*Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования*

***«Московский государственный технический университет***

***имени Н.Э. Баумана***

***(национальный исследовательский университет)» (МГТУ им. Н.Э. Баумана)***

ФАКУЛЬТЕТ «Фундаментальные науки»

КАФЕДРА «Вычислительная математика и математическая физика» (ФН-11)

**Р А С Ч Ё Т Н О - П О Я С Н И Т Е Л Ь Н А Я З А П И С К А**

# к курсовой работе на тему:

Дифференциальная геометрия и основы тензорного исчисления.

Дисциплина: Дифференциальная геометрия и основы тензорного исчисления

Студент

А.А. Соколов

(Подпись, дата) (И.О.Фамилия)

Руководитель курсовой работы

Е.В. Осипов

(Подпись, дата) (И.О.Фамилия)

Москва, 2019

# СПИСОК ИСПОЛНИТЕЛЕЙ

Руководитель курсовой Е.В. Осипов работы подпись, дата

Исполнитель А.А. Соколов

подпись, дата

Нормоконтролер С.С. Кудрявцева

подпись, дата

# РЕФЕРАТ

Отчет 27 с., 5 источников.

Д И Ф Ф Е Р Е Н Ц И А Л Ь Н А Я Г Е О М Е Т Р И Я , Р И М А Н О В Ы ПРОСТРАНСТВА, ГАУССОВА КРИВИЗНА, СРЕДНЯЯ КРИВИЗНА, СКАЛЯРНАЯ КРИВИЗНА, ГОСТ 7.32-2017.

Цель работы – исследование гуассовых, средних и скалярных кривизн

поверхности, полученной вращением эволюты трактрисы вокруг оси OX.

В результате работы был произведена устная защита курсовой работы, а также выполнен письменный отчет в соответствии со стандартами оформления научно-технической документации.

# СОДЕРЖАНИЕ с.

[ВВЕДЕНИЕ 5](#_TOC_250000)

1. Римановы пространства 6
   1. Элементарное многообразие 6
   2. Касательное пространство 7
   3. Определение риманова пространства 9
2. Свойства римановых пространств 10
   1. Коэффициенты связанности в 10

.......

* 1. Определение аффинной связности 10
  2. Тензоры в элементарном многообразии 11
  3. Определение тензора в римановом пространстве 12
  4. Ковариантное дифференцирование тензоров в
  5. Ковариантное дифференцирование тензоров в

.....................................13

.....................................13

.......

.......

* 1. Риманово пространство с аффинной связностью 14
  2. Тензор Римана-Кристоффеля 14
  3. Тензор Риччи 16
  4. Тензор Эйнштейна 17

1. Трактриса и ее эволюта 18

ЗАКЛЮЧЕНИЕ 25

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ 26

ПРИЛОЖЕНИЕ А 27

# ВВЕДЕНИЕ

Курсовая работа – вид учебной работы обучающегося, в которой присутствуют элементы самостоятельного научного исследования. Работа рассчитана на закрепление и применение полученных навыков в процессе учёбы.

Целью курсовой работы является исследование гуассовых, скалярных и средних кривизн поверхности, получаемой вращением эволюты трактрисы вокруг оси OX.

Задачами курсовой работы являются:

* ознакомление с римановыми пространствами;
* нахождение гауссовой кривизны;
* нахожденией средней кривизны*;*
* нахождение скалярной кривизны*.*

1. Римановы пространства

В механике и особенно в релятивистской физике тензоры широко при- меняют в *𝑛*-мерных римановых пространствах, являющихся более общими, чем евклидовы [1]. Дадим определение этих пространств, а затем покажем, как конструируются тензоры в них. Начнём с основополагающего понятия римановых пространств - элементарного многообразия.

* 1. Элементарное многообразие

Определение 1. Элементарным *𝑛*-мерным многообразием называют такое множество *𝑀 𝑛*, каждой точке которого взаимнооднозначно поставлен в соответствие упорядоченный набор чисел (*𝑋*1*...𝑋𝑛*) из некоторой связной области *𝒟 ∈* R*𝑛*, т.е, задано биективное отображение *𝜙* : *𝑀 𝑛 −→ 𝒟 ∈* R*𝑛*.

Координатами точки *𝒨 ∈ 𝑀 𝑛* в системе координат *𝒟* называют коор- динаты *𝑋𝑖 ∈* R*𝑛* ее образа *𝜙*(*𝒨*), изменяющиеся в области *𝒟 ∈* R*𝑛*. Если для множества *𝑀 𝑛* имеется другое биективное отображение *𝜙′* : *𝑀 𝑛 −→*

*𝒟 ∈* R*𝑛*, то координаты точки *𝒨* в системах координат *𝒟* и *𝒟′*, связаны соотношениями:

*𝑋′𝑖* = *𝑋′𝑖*(*𝑋𝑗* )*, 𝑖, 𝑗* = 1 *. . . 𝑛,* (1)

которые предполагают достаточное число раз дифференцируемыми и невырожденными, т.е. det *∂𝑋′𝑖 ̸*= 0*, ∀𝑋𝑖 ∈ 𝒟*. Введём обозначения для якобиевых матриц преобразования, а также для их производных:

*∂𝑋𝑗*

(︁ )︁

*𝑄𝑖 ≡*

*𝑗*

(︂ )︂

*∂𝑋′𝑖*

*∂𝑋𝑗*

*, 𝑃 𝑖 ≡*

*∂𝑋𝑖*

*∂𝑋′𝑗*

*𝑖*

*𝑗𝑘*

*, 𝑃 ≡*

*∂*2*𝑋𝑖*

*,* (2)

*∂𝑋′𝑗 ∂𝑋′𝑘*

и кроме того будем использовать обозначения для частных производ-

*𝑗*

(︂ )︂

ных:

*∂𝑓*

*∂𝑓 𝑗*

*∂𝑋𝑖 ≡ 𝑓,𝑖,*

*∂𝑋′𝑖 ≡ 𝑓|𝑖* = *𝑃 𝑖 𝑓,𝑖.* (3)

