Sprawozdanie

Metody numeryczne
Laboratorium 8.

Interpolacja funkcjami sklejanymi poprzez wyznaczenie wartości drugich pochodnych w węzłach.

07.05.2020 r.

Aleksandra Rolka

Celem 7. laboratorium było przeprowadzenie interpolacji dwóch różnych funkcji za pomocą funkcji sklejanych poprzez wyznaczenie wartości drugich pochodnych w węzłach.

1. Wstęp teoretyczny

Węzeł

Węzeł funkcji jest argumentem funkcji, dla którego znana jest jej wartość. Zbiór węzłów jest w praktyce skończonym zbiorem argumentów, dla których eksperymentalnie wyznaczono wartości nieznanej funkcji.

Interpolacja

Interpolacja polega na wyznaczeniu przybliżonych wartości funkcji w punktach nie będących węzłami oraz na oszacowaniu błędu przybliżonych wartości.
Problem interpolacji sprowadzić można do znalezienia funkcji interpolującej $F(x)$, która w węzłach przyjmuje wartości takie jak funkcja $y = F(x)$, czyli funkcja interpolowana, której postać funkcyjna może nie być nawet znana.

Ilorazy różnicowy

Funkcja $f(x)$przyjmuje w punktach x_i, $i = 0, 1, \dots, n$, wartości:

$$f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n).$$

Zakładając, że różnice, odległości między węzłowe: $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, mogą nie być stałe, można zdefiniować ilorazy różnicowe w następujący sposób, jako iloraz :

- pierwszego rzędu :

$$f(x_{n-1}; x_n) = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}, \quad (1)$$

- drugiego rzędu :

$$f(x_{n-2}; x_{n-1}; x_n) = \frac{f(x_{n-1}; x_n) - f(x_{n-2}; x_{n-1})}{x_n - x_{n-2}}, \quad (2)$$

- n-tego rzędu :

$$f(x_i; x_{i+1}; \dots; x_{i+n}) = \frac{f(x_{i+1}; x_{i+2}; \dots; x_{i+n}) - f(x_i; x_{i+1}; \dots; x_{i+n-1})}{x_{i+n} - x_i}. \quad (3)$$

Interpolacja funkcjami sklejanymi

W przedziale $[a, b]$ jest $n + 1$ punktów takich że:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b. \tag{4}$$

Punkty te określają podział przedziału $[a, b]$ na n podprzedziałów tj. $[x_i, x_{i+1}]$.

Funkcję $s(x)$ określoną na przedziale $[a, b]$ nazywa się funkcją sklejaną stopnia m $(m \geq 1)$ jeżeli:

a) $s(x)$ jest wielomianem stopnia co najwyżej m na każdym podprzedziale (x_i, x_{i+1}), $i = 0,1, \ldots, n-1$
b) $s(x) \in C^m$

Punkty x_j nazywa się węzłami funkcji sklejanej. W każdym przedziale (x_i, x_{i+1}), funkcja $s(x)$ jest wielomianem stopnia conajwyżej m:

$$s_i(x) = c_{im}x^m + c_{im-1}x^{m-1} + \cdots + c_{i1}x + c_{i0}\,, \quad x \in (x_i, x_{i+1}). \tag{5}$$

Funkcja interpolująca jest kombinacją liniową elementów bazy $\{s_i(x)\}$:

$$s(x) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i s_i(x), \quad x \in [a, b] \tag{6}$$

Funkcje sklejane trzeciego stopnia ($\boldsymbol{m = 3}$)

Funkcję $s(x)$ nazywa się interpolacyjną funkcją sklejaną stopnia trzeciego dla funkcji $f(x)$, jeżeli:

$$s(x_i) = f(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n; \quad n \geq 2. \tag{7}$$

Do określenia funkcji $s(x)$ stopnia trzeciego konieczne jest wyznaczenie $(n + 3)$ parametrów. Ponieważ ilość węzłów jest równa $n + 1$ pozostają 2 stopnie swobody. Trzeba nałożyć dwa dodatkowe warunki. Rodzaj tych warunków zależy od funkcji $f(x)$ lub od znajomości jej zachowania w pobliżu końców przedziału $[a, b]$:

- 1. rodzaj warunków (1 pochodna):
$$\begin{aligned} s^{(1)}(a + 0) &= \alpha_1, \\ s^{(1)}(b - 0) &= \beta_1, \end{aligned} \tag{8}$$

- 2. rodzaj warunków (2 pochodna):
$$\begin{aligned} s^{(2)}(a + 0) &= \alpha_2, \\ s^{(2)}(b - 0) &= \beta_2, \end{aligned} \tag{9}$$

gdzie : $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ – ustalone liczby

- 3 rodzaj warunków (warunek na 1 i 2 pochodną)
  - stosowany dla funkcji okresowych :

$$s^{(i)}(a+0) = s^{(i)}(b-0), \quad i = 1, 2 \tag{10}$$

Interpolacja funkcjami sklejanymi poprzez wyznaczenie wartości drugich pochodnych w węzłach

Oznacza się:

$$M_j = s^{(2)}(x_j), \quad j = 0, 1, \dots, n \tag{11}$$

Zgodnie z założeniem druga pochodna funkcji $s(x)$ jest ciągła i liniowa w każdym podprzedziałów $[x_{i-1}, x_i]$. Można więc zapisać:

$$s^{(2)}{}_{i-1}(x) = M_{i-1}\frac{x_i - x}{h_i} + M_i\frac{x - x_{i-1}}{h_i}, \tag{12}$$

gdzie:

$x \in [x_{i-1}, x_i]$,
$h_i = x_i - x_{i-1}$.

Całkując dwukrotnie powyższe wyrażenie otrzymuje się:

$$s_{i-1}(x) = M_{i-1}\,\frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + M_i\,\frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} + A_i(x - x_{i-1}) + B_i\ . \tag{13}$$

Stałe A_i i B_i wyznacza się korzystając z warunku interpolacji:

$$B_i = y_{i-1} - M_{i-1}\frac{h_i{}^2}{6}, \tag{14}$$

$$A_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - (M_i - M_{i-1})\frac{h_i}{6}. \tag{15}$$

W punkcie x_i pochodna musi być ciągła:

$$s^{(1)}{}_{i-1}(x_i) = s^{(1)}{}_i(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, n, \tag{16}$$

$$\downarrow$$

$$s^{(1)}{}_{i-1}(x_i - 0) = \frac{h_i}{6}M_{i-1} + \frac{h_i}{3}M_i + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}, \tag{17}$$

$$s^{(1)}{}_{i-1}(x_i + 0) = -\frac{h_{i+1}}{3}M_i + \frac{h_{i+1}}{6}M_{i+1} + \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}}, \tag{18}$$

Porównując prawe strony dwóch powyższych równań dla każdego z węzłów uzyskuje się $(n-1)$ równań, które można zapisać w postaci:

$$\mu_i M_{i-1} + 2M_i + \lambda_i M_{i+1} = d_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \tag{19}$$

gdzie:

$$\lambda_i = \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}},$$
$$\mu_i = 1 - \lambda_i,$$
$$d_i = \frac{6}{h_i + h_{i+1}} \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} \right) = 6f(x_{i-1}; x_i; x_{i+1})$$

Do układu równań należy dołączyć jeszcze 2 równania wynikające z dodatkowych warunków.

- dla warunków z 1 pochodną:

$$2M_0 + M_1 = d_0, \qquad d_i = \frac{6}{h_1} \left(\frac{y_1 - y_0}{h_1} - \alpha_1 \right), \tag{20}$$

$$M_{n-1} + 2M_n = d_n, \qquad d_n = \frac{6}{h_1} \left(\beta_1 - \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n} \right), \tag{21}$$

- dla warunków z 2 pochodną:

$$M_0 = \alpha_2, \qquad M_n = \beta_2 \qquad (21)$$

Otrzymany układ równań można przedstawić w postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & & 2 & \lambda_{n-1} \\ 0 & \cdots & & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix} \qquad (22)$$

Taki układ ma jednoznaczne rozwiązanie – istnieje dokładnie jedna interpolacyjna funkcja sklejana stopnia trzeciego spełniająca przyjęte warunki dodatkowe.

