

Równanie falowe dla struny

lab. MOFiT 1 2019/2020

Aleksandra Pestka

23.04.2020

1 Cel projektu

Projekt miał na celu wykorzystanie prędkościowego schematu Verleta do wyliczenia wychylenia struny.

2 Sztywne i luźne warunki brzegowe.

Strunę zdyskretyzowano do $N = 101$ punktów, gdzie każdy fragment struny ma długość $\Delta x = 0.01$. Za krok czasowy przyjęto $\Delta t = 0.005$. Prędkość rozchodzenia się drgań: $c = 1$.

Pierwszy etap projektu polegał na rozwiązaniu poniższego równania:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1)$$

dla warunków początkowych $u_0(x) = \exp(-100(x - 0.5)^2)$ oraz $v_0(x) = 0$. Przedział czasowy wynosił $t \in (0, 5)$.

Poniżej zamieszczono wykresy wychylenia struny w punkcie x w chwili t dla sztywnych i luźnych warunków brzegowych.

2.1 Sztywne warunki brzegowe.

Przyjęto sztywne warunki brzegowe, tj. $u(0, t) = u(1, t) = 0$

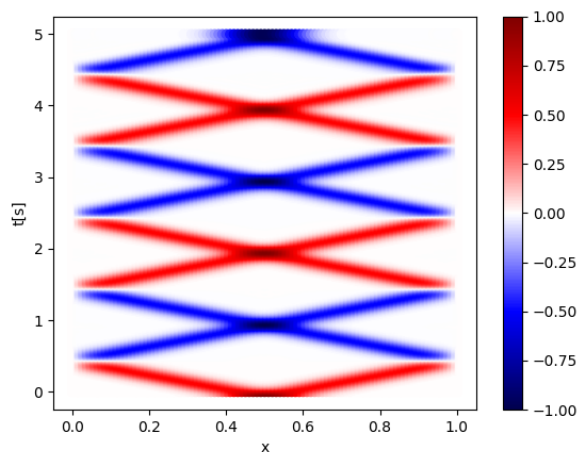


Figure 1: $u(x, t)$ dla sztywnych warunków brzegowych.

2.2 Luźne warunki brzegowe.

Przyjęto luźne warunki brzegowe: $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1, t) = 0$.

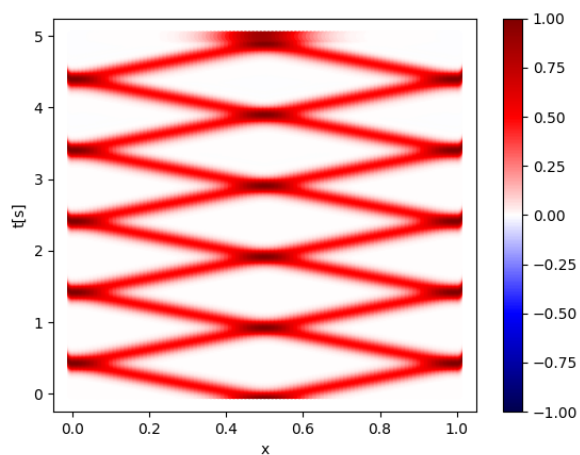


Figure 2: $u(x, t)$ dla luźnych warunków brzegowych.

3 Drgania tłumione.

Wprowadzono tłumienie drgań proporcjonalne do prędkości struny. Współczynnik tłumienia oznaczono jako β . Przyjęto sztywne warunki brzegowe.

Narysowano przebieg drgań $u(x, t)$ dla $\beta = 0.5, 2, 4$.

