Sprawozdanie

Metody numeryczne
Laboratorium 9.

Aproksymacja w bazie wielomianów Grama

14.05.2020 r.

Aleksandra Rolka

Celem 9. laboratorium było wykonanie aproksymacji funkcji przy użyciu wielomianów Grama w danym przedziale na siatce równoodległych węzłów.

1. Wstęp teoretyczny

Aproksymacja liniowa

Aproksymacja ogólnie rzecz biorąc polega na zastępowaniu jednej funkcji (funkcji aproksymowanej) inną funkcją (funkcją aproksymującą) w taki sposób, by niewiele się różniły w sensie określonej normy.
Dokładniej aproksymacja liniowa funkcji aproksymowanej $f(x)$ (zakładając, że $f \in X$, gdzie X jest przestrzenią liniową) polega na wyznaczaniu współczynników $a_0, a_1, a_2, \dots, a_m$ funkcji aproksymującej zdefiniowanej następująco:

$$F(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \cdots + a_m\varphi_m(x), \qquad (1)$$

gdzie:

$\varphi_i(x) -$ są funkcjami bazowymi (m+1) wymiarowej podprzestrzeni liniowej X_{m+1}.

Funkcja $F(x)$ musi spełniać następujący warunek:

$$||f(x) - F(x)|| = minimum. \qquad (2)$$

Wybór podprzestrzeni i bazy zależy od rodzaju problemu:

1) podprzestrzeń funkcji trygonometrycznych z bazą:

$$1, \sin(x), \cos(x), \sin(2x), \cos(2x), \dots, \sin(kx), \cos(kx).$$

2) podprzestrzeń wielomianów stopnia z bazą:

$$1, x, x^2, \dots, x^m.$$

3) podprzestrzeń funkcji, których własności ściśle związane są z własnościami rozważanego problemu, np.:

$$\exp(a_0 + a_1 x + a_2 x^2).$$

Aproksymacja średniokwadratowa w bazie wielomianów ortogonalnych

Funkcję $f(x)$ i $g(x)$ nazywamy ortogonalnymi na dyskretnym zbiorze punktów $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \dots, \mathrm{x}_\mathrm{n}$, jeśli funkcje f i g spełniają warunki:

- $\sum_{i=0}^{n} f(x_i)g(x_i) = 0$ (3)
- $\sum_{i=0}^{n} [f(x_i)]^2 > 0$ (4)
- $\sum_{i=0}^{n} [g(x_i)]^2 > 0$ (5)

W aproksymacji średniokwadratowej ciąg funkcyjny:

$$\{\, \varphi_m(x) \,\} = \varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x) \tag{6}$$

stanowi bazę ortogonalną dla węzłów aproksymacji $x_1, x_2, \dots, x_n$, jeśli narzucone zostaną dwa warunki:

$$\sum_{i=0}^{n} \varphi_j(x_i)\, \varphi_k(x_i) = 0,\ \ j \neq k, \tag{7}$$

oraz nie wszystkie węzły są zerami tych wielomianów:

$$\sum_{i=0}^{n} \varphi_j^2(x_i) > 0. \tag{8}$$

Wówczas macierz układu normalnego przy aproksymacji wielomianami ortogonalnymi jest macierzą diagonalną.

Macierz układu jest dobrze uwarunkowana, więc układ posiada jedno rozwiązanie.

Aby znaleźć wielomiany ortogonalne na siatce zakłada się, że węzły są równoległe:

$$x_i = x_0 + i \cdot h, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

oraz przekształca się jako:

$$q = \frac{x - x_0}{h}, \quad x_i \rightarrow q_i. \tag{9}$$

Celem jest znalezienie wielomianów:

$$\left\{F_i^{(n)}(q)\right\} = F_0^{(n)}(q), F_1^{(n)}(q), \dots, F_m^{(n)}(q) \tag{10}$$

postaci:

$$F_k^{(n)}(q) = a_0 + a_1 q + a_2(q-1) + \cdots + a_k(q-1)\dots(q-k+1), \tag{11}$$

