x \int\limits_x^\pi \varphi(t) \sin t\,dt - \lambda \sin x\,\cos x\,\varphi(x),$$

или

$$\varphi'(x) = \lambda \cos x \int\limits_0^x \varphi(t)\,\cos t\,dt - \lambda \sin x \int\limits_x^\pi \varphi(t) \sin t\,dt. \tag{16}$$

Повторное дифференцирование дает

$$\varphi''(x) = -\lambda \sin x \int\limits_0^x \varphi(t)\,\cos t\,dt + \lambda \cos^2 x\,\varphi(x) -$$

$$-\lambda \cos x \int_x^{\pi} \varphi(t) \sin t \, dt + \lambda \sin^2 x \, \varphi(x) =$$

$$= \lambda\varphi(x) - \left[\lambda \sin x \int_0^x \varphi(t) \cos t \, dt + \lambda \cos x \int_x^{\pi} \varphi(t) \sin t \, dt\right].$$

Выражение в квадратных скобках равно $\varphi(x)$, так что

$$\varphi''(x) = \lambda\varphi(x) - \varphi(x).$$

Из равенств (15) и (16) находим, что

$$\varphi(\pi) = 0, \quad \varphi'(0) = 0.$$

Итак, данное интегральное уравнение сводится к следующей краевой задаче:

$$\varphi''(x) - (\lambda - 1)\,\varphi(x) = 0, \tag{17}$$

$$\varphi(\pi) = 0, \quad \varphi'(0) = 0. \tag{18}$$

Здесь возможны три случая.

1) $\lambda - 1 = 0$, или $\lambda = 1$. Уравнение (17) принимает вид $\varphi''(x) = 0$. Его общее решение будет $\varphi(x) = C_1 x + C_2$. Используя краевые условия (18), получим для нахождения неизвестных C_1 и C_2 систему

$$\begin{cases} C_1\pi + C_2 = 0, \\ C_1 = 0, \end{cases}$$

которая имеет единственное решение $C_1 = 0$, $C_2 = 0$, а следовательно, интегральное уравнение имеет только тривиальное решение

$$\varphi(x) \equiv 0.$$

2) $\lambda - 1 > 0$, или $\lambda > 1$. Общее решение уравнения (17) имеет вид

$$\varphi(x) = C_1 \operatorname{ch} \sqrt{\lambda - 1}\, x + C_2 \operatorname{sh} \sqrt{\lambda - 1}\, x,$$

откуда

$$\varphi'(x) = \sqrt{\lambda - 1}\left(C_1 \operatorname{sh} \sqrt{\lambda - 1}\, x + C_2 \operatorname{ch} \sqrt{\lambda - 1}\, x\right).$$

Для нахождения значений C_1 и C_2 краевые условия дают систему

$$\begin{cases} C_1 \operatorname{ch} \pi\sqrt{\lambda - 1} + C_2 \operatorname{sh} \pi\sqrt{\lambda - 1} = 0, \\ C_2 = 0. \end{cases}$$

Система имеет единственное решение $C_1 = 0$, $C_2 = 0$. Интегральное уравнение имеет тривиальное решение $\varphi(x) \equiv 0$. Итак, при $\lambda > 1$ интегральное уравнение не имеет характеристических чисел, а значит, и собственных функций.

3) $\lambda - 1 < 0$, или $\lambda < 1$. Общее решение уравнения (17) будет

$$\varphi(x) = C_1 \cos \sqrt{1 - \lambda}\, x + C_2 \sin \sqrt{1 - \lambda}\, x.$$

Отсюда находим, что

$$\varphi'(x) = \sqrt{1 - \lambda}\left(-C_1 \sin \sqrt{1 - \lambda}\, x + C_2 \cos \sqrt{1 - \lambda}\, x\right).$$

Краевые условия (18) в этом случае дают для нахождения C_1 и C_2 систему

$$\begin{cases} C_1\cos\pi\sqrt{1-\lambda}+C_2\sin\pi\sqrt{1-\lambda}=0, \\ \sqrt{1-\lambda}\,C_2=0. \end{cases} \tag{19}$$

Определитель этой системы

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix} \cos\pi\sqrt{1-\lambda} & \sin\pi\sqrt{1-\lambda} \\ 0 & \sqrt{1-\lambda} \end{vmatrix}.$$

Полагая его равным нулю, получим уравнение для нахождения характеристических чисел:

$$\begin{vmatrix} \cos\pi\sqrt{1-\lambda} & \sin\pi\sqrt{1-\lambda} \\ 0 & \sqrt{1-\lambda} \end{vmatrix}=0, \tag{20}$$

или $\sqrt{1-\lambda}\cos\pi\sqrt{1-\lambda}=0$. По предположению $\sqrt{1-\lambda}\neq 0$, поэтому $\cos\pi\sqrt{1-\lambda}=0$. Отсюда находим, что $\pi\sqrt{1-\lambda}=\dfrac{\pi}{2}+\pi n$, где n — любое целое число. Все корни уравнения (20) даются формулой

$$\lambda_n=1-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2.$$

При значениях $\lambda=\lambda_n$ система (19) принимает вид

$$\begin{cases} C_1\cdot 0=0, \\ C_2=0. \end{cases}$$

Она имеет бесконечное множество ненулевых решений

$$\begin{cases} C_1=C, \\ C_2=0, \end{cases}$$

где C — произвольная постоянная. Значит, исходное интегральное уравнение имеет бесконечное множество решений вида

$$\varphi(x)=C\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x,$$

которые являются собственными функциями этого уравнения.

Итак, характеристические числа и собственные функции данного интегрального уравнения

$$\lambda_n=1-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2,\quad \varphi_n(x)=\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x,$$

где n — любое целое число. ▷

Пример 5. Показать, что интегральное уравнение с несимметричным ядром

$$K(x,t)=\sin\pi x\cos\pi t,\quad 0\leqslant x,\quad t\leqslant 1, \tag{21}$$

не имеет характеристических чисел.