

Dynamika punktu materialnego w 1D

lab. MOFiT 1 2019/2020

Aleksandra Pestka

01.04.2020

1 Cel projektu

Projekt miał na celu wykorzystanie podstawowych metod numerycznych do zbadania ruchu cząstki o masie $m = 1\text{kg}$ poruszającej się w potencjale:

$$V(x) = -\exp(-x^2) - 1.2\exp(-(x-2)^2)[J] \quad (1)$$

W chwili początkowej ciało znajdowało się w spoczynku $v = 0$, a jego położenie odpowiadało energii potencjalnej $E = -0.6J$.

2 Równanie nieliniowe

Pierwszy etap projektu polegał na wyznaczeniu punktów zwrotnych za pomocą metody bisekcji i metody Newtona.

Rozpoczęto od sporządzenia wykresu $V(x)$ w zakresie $[-1, 4]$.

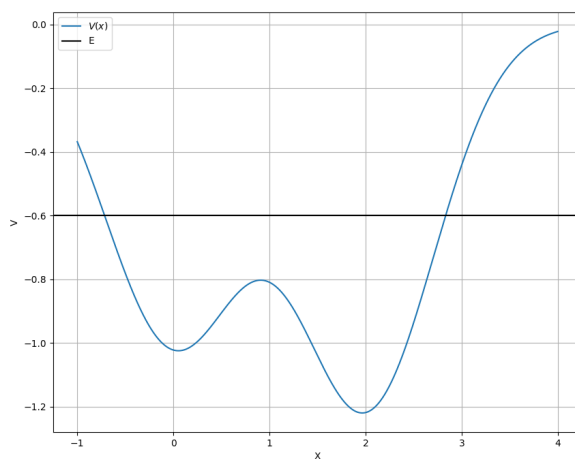


Figure 1: Wykres potencjału $V(x)$

Na podstawie powyższego wykresu stwierdzono, że istnieją dwa punkty zwrotne.

2.1 Metoda bisekcji.

Metoda bisekcji reaguje tylko na znak funkcji, jednocześnie ignoruje wartość oraz kształt krzywej. Metody tej użyto zatem dla dwóch różnych przedziałów zmienności parametru x . Za parametr tolerancji wyniku przyjęto $\epsilon = 10^{-8}$. Dla przedziału $[-1,0]$ otrzymano wynik $x = -0.71559810$ po 20 iteracjach, a dla przedziału $[2,4]$ po 25 iteracjach otrzymano wynik $x = 2.83288205$.

Poniżej w sposób graficzny przedstawiono zbieżność wyników do wartości prawdziwej.

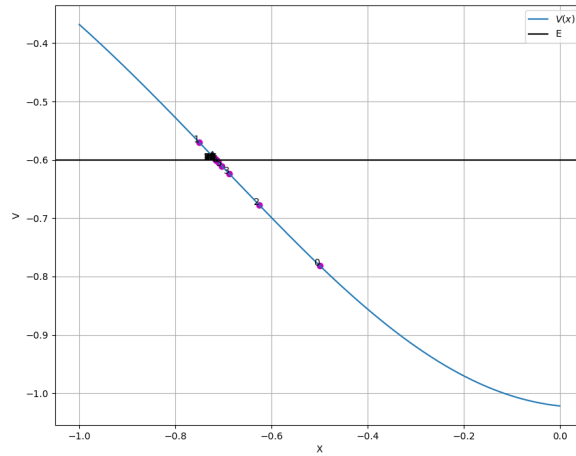


Figure 2: Metoda bisekcji dla przedziału $[-1,0]$

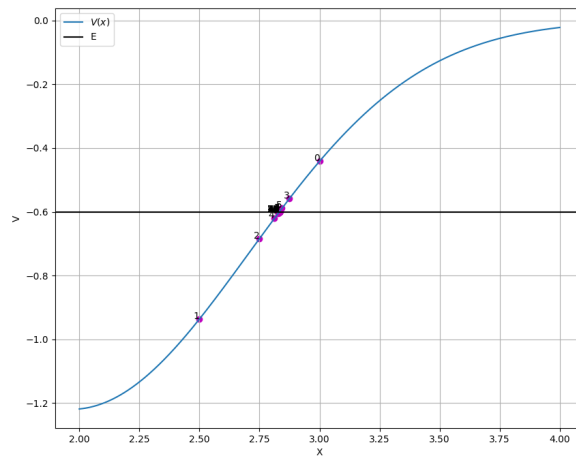


Figure 3: Metoda bisekcji dla przedziału $[2,4]$

Z każdym krokiem przedział, w którym poszukujemy zera skraca się o połowę. Poniżej przedstawiono wykresy w skali logarytmicznej pokazujące szybkość zbieżności metody bisekcji.

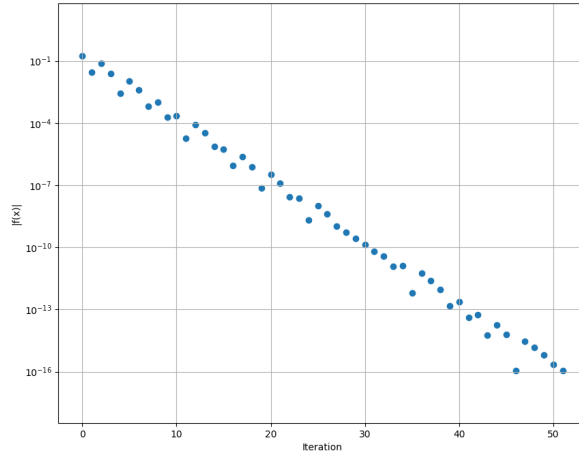


Figure 4: Szybkość zbieżności metody bisekcji dla przedziału $[-1,0]$

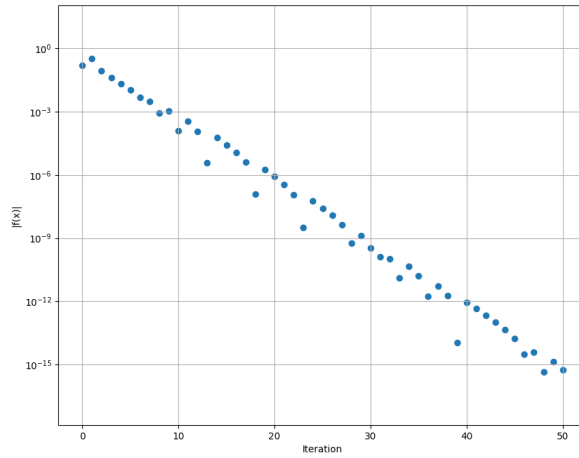


Figure 5: Szybkość zbieżności metody bisekcji dla przedziału $[2,4]$

Na podstawie powyższych wykresów można zauważyć, że zbieżność do prawdziwego rozwiązania jest wolna.

