16. Численное решение интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода

Пусть требуется решить уравнение

$$u(x) - \int\limits_a^b H(x,y)u(y)dy = f(x), \quad f(x) \in C_{[a,b]}, \tag{1}$$

где ядро $H(x,y)$ — достаточное количество раз непрерывно дифференцируемо.

16.1. Метод замены ядра на вырожденное

16.1.1. Построение решения и резольвенты

Вырожденным называется ядро, представимое в виде

$$\tilde{H}(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x)\beta_i(y), \tag{2}$$

где $\alpha_1,\ \alpha_2, \dots,\ \alpha_n$ — линейно независимы и $\beta_1,\ \beta_2, \dots,\ \beta_n$ — линейно независимы.

Пусть $H(x,y) \approx \tilde{H}(x,y)$ и будем решать уравнение

$$\tilde{u}(x) - \int\limits_a^b \tilde{H}(x,y)\tilde{u}(y)dy = f(x). \tag{3}$$

Если уравнение (3) имеет решение, то оно представимо в виде:

$$\tilde{u}(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i\alpha_i(x), \tag{4}$$

где

$c_i = \int\limits_a^b \beta_i(y)\tilde{u}(y)dy = \int\limits_a^b \beta_i(y)(f(y) + \sum\limits_{j=1}^{n} c_j\alpha_j(y))\,dy = \sum\limits_{j=1}^{n} \int\limits_a^b \beta_i(y)\alpha_j(y)dy\,c_j + \int\limits_a^b \beta_i(y)f(y)dy.$

Обозначим

$$\gamma_{ij} = \int\limits_a^b \beta_i(y)\alpha_j(y)dy,\ \ b_i = \int\limits_a^b \beta_i(y)f(y)dy,\ \ a_{ij} = \delta_{ij} - \gamma_{ij}, \tag{5}$$

(δ_{ij} — символ Кронекера), тогда c_i являются решением системы линейных алгебраических уравнений $AC = B$.

Здесь $A = \{a_{ij}\}$ — матрица коэффициентов, $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)^{\mathrm{T}}$ — вектор правых частей, $C = (c_1,\ c_2, \dots,\ c_n)^{\mathrm{T}}$ — искомый вектор.

Если определитель матрицы A не равен нулю, то нетрудно построить резольвенту ядра $\tilde{H}$, то есть такую функцию $\tilde{G}(x,y)$, что

$$\tilde{u}(x) = f(x) + \int\limits_a^b \tilde{G}(x,y)f(y)dy. \tag{6}$$

Обозначим $D = \{d_{ij}\}$ матрицу, обратную матрице $A:\ D = A^{-1}$. Тогда коэффициенты c_i вычисляются по формулам

$$c_i = \sum_{j=1}^{n} d_{ij} b_j$$

и потому

$$\tilde{u}(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i \alpha_i(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} d_{ij} \int_a^b \beta_j(y) f(y) dy \, \alpha_i(x) = f(x) + \int_a^b \tilde{G}(x,y) f(y) dy,$$

$$\tilde{G}(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} d_{ij} \alpha_i(x) \beta_j(y), \tag{7}$$

$\tilde{G}(x,y)$ — резольвента ядра $\tilde{H}$.

16.1.2. Оценка погрешности

Теорема 1 (об оценке погрешности)**.** *Пусть интегральное уравнение* (3) *однозначно разрешимо, его решение есть* $\tilde{u}(x)$ *и для резольвенты* $\tilde{G}$ *ядра* $\tilde{H}$ *выполнена оценка*

$$\int_a^b \left| \tilde{G}(x,y) \right| dy \le \tilde{B} \quad (x \in [a,b]). \tag{8}$$

Пусть ядра H *и* $\tilde{H}$ *связаны неравенством*

$$\int_a^b \left| H(x,y) - \tilde{H}(x,y \right| dy \le \eta \quad (x \in [a,b]), \tag{9}$$

причем $(1+\tilde{B})\eta < 1$.

