14. Разностный метод решения краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. Метод прогонки

14.1. Постановка задачи

Дано уравнение

$$Ly = f(x), \tag{1}$$

где Ly может иметь один из двух видов

$$Ly = -p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y \tag{2}$$

или

$$Ly = -(p(x)y')' + q(x)y' + r(x)y. \tag{3}$$

Функции $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ предполагаются достаточно гладкими, кроме того

$$p(x) \geq p_0 > 0,\ r(x) \geq 0 \text{ при } x \in [a, b].$$

Требуется найти решение уравнения (1), удовлетворяющее граничным условиям:

$$\alpha_1 y(a) - \alpha_2 y'(a) = \alpha,\ \ |\alpha_1| + |\alpha_2| \neq 0,\ \ \alpha_1\alpha_2 \geq 0, \tag{4}$$

$$\beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = \beta,\ \ |\beta_1| + |\beta_2| \neq 0,\ \ \beta_1\beta_2 \geq 0. \tag{5}$$

14.2. Аппроксимация дифференциального уравнения разностным

Разобьем промежуток $[a, b]$ на n равных частей. Пусть $h = (b - a)/n$ и построим сетку узлов с шагом $h:\ x_i = a + ih,\ i = 0, 1, \ldots, n$. Назовем эту сетку узлов основной (рис. 1).

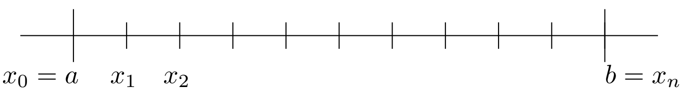

Рис. 1. Основная сетка

Решение исходной задачи будем отыскивать в виде таблицы значений в точках сетки $y_i \approx y(x_i)$, $i = 0, 1, \ldots, n$.

Обозначим через p_i, q_i, r_i, f_i значения функций $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$, $f(x)$ в точках сетки x_i.

Заменяя производные в уравнении (1) конечно-разностными отношениями с погрешностью $O(h^2)$, получаем для случаев (2) и (3) соответственно

$$-p_i \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + q_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + r_i y_i = f_i \tag{6}$$

$$-\left(p_{i+\frac{1}{2}} \frac{y_{i+1} - y_i}{h^2} - p_{i-\frac{1}{2}} \frac{y_i - y_{i-1}}{h^2}\right) + q_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + r_i y_i = f_i. \tag{7}$$

Здесь $i = 1, 2, \ldots, n - 1$.

Перегруппируем коэффициенты при неизвестных $y_0, y_1, \ldots, y_n$, запишем уравнения (6) и (7) в виде

$$A_i y_{i-1} - B_i y_i + C_i y_{i+1} = G_i,\ i = 1, 2, \ldots, n - 1. \tag{8}$$

Отметим, что если решение исходной задачи четырежды непрерывно дифференцируемо при $x \in [a, b]$, то для внутренних точек сетки аппроксимация дифференциального уравнения разностным выполнена со вторым порядком относительно шага сетки ($O(h^2)$).

14.3. Аппроксимация граничных условий

Недостающие два уравнения для достижения замкнутой системы относительно $y_0,\, y_1, \ldots,\, y_n$ получим, аппроксимируя граничные условия.

Заметим, что при $\alpha_2 = 0$ краевая задача на левом конце промежутка называется первой (I), при $\alpha_1 = 0$ — второй (II), если же оба коэффициента не равны нулю — третьей (III). Аналогично определяется краевая задача для правого конца промежутка.

Заметим, что в случае 1-ой краевой задачи, т. е. при $\alpha_2 = 0,\ \beta_2 = 0$, граничные условия записываются в виде $y_0 = \alpha,\ y_n = \beta$ и суммарный порядок аппроксимации дифференциальной задачи разностной — второй.

Рассмотрим различные способы аппроксимации производных в граничных условиях.

1. Аппроксимируя производные в (4)-(5) соответственно разностями “вперед” и “назад”, получим

$$\alpha_1 y_0 - \alpha_2 \frac{(y_1 - y_0)}{h} = \alpha, \tag{9}$$

$$\beta_1 y_n + \beta_2 \frac{(y_n - y_{n-1})}{h} = \beta. \tag{10}$$

   Используемые конечно-разностные отношения для аппроксимации производных в (9) и (10) обеспечивают лишь первый порядок аппроксимации относительно шага сетки и соответственно суммарный порядок аппроксимации дифференциальной задачи разностной — первый (O(h)).

   Представим (9) и (10) соответственно в виде

$$-B_0 y_0 + C_0 y_1 = G_0, \tag{11}$$

$$A_n y_{n-1} - B_n y_n = G_n. \tag{12}$$

   В итоге получим линейную замкнутую систему (n+1)-го порядка относительно $y_0, y_1, \ldots, y_n$ вида

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} & - & B_0 y_0 & + & C_0 y_1 & = & G_0, \\ A_i y_{i-1} & - & B_i y_i & + & C_i y_{i+1} & = & G_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1, \\ \cdots\cdots & & \cdots & & \cdots\cdots & & \cdots \\ A_n y_{n-1} & - & B_n y_n & & & = & G_n. \end{array}\right. \tag{13}$$

   Заметим, что матрица системы является трехдиагональной.

2. Приведем один из способов аппроксимации граничных условий с $O(h^2)$.

   Пусть $h = (b-a)/n$. Вводится сетка (рис. 2): $x_i = a - h/2 + ih,\ \ i = 0, 1, \ldots, n+1$, так что $\quad x_0 = a - h/2,\ x_{n+1} = b + h/2$.

   Назовем эту сетку сдвинутой, в отличие от предыдущей — основной.