spełniających warunek ortogonalności:

$$\sum_{i=0}^{n} F_j^n(i) F_k^n(i) = 0 \iff j \neq k \,. \tag{12}$$

Korzysta się z postaci wielomianu czynnikowego:

$$q^{[k]} = q(q-1)\dots(q-k+1) \tag{13}$$

$$F_k^{(n)}(q) = a_0 + a_1 q^{[1]} + a_2 q^{[2]} + \cdots a_k q^{[k]} \tag{14}$$

oraz dodatkowo normuje wielomiany do 1 tzn. mają one postać:

$$\hat{F}_k^{(n)}(0) = 1, \;\; k = 0, 1, 2, \dots, m \tag{15}$$

$$\hat{F}_k^{(n)}(q) = 1 + b_1 q^{[1]} + b_2 q^{[2]} + \cdots + b_k q^{[k]} \tag{16}$$

Szukane <u>wielomiany ortogonalne</u> są **wielomianami Grama**:

$$\hat{F}_k^{(n)}(q) = \sum_{s=0}^{k} (-1)^s \binom{k}{s} \binom{k+s}{s} \frac{q^{[s]}}{n^{[n]}} \,. \tag{17}$$

Mając zdefiniowaną bazę można znaleźć **funkcję aproksymującą F(x):**

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=0}^{m} a_i \varphi_i(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{c_k}{s_k} \hat{F}_k^{(n)}(q) =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \frac{c_k}{s_k} \hat{F}_k^{(n)} \left(\frac{x - x_0}{h} \right), \qquad\qquad m \leq n \,, \tag{18}$$

gdzie:

$$c_k = \sum_{i=0}^{n} y_i \, \hat{F}_k^{(n)}(x_i), \qquad\qquad s_k = \sum_{q=0}^{n} [\hat{F}_k^{(n)}(q)]^2.$$

2. Zadanie do wykonania

2.1 Opis problemu

Zadanie: wykonać aproksymację funkcji:

$$f_{szum}(x) = f(x) + C_{rand}(x), \tag{19}$$

przy użyciu wielomianów Grama w przedziale $x \in [x_{min}, x_{max}]$ na siatce równoległych węzłów, gdzie funkcja $f(x)$ jest zdefiniowana jako:

$$f(x) = \sin\left(\frac{14\pi x}{x_{max}-x_{min}}\right)\left(\exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}\right) + \exp\left(-\frac{(x+x_0)^2}{2\sigma^2}\right)\right) \tag{20}$$

gdzie: $C_{rand} = \frac{Y-0.5}{5}$ − niewielkie zaburzenie stochastyczne,

$Y \in [0, 1]$ − liczba pseudolosowa o rozkładzie równomiernym, która może być wygenerowana przy użyciu makra z języka C:

```
#define frand() ((double)rand())/(RAND_MAX+1.0)
```

Przyjęto następujące parametry:

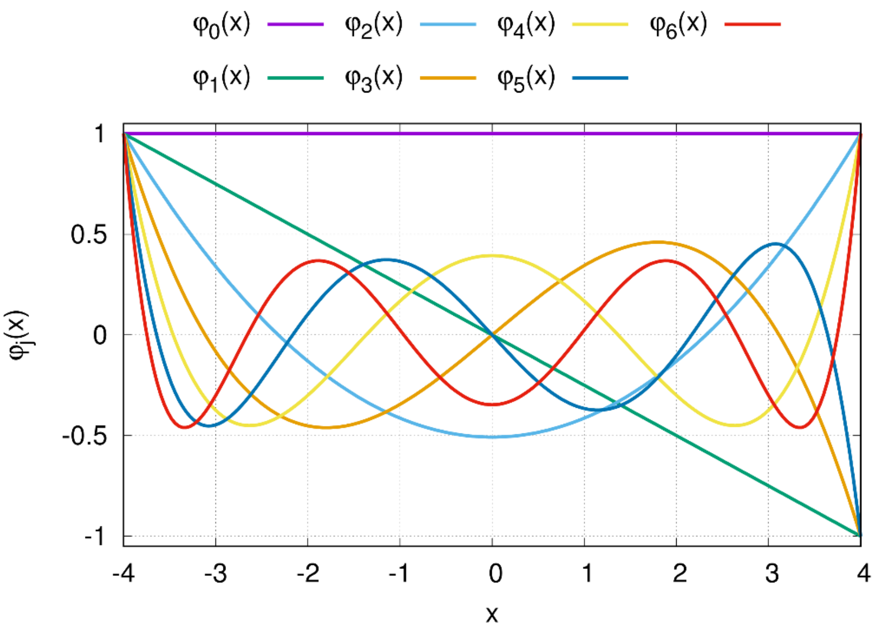
- $Y = frand()$,
- $x_{min} = -4.0$,
- $x_{max} = 4.0$,
- $x_0 = 2.0$,
- $\sigma = \frac{x_{max}-x_{min}}{16}$
- liczba węzłów $n = 201$,
- wagę $w(x) = 1.0$

