.

15. Проекционные методы решения краевой задачи для дифференциального уравнения второго порядка

15.1. Постановка задачи. Общие сведения

Рассмотрим краевую задачу для линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с однородными граничными условиями.

Требуется найти решение уравнения

$$Ly = f(x), \tag{1}$$

удовлетворяющее граничным условиям:

$$\alpha_1 y(-1) - \alpha_2 y'(-1) = 0,\ \ |\alpha_1| + |\alpha_2| \neq 0,\ \ \alpha_1\alpha_2 \geq 0, \tag{2}$$

$$\beta_1 y(1) + \beta_2 y'(1) = 0,\ \ |\beta_1| + |\beta_2| \neq 0,\ \ \beta_1\beta_2 \geq 0. \tag{3}$$

Заметим, что при $\alpha_2 = 0$ краевая задача на левом конце промежутка [-1,1] называется первой (I), при $\alpha_1 = 0$ — второй (II), если же оба коэффициента не равны нулю — третьей (III). Аналогично определяется краевая задача для правого конца промежутка.

При применении любого из проекционных методов выбирается линейно независимая система функций $\omega_1(x),\ \omega_2(x), \ldots, \omega_n(x)$, называемая координатной, и приближенное решение ищется в виде линейной комбинации этих функций

$$y^{(n)}(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \omega_i(x). \tag{4}$$

Коэффициенты разложения c_i являются решением линейной системы

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_j = f_i,\ \ i = 1,\, 2,\, \ldots,\, n. \tag{5}$$

Конкретный вид оператора L, дополнительные условия на элементы координатной системы, способ построения элементов матрицы $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ и вектора $F = (f_1,\ f_2, \ldots,\ f_n)'$ определяются используемым проекционным методом.

15.2. Метод Ритца

Рассматривается уравнение

$$Ly = -(p(x)y')' + r(x)y = f(x), \tag{6}$$

где $p(x)$ — непрерывно дифференцируема и $p(x) \geq p_0 > 0$, а $r(x)$ непрерывна и $r(x) > 0,\ \ x \in (-1, 1)$.

Дифференциальный оператор L мы считаем заданным на множестве $D(L)$ дважды непрерывно дифференцируемых функций, удовлетворяющих соответствующим краевым условиям.

Заданная на $D(L)$ билинейная форма $[y, z] = (Ly, z)$ ($(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в пространстве $L_2(-1, 1)$), интегрированием по частям приводится к виду

$$[y, z] = \int_{-1}^{1} (py'z' + ryz)dx + Q_l + Q_r, \tag{7}$$

где

$$Q_l = \begin{cases} 0, \quad \text{I, II}, \\ \dfrac{\alpha_1}{\alpha_2} p(-1)\, y(-1)\, z(-1), \ \ \text{III}. \end{cases}$$
$$Q_r = \begin{cases} 0, \quad \text{I, II}, \\ \dfrac{\beta_1}{\beta_2} p(1)\, y(1)\, z(1), \ \text{III}. \end{cases} \tag{8}$$

В $Q_l,\ Q_r$ справа указан тип краевой задачи (I, II, III).

Билинейная форма $[y, z]$ обладает всеми свойствами скалярного произведения. Используя формулу (7), расширим область задания этого скалярного произведения, включив в нее все абсолютно непрерывные функции, производная которых принадлежит $L_2(-1, 1)$ и которые, кроме того, в случае первой краевой задачи (I) удовлетворяют этому условию. Новая область задания со скалярным произведением $[y, z]$ называется энергетическим пространством оператора L и обозначается H_L.

Зададим на H_L функционал энергии $G(y) = [y, y] - 2(y, f)$. Пусть y^* — решение нашей задачи. Тогда для любой функции $y \in D(L)$ имеем $G(y) = [y, y] - 2[y, y^*] = G(y^*) + [y - y^*,\, y - y^*]$, откуда видно, что $G(y^*)$ есть минимальное значение функционала G на $D(L)$. Функционал G и на H_L достигает своего минимального значения при $y = y^*$. Это и используется для построения приближенного решения методом Ритца.

