# **Календарный план занятий (модуль 1)**

**Занятие 1.** Первоначальная обработка статистических данных. Задача №1.

Метод моментов.

**Лекция 1**. Основные распределения математической статистики.

**Занятие 2**. Свойства основных распределений математической статистики.

**Лекция 2**. Виды сходимости случайных величин. Предельные теоремы теории вероятностей.

**Занятие 3**. Моделирование дискретных и непрерывных законов распределения. Задачи№2-3. Центральная предельная теорема.

**Лекция 3.** Основные задачи математической статистики. Выборочные характеристики и их свойства.

**Занятие 4**. Свойства выборочных характеристик. Порядковые статистики.

**Лекция 4**. Методы получения точечных оценок: моментов, максимального правдоподобия. Свойства точечных оценок.

**Занятие 5**. Точечные оценки параметров. Самостоятельная работа №1.

**Лекция 5.** Достаточные статистики. Критерий факторизации. Неравенство Рао-Крамера. Информация Фишера.

**Занятие 6**. Достаточные статистики.

**Лекция 6**. Интервальные оценки. Принцип построения доверительных интервалов.

Доверительные интервалы для параметров нормального распределения. Задача №4.

**Занятие 7**. Контрольная работа №1.

**Лекция 7**

**8 неделя. Коллоквиум по модулю 1.** Переписывание контрольной работы.

# **Занятие 1. Первоначальная обработка статистических данных.**

**Определение 1**. Все значения, которые может принимать случайная величина , называют выборочным пространством, или генеральной совокупностью.

Выборкой объема называют возможных значений случайной величины:

- реализация выборки.

**Определение 2.** Статистикой, называется любая функция от выборки, не зависящая от неизвестных параметров распределения.

**Примеры**. 1) - выборочное среднее

(или - для статистического ряда)

2)– выборочная дисперсия

- для статистического ряда

**Определение 3**. Если выборку упорядочить в порядке возрастания, то получим вариационный ряд: ; при этом - -ая порядковая статистика

3) - статистика (функция от выборки)

Рассмотрим вариационный ряд , построенный по выборке

из распределения

**Определение 4.** Выборочной функцией распределения называется

, , ,

То есть , если ровно наблюденных значений меньше .

- статистика (при каждом ), то есть функция от выборки

**Пример**. Рассмотрим выборку: 1,3,4,6,3,1,7,2,3,7

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | 7 |
| Относительные  частоты |  |  |  |  |  |  |
| Относительные  накопленные частоты |  |  |  |  |  |  |

Строим статистический ряд и находим эмпирическую функцию распределения:

## Задача 1. Первоначальная обработка статистических данных

По данной выборке

1. Найдите крайние члены вариационного ряда и размах выборки

2. Осуществите группировку данных (количество интервалов находим по правилу Стерджеса)

3. По сгруппированным данным постройте гистограмму относительных частот

4. Вычислите выборочное среднее и выборочную дисперсию.

5. По виду гистограммы определите возможный закон распределения, оцените параметры этого закона по методу моментов, постройте совмещенные графики гистограммы и плотности предполагаемого закона

6. Найдите эмпирическую функцию распределения и постройте совмещенные графики эмпирической и теоретической функций распределения

**Для группированной выборки:**

- выборочное среднее

(или - для статистического ряда)

2)– выборочная дисперсия

- для статистического ряда

**Определение 3**. Если выборку упорядочить в порядке возрастания, то получим вариационный ряд: ; при этом - -ая порядковая статистика

3) - статистика (функция от выборки)

Рассмотрим вариационный ряд , построенный по выборке

из распределения

**Определение 4.** Выборочной функцией распределения называется

, , ,

## Метод моментов.

Пусть –неизвестный параметр для известного закона распределения.

Вычисляются эмпирических и теоретических моментов и решается система из уравнений с неизвестными.

**Пример.**  1. Пуассоновский закон с неизвестным параметром .

Тогда – математическое ожидание (первый теоретический момент)

- выборочное среднее (первый эмпирический момент)

Следовательно, – оценка параметра , построенная по выборке

**2.** Пусть  –выборка из нормального распределения с неизвестными параметрами и .

Теоретические моменты: ,

Приравниваем к эмпирическим моментам и находим оценки:

## Задачи.

1. Постройте по методу моментов оценку неизвестного параметра по выборке из распределения с плотностью .

**Ответ**. .

1. Найдите оценку параметров равномерного распределения на отрезке по методу моментов

Оценки по методу моментов:

**-** оценки по методу моментов

# **Лекция 1. Основные распределения математической статистики**

## 1. **Гамма-распределение**.

,

Свойства гамма-функции ,

1.

2.

3.

В частности,

**Замечание**.

1.

2. Если , то гамма-распределение совпадает с показательным с параметром :

, .

## 2. **Бэта-распределение**.

, , где

**Частные случаи.**

**1**. - равномерное распределение на ,

поскольку.

**2.** – закон арксинуса,

поскольку.

### Свойства бэта-функции

1.  *.*

**Доказательство.**

2. *.*

**Доказательство**

В самом деле, , откуда , или , , домножив на , получаем

.

Далее интегрируем по интервалу обе части по переменной :

Это свойство следует из предыдущего.

## 3. **Хи-квадрат распределение с степенями свободы**

**Свойства.**

1. - совпадает с распределением квадрата стандартной нормально распределенной случайной величины

**Доказательство**.

Пусть и .

Тогда .

Для продолжаем цепочку: .

Осталось продифференцировать полученное выражение при :

.

2. Пусть независимы и распределены по стандартному нормальному закону. Тогда случайная величина распределена по закону Хи-квадрат с степенями свободы.

**Доказательство** проведем по индукции.

Индукционный шаг:

Использовано значение интеграла , соотношения и .

3.

