

## 12. Итерационные методы решения линейных систем

Пусть требуется решить линейную систему  $n$ -го порядка  $Ax = b$ .

Для решения линейной системы итерационными методами ее необходимо привести эквивалентно к виду  $x = Hx + g$ .

Выбираем начальное приближение  $x^{(0)}$  (например, вектор с нулевыми компонентами).

### 12.1. Метод простой итерации

#### 12.1.1. Расчетная формула. Условие сходимости

Расчетная формула метода имеет вид:

$$x^{(k+1)} = Hx^{(k)} + g \quad (1)$$

или покомпонентно

$$x_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^n h_{ij} x_j^{(k)} + g_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

Необходимое и достаточное условие сходимости:  $\rho(H) < 1$ , где  $\rho(H)$  — спектральный радиус матрицы  $H$ .

Достаточное условие сходимости:  $\|H\| < 1$ , где матричная норма мультипликативна.

#### 12.1.2. Получение решения с заданной точностью

Пусть  $x^*$  — точное решение системы,  $x^{(k)}$  — решение, полученное на  $k$ -ой итерации.

Скорость сходимости метода определяется нормой  $\|H\|$ , так как

$$\|x^{(k+1)} - x^*\| \leq \|H\| \|x^{(k)} - x^*\|.$$

Требуется найти такое  $x^{(k)}$ , чтобы  $\|x^{(k)} - x^*\| < \varepsilon$  (фактическая погрешность  $x^{(k)}$ ).

Для обеспечения заданной точности используется априорная оценка погрешности решения

$$\|x^{(k)} - x^*\| \leq \|H\|^k \|x^{(0)}\| + \frac{\|H\|^k}{1 - \|H\|} \|g\| \quad (3)$$

или апостериорная

$$\|x^{(k)} - x^*\| \leq \frac{\|H\|}{1 - \|H\|} \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|. \quad (4)$$

Очевидно, что если

$$\|H\| \leq \frac{1}{2},$$

то

$$\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| < \varepsilon \Rightarrow \|x^{(k)} - x^*\| < \varepsilon.$$

### 12.2. Метод Зейделя

Расчетная формула покомпонентно имеет следующий вид:

$$x_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{i-1} h_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i}^n h_{ij} x_j^{(k)} + g_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5)$$

Представим эту формулу в векторном виде.

Матрицу  $H$  представим в виде  $H = H_L + H_R$ , где

$$H_L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ h_{21} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{n1} & h_{n2} & \dots & 0 \end{bmatrix}, H_R = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1n} \\ 0 & h_{22} & \dots & h_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & h_{nn} \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$x^{(k+1)} = H_L x^{(k+1)} + H_R x^{(k)} + g,$$

следовательно расчетная формула метода Зейделя в векторном виде:

$$x^{(k+1)} = (E - H_L)^{-1} H_R x^{(k)} + (E - H_L)^{-1} g. \quad (6)$$

Метод Зейделя для системы  $x = Hx + g$  совпадает с методом итерации для системы

$$x = H_{seid} x + g_{seid}, \text{ где } H_{seid} = (E - H_L)^{-1} H_R, \quad g_{seid} = (E - H_L)^{-1} g. \quad (7)$$

Достаточное условие сходимости:  $\|H\|_\infty < 1$  или  $\|H\|_1 < 1$ .

Области сходимости методов итерации и Зейделя различны.

### 12.3. Приведение системы вида $Ax = b$ к виду $x = Hx + g$

1. Пусть матрица  $A$  имеет диагональное преобладание, тогда  $H = E - D^{-1}A$ ,  $g = D^{-1}b$ , где  $D$  — диагональная матрица, у которой на диагонали стоят диагональные элементы матрицы  $A$ .

В этом случае элементы матрицы  $H$  и столбца свободных членов  $g$  вычисляются по следующим формулам:

$$h_{ij} = \begin{cases} 0, & i = j, \\ -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}, & i \neq j, \end{cases} \quad g_i = \frac{b_i}{a_{ii}}. \quad (8)$$

Очевидно, что достаточное условие сходимости метода простой итерации в этом случае будет выполнено.

Посмотрим, какой вид в этом случае будут иметь  $H_{seid}$  и  $g_{seid}$ .

Обозначим

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 0 \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Тогда  $A = L + D + R$ , так что в прежних обозначениях  $H_L = -D^{-1}L$ ,  $H_R = -D^{-1}R$ ,

$$H_{seid} = (E - H_L)^{-1} H_R = -(E + D^{-1}L)D^{-1}R = -(D + L)^{-1}R, \quad g_{seid} = (D + L)^{-1}g.$$

Известно, что если матрица  $A$  положительно определена, то метод Зейделя, называемый в этом случае методом Некрасова, для системы  $Ax = b$  сходится.

2. Пусть  $A$  самосопряженная ( $A = A^*$ ) и положительно определенная матрица,

$$0 < m \leq \lambda(A) \leq M, \quad \alpha = 2/(m + M),$$

тогда матрицу  $H$  и столбец свободных членов  $g$  можно строить следующим образом:

$$H = E - \alpha A, \quad g = \alpha b.$$

Параметр  $\alpha$  называется оптимальным параметром.

*Упражнение*

Проверить выполнение необходимого и достаточного условия сходимости.