Выбирается линейно независимая система функций $\omega_1(x), \omega_2(x), \ldots, \omega_n(x) \in H_L$ и приближенное решение ищется в виде линейной комбинации (4) этих функций. Коэффициенты c_j находятся из условия минимума функционала энергии. Последнее требование приводит к системе линейных алгебраических уравнений относительно c_j:

$$\sum_{j=1}^{n} [\omega_j, \omega_i]\, c_j = (f, \omega_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{9}$$

Итак, приближенное решение по методу Ритца строится по формуле (4), где коэффициенты c_j находятся из системы линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, c_j = f_i, \ \ i = 1, 2, \ldots, n. \quad a_{ij} = [\omega_i, \omega_j], \quad f_i = (f, \omega_i). \tag{10}$$

15.3. Метод Галеркина

В случае, когда координатные функции $\omega_i(x)$ выбраны из области определения оператора $L(\omega_i \in D(L))$, система уравнений (9) может быть переписана в виде

$$\sum_{j=1}^{n} (L\omega_j, \omega_i) c_j = (f, \omega_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{11}$$

Эту систему можно трактовать как условие ортогональности в L_2 невязки $Ly_n - f$ всем функциям координатной системы. Эти соображения применимы и в случае более общего уравнения, когда оператор L не является самосопряженным и положительно определенным

$$Ly = p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = f(x). \tag{12}$$

Итак, метод Галеркина решения уравнения (12) при однородных краевых условиях состоит в следующем. Выбирается координатная система функций $\omega_1(x),\ \omega_2(x), \ldots, \omega_n(x) \in D(L)$.

Приближенное решение строится по формуле (4), в которой коэффициенты c_j находятся из системы уравнений (11).

Отметим одну особенность метода Галеркина. Если дифференциальное уравнение имеет вид

$$Ly = -(p(x)y')' + q(x)y' + r(x)y = f(x), \quad p(x) > 0 \tag{13}$$

и краевая задача не является первой, то координатные функции могут не удовлетворять соответствующему краевому условию. При этом необходимо заменить в системе (11) коэффициенты $(L\omega_j, \omega_i)$ на
$$[\omega_j, \omega_i] + (q\,\omega_j' + r\omega_j,\, \omega_i), \tag{14}$$
где
$$[\omega_j,\, \omega_i] = \int\limits_{-1}^{1} p\,\omega_j'\,\omega_i'\,dx + Q_l + Q_r. \tag{15}$$

Здесь Q_l, Q_r имеют прежний смысл и вычисляются по формуле (8).

15.4. Метод моментов

Отличие этого метода решения краевой задачи для уравнения (12) от метода Галеркина состоит в том, что требуется ортогональность невязки приближенного решения не функциям координатной системы, а некоторым другим выбранным функциям.

Итак, метод моментов краевой задачи для уравнения (12) состоит в следующем. Выбирается координатная система функций $\omega_1(x),\ \omega_2(x), \ldots, \omega_n(x) \in D(L)$ и другая система функций $\psi_1(x),\ \psi_2(x), \ldots, \psi_n(x)$, называемая проекционной системой. Приближенное решение строится по формуле (4), причем коэффициенты c_j находятся из системы уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} (L\omega_j, \psi_i)c_j = (f, \psi_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{16}$$

15.5. Метод наименьших квадратов

Очевидно, что решение y^* краевой задачи для уравнения (12) доставляет минимум функционалу $G(y) = (Ly - f, Ly - f)$, заданному на множестве $D(L)$. В методе наименьших квадратов приближенное решение в виде (4) строится из условия минимизации функционала G, что легко приводит к системе линейных уравнений относительно c_j:

$$\sum_{j=1}^{n} (L\omega_j, L\omega_i)c_j = (f, L\omega_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{17}$$

Итак, в методе наименьших квадратов выбирается координатная система, удовлетворяющая краевым условиям, приближенное решение строится по формуле (4), где c_j находятся из системы уравнений (17). Заметим, что этот метод можно рассматривать как частный случай метода моментов при специальном выборе проекционной системы: $\psi_j = L\omega_j$.

15.6. Метод коллокации

Отличие этого метода от метода моментов состоит в том, что мы требуем не ортогональности невязки приближенного решения функциям некоторой системы, а обращения ее в ноль в некоторых точках промежутка $[-1, 1]$.

Итак, в методе коллокации выбирается координатная система, удовлетворяющая краевым условиям, выбирается некоторая система точек $-1 \leq t_1 < t_2 \ldots < t_n \leq 1$, называемых узлами коллокации, и приближенное решение строится по формуле (4), где c_j находятся из системы уравнений $\sum\limits_{j=1}^{n} (L\omega_j\,|_{x=t_i})c_j = f(t_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$

В качестве узлов коллокации рекомендуется брать узлы многочлена Чебышева первого рода.