Примером двумерного (*𝑛* = 2) элементарного многообразия *𝑀* 2 явля- ются поверхности в R3, на которых определены криволинейные координаты

*𝑋*1*, 𝑋*2 и которые заданы тремя функциями:

*𝑥𝑖* = *𝑥𝑖*(*𝑋*1*, 𝑋*2)*, 𝑖* = 1*,* 2*,* 3*.* (4)

* 1. Касательное пространство

Определение 2. Кривой *𝒧* в многообразии *𝑀 𝑛* называют отображение

*𝒧* : [*𝜉*1*, 𝜉*2] *∈* R1 *−→ 𝑀 𝑛*, которое записывают в виде функции:

*𝑋𝑖* = *𝑋𝑖*(*𝜉*) *∀𝜉 ∈* [*𝜉*1*, 𝜉*2]*, 𝑋𝑖 ∈ 𝑀 𝑛.* (5) Здесь *𝑋𝑖* - координаты точки *𝒨 ∈ 𝑀 𝑛,* [*𝜉*1*, 𝜉*2] - некоторый отрезок из

R1*,* (*𝜉*1 *< 𝜉*2), а функции (5) предполагаем непрерывно дифференцируемы- ми, по крайней мере, два раза.

Зафиксировав значение параметра *𝜉 ∈* [*𝜉*1*, 𝜉*2], получим некоторую точ- ку *𝒨 ∈ 𝒧*, в ней можно вычислить производные от функций (5):

*𝑎𝑖* =

d*𝑋𝑖* d*𝜉*

*.* (6)

Определение 3. Упорядоченный набор (*𝑎*1 *. . . 𝑎𝑛*) производных (6) на- зывают компонентами касательного вектора *𝑎𝑖* в точке *𝒨* кривой *𝒧* в *𝑀 𝑛*.

Если перейти к координатам *𝑋′𝑖* той же точки *𝒨 ∈ 𝒧*, то согласно (1)

7

получаем, что компоненты касательного вектора *𝑎′𝑖* в этой системе коорди-

нат будут иметь вид: *𝑎′𝑖* = d*𝑋′𝑖*

d*𝜉*

и связаны с *𝑎𝑖* тензорным законом:

*𝑎′𝑖* = *𝑄𝑖 𝑎𝑗 .* (7)

*𝑗*

Поскольку через фиксированную точку*𝒨 ∈ 𝑀 𝑛* можно провести раз- личные кривые *𝒧*, то, вообще говоря, в каждой точке *𝒨* имеется множество упорядоченных наборов (*𝑎*1 *. . . 𝐴𝑛*). Определим операции с этими наборами.

Пусть имеется две кривые *𝒧*1 и *𝒧*2, заданные в виде функций *𝑋𝑖* (*𝜉*)*, 𝑋𝑖* (*𝜉*),

1

2

проходящие через точку *𝒧*, тогда можно построить два набора компонент

касательных векторов *𝑎𝑖*

1

= d*𝑋*

= d*𝑋* .

*𝑖*

1

d*𝜉*

и *𝑎𝑖*

*𝑖*

2

2

d*𝜉*

Суммой компонент двух касательных векторов назовём набор

*𝑎𝑖*

1

2

+ *𝑎𝑖* =

d*𝑋𝑖* + *𝑋𝑖*

*,*

1 2 (8)

d*𝜉*

который представляет собой компоненты касательного вектора к кривой

(*𝑋𝑖* + *𝑋𝑖* )(*𝜉*) в данной точке *𝒨*.

1 2

Аналогично определяем произведение компонент *𝑖* на вещественное

число *𝜆*:

*𝜆𝑎𝑖*

= *𝜆*

d*𝑋𝑖* d*𝜉*

d*𝜆𝑋𝑖*

=

d*𝜉*

*.* (9)

Поскольку набор чисел (*𝑎*1*...𝑎𝑛*) является элементом пространства R, то, выбрав базис *𝑒𝑖* в этом пространстве, можно построить сам касательный

*𝑗*

вектор *𝑎* в точке *𝒨* кривой *𝒧* : *𝑎* = *𝑎𝑖𝑒𝑖* = *𝑎′𝑖𝑒′* , где *𝑒′* = *𝑃 𝑒𝑗* - новый базис.

*𝑖*

*𝑖*

*𝑖*

Определение 4. Касательным пространством в данной точке *𝒨* эле- ментарного многообразия *𝑀 𝑛* называют множество касательных векторов

= *𝑎𝑖𝑒𝑖*, построенных ко всевозможным кривым *𝒧*, проходящим через дан- ную точку.

Теорема 1. Касательное пространство в любой точке *𝒨 ∈ 𝑀 𝑛* явля- ется *𝑛*-мерным линейным пространством, которое обозначают как *𝑇𝒨𝑀 𝑛*,

а векторы *𝑒*, образуют базис в нем.

* 1. Определение риманова пространства

Определение 5. Элементарное *𝑛*-мерное многообразие *𝑀 𝑛* называют римановым пространством V*𝑛*, если в каждой точке *𝒨 ∈ 𝑀 𝑛* с координа- тами *𝑋𝑖* задана матрица *𝑔𝑖𝑗 𝑛*-го порядка, которая является

1) симметричной,

2) невырожденной: det(*𝑔*˜*𝑖𝑗* ) 0*, ∀𝑋𝑖*,

1. компоненты её являются непрерывно-дифференцируемыми функция- ми,
2. при переходе к другим координатам *𝑋′𝑙* преобразуется по тензорному закону:

*𝑔𝑖𝑗* = *𝑄𝑘 𝑄𝑙 𝑔′*

*.* (10)

*𝑖 𝑗 𝑘𝑙*

Двумерные поверхности в R3, очевидно, можно рассматривать как двумерные римановы пространства V2 с метрической матрицей *𝑔*˜*𝐼𝐽* .