2.2 Metoda Newtona-Raphsona.

Metoda Newtona-Raphsona w porównaniu do metody bisekcji wykorzystuje nie tylko znak funkcji, lecz także jej wartość oraz pochodną. W metodzie tej za punkty początkowe użyto $x = -0.7$ i $x = 3$. Za parametr tolerancji wyniku przyjęto $\epsilon = 10^{-8}$. Dla punktu $x = -0.7$ otrzymano wynik $x = -0,71559802$ po 3 iteracjach, a dla punktu $x = 3$ otrzymano wynik $x = 2,83288205$ po 4

iteracjach.

Poniżej w sposób graficzny przedstawiono zbieżność wyników do wartości prawdziwej.

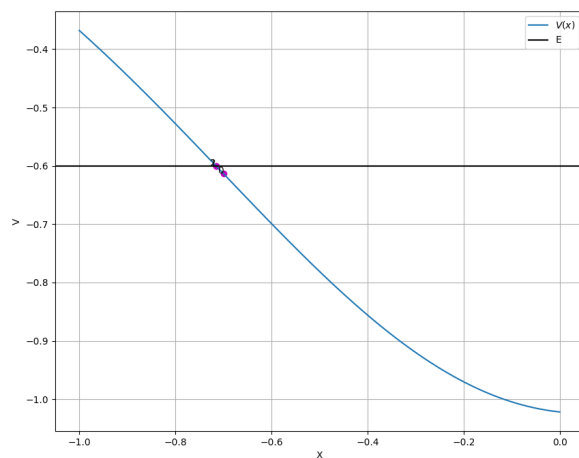


Figure 6: Metoda Newtona-Raphsona dla punktu początkowego $x = -0.7$

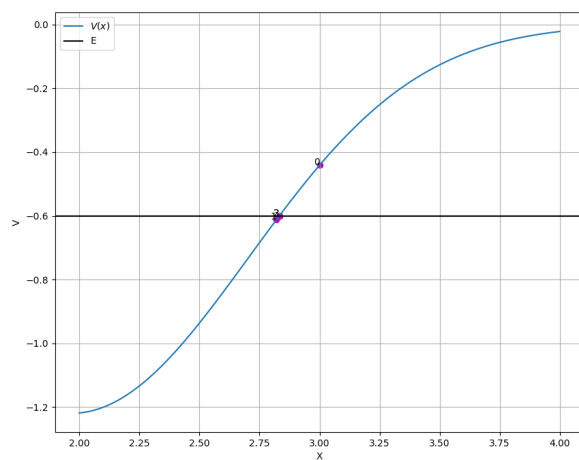


Figure 7: Metoda Newtona-Raphsona dla punktu początkowego $x = 3$

Poniżej przedstawiono wykresy w skali logarytmicznej pokazujące szybkość zbieżności metody Newtona-Raphsona.

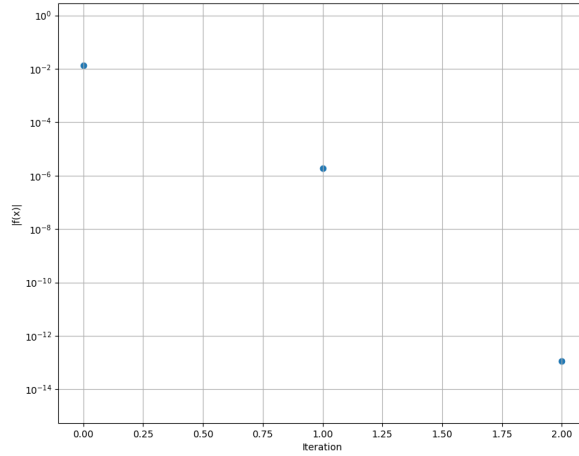


Figure 8: Szybkość zbieżności metody Newtona-Raphsona dla punktu początkowego $x = -0.7$

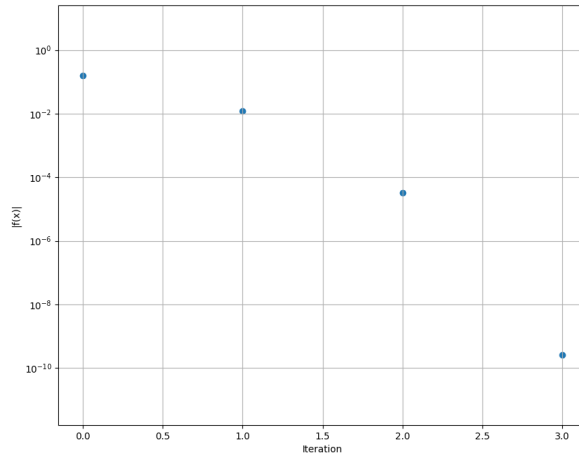


Figure 9: Szybkość zbieżności metody Newtona-Raphsona dla punktu początkowego $x = 3$

W przypadku metody Newtona-Raphsona widać znaczącą przewagę nad metodą bisekcji, biorąc pod uwagę szybkość zbieżności rozwiązania.

3 Jawny schemat Eulera dla ruchu bez oporów.

Kolejny etap projektu polegał na całkowaniu równań ruchu za pomocą jawnego schematu Eulera. Poniżej zestawiono wykresy położenia $x(t)$, prędkości $v(t)$, energii kinetycznej $Ek(t)$, energii potencjalnej $V(t)$ oraz energii całkowitej $Ek(t) + V(t)$. Obliczenia wykonywano dla różnych kroków dt czasów oraz czasu trwania symulacji t_{max} .

