МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

МГТУ им Н.Э.Баумана

Факультет ФН
Кафедра вычислительной математики и математической физики

Соколов Арсений Андреевич

Лабораторная работа №1 по численным методам

3 курс, группа ФН11-53Б
Вариант 9

Преподаватель
____________ В. А. Кутыркин
«___» _______ 2019 г.

Москва, 2019 г.

Задание 1.1

Задание. Определить число обусловленности матрицы рассматриваемой СЛАУ и найти относительную погрешность в решении приближенной СЛАУ. Исходная СЛАУ:

$$\begin{cases} 276.5 \cdot x_1 + 275 \cdot x_2 + 275 \cdot x_3 = 826.5 \\ 275.55 \cdot x_1 + 275.947 \cdot x_2 + 275 \cdot x_3 = 826.5 \\ 274.45 \cdot x_1 + 275 \cdot x_2 + 277.053 \cdot x_3 = 826.5 \end{cases}$$

Приближенная СЛАУ:

$$\begin{cases} 276.5 \cdot x_1 + 275 \cdot x_2 + 275 \cdot x_3 = 834.765 \\ 275.55 \cdot x_1 + 275.947 \cdot x_2 + 275 \cdot x_3 = 818.235 \\ 274.45 \cdot x_1 + 275 \cdot x_2 + 277.053 \cdot x_3 = 834.765 \end{cases}$$

Решение.
По исходной СЛАУ имеем соответствующие матрицы:

$$A = \begin{bmatrix} 276.500 & 275.000 & 275.000 \\ 275.550 & 275.947 & 275.000 \\ 274.450 & 275.000 & 277.053 \end{bmatrix}$$

$$^{>}b = \begin{bmatrix} 826.500 \\ 826.500 \\ 826.500 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0.514 & -0.351 & -0.162 \\ -0.540 & 0.704 & -0.162 \\ 0.026 & -0.351 & 0.325 \end{bmatrix}$$

$$^{>}b + {}^{>}\Delta b = \begin{bmatrix} 834.765 \\ 818.235 \\ 834.765 \end{bmatrix}$$

Число обусловленности:

$$cond(A) = ||A|| \cdot ||A^{-1}|| = 826.503 \cdot 1.406193 = 1162.223$$

Таким образом, матрица нашей СЛАУ плохо обусловлена.

Найдём относительную погрешность в решении приближенной СЛАУ.

$$A \cdot {}^{>}x = {}^{>}b$$

$$^{>}x = A^{-1} \cdot {}^{>}b = \begin{bmatrix} 0.9994325 \\ 1.0025986 \\ 0.9979720 \end{bmatrix}$$

Ошибка $^{>}\Delta x = A^{-1} \cdot {}^{>}\Delta b = \begin{bmatrix} 5.8145124 \\ -11.6221892 \\ 5.8060158 \end{bmatrix}$

Относительная погрешность приближенного решения:

$$\frac{||{}^{>}\Delta x||}{||{}^{>}x||} = \frac{11.62219}{1.002599} = 11.59207$$

$$||{}^{>}\Delta b|| = 8.265$$

$$||{}^{>}b|| = 826.5$$

Тогда:

$$\frac{||{}^{>}\Delta x||}{||{}^{>}x||} = 11.59207 \leq cond(A) \cdot \frac{||{}^{>}\Delta b||}{||{}^{>}b||} = 1162.223 \cdot 0.01 = 11.62223$$

Результаты.

Число обусловленности $cond(A) = ||A|| \cdot ||A^{-1}|| = 1162.223 > 10^2$, значит, матрица СЛАУ плохо обусловлена.

Относительная погрешность $\frac{||{}^{>}\Delta x||}{||{}^{>}x||} = 11.59207$ очень велика вследствие плохой обусловленности матрицы СЛАУ.

Задание 1.2

Задание.