Aproksymacja funkcji została wykonana przy użyciu kolejno $m = 10, 30, 50$ wielomianów.

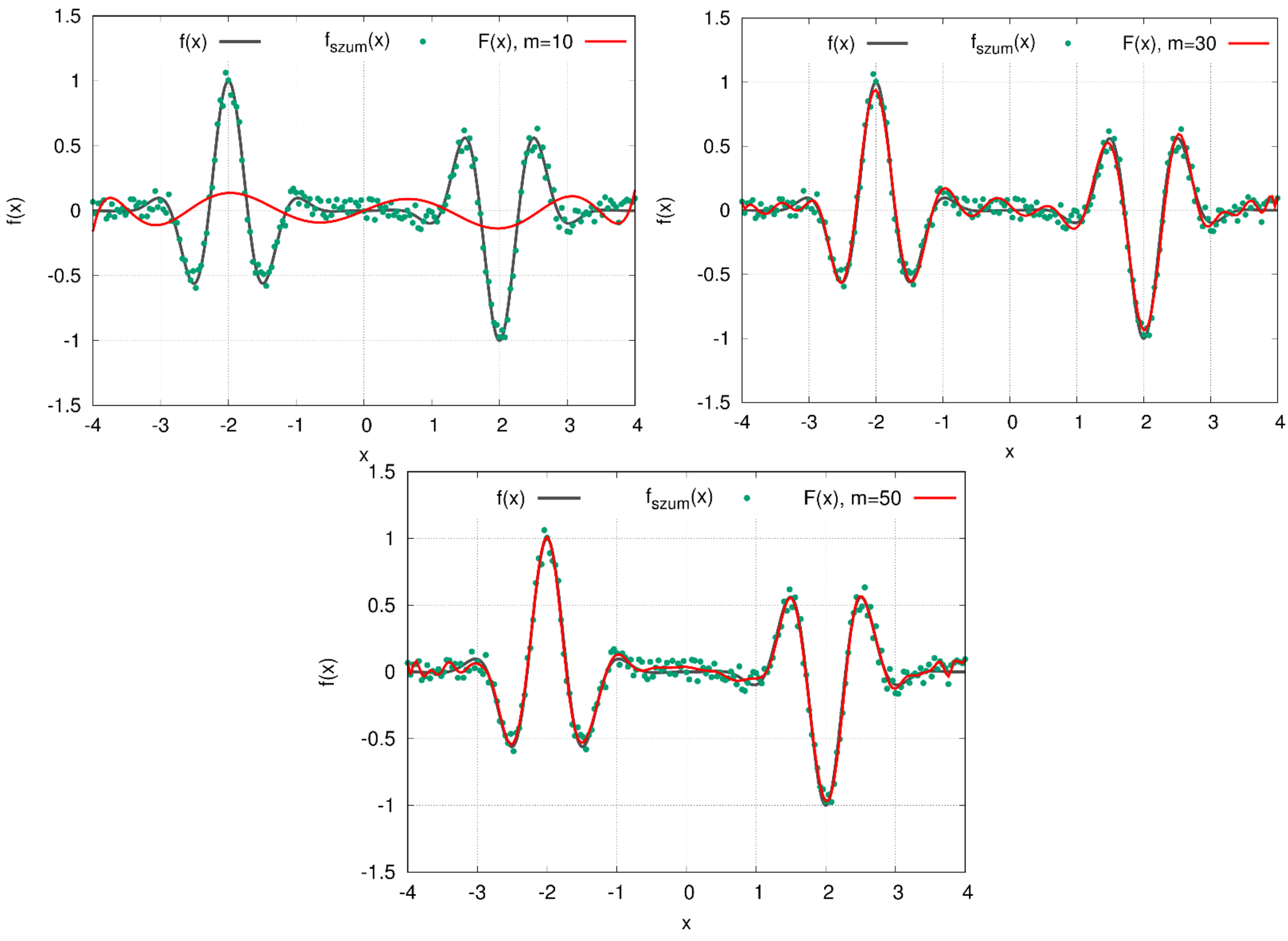
2.2 Wyniki

Programie rozwiązującym powyższy problem napisany został w języku C, nie korzysta z żadnej dodatkowej biblioteki numerycznej.

