*Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования*

***«Московский государственный технический университет***

***имени Н.Э. Баумана***

***(национальный исследовательский университет)» (МГТУ им. Н.Э. Баумана)***

ФАКУЛЬТЕТ «Фундаментальные науки»

КАФЕДРА «Вычислительная математика и математическая физика» (ФН-11)

**Р А С Ч Ё Т Н О - П О Я С Н И Т Е Л Ь Н А Я З А П И С К А**

### к курсовой работе на тему:

Дифференциальная геометрия и основы тензорного исчисления.

Дисциплина: Дифференциальная геометрия и основы тензорного исчисления

Студент

А.А. Юн

(Подпись, дата) (И.О.Фамилия)

Руководитель курсовой работы

Е.В. Осипов

(Подпись, дата) (И.О.Фамилия)

Москва, 2019

### СПИСОК ИСПОЛНИТЕЛЕЙ

Руководитель курсовой Е.В. Осипов работы подпись, дата

Исполнитель А.А. Юн

подпись, дата

Нормоконтролер С.С. Кудрявцева

подпись, дата

### РЕФЕРАТ

Отчет 32 с., 5 источников.

Д И Ф Ф Е Р Е Н Ц И А Л Ь Н А Я Г Е О М Е Т Р И Я , Р И М А Н О В Ы ПРОСТРАНСТВА, ГАУССОВА КРИВИЗНА, СКАЛЯРНАЯ КРИВИЗНА, ГОСТ 7.32-2017.

Цель работы – исследование гуассовых и скалярных кривизн однополостного гиперболоида и мнимого однополосного гиперболоида .

В результате работы был произведена устная защита курсовой работы, а также выполнен письменный отчет в соответствии со стандартами оформления научно-технической документации.

### СОДЕРЖАНИЕ с.

ВВЕДЕНИЕ 5

1. Римановы пространства 6
   1. Элементарное многообразие 6
   2. Касательное пространство 7
   3. Определение риманова пространства 9
2. Свойства римановых пространств 10
   1. Коэффициенты связанности в 10

.......

* 1. Определение аффинной связности 10
  2. Тензоры в элементарном многообразии 11
  3. Определение тензора в римановом пространстве 12
  4. Ковариантное дифференцирование тензоров в
  5. Ковариантное дифференцирование тензоров в

.....................................13

.....................................13

.......

.......

* 1. Риманово пространство с аффинной связностью 14
  2. Тензор Римана-Кристоффеля 14
  3. Тензор Риччи 16
  4. Тензор Эйнштейна 17

1. [Практическая часть 18](#_TOC_250005)
   1. [Гауссова кривизна однополостного гиперболоида 18](#_TOC_250004)
   2. [Гауссова кривизна мнимого однополостного гиперболоида 23](#_TOC_250003)
   3. [Скалярная кривизна однополостного гиперболоида 27](#_TOC_250002)
   4. Пределы изменения гауссовой кривизны однополостного гиперболоида.28 ЗАКЛЮЧЕНИЕ 30

[СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ 31](#_TOC_250001)

[ПРИЛОЖЕНИЕ А 32](#_TOC_250000)

### ВВЕДЕНИЕ

Курсовая работа – вид учебной работы обучающегося, в которой присутствуют элементы самостоятельного научного исследования. Работа рассчитана на закрепление и применение полученных навыков в процессе учёбы.

Целью курсовой работы является исследование гуассовых и скалярных кривизн однополостного гиперболоида и мнимого однополосного гиперболоида .

Задачами курсовой работы являются:

* ознакомление с римановыми пространствами;
* нахождение гауссовых кривизн;
* нахождение скалярной кривизны;
* нахождение пределов изменения экстремумов гауссовой крвизны.

1. Римановы пространства

В механике и особенно в релятивистской физике тензоры широко при- меняют в *𝑛*-мерных римановых пространствах, являющихся более общими, чем евклидовы [1]. Дадим определение этих пространств, а затем покажем, как конструируются тензоры в них. Начнём с основополагающего понятия римановых пространств - элементарного многообразия.

* 1. Элементарное многообразие

Определение 1. Элементарным *𝑛*-мерным многообразием называют такое множество *𝑀 𝑛*, каждой точке которого взаимнооднозначно поставлен в соответствие упорядоченный набор чисел (*𝑋*1*...𝑋𝑛*) из некоторой связной области *𝒟 ∈* R*𝑛*, т.е, задано биективное отображение *𝜙* : *𝑀 𝑛 −→ 𝒟 ∈* R*𝑛*.

Координатами точки *𝒨 ∈ 𝑀 𝑛* в системе координат *𝒟* называют коор- динаты *𝑋𝑖 ∈* R*𝑛* ее образа *𝜙*(*𝒨*), изменяющиеся в области *𝒟 ∈* R*𝑛*. Если для множества *𝑀 𝑛* имеется другое биективное отображение *𝜙′* : *𝑀 𝑛 −→*

*𝒟 ∈* R*𝑛*, то координаты точки *𝒨* в системах координат *𝒟* и *𝒟′*, связаны соотношениями:

*𝑋′𝑖* = *𝑋′𝑖*(*𝑋𝑗* )*, 𝑖, 𝑗* = 1 *. . . 𝑛,* (1)

которые предполагают достаточное число раз дифференцируемыми и невырожденными, т.е. det *∂𝑋′𝑖 ̸*= 0*, ∀𝑋𝑖 ∈ 𝒟*. Введём обозначения для якобиевых матриц преобразования, а также для их производных:

*∂𝑋𝑗*

(︁ )︁

*𝑄𝑖 ≡*

*𝑗*

(︂ )︂

*∂𝑋′𝑖*

*∂𝑋𝑗*

*, 𝑃 𝑖 ≡*

*∂𝑋𝑖*

*∂𝑋′𝑗*

*𝑖*

*𝑗𝑘*

*, 𝑃 ≡*

*∂*2*𝑋𝑖*

*,* (2)

*∂𝑋′𝑗 ∂𝑋′𝑘*

и кроме того будем использовать обозначения для частных производ-

*𝑗*

(︂ )︂

ных:

*∂𝑓*

*∂𝑓 𝑗*

*∂𝑋𝑖 ≡ 𝑓,𝑖,*

*∂𝑋′𝑖 ≡ 𝑓|𝑖* = *𝑃 𝑖 𝑓,𝑖.* (3)

Примером двумерного (*𝑛* = 2) элементарного многообразия *𝑀* 2 явля- ются поверхности в R3, на которых определены криволинейные координаты

*𝑋*1*, 𝑋*2 и которые заданы тремя функциями:

*𝑥𝑖* = *𝑥𝑖*(*𝑋*1*, 𝑋*2)*, 𝑖* = 1*,* 2*,* 3*.* (4)

* 1. Касательное пространство

Определение 2. Кривой *𝒧* в многообразии *𝑀 𝑛* называют отображение

*𝒧* : [*𝜉*1*, 𝜉*2] *∈* R1 *−→ 𝑀 𝑛*, которое записывают в виде функции:

*𝑋𝑖* = *𝑋𝑖*(*𝜉*) *∀𝜉 ∈* [*𝜉*1*, 𝜉*2]*, 𝑋𝑖 ∈ 𝑀 𝑛.* (5) Здесь *𝑋𝑖* - координаты точки *𝒨 ∈ 𝑀 𝑛,* [*𝜉*1*, 𝜉*2] - некоторый отрезок из

R1*,* (*𝜉*1 *< 𝜉*2), а функции (5) предполагаем непрерывно дифференцируемы- ми, по крайней мере, два раза.