Тогда уравнение (1) также однозначно разрешимо и для его решения $u^*(x)$ *выполняется оценка*

$$|u^* - \tilde{u}(x)| \le \frac{(1+\tilde{B})\eta}{1-(1+\tilde{B})\eta} \left\| \tilde{u}^* \right\|_C . \tag{10}$$

16.1.3. Задание

1. Подобрать вырожденное ядро ранга 3 и найти $\tilde{u}^{(3)}(x)$.
2. Вычислить значения $\tilde{u}^{(3)}(x)$ в точках a, $(a+b)/2$, b.
3. Подобрать вырожденное ядро ранга 4 и найти $\tilde{u}^{(4)}(x)$.
4. Вычислить значения $\tilde{u}^{(4)}(x)$ в точках a, $(a+b)/2$, b.
5. Вычислить $\tilde{\Delta} = \max\limits_{i=1,2,3} |\tilde{u}^{(4)}(x_i) - \tilde{u}^{(3)}(x_i)|$, $x_1 = a$, $x_2 = (a+b)/2$, $x_3 = b$.

   При использовании пакета Maple вычислить $\tilde{\Delta} = \left\| \tilde{u}^{(4)}(x) - \tilde{u}^{(3)}(x) \right\|_C$.
6. Оценить погрешность приближенного решения $\tilde{u}^{(3)}(x)$. Сравнить с $\tilde{\Delta}$.
7. При использовании пакета Maple построить график разности решений $\tilde{u}^{(3)}(x)$ и $\tilde{u}^{(4)}(x)$.

Результаты представить в виде таблицы 1.

Таблица 1

x	a	$(a+b)/2$	b
$\tilde{u}^{(3)}(x)$			
$\tilde{u}^{(4)}(x)$			
Оценка $\tilde{\Delta}$			

Указание
При выполнении задания на Maple можно использовать функции:

- $Hn := taylor(Hz(z), z = c, n)$; — разложение функции $Hz(z)$ в ряд Тейлора по степеням $(z - c)$ в окрестности точки $z = c$. Параметр n определяет порядок удерживаемых в разложении функции членов;

- $convert(Hn, polynom)$; — преобразование полученного выше разложения в полином;

- $plot3d(H\_Hn, x = a..b, y = a..b, axes = BOXED)$; — построение поверхности, задаваемой выражением H_Hn, в трехмерном пространстве. Поверхность заключена в охватывающий параллелепипед с нанесенными шкалами по трем граням. Эта функция может быть применена для получения оценок, используемых в теореме о погрешности.

Перечислим основные пункты решения задачи для ранга ядра n.

1. Построение вырожденного ядра, то есть определение функций $\alpha_i(x)$, $\beta_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, таких, что $\tilde{H}(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i(x)\beta_i(y) \approx H(x, y)$.

2. Построение матрицы A и столбца правых частей .

3. Решение системы $AC = B$.

4. Получение решения в точках $x = a$, $(a + b)/2$, b.

5. Вычисление апостериорной оценки.

16.2. Метод механических квадратур

16.2.1. Построение решения

Выберем какую-нибудь квадратурную формулу

$$\int\limits_a^b v(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k v(x_k), \tag{11}$$

узлы $x_k \in [a, b]$, $x_k \neq x_j$ при $k \neq j$.

Заменив интеграл в уравнении (1) приближенно на квадратурную сумму, получим новое уравнение относительно новой неизвестной функции $u^{(n)}(x)$:

$$u^{(n)}(x) - \sum_{k=1}^{n} A_k H(x,x_k) u^{(n)}(x_k) = f(x). \tag{12}$$

Если квадратурная сумма достаточно хорошо приближает интеграл, то есть основания надеяться, что решение $u^{(n)}(x)$ уравнения (12) близко к решению $u(x)$ уравнения (1).

Для решения уравнения (12) будем полагать x поочередно равным $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Обозначим $\varsigma_j = u^{(n)}(x_j)$, тогда ς_j обязаны удовлетворять системе уравнений

$$\varsigma_j - \sum_{k=1}^{n} A_k H(x_j, x_k)\varsigma_k = f(x_j), \quad j = 1, 2, \ldots, n \tag{13}$$

или, в матричной записи, $Dz = g$, где

$$D = \{d_{jk}\}, \ \ d_{jk} = \delta_{jk} - A_k H(x_j, x_k), \ \ g = (f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)), \tag{14}$$

$z = (\varsigma_1, \varsigma_2, \ldots, \varsigma_n)$ — искомый вектор.