Po rozwiązaniu układu równań (po znalezieniu współczynników M_i) funkcję sklejaną wyznacza się na podstawie wzoru (13).

2. Zadanie do wykonania

2.1 Opis problemu

Wstępne zadanie: napisać program do interpolacji funkcjami sklejanymi będącymi wielomianami 3 stopnia poprzez wyznaczenie wartości drugich pochodnych w węzłach.

Program ma korzystać w poniższych samodzielnie napisanych procedur:

- procedura $wyzM$ do wyznaczenia wartości drugich pochodnych w węzłach:

$$void\ wyzM(float\ ^*xw, float\ ^*yw, float\ ^*w,\ \ int\ n,\ \ float\ alfa,\ \ float\ beta), \tag{23}$$

gdzie: xw — wektor z położeniami węzłów,
yw — wektor z wartościami funkcji,
w — wektor do którego procedura zapisze wartości drugich pochodnych,
n — liczba węzłów,
$alfa, beta$ — wartości drugich pochodnych w skrajnych węzłach.

- procedura wyzSx do wyznaczania wartości funkcji w położeniu międzywęzłowym zgodnie ze szkicem:

$$float\ wyzSx(float\ *xw, float\ *yw, float\ *m, int\ n, float\ x) \tag{24}$$

$\{$

$\quad znajdz\ pierwszy\ podprzedział\ (i-1): \quad xw[i-1] \leq x \leq xw[i]$

$\quad sx =$ …………………………………..

$\quad return\ sx;$

$\}$

gdzie: xw — wektor z położeniami węzłów,
yw — wektor z wartościami funkcji,
m — wektor wartości drugich pochodnych,
n — liczba węzłów,
x — aktualna wartość argumentu x.

Następnie korzystając z napisanego programu przeprowadzić interpolację dwóch funkcji:

- $f_1(x) = \frac{1}{1+x^2}$, (25)
- $f_2(x) = \cos(2x)$. (26)

Przyjąć warunki z drugą pochodną równą 0 na obu krańcach przedziału interpolacji ($\alpha = \beta = 0$).

Dla funkcji $f_1(x)$ oraz $n = 10$ węzłów w przedziale $x \in [-5, 5]$ należy wyznaczyć wartości drugich pochodnych i porównać je z ”dokładniejszymi” wartościami liczonymi przy pomocy ilorazu różnicowego zgodnie z wzorem:

$$\frac{d^2f}{dx^2} \approx \frac{f(x-\Delta x) - 2f(x) + f(x+\Delta x)}{(\Delta x)^2}, \tag{27}$$

dla $\Delta x = 0.01$.