3.1 Wykresy w dziedzinie czasu.

a) $\Delta t = 0.01, t_{max} = 30$

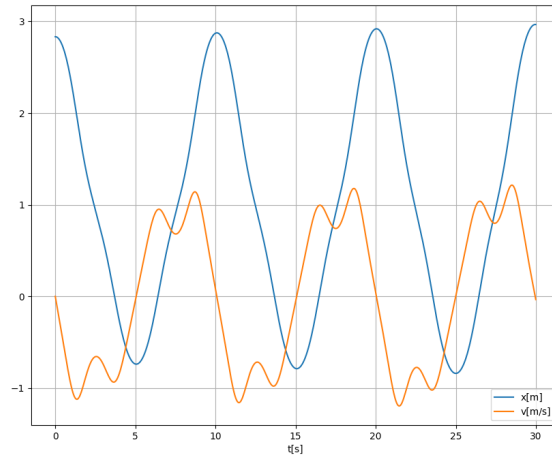


Figure 10: Wykres zależności położenia oraz prędkości od czasu.

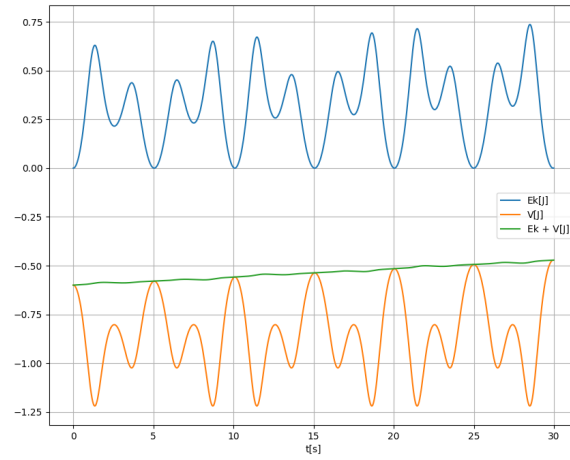


Figure 11: Wykres zależności energii kinetycznej, potencjalnej i ich sumy od czasu.

b) $\Delta t = 0.001, t_{max} = 30$

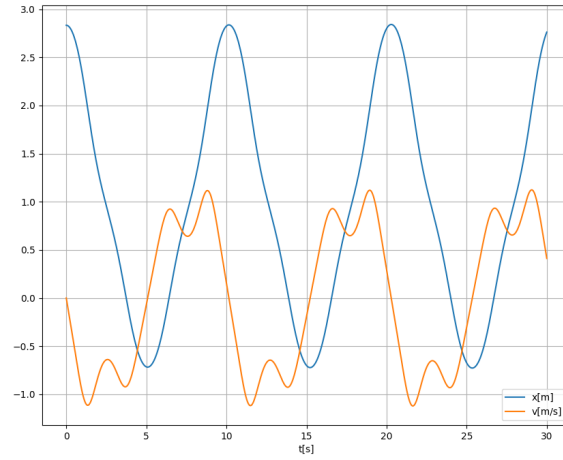


Figure 12: Wykres zależności położenia oraz prędkości od czasu.

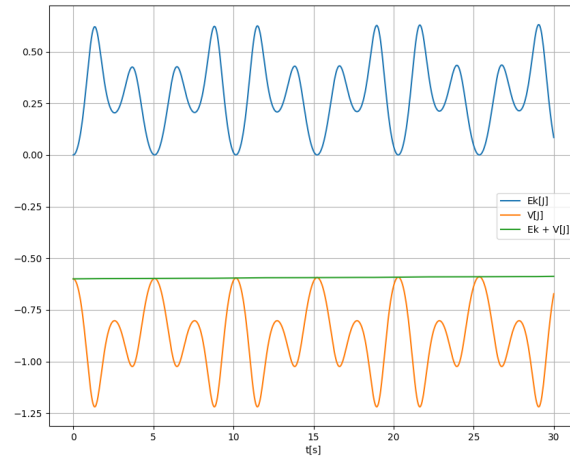


Figure 13: Wykres zależności energii kinetycznej, potencjalnej i ich sumy od czasu.

Na podstawie powyższego wykresu energii można wywnioskować, że jawny schemat Eulera nie zachowuje ściśle energii.

3.2 Wykresy fazowe.

Poniżej przedstawiono wykresy fazowe dla różnych kombinacji kroków czasowych dt i czasów symulacji t_{max} .

a) $\Delta t = 0.01, t_{max} = 100$

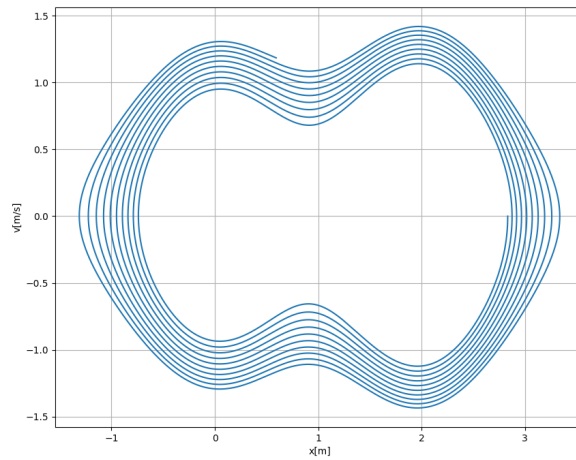


Figure 14: Portret fazowy $V(x)$.

b) $\Delta t = 0.001, t_{max} = 100$

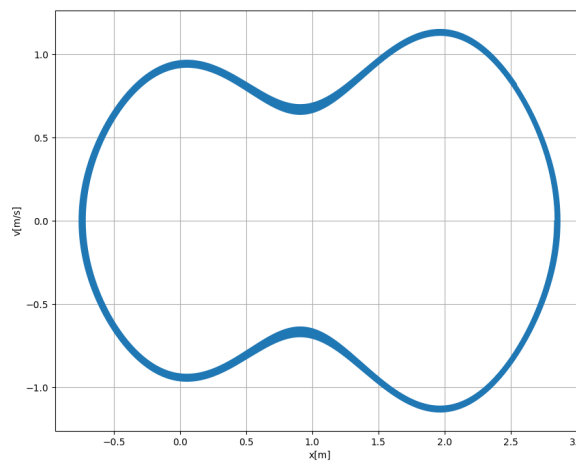


Figure 15: Portret fazowy $V(x)$.

c) $\Delta t = 0.01, t_{max} = 1000$

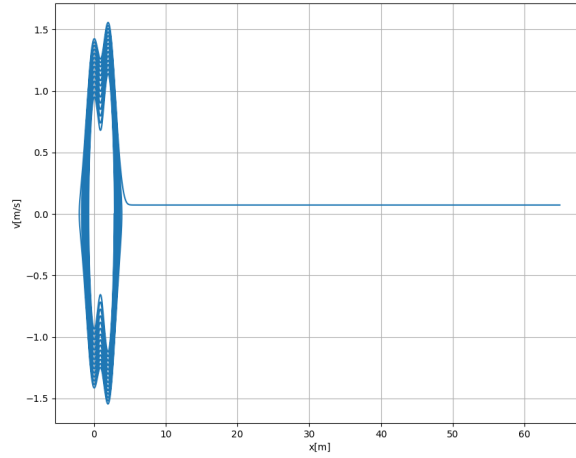


Figure 16: Portret fazowy $V(x)$.

