Rozwiązywanie równań dynamiki Newtona z automatyczną kontrolą błędu i doborem kroku czasowego

B. Szafran, projekt 2, 2019/2020

1 problem

Wyliczymy orbitę ciała o parametrach ruchu zbliżonych do komety Halleya. W chwili początkowej kometa znajduje się peryhelium orbity (0,0.586 au) i porusza się z prędkością (54600 m/s,0). Słońcu przypisujemy masę $M = 1.989 \times 10^{30}$kg i unieruchamiamy je w początku układu odniesienia. Stała grawitacji $G = 6.6741 \times 10^{-11}$ m^3/kg/s^2. jednostka astronomiczna au=149 597 870 700 m. Ruch ciała w potencjale Słońca opisują równania:

$$\frac{dx}{dt} = v_x \tag{1}$$

$$\frac{dy}{dt} = v_y \tag{2}$$

$$\frac{dv_x}{dt} = -G\frac{M}{r^3}x = a_x \tag{3}$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -G\frac{M}{r^3}y = a_y \tag{4}$$

(5)

2 jawny schemat Eulera

$$x_{n+1} = x_n + (v_x)_n\Delta t \tag{6}$$

$$y_{n+1} = y_n + (v_y)_n\Delta t \tag{7}$$

$$(v_x)_{n+1} = (v_x)_n - G\frac{M}{r_n^3}x_n\Delta t \tag{8}$$

$$(v_y)_{n+1} = (v_y)_n - G\frac{M}{r_n^3}y_n\Delta t \tag{9}$$

2.1

Wykorzystując jawny schemat Eulera obliczyć tor komety przy 3 obrotach dookoła Słońca. Narysować $y(x)$, oraz $y(t)$. Krok czasowy - tak mały, jak komputer pozwoli przy rachunkach trwających nie dłużej niż kilka minut w czasie rzeczywistym. **30 pkt**.

3 Metoda RK4 dla autonomicznego układu równań zwyczajnych pierwszego rzędu

- $\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{u})$
- $\mathbf{u} = (u^1, u^2, u^3, u^4)^T$,
- $\mathbf{f} = (f^1, f^2, f^3, f^4)^T$

$$u^1 \equiv x \quad f^1 \equiv v_x \tag{10}$$
$$u^2 \equiv y \quad f^2 \equiv v_y \tag{11}$$
$$u^3 \equiv v_x \quad f^3 \equiv a_x \tag{12}$$
$$u^4 \equiv v_y \quad f^4 \equiv a_y \tag{13}$$
$$\tag{14}$$

- liczymy $\mathbf{k}_1 = \mathbf{f}(\mathbf{u}_{n-1})$, następnie kolejno
- $\mathbf{k}_2 = \mathbf{f}(\mathbf{u}_{n-1} + \frac{\Delta t}{2}\mathbf{k}_1)$
- $\mathbf{k}_3 = \mathbf{f}(\mathbf{u}_{n-1} + \frac{\Delta t}{2}\mathbf{k}_2)$
- $\mathbf{k}_4 = \mathbf{f}(\mathbf{u}_{n-1} + \Delta t\mathbf{k}_3)$
- $\mathbf{u}_n = \mathbf{u}_{n-1} + \frac{\Delta t}{6}(\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4)$

Uwaga: wzory te są rozpisane szczegółowo na slajdzie 22 prezentacji z wykładu.

3.1

Wygenerować wykresy takie jak w zad.1 z RK4. Użyć taki krok czasowy jak poprzednio. Porównać wyniki. **30 pkt**.

4 Automatyczny dobór kroku czasowego

Idea: Ustalamy tolerowany błąd tol. porównujemy wyniki pojedynczego kroku Δt z dwoma krokami $\Delta t/2$ Oznaczenia: $W(\Delta t)$ - przepis metody różnicowej, $u(t_{k+1})$ – wynik dokładny, u_{k+1} – wynik różnicowy dla kroku Δt, u'_{k+1} - wynik różnicowy dla kroku $\Delta t/2$

1. rachunek z krokiem Δt $u_{k+1} = u_k + W(\Delta t)$,
2. rachunek z krokiem $\Delta t/2$: 2 kroki aby dojść do chwili $t + \Delta t$
3. pierwszy krok $u'_{k+1/2} = u_k + W(\Delta t/2)$
4. drugi krok $u'_{k+1} = u'_{k+1/2} + W(\Delta t/2)$

5. oszacowanie błędu: $\epsilon \equiv \frac{u'_{k+1} - u_{k+1}}{2^n - 1}$ ($n = 1$ dla Eulera, $n = 4$ dla RK4)
6. jeśli $|\epsilon| \leqslant \mathrm{tol}$ akceptujemy krok, przyjmujemy wyliczone wartości $u_k := u'_{k+1}$ i pozwalamy czasowi płynąć $t := t + \Delta t$
7. ustalamy nowy krok czasowy: $\Delta t(nowy) = c\Delta t \left(\frac{\mathrm{tol}}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{n+1}}$, z parametrem bezpieczeństwa c, np. $c = 0.9$ (adjustację Δt wykonujemy niezależnie od tego czy zaakceptowaliśmy krok czy nie)
8. wracamy do punktu 1

5 Metoda Eulera z automatycznym doborem kroku czasowego

Zaimplementować powyższy schemat dla Eulera. Monitorujemy błędy w x oraz y. Jako ϵ przyjmujemy większy z błędów na x i y. Wygenerować rysynku jak w zadaniu 1 dla tol = 1000 metrów, oraz dla mniejszej wartości (100, 10 lub 1m na ile komputer pozwoli). Narysować akceptowany krok czasowy w funkcji odległości od Słońca. **20 pkt**

6 dobór kroku dla RK4

Powtórzyć działania z poprzedniego punktu dla RK4 oraz tol=1000 metrów oraz 1m. **20 pkt**