Расстояние в римановом пространстве вводят для бесконечно близких точек *𝒨* и *𝒨′*, имеющих кординаты *𝑋𝑖* и *𝑋𝑖* + *𝑑𝑋𝑖*, и определяют его как

*𝑑𝑠*2 = κ*𝑔𝑖𝑗 𝑑𝑋𝑖𝑑𝑋𝑗 ,* (11)

где *𝜅* – знаковое число, которое выбирают так, чтобы форма (11) была по- ложительной.

Риманово пространство называют собственно римановым, если мет- рическая матрица *𝑔𝑖𝑗 , ∀𝑋𝑖 ∈ 𝒟* является положительно-определённой, в противном случае говорят о псевдоримановых пространствах.

1. Свойства римановых пространств

Рассмотрим некоторые свойства римановых пространств, которые по- надобятся нам для введения тензора Эйнштейна, чтобы указать связь рима- новых пространств с общей теорией относительности.

* 1. Коэффициенты связанности в V*𝑛*

Поскольку в каждой точке *𝒨*(*𝑋𝑖*) *∈* V*𝑛* введена метрическая матрица

*𝑔𝑖𝑗*(*𝑋𝑖*) компоненты которой, согласно п.3 определения 5, являются непре- рывно дифференцируемыми функциями, то можно вычислить производные

*∂𝑔𝑖𝑗*

*∂𝑋𝑘*

и образовать из них следующие объекты:

Γ*𝑖𝑗𝑘* =

1

(*𝑔𝑖𝑘,𝑗* + *𝑔𝑗𝑘,𝑖 − 𝑔𝑖𝑗,𝑘*)*.* (12)

2

Определение 6. Функции Γ*𝑖𝑗𝑘* определённые по формулам (12), назы- вают коэффициентами связности первого рода в V*𝑛*. Коэффициенты связно- сти второго рода вводим с помощью обратной матрицы *𝑔𝑖𝑗* :

Γ*𝑚* = *𝑔𝑚𝑝*Γ*𝑖𝑗𝑝.* (13)

*𝑖𝑗*

* 1. Определение аффинной связности

Определение 7. Элементарное *𝑛*-мерное многообразие *𝑀 𝑛* называют пространством аффинной связности L*𝑛*, если в каждой точке *𝑀 𝑛* с координатами *𝑋𝑖* задана система функций Γ*\*𝑚*, которые

*𝒨 ∈*

*𝑖𝑗*

1. являются непрерывно-дифференцируемыми функциями,
2. при переходе к другим координатам *𝑋′𝑖* преобразуются следующим

образом:

*\*′𝑚 𝑙 𝑞*

*𝑚 \*𝑟*

*𝑚 𝑟*

Γ*𝑖𝑗* = *𝑃 𝑖 𝑃 𝑗 𝑄*

*𝑟* Γ*𝑙𝑞* +*𝑄*

*𝑟𝑃 𝑖𝑗 .* (14)

Функции

Γ*\*𝑚*, заданные в L*𝑛*, называют коэффициентами аффинной

связности (или просто аффинной связностью).

*𝑖𝑗*

* 1. Тензоры в элементарном многообразии

Построим в каждой точке *𝒨 ∈ 𝑀 𝑛* множество наборов касательных векторов:

(*𝑎*1*𝑏*(1)*𝑎*2*𝑏*(2) *. . . 𝑎𝑛𝑏*(*𝑛*) *≡* (*𝑎𝑖𝑏*(*𝑖*))*,* (15)

где *𝑎𝑖 ∈ 𝑇𝒨𝑀 𝑛*, *𝑏*(*𝑖*)*𝑇 \* 𝑀 𝑛*, и введём на этом множестве операции сложения

*𝒨*

и умножения на вещественное число *𝑠*:

(*𝑎𝑖𝑏*(*𝑖*)) + (*𝑎𝑖𝑐*(*𝑖*)) = (*𝑎𝑖*(*𝑏*(*𝑖*) + *𝑐*(*𝑖*)))*,* (16)

(*𝑎𝑖𝑏*(*𝑖*)) + (*𝑑𝑖𝑏*(*𝑖*)) = ((*𝑎𝑖* + *𝑑𝑖*))*𝑏*(*𝑖*))*,* (17)

*𝑠*(*𝑎𝑖𝑏*(*𝑖*)) = ((*𝑠𝑎𝑖*)*𝑏*(*𝑖*)) = (*𝑎𝑖*(*𝑠𝑏*(*𝑖*)))*.* (18)

Определение 8. Тензорным касательным пространством *𝒯𝑛* (*𝑇𝒨𝑀 𝑛*)

(*𝑝𝑞*)

типа *𝑝𝑞*, где *𝑝*+*𝑞* = 2, в точке *𝒨* элементарного многообразия *𝑀 𝑛* называют тензорное произведение касательного пространства *𝑇𝒨𝑀 𝑛* на себя:

*𝑛*

*𝑛*

*𝒯𝑛* (*𝑇𝒨𝑀*

(*𝑝𝑞*)

*𝑛*

) = *𝑇𝒨𝑀*

*⊗ 𝑇𝒨𝑀*

*∀𝒨 ∈ 𝑀*

*𝑛, 𝑝* + *𝑞* = 2*,* (19)

где тензорное произведение вводится как фактор-пространство *𝑛−*ой степе-

ни декартова квадрата

*𝑇𝒨𝑀 ⊗ 𝑇𝒨𝑀* = [(*𝑇𝒨𝑀 × 𝑇𝒨𝑀* ) ] (20)

*𝑛 𝑛 𝑛 𝑛 𝑛*

Базисные диады в *𝒯𝑛* (*𝑇𝒨*

(*𝑝𝑞*)

*𝑀 𝑛*) введём как

*𝑒𝑗 ⊗ 𝑒𝑘* = [*𝑒𝑖*(*𝛿𝑗 𝑒𝑘*)]*,* (21)

*𝑖*

где [ ] – классы эквивалентности соответствующих наборов касательных векторов. Очевидно, что если рассматриваемое многообразие *𝑀* 2 является поверхностью Σ *∈* R3, то базисные диады совпадают с соответствующими диадами *𝜌𝐼 ⊗ 𝜌𝐾* .