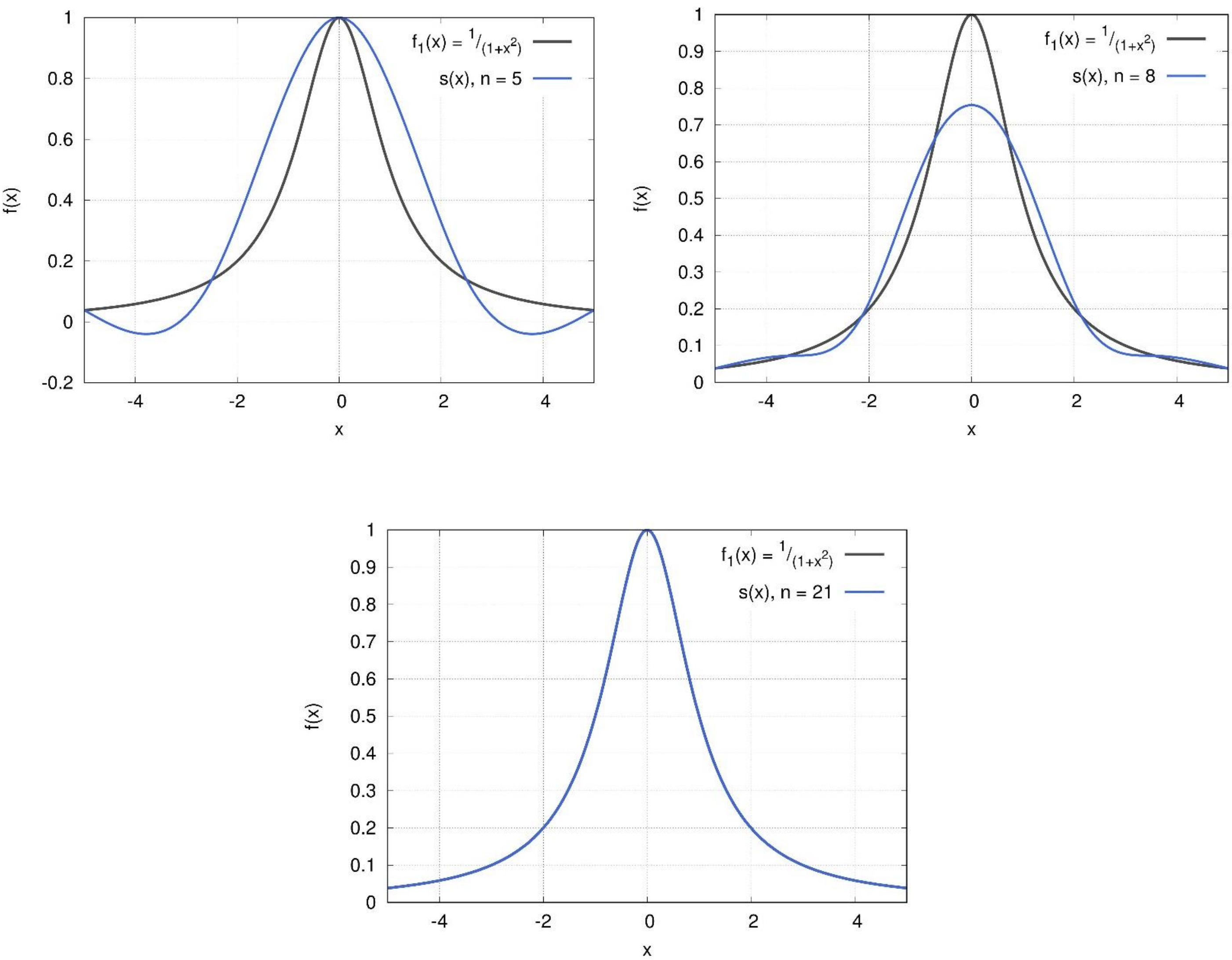
W tej części zadania wykonać również wykres wartości drugich pochodnych w zależności od położenia węzłów pokazujący porównanie obu sposobów obliczania drugich pochodnych.

Na koniec należy wykonać interpolację dla $f_1(x)$ oraz $f_1(x)$ w przedziale $x \in [-5, 5]$, dla liczby węzłów $n = 5, 8, 21$. Sporządzić wykresy funkcji interpolowanej $[f(x)]$ i interpolującej $[s(x)]$ dla każdego przypadku na jednym rysunku.