Ciało opuściło zasięg potencjału i oddala się ze stałą prędkością w prawo.
d) $\Delta t = 0.001, t_{max} = 1000$

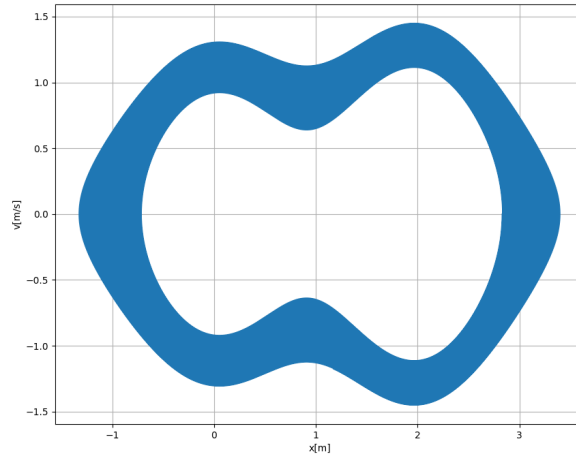


Figure 17: Portret fazowy $V(x)$.

4 Jawny schemat Eulera dla ruchu z oporami.

Kolejnym krokiem było wykorzystanie jawnego schematu Eulera do ruchu z oporami. Rozważono przypadki dla różnych parametrów α określających opór. Za krok czasowy przyjęto $\Delta t = 0.01$ a $t_{max} = 30$.

4.1 Wykresy w dziedzinie czasu.

a) $\alpha = 0.5$

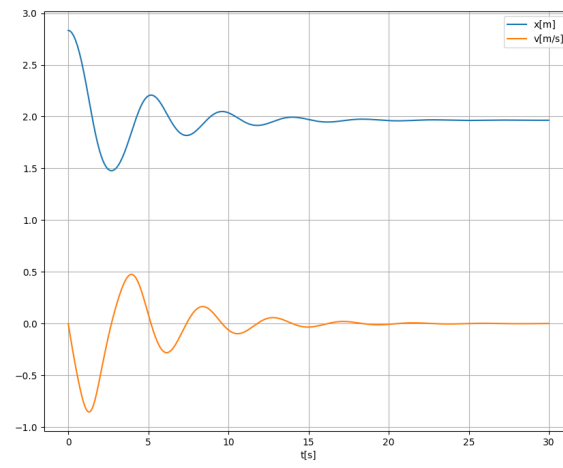


Figure 18: Wykres zależności położenia oraz prędkości od czasu.

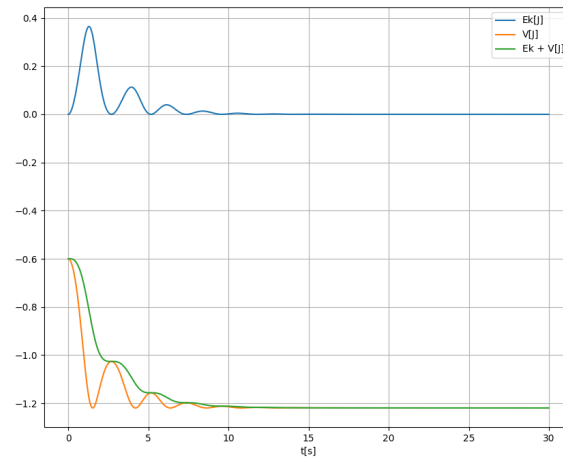


Figure 19: Wykres zależności energii kinetycznej, potencjalnej i ich sumy od czasu.

b) $\alpha = 5$

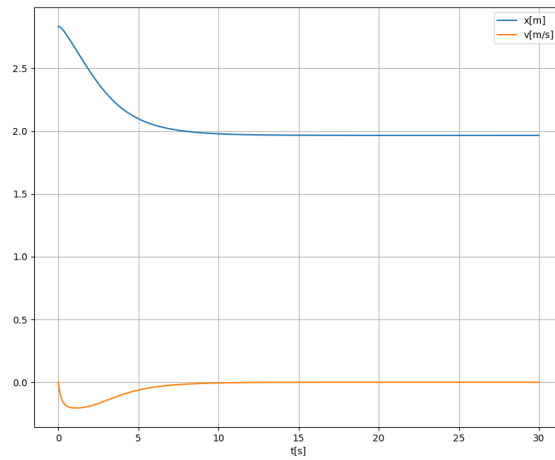


Figure 20: Wykres zależności położenia oraz prędkości od czasu.

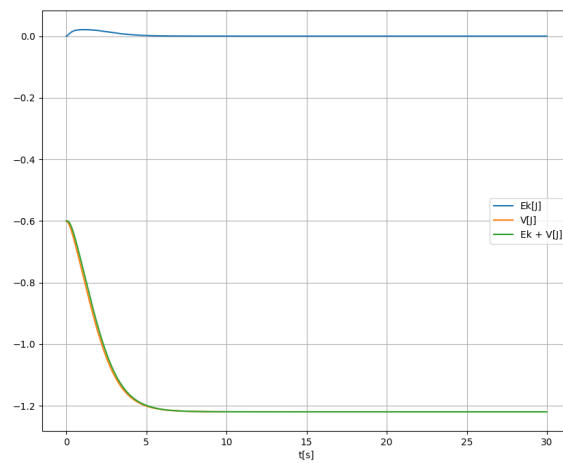


Figure 21: Wykres zależności energii kinetycznej, potencjalnej i ich sumy od czasu.

c) $\alpha = 201$

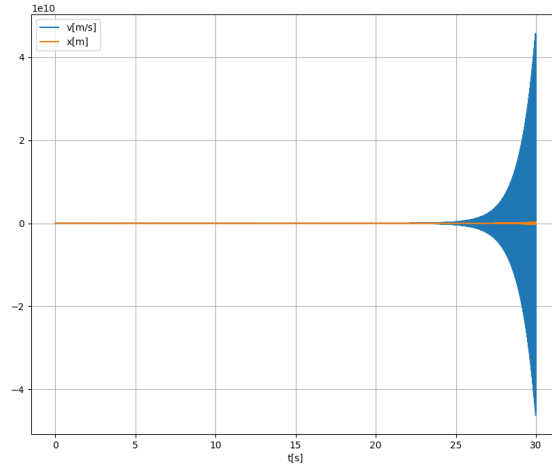


Figure 22: Wykres zależności położenia oraz prędkości od czasu.