## 12.4. Метод верхней релаксации

Расчетная формула метода для системы  $Ax = b$ :

$$x_i^{(k)} = x_i^{(k-1)} + q \frac{b_i - (a_{i1}x_1^{(k)} + \dots + a_{ii-1}x_{i-1}^{(k)} + a_{ii}x_i^{(k-1)} + \dots + a_{in}x_n^{(k-1)})}{a_{ii}}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (9)$$

Метод будет сходиться, если матрица симметрическая, положительно-определенная и кроме того  $0 < q < 2$ .

Для системы  $x = Hx + g$ , где  $H$  и  $g$  строятся по формулам (8), расчетная формула, очевидно, примет следующий вид:

$$x_i^{(k)} = x_i^{(k-1)} + q \left( \sum_{j=1}^{i-1} h_{ij}x_j^{(k)} + \sum_{j=i+1}^n h_{ij}x_j^{(k-1)} - x_i^{(k-1)} + g_i \right), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (10)$$

Быстрота сходимости релаксационного циклического процесса определяется наибольшим модулем собственных значений матрицы  $S_q = (D + qL)^{-1}(D - qD - qR)$ , где  $D$ ,  $L$  и  $R$  диагональная, поддиагональная и наддиагональная части матрицы  $A$ . Оптимальное значение  $q$  вычисляется по формуле:

$$q = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho^2(H)}}, \quad (11)$$

здесь  $\rho(H)$  — спектральный радиус матрицы  $H$ .

Если же  $\rho(H)$  неизвестно, его определяют экспериментально при решении системы методом простой итерации. Если наибольшее по модулю собственное значение матрицы  $H$  отделено от остальных собственных значений, то оно может быть определено из отношений одноименных компонент векторов  $x^{(k+1)} - x^{(k)}$  и  $x^{(k)} - x^{(k-1)}$ . Действительно,  $x^{(k+1)} - x^{(k)} = H^k(x^{(1)} - x^{(0)})$ ,  $x^{(k)} - x^{(k-1)} = H^{k-1}(x^{(1)} - x^{(0)})$ . В качестве приближения к  $\rho(H)$  можно взять отношение норм векторов  $x^{(k+1)} - x^{(k)}$  и  $x^{(k)} - x^{(k-1)}$  при достаточно больших значениях  $k$ .

В численных результатах следует привести значение  $q$  и убедиться, что оно является оптимальным, то есть реализовать алгоритм, например, с  $q_1 = q - 0.1$  и  $q_2 = q + 0.1$ . Сравнить результаты.

Метод верхней релаксации совпадает с методом Зейделя при  $q = 1$ .

## 12.5. Итерационный метод с чебышевским набором параметров

Пусть  $0 < m \leq \lambda(A) \leq M$ .

Расчетная формула метода

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} + \tau_k(b - Ax^{(k-1)}), \quad k = 1, \dots, p, \quad (12)$$

где

$$\tau_k = \frac{2}{M + m - (M - m) \cos \frac{2k-1}{2p} \pi}. \quad (13)$$

Этот метод может быть применен, если матрица  $A$  симметрическая и положительно-определенная.

Для устойчивости процесса итерационные параметры должны быть упорядочены специальным образом. Для упорядочения итерационных параметров надо построить последовательность нечетных чисел  $\theta_p = \{\theta_p(1), \theta_p(2), \dots, \theta_p(p)\}$ , таких, что  $1 \leq \theta_p(i) \leq 2p - 1$ , и параметры  $\tau_k$  вычислять по формуле

$$\tau_k = \frac{2}{(M + m - (M - m)t_k)}, \quad t_k = \cos \frac{\theta_p(k)}{2p} \pi, \quad k = 1, 2, \dots, p. \quad (14)$$

Рассмотрим способ упорядочения  $\theta_p$  для случая, когда  $p$  есть степень двойки:  $p = 2^l$ ,  $l > 0$ .

Считая, что  $\theta_1 = \{1\}$ , поэтапно вычисляются  $\theta_2, \theta_4, \dots, \theta_{2^p}$  следующим образом:

$$\theta_{2l}(2i-1) = \theta_l(i), \quad \theta_{2l}(2i) = 4l - \theta_{2l}(2i-1), \quad i = 1, 2, \dots, 2^{p-1},$$

так что

$$\begin{aligned} \theta_2 &= \{1, 3\}, \\ \theta_4 &= \{1, 7, 3, 5\}, \\ \theta_8 &= \{1, 15, 7, 9, 3, 13, 5, 11\}, \\ \theta_{16} &= \{1, 31, 15, 17, 7, 25, 9, 23, 3, 29, 13, 19, 5, 27, 11, 21\}. \end{aligned}$$

Процесс следует повторять число раз кратное  $p$ . Число итераций для достижения заданной точности  $\varepsilon$  определяется по формуле  $n(\varepsilon) \geq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{M}{m}} \ln \frac{2}{\varepsilon}$ .

При  $p = 1$  метод совпадает с методом итераций с оптимальным параметром.

## 12.6. Прием Люстерника для ускорения сходимости метода последовательных приближений

Зная  $\rho(H)$  — наибольшее по модулю собственное значение матрицы  $H$ , можно уточнить построенное ранее приближение  $x^{(k)}$  по формуле

$$\bar{x} = x^{(k-1)} + \frac{1}{1 - \rho(H)} (x^{(k)} - x^{(k-1)}). \quad (15)$$

Варианты задания  
Варианты расширенных матриц