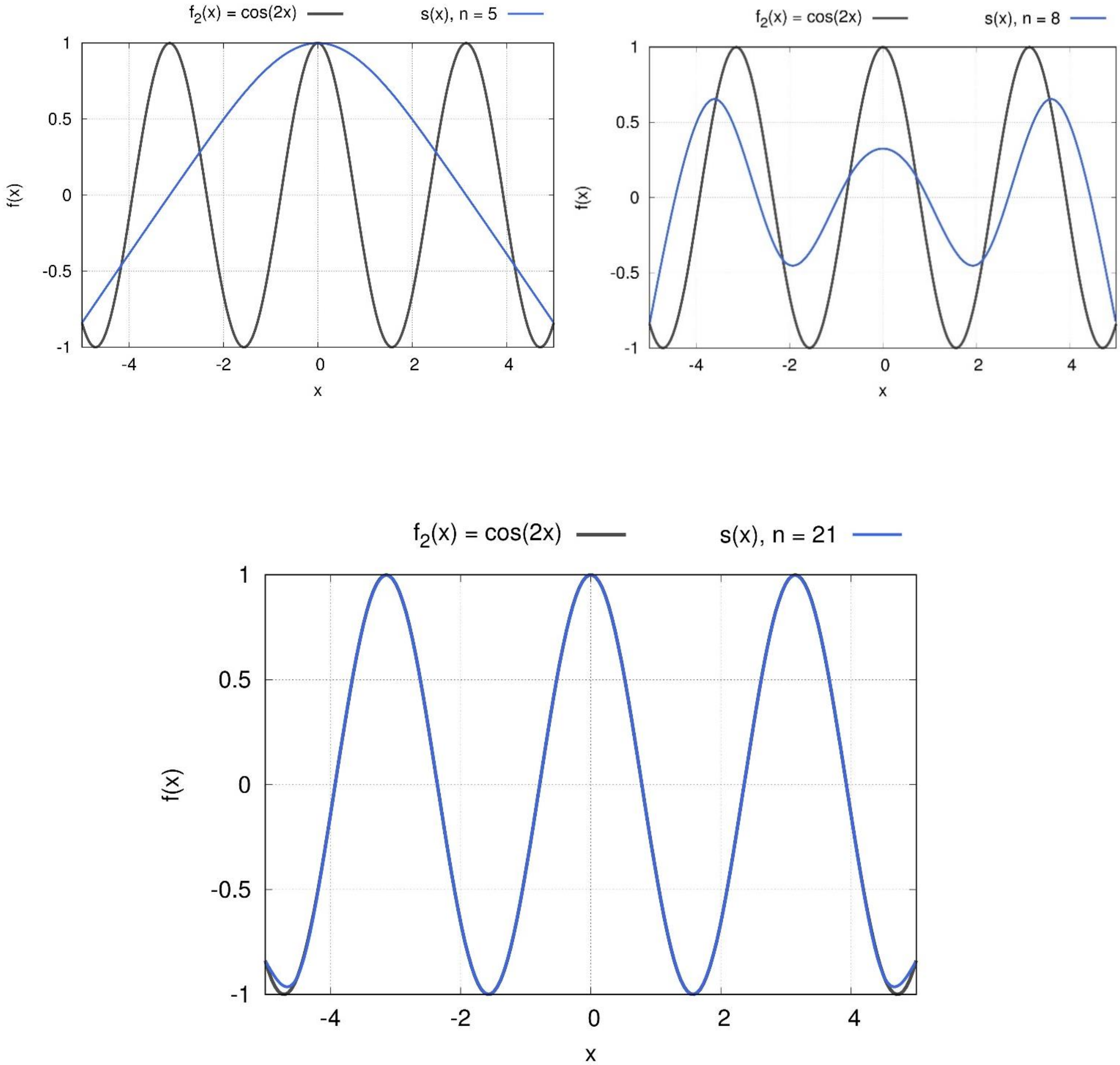
2.2 Wyniki

W programie rozwiązującym powyższy problem korzystano z biblioteki numerycznej *Numerical Recipes* (*NR*).