## 4. **Распределение Фишера-Снедекора .**

**Теорема**. Если случайные величины , , , , независимы и распределены по стандартному нормальному закону , то плотность распределения случайной величины

**Доказательство**.

Пусть независимые случайные величины и распределены по закону и соответственно. Рассмотрим СВ . При очевидно .

Находим и дифференцируем ее функцию распределения для .

Дифференцируем по переменной под знаком интеграла:

## 5. **Распределение Стьюдента с степенями свободы.**

Пусть , , независимы и распределены по стандартному нормальному закону. Тогда случайная величина имеет плотность распределения   
 (распределение Стьюдента с степенями свободы)

**Доказательство**.

Cлучайную величину можно представить в виде где и независимы и распределены нормально , и по закону соответственно.

Получаем:

**Частный случай**.

– распределение Коши с параметром .

**Справка.** Плотность Коши .

# **Занятие 2. Основные распределения математической статистики.**

## **Задачи для решения в аудитории**.

* 1. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины , имеющей гамма – распределение с плотностью: , .

**Ответ.** , **.**

* 1. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины , имеющей бэта – распределение с плотностью:

, .

**Ответ**. , **.**

* 1. Докажите, что при плотность распределения Стьюдента поточечно сходится к стандартной нормальной плотности.

**Решение**. Рассмотрим .

Согласно второму замечательному пределу .

То есть достаточно проверить, что .

**Лемма** (формула Лежандра).

Из леммы находим соотношение: , или

Применим формулу Стирлинга для подпоследовательности .

* 1. Если случайные величины , , , , независимы и распределены по стандартному нормальному закону , то случайная величина распределена по закону .

**Решение.** Введем обозначения , .

Эти случайные величины независимы и распределены по законам и соответственно. Тогда для

Дифференцируем по под знаком интеграла:

* 1. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины , имеющей распределение Фишера: , .

**Решение.**

***-*** существует при

**Ответ**. ,

* 1. Докажите, что сумма независимых случайных величин, распределенных по закону и соответственно, распределена по закону .

**Решение**. Вычислим свертку гамма-плотностей ():

## Задачи для самостоятельного решения

Основные распределения математической статистики

* 1. Докажите, что если случайная величина имеет плотность , то имеет плотность .

Таким образом, параметр – несущественный (масштабный)

* 1. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины , имеющей хи-квадрат распределение с степенями свободы с плотностью:

**Ответ.** , .

* 1. Докажите формулу Лежандра:

Указание. Замены .

* 1. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины, имеющей распределение Стьюдента с плотностью.

При каких значениях параметра эти характеристики существуют?

**Ответ**. при , при **.**

**Решение.**

* 1. Найдите закон распределения случайной величины , если случайные величины , , независимы и распределены по стандартному нормальному закону .

**Ответ**. .

* 1. Пусть случайные величины и независимы и распределены по Коши с параметрами и . Докажите, что случайная величина также распределена по Коши с параметром .

# **Лекция 2. Виды сходимости случайных величин. Предельные теоремы теории вероятностей. Закон больших чисел.**

Пусть на заданы случайная величина и последовательность случайных величин .

## 1. Сходимость почти наверное (с вероятностью 1).

**Определение 1.** , если .

**Пример**. Пусть - алгебра измеримых подмножеств,

. Определим .

Тогда , , то есть

**Определение 2.** , если при любом

**Утверждение 1.** Определение 1 эквивалентно определению 2.

**Доказательство**.

Далее, по определению предела,

*b*

Что означает

Если по условию , то для всех , откуда с учетом получаем, что для всех

Использовано свойство непрерывности вероятности:

Если так, что , то

где

Обратная импликация тоже имеет место, поскольку

## 2. **Сходимость по вероятности.**

**Определение 3**. , если при любом

**Утверждение 2.**  .

**Доказательство**. Очевидно.

**Замечание**. Из сходимости по вероятности, вообще говоря, не следует сходимость почти наверное.

**Пример**. Пусть - алгебра измеримых подмножеств, .

Определим для последовательность . Тогда однако .

**Утверждение 3.** Если последовательность монотонно возрастает (убывает) и , то .

**Доказательство**. Пусть монотонно убывает и (иначе рассмотрим последовательность ).

Тогда .

**Утверждение 4**. **(б/д)**. Если , то из последовательности можно выбрать подпоследовательность такую, что .

## 3. Сходимость по распределению (слабая).

**Определение 4**. , или , если для любой непрерывной ограниченной функции

**Определение 5.** , если в каждой точке непрерывности ).

Следовательно, .

**Факт без доказательства**. Определение 4 и определение 5 эквивалентны.

**Утверждение 5.**  .

**Доказательство**. Обозначим

Если , то , следовательно

, откуда . Далее,

, что влечет . Следовательно,

, откуда выводим, что

.

Остается заметить, что в каждой точке непрерывности , и, следовательно, существует .

**Утверждение 6.**  .

**Доказательство**. По условию при любом

, . Следовательно,

.

Таким образом, , чтд.

## 4. Сходимость в среднем порядка .

**Определение 6**. , если .

**Утверждение 7**. .

**Доказательство**. Применим неравенство Чебышева:.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| \ | 0 | 1 |
|  |  |  |

**Пример (факультативно).** Пусть - последовательность независимых случайных величин, распределенных по закону

Тогда =.

С другой стороны,

.

## Предельные теоремы

**Теорема 1 (неравенства Чебышева).** Для любого имеют место неравенства:

**Доказательство**.

Второе неравенство получается из первого подстановкой вместо :

**Следствие**.

**Теорема 2 (закон больших чисел Чебышева).** Пусть - независимые случайные величины и существует такая константа , что все ,

Тогда при любом

**Доказательство**. Если , то

. Следовательно,

- используется сходимость по вероятности:

**Теорема 3(ЦПТ).** Если случайные величины - независимы, одинаково распределены и имеют конечные то

**-**используется сходимость по распределению

**Теорема 4 (Ляпунов).** Если случайные величины - независимы, имеют конечные моменты , пусть , , , причем ,то

**-**используется сходимость по распределению:

**Теорема 5 (теорема Хинчина ).** Пусть - одинаково распределенные случайные величины с конечным математическим ожиданием .