Na podstawie powyższego wykresu można zauważyć, że rachunek eksploduje. Ciało wykonuje skoki o rosnącej z czasem amplitudzie. Prędkość zmienia znak i rośnie z kroku na krok. Pojawia się tu problem bezwzględnej niestabilności jawnego schematu Eulera.

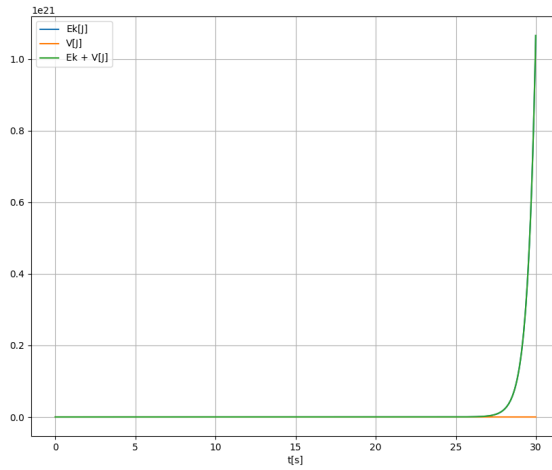


Figure 23: Wykres zależności energii kinetycznej, potencjalnej i ich sumy od czasu.

4.2 Wykresy fazowe.

Poniżej przedstawiono wykresy fazowe dla kroku czasowego $dt = 0.01$, czasu symulacji $t_{max} = 30$ oraz różnych wartości parametru α .

a) $\alpha = 0.5$

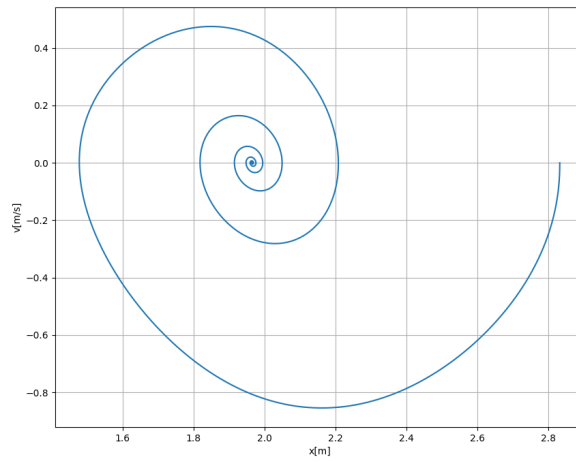


Figure 24: Portret fazowy $V(x)$.

b) $\alpha = 5$

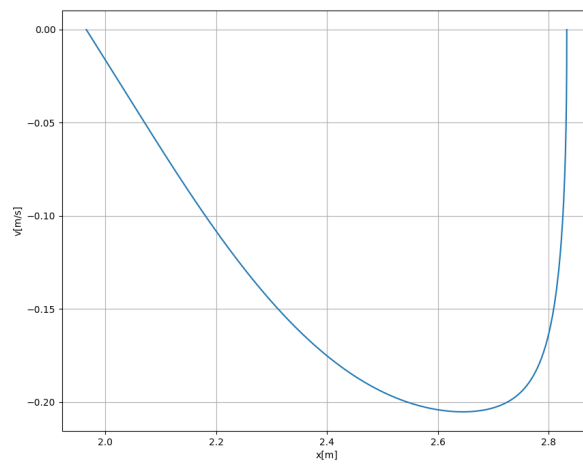


Figure 25: Portret fazowy $V(x)$.

c) $\alpha = 201$

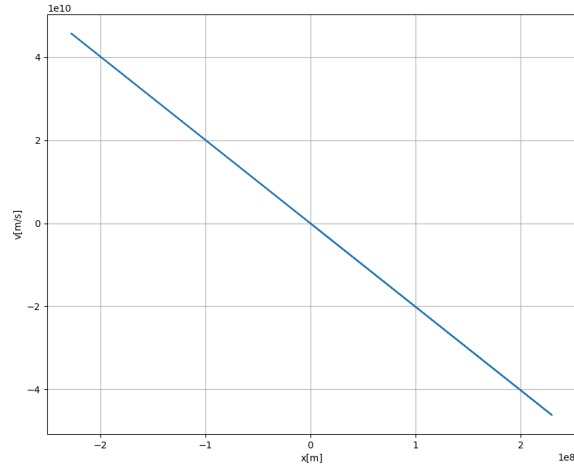


Figure 26: Portret fazowy $V(x)$.

5 Metoda trapezów - zbieżność.

Kolejnym etapem projektu było wykorzystanie metody trapezów do ponownego rozwiązania poprzednich zagadnień. Na początku przeprowadzono test szybkości zbieżności metody trapezów. Za punkt początkowy przyjęto $x = 2.8325$, za parametr tolerancji wyniku przyjęto $\epsilon = 10^{-10}$, za krok czasowy przyjęto $\Delta t = 0.01$ oraz założono, że nie ma oporów ruchu tj. $\alpha = 0$. Na początku $|F_1| = 0$, a $|F_2| = 0.01$. Natomiast po pierwszej iteracji $|F_1| = 6 * 10^{-17}$ oraz $|F_2| = 2 * 10^{-11}$. Wystarczyła jedna iteracja by wynik spełnił warunek zadany przez parametr ϵ .

Poniżej przedstawiono wykres w skali logarytmicznej pokazujący szybkość zbieżności metody trapezów.