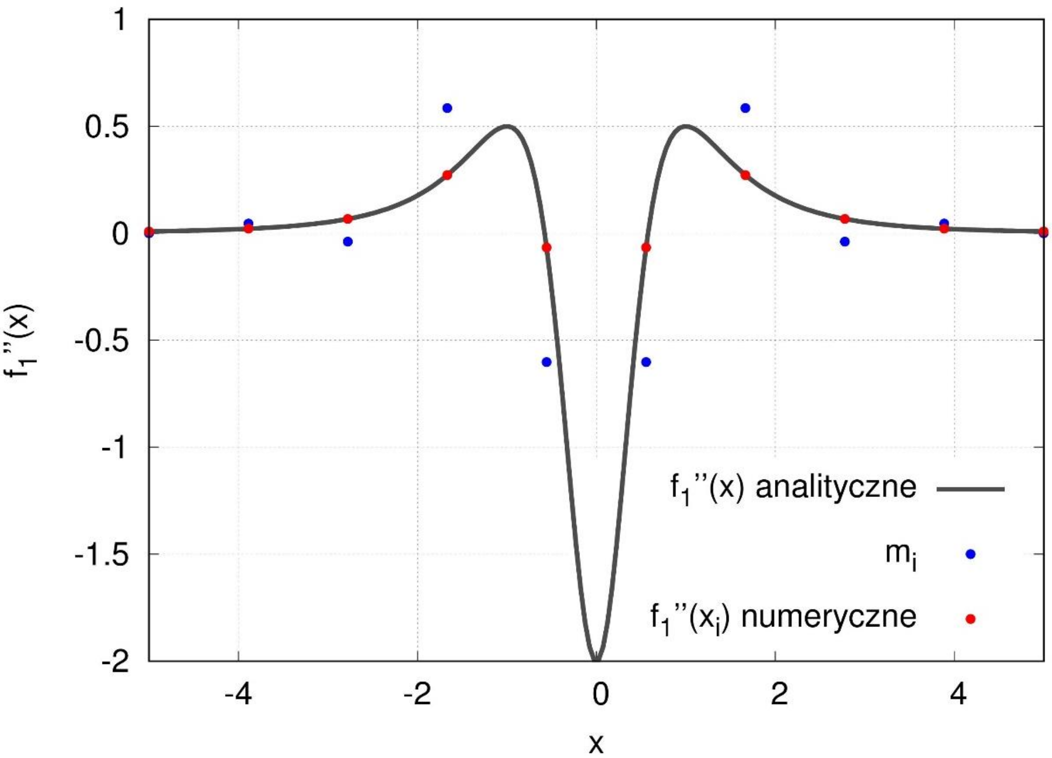
Otrzymane wyniki poszczególnych części zadania zapisane zostały w plikach **.dat.* Następnie na podstawie tych danych za pomocą skryptu Gnuplot'a wygenerowano poniższe wykresy:



<u>Rysunek 1.</u> *Wyniki interpolacji funkcji* $f_1(x) = \frac{1}{1+x^2}$ *kubicznymi funkcjami sklejanymi odpowiednio dla* $n = 5, 8, 21$ *węzłów.*



Rysunek 2. *Wyniki interpolacji funkcji $f_2(x) = cos(2x)$ kubicznymi funkcjami sklejanymi odpowiednio dla $n = 5, 8, 21$ węzłów.*



Rysunek 3. *Wartości drugich pochodnych wyznaczone algorytmem interpolacji funkcji* $f1(x) = \frac{1}{1+x^2}$ *kubicznymi funkcjami sklejanymi dla n = 10 węzłów porównane z wartościami wynikającymi z ilorazu różnicowego oraz z pochodną wyprowadzoną analitycznie.*

3. Wnioski

Na Rysunku 1. oraz 2. widać, że przy odpowiednio dużej ilości węzłów interpolacja kubicznymi funkcjami sklejanymi przynosi bardzo dobre efekty, jakoś interpolacji zwiększa się z ilością węzłów. W przypadku funkcji $f1(x) = \frac{1}{1+x^2}$ przy 21 węzłach funkcja interpolująca i interpolowana nie jest rozróżniana, gdy przy mniejszej ilości (5,8 węzłów) widoczne są duże różnice. W przypadku funkcji $f_2(x) = cos(2x)$, początkowo dla 5 węzłów kształt funkcji interpolującej nie wiele miał wspólnego z oryginałem, jednak przy zwiększeniu ilości węzłów do 21 funkcje te dosyć dobrze się pokrywają, jedynie na krańcach przedziału widać nieznaczne odchylenia.

Wykres z Rysunku 3. pokazuje, że wartości drugich pochodnych wyznaczone algorytmem interpolacji dla 10 węzłów znacznie się różni od wartości dokładnych wyznaczonych analitycznie.