Тогда при любом

-используется сходимость по вероятности:

**Теорема 6 (теорема Маркова).** Пусть - последовательность случайных величин, удовлетворяющая условию . Тогда при любом

*-* используется сходимость по вероятности:

**Теорема 7(необходимое и достаточное условие).** Пусть - последовательность случайных величин с . Тогда закон больших чисел имеет место тогда и только тогда, когда . Тогда при любом

-используется сходимость по вероятности:

**Теорема 8**. (усиленный закон больших чисел Колмогорова) Пусть - независимые и одинаково распределенные случайные величины. Для того, чтобы

необходимо и достаточно, чтобы существовало конечное .

- используется сходимость почти наверное: .

## Резюме.

# **Занятие 3**

## Задача 2. Моделирование и обработка выборки из дискретного закона распределения.

**Задание.**

1. Для данного смоделируйте выборку из биномиального закона распределения (-число испытаний в одной серии, вероятность успеха в одном испытании)

2. Для полученной выборки постройте статистический ряд. Найдите эмпирическую функцию распределения Постройте на одном рисунке графики и . Вычислите статистику Колмогорова.

3. Вычислите выборочное среднее и выборочную дисперсию и сравните с истинными значениями этих характеристик.

**Объяснения**

**Принцип моделирования выборки из дискретного распределения.**

Пусть моделируемый закон имеет ряд распределения

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Значения СВ |  |  | … |  |  |
| Вероятности |  |  | … |  |  |

Интервал разбиваем на интервалов следующим образом

**Алгоритм**

1. Берем - случайную точку на

2. Если , то

Если попадает в интервал , , то

Если , то .

## Задача 3. Моделирование выборки из абсолютно непрерывного закона распределения методом обратных функций.

**Задание.**

1. Для данного методом обратных функций смоделируйте выборку из закона распределения с заданной плотностью .

2. Для полученной выборки найдите гистограмму относительных частот. Постройте на одном рисунке графики теоретической плотности и гистограмму относительных частот.

3. Вычислите выборочное среднее и выборочную дисперсию и сравните с истинными значениями этих характеристик.

4. Используя неравенство Dvoretzky-Kiefer-Wolfowitz, постройте 90% доверительный интервал для функции распределения .

**Объяснения к задаче 3.**

**Метод обратной функции моделирования абсолютно непрерывной СВ**

Пусть функция распределения строго монотонно возрастает

**Теорема**. Пусть случайная величина равномерно распределена на , пусть обратная функция к функции распределения . Тогда случайная величина распределена по закону .

**Доказательство**. Для равномерно распределенной на случайной величины верно, что . Следовательно, поскольку , то для всех значений

.

**Алгоритм**

1. - вспомогательное случайное значение на

2. - значение моделируемой случайной величины

## Центральная предельная теорема и ЗБЧ.

## Задачи для решения в аудитории

* 1. Докажите, используя центральную предельную теорему и задачи 1.1 и 1.6, что

.

**Решение***.* Рассмотрим независимыеслучайные величины , распределенные по закону . Согласно задаче 1.1

По центральной предельной теореме случайная величина

в пределе имеет стандартное нормальное распределение.

С другой стороны, согласно задаче 1.6. , распределение суммы будет Пересчитаем плотность по формуле .

Получаем: .

Осталось заменить в этой формуле переменную на .

* 1. Имеется 100 квадратов, сторона которых может принимать значения равномерно на . С какой вероятностью суммарная площадь всех квадратов будет в пределах от 99 до 101?

**Решение**. Рассмотрим независимыеслучайные величины , распределенные по закону . Тогда имеет смысл суммарной площади. Воспользуемся ЦПТ:

* 1. Последовательность независимых и одинаково распределенных случайных величин задана рядом распределения , , где  значение функции Римана при аргументе . Проверьте, применим ли к этой последовательности закон больших чисел.

**Ответ***.* Применим.

* 1. Урожайность куста картофеля равна 0 кг с вероятностью 0,1, 1 кг с вероятностью 0,2, 1,5 кг с вероятностью 0,2, 2 кг с вероятностью 0,3 и 2,5 кг с вероятностью 0,2. Какое наименьшее число клубней надо посадить, чтобы с вероятностью не менее 0,975 урожай был не менее 1 тонны?

**Решение**. Рассмотрим независимыеслучайные величины , распределенные по закону: , , , ,

Тогда нужно найти такое , что .

Воспользуемся ЦПТ:

* 1. Случайные величины имеют одинаковые математические ожидания и ограниченные дисперсии. Применим ли к этой последовательности закон больших чисел, если все корреляционные моменты  отрицательны?

**Ответ**. Применим.

* 1. Докажите, что к последовательности случайных величин, в которой каждая случайная величина может зависеть только от случайных величин со смежными номерами, применим закон больших чисел, если только все случайные величины последовательности имеют конечные дисперсии и математические ожидания.

**Решение.**

* 1. Последовательность независимых и одинаково распределенных случайных величин задана рядом распределения , . Применим ли к этой последовательности закон больших чисел. **Ответ**. Нет
  2. Вычисление интеграла  произведено методом Монте-Карло на основании  независимых опытов. Вычислите вероятность того, что абсолютная погрешность в определении величины  не превзойдет .

**Решение.** Согласно методу Монте-Карло, если – случайная величина, равномерно распределенная на , то

Поскольку истинное значение равно очевидно , нужно найти

Применяется ЦПТ:

**Ответ**. 0,711.

.