Определение 9. Тензором второго ранга *𝐴*(*𝒨*) типа (*𝑝𝑞*) в точке

*𝒨 ∈ 𝑀 𝑛* называют элемент тензорного произведения касательного про-

странства *𝒯𝑛* (*𝑇𝒨𝑀 𝑛*)*, 𝑝* + *𝑞* = 2.

(*𝑝𝑞*)

Тензор *𝑘−*го ранга *𝐴*(*𝒨*) введём как

*𝑘*

*𝑘𝐴* = *𝐴𝑖 ...𝑖 𝑒 ⊗ . . . ⊗ 𝑒𝑖 ⊗ 𝑒𝑗 ⊗ . . . ⊗ 𝑒𝑗 , 𝑝* + *𝑞* = *𝑘.* (22)

1 *𝑝* 1 *𝑞*

*𝑗*1*...𝑗𝑞 𝑖*1 *𝑝*

* 1. Определение тензора в римановом пространстве

Если в многообразии *𝑀 𝑛* введена метрическая матрица *𝑔𝑖𝑗* то оно ста- новится римановым пространством V, а касательное пространство в каж- дой точке *𝒨 ∈* V*𝑛* - евклидовым (или псевдоевклидовым) *𝑇 𝒨*V*𝑛*. Тогда

используя соглашение о совпадении пространств *𝑇𝒨\**

(*𝑘*)

говорить о тензорном касательном пространстве *𝒯*

V*𝑛* и *𝑇𝒨𝑉 𝑛*, можно

V*𝑛*), заданном на

римановом пространстве V*𝑛*.

*𝑛* (*𝑇𝒨*

* 1. Ковариантное дифференцирование тензоров в V*𝑛*

Рассмотрим в V*𝑛* произвольное поле тензора *𝑘*-гo ранга:

*𝑗*1*...𝑗𝑞* **e***𝑖*1 *⊗ . . . ⊗* **e***𝑖𝑝 ⊗* **e** *⊗ . . . ⊗* **e** *, 𝑝* + *𝑞* = *𝑘,* (23) причём его компоненты Ω*𝑖*1*...𝑖𝑝* будем считать непрерывно дифференци-

*𝑗 ...𝑗*

*𝑘*Ω (︀*𝑋𝑖*)︀ = Ω*𝑖*1*...𝑖𝑝 𝑗*1 *𝑗��*

1 *𝑞*

руемыми функциями координат *𝑋𝑖* точки *𝒨 ∈* V*𝑛*

Определение 10. Ковариантной производной от компонент тензора

*𝑗*1*...𝑗𝑞 𝑘*-го ранга Ω, определённого в V , называют следующий объект:

Ω*𝑖*1*...𝑖𝑝 𝑘 𝑛*

*𝑖*1*...𝑖𝑝*

*𝛻* Ω

*𝑖*

*𝑗*1*...𝑗𝑞*

= Ω*𝑖*1*...𝑖𝑝*

*∂𝑋𝑖*

*∂*

*𝑗*1*...𝑗𝑞*

*𝑝*

*𝑖𝑠*

+ ∑︁ Γ

*𝑚𝑖*

*𝑠*=1

Ω*𝑖*1*...𝑖𝑝*=*𝑚...𝑖𝑝*

*𝑗*1*...𝑗𝑞*

+ *. . .*

*𝑞*

*. . . −* ∑︁ Γ Ω

*𝑚 𝑖*1*...𝑖𝑝*

*𝑗𝑠𝑖*

*𝑗*1*...𝑗𝑞* =*𝑚...𝑖𝑞*

*, 𝑝* + *𝑞* = *𝑘.* (24)

*𝑠*=1

* 1. Ковариантное дифференцирование тензоров в L*𝑛*

Наличие связанности Γ*𝑚* в L*𝑛* означает, что в этом пространстве опре- делена операция ковариантного дифференцирования.

*𝑖𝑗*

Определение 11. Ковариантной производной от компонент тензора

*𝑘𝐴 ∈ 𝒯 𝑝𝑞* (*𝑇𝒨*L*𝑛*)*, 𝑘* = *𝑝* + *𝑞*, (или иначе ковариантной производной от- носительно связности Γ*𝑚*) называют следующий объект:

*𝑛*

*𝑖𝑗*

*\**

*𝛻𝑖𝐴*

*𝑖*1*...𝑖𝑝*

*𝑞*

*𝑗*1*...𝑗𝑞* +

∑︁*𝑠*=1

*\*𝑖,*

Γ*𝑚𝑖𝐴*

*𝑖*1*...𝑖𝑠*=*𝑚...𝑖𝑝*

*𝑝*

*𝑗*1*...𝑗𝑞 −*

∑︁*𝑠*=1

*\*𝑚*

*𝑖,𝑖*

Γ *𝐴*

*𝑖*1*...𝑖𝑝*

*𝑗*1*...𝑗𝑠*=*𝑚...𝑗𝑞 .* (25)

Теорема 2. Ковариантная производная от компонент тензора *𝑘−*го ран- га является компонентами тензора (*𝑘*+1)*−*го ранга *𝛻⊗𝑘𝐴* в L*𝑛*, называемого

градиентом тензора:

*𝑖*

*\**

*𝛻 ⊗*

*𝑘𝐴* = *𝐴*

*𝑖*1*...𝑖𝑝*

*𝑗*1*...𝑗𝑞 𝑒*

*⊗ 𝑒𝑖*1 *⊗ . . . ⊗ 𝑒𝑖𝑝 ⊗ 𝑒*

*𝑗*1

*⊗ . . . 𝑒*

*𝑗𝑞*

*, 𝑝* + *𝑞* = *𝑘.* (26)

* 1. Риманово пространство с аффинной связностью

В римановом пространстве V*𝑛* у нас была определена метрика *𝑔𝑖𝑗* (ей соответствовала вполне определённая связность Γ*𝑚*). Можно однако постро- ить такое пространство, в котором будет одновременно определена и мет- рика *𝑔𝑖𝑗* , и некоторая «самостоятельная» связность Γ*\*𝑚*, для которой уже не

*𝑖𝑗*

*𝑖𝑗*

имеют места соотношения (12).