- $\beta = 0.5$

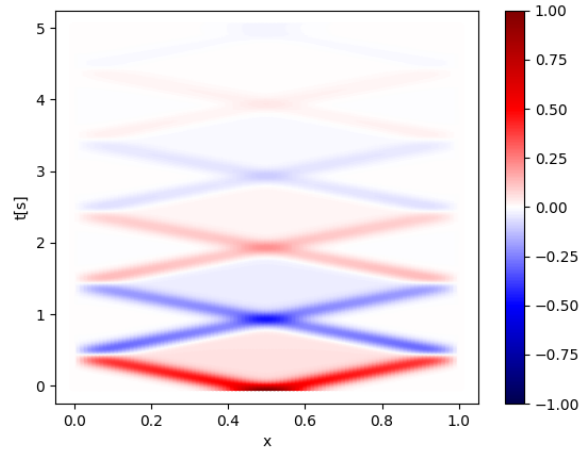


Figure 3: $u(x, t)$ dla sztywnych warunków brzegowych z tłumieniem $\beta = 0.5$

- $\beta = 2$

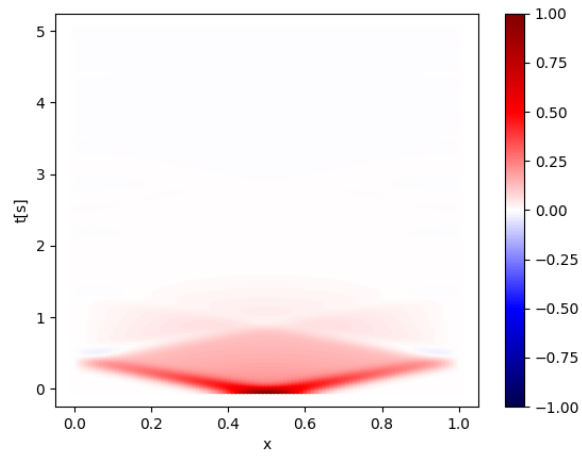


Figure 4: $u(x, t)$ dla sztywnych warunków brzegowych z tłumieniem $\beta = 2$

- $\beta = 4$

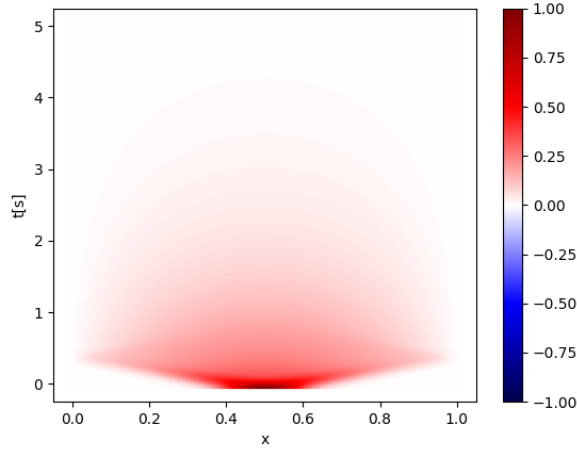


Figure 5: $u(x, t)$ dla sztywnych warunków brzegowych z tłumieniem $\beta = 4$

4 Drgania wymuszone.

Dodano siłę wymuszającą nadającą dodatkowe przyspieszenie strunie:

$$a_F(x, t) = \begin{cases} \cos(\omega t) & \text{dla } x = x_0 \\ 0 & \text{dla } x \neq x_0 \end{cases} \quad (2)$$

Siłę przyłożono punktowo w $x_0 = 0.5$. W chwili $t = 0$ struna spoczywa w równowadze, tj. $v(x, t) = 0$ oraz $u(x, t) = 0$. Za współczynnik tłumienia przyjęto $\beta = 1$, a częstość wymuszenia wyniosła $\omega = \pi/2$.