*Зависимые*

*Независимые*

*Одинаково*

*распределеные*

*Одинаково*

*распределеные*

*Разно*

*распределеные*

*Разно*

*распределеные*

*Чебышев*

*Хинчин*

*Марков*

*Колмогоров*

## Задачи для самостоятельного решения

Закон больших чисел и центральная предельная теорема

* 1. Установите, будут ли выполнены достаточные условия применимости закона больших чисел для последовательности взаимно независимых случайных величин с распределениями, заданными формулами: а). ; б)., ; в). , .

**Ответ.** а) не выполняются; б) выполняются; в) не выполняются

* 1. Урожайность куста картофеля равна 0 кг с вероятностью 0,1, 1 кг с вероятностью 0,2, 1,5 кг с вероятностью 0,2, 2 кг с вероятностью 0,3 и 2,5 кг с вероятностью 0,2. Какое наименьшее число клубней надо посадить, чтобы с вероятностью не менее 0,975 урожай был не менее 1 тонны? **Ответ**. 648.
  2. Пусть последовательность независимых стандартных случайных величин (т.е. ). Используя центральную предельную теорему, найдите вероятность того, что случайная величина примет значение больше, чем . **Ответ**. 0,034.
  3. Случайные величины независимы и распределены по закону Пуассона с параметром . Положим . Найдите вероятность . **Ответ.** 0,863.
  4. Случайные величины независимы и распределены равномерно на интервале . Положим . Найдите вероятность . **Ответ**. 0,1103.
  5. Вычисление интеграла  произведено методом Монте-Карло на основании  независимых опытов. Вычислите вероятность того, что абсолютная погрешность в определении величины  не превзойдет . **Ответ**. .

# **Лекция 3. Основные определения и задачи математической статистики. Выборочные характеристики и их свойства. Теорема Гливенко-Кантелли. Порядковые статистики.**

## Задача оценки параметров

Пусть - выборка из известного распределения , зависящего от неизвестного параметра .

**Задача:** оценить значение параметра .

**Определение 1.**  - оценка параметра (функция от выборки, статистика)

**Определение 2** . Оценка параметра называется несмещенной, если .

## Выборочные характеристики и их свойства

**Примеры**.

1) Выборочное среднее является несмещенной оценкой математического ожидания.

2) Выборочная дисперсия является несмещенной оценкой дисперсии .

**Теорема 1.** (свойства выборочного среднего и выборочной дисперсии)

Если - выборка из распределения с , то

1. , .

.

**Доказательство**.

1.

2.

**Определение 3**. Оценка параметра называется состоятельной, если

**Примеры**.

1) Выборочное среднее является состоятельной оценкой математического ожидания в силу ЗБЧ (теорема Хинчина):

2) Выборочная дисперсия является состоятельной оценкой дисперсии , поскольку

Первое слагаемое в квадратных скобках сходится по вероятности к в силу ЗБЧ, а второе по пункту 1) к . Следовательно, .

Поскольку то.

**Определение 4** . Оценка параметра называется асимптотически несмещенной, если .

**Теорема 2.** Если оценка асимптотически несмещенная и ее дисперсия стремится к нулю, то она состоятельна.

**Доказательство**. По условию и .

Рассмотрим разность

Второе слагаемое в правой части по условию стремится к нулю,

Первое в силу неравенства Чебышева оценивается

и тоже стремится к нулю по вероятности. Следовательно, .

## Выборочная функция распределения

**Определение 5.** Выборочной функцией распределения называется

, , ,

То есть , если ровно наблюденных значений меньше .

- статистика (при каждом ), то есть функция от выборки

**Свойства** эмпирической функции распределения.

1.

2. ,

3. не убывает

4. непрерывна слева

**Теорема 3**. Если взята выборка объема из генеральной совокупности, имеющей функцию распределения то дискретная случайная величина, закон распределения которой имеет вид:

*,*

**Доказательство**. При каждом индикаторы – независимые случайные величины с законом распределения:

Следовательно, –распределена по закону Бернулли, то есть

.

**Следствия.**

1.

2.

3. Если – выборка неограниченного объема, то .

**Доказательство**. Рассмотрим

Следовательно, , а значит и .

**Теорема 4 (Гливенко-Кантелли (б/д))** При  .

**Неравенство (Дворецкий-Кифер-Волфовиц)**

Таким образом, если , , то с вероятностью

где

*,*

## Порядковые статистики.

Рассмотрим вариационный ряд , построенный по выборке

из распределения

**Определение**Члены вариационного ряда называются порядковыми статистиками: - -ая порядковая статистика

**Теорема 5.** Если независимая выборка взята из генеральной совокупности с функцией распределения , то функции распределения крайних членов вариационного ряда и их совместная функция распределения имеют вид:

**Следствие**. Если выборка взята из абсолютно непрерывного закона с плотностью , то плотности распределения крайних членов вариационного ряда и их совместная плотность имеют вид:

**Теорема 6**. **.** Если независимая выборка взята из генеральной совокупности с плотностью распределения , то плотность распределения - ой порядковой статистики имеет вид:

**Пример**. Найдем математическое ожидание и дисперсию , если выборка получена из равномерного распределения на .

Следовательно, - несмещенная оценка параметра .

# **Занятие 4. Свойства выборочных характеристик. Порядковые статистики.**

## Разбор домашнего задания+долги.

**(задача 1.12)** Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины, имеющей распределение Стьюдента с плотностью: .

При каких значениях параметра эти характеристики существуют?

**Ответ**. при , при **.**

**Решение.** , так как при интеграл сходится и подынтегральная функция нечетная.

Далее, заметим, что

Следовательно,

**(задача 1.6)** Докажите, что сумма независимых случайных величин, распределенных по закону и соответственно, распределена по закону .

**Решение**. Вычислим свертку гамма-плотностей ():

**(задача 2.1)** Докажите, используя центральную предельную теорему и задачи 1.1 и 1.6, что .

**Решение***.* Рассмотрим независимыеслучайные величины , распределенные по закону . Согласно задаче 1.1

По центральной предельной теореме случайная величина

в пределе имеет стандартное нормальное распределение.