Определение 12. Элементарное *𝑛−*мерное многообразие *𝑀 𝑛* называ- ют римановым пространством аффинной связностью W*𝑛*, если в каждой

Γ ,

точке *𝒨 ∈ 𝑀 𝑛* с координатами *𝑥𝑖* заданы две системы функций *𝑔𝑖𝑗* и

*\*𝑚*

*𝑖𝑗*

вообще говоря, не связанные никакими соотношениями и удовлетворяющие свойствам 1-4 из определения 5 и 1,2 из определения 7 соответственно.

Поскольку в W*𝑛* определена метрическая матрица *𝑔𝑖𝑗* , то можно обра-

зовать из неё символы Γ*𝑚* по формуле (13)

*𝑖𝑗*

Γ*𝑚* = 1 *𝑔𝑚𝑘*(*𝑔*

*𝑖𝑗*

2

*𝑖𝑘,𝑗*

+ *𝑔*

*− 𝑔*

)*.* (27)

Символы Γ*𝑚* уже не являются связностью: Γ*\*𝑚*

*𝑗𝑘,𝑖*

*𝑖𝑗,𝑘*

*𝑖𝑗*

*𝑖𝑗*

Γ*𝑚*.

*𝑖𝑗*

* 1. Тензор Римана-Кристоффеля

Рассмотрим в точке L*𝑛* произвольный вектор *𝑏* = *𝑏𝑘𝑒𝑘* из *𝑇*L*𝑛* и вычислим его ковариантную производную относительно связности Γ*\*𝑚*:

*𝒨 ∈*

*𝑖𝑗*

*\* 𝑘*

*∂𝑏𝑘*

*\*𝑘 𝑠*

*𝛻𝑖𝑏*

= *∂𝑋𝑖* + Γ*𝑠𝑖𝑏*

*.* (28)

Вычислим вторую ковариантную производную:

*\* \* ∂ \* \* \* \**

*𝑘*

*𝑘*

*𝑚*

*𝑚*

*∂*2*𝑏𝑘*

*\**

*∂ 𝑘*

*𝑘*

Γ*𝑠𝑖*

*𝑠*

*\* ∂𝑏𝑠*

*𝛻𝑗 𝛻𝑖𝑏*

= *∂𝑋𝑗* + Γ*𝑚𝑗 𝛻𝑖𝑏*

*−* Γ*𝑖𝑗 𝛻𝑚𝑏*

= *∂𝑋𝑗 ∂𝑋𝑖* + *∂𝑋𝑗 𝑏*

+ Γ*𝑠𝑖 ∂𝑋𝑗* +

*𝑘\**

*∂𝑏𝑚*

*𝑘\* 𝑠*

*\*𝑚*

*∂𝑏𝑘*

*𝑘\* 𝑠*

+ Γ*𝑚𝑗* (*∂𝑋𝑖* + Γ*𝑚𝑗 𝑏*

*𝑘*

) *−* Γ*𝑖𝑗* (*∂𝑋𝑚* + Γ*𝑠𝑚𝑏* )*.*

(29)

Поменяем теперь индексы *𝑖* и *𝑗* и образуем разность:

*\* \* 𝑘*

*\* \* 𝑘*

*𝑘*

*𝑠𝑖*

*∂*Γ

*\**

*𝑘*

*𝑠𝑗*

*∂*Γ

*\**

*𝑘\**

*\*𝑚*

*\*𝑘*

*\*𝑚 𝑠*

*\*𝑚*

*\*𝑚 \* 𝑘*

*𝛻𝑗 𝛻𝑖𝑏*

*∂𝑋𝑗 ∂𝑋𝑖*

*−𝛻𝑖𝛻𝑗 𝑏*

= ( *−* +Γ*𝑚𝑗* Γ*𝑠𝑖 −*Γ*𝑚𝑖*Γ*𝑠𝑗* )*𝑏*

*−*(Γ*𝑖𝑗 −*Γ*𝑗𝑖* )*𝛻𝑚𝑏*

*.* (30)

Коэффициенты, стоящие в первой скобке, обозначим следующим об- разом:

*𝑅 \* 𝑘* = Γ*𝑘\**

*𝑗𝑖𝑠*

*𝑠𝑖,𝑗*

*𝑘\**

*−* Γ

*𝑠𝑗,𝑖*

+ Γ*\*𝑚*Γ*𝑘\**

+ Γ*\*𝑚*

*\*𝑘*

*.* (31)

Здесь, как и ранее, Γ*𝑘* = *∂*Γ*𝑘* ⧸︀*∂𝑋𝑗* .

*𝑠𝑖*

*𝑚𝑗*

*𝑠𝑗* Γ*𝑚𝑖*

*𝑠𝑖,𝑗*

*𝑠𝑖*

Теорема 3. Система коэффициентов

*\**

*𝑅𝑗𝑖𝑠*

*𝑘*, образованная по формуле

4

*\**

(31), представляет собой компоненты тензора *𝑅*

четвёртого ранга из про-

странства *𝒯𝑛* (*𝑇𝒨*

(31)

L*𝑛*):

4 *\* \* 𝑘 𝑗*

*𝑖 𝑠*

*𝑅* = *𝑅𝑗𝑖𝑠 𝑒*

*⊗ 𝑒*

*⊗ 𝑒*

*⊗ 𝑒𝑘* (32)

Определение 13. Тензор (32) называют тензором кривизны простран- ства L*𝑛* относительно связности Γ*\*𝑚* (или тензором Римана-Кристоффеля).