Исходные данные:

- $N = 9$
- $\lambda + \alpha = 0.6$
- $F = \arctan(x)$
- $a = 0$
- $b = 1$

Согласно этой таблице, на отрезке $[a;b]$ выбрана центрально равномерная сетка с десятью узлами:
$s_1 = \tau_1 = a + h/2$, $s_2 = \tau_2 = \tau_1 + h$, $\dots$, $s_1 0 = \tau_1 0 = \tau_9 + h$, имеющая шаг $h = \frac{b-a}{10}$

Требуется решить приближенную СЛАУ:

$$(E + \lambda A)\,{}^{>}x = {}^{>}b + {}^{>}\Delta b,$$

$\lambda \in \mathbb{R}$,

$E \in GL(\mathbb{R}, 10)$ – единичная матрица,

$A = (a^i_j)^{10}_{10} \in GL(\mathbb{R}, 10)$,

${}^{>}b = [b^1, \cdots b^{10}\rangle \in {}^{>}\mathbb{R}^{10}$.

Причём:

$$a^i_j = F(s_i \cdot \tau_j)\frac{b-a}{10}, \qquad \text{для} i, j = \overline{1, 10}$$

$${}^{>}b = (E + \lambda A) \cdot {}^{>}x$$

$${}^{>}x = [1, \cdots 1\rangle \in {}^{>}\mathbb{R}^{10}$$

Согласно СЛАУ из задания 1.1, приближенная СЛАУ определяется только погрешностью ${}^{>}b = [b^1, \cdots b^{10}\rangle = 0.01 \cdot [b^1, -b^2, \cdots b^9, -b^{10}\rangle \in {}^{>}\mathbb{R}^{10}$ в правой части исходной СЛАУ.

Требуется найти число обусловленности матрицы рассматриваемой СЛАУ и относительную погрешность в решении приближенной СЛАУ. Кроме того, найти решение СЛАУ, которая получается из исходной делением каждого $i-$го уравнения ($i = \overline{1, 10}$) на число $b^i + \Delta b^i$. После этого сравнить абсолютную погрешность в решении получившейся СЛАУ с абсолютной погрешностью в решении приближенной СЛАУ.

Решение.

Матрица A:

$$\begin{bmatrix}
0.0002500 & 0.0007500 & 0.0012499 & 0.0017498 & 0.0022496 & 0.0027493 & 0.0032489 & 0.0037482 & 0.0042474 & 0.0047464 \\
0.0007500 & 0.0022496 & 0.0037482 & 0.0052452 & 0.0067398 & 0.0082314 & 0.0097193 & 0.0112029 & 0.0126816 & 0.0141547 \\
0.0012499 & 0.0037482 & 0.0062419 & 0.0087278 & 0.0112029 & 0.0136643 & 0.0161092 & 0.0185348 & 0.0209385 & 0.0233180 \\
0.0017498 & 0.0052452 & 0.0087278 & 0.0121893 & 0.0156217 & 0.0190174 & 0.0223693 & 0.0256708 & 0.0289162 & 0.0321000 \\
0.0022496 & 0.0067398 & 0.0112029 & 0.0156217 & 0.0199798 & 0.0242624 & 0.0284562 & 0.0325496 & 0.0365330 & 0.0403986 \\
0.0027493 & 0.0082314 & 0.0136643 & 0.0190174 & 0.0242624 & 0.0293749 & 0.0343341 & 0.0391236 & 0.0437311 & 0.0481485 \\
0.0032489 & 0.0097193 & 0.0161092 & 0.0223693 & 0.0284562 & 0.0343341 & 0.0399751 & 0.0453598 & 0.0504761 & 0.0553188 \\
0.0037482 & 0.0112029 & 0.0185348 & 0.0256708 & 0.0325496 & 0.0391236 & 0.0453598 & 0.0512389 & 0.0567538 & 0.0619066 \\
0.0042474 & 0.0126816 & 0.0209385 & 0.0289162 & 0.0365330 & 0.0437311 & 0.0504761 & 0.0567538 & 0.0625668 & 0.0679297 \\
0.0047464 & 0.0141547 & 0.0233180 & 0.0321000 & 0.0403986 & 0.0481485 & 0.0553188 & 0.0619066 & 0.0679297 & 0.0734195
\end{bmatrix}$$

