

Model matematyczny problemu optymalizacyjnego

Dany jest pewien zakład produkcyjny, w którym wytwarzane są cztery rodzaje produktów. Dysponujemy określoną ilością surowca do ich wytworzenia. Proces produkcyjny składa się z trzech etapów. Dwa pierwsze to praca maszyn. Natomiast trzeci etap zwany wykończeniowym powierza się w ręce pracowników. Każdy z produktów przynosi pewien zysk. Ponadto każdy z nich wymaga pewnego czasu, jaki trzeba poświęcić na jego wyprodukowanie. Zadaniem jest zaplanowanie produkcji, w taki sposób aby zysk tego zakładu produkcyjnego był jak największy w przyjmowanym przez nas horyzoncie czasowym (skala miesiąca).

Problem decyzyjny można zapisać w postaci modelu matematycznego. Zmienne decyzyjne to:

- x_1 – wielkość produkcji (w skali miesiąca) pierwszego produktu,
- x_2 – wielkość produkcji (w skali miesiąca) drugiego produktu,
- x_3 – wielkość produkcji (w skali miesiąca) trzeciego produktu,
- x_4 – wielkość produkcji (w skali miesiąca) czwartego produktu.

Oczywistym jest, że zmienne, które otrzymamy nie mogą być ujemne z racji na rozpatrywanie rzeczywistego modelu, zatem należy wprowadzić dodatkowe ograniczenia, że każdy z produktów musi być wyprodukowany w liczbie większej lub równej 0. Zatem uzyskujemy dolne ograniczenie dla każdej zmiennej:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$$

Wiadomym jest, że do produkcji w rozpatrywanej skali miesiąca dysponujemy określoną ilością surowca o wartości m_c . Do wytworzenia każdego z surowców potrzebna jest dana ilość tego surowca:

- m_1 – masa surowca potrzebna do wytworzenia jednej sztuki pierwszego produktu,
- m_2 – masa surowca potrzebna do wytworzenia jednej sztuki drugiego produktu,
- m_3 – masa surowca potrzebna do wytworzenia jednej sztuki trzeciego produktu,
- m_4 – masa surowca potrzebna do wytworzenia jednej sztuki czwartego produktu.

W związku z powyższym otrzymujemy warunek dotyczący surowca:

$$m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + m_4x_4 \leq m_c$$

Kolejną kwestię, którą należy wziąć pod uwagę jest ilość czasu, jaką zakład może przeznaczyć na produkcję. Czas możemy rozdzielić na czas pracy maszyn i czas pracy ludzi, gdyż każdy produkt wymaga tych dwóch elementów. Dodatkowo pracę maszyn możemy rozdzielić na dwa rodzaje i w ten sposób aby dany produkt mógł zostać wyprodukowany wymagałby przejścia przez dwa etapy pracy maszyn składające się z różnych procesów wytwarzania tego produktu a następnie zostaje on oddany w ręce pracownika, który ma zadanie wykończeniowe.

W ten sposób mamy:

- **1 etap pracy maszyn** – dany jest łączny czas pracy t_{pc} przeznaczony na pierwszy etap w skali miesiąca, którego nie możemy przekroczyć. Dodatkowo dowiadujemy się jeszcze ile wynosi czas obróbki dla każdego produktu:
 - t_{p1} – czas w pierwszym etapie potrzebny do wytworzenia pierwszego produktu,
 - t_{p2} – czas w pierwszym etapie potrzebny do wytworzenia drugiego produktu,
 - t_{p3} – czas w pierwszym etapie potrzebny do wytworzenia trzeciego produktu,
 - t_{p4} – czas w pierwszym etapie potrzebny do wytworzenia czwartego produktu.

Zatem otrzymujemy warunek dotyczący czasu pracy maszyn w ich pierwszym etapie:

$$t_{p1}x_1 + t_{p2}x_2 + t_{p3}x_3 + t_{p4}x_4 \leq t_{pc}$$

- **2 etap pracy maszyn** – dany jest łączny czas pracy t_{dc} przeznaczony na drugi etap w skali miesiąca, którego nie możemy przekroczyć. Dodatkowo dowiadujemy się jeszcze ile wynosi czas obróbki dla każdego produktu:
 - t_{d1} – czas w drugim etapie potrzebny do wytworzenia pierwszego produktu,
 - t_{d2} – czas w drugim etapie potrzebny do wytworzenia drugiego produktu,
 - t_{d3} – czas w drugim etapie potrzebny do wytworzenia trzeciego produktu,
 - t_{d4} – czas w drugim etapie potrzebny do wytworzenia czwartego produktu.