После вычисления решения системы (13) $z = (\varsigma_1, \varsigma_2, \ldots, \varsigma_n)$ решение уравнения (12) может быть получено по формуле

$$u^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^{n} A_k H(x, x_k)\varsigma_k + f(x). \tag{15}$$

Теорема 2 (о сходимости метода механических квадратур)**.** *Пусть выполнены условия:*

1. *Ядро H(x,y) и правая часть f(x) интегрального уравнения* (1) *непрерывны.*
2. *Интегральное уравнение* (1) *однозначно разрешимо.*
3. *Квадратурный процесс сходится.*

Тогда
а) при достаточно больших n системы линейных алгебраических уравнений (13)*, к которым приводит метод механических квадратур, однозначно разрешимы;*
б) числа обусловленности $\mu_\infty(D)$ *матриц этих систем равномерно ограничены;*
в) приближенные решения $u^{(n)}(x)$*, построенные по формуле* (15)*, равномерно сходятся к точному решению u(x).*

16.2.2. Задание

Найти приближенное решение интегрального уравнения

$$u(x) - \int_a^b K(x,y)u(y)dy = f(x),$$

используя одну из квадратурных формул:

1. Составная формула трапеций.
2. Составная формула средних прямоугольников.
3. Составная формула Симпсона.
4. Формулы Гаусса с 2, 3, 4 и т.д. узлами.
5. Составная формула Гаусса с двумя узлами.
6. Составная формула Гаусса с тремя узлами.

Количество разбиений в составных формулах рекомендуется удваивать до тех пор, пока значения приближенных решений в точках a, $(a+b)/2$, b не будут совпадать с точностью ε=0.00001. В формулах Гаусса (не составных) до достижения требуемой точности рекомендуется увеличивать количество узлов на единицу.

Результаты представить в виде таблицы 2.

Таблица 2

x	a	$(a+b)/2$	b
$u^{(n)}(x)$			
$u^{(2*n)}(x)$			
$u^{(4*n)}(x)$			
$\ldots$			
$u^{(m*n)}(x)$			
$u^{(2*m*n)}(x)$			
$u^{(2*m*n)}(x) - u^{(m*n)}(x)$			
Решение, полученное в 1-ом методе			
Оценка, полученная в 1-ом методе			

Здесь n — начальное количество разбиений в составной формуле, а m такое, что

$$\max_{i=1,2,\,3}|\ u^{(2*m*n)}(x_i) - u^{(m*n)}(x_i)| < \varepsilon, \quad x_1 = a,\ x_2 = (a+b)/2,\ x_3 = b.$$

Еще раз заметим, что при использовании формул Гаусса (не составных) количество узлов не следует удваивать, а достаточно увеличивать на единицу. Соответственно последнее условие примет вид

$$\max_{i=1,2,3}|\ u^{(n+m+1)}(x_i) - u^{(n+m)}(x_i)| < \varepsilon, \quad x_1 = a,\ x_2 = (a+b)/2,\ x_3 = b.$$

Квадратурные формулы первых четырех методов хорошо известны, указания по построению составных квадратурных формул Гаусса приведены здесь.

Для реализации метода составить программу, содержащую подпрограмму, вычисляющую решение в заданных точках методом механических квадратур с n узлами, где n — параметр. Промежуточные результаты должны содержать

- количество узлов квадратурной формулы;
- узлы квадратурной формулы;
- коэффициенты квадратурной формулы;
- матрицу системы относительно значений приближенного решения в узлах и вектор правых частей (только при небольшом числе узлов: 2 или 3);
- решение системы — значения приближенного решения в узлах квадратурной формулы;
- значения решения в точках a, $(a+b)/2$, b;
- $\max\limits_{i=1,2,3}|\ u^{(2*m*n)}(x_i) - u^{(m*n)}(x_i)|$
  или
  $\max\limits_{i=1,2,3}|\ u^{(n+m+1)}(x_i) - u^{(n+m)}(x_i)| < \varepsilon, \quad x_1 = a,\ x_2 = (a+b)/2,\ x_3 = b.$

Варианты задания