Зафиксировав значение параметра *𝜉 ∈* [*𝜉*1*, 𝜉*2], получим некоторую точ- ку *𝒨 ∈ 𝒧*, в ней можно вычислить производные от функций (5):

*𝑎𝑖* =

d*𝑋𝑖* d*𝜉*

*.* (6)

Определение 3. Упорядоченный набор (*𝑎*1 *. . . 𝑎𝑛*) производных (6) на- зывают компонентами касательного вектора *𝑎𝑖* в точке *𝒨* кривой *𝒧* в *𝑀 𝑛*.

Если перейти к координатам *𝑋′𝑖* той же точки *𝒨 ∈ 𝒧*, то согласно (1)

7

получаем, что компоненты касательного вектора *𝑎′𝑖* в этой системе коорди-

нат будут иметь вид: *𝑎′𝑖* = d*𝑋′𝑖*

d*𝜉*

и связаны с *𝑎𝑖* тензорным законом:

*𝑎′𝑖* = *𝑄𝑖 𝑎𝑗 .* (7)

*𝑗*

Поскольку через фиксированную точку*𝒨 ∈ 𝑀 𝑛* можно провести раз- личные кривые *𝒧*, то, вообще говоря, в каждой точке *𝒨* имеется множество упорядоченных наборов (*𝑎*1 *. . . 𝐴𝑛*). Определим операции с этими наборами.

Пусть имеется две кривые *𝒧*1 и *𝒧*2, заданные в виде функций *𝑋𝑖* (*𝜉*)*, 𝑋𝑖* (*𝜉*),

1

2

проходящие через точку *𝒧*, тогда можно построить два набора компонент

касательных векторов *𝑎𝑖*

1

= d*𝑋*

= d*𝑋* .

*𝑖*

1

d*𝜉*

и *𝑎𝑖*

*𝑖*

2

2

d*𝜉*

Суммой компонент двух касательных векторов назовём набор

*𝑎𝑖*

1

2

+ *𝑎𝑖* =

d*𝑋𝑖* + *𝑋𝑖*

*,*

1 2 (8)

d*𝜉*

который представляет собой компоненты касательного вектора к кривой

(*𝑋𝑖* + *𝑋𝑖* )(*𝜉*) в данной точке *𝒨*.

1 2

Аналогично определяем произведение компонент *𝑖* на вещественное

число *𝜆*:

*𝜆𝑎𝑖*

= *𝜆*

d*𝑋𝑖* d*𝜉*

d*𝜆𝑋𝑖*

=

d*𝜉*

*.* (9)

Поскольку набор чисел (*𝑎*1*...𝑎𝑛*) является элементом пространства R, то, выбрав базис *𝑒𝑖* в этом пространстве, можно построить сам касательный

*𝑗*

вектор *𝑎* в точке *𝒨* кривой *𝒧* : *𝑎* = *𝑎𝑖𝑒𝑖* = *𝑎′𝑖𝑒′* , где *𝑒′* = *𝑃 𝑒𝑗* - новый базис.

*𝑖*

*𝑖*

*𝑖*

Определение 4. Касательным пространством в данной точке *𝒨* эле- ментарного многообразия *𝑀 𝑛* называют множество касательных векторов

= *𝑎𝑖𝑒𝑖*, построенных ко всевозможным кривым *𝒧*, проходящим через дан- ную точку.

Теорема 1. Касательное пространство в любой точке *𝒨 ∈ 𝑀 𝑛* явля- ется *𝑛*-мерным линейным пространством, которое обозначают как *𝑇𝒨𝑀 𝑛*,

а векторы *𝑒*, образуют базис в нем.

* 1. Определение риманова пространства

Определение 5. Элементарное *𝑛*-мерное многообразие *𝑀 𝑛* называют римановым пространством V*𝑛*, если в каждой точке *𝒨 ∈ 𝑀 𝑛* с координа- тами *𝑋𝑖* задана матрица *𝑔𝑖𝑗 𝑛*-го порядка, которая является

* + 1. симметричной,

2) невырожденной: det(*𝑔*˜*𝑖𝑗* ) *̸*= 0*, ∀𝑋𝑖*,

1. компоненты её являются непрерывно-дифференцируемыми функция- ми,
2. при переходе к другим координатам *𝑋′𝑙* преобразуется по тензорному закону:

*𝑔𝑖𝑗* = *𝑄𝑘 𝑄𝑙 𝑔′*

*.* (10)

*𝑖 𝑗 𝑘𝑙*

Двумерные поверхности в R3, очевидно, можно рассматривать как двумерные римановы пространства V2 с метрической матрицей *𝑔*˜*𝐼𝐽* .

Расстояние в римановом пространстве вводят для бесконечно близких точек *𝒨* и *𝒨′*, имеющих кординаты *𝑋𝑖* и *𝑋𝑖* + *𝑑𝑋𝑖*, и определяют его как

*𝑑𝑠*2 = κ*𝑔𝑖𝑗 𝑑𝑋𝑖𝑑𝑋𝑗 ,* (11)

где *𝜅* – знаковое число, которое выбирают так, чтобы форма (11) была по- ложительной.

Риманово пространство называют собственно римановым, если мет- рическая матрица *𝑔𝑖𝑗 , ∀𝑋𝑖 ∈ 𝒟* является положительно-определённой, в противном случае говорят о псевдоримановых пространствах.

1. Свойства римановых пространств

Рассмотрим некоторые свойства римановых пространств, которые по- надобятся нам для введения тензора Эйнштейна, чтобы указать связь рима- новых пространств с общей теорией относительности.

* 1. Коэффициенты связанности в V*𝑛*

Поскольку в каждой точке *𝒨*(*𝑋𝑖*) *∈* V*𝑛* введена метрическая матрица

*𝑔𝑖𝑗*(*𝑋𝑖*) компоненты которой, согласно п.3 определения 5, являются непре- рывно дифференцируемыми функциями, то можно вычислить производные

*∂𝑔𝑖𝑗*

*∂𝑋𝑘*

и образовать из них следующие объекты:

Γ*𝑖𝑗𝑘* =

1

(*𝑔𝑖𝑘,𝑗* + *𝑔𝑗𝑘,𝑖 − 𝑔𝑖𝑗,𝑘*)*.* (12)

2

Определение 6. Функции Γ*𝑖𝑗𝑘* определённые по формулам (12), назы- вают коэффициентами связности первого рода в V*𝑛*. Коэффициенты связно- сти второго рода вводим с помощью обратной матрицы *𝑔𝑖𝑗* :

Γ*𝑚* = *𝑔𝑚𝑝*Γ*𝑖𝑗𝑝.* (13)

*𝑖𝑗*

* 1. Определение аффинной связности

Определение 7. Элементарное *𝑛*-мерное многообразие *𝑀 𝑛* называют пространством аффинной связности L*𝑛*, если в каждой точке *𝑀 𝑛* с координатами *𝑋𝑖* задана система функций Γ*\*𝑚*, которые

*𝒨 ∈*

*𝑖𝑗*

1. являются непрерывно-дифференцируемыми функциями,
2. при переходе к другим координатам *𝑋′𝑖* преобразуются следующим

образом:

*\*′𝑚 𝑙 𝑞*

*𝑚 \*𝑟*

*𝑚 𝑟*

Γ*𝑖𝑗* = *𝑃 𝑖 𝑃 𝑗 𝑄*

*𝑟* Γ*𝑙𝑞* +*𝑄*

*𝑟𝑃 𝑖𝑗 .* (14)

Функции

Γ*\*𝑚*, заданные в L*𝑛*, называют коэффициентами аффинной

связности (или просто аффинной связностью).

*𝑖𝑗*

* 1. Тензоры в элементарном многообразии

Построим в каждой точке *𝒨 ∈ 𝑀 𝑛* множество наборов касательных векторов:

(*𝑎*1*𝑏*(1)*𝑎*2*𝑏*(2) *. . . 𝑎𝑛𝑏*(*𝑛*) *≡* (*𝑎𝑖𝑏*(*𝑖*))*,* (15)

где *𝑎𝑖 ∈ 𝑇𝒨𝑀 𝑛*, *𝑏*(*𝑖*)*𝑇 \* 𝑀 𝑛*, и введём на этом множестве операции сложения

*𝒨*

и умножения на вещественное число *𝑠*:

(*𝑎𝑖𝑏*(*𝑖*)) + (*𝑎𝑖𝑐*(*𝑖*)) = (*𝑎𝑖*(*𝑏*(*𝑖*) + *𝑐*(*𝑖*)))*,* (16)

(*𝑎𝑖𝑏*(*𝑖*)) + (*𝑑𝑖𝑏*(*𝑖*)) = ((*𝑎𝑖* + *𝑑𝑖*))*𝑏*(*𝑖*))*,* (17)

*𝑠*(*𝑎𝑖𝑏*(*𝑖*)) = ((*𝑠𝑎𝑖*)*𝑏*(*𝑖*)) = (*𝑎𝑖*(*𝑠𝑏*(*𝑖*)))*.* (18)

Определение 8. Тензорным касательным пространством *𝒯𝑛* (*𝑇𝒨𝑀 𝑛*)

(*𝑝𝑞*)

типа *𝑝𝑞*, где *𝑝*+*𝑞* = 2, в точке *𝒨* элементарного многообразия *𝑀 𝑛* называют тензорное произведение касательного пространства *𝑇𝒨𝑀 𝑛* на себя:

*𝑛*

*𝑛*

*𝒯𝑛* (*𝑇𝒨𝑀*

(*𝑝𝑞*)

*𝑛*

) = *𝑇𝒨𝑀*

*⊗ 𝑇𝒨𝑀*

*∀𝒨 ∈ 𝑀*

*𝑛, 𝑝* + *𝑞* = 2*,* (19)

где тензорное произведение вводится как фактор-пространство *𝑛−*ой степе-

ни декартова квадрата

*𝑇𝒨𝑀 ⊗ 𝑇𝒨𝑀* = [(*𝑇𝒨𝑀 × 𝑇𝒨𝑀* ) ] (20)

*𝑛 𝑛 𝑛 𝑛 𝑛*

Базисные диады в *𝒯𝑛* (*𝑇𝒨*

(*𝑝𝑞*)

*𝑀 𝑛*) введём как

*𝑒𝑗 ⊗ 𝑒𝑘* = [*𝑒𝑖*(*𝛿𝑗 𝑒𝑘*)]*,* (21)

*𝑖*

где [ ] – классы эквивалентности соответствующих наборов касательных векторов. Очевидно, что если рассматриваемое многообразие *𝑀* 2 является поверхностью Σ *∈* R3, то базисные диады совпадают с соответствующими диадами *𝜌𝐼 ⊗ 𝜌𝐾* .

Определение 9. Тензором второго ранга *𝐴*(*𝒨*) типа (*𝑝𝑞*) в точке

*𝒨 ∈ 𝑀 𝑛* называют элемент тензорного произведения касательного про-

странства *𝒯𝑛* (*𝑇𝒨𝑀 𝑛*)*, 𝑝* + *𝑞* = 2.

(*𝑝𝑞*)

Тензор *𝑘−*го ранга *𝐴*(*𝒨*) введём как

*𝑘*

*𝑘𝐴* = *𝐴𝑖 ...𝑖 𝑒 ⊗ . . . ⊗ 𝑒𝑖 ⊗ 𝑒𝑗 ⊗ . . . ⊗ 𝑒𝑗 , 𝑝* + *𝑞* = *𝑘.* (22)

1 *𝑝* 1 *𝑞*

*𝑗*1*...𝑗𝑞 𝑖*1 *𝑝*

* 1. Определение тензора в римановом пространстве

Если в многообразии *𝑀 𝑛* введена метрическая матрица *𝑔𝑖𝑗* то оно ста- новится римановым пространством V, а касательное пространство в каж- дой точке *𝒨 ∈* V*𝑛* - евклидовым (или псевдоевклидовым) *𝑇 𝒨*V*𝑛*. Тогда

используя соглашение о совпадении пространств *𝑇𝒨\**

(*𝑘*)

говорить о тензорном касательном пространстве *𝒯*

V*𝑛* и *𝑇𝒨𝑉 𝑛*, можно

V*𝑛*), заданном на

римановом пространстве V*𝑛*.

*𝑛* (*𝑇𝒨*

* 1. Ковариантное дифференцирование тензоров в V*𝑛*

Рассмотрим в V*𝑛* произвольное поле тензора *𝑘*-гo ранга:

*𝑗*1*...𝑗𝑞* **e***𝑖*1 *⊗ . . . ⊗* **e***𝑖𝑝 ⊗* **e** *⊗ . . . ⊗* **e** *, 𝑝* + *𝑞* = *𝑘,* (23) причём его компоненты Ω*𝑖*1*...𝑖𝑝* будем считать непрерывно дифференци-

*𝑗 ...𝑗*

*𝑘*Ω (︀*𝑋𝑖*)︀ = Ω*𝑖*1*...𝑖𝑝 𝑗*1 *𝑗��*

1 *𝑞*

руемыми функциями координат *𝑋𝑖* точки *𝒨 ∈* V*𝑛*

Определение 10. Ковариантной производной от компонент тензора

*𝑗*1*...𝑗𝑞 𝑘*-го ранга Ω, определённого в V , называют следующий объект:

Ω*𝑖*1*...𝑖𝑝 𝑘 𝑛*

*𝑖*1*...𝑖𝑝*

*𝛻* Ω

*𝑖*

*𝑗*1*...𝑗𝑞*

= Ω*𝑖*1*...𝑖𝑝*

*∂𝑋𝑖*

*∂*

*𝑗*1*...𝑗𝑞*

*𝑝*

*𝑖𝑠*

+ ∑︁ Γ

*𝑚𝑖*

*𝑠*=1

Ω*𝑖*1*...𝑖𝑝*=*𝑚...𝑖𝑝*

*𝑗*1*...𝑗𝑞*

+ *. . .*

*𝑞*

*. . . −* ∑︁ Γ Ω

*𝑚 𝑖*1*...𝑖𝑝*

*𝑗𝑠𝑖*

*𝑗*1*...𝑗𝑞* =*𝑚...𝑖𝑞*

*, 𝑝* + *𝑞* = *𝑘.* (24)

*𝑠*=1

* 1. Ковариантное дифференцирование тензоров в L*𝑛*

Наличие связанности Γ*𝑚* в L*𝑛* означает, что в этом пространстве опре- делена операция ковариантного дифференцирования.

*𝑖𝑗*

Определение 11. Ковариантной производной от компонент тензора

*𝑘𝐴 ∈ 𝒯 𝑝𝑞* (*𝑇𝒨*L*𝑛*)*, 𝑘* = *𝑝* + *𝑞*, (или иначе ковариантной производной от- носительно связности Γ*𝑚*) называют следующий объект:

*𝑛*

*𝑖𝑗*

*\**

*𝛻𝑖𝐴*

*𝑖*1*...𝑖𝑝*

*𝑞*

*𝑗*1*...𝑗𝑞* +

∑︁*𝑠*=1

*\*𝑖,*

Γ*𝑚𝑖𝐴*

*𝑖*1*...𝑖𝑠*=*𝑚...𝑖𝑝*

*𝑝*

*𝑗*1*...𝑗𝑞 −*

∑︁*𝑠*=1

*\*𝑚*

*𝑖,𝑖*

Γ *𝐴*

*𝑖*1*...𝑖𝑝*

*𝑗*1*...𝑗𝑠*=*𝑚...𝑗𝑞 .* (25)

Теорема 2. Ковариантная производная от компонент тензора *𝑘−*го ран- га является компонентами тензора (*𝑘*+1)*−*го ранга *𝛻⊗𝑘𝐴* в L*𝑛*, называемого

градиентом тензора:

*𝑖*

*\**

*𝛻 ⊗*

*𝑘𝐴* = *𝐴𝑖*1*...𝑖𝑝*

*𝑗*1*...𝑗𝑞 𝑒*

*⊗ 𝑒𝑖*1 *⊗ . . . ⊗ 𝑒𝑖𝑝 ⊗ 𝑒*

*𝑗*1

*⊗ . . . 𝑒*

*𝑗𝑞*

*, 𝑝* + *𝑞* = *𝑘.* (26)

* 1. Риманово пространство с аффинной связностью

В римановом пространстве V*𝑛* у нас была определена метрика *𝑔𝑖𝑗* (ей соответствовала вполне определённая связность Γ*𝑚*). Можно однако постро- ить такое пространство, в котором будет одновременно определена и мет- рика *𝑔𝑖𝑗* , и некоторая «самостоятельная» связность Γ*\*𝑚*, для которой уже не

*𝑖𝑗*

*𝑖𝑗*

имеют места соотношения (12).

Определение 12. Элементарное *𝑛−*мерное многообразие *𝑀 𝑛* называ- ют римановым пространством аффинной связностью W*𝑛*, если в каждой

Γ ,

точке *𝒨 ∈ 𝑀 𝑛* с координатами *𝑥𝑖* заданы две системы функций *𝑔𝑖𝑗* и

*\*𝑚*

*𝑖𝑗*

вообще говоря, не связанные никакими соотношениями и удовлетворяющие свойствам 1-4 из определения 5 и 1,2 из определения 7 соответственно.

Поскольку в W*𝑛* определена метрическая матрица *𝑔𝑖𝑗* , то можно обра-

зовать из неё символы Γ*𝑚* по формуле (13)

*𝑖𝑗*

Γ*𝑚* = 1 *𝑔𝑚𝑘*(*𝑔*

*𝑖𝑗*

2

*𝑖𝑘,𝑗*

+ *𝑔*

*− 𝑔*

)*.* (27)

Символы Γ*𝑚* уже не являются связностью: Γ*\*𝑚 ̸*= Γ*𝑚*.

*𝑗𝑘,𝑖*

*𝑖𝑗,𝑘*

*𝑖𝑗*

*𝑖𝑗*

*𝑖𝑗*

* 1. Тензор Римана-Кристоффеля

Рассмотрим в точке L*𝑛* произвольный вектор *𝑏* = *𝑏𝑘𝑒𝑘* из *𝑇*L*𝑛* и вычислим его ковариантную производную относительно связности Γ*\*𝑚*:

*𝒨 ∈*

*𝑖𝑗*

*\* 𝑘*

*∂𝑏𝑘*

*\*𝑘 𝑠*

*𝛻𝑖𝑏*

= *∂𝑋𝑖* + Γ*𝑠𝑖𝑏*

*.* (28)

Вычислим вторую ковариантную производную:

*\* \* ∂ \* \* \* \**

*𝑘*

*𝑘*

*𝑚*

*𝑚*

*∂*2*𝑏𝑘*

*\**

*∂ 𝑘*

*𝑘*

Γ*𝑠𝑖*

*𝑠*

*\* ∂𝑏𝑠*

*𝛻𝑗 𝛻𝑖𝑏*

= *∂𝑋𝑗* + Γ*𝑚𝑗 𝛻𝑖𝑏*

*−* Γ*𝑖𝑗 𝛻𝑚𝑏*

= *∂𝑋𝑗 ∂𝑋𝑖* + *∂𝑋𝑗 𝑏*

+ Γ*𝑠𝑖 ∂𝑋𝑗* +

*𝑘\**

*∂𝑏𝑚*

*𝑘\* 𝑠*

*\*𝑚*

*∂𝑏𝑘*

*𝑘\* 𝑠*

+ Γ*𝑚𝑗* (*∂𝑋𝑖* + Γ*𝑚𝑗 𝑏*

*𝑘*

) *−* Γ*𝑖𝑗* (*∂𝑋𝑚* + Γ*𝑠𝑚𝑏* )*.*

(29)

Поменяем теперь индексы *𝑖* и *𝑗* и образуем разность:

*\* \* 𝑘*

*\* \* 𝑘*

*𝑘*

*𝑠𝑖*

*∂*Γ

*\**

*𝑘*

*𝑠𝑗*

*∂*Γ

*\**

*𝑘\**

*\*𝑚*

*\*𝑘*

*\*𝑚 𝑠*

*\*𝑚*

*\*𝑚 \* 𝑘*

*𝛻𝑗 𝛻𝑖𝑏*

*∂𝑋𝑗 ∂𝑋𝑖*

*−𝛻𝑖𝛻𝑗 𝑏*

= ( *−* +Γ*𝑚𝑗* Γ*𝑠𝑖 −*Γ*𝑚𝑖*Γ*𝑠𝑗* )*𝑏*

*−*(Γ*𝑖𝑗 −*Γ*𝑗𝑖* )*𝛻𝑚𝑏*

*.* (30)

Коэффициенты, стоящие в первой скобке, обозначим следующим об- разом:

*𝑅 \* 𝑘* = Γ*𝑘\**

*𝑗𝑖𝑠*

*𝑠𝑖,𝑗*

*𝑘\**

*−* Γ

*𝑠𝑗,𝑖*

+ Γ*\*𝑚*Γ*𝑘\**

+ Γ*\*𝑚*

*\*𝑘*

*.* (31)

Здесь, как и ранее, Γ*𝑘* = *∂*Γ*𝑘* ⧸︀*∂𝑋𝑗* .

*𝑠𝑖*

*𝑚𝑗*

*𝑠𝑗* Γ*𝑚𝑖*

*𝑠𝑖,𝑗*

*𝑠𝑖*

Теорема 3. Система коэффициентов

*\**

*𝑅𝑗𝑖𝑠*

*𝑘*, образованная по формуле

4

*\**

(31), представляет собой компоненты тензора *𝑅*

четвёртого ранга из про-

странства *𝒯𝑛* (*𝑇𝒨*

(31)

L*𝑛*):

4 *\* \* 𝑘 𝑗*

*𝑖 𝑠*

*𝑅* = *𝑅𝑗𝑖𝑠 𝑒*

*⊗ 𝑒*

*⊗ 𝑒*

*⊗ 𝑒𝑘* (32)

Определение 13. Тензор (32) называют тензором кривизны простран- ства L*𝑛* относительно связности Γ*\*𝑚* (или тензором Римана-Кристоффеля).

*𝑖𝑗*

* 1. Тензор Риччи

В пространстве W*𝑛* из тензора Римана-Кристоффеля можно образо- вать несколько тензоров второго ранга. Свёртка транспонированного тензо- ра Римана-Кристоффеля 4*𝑅* с метрическим тензором образует тензор вто- рого ранга:

*\**

*𝒭* =

4*𝑅*

(2314)

*· ·𝐸,* (33)

называемый тензором Риччи. Компоненты этого тензора имеют следующий вид:

*\* \* 𝑗 \**

*𝑖*2

*𝑖*3

*𝑖*1

*𝑖*4

*𝑖*4 *𝑘*

*𝒭* = *𝑅𝑗𝑖𝑒*

*⊗ 𝑅𝑖*1*𝑖*2*𝑖*3*𝑖*4 *𝑒*

*⊗ 𝑒*

*⊗ 𝑒*

*⊗ 𝑒*

*· ·𝑒*

*· ·𝑒*

*⊗ 𝑒𝑘* =

(34)

= *𝑅\**

*\**

*𝛿𝑖*1 *𝑔𝑖*4*𝑘𝑒𝑖*2 *⊗ 𝑒𝑖*3 = *𝑅*

*𝑖*1*𝑖*2*𝑖*3*𝑖*4

*𝑘*

*𝑘𝑗𝑖*

*𝑘𝑒𝑗 ⊗ 𝑒𝑖,*

то есть

*𝑅\**

*𝑗𝑖*

*\**

= *𝑅𝑘𝑗𝑖*

*𝑘 \**

*𝑛𝑗𝑖*

= *𝑅*

*𝑘𝛿𝑛.* (35)

Подставляя в (35) выражение (31) для компонент тензора Римана- Кристоффеля, получаем:

*𝑘*

*\**

*\* ∂ 𝑘*

*𝑗𝑖*

*\**

*∂ 𝑘 \* \* \* \**

*𝑅* =

Γ*𝑖𝑗*

*−*

*−* Γ Γ

*∂𝑋𝑘*

*𝑖𝑗*

*𝑛𝑘*

*𝑛𝑗*

Γ*𝑖𝑘*

*∂𝑋𝑗*

+ Γ*𝑛* Γ*𝑘*

*𝑛 𝑘*

*𝑖𝑘*

*.* (36)

Аналогичным образом можно ввести тензор Риччи относительно сим- волов Γ*𝑘* :

*𝑖𝑗*

*𝑅𝑗𝑖* = *𝑅𝑘𝑗𝑖𝑘* = *𝑅𝑛𝑗𝑖𝑘𝛿𝑛,* (37)

*𝑘*

и

*𝑅𝑗𝑖* = Γ*𝑘 −* Γ

*𝑘*

*𝑖𝑗,𝑘*

*𝑖𝑘,𝑗*

+ Γ*𝑚*Γ*𝑘*

*𝑚 𝑘*

*𝑖𝑘*

*.* (38)

* 1. Тензор Эйнштейна

*−* Γ Γ

*𝑖𝑗*

*𝑚𝑘*

*𝑘𝑗*

Тензоры Эйнштейна следующим образом:

*𝐺\**

и *𝐺* образуются из тензоров Риччи *\**

и *𝒭*

*𝐺\**

*𝒭*

1 1

= *− 𝐸, 𝐺* = *𝒭 − 𝒭𝐸,* (39)

*\**

*\**

*𝒭* 2 *𝒭* 2

где *𝒭* = *𝑅\**

тензором.

* *·𝐸* и *𝒭* = *𝑅 · ·𝐸* – свертки тензоров Риччи с метрическим

Тензор Эйнштейна играет важную роль в общей теории относитель- ности (см., например, [2], [3], [4]).

### Практическая часть

### Гауссова кривизна однополостного гиперболоида

Рассмотрим однополостный гиперболоид

*x*2 *y*2 *z*2

+

−

*a*2 *b*2 *c*2

# = 1. (40)

Определение. Пусть -открытая область в двумерном пространстве ℝ2,

тогда поверхностью ∑

в трехмерном пространстве ℝ3

называют

отображение

∑ : *ω* → ℝ3 , которое задаст с помощью вектор-функции

*x* = *x*(*X*1, *X*2), (*X*1, *X*2) ∈ *ω* ⊂ ℝ2 или с помощью трех числовых функций

*xi* = *xi*(*X*1, *X*2), *i* = 1,2,

, зависящих от двух аргументов

*X*1 и *X*2.

Зададим поверхность с трех числовых функций

*xi* = *xi*(*X*1, *X*2),

*i* = 1,2,

, зависящих от двух аргументов

*X*1 и *X*2.

Пусть *X*1 = *u*, *X*2 = *v*, тогда гиперболоид задается следующими тремя функциями:

*x* = *a* ⋅ *chu* ⋅ *cosv*, *y* = *b* ⋅ *chu* ⋅ *sinv*, *x* = *c* ⋅ *shu* .

# (41)

*x*

∂

Введем два локальных вектора базиса *ρi* = ∂*Xi*

на поверхности:

*x*

∂

*ρ*1 =

= ∂*x* ⋅ *e* + ∂*y* ⋅ *e* + ∂*z* ⋅ *e* = (42)

∂*X*1

∂*X*1 ∂*X*1 ∂*X*1

= *a* ⋅ *shu* ⋅ *cosv* ⋅ *e*1 + *b* ⋅ *shu* ⋅ *sinv* ⋅ *e*2 + *c* ⋅ *chu* ⋅ *e*3,

1 2 3

*x*

∂

*ρ*2 =

= ∂*x* ⋅ *e* + ∂*y* ⋅ *e* + ∂*z* ⋅ *e* = (43)

∂*X* 2

∂*X* 2 ∂*X* 2 ∂*X* 2

= − *a* ⋅ *chu* ⋅ *sinv* ⋅ *e*1 + *b* ⋅ *chu* ⋅ *cosv* ⋅ *e*2 .

1 2 3

Введем метрическую матрицу поверхности:

*gij* = *ρi* ⋅ *ρj*, (44)

*g*11 = *ρ*1 ⋅ *ρ*1 = *a*2 ⋅ *sh*2*u* ⋅ *cos*2*v* + *b*2 ⋅ *sh*2*u* ⋅ *sin*2*v* + *c*2 ⋅ *ch*2*u*, (45)

*g*12 = *ρ*1 ⋅ *ρ*2 = − *a*2 ⋅ *shu* ⋅ *chu* ⋅ *cosv* ⋅ *sinv* + (46)

+*b*2 ⋅ *shu* ⋅ *chu* ⋅ *cosv* ⋅ *sinv*,

*g*21 = *ρ*2 ⋅ *ρ*1 = − *a*2 ⋅ *shu* ⋅ *chu* ⋅ *cosv* ⋅ *sinv* + (47)

+*b*2 ⋅ *shu* ⋅ *chu* ⋅ *cosv* ⋅ *sinv*,

*g*22 = *ρ*2 ⋅ *ρ*2 = *a*2 ⋅ *ch*2*u* ⋅ *sin*2*v* + *b*2 ⋅ *ch*2*u* ⋅ *cos*2*v* . (48)

Определитель метрической матрицы *gij*:

*g* = *det* (*gij*) = *g*11 ⋅ *g*22 − *g*2

12

# = (49)

= (((*c*2(−*a*2 + *b*2))*cos*2*v* + *a*2(*b*2 + *c*2))*ch*2*u* − *a*2 ⋅ *b*2)*ch*2*u* .

Обозначим вторую производную от радиус-вектора как:

*ρij*

= ∂*ρi*

∂*Xj*

= ∂2*x*

∂*Xi*∂*Xj*

# , (50)

*~~ρ~~*11

= ∂*ρ*1

∂*X*1

= ∂2*x*

∂*X*1∂*X*1

= ∂2*x*

∂*X*1∂*X*1

* *~~e~~*1

+ ∂2*y*

∂*X*1∂*X*1

* *~~e~~*2

+ ∂2*z*

∂*X*1∂*X*1

* *~~e~~*3

# = (51)

= *a* ⋅ *chu* ⋅ *cosv* ⋅ *e*1 + *b* ⋅ *chu* ⋅ *sinv* ⋅ *e*2 + *c* ⋅ *shu* ⋅ *e*3,

*~~ρ~~*12

= ∂*ρ*1

∂*X* 2

= ∂2*x*

∂*X*1∂*X* 2

= ∂2*x*

∂*X*1∂*X* 2

* *~~e~~*1

+ ∂2*y*

∂*X*1∂*X* 2

* *~~e~~*2

+ ∂2*z*

∂*X*1∂*X* 2

* *~~e~~*3

# = (52)

= − *a* ⋅ *shu* ⋅ *sinv* ⋅ *e*1 + *b* ⋅ *shu* ⋅ *cosv* ⋅ *e*2,

*~~ρ~~*21

= ∂*ρ*2

∂*X*1

= ∂2*x*

∂*X* 2∂*X*1

= ∂2*x*

∂*X* 2∂*X*1

* *~~e~~*1

+ ∂2*y*

∂*X* 2∂*X*1

* *~~e~~*2

+ ∂2*z*

∂*X* 2∂*X*1

* *~~e~~*3

# = (53)

= − *a* ⋅ *shu* ⋅ *sinv* ⋅ *e*1 + *b* ⋅ *shu* ⋅ *cosv* ⋅ *e*2,

*~~ρ~~*22

= ∂*ρ*2

∂*X* 2

= ∂2*x*

∂*X* 2∂*X* 2

= ∂2*x*

∂*X* 2∂*X* 2

* *~~e~~*1

+ ∂2*y*

∂*X* 2∂*X* 2

* *~~e~~*2

+ ∂2*z*

∂*X* 2∂*X* 2

* *~~e~~*3

# = (54)

= − *a* ⋅ *chu* ⋅ *cosv* ⋅ *e*1 − *b* ⋅ *chu* ⋅ *sinv* ⋅ *e*2 .

Найдем коэффициенты *bij* второй квадратичной формы по формуле:

*bij* = 1



*g*

*ρij* ⋅ *ρ*1 × *ρ*2, (55)

*b*11 = 1



*g*

*ρ*11 ⋅ *ρ*1 × *ρ*2 = (56)

= − *a* ⋅ *b* ⋅ *c* ⋅ *chu* ,

(((*c*2(−*a*2 + *b*2))*cos*2*v* + *a*2(*b*2 + *a*2))*ch*2*u* − *a*2 ⋅ *b*2)*ch*2*u*



*g*

*b*12 = 1



*g*

*ρ*12 ⋅ *ρ*1 × *ρ*2 = *b*21 = 1

*ρ*21 ⋅ *ρ*1 × *ρ*2 = 0, (57)

*b*22 = 1



*g*

*ρ*22 ⋅ *ρ*1 × *ρ*2 = (58)

= *a* ⋅ *b* ⋅ *c* ⋅ *ch*3*u* .

(((*c*2(−*a*2 + *b*2))*cos*2*v* + *a*2(*b*2 + *a*2))*ch*2*u* − *a*2 ⋅ *b*2)*ch*2*u*

Если известны коэффициенты квадратичных форм *gij* и *bij* в каком-либо

базисе

*ρi* , то собственные значения *ki*

тензора находим из

характеристического уравнения:

*det* (*bij* − *ki* ⋅ *gij*) = 0, *i* = 1,2; (59)

или в матричной записи

*b*11 − *ki* ⋅ *g*11 *b*12 − *ki* ⋅ *g*12 *b*12 − *ki* ⋅ *g*12 *b*22 − *ki* ⋅ *g*22

# = 0. (60)

Определение. Собственные значения *ki*

главными кривизнами поверхности.

тензора

*k*1 и *k*2

называют

Раскроем определитель (60) и получим квадратное уравнение:

*k*2(*g*11 ⋅ *g*22 − *g*2 ) − *ki*(*b*11 ⋅ *g*22 + *b*22 ⋅ *g*11) + *b*11 ⋅ *b*22 = 0. (61)

*i* 12

Решим квадратное уравнение (61):

*D* = (*b*11 ⋅ *g*22 + *b*22 ⋅ *g*11)2 − 4 ⋅ (*g*11 ⋅ *g*22 − *g*2 )*b*11 ⋅ *b*22 = (62)

12

= (*ch*4*u* ⋅ *b*2(((*a*2 − *b*2)*cos*2*v* + *b*2 + *c*2)2*ch*4*u* − 2((*a*2 + *b*2 + 2*c*2)*cos*2*v*− (((−*a*2*c*2 + *b*2*c*2)*cos*2*v* + *a*2(*b*2 + *c*2))*ch*2*u*−

−*b*2 − *c*2)(*a* − *b*)(*a* + *b*)*ch*2*u* + (*a* − *b*)2(*a* + *b*)2)*c*2*a*2) .

−*a*2*b*2)

Получаем главные кривизны:

*k*1 = 2(*g*11 ⋅ *g*22 − *g*2 )

*b*11 ⋅ *g*22 + *b*22 ⋅ *g*11 + *D*

12

*k*2 = 2(*g*11 ⋅ *g*22 − *g*2 )

*b*11 ⋅ *g*22 + *b*22 ⋅ *g*11 − *D*

12

# , (63)

. (64)

Определение. Произведение главных криивизн называется полной или гауссовой кривизной:

*K* = *k*1

* *k*2

= − *a*2*b*2*c*2

(((−*a*2*c*2 + *b*2*c*2)*cos*2*v* + *a*2(*b*2 + *c*2))*ch*2*u* − *a*2*b*2)2

# (65)

или

*bij K* = *det gij*

=

*b b*11 ⋅ *b*22 *g g*

# = (66)

*a*2*b*2*c*2

=

= −

(((−*a*2*c*2 + *b*2*c*2)*cos*2*v* + *a*2(*b*2 + *c*2))*ch*2*u* − *a*2*b*2)2 .

Перейдем к декартовой системе координат и получим гауссову кривизну гиперболоида:

# *K* = − 1 . (67)

2

4 + 4 + 4 )

*a*

*b*

*c*

### Гауссова кривизна мнимого однополостного гиперболоида

Рассмотрим мнимый однополостный гиперболоид

*x*2 *y*2 *z*2

+

−

*a*2 *b*2 *c*2

# = − 1. (68)

Пусть *X*1 = *u*, *X*2 = *v*, тогда гиперболоид задается следующими тремя функциями:

*x* = *a* ⋅ *shu* ⋅ *cosv*,

*y* = *b* ⋅ *shu* ⋅ *sinv*, (69)

*z* = *c* ⋅ *chu* .

*x*

∂

Введем два локальных вектора базиса *ρi* = ∂*Xi*

на поверхности:

*x*

∂

*ρ*1 =

= ∂*x* ⋅ *e* + ∂*y* ⋅ *e* + ∂*z* ⋅ *e* = (70)

∂*X*1

∂*X*1 ∂*X*1 ∂*X*1

= *a* ⋅ *chu* ⋅ *cosv* ⋅ *e*1 + *b* ⋅ *chu* ⋅ *sinv* ⋅ *e*2 + *c* ⋅ *shu* ⋅ *e*3,

1 2 3

*x*

∂

*ρ*2 =

= ∂*x* ⋅ *e* + ∂*y* ⋅ *e* + ∂*z* ⋅ *e* = (71)

∂*X* 2

∂*X* 2 ∂*X* 2 ∂*X* 2

= − *a* ⋅ *shu* ⋅ *sinv* ⋅ *e*1 + *b* ⋅ *shu* ⋅ *cosv* ⋅ *e*2 .

1 2 3

Введем метрическую матрицу поверхности:

*gij* = *ρi* ⋅ *ρj*, (72)

*g*11 = *ρ*1 ⋅ *ρ*1 = *a*2 ⋅ *ch*2*u* ⋅ *cos*2*v* + *b*2 ⋅ *ch*2*u* ⋅ *sin*2*v* + *c*2 ⋅ *sh*2*u*, (73)

*g*12 = *ρ*1 ⋅ *ρ*2 = − *a*2 ⋅ *shu* ⋅ *chu* ⋅ *cosv* ⋅ *sinv* + (74)

+*b*2 ⋅ *shu* ⋅ *chu* ⋅ *cosv* ⋅ *sinv*,

*g*21 = *ρ*2 ⋅ *ρ*1 = − *a*2 ⋅ *shu* ⋅ *chu* ⋅ *cosv* ⋅ *sinv* + (75)

+*b*2 ⋅ *shu* ⋅ *chu* ⋅ *cosv* ⋅ *sinv*,

*g*22 = *ρ*2 ⋅ *ρ*2 = *a*2 ⋅ *sh*2*u* ⋅ *sin*2*v* + *b*2 ⋅ *sh*2*u* ⋅ *cos*2*v* . (76)

Определитель метрической матрицы *gij*:

*g* = *det* (*gij*) = *g*11 ⋅ *g*22 − *g*2

12

# = (77)

= (((*c*2(−*a*2 + *b*2))*cos*2*v* + *a*2(*b*2 + *c*2))*ch*2*u* + *c*2((*a*2−

−*b*2)*cos*2*v* − *a*2))*sh*2*u* .

Обозначим вторую производную от радиус-вектора как:

*ρij*

= ∂*ρi*

∂*Xj*

= ∂2*x*

∂*Xi*∂*Xj*

# , (78)

*~~ρ~~*11

= ∂*ρ*1

∂*X*1

= ∂2*x*

∂*X*1∂*X*1

= ∂2*x*

∂*X*1∂*X*1

* *~~e~~*1

+ ∂2*y*

∂*X*1∂*X*1

* *~~e~~*2

+ ∂2*z*

∂*X*1∂*X*1

* *~~e~~*3

# = (79)

= *a* ⋅ *shu* ⋅ *cosv* ⋅ *e*1 + *b* ⋅ *shu* ⋅ *sinv* ⋅ *e*2 + *c* ⋅ *chu* ⋅ *e*3,

*~~ρ~~*12

= ∂*ρ*1

∂*X* 2

= ∂2*x*

∂*X*1∂*X* 2

= ∂2*x*

∂*X*1∂*X* 2

* *~~e~~*1

+ ∂2*y*

∂*X*1∂*X* 2

* *~~e~~*2

+ ∂2*z*

∂*X*1∂*X* 2

* *~~e~~*3

# = (80)

= − *a* ⋅ *chu* ⋅ *sinv* ⋅ *e*1 + *b* ⋅ *chu* ⋅ *cosv* ⋅ *e*2,

*~~ρ~~*21

= ∂*ρ*2

∂*X*1

= ∂2*x*

∂*X* 2∂*X*1

= ∂2*x*

∂*X* 2∂*X*1

* *~~e~~*1

+ ∂2*y*

∂*X* 2∂*X*1

* *~~e~~*2

+ ∂2*z*

∂*X* 2∂*X*1

* *~~e~~*3

# = (81)

= − *a* ⋅ *chu* ⋅ *sinv* ⋅ *e*1 + *b* ⋅ *chu* ⋅ *cosv* ⋅ *e*2,

*~~ρ~~*22

= ∂*ρ*2

∂*X* 2

= ∂2*x*

∂*X* 2∂*X* 2

= ∂2*x*

∂*X* 2∂*X* 2

* *~~e~~*1

+ ∂2*y*

∂*X* 2∂*X* 2

* *~~e~~*2

+ ∂2*z*

∂*X* 2∂*X* 2

* *~~e~~*3

# = (82)

= − *a* ⋅ *shu* ⋅ *cosv* ⋅ *e*1 − *b* ⋅ *shu* ⋅ *sinv* ⋅ *e*2 .

Найдем коэффициенты *bij* второй квадратичной формы по формуле

*bij* = 1



*g*

*ρij* ⋅ *ρ*1 × *ρ*2, (83)

*b*11 = 1



*g*

*ρ*11 ⋅ *ρ*1 × *ρ*2 = (84)

= *a* ⋅ *b* ⋅ *c* ⋅ *shu* ,

(((*c*2(−*a*2 + *b*2))*cos*2*v* + *a*2(*b*2 + *c*2))*ch*2*u* + *c*2((*a*2 − *b*2)*cos*2*v* − *a*2))*sh*2*u*

*b*12 = 1



*g*

*ρ*12 ⋅ *ρ*1 × *ρ*2 = *b*21 = 1

*ρ*21 ⋅ *ρ*1 × *ρ*2 = 0, (85)

*b*22 = 1



*g*



*g*

*ρ*22 ⋅ *ρ*1 × *ρ*2 = (86)

= *a* ⋅ *b* ⋅ *c* ⋅ *sh*3*u* .

(((*c*2(−*a*2 + *b*2))*cos*2*v* + *a*2(*b*2 + *c*2))*ch*2*u* + *c*2((*a*2 − *b*2)*cos*2*v* − *a*2))*sh*2*u*

Раскроем определитель (60) и получим квадратное уравнение (61).

Решим квадратное уравнение (61):

*D* = (*b* ⋅ *g* + *b* ⋅ *g* )2 − 4 ⋅ (*g* ⋅ *g*

− *g*2 )*b* ⋅ *b*

= (*a*2*c*2(((*a*2−

# (87)

11 22 22 11

11 22

12 11 22

(((−*a*2*c*2+

−*b*2)*cos*2*v* + *b*2 + *c*2)2*ch*4*u* + (−2(*a* − *b*)2(*a* + *b*)2*cos*4*v* + 2(*a* − *b*)2(*a*+

+*b*2*c*2)*cos*2*v* + *a*2(*b*2 + *c*2))*ch*2*u*+

+*b*2)2*cos*2*v* − −2(*b*2 + *c*2)(*a*2 + *c*2))*ch*2*u* + ((*a*2 − *b*2)*cos*2*u* − *a*2 − *c*2)2)*sh*4*b*2) .

+*c*2((*a*2 − *b*2)*cos*2*v* − *a*2))

Получаем главные кривизны (63), (64), с помощью которых по формуле

(65) и (66) получаем гауссову кривизну:

*K* = *k*1 ⋅ *k*2 = (88)

= *a*2*b*2*c*2

(((−*a*2 + *b*2)*c*2*cos*2*u* + *a*2(*b*2 + *c*2))*ch*2*u* + *c*2((*a*2 − *b*2)*cos*2*v* − *a*2))2

или

*bij K* = *det gij*

=

*b b*11 ⋅ *b*22 *g g*

# = (89)

*a*2*b*2*c*2

=

=

(((−*a*2 + *b*2)*c*2*cos*2*u* + *a*2(*b*2 + *c*2))*ch*2*u* + *c*2((*a*2 − *b*2)*cos*2*v* − *a*2))2 .

Перейдем к декартовой системе координат:

# *K* = 1 . (90)

2

4 + 4 + 4 )

*a*

*b*

*c*

### Скалярная кривизна однополостного гиперболоида

Символы Кристоффеля второго рода вычислим по следующей формуле:

Г*m* = 1 *gmk*

∂*gik*

+ ∂*gjk*

− ∂*gij*

# . (91)

*ij* 2

( ∂*Xj*

∂*Xi*

∂*Xk* )

Получаем ненулевые символы Кристоффеля:

1 *shu* ⋅ *chu*(*cos*2*v*(−*a*2*c*2 + *b*2*c*2) + *a*2(*b*2 + *c*2))

Г

=

11 ((−*a*2*c*2 + *b*2*c*2)*cos*2*v* + *a*2(*b*2 + *c*2))*ch*2*u* − *a*2*b*2

# , (92)

1 *shu* ⋅ *chu* ⋅ *a*2*b*2

Г

= −

22 ((−*a*2*c*2 + *b*2*c*2)*cos*2*v* + *a*2(*b*2 + *c*2))*ch*2*u* − *a*2*b*2

# , (93)

2 (−*a*2*c*2 + *b*2*c*2)*sinv* ⋅ *cosv*

Г

=

11 ((−*a*2*c*2 + *b*2*c*2)*cos*2*v* + *a*2(*b*2 + *c*2))*ch*2*u* − *a*2*b*2

# , (94)

2 2

Г

= Г

12 21

= *shu* , (95)

2 (*a*2*c*2 − *b*2*c*2)*ch*2*u* ⋅ *sinv* ⋅ *cosv*

*chu*

Г

=

22 ((−*a*2*c*2 + *b*2*c*2)*cos*2*v* + *a*2(*b*2 + *c*2))*ch*2*u* − *a*2*b*2

# . (96)

Вычислим скалярную кривизну по формуле :

*R* = *gijR*

= *gij*

∂Г*k*

− ∂Г*k* + *n*

*k* − *n k*

# = (97)

*ji* (

*ij*

∂*Xk*

*ik*

∂*Xj*

Г*ik*Г*nk*

Г*ik*Г*nj*)

*a*2*b*2*c*2

= − 2

(((−*a*2*c*2 + *b*2*c*2)*cos*2*v* + *a*2(*b*2 + *c*2))*ch*2*u* − *a*2*b*2)2 .

Перейдем к декартовой системе координат:

# *K* = − 2 . (98)

2

4 + 4 + 4 )

*a*

*b*

*c*

Получили, что скалярная кривизна равна двум гауссовым кривизнам.

### Пределы изменения гауссовой кривизны однополостного гиперболоида

Найдем условные экстремумы гауссовой кривизны с помощью функции Лагранжа[5]:

*F*(*x*, *y*, *z*) = − 1 + *λ*( *x*2

)

+ *y*2

− *z*2

# − 1) . (99)

2

4 + 4 + 4

*a*

*b*

*c*

*a*2 *b*2 *c*2

Определим стационарные точки из системы:

∂*F* = 4*x* + 2*λx*

)

# = 0,

∂*x* 2 *y*2 *z*2 3 *a*2

*b*4 *c* 4

∂*F*

= 4*y* + 2*λy*

# = 0, (100)

∂*y* 2 *y*2 *z*2 3 *b*2

)

*b*4 *c* 4

∂*F* = 4*z* − 2*λz*

)

# = 0,

∂*z* 2 *y*2 *z*2 3 *c*2

*b*4 *c* 4

*φ*(*x*, *y*, *x*) = *x*2

*a*2

*y*2 *z*2

*b*2 *c*2

+

−

# − 1 = 0.

Получили стационарные точки, которые находятся на границах гиперолоида:

*x* = *a*, *y* = 0, *z* = 0,

*x* = − *a*, *y* = 0, *z* = 0,

*x* = 0, *y* = *b*, *z* = 0, (101)

*x* = 0, *y* = − *b*, *z* = 0,

*x* = 0, *y* = 0, *z* = *ic*,

*x* = 0, *y* = 0, *z* = − *ic* .

Значения гауссовой кривизны в этих точках:

## *K*

*x*=±*a*

## *K*

*y*=±*b*

## *K*

*z*=±*ic*

*a*2 *b*2*c*2

*b*2 *a*2*c*2

= −

= −

*c*2 *a*2*b*2

= −

,

# , (102)

.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение хотелось бы сказать, что в ходе курсовой работы было проведено исследование гуассовых и скалярных кривизн однополосного гиперболоида и мнимого однополостного гиперболоида .

Также были решены следующие задачи:

* ознакомление с римановыми пространствами;
* нахождение гауссовых кривизн;
* нахождение скалярной кривизны;
* нахождение пределов изменения экстремумов гауссовой крвизны.

В результате исследований гауссова кривизна однополостного гиперболоида получилась отрицательной, что и требовалось получить. Скалярная кривизна равна двум гауссовым кривизнам. Максимальное и минимальное значения гауссовой кривизны достигаются на концах однополостного гиперболоида.

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Димитриенко Ю.И. Тензорное исчисление: Учеб.пособие для вузов. М.:Высш, шк., 2001, 575 с.
2. Петров А.З. Пространства Эйнштейна. М.: Физматгиз, 1961, 464 с.
3. Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Наука, 1967, 664 с.
4. Шипов Г.И. Теория физического вакуума. НТ-Центр, 1993, 362 с.
5. Функции нескольких переменных : методические указания к выполнению домашних заданий по курсу «Линейная алгебра и функции нескольких переменных» / С.Н. Ефремова, А.В. Косова, Т.А. Ласковая. — М. : Издательство МГТУ Н.Э. Баумана, 2015. — 48 с.

### ПРИЛОЖЕНИЕ А