*𝑖𝑗*

* 1. Тензор Риччи

В пространстве W*𝑛* из тензора Римана-Кристоффеля можно образо- вать несколько тензоров второго ранга. Свёртка транспонированного тензо- ра Римана-Кристоффеля 4*𝑅* с метрическим тензором образует тензор вто- рого ранга:

*\**

*𝒭* =

4*𝑅*

(2314)

*· ·𝐸,* (33)

называемый тензором Риччи. Компоненты этого тензора имеют следующий вид:

*\* \* 𝑗 \**

*𝑖*2

*𝑖*3

*𝑖*1

*𝑖*4

*𝑖*4 *𝑘*

*𝒭* = *𝑅𝑗𝑖𝑒*

*⊗ 𝑅𝑖*1*𝑖*2*𝑖*3*𝑖*4 *𝑒*

*⊗ 𝑒*

*⊗ 𝑒*

*⊗ 𝑒*

*· ·𝑒*

*· ·𝑒*

*⊗ 𝑒𝑘* =

(34)

= *𝑅\**

*\**

*𝛿𝑖*1 *𝑔𝑖*4*𝑘𝑒𝑖*2 *⊗ 𝑒𝑖*3 = *𝑅*

*𝑖*1*𝑖*2*𝑖*3*𝑖*4

*𝑘*

*𝑘𝑗𝑖*

*𝑘𝑒𝑗 ⊗ 𝑒𝑖,*

то есть

*𝑅\**

*𝑗𝑖*

*\**

= *𝑅𝑘𝑗𝑖*

*𝑘 \**

*𝑛𝑗𝑖*

= *𝑅*

*𝑘𝛿𝑛.* (35)

Подставляя в (35) выражение (31) для компонент тензора Римана- Кристоффеля, получаем:

*𝑘*

*\**

*\* ∂ 𝑘*

*𝑗𝑖*

*\**

*∂ 𝑘 \* \* \* \**

*𝑅* =

Γ*𝑖𝑗*

*−*

*−* Γ Γ

*∂𝑋𝑘*

*𝑖𝑗*

*𝑛𝑘*

*𝑛𝑗*

Γ*𝑖𝑘*

*∂𝑋𝑗*

+ Γ*𝑛* Γ*𝑘*

*𝑛 𝑘*

*𝑖𝑘*

*.* (36)

Аналогичным образом можно ввести тензор Риччи относительно сим- волов Γ*𝑘* :

*𝑖𝑗*

*𝑅𝑗𝑖* = *𝑅𝑘𝑗𝑖𝑘* = *𝑅𝑛𝑗𝑖𝑘𝛿𝑛,* (37)

*𝑘*

и

*𝑅𝑗𝑖* = Γ*𝑘 −* Γ

*𝑘*

*𝑖𝑗,𝑘*

*𝑖𝑘,𝑗*

+ Γ*𝑚*Γ*𝑘*

*𝑚 𝑘*

*𝑖𝑘*

*.* (38)

* 1. Тензор Эйнштейна

*−* Γ Γ

*𝑖𝑗*

*𝑚𝑘*

*𝑘𝑗*

Тензоры Эйнштейна следующим образом:

*𝐺\**

и *𝐺* образуются из тензоров Риччи *\**

и *𝒭*

*𝐺\**

*𝒭*

1 1

= *− 𝐸, 𝐺* = *𝒭 − 𝒭𝐸,* (39)

*\**

*\**

*𝒭* 2 *𝒭* 2

где *𝒭* = *𝑅\**

тензором.

* *·𝐸* и *𝒭* = *𝑅 · ·𝐸* – свертки тензоров Риччи с метрическим

Тензор Эйнштейна играет важную роль в общей теории относитель- ности (см., например, [2], [3], [4]).

1. Трактриса и её эволюта

Практическую часть курсовой работы будем выполнять в среде Maple18.

Определение 14. Трактриса (линия влечения) – плоская кривая, для которой длина отрезка касательной от точки касания до точки пересечения с фик- сированной прямой является постоянной величиной. Её параметрическое описание имеет вид:

*𝑥*(*𝑡*) = *𝑎*(cos *𝑡* + ln tan *𝑡* ), (40)

2

*𝑦*(*𝑡*) = sin *𝑡,* (41)

0 *< 𝑡 < 𝜋.* (42)

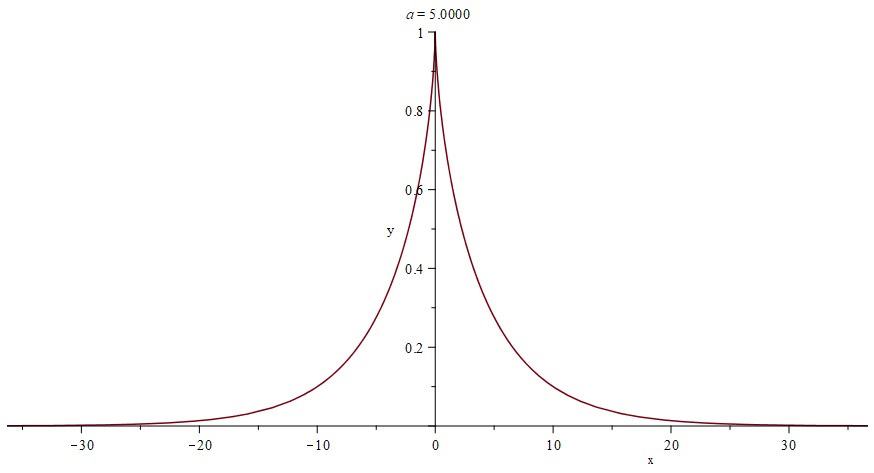


Рисунок 1 – График трактрисы при *𝑎* = 5.