Матрица $E + \lambda A$:

$$\begin{bmatrix}
1.0001425 & 0.0004275 & 0.0007125 & 0.0009974 & 0.0012823 & 0.0015671 & 0.0018518 & 0.0021365 & 0.0024210 & 0.0027055 \\
0.0004275 & 1.0012823 & 0.0021365 & 0.0029898 & 0.0038417 & 0.0046919 & 0.0055400 & 0.0063857 & 0.0072285 & 0.0080682 \\
0.0007125 & 0.0021365 & 1.0035579 & 0.0049748 & 0.0063857 & 0.0077887 & 0.0091822 & 0.0105648 & 0.0119350 & 0.0132912 \\
0.0009974 & 0.0029898 & 0.0049748 & 1.0069479 & 0.0089044 & 0.0108399 & 0.0127505 & 0.0146324 & 0.0164822 & 0.0182970 \\
0.0012823 & 0.0038417 & 0.0063857 & 0.0089044 & 1.0113885 & 0.0138296 & 0.0162200 & 0.0185533 & 0.0208238 & 0.0230272 \\
0.0015671 & 0.0046919 & 0.0077887 & 0.0108399 & 0.0138296 & 1.0167437 & 0.0195704 & 0.0223004 & 0.0249267 & 0.0274447 \\
0.0018518 & 0.0055400 & 0.0091822 & 0.0127505 & 0.0162200 & 0.0195704 & 1.0227858 & 0.0258551 & 0.0287714 & 0.0315317 \\
0.0021365 & 0.0063857 & 0.0105648 & 0.0146324 & 0.0185533 & 0.0223004 & 0.0258551 & 1.0292062 & 0.0323496 & 0.0352868 \\
0.0024210 & 0.0072285 & 0.0119350 & 0.0164822 & 0.0208238 & 0.0249267 & 0.0287714 & 0.0323496 & 1.0356631 & 0.0387200 \\
0.0027055 & 0.0080682 & 0.0132912 & 0.0182970 & 0.0230272 & 0.0274447 & 0.0315317 & 0.0352868 & 0.0387200 & 1.0418491
\end{bmatrix}$$

Матрица $(E + \lambda A)^{-1}$:

$$\begin{bmatrix}
0.999881 & -0.000359 & -0.000599 & -0.000840 & -0.001083 & -0.001327 & -0.001574 & -0.001823 & -0.002073 & -0.002326 \\
-0.000359 & 0.998923 & -0.001797 & -0.002519 & -0.003245 & -0.003975 & -0.004709 & -0.005448 & -0.006189 & -0.006934 \\
-0.000599 & -0.001797 & 0.997004 & -0.004196 & -0.005399 & -0.006603 & -0.007809 & -0.009013 & -0.010216 & -0.011415 \\
-0.000840 & -0.002519 & -0.004196 & 0.994130 & -0.007539 & -0.009199 & -0.010849 & -0.012484 & -0.014102 & -0.015700 \\
-0.001083 & -0.003245 & -0.005399 & -0.007539 & 0.990342 & -0.011750 & -0.013809 & -0.015830 & -0.017806 & -0.019734 \\
-0.001327 & -0.003975 & -0.006603 & -0.009199 & -0.011750 & 0.985755 & -0.016673 & -0.019028 & -0.021300 & -0.023487 \\
-0.001574 & -0.004709 & -0.007809 & -0.010849 & -0.013809 & -0.016673 & 0.980573 & -0.022060 & -0.024566 & -0.026942 \\
-0.001823 & -0.005448 & -0.009013 & -0.012484 & -0.015830 & -0.019028 & -0.022060 & 0.975081 & -0.027598 & -0.030100 \\
-0.002073 & -0.006189 & -0.010216 & -0.014102 & -0.017806 & -0.021300 & -0.024566 & -0.027598 & 0.969603 & -0.032971 \\
-0.002326 & -0.006934 & -0.011415 & -0.015700 & -0.019734 & -0.023487 & -0.026942 & -0.030100 & -0.032971 & 0.964428
\end{bmatrix}$$

Найдём число обусловленности матрицы:
$||E + \lambda A|| = 1.240221$,
$||(E + \lambda A)^{-1}|| = 1.134036$,
$cond(E + \lambda A) = ||E + \lambda A|| \cdot ||(E + \lambda A)^{-1}|| = 1.406456$

Таким образом, матрица СЛАУ задания 1.2 хорошо обусловлена.