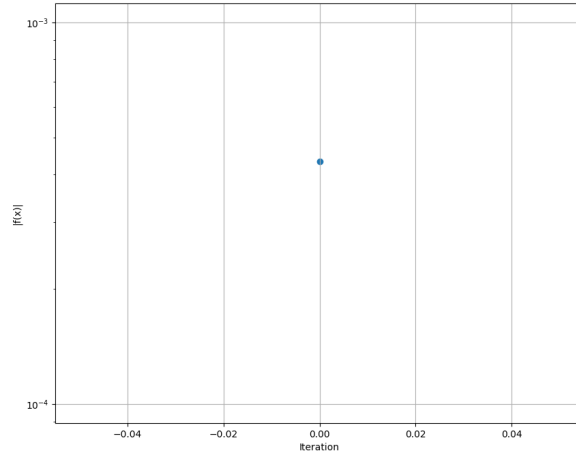


Figure 27: Szybkość zbieżności metody trapezów dla punktu początkowego $x = 2.8325$

6 Całkowanie równań ruchu metodą trapezów.

Powtórzono zadanie 2 (dla $\alpha = 0$) oraz zadanie 3 wzorem trapezów.

6.1 Wykresy w dziedzinie czasu.

a) $\Delta t = 0.01, t_{max} = 30$

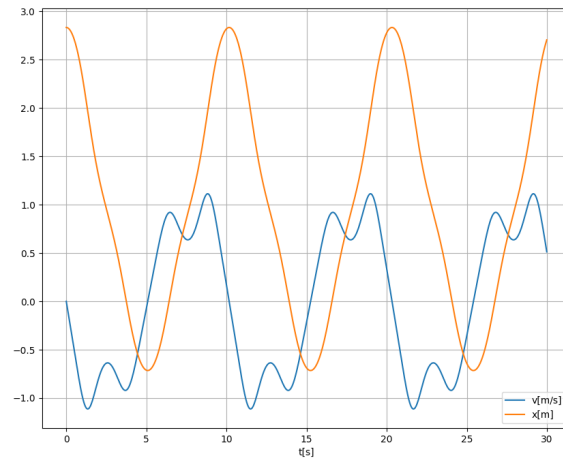


Figure 28: Wykres zależności położenia oraz prędkości od czasu.

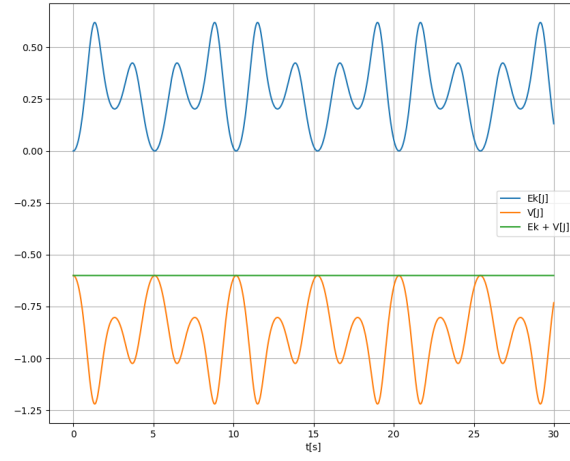


Figure 29: Wykres zależności energii kinetycznej, potencjalnej i ich sumy od czasu.

b) $\Delta t = 0.001, t_{max} = 30$

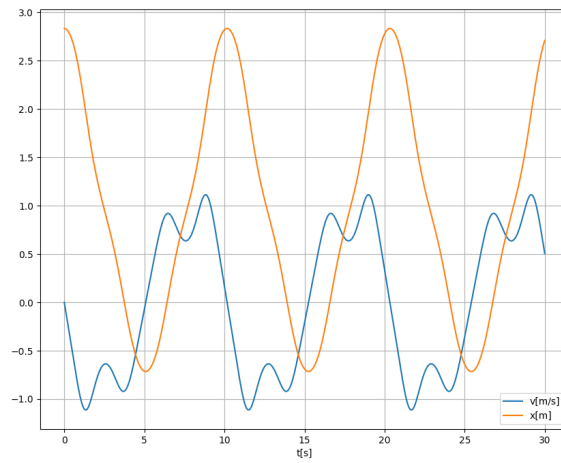


Figure 30: Wykres zależności położenia oraz prędkości od czasu.

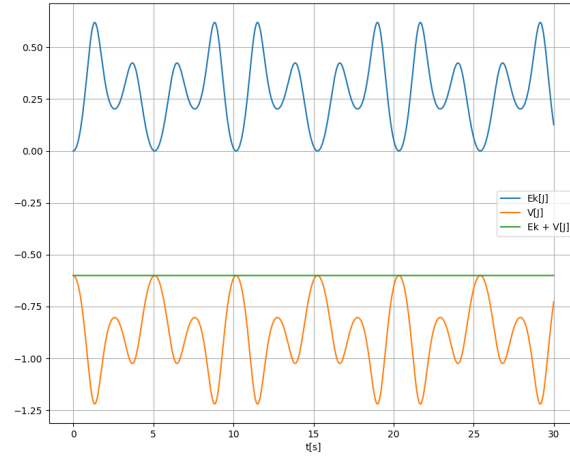


Figure 31: Wykres zależności energii kinetycznej, potencjalnej i ich sumy od czasu.

Dla małego kroku czasowego dt energia całkowita jest niemal stała co może świadczyć o dokładności metody trapezów.

6.2 Wykresy fazowe.

Poniżej przedstawiono wykresy fazowe dla różnych kombinacji kroków czasowych dt i czasów symulacji t_{max} .

a) $\Delta t = 0.01, t_{max} = 100$

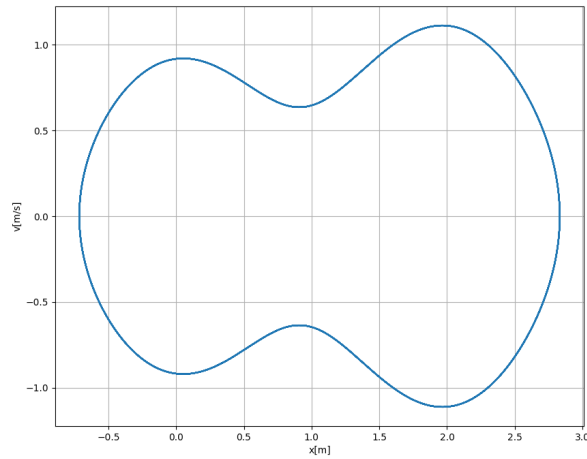


Figure 32: Portret fazowy $V(x)$.