Если линия задана параметрически, то ее эволюта имеет уравнение:

*𝑥*2 + *𝑦′*2

*′*

*𝑋*(*𝑡*) = *𝑥*(*𝑡*) *− 𝑦 𝑥′𝑦′′ − 𝑥′′𝑦′ ,* (43)

*′ 𝑥*2 + *𝑦*2

*𝑌* (*𝑡*) = *𝑦*(*𝑡*) + *𝑥*

*𝑥′𝑦′′ − 𝑥′′𝑦′*

*.* (44)

Подставляя уравнение трактрисы в (43) и (44) и сокращая, получим:

*−* cos(*𝑡*) *𝑎*2 + ln (︁ )︁ *𝑎*2 + cos(*𝑡*) + cos(*𝑡*)*𝑎*2 *−* cos(*𝑡*)

sin(*𝑡*)

3 1*−*cos(*𝑡*) 3

*𝑎*

*𝑋*(*𝑡*) =

*𝑌* (*𝑡*) =

1 + (︀*𝑎*2 *−* 1)︀ (cos (*𝑡*))4

sin (*𝑡*)

*,* (45)

sin (*𝑡*)

Избавляясь в полученной системе от *𝑡* придём к уравнению эволюты, зависящей только от *𝑥*:

*.* (46)

*𝑥*

*𝑒𝑣𝑜𝑙𝑢𝑡𝑎*(*𝑥*) = *𝑎 ·* cosh *𝑎 .* (47)

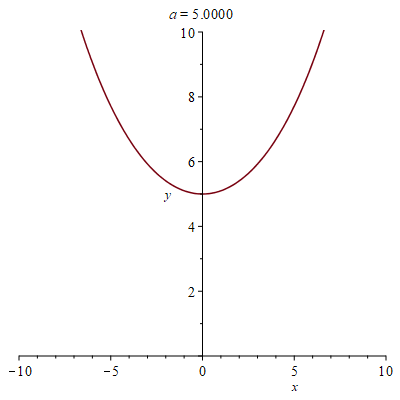


Рисунок 2 – График эволюты трактрисы при *𝑎* = 5.

Получили, что эволютой трактрисы является цепная линия.

Определение 15. Цепная линия — линия, форму которой принимает гибкая однородная нерастяжимая тяжёлая нить или цепь (отсюда название) с закреплёнными концами в однородном гравитационном поле. Является плоской кривой. Её уравнением является (47).

Вращая полученную эволюту вокруг оси *𝑂𝑋* получаем поверхность вращения, называемую катеноидом. Катеноид можно задать параметриче- ски:

*𝑣*

*𝑥𝑘𝑎𝑡*(*𝑢, 𝑣*) = *𝑎 ·* cosh *𝑎* cos *𝑢,* (48)

*𝑣*

*𝑦𝑘𝑎𝑡*(*𝑢, 𝑣*) = *𝑎 ·* cosh *𝑎* sin *𝑢,* (49)

*𝑧𝑘𝑎𝑡*(*𝑢, 𝑣*) = *𝑢,* (50)

где *−𝜋 ≤ 𝑢 ≤ 𝜋* и *𝑣 ∈* R.

Построим полученную поверхность.

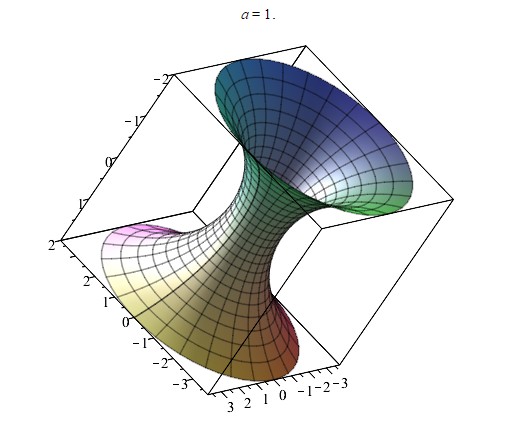


Рисунок 3 – Катеноид при *𝑎* = 1.

Для вычисления Гауссовой и средней кривизн воспользуемся форму- лами из ([5]), позволяющими написать универсальный программный код.

Пусть *𝐾* – Гауссова кривизна, а *𝐻* – средняя. Введём дополнительные обозначения:

|  |  |
| --- | --- |
| *𝐸* = *𝑥𝑢 · 𝑥𝑢,* | (51) |
| *𝐹* = *𝑥𝑢 · 𝑥𝑣,* | (52) |
| *𝐺* = *𝑥𝑣 · 𝑥𝑣,* | (53) |
| *𝑙* = *𝑈 · 𝑥𝑢𝑢,* | (54) |
| *𝑚* = *𝑈 · 𝑥𝑢𝑣,* | (55) |
| *𝑛* = *𝑈 · 𝑥𝑣𝑣,* | (56) |

где *𝑈* – единичный вектор нормали к поверхности:

*𝑥𝑢 × 𝑥𝑣*

*𝑈* =

*|𝑥𝑢 × 𝑥𝑣|*

*.* (57)

Тогда Гауссова кривизна будет рассчитываться как

а средняя кривизна:

*𝐾* =

*𝑙𝑚 − 𝑚*2

*𝐸𝐺 − 𝐹* 2

*,* (58)

*𝐺𝑙* + *𝐸𝑛* 2*𝐹 𝑚*

*−*

*𝐻* = *.* (59)

2(*𝐸𝐺 − 𝐹* 2)

Рассчитаем введённые выше величины для нашего катеноида (48)-

(50):

*𝐸* = *𝑥𝑢 𝑥𝑢* =

*·*

*𝑢 𝑢*

*·*

*𝑢 𝑢*

= (1*,* sinh cos *𝑣,* sinh sin *𝑣*) (1*,* sinh cos *𝑣,* sinh sin *𝑣*) =

*𝑎 𝑎 𝑎 𝑎*

*𝑢* 2 2 *𝑢* 2 2

= 1 + sinh *·* cos *𝑣* + sinh *·* sin *𝑣.*

*𝑎*

*𝑎*

(60)