С другой стороны, согласно задаче 1.6. , распределение суммы будет Пересчитаем плотность по формуле .

Получаем: .

Осталось заменить в этой формуле переменную на .

## Задачи для решения в аудитории.

**1**. Докажите, что оценка неизвестного параметра , построенная по выборке из распределения с плотностью , является асимптотически несмещенной и состоятельной.

**Решение.** Функция распределения выборки ,

Математическое ожидание

По теореме 2 статистика является состоятельной оценкой параметра .

1. Выборка – имеет плотность распределения

При заданных значениях параметров и найдите оценку параметра .

Таблица частот

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| интервалы | 0-0,4 | 0,4-0,8 | 0,8-1,2 | 1,2-1,6 | 1,6-2 | 2-2,4 | 2,4-2,8 | 2,8-3,2 | 3,2-3,6 | 3,6-4 |
| Часто  ты | 217 | 175 | 151 | 122 | 96 | 86 | 78 | 57 | 11 | 7 |

**Ответ.** .

1. По выборке из генеральной совокупности, распределенной по показательному закону с параметром , в качестве точечной оценки математического ожидания используется . Докажите, что эта оценка смещенная.

**Решение .** Плотность показательного закона .

Функция распределения показательного закона .

Математическое ожидание . Найдем .

Следовательно, .

1. Найдите математическое ожидание и дисперсию , если выборка получена из равномерного распределения на .

**Решение**.

## Задачи для самостоятельного решения.

* 1. Постройте по методу моментов оценку неизвестного параметра по выборке из распределения с плотностью .

**Ответ**. .

* 1. Постройте оценки по методу моментов для параметров и по выборке из гамма-распределения с плотностью .

**Ответ**.

* 1. Найдите математическое ожидание и дисперсию , если выборка получена из равномерного распределения на .

**Ответ**.

* 1. Дана выборка объема из распределения Парето с плотностью

. В качестве оценки неизвестного параметра используется . Докажите, что эта оценка является асимптотически несмещенной.

* 1. По выборке из генеральной совокупности, распределенной по закону Бернулли с вероятностью успеха , в качестве точечной оценки математического ожидания используется . Докажите, что эта оценка несмещенная и состоятельная.
  2. Пусть - выборка из нормального распределения , причем - известно, – неизвестно. Рассмотрим оценку неизвестного параметра . Вычислите информацию Фишера .

# **Лекция 4. Методы получения точечных оценок: моментов, максимального правдоподобия. Свойства точечных оценок.**

## Метод максимального правдоподобия.

Дискретный закон, зависящий от неизвестного параметра

**Определение**. 1.Функцией правдоподобия случайной выборки из дискретного закона, зависящего от неизвестного параметра, называется

2.Функцией правдоподобия случайной выборки из абсолютно непрерывного закона с плотностью , зависящей от неизвестного параметра, называется

**Определение**. Значение **,** при котором достигается максимальное значение функции правдоподобия, называется оценкой максимального правдоподобия.

**Примеры**. 1. Пуассоновский закон с неизвестным параметром .

Поскольку , то функция правдоподобия имеет вид:

то естьоценка максимального правдоподобия совпадает с оценкой по методу моментов.

2. Нормальный закон с неизвестными параметрами и .

Составим функцию правдоподобия

Критические точки: ,

Находим производные второго порядка

Следовательно, – выполнены достаточные условия максимума

Следовательно,

, - ОМП.

3. Равномерное распределение на неизвестном интервале

Составим функцию правдоподобия

Функция правдоподобия примет свое максимальное значение, если разность

, при условии, что все , то есть , - оценки максимального правдоподобия

## Сравнение оценок.

**Определение**. Если и  **–** две несмещенные оценки параметра , и . Тогда оценка , чем оценка .

**Пример**. Рассмотрим выборку из равномерного закона , где – неизвестный параметр, – известный параметр.

Рассмотрим две оценки и

Найдем и , используя их законы распределения.

В самом деле, , где

.  
Найдем плотности:

Следовательно,

Таким образом, , и обе оценки несмещённые.

Сравним дисперсии.

Аналогично,

Далее, поскольку

то

Итого, что означает большую эффективность оценки .

## Теорема (неравенство Рао-Крамера)

Пусть – выборка из параметрической модели с плотностью , пусть допускает дифференцирование по параметру. Тогда каждая несмещенная оценка параметра удовлетворяет неравенству:

где – информация Фишера относительно семейства , содержащаяся в одном наблюдении.

**Замечание.** Для дискретной модели вместо используем .

**Доказательство**. Пусть . Тогда, дифференцируя по параметру очевидные интегральные соотношения, получаем:

Следовательно, , откуда с учетом неравенства Коши-Буняковского , выводим, что

Поскольку

то неравенство доказано.

**Определение.** Оценка называется эффективной, если для нее неравенство Рао-Крамера превращается в равенство, то есть ее эффективность

**Пример**. Пусть - выборка из нормального распределения , причем - известно, – неизвестно.

Рассмотрим оценку неизвестного параметра . Известно, что , . Вычислим информацию Фишера :

Следовательно, – оценка эффективна

# **Занятие 5. Точечные оценки параметров. Самостоятельная работа №1.**

## Задачи для решения в аудитории

1. Постройте ОМП для параметра по выборке из распределения Парето с плотностью .

**Решение**. Функция правдоподобия

возрастает по при всех наборах и любом - ОМП

1. Покажите, что оценка из предыдущей задачи смещенная.

**Решение**. Поскольку , то

1. Методом максимального правдоподобия найдите оценку неизвестного параметра θ, если плотность распределения с.в. имеет вид

и по наблюдениям получены следующие данные:

2,4; 3,5; 3,2; 3,4; 2,5; 2,4; 3,1; 3,4; 3,8; 2,6.

**Ответ**.

1. Покажите, что оценка максимального правдоподобия параметра , полученная по выборке из пуассоновского закона, является эффективной.

