dynamika punktu materialnego w 1D

B. Szafran, lab. MOFiT 1 2019/2020

28 lutego 2020

Ciało o masie m =1 kg porusza się w potencjale

$$V(x) = -\exp(-x^2) - 1.2\exp(-(x-2)^2)[J] \tag{1}$$

W chwili początkowej ciało znajduje się w spoczynku $v = 0$, a jego położenie odpowiada energii potencjalnej $E = -0.6$ J.

1. Wyznaczyć punktu zwrotne ruchu ciała $V(x) = E$ oraz obszar dostępny dla ruchu ciała $\forall_x V(x) \leqslant E$.

1a. W metodzie bisekcji znajdujemy końce przedziału w których funkcja $f(x) = V(x) - E$ zmienia znak. Liczymy znak funkcji w środku przedziału i zawężamy odpowiednio przedział do połowy jego długości. Udokumentować tempo zbieżności rozwiązania. (**10** pkt)

1b. W okolicy miejsca zerowego szybkie tempo zbieżności zapewnia metoda Newtona-Raphsona, w której $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, gdzie x_n to przybliżenie zera w n-tej iteracji. Udokumentować tempo zbieżności rozwiązania. (**10** pkt)

Dynamika Newtona Definicja prędkości:

$$\frac{dx}{dt} \equiv v \tag{2}$$

II zasada Newtona:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{m}\frac{dV}{dx} \tag{3}$$

Jawny Schemat Eulera Dla $x_n \equiv x(n\Delta t)$, $v_n \equiv (v(n\Delta t)$

$$x_{n+1} = x_n + v_n\Delta t \tag{4}$$

$$v_{n+1} = v_n - \frac{1}{m}\frac{dV}{dx}|_{x_n}\Delta t \tag{5}$$

2. całkowanie równań ruchu jawnym schematem Eulera Narysować $x(t)$, $v(t)$, $E_k(t) = mv(t)^2/2$, $V(x(t))$, oraz $E_k(t) + V(t)$ dla $t \in (0, 30)$ jak również portret fazowy $(x(t), v(t))$ dla $t \in (0, 100)$ oraz $t \in (0, 1000)$, dla $\Delta t = 0.01$s oraz $\Delta t = 0.001$s (**40** pkt)

Opory ruchu Do wzoru (3) dodajemy czynnik oporów ruchu: $\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{m}\frac{dV}{dx} - \alpha v$ z parametrem tłumienia $\alpha > 0$. Schemat (5) przybiera formę

$$v_{n+1} = v_n - \frac{1}{m}\frac{dV}{dx}|_{x_n}\Delta t - \alpha v_n \Delta t. \tag{6}$$

3. całkowanie równań z oporami ruchu Wstawiamy $\Delta t = 0.01$ s oraz $\alpha = .5, 5, 201$. Powtarzamy rachunki z zadania (2). (**10** pkt)

Całkowanie równań ruchu wzorem trapezów

We wzorze trapezów zmiana położenia i prędkości brana jest na podstawie średniej arytmetycznej z chwil n oraz $n+1$

- $x_{n+1} = x_n + \frac{\Delta t}{2}\left(v_{n+1} + v_n\right)$
- $v_{n+1} = v_n + \frac{\Delta t}{2}\left(-\frac{1}{m}\frac{dV}{dx}|_{x_{n+1}} - \alpha v_{n+1} - \frac{1}{m}\frac{dV}{dx}|_{x_n} - \alpha v_n\right)$

Ze względu na obecność prędkości z chwili $n+1$ po prawej stronie równania wykonanie kroku czasowego wymaga rozwiązania układu równań nieliniowych $F_1 = 0$ oraz $F_2 = 0$ dla

- $F_1(x_{n+1}, v_{n+1}) = x_{n+1} - x_n - \frac{\Delta t}{2} v_{n+1} - \frac{\Delta t}{2} v_n$
- $F_2(x_{n+1}, v_{n+1}) = v_{n+1} - v_n - \frac{\Delta t}{2}\left(-\frac{1}{m}\frac{dV}{dx}|_{x_{n+1}} - \alpha v_{n+1}\right) - \frac{\Delta t}{2}\left(-\frac{1}{m}\frac{dV}{dx}|_{x_n} - \alpha v_n\right)$

x_{n+1} oraz v_{n+1} wyznaczymy metodą iteracyjną, przy czym x^μ_{n+1} oraz v^μ_{n+1} oznacza wartości w μ-tej iteracji. Przy tych oznaczeniach przepis metody Newtona dla układu równań ma postać:

$$\left(\begin{array}{cc} \frac{\partial F_1}{\partial x_{n+1}} & \frac{\partial F_1}{\partial v_{n+1}} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_{n+1}} & \frac{\partial F_2}{\partial v_{n+1}} \end{array}\right)_{|x^\mu_{n+1}, v^\mu_{n+1}} \left(\begin{array}{c} x^{\mu+1}_{n+1} - x^\mu_{n+1} \\ v^{\mu+1}_{n+1} - v^\mu_{n+1} \end{array}\right) = -\left(\begin{array}{c} F_1(x^\mu_{n+1}, v^\mu_{n+1}) \\ F_2(x^\mu_{n+1}, v^\mu_{n+1}) \end{array}\right), \tag{7}$$

która przy naszym układzie równań redukuje się do

$$\left(\begin{array}{cc} 1 & -\frac{\Delta t}{2} \\ \frac{\Delta t}{2m}\frac{d^2V}{dx^2}|_{x^\mu_{n+1}} & 1 + \frac{\Delta t}{2}\alpha \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} x^{\mu+1}_{n+1} - x^\mu_{n+1} \\ v^{\mu+1}_{n+1} - v^\mu_{n+1} \end{array}\right) = -\left(\begin{array}{c} F_1(x^\mu_{n+1}, v^\mu_{n+1}) \\ F_2(x^\mu_{n+1}, v^\mu_{n+1}) \end{array}\right) \tag{8}$$

4. Iteracja we wzorze trapezów Wstawić $\alpha = 0$, $\Delta t = 0.01$s. Iterujemy równanie (8) kilka razy aż osiągniemy $F_1 = F_2 = 0$ z zadowalającą dokładnością. Udokumentować zbieżność dla pierwszego kroku czasowego. (**10** pkt)

5. Całkowanie równań ruchu metodą trapezów Powtórzyć zadanie 2.2.1 (dla $\alpha = 0$) oraz zadanie 3 wzorem trapezów. (**20** pkt)