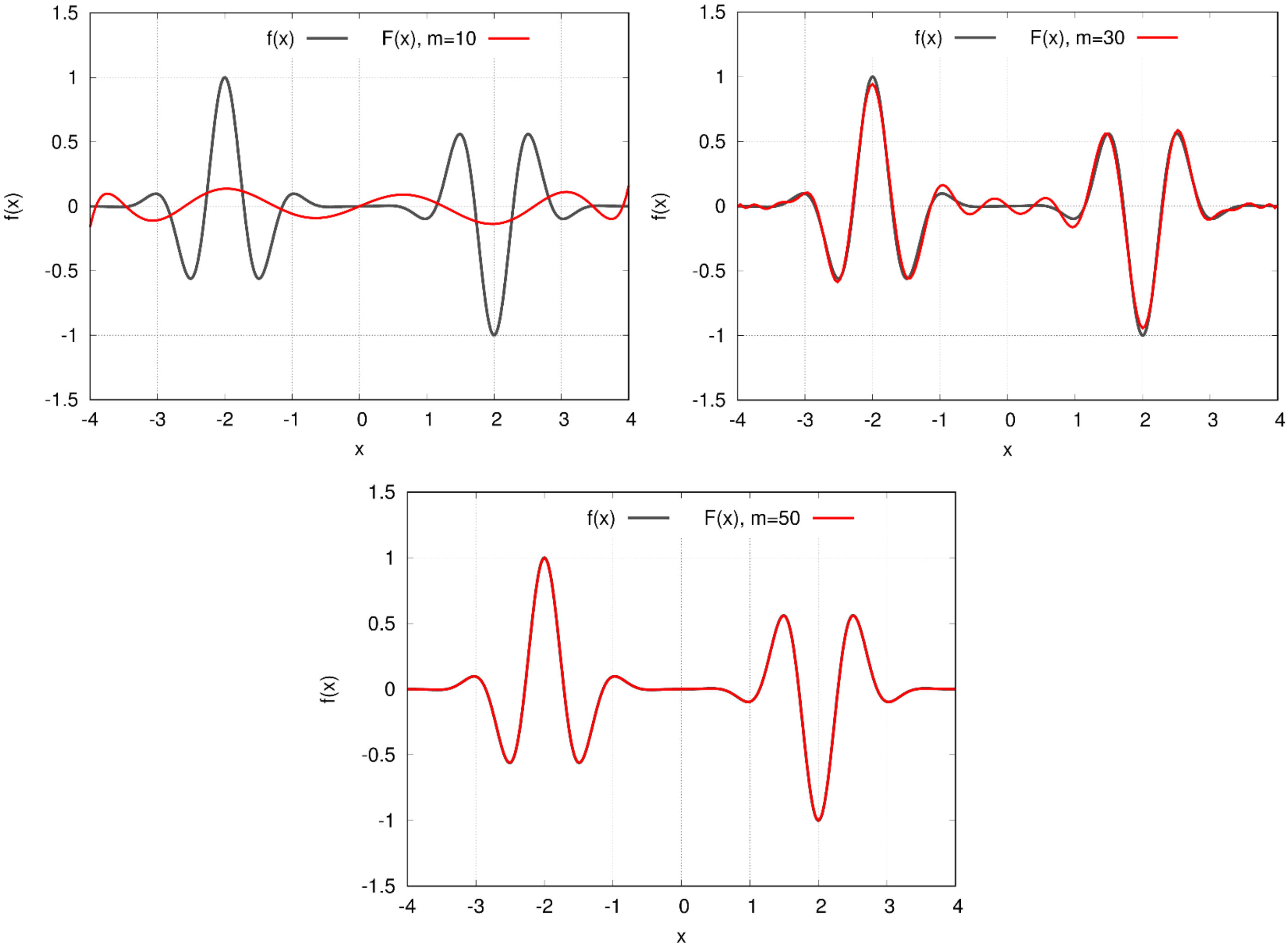
Otrzymane wyniki obliczeń zapisane zostały w plikach **.dat.* Następnie na podstawie tych danych za pomocą skryptu Gnuplot'a wygenerowano poniższe wykresy:



Rysunek 1. *Siedem pierwszych wielomianów Grama w przedziale [−4, 4]*



Rysunek 2. *Wyniki aproksymacji według danych $f_{szum}(x)$ dla 201 węzłów przy pomocy różnej liczby wielomianów Grama: użyto m + 1 wielomianów.*



Rysunek 3. *Wyniki aproksymacji według danych f (x) (bez szumu) dla 201 węzłów przy pomocy różnej liczby wielomianów Grama: użyto m + 1 wielomianów.**

*nie umieszczono węzłów na wykresie by wykres funkcji *F(x)* był lepiej widoczny, punkty te pokrywają się z funkcją *f(x)*

3. Wnioski

Porównując przebieg kolejnych wielomianów Grama pokazanych na wykresie z Rysunku 1. do wzoru (16) stwierdzono, że zostały one wyznaczone poprawnie.

Aproksymacja funkcji $f_{szum}(x)$ dla 201 węzłów (Rysunek 2.) przy początkowej liczbie wielomianów Grama *m=10* daje znacznie odbiegający wykres funkcji aproksymującej od oryginalnej funkcji aproksymowanej. Dla m=30 wykres funkcji aproksymującej jest już zbliżony do oczekiwanego wykresu, jednak występują oscylacje. Jak pokazuje wykres, oscylacje występują w miejscach koncentracji węzłów. Ostatni wykres funkcji aproksymującej dla *m=50* jest bardzo zbliżony do funkcji *f(x)*, jednak w dalszym ciągu występują niewielkie oscylacje, jest to spowodowane występowaniem szumu.

Dla porównania przeprowadzona została aproksymacja tej samej funkcji *f(x)*, z tymi samymi warunkami z tym, że bez szumu. Wyniki przedstawione na Rysunku 3. pokazują, że podobnie jak w poprzednim przypadku, zwiększona liczba wielomianów Grama pozwala na lepszą aproksymacje funkcji, jednak przy tej samej liczbie wielomianów uzyskana funkcja ma mniejsze oscylacje, a dla *m=50* funkcja pokrywa się z funkcją aproksymowaną, gołym okiem nie są zauważalne różnice.

Podsumowując, metoda aproksymacji w bazie wielomianów Grama pozwala na bardzo dobre przybliżenie funkcji aproksymowanej. Efekt ten jest jeszcze lepszy w przypadku, gdy funkcja aproksymowana jest bez szumu. W przypadku występowania szumu przybliżenie jest trochę mniej dokładne.

Źródła:

- Dr hab inż. Tomasz Chwiej – Notatki do wykładu *„Aproksymacja”*. Dostępne w Internecie: http://galaxy.agh.edu.pl/~chwiej/mn/aproksymacja_1819.pdf