**Решение**. Поскольку , то функция правдоподобия имеет вид:

то естьоценка максимального правдоподобия совпадает с оценкой по методу моментов.

Вычислим информацию Фишера:

, ,

Следовательно,

## Задачи для самостоятельного решения

1. Постройте ОМП для параметра по выборке из логнормального распределения с плотностью . Параметр считать известным. Вычислите информацию Фишера и покажите, что полученная оценка эффективна.

**Ответ**.

1. Постройте ОМП для параметра по выборке из биномиального закона распределения: .

**Ответ**.

1. Постройте ОМП для параметра по выборке из распределения с плотностью . Параметр считать известным.

А) Покажите, что полученная оценка смещенная.

Б) Постройте несмещенную оценку параметра .

В) Вычислите информацию Фишера и покажите, что асимптотически эффективна.

**? Ответ**.

1. Найдите ОМП двумерного параметра , если плотность распределения имеет вид и по наблюдениям получены следующие данные: -1,04; -0,52; 0,0; 0,78; 1,0.

**Ответ.**

## Самостоятельная работа №1 «Методы получения оценок»

**Вариант 1**

1. Найдите методом моментов оценку неизвестного параметра θ, если выборка взята из равномерного на распределения. Докажите, что полученная оценка состоятельна.

2. Методом максимального правдоподобия найдите оценку неизвестного параметра θ, если плотность распределения с.в. имеет вид и по наблюдениям получены следующие данные: 6; 12; 15; 24; 30.

**Вариант 2**

1. Методом максимального правдоподобия найдите оценку неизвестного параметра θ, если плотность распределения с.в. имеет вид и по наблюдениям получены следующие данные: 1,4; 3,5; 3,2; 4,4; 2,5; 3,4; 2,1; 2,4; 3,8; 2,6.

2. Найдите методом моментов оценку неизвестного параметра θ, если выборка взята из распределения с плотностью . Докажите, что полученная оценка несмещенная.

**Вариант 3**

1. Методом максимального правдоподобия найдите оценку неизвестного параметра θ, если плотность распределения с.в. имеет вид и по наблюдениям получены следующие данные: 2,4; 3,5; 3,2; 3,4; 2,5; 2,4; 3,1; 3,4; 3,8; 2,6.

2. Найдите методом моментов оценку неизвестного параметра θ, если выборка взята из распределения с плотностью . Докажите, что полученная оценка несмещенная.

**Вариант 4**

**1.** Методом максимального правдоподобия найдите оценку неизвестного параметра θ, если плотность распределения с.в. имеет вид и по наблюдениям получены следующие данные: 10; 14; 16; 18; 20.

2. Постройте оценку по методу моментов для параметра по выборке из биномиального закона распределения: . Докажите, что полученная оценка несмещенная и состоятельная.

**Вариант 5**

**1.** Найдите ОМП неизвестного параметра , если выборка взята из распределения с плотностью параметр известен. Докажите, что полученная оценка несмещенная.

2. Методом моментов найдите оценку неизвестного параметра θ, если плотность распределения с.в. имеет вид и по наблюдениям получены следующие данные: 1; 2; 3; 4; 5.

**Вариант 6**

1. Найдите методом моментов оценку двумерного параметра по выборке , полученной из закона распределения с плотностью

.

2. Методом максимального правдоподобия найдите оценку неизвестного параметра θ, если плотность распределения с.в. имеет вид и по наблюдениям получены следующие данные: 4; 7; 9; 12; 14.

**Ответы.**

**Вариант 1. 1. 2.**

**Вариант 2. 1.**  . **2**.

**Вариант 3. 1.**  . **2.** .

**Вариант 4. 1.** .  **2**.

**Вариант 5. 1.**  . **2**.

**Вариант 6. 1.**  **2.**

|  |  |
| --- | --- |
| **Вариант 1 СР№1-2016-ФН**  **1.** Найдите методом моментов оценку неизвестного параметра θ, если выборка взята из равномерного на распределения. Докажите, что полученная оценка состоятельна.  **2.** Методом максимального правдоподобия найдите оценку неизвестного параметра θ, если плотность распределения имеет вид и по наблюдениям получены следующие данные:  6; 12; 15; 24; 30. | **Вариант 2 СР№1-2016-ФН**  **1**. Методом максимального правдоподобия найдите оценку неизвестного параметра θ, если плотность распределения имеет вид и по наблюдениям получены следующие данные: 1,4; 3,5; 3,2; 4,4; 2,5; 3,4; 2,1; 2,4; 3,8; 2,6.  **2.** Найдите методом моментов оценку неизвестного параметра θ, если выборка взята из распределения с плотностью . Докажите, что полученная оценка несмещенная. |
| **Вариант 3 СР№1-2016-ФН**  **1.** Методом максимального правдоподобия найдите оценку неизвестного параметра θ, если плотность распределения имеет вид , и по наблюдениям получены данные: 2,4; 3,5; 3,2; 3,4; 2,5; 2,4; 3,1; 3,4; 3,8; 2,6.  **2**. Найдите методом моментов оценку неизвестного параметра θ, если выборка взята из распределения с плотностью . Докажите, что полученная оценка несмещенная. | **Вариант 4 СР№1-2016-ФН**  **1.** Методом максимального правдоподобия найдите оценку неизвестного параметра θ, если плотность распределения с.в. имеет вид и по наблюдениям получены следующие данные:10;14;16;18; 20.    **2**. Постройте оценку по методу моментов для параметра по выборке из биномиального закона распределения: . Докажите, что полученная оценка несмещенная и состоятельная. |
| **Вариант 5 СР№1-2016-ФН**  **1.** Найдите ОМП неизвестного параметра , если выборка взята из распределения с плотностью параметр известен. Докажите, что полученная оценка несмещенная.  **2.** Методом моментов найдите оценку неизвестного параметра θ, если плотность распределения с.в. имеет вид и по наблюдениям получены следующие данные: 1; 2; 3; 4; 5. | **Вариант 6 СР№1-2016-ФН**  **1.** Найдите методом моментов оценку двумерного параметра по выборке , полученной из закона распределения с плотностью  .  **2.** Методом максимального правдоподобия найдите оценку неизвестного параметра θ, если плотность распределения с.в. имеет вид и по наблюдениям получены следующие данные: 4; 7; 9; 12; 14. |

# **Лекция 5. Достаточные статистики. Критерий факторизации. Совместный закон распределения выборочного среднего и выборочной дисперсии**

## Достаточные статистики

Пусть - выборка из распределения, зависящего от параметра (реализация случайного вектора с независимыми компонентами)

**Определение**. Вектор-функция называется достаточной статистикой для оценки параметра , если условная функция распределения не зависит от при любых значениях .