b) $\Delta t = 0.001, t_{max} = 100$

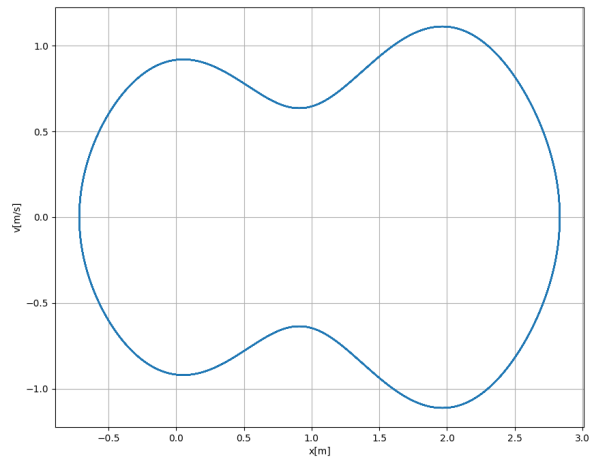


Figure 33: Portret fazowy $V(x)$.

c) $\Delta t = 0.01, t_{max} = 1000$

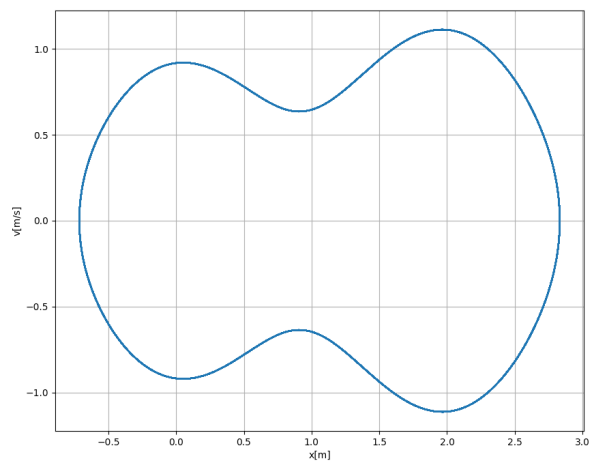


Figure 34: Portret fazowy $V(x)$.

d) $\Delta t = 0.001, t_{max} = 1000$

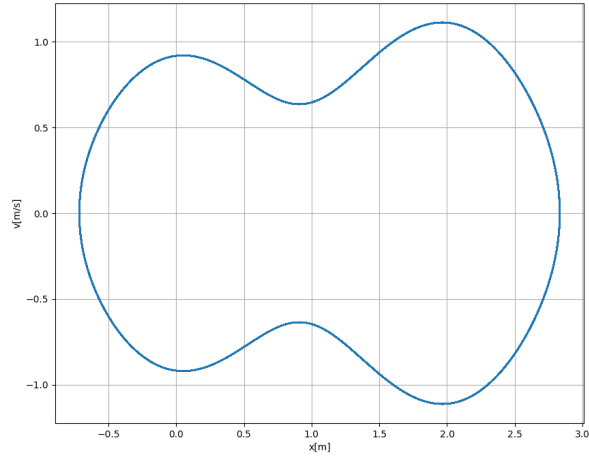


Figure 35: Portret fazowy $V(x)$.

7 Metoda trapezów dla ruchu z oporami.

Kolejnym krokiem było wykorzystanie metody trapezów do ruchu z oporami. Za krok czasowy przyjęto $\Delta t = 0.01$ a $t_{max} = 30$.

7.1 Wykresy w dziedzinie czasu.

a) $\alpha = 0.5$

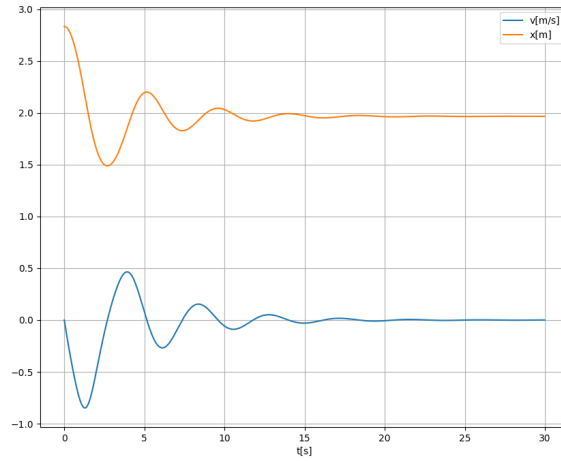


Figure 36: Wykres zależności położenia oraz prędkości od czasu.

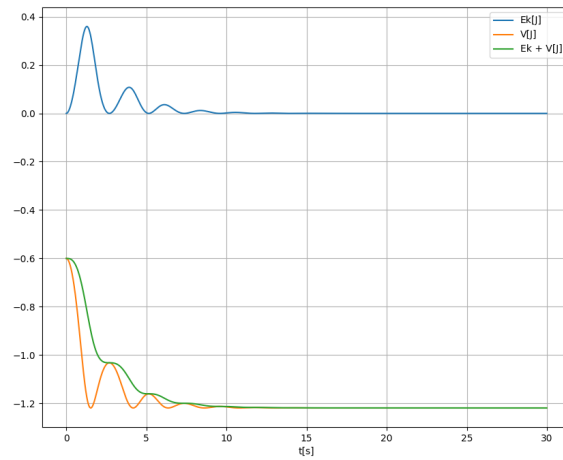


Figure 37: Wykres zależności energii kinetycznej, potencjalnej i ich sumy od czasu.

b) $\alpha = 5$

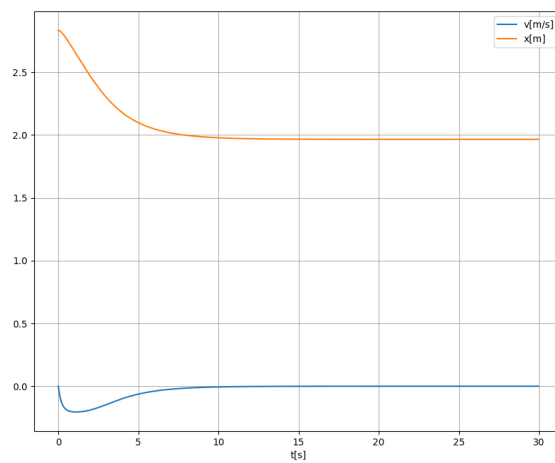


Figure 38: Wykres zależności położenia oraz prędkości od czasu.

