

Цель работы

Решить задачу о погоне.

Задание

Вариант 45 Задача: на море в тумане катер береговой охраны преследует лодку браконьеров. Через определенный промежуток времени туман рассеивается, и лодка обнаруживается на расстоянии 16,4 км от катера. Затем лодка снова скрывается в тумане и уходит прямолинейно в неизвестном направлении. Известно, что скорость катера в 4,2 раза больше скорости браконьерской лодки.

1. Запишите уравнение, описывающее движение катера, с начальными условиями для двух случаев (в зависимости от расположения катера относительно лодки в начальный момент времени).
2. Постройте траекторию движения катера и лодки для двух случаев.
3. Найдите точку пересечения траектории катера и лодки.

Выполнение лабораторной работы

1. Вывод дифференциального уравнения

1.1. Принимаем за $t_0 = 0$, $x_{l0} = 0$ -- место нахождения лодки браконьеров в момент обнаружения, $x_{k0} = 16,4$ км -- место нахождения катера береговой охраны относительно лодки браконьеров в момент обнаружения лодки.

1.2. Введем полярные координаты. Считаем, что полюс – это точка обнаружения лодки браконьеров x_{l0} ($\theta = x_{l0} = 0$), а полярная ось r проходит через точку нахождения катера береговой охраны. (см. рис. -@fig:001)

 Положение катера и лодки в начальный момент времени{ #fig:001 width=70% }

1.3. Траектория катера должна быть такой, чтобы и катер, и лодка все время были на одном расстоянии от полюса 0 , только в этом случае траектория катера пересечется с траекторией лодки. Поэтому для начала катер береговой охраны должен двигаться некоторое время прямолинейно, пока не окажется на том же расстоянии от полюса, что и лодка браконьеров. После этого катер береговой охраны должен двигаться вокруг полюса удаляясь от него с той же скоростью, что и лодка браконьеров.

1.4. Чтобы найти расстояние x (расстояние, после которого катер начнет двигаться вокруг полюса), необходимо составить простое уравнение. Пусть через время t катер и лодка окажутся на одном расстоянии x от полюса. За это время лодка пройдет x , а катер $16,4 - x$ (или $16,4 + x$, в зависимости от начального положения катера относительно полюса). Время, за которое они пройдут это расстояние, вычисляется как $\frac{x}{v}$ или $\frac{16,4 - x}{4,2v}$ (во втором случае $\frac{16,2 + x}{4,2v}$). Так как время одно и то же, то эти величины одинаковы. Тогда неизвестное расстояние x можно найти из следующего уравнения: $\frac{x}{v} = \frac{16,4 - x}{4,2v}$ или $\frac{x}{v} = \frac{16,4 + x}{4,2v}$

Тогда $x_1 = \frac{83}{15}$ (км), а $x_2 = 16,4$ (км), задачу будем решать для двух случаев.

1.5. После того, как катер береговой охраны окажется на одном расстоянии от полюса, что и лодка, он должен сменить прямолинейную траекторию и начать двигаться вокруг полюса удаляясь от него со скоростью лодки v . Для этого скорость катера раскладываем на две составляющие: v_r – радиальная скорость и v_τ – тангенциальная скорость.

Радиальная скорость – это скорость, с которой катер удаляется от полюса, $v_r = \frac{\partial r}{\partial t}$. Нам нужно, чтобы эта скорость была равна скорости лодки, поэтому полагаем $v_r = \frac{\partial r}{\partial t} = v$.

Тангенциальная скорость – это линейная скорость вращения катера относительно полюса. Она равна произведению угловой скорости на радиус, $v_\tau = r \frac{\partial \theta}{\partial t}$.

По теореме Пифагора: $v_\tau = \sqrt{19,36v^2 - v^2} = \sqrt{18,36}v$, тогда получаем $r \frac{\partial \theta}{\partial t} = \sqrt{18,36}v$.

1.6. Решение исходной задачи сводится к решению системы из двух дифференциальных уравнений:
$$\begin{cases} \frac{\partial r}{\partial t} = v \\ r \frac{\partial \theta}{\partial t} = \sqrt{18,36}v \end{cases}$$

Исключая из полученной системы производную по t , можно перейти к следующему уравнению:
$$\frac{\partial r}{\partial \theta} = \sqrt{5}r \sqrt{21}$$

Решив это уравнение, я получу траекторию движения катера в полярных координатах. Начальные условия:
$$\begin{cases} \theta_0 = 0 \\ r_0 = x_1 = \frac{83}{15} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta_0 = 0 \\ r_0 = x_2 = 16,4 \end{cases}$$

2. Построение траекторий движения катера и лодки

2.1. Написала программу на Python:

```
import math
import numpy as np
from scipy.integrate import odeint
import matplotlib.pyplot as plt

k = 16.4
fi = 3*math.pi/4

#функция, описывающая движение катера береговой охраны
def dr(r, tetha):
    dr = sqrt(5)*r/math.sqrt(21)
    return dr

r01 = 83/15

te = np.arange(0, 2*math.pi, 0.01)

r1 = odeint(dr, r01, te)

#функция, описывающая движение лодки браконьеров
```

```

def xt(t):
    xt = math.tan(fi)*t
    return xt

t = np.arange(0, 20, 1)


#Перевод в полярные координаты
tete = (np.tan(xt(t)/t))**-1
rr = np.sqrt(t*t + xt(t)*xt(t))

#построение траектории движения катера в полярных координатах. 1 случай
plt.polar(te, r1, 'g')
#построение траектории движения лодки в полярных координатах
plt.polar(tete, rr, 'b')

#точки пересечения
idx = np.argwhere(np.diff(np.sign(rr - r1))).flatten()
print (tete[-1])
print (rr[idx[-1]])

```

2.2. Получил график:(см. рис. -@fig:002)

Траектории движения катера и лодки для 1 случая{ #fig:002 width=70% }

3.2. В итоге точка пересечения имеет следующие координаты: $\theta = -0.6420926159343304$, $r = 25.455844122715714$,

Выводы

Я решила задачу о погоне.