**Замечание.**

Статистика является достаточной для оценки параметра , если

**Дискретный случай**

Условные вероятности не зависят от при любых значениях .

**Непрерывный случай**

Условные плотности не зависят от при любых значениях .

**Пример**. Пусть – реализации бернуллиевской случайной величины (принимающей значения 1 и 0 с вероятностями и ).

Докажем по определению, что является достаточной статистикой для оценки параметра . Найдем условные вероятности

Вероятность, стоящая в знаменателе, по теореме Бернулли равна

Числитель равен нулю, если

А если , то

Таким образом, условная вероятность в любом случае не зависит от :

## Теорема (критерий факторизации).

Статистика является достаточной для оценки параметра тогда и только тогда, когда функция правдоподобия имеет вид:

**Доказательство** для дискретного случая.

Пусть Тогда

Зафиксируем и рассмотрим случай Тогда в числителе стоит , а в знаменателе

Следовательно,

Обратно, если - достаточная статистика и , то

=

В этом произведении первый множитель не зависит от , а второй зависит от , но от выборки зависит только через статистику

## Примеры.

**1.** Пусть - выборка из закона Пуассона с параметром .

Выпишем функцию правдоподобия:

Применяем критерий факторизации: , а

- зависит от выборки только через , то есть - достаточная статистика для оценки параметра .

**2.** Пусть - выборка из нормального закона распределения .

Выпишем функцию правдоподобия:

Она зависит от выборки только через и , то есть - достаточная статистика.

**Замечание**. Вместо пары статистик можно брать

В самом деле,

1. Пусть - выборка из закона Парето с плотностью

.

Функция правдоподобия

Следовательно, если известно, то - достаточная оценка для параметра .

Если же оба параметра неизвестны, то достаточно знать пару

**Замечание**. Вместо статистики можно брать , поскольку

## Совместный закон распределения выборочного среднего и выборочной дисперсии для нормально распределенной генеральной совокупности.

**Теорема.** Если –выборка из нормального распределения с параметрами и , то и независимы, и имеет распределение .

**Лемма.** Если случайный вектор имеет плотность , – невырожденная матрица, а , то плотность .

**Доказательство леммы**. Пусть – произвольное борелевское подмножество .

С другой стороны,

Следовательно, .

**Доказательство теоремы**. Рассмотрим центрированную и нормированную выборку .

Компоненты вектора независимы и распределены по закону , следовательно, .

Произведем ортогональное преобразование , причем положим

, то есть матрица перехода имеет вид .

При этом , ,

.

Кроме того,

что означает, что вектор также имеет независимые компоненты, распределенные по закону .

Тогда статистика представима в виде:

, откуда следует независимость и , а также вид распределения .

# **Занятие 6. Достаточные статистики.**

## Задачи для решения в аудитории

**1**. Пусть - выборка из показательного закона распределения, (плотности ). Найдите достаточную статистику для оценки параметра .

**Решение**. Выпишем функцию правдоподобия:

Она зависит от выборки только через , то есть - достаточная статистика.

**2**. Найдите достаточную статистику для оценки параметра , если выборка полученаиз распределения Пуассона.

**Ответ**.

**3**. Найдите достаточную статистику для оценки параметра по выборке из распределения с плотностью , (Параметр считается известным.)

**Ответ**.

**4**. Найдите достаточную статистику для оценки параметров и по выборке из распределения с плотностью ,

**Ответ**.

**5**. Найдите достаточную статистику для оценки параметра по выборке из распределения с плотностью , (Параметр считается известным.)

**Ответ**.

6.Найдите достаточную статистику для оценки параметра по выборке из распределения с плотностью

**Ответ**.

1. Найдите достаточную статистику для оценки параметра по выборке из биномиального закона распределения, если число испытаний в каждой серии равно .

**Ответ**.

## Задачи для самостоятельного решения

**Упражнения по теме ДЗ№4:**

1. Докажите, что убывает по параметру при

**Решение**.

1. Докажите, что , где
2. Докажите тождества:

**Указание**. Примените математическую индукцию по

**Решение.**

**Основание**.

поскольку

**Индукционный шаг**

Пусть

Подставим и проинтегрируем по частям

# **Лекция№6**

**Доверительные интервалы**

**Определение.** Доверительным интервалом для одномерного параметра с доверительной вероятностью называется любой интервал , содержащий истинное значение параметра с вероятностью .

## Принцип построения доверительных интервалов:

Пусть – выборка из некоторого закона распределения, зависящего от параметра .

1. Находим статистику , закон распределения которой не зависит от неизвестного параметра .

2. Находим квантили и функции распределения уровней и , то есть такие значения, что монотонно возрастающая функция достигает указанных уровней в этих точках: , . При этом

3. Неравенство разрешается относительно параметра

Обозначив , , получаем доверительный интервал уровня

## Построение доверительных интервалов для параметров нормального распределения

## **1. *Доверительный интервал для (неизвестного) математического ожидания при известном с.к.о. .***

Статистика распределена по нормальному закону с параметрами

Следовательно,

Далее, для квантилей в силу симметрии имеет место соотношение . Разрешаем относительно параметра неравенство :

Таким образом, –доверительный интервал для параметра с доверительной вероятностью .

