Metody relaksacyjne dla równania Poissona

Równanie Poissona

$$\nabla^2\phi = -\rho \tag{1}$$

opisane na siatce punktów $(i,j) \in [-30,30] \times [-30,30]$ z krokiem $\Delta x = \Delta y = 1$. Na brzegu $\phi = 0$ (uziemione metalowe pudło). Gęstość ładunku jest równa : $\rho_{ij} = 1$ dla $(i,j) \in [-10,10] \times [-10:10]$ oraz 0 w pozostałych punktach siatki.

Na starcie iteracji przyjmiemy zerowy potencjał wszędzie. Zastosujemy przepis relaksacyjny: w pętli po i oraz j wyliczymy nową wartość potencjału w punkcie (i,j)

$$\phi_{ij} := (1-\omega)\phi_{ij} + \omega\frac{\phi_{i+1,j} + \phi_{i-1,j} + \phi_{i,j+1} + \phi_{i,j-1} + \rho_{ij}dx^2}{4}. \tag{2}$$

Poniżej, przez 'jedną iterację' rozumieć będziemy pełen obieg pętli po i oraz j.

(**1**) Wzór (2) odpowiada punktowej podrelaksacji, relaksacji (metoda Gaussa-Seidla) i nadrelaksacji dla odpowiednio $\omega < 1$, $\omega = 1$ oraz $\omega > 1$.

Do dyskusji zbieżności procedury będziemy obserwować wartośc całki działania

$$a = \int \left\{ \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2 \right] - \rho\phi \right\} dxdy \tag{3}$$

przy czym $\frac{\partial\phi}{\partial x} \simeq \frac{\phi_{i+1,j}-\phi_{i-1,j}}{2\Delta x}$. *Znaleźć optymalną wartość* ω, dla której zbieżność osiągana jest po najmniejszej liczbie iteracji. Narysować rozwiązanie równania.

(**2**.) *Sprawdzenie rozwiązania: odwracamy równanie Poissona*: znamy potencjał i chcemy z niego wydobyć gęstość ładunku. Wyliczyć $\rho_{i,j} = -\nabla^2\phi_{i,j} = \frac{\phi_{i+1,j}+\phi_{i-1,j}+\phi_{i,j+1}+\phi_{i,j-1}-4\phi_{i,j}}{\Delta x^2}$ wzdłuż osi y. Porównać z gęstością wprowadzoną do równania (2).

(**3 relaksacja globalna**.) Zbadać zbieżność *relaksacji globalnej*. Operujemy na dwóch tablicach (nowy i stary potencjał) i wykonujemy dwie pełne podwójne pętle po i oraz j. W pierwszej liczymy

$$\phi\_ij := (1-\omega)\phi_{ij} + \omega \frac{\phi_{i+1,j} + \phi_{i-1,j} + \phi_{i,j+1} + \phi_{i,j-1} + \rho_{ij} dx^2}{4}. \qquad (4)$$

a w drugiej podstawiamy

$$\phi_{ij} := \phi'_{ij}. \qquad (5)$$

Dla $\omega = 1$ powyższy przepis to relaksacja Jakobiego. Przedyskutować zbieżność procesu iteracji globalnej w funkcji ω (dla jakich ω relaksacja globalna jest zbieżna? Znaleźć optymalne ω. Porównać tempo zbieżności relaksacji globalnej z relaksacją punktową (dla każdej z metod przyjąć optymalne ω).