Poniżej narysowano wykres $u(x, t)$ dla $t \in (0, 10)$

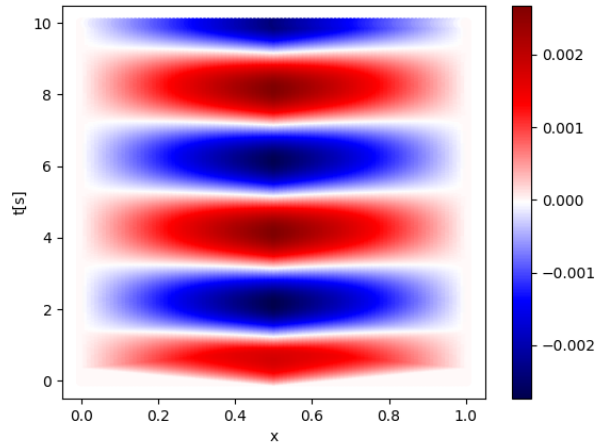


Figure 6: $u(x, t)$ dla sztywnych warunków brzegowych z tłumieniem $\beta = 1$ i wymuszeniem o częstości $\omega = \pi/2$

Po pewnym czasie drgania osiągną stan ustalony. W stanie tym ruch jest periodyczny z okresem drgań definiowanym jako $T = \frac{2\pi}{\omega}$, więc podstawiając częstość wymuszenia $\omega = \pi/2$ otrzymujemy $T = 4$.

5 Rezonanse

Wyliczono średnią energię stanu ustalonego struny w $t \in (16, 20)$. Następnie narysowano $\langle E \rangle$ w funkcji $\omega \in (0, 10\pi)$.

5.1 siła przyłożona punktowo w $x_0 = 0.5$

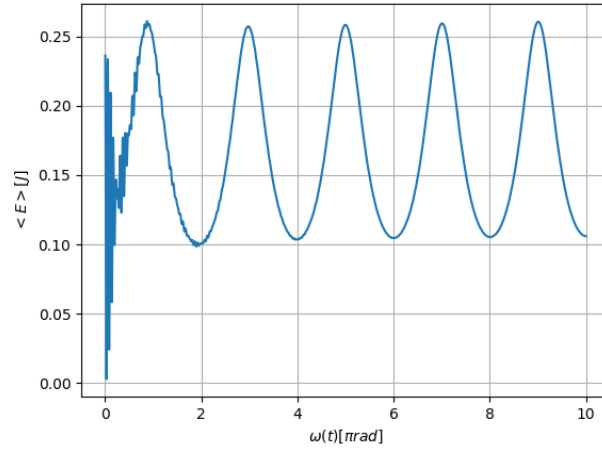


Figure 7: $E(\omega)$ dla sztywnych warunków brzegowych z tłumieniem $\beta = 1$

Dla przyjętego $\beta = 1$ częstość własnych drgań tłumionych wynosi $w_n = n\pi$. Rezonanse są dostrzegalne tylko dla nieparzystych n .

5.2 siła przyłożona punktowo w $x_0 = 0.4$

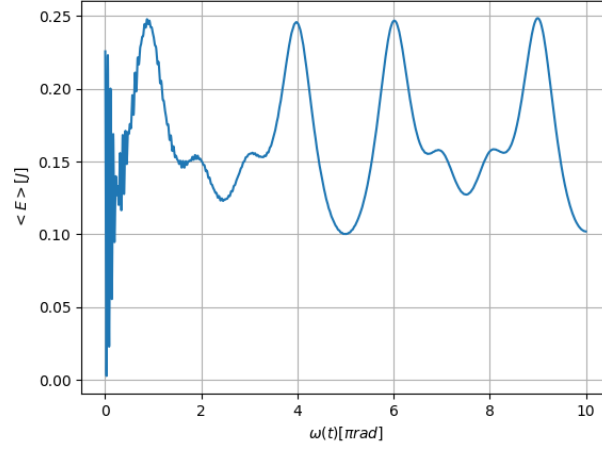


Figure 8: $E(\omega)$ dla sztywnych warunków brzegowych z tłumieniem $\beta = 1$

Przesuwając punkt przyłożenia siły wymuszającej poza środek struny udało się wywołać rezonanse dla parzystych n .

6 Podsumowanie

Dla wychylenia struny rozważano sztywne, jak i luźne warunki brzegowe. Zaobserwowano wpływ tłumienia i siły wymuszającej na przebieg drgań. Zbadano także zależność średniej energii stanu ustalonego od częstości własnych drgań tłumionych.