## **Доверительный интервал для (неизвестного) с.к.о. при известном математическом ожидании .**

Рассмотрим статистику . Поскольку , то , , следовательно, распределена по закону .

Находим квантили и , разрешаем неравенство

относительно :

, – доверительный интервал для при известном

1. Доверительный интервал для (неизвестного) с.к.о. при неизвестном математическом ожидании .

Рассмотрим статистику .

По теореме статистика распределена по закону .

Находим квантили и , разрешаем неравенство

относительно :

, - доверительный интервал для при неизвестном .

**Примечание**. Доверительный интервал для при неизвестном математическом ожидании шире, чем при известном, что объяснятся меньшим количеством информации.

## **Доверительный интервал для (неизвестного) математического ожидания при неизвестном с.к.о. .**

По теореме, статистика и независима от статистики , распределенной по закону . Таким образом, отношение распределено по закону Стьюдента с .

Строим доверительный интервал:

**Примеры**. Пусть

Построим доверительные интервалы

## **5. Построение доверительного интервала для разности математических ожиданий двух независимых выборок из нормального распределения при известных значениях СКО**

Пусть –выборка из нормального распределения с параметрами и ,

–выборка из нормального распределения с параметрами и .

Рассмотрим статистику , распределение которой нормально с параметрами

, .

Следовательно, статистика распределена по стандартному нормальному закону .

Строим доверительный интервал:

## **6. Построение доверительного интервала для разности математических ожиданий двух независимых выборок из нормального распределения при неизвестном СКО**

Пусть –выборка из нормального распределения с параметрами и ,

–выборка из нормального распределения с параметрами и .

Параметр неизвестен, но известно, что распределено по стандартному закону и не зависит от статистики , подчиняющейся распределению .

После очевидных преобразований

, получаем распределение

Стьюдента .

Найдем квантили и и построим доверительный интервал:

Следовательно, с вероятностью

, где .

## **7. Построение доверительного интервала для отношения дисперсий двух независимых выборок из нормального распределения**

Пусть –выборка из нормального распределения с параметрами и ,

–выборка из нормального распределения с параметрами и .

Рассмотрим статистику: .

Отношение, стоящее справа имеет распределение Фишера .

Находим квантили и распределения Фишера и

строим доверительный интервал для отношения :

## **8. Построение доверительного интервала для отношения дисперсий двух независимых выборок из нормального распределения при известных средних**

В случае известных средних значений, используя статистики и , получаем аналогично

# **Занятие 7. Контрольная работа №1**

## Примерный вариант контрольной работы «Оценивание параметров»

1. Методом моментов найдите оценки неизвестных параметров  и , если распределение случайной величины задано формулой:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Значения | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| частоты | 4 | 12 | 9 | 3 | 8 | 11 | 3 |

Таблица частот

**Ответ**.

1. Методом максимального правдоподобия найдите оценку неизвестного параметра θ, если плотность распределения с.в. имеет вид и по наблюдениям получены следующие данные: 7,4; 1,5; 4,2; 4,4; 3,5; 3,4; 1,1; 2,4; 0,8; 2,6.

**Ответ**.

1. Урожайность куста картофеля равна 0 кг с вероятностью 0,1, 1 кг с вероятностью 0,2, 1,5 кг с вероятностью 0,2, 2 кг с вероятностью 0,3 и 2,5 кг с вероятностью 0,2. Какое наименьшее число клубней надо посадить, чтобы с вероятностью не менее 0,975 урожай был не менее 1 тонны? **Ответ**. 648.
2. На основе выборки 24; 54; 41; 17; 48; 33; 42; 44; 92; 27 для нормально распределенной величины постройте доверительный интервал для среднеквадратичного отклонения  при неизвестном среднем с коэффициентом доверия (доверительной вероятностью)  **Ответ.**
3. Дана выборка объема из распределения Парето с плотностью . В качестве оценки неизвестного параметра используется . Докажите, что эта оценка является асимптотически несмещенной.

Функция распределения закона Парето .

# **Коллоквиум №1 « Оценивание параметров».**

1. Неравенство Чебышева (с доказательством).

2. Сходимость почти наверное. Эквивалентные определения (с доказательством). Примеры.

3. Сходимость по вероятности. Связь со сходимостью почти наверное.

4. Сходимость по распределению. Связь со сходимостью по вероятности.

5. Доказательство ЦПТ для независимых одинаково распределенных случайных величин (теорема Леви). Формулировка теоремы Ляпунова.

6. Сходимость в среднем порядка . Связь с другими видами сходимости.

7. Закон больших чисел Чебышева (с доказательством). Формулировки теорем Хинчина, Маркова, Колмогорова.

8. Эмпирическая функция распределения и ее свойства. Закон распределения . Следствия (с доказательством).

9. Законы распределения крайних членов вариационного ряда, их совместный закон распределения (с доказательством). Примеры.

10. Выборочное среднее и выборочная дисперсия и их свойства (с доказательством).

11. Точечные оценки параметров. Несмещенность, состоятельность, примеры.

Достаточные условия состоятельности (с доказательством).

12. Методы получение точечных оценок: метод моментов, метод максимального правдоподобия. Оценка параметров нормального распределения.

13. Эффективность оценки. Неравенство Рао-Крамера (док-во). Информация Фишера. Примеры.

14. Достаточные статистики. Критерий факторизации (док-во). Примеры достаточных статистик.

15. Принцип построения доверительных интервалов. Привести примеры.

16. Независимость выборочного среднего и выборочной дисперсии для нормально распределенной совокупности. Законы распределения выборочного среднего и выборочной дисперсии (с доказательством).

17. Основные распределения математической статистики (нормальное, хи-квадрат, Стьюдента, Фишера) и их характеристики.