# 10. Векторные и матричные нормы. Обусловленность задачи решения линейной алгебраической системы

## 10.1. Векторные нормы

Вектору $x = (x_1,\, x_2, \ldots, x_n)' \in C^n$ сопоставим вещественное число

$$\|x\|_p = \left( \sum_{j=1}^{n} |x_j|^p \right)^{1/p}, \quad p \geq 1.$$

Это число называется нормой Гельдера и удовлетворяет всем свойствам для нормы:

$$\|x\|_p \geq 0, \quad \|x\|_p = 0 \Leftrightarrow x_i = 0,\ i = 1, 2, \ldots, n.$$
$$\|\alpha x\|_p = |\alpha|\ \|x\|_p\,,\ \alpha \in C.$$
$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p\ .$$

На практике используются следующие частные случаи нормы Гельдера:

$$p = 1: \quad \|x\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |x_j|.$$
$$p = 2: \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2}.$$
$$p = \infty: \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|\ .$$

*Упражнение 1*. ||(1,-5,3)||=?

## 10.2. Матричные нормы

Обозначим через $M_n(C)$ множество квадратных матриц порядка $n$, элементами которых являются комплексные числа. Пусть

$$A = [a_{ij}]_{i,j=1}^{n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix},\ a_{ij} \in C.$$

Для матриц норма Гельдера с показателем $p$ ($p \geq 1$) в $M_n(C)$

$$N_p(A) = \left( \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^p \right)^{1/p}.$$

Норма при $p = 2$ называется нормой Фробениуса.

**Определение 1.** Говорят, что матричная норма $||.||$согласована с векторной $||.||$, если выполняется неравенство $||Ax|| \leq ||A||||x||$ для любых $x \in C^n$, $A \in M_n(C)$.

Естественнее пользоваться операторной нормой матрицы.

**Определение 2.** Операторной нормой матрицы, порожденной векторной нормой $||x||$, называется число

$$\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|\,.$$

Операторная норма матрицы, порожденная некоторой векторной нормой, является минимальной среди всех матричных норм, согласованных с этой векторной нормой.

Операторную норму называют также нормой матрицы, подчиненной заданной векторной норме.

**Определение 3.** Спектральным радиусом матрицы $A$ называется число

$$\rho(A) = \max_{1 \le i \le n} |\lambda_i|,$$

где $\lambda_i$ — собственные числа матрицы $A$.

Можно показать, что

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|, \quad \|A\|_1 = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|, \quad \|A\|_2 = \sqrt{\rho(AA^*)}.$$

Если $A = A^*$, то $\|A\|_2 = \rho(A)$.

*Упражнение 2*. Вычислить все нормы единичной матрицы.

*Упражнение 3*. Вычислить нормы Фробениуса, $||\mathrm{A}||_1$, $||\mathrm{A}||_\infty$ матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & 6 \\ 7 & 8 & -9 \end{bmatrix}.$$

**Определение 4.** Матричная норма называется мультипликативной, если $||AB|| \le ||A||||B||$, $A$, $B \in M_n(C)$.

Операторная матричная норма и норма Фробениуса мультипликативны.

**Теорема.** $\rho(A) \le ||A||$, *где* $||A||$ *— мультипликативна.*

Можно показать, что

$$\frac{1}{\|A^{-1}\|} \le |\lambda| \le \|A\|.$$

Это неравенство позволяет найти оценки для собственных чисел матрицы по модулю.

## 10.3. Обусловленность задачи решения линейной алгебраической системы

Вычислительные задачи, в которых малым изменениям параметров отвечают большие изменения в решениях, называются плохо обусловленными.

Рассмотрим вопрос обусловленности задачи решения линейной алгебраической системы $Ax = b$. Пусть решением системы является вектор $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)'$.

Рассмотрим систему уравнений
$(A + \Delta A)(x^* + \Delta x) = b + \Delta b$, где $||A^{-1}||||\Delta A||<1$.

Можно получить, что

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x^*\|} \le \frac{\mathrm{cond}(A)}{1 - \mathrm{cond}(A)\dfrac{\|\Delta A\|}{\|A\|}} \left( \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} + \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \right),$$

где
$\mathrm{cond}(A) = \left\|A^{-1}\right\| \|A\|$ — число обусловленности матрицы[1].

Очевидно, что $\mathrm{cond}(A) \ge 1$, $\mathrm{cond}(\alpha A) = \mathrm{cond}(A)$. Если $A = A^*$, то $\mathrm{cond}_2(A) = |\lambda_1|/|\lambda_n|$, где $|\lambda_1| \ge |\lambda_2| \ge \ldots \ge |\lambda_n|$ ($\lambda_i$ — собственные числа матрицы $A$).

[1]Число обусловленности матрицы зависит от выбранной нормы.

*Упражнение 4*. Линейная алгебраическая система $Ax = b$, где

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0.99 \\ 0.99 & 0.98 \end{bmatrix}, \ b = \begin{bmatrix} 1.99 \\ 1.97 \end{bmatrix},$$

имеет решение $x^* = (1, 1)'$.

Округлим правые части системы до целых, оставив элементы матрицы без изменений.

Система $A(x + \Delta x) = b + \Delta b$, где $\Delta b = (0.01, 0.03)'$ имеет решение $x + \Delta x = (200, -200)'$.

Вычислить число обусловленности матрицы, фактическую относительную погрешность решения и получить для неё оценку.

## Задание

Для заданной матрицы $A$
а) решить систему $Ax = b$, где

$$b = \begin{pmatrix} 200 \\ -600 \end{pmatrix};$$

б) решить систему с измененной правой частью $A\overline{x} = \overline{b}$, где

$$\overline{b} = \begin{pmatrix} 199 \\ -601 \end{pmatrix};$$

в) найти число обусловленности $\mathrm{cond}(A)$, фактическую относительную погрешность $\delta x = \ ||\overline{x} - x||/||x||$ и оценку для этой погрешности.

Варианты задания