15.7. Выбор координатной системы

В качестве координатной системы часто используются системы ортогональных многочленов Якоби $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$. Приведем необходимые сведения об этих многочленах. Нам потребуется частный случай многочленов, когда $\alpha = \beta = k$ — целое число.

$$P_n^{(k,k)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-x^2)^{-k}\frac{d^n}{dx^n}(1-x^2)^{n+k}. \tag{18}$$

Свойства многочленов Якоби

1. $P_n^{(k,k)}$ есть многочлен степени n, четный при четном n и нечетный при нечетном n.
2. Многочлены $P_n^{(k,k)}(x)$ обладают следующим свойством ортогональности:
$$\int\limits_{-1}^{1}(1-x^2)^k P_n^{(k,k)}(x)P_m^{(k,k)}(x)\,dx = \begin{cases} 0\,, & n \neq m \\ \dfrac{2^{2k+1}((n+k)!)^2}{((2n+2k+1)n!(n+2k)!)}\,, & n = m. \end{cases}$$
3. $P_0^{(k,k)}(x) = 1, \quad P_1^{(k,k)}(x) = (k+1)\,x.$
4. Три последовательных многочлена Якоби связаны рекуррентной формулой:
$$P_{n+2}^{(k,k)}(x) \;=\; \frac{(n+k+2)(2n+2k+3)x\cdot P_{n+1}^{(k,k)}(x) - (n+k+2)(n+k+1)P_n^{(k,k)}(x)}{(n+2k+2)(n+2)},$$
$n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$
5. Правила дифференцирования полиномов Якоби
$$\left[P_n^{(k,k)}(x)\right]' = \frac{n+2k+1}{2}P_{n-1}^{(k+1,k+1)}(x),\ \ n \geq 1,$$
$$\left[\left(1-x^2\right)^k P_n^{(k,k)}(x)\right]' = -2(n+1)\left(1-x^2\right)^{k-1}P_{n+1}^{(k-1,k-1)}(x),\ \ k \geq 1.$$

Замечание 1. При решении задачи с неоднородными граничными условиями решение следует представить в виде $y(x) = u(x) + z(x)$, где $u(x)$ должно удовлетворять однородным граничным условиям, а $z(x)$ — неоднородным и может иметь, например, вид $z(x) = d_1x + d_2$. d_1, d_2 определяются из граничных условий. Тогда $u(x)$ является решением задачи
$$\begin{cases} Lu = f(x) - Lz, \\ \alpha_1 u(-1) - \alpha_2 u'(-1) = 0, \\ \beta_1 u(1) \quad + \beta_2 u'(1) = 0. \end{cases}$$

Замечание 2. При выполнении задания на Maple можно использовать встроенные полиномы Якоби $P(n,\,\alpha,\,\beta,\,x)$ из пакета *orthopoly.*

Замечание 3. Координатную систему, удовлетворяющую граничным условиям, можно строить следующим образом: W_1, W_2 — полиномы не выше третьей степени, удовлетворяющие граничным условиям, например, в виде:
$W_1(x) = x^2 + c_1\,x + d_1,\ \ W_2(x) = x^3 + c_2\,x + d_2,$ где $c_1,\ d_1,\ c_2,\ d_2$ находятся из граничных условий, а для $i = 3,\ 4, \ldots$ $W_i\,(x) = \left(1-x^2\right)^2 P_{i-3}^{(2,2)}\,(x)\,.$

Замечание 4. Для решения задачи на промежутке $[a,b] \neq [-1,1]$ часто бывает удобнее свести задачу к задаче на промежутке $[-1,1]$ или сделать соответствующую замену переменной в многочленах Якоби, т.е. взять многочлены $P((2x-b-a)/(b-a))$.

15.8. Задание

Написать программу, решающую задачу указанным проекционным методом и методом коллокации.

Число n координатных функций должно являться параметром программы.

Программа должна выдавать на печать

- расширенную матрицу системы;

- число обусловленности матрицы $\mu(A)$;
- коэффициенты разложения приближенного решения по координатным функциям;
- значения приближенного решения в точках -0.5, 0, 0.5.

Сравнить значения решения для различных n с точным решением u^*, полученным обращением к функции Maple. Построить графики решений в одних осях кооординат. Результаты представить в виде таблицы 1.

Таблица 1

n	$\mu(A)$	$u^{(n)}(x)$			$u^*(x) - u^{(n)}(x)$		
		x=-0.5	x=0	x=0.5	x=-0.5	x=0	x=0.5
3							
4							
5							
6							
7							

Варианты задания