Zatem otrzymujemy warunek dotyczący czasu pracy maszyn w ich drugim etapie:

$$t_{d1}x_1 + t_{d2}x_2 + t_{d3}x_3 + t_{d4}x_4 \leq t_{dc}$$

- **3 etap pracy ludzi** – dany jest łączny czas pracy t_{tc} przeznaczony na trzeci etap w skali miesiąca, którego nie możemy przekroczyć. Dodatkowo dowiadujemy się jeszcze ile wynosi czas obróbki dla każdego produktu:
 - t_{t1} – czas w trzecim etapie potrzebny do wytworzenia pierwszego produktu,
 - t_{t2} – czas w trzecim etapie potrzebny do wytworzenia drugiego produktu,
 - t_{t3} – czas w trzecim etapie potrzebny do wytworzenia trzeciego produktu,
 - t_{t4} – czas w trzecim etapie potrzebny do wytworzenia czwartego produktu.

Zatem otrzymujemy warunek dotyczący czasu pracy ludzi w trzecim etapie:

$$t_{t1}x_1 + t_{t2}x_2 + t_{t3}x_3 + t_{t4}x_4 \leq t_{tc}$$

Dla powyższych warunków dotyczących czasu pracy zakładamy, że w danej chwili może być produkowany tylko jeden produkt. Mogłaby być również sytuacja, w której wszystkie produkty mogą być produkowane jednocześnie. Wówczas warunki wyglądałyby następująco w poszczególnych etapach pracy:

- **1 etap pracy maszyn**

$$\max\{t_{p1}x_1, t_{p2}x_2, t_{p3}x_3, t_{p4}x_4\} \leq t_{pc}$$

- **2 etap pracy maszyn**

$$\max\{t_{d1}x_1, t_{d2}x_2, t_{d3}x_3, t_{d4}x_4\} \leq t_{dc}$$

▪ 3 etap pracy ludzi

$$\max\{t_{t1}x_1, t_{t2}x_2, t_{t3}x_3, t_{t4}x_4\} \leq t_{tc}$$

Jednakże my będziemy rozpatrywać pierwszy przypadek, w którym w danej chwili wytwarzany jest jeden produkt.

Dwa pierwsze etapy są rozdzielone z uwagi na wykorzystanie różnych maszyn i różnych procesów technologicznych.

Praca maszyn i pracowników może być różna. Jednak zakładamy, że wszystkie maszyny dla obu etapów obróbki są takie same, jeżeli chodzi o model i stan użytkowania. Zatem czas wykonywania produktu będzie jednakowy dla każdej maszyny. Podobnie postępujemy w przypadku pracowników. Zakładamy, że ich doświadczenie jest jednakowe i każdy z nich wykonuje dany produkt w tym samym czasie. Więc całkowite czasy, które mamy podane to sumaryczne czasy wszystkich maszyn w przypadku pierwszego i drugiego etapu oraz sumaryczne czasy wszystkich pracowników w przypadku trzeciego etapu.

Celem zadania jest wyznaczenie ilości sztuk dla każdego produktu, które należy wyprodukować aby zmaksymalizować zysk zakładu produkcyjnego. Dysponujemy jeszcze informacją dotyczącą zysku ze sprzedaży jednej sztuki każdego produktu:

- z_1 – zysk ze sprzedaży jednej sztuki pierwszego produktu,
- z_2 – zysk ze sprzedaży jednej sztuki drugiego produktu,
- z_3 – zysk ze sprzedaży jednej sztuki trzeciego produktu,
- z_4 – zysk ze sprzedaży jednej sztuki czwartego produktu.

W ten sposób otrzymujemy funkcję celu:

$$f(x) = z_1x_1 + z_2x_2 + z_3x_3 + z_4x_4 \rightarrow \max$$

Skład zespołu:

- Roksana Cieśla
- Aleksandra Stachniak
- Piotr Stosik