Решение СЛАУ: $E + \lambda A) \cdot {}^{>}x = {}^{>}b$, согласно условию имеет вид:

$${}^{>}x = [1, \cdots 1\rangle \in {}^{>}\mathbb{R}^{10}$$

Поэтому

$${}^{>}b = \begin{bmatrix} 1.014244 \\ 1.042592 \\ 1.070529 \\ 1.097816 \\ 1.124256 \\ 1.149703 \\ 1.174059 \\ 1.197271 \\ 1.219321 \\ 1.240221 \end{bmatrix}, \qquad ||{}^{>}b|| = 1.240221$$

Вычислим погрешность решения СЛАУ:

$${}^{>}b = [b^1, \cdots b^{10}\rangle = 0.01 \cdot [b^1, -b^2, \cdots b^9, -b^{10}\rangle \in {}^{>}\mathbb{R}^{10}$$

$$
{}^{>}b = \begin{bmatrix} 0.010142 \\ -0.010426 \\ 0.010705 \\ -0.010978 \\ 0.011243 \\ -0.011497 \\ 0.011741 \\ -0.011973 \\ 0.012193 \\ -0.012402 \end{bmatrix}, \qquad ||{}^{>}b|| = 0.01240221
$$

$$
{}^{>}b + {}^{>}\Delta b = \begin{bmatrix} 1.024387 \\ 1.032166 \\ 1.081235 \\ 1.086838 \\ 1.135499 \\ 1.138206 \\ 1.185800 \\ 1.185298 \\ 1.231514 \\ 1.227819 \end{bmatrix}, \qquad ||{}^{>}b + {}^{>}\Delta b|| = 1.231514
$$

Решение приближенной СЛАУ:

$$
{}^{>}x + {}^{>}\Delta x = (E + \lambda A)^{-1} \cdot ({}^{>}b + {}^{>}\Delta b)
$$

$$
{}^{>}x + {}^{>}\Delta x = \begin{bmatrix} 1.010158 \\ 0.989620 \\ 1.010780 \\ 0.989125 \\ 1.011372 \\ 0.988657 \\ 1.011916 \\ 0.988223 \\ 1.012407 \\ 0.987828 \end{bmatrix}, \qquad {}^{>}\Delta x = \begin{bmatrix} 0.010158 \\ -0.010380 \\ 0.010780 \\ -0.010875 \\ 0.011372 \\ -0.011343 \\ 0.011916 \\ -0.011777 \\ 0.012407 \\ -0.012172 \end{bmatrix}
$$

$$
||{}^{>}x|| = 1, \qquad ||{}^{>}\Delta x|| = 0.01240714
$$

Относительная погрешность: $\frac{||{}^{>}\Delta x||}{||{}^{>}x||} = 0.01240714$

Действительно:
$\frac{||^{>}\Delta x||}{||^{>}x||} = 0.01240714 \leq cond(E + \lambda A)\frac{||^{>}\Delta b||}{||^{>}b||} = 1.406456 \cdot 0.01 = 0.01406456$

Так как СЛАУ хорошо обусловлена, то и погрешность небольшая.

Найдём СЛАУ, которая получается делением каждой $i-$ой строки исходной матрицы на $b^i + \Delta b^i (i = \overline{1, 10})$. Получим матрицу B:

$$B = \begin{bmatrix} 0.976333 & 0.000417 & 0.000696 & 0.000974 & 0.001252 & 0.001530 & 0.001808 & 0.002086 & 0.002363 & 0.002641 \\ 0.000414 & 0.970079 & 0.002070 & 0.002897 & 0.003722 & 0.004546 & 0.005367 & 0.006187 & 0.007003 & 0.007817 \\ 0.000659 & 0.001976 & 0.928159 & 0.004601 & 0.005906 & 0.007203 & 0.008492 & 0.009771 & 0.011038 & 0.012293 \\ 0.000918 & 0.002751 & 0.004577 & 0.926493 & 0.008193 & 0.009974 & 0.011732 & 0.013463 & 0.015165 & 0.016835 \\ 0.001129 & 0.003383 & 0.005624 & 0.007842 & 0.890700 & 0.012179 & 0.014284 & 0.016339 & 0.018339 & 0.020279 \\ 0.001377 & 0.004122 & 0.006843 & 0.009524 & 0.012150 & 0.893286 & 0.017194 & 0.019593 & 0.021900 & 0.024112 \\ 0.001562 & 0.004672 & 0.007743 & 0.010753 & 0.013679 & 0.016504 & 0.862528 & 0.021804 & 0.024263 & 0.026591 \\ 0.001802 & 0.005387 & 0.008913 & 0.012345 & 0.015653 & 0.018814 & 0.021813 & 0.868310 & 0.027292 & 0.029770 \\ 0.001966 & 0.005870 & 0.009691 & 0.013384 & 0.016909 & 0.020241 & 0.023363 & 0.026268 & 0.840967 & 0.031441 \\ 0.002203 & 0.006571 & 0.010825 & 0.014902 & 0.018755 & 0.022352 & 0.025681 & 0.028739 & 0.031536 & 0.848536 \end{bmatrix}$$