*𝐹* = *𝑥𝑢 𝑥𝑣* =

*·*

*𝑢 𝑢*

*𝑢 𝑢*

= (1*,* sinh cos *𝑣,* sinh sin *𝑣*) (0*, 𝑎* cosh sin *𝑣, 𝑎* cosh cos *𝑣*) =

* *−*

*𝑎 𝑎 𝑎 𝑎*

= 0*.*

(61)

*𝐺* = *𝑥𝑣 𝑥𝑣* =

*·*

*𝑢 𝑢*

*𝑢 𝑢*

= (0*, −𝑎* cosh *𝑎* sin *𝑣, 𝑎* cosh *𝑎* cos *𝑣*) *·* (0*, −𝑎* cosh *𝑎* sin *𝑣, 𝑎* cosh *𝑎* cos *𝑣*) =

= *𝑎*2 cosh2 *𝑢* sin2 *𝑣* + *𝑎*2 cosh2 *𝑢* cos2 *𝑣.*

*𝑎 𝑎*

(62)

*𝑥𝑢 × 𝑥𝑣* =

*𝑈* =

*|𝑥𝑢 × 𝑥𝑣|*

(0*, −𝑎* cosh sin *𝑣, 𝑎* cosh cos *𝑣*) *×* (0*, −𝑎* cosh sin *𝑣, 𝑎* cosh cos *𝑣*)

=

=

*𝑢 𝑢 𝑢 𝑢*

*𝑎 𝑎*

*𝑢 𝑢*

*𝑎 𝑎*

*𝑢 𝑢*

*|*(0*, −𝑎* cosh *𝑎* sin *𝑣, 𝑎* cosh *𝑎* cos *𝑣*) *×* (0*, −𝑎* cosh *𝑎* sin *𝑣, 𝑎* cosh *𝑎* cos *𝑣*)*|*

*𝑢 𝑢 𝑢 𝑢*

(*𝑎* cosh *𝑎* sinh *𝑎 , −𝑎* cosh *𝑎* cos *𝑣, −𝑎* cosh *𝑎* sin *𝑣*)

4 *𝑢*

=

√︁cosh

=

*𝑎 𝑎*2

sinh *𝑢*

*−*

= ( *𝑎 ,*

cosh *𝑢*

*𝑎*

cos *𝑣*

cosh *𝑢*

*𝑎*

sin *𝑣*

*, −*cosh *𝑢* )*.*

*𝑎*

(63)

*𝑙* = *𝑈 · 𝑥𝑢𝑢* =

sinh *𝑢*

cos *𝑣*

sin *𝑣*

cosh *𝑢* cos *𝑣*

cosh *𝑢* sin *𝑣*

= ( *𝑎 , −*

*𝑢 , −*

*𝑎 𝑎*

*𝑢* ) *·* (0*, ,* ) =

(64)

cosh *𝑢*

*𝑎*

cosh *𝑎*

cosh *𝑎*

*𝑎 𝑎*

1

= *−𝑎.*

*𝑚* = *𝑈 · 𝑥𝑢𝑣* =

sinh *𝑢*

*−*

= ( *𝑎 ,*

cosh *𝑢*

*𝑎*

cos *𝑣*

cosh *𝑢*

*𝑎*

sin *𝑣*

*, −*cosh *𝑢*

*𝑎*

) *·* (0*, −* sinh

*𝑢*

sin *𝑣,* sinh

*𝑎*

*𝑢*

cos *𝑣*) =

*𝑎*

(65)

= 0*.*

*𝑛* = *𝑈 · 𝑥𝑣𝑣* =

sinh *𝑢*

*−*

= ( *𝑎 ,*

cosh *𝑢*

*𝑎*

cos *𝑣*

cosh *𝑢*

*𝑎*

sin *𝑣*

*, −*cosh *𝑢*

*𝑎*

) *·* (0*, −𝑎* cosh

*𝑢*

*𝑎* cos *𝑣, −𝑎* cosh

*𝑢*

sin *𝑣*) =

*𝑎*

(66)

= *𝑎.*

Теперь мы можем рассчитать Гауссову кривизну по формуле (58):

*𝑙𝑚 − 𝑚*2 1

*−*

*𝐾* =

= *.* (67)

*𝐸𝐺 − 𝐹* 2 cosh4 *𝑢 𝑎*2

*𝑎*

И среднюю кривизну по формуле (59):

*𝐺𝑙* + *𝐸𝑛* 2*𝐹 𝑚*

*−*

*𝐻* =

2(*𝐸𝐺 − 𝐹* 2)

= 0*.* (68)

Также из [5] известно, что скалярная кривизна равняется удвоенной гауссовой кривизне для римановых многообразий. Так что, обозначая ска-

лярную кривизну за *𝑆𝐾* имеем:

2

*𝑆𝐾* = 2*𝐾* = *−*cosh4 *𝑢 𝑎*2 *.* (69)

*𝑎*

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение хотелось бы сказать, что в ходе курсовой работы было проведено исследование гуассовых, скалярных и средних кривизн поверхности, полученной вращением эволюты трактрисы вокруг оси OX .

Также были решены следующие задачи:

* ознакомление с римановыми пространствами;
* нахождение гауссовой кривизны;
* нахождение скалярной кривизны;
* нахождение средней кривизны.

Кроме того, в результате выполнения работы были получены сведения о таких понятиях, как трактриса, эволюта, цепная линия, катеноид.

# СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

* 1. Димитриенко Ю.И. Тензорное исчисление: Учеб.пособие для вузов. М.:Высш, шк., 2001, 575 с.
  2. Петров А.З. Пространства Эйнштейна. М.: Физматгиз, 1961, 464 с.
  3. Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Наука, 1967, 664 с.
  4. Шипов Г.И. Теория физического вакуума. НТ-Центр, 1993, 362 с.
  5. Oprea J.F. Differential geometry and its applications. London: Prentice- Hall International, 1997, 387 с.

# ПРИЛОЖЕНИЕ А