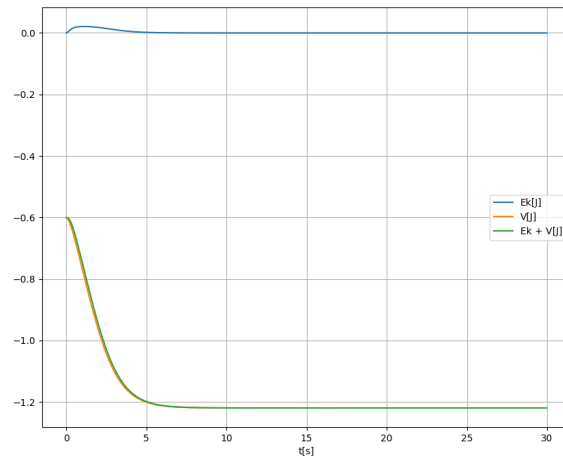


Figure 39: Wykres zależności energii kinetycznej, potencjalnej i ich sumy od czasu.

c) $\alpha = 201$

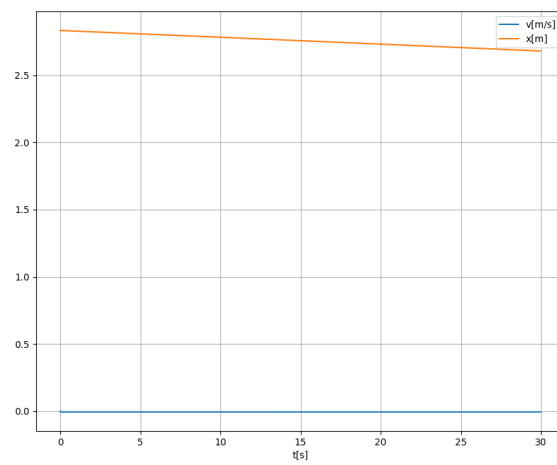


Figure 40: Wykres zależności położenia oraz prędkości od czasu.

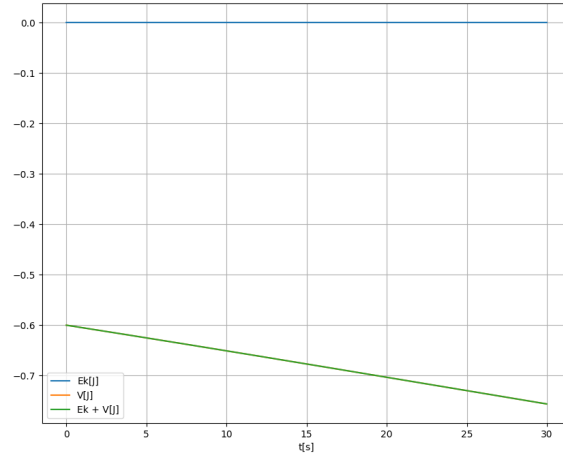


Figure 41: Wykres zależności energii kinetycznej, potencjalnej i ich sumy od czasu.

7.2 Wykresy fazowe.

Poniżej przedstawiono wykresy fazowe dla kroku czasowego $dt = 0.01$, czasu symulacji $t_{max} = 30$ oraz różnych wartości parametru α .

a) $\alpha = 0.5$

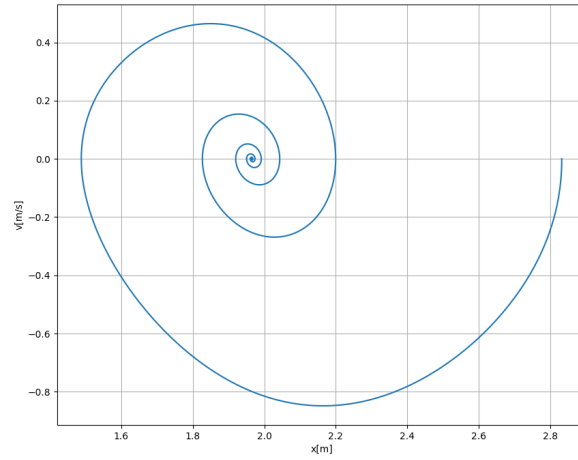


Figure 42: Portret fazowy $V(x)$.

b) $\alpha = 5$

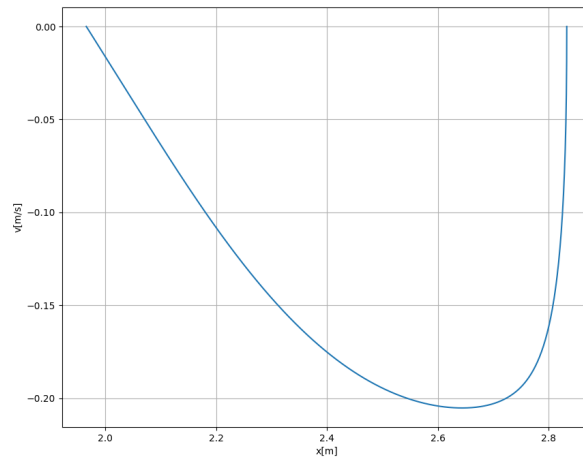


Figure 43: Portret fazowy $V(x)$.

c) $\alpha = 201$

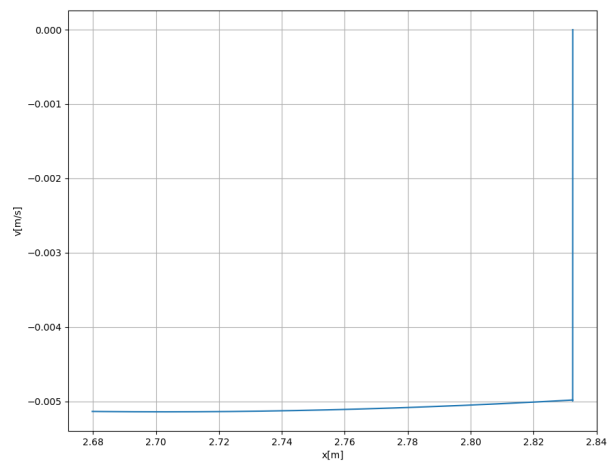


Figure 44: Portret fazowy $V(x)$.

8 Wnioski

Najlepszą z przedstawionych powyżej metod okazała się metoda trapezów. Dla odpowiednio małego kroku czasowego zachowywała energię całkowitą ciała. W przypadku tej metody rozwiązanie było zbieżne już po pierwszej iteracji.