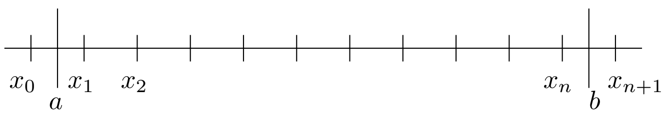

Рис. 2. Сдвинутая сетка

   Граничные условия (4-5) аппроксимируем следующим образом:

$$\alpha_1 \frac{y_0 + y_1}{2} - \alpha_2 \frac{y_1 - y_0}{h} = \alpha, \tag{14}$$

$$\beta_1 \frac{y_{n+1} + y_n}{2} + \beta_2 \frac{y_{n+1} - y_n}{h} = \beta. \tag{15}$$

Для остальных точек x_i, $i = 1, 2, \dots, n$ выписываются разностные уравнения, аппроксимирующие дифференциальное уравнение (1) в узлах сдвинутой сетки аналогично (6), (7). В результате приходим к системе $(n+2)$-го порядка относительно y_0, y_1, …, y_{n+1}. Приводим её к виду, аналогичному (13).

$$\left\{\begin{array}{llllllll} & - & B_0 y_0 & + & C_0 y_1 & = & G_0, & \\ A_i y_{i-1} & - & B_i y_i & + & C_i y_{i+1} & = & G_i, & i = 1,\, 2, \dots,\, n, \\ \cdots\cdots & & \cdots & & \cdots\cdots & & \cdots & \\ A_{n+1} y_n & - & B_{n+1} y_{n+1} & & & = & G_{n+1}. & \end{array}\right. \tag{16}$$

14.4. Метод прогонки для решения систем с трехдиагональной матрицей

Изложим метод на примере системы $(n+1)$ порядка вида (13).

Будем отыскивать решение системы в виде

$$y_i = s_i y_{i+1} + t_i,\ i = 0, 1, \dots, n-1. \tag{17}$$

Прогоночные коэффициенты s_i, t_i подлежат определению.

Из нулевого уравнения системы (13) находим

$$s_0 = \frac{C_0}{B_0},\ t_0 = \frac{-\,G_0}{B_0}.$$

Подставляя y_{i-1} в i-ое уравнение системы

$$A_i(s_{i-1}y_i + t_{i-1}) - B_i y_i + C_i y_{i+1} = G_i,$$

получим рекуррентные формулы

$$s_i = \frac{C_i}{B_i - A_i s_{i-1}}, \quad t_i = \frac{A_i t_{i-1} - G_i}{B_i - A_i s_{i-1}},\ i = 1, 2, \dots, n. \tag{18}$$

В n-ом уравнении системы (13) $C_n = 0$, следовательно $s_n = 0$, значит из (17) имеем $y_n = t_n$. Затем по формулам (17) находим $y_{n-1}, y_{n-2}, \dots, y_0$.

Результаты вычислений удобно представить в виде таблицы 1.

Таблица 1

i	x_i	A_i	B_i	C_i	G_i	s_i	t_i	y_i
0	x_0	A_0	B_0	C_0	G_0	s_0	t_0	y_0
1	x_1	A_1	B_1	C_1	G_1	s_1	t_1	y_1
…	…	…	…	…	…	…	…	…
n-1	x_{n-1}	A_{n-1}	B_{n-1}	C_{n-1}	G_{n-1}	s_{n-1}	t_{n-1}	y_{n-1}
n	x_n	A_n	B_n	C_n	G_n	s_n	t_n	$y_n{=}t_n$

В этой таблице все столбцы, кроме последнего заполняются сверху вниз — прямая прогонка. Последний столбец, содержащий решение, заполняется снизу вверх — обратная прогонка.

Замечание 1. Метод прогонки относится к экономичным методам решения линейных систем, так как количество выполняемых действий линейно зависит от порядка системы — $8\,(n+1)$.

Замечание 2. При выполнении условий, предусмотренных в постановке задачи, при достаточно малом h, коэффициенты A_i, B_i, C_i, должны быть одного знака и $|A_i + C_i \quad| \le |B_i|$, $|s_i| \le 1$, $i = 0,\, 1, \dots, n$, причём неравенство должно быть строгим хотя бы для одного уравнения.

Замечание 3. Если разностная схема аппроксимирует исходную задачу и устойчива, то решение разностной схемы будет сходиться к решению исходной задачи при $h \to 0$ с тем же порядком, с которым выполнена аппроксимация.

14.5. Задание

1. Для реализации алгоритма метода прогонки следует создать модуль с процедурой, параметрами которой должны являться порядок системы, массивы коэффициентов A, B, C, G. Результатом должен быть массив решения Y в точках основной сетки.

2. Используя функцию Maple, получить "точное" решение задачи в узлах основной сетки, обозначим его Y_{ex}.

3. Получить решение с порядком $O(h)$ при $n = 10$. Результаты оформить в виде таблицы 1.

4. Получить решение с порядком $O(h)$ при $n = 20$. Уточнить по правилу Рунге. Обозначим его Y_{ut}. Сравнить с "точным" решением.

5. Получить решение с $O(h^2)$ при $n = 10$. Результаты оформить в виде таблицы 1.
   При построении решения на сдвинутой сетке следует получить решение в точках основной сетки.

6. Получить решение с $O(h^2)$ при $n = 20$. Уточнить по правилу Рунге. Сравнить с "точным" решением.

Результаты в точках основной сетки следует представить в виде таблицы 2.

Таблица 2

x	Y_{ex}	$O(h)$		$O(h^2)$	
		Y_{ut}	$Y_{ut} - Y_{ex}$	Y_{ut}	$Y_{ut} - Y_{ex}$
a					
$a + h$					
$a + 2h$					
$\dots$					
$a+nh = b$					

Здесь $n = 10,\ h = (b - a)/n$.
Сравнить решения на графиках.

Варианты граничных задач