Матрица B^{-1}:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1.024264 & -0.000370 & -0.000647 & -0.000913 & -0.001229 & -0.001511 & -0.001866 & -0.002160 & -0.002553 & -0.002856 \\ -0.000367 & 1.031055 & -0.001942 & -0.002738 & -0.003685 & -0.004525 & -0.005584 & -0.006457 & -0.007622 & -0.008514 \\ -0.000613 & -0.001854 & 1.077996 & -0.004561 & -0.006131 & -0.007516 & -0.009259 & -0.010683 & -0.012581 & -0.014016 \\ -0.000860 & -0.002600 & -0.004537 & 1.080458 & -0.008560 & -0.010470 & -0.012864 & -0.014797 & -0.017367 & -0.019276 \\ -0.001109 & -0.003350 & -0.005838 & -0.008193 & 1.124533 & -0.013374 & -0.016375 & -0.018763 & -0.021929 & -0.024230 \\ -0.001360 & -0.004103 & -0.007140 & -0.009998 & -0.013342 & 1.121993 & -0.019771 & -0.022553 & -0.026232 & -0.028837 \\ -0.001612 & -0.004861 & -0.008443 & -0.011791 & -0.015680 & -0.018978 & 1.162763 & -0.026148 & -0.030254 & -0.033080 \\ -0.001867 & -0.005623 & -0.009745 & -0.013568 & -0.017975 & -0.021657 & -0.026159 & 1.155762 & -0.033987 & -0.036957 \\ -0.002124 & -0.006388 & -0.011046 & -0.015327 & -0.020219 & -0.024244 & -0.029131 & -0.032712 & 1.194080 & -0.040482 \\ -0.002383 & -0.007157 & -0.012343 & -0.017063 & -0.022408 & -0.026733 & -0.031948 & -0.035677 & -0.040604 & 1.184143 \end{bmatrix}$$

$$^{>}x = B^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1.000000 \\ 1.000000 \\ 1.000000 \\ 1.000000 \\ 1.000000 \\ 1.000000 \\ 1.000000 \\ 1.000000 \\ 1.000000 \\ 1.000000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.010158 \\ 0.989620 \\ 1.010780 \\ 0.989125 \\ 1.011372 \\ 0.988657 \\ 1.011916 \\ 0.988223 \\ 1.012407 \\ 0.987828 \end{bmatrix}$$

$$
{}^{>}\Delta x = \begin{bmatrix} -0.010158 \\ 0.010380 \\ -0.010780 \\ 0.010875 \\ -0.011372 \\ 0.011343 \\ -0.011916 \\ 0.011777 \\ -0.012407 \\ 0.012172 \end{bmatrix}, \qquad ||{}^{>}\Delta x|| = 0.01240714
$$

Результаты. Число обусловленности $cond(A) = ||A|| \cdot ||A^{-1}|| = 1.406456 < 10^2$, значит матрица СЛАУ хорошо обусловлена. Следствием этого является малая относительная погрешность при решении приближенной СЛАУ: $\frac{||{}^{>}\Delta x||}{||{}^{>}x||} = 0.01240714 \leq cond(E+\lambda A)\frac{||{}^{>}\Delta b||}{||{}^{>}b||} = 1.406456 \cdot 0.01 = 0.01406456$ Кроме того, при делении каждого $i-$того уравнения $i = \overline{1, 10}$ исходной СЛАУ на число $b^i + \Delta b^i$, абсолютная погрешность не изменилась: $||{}^{>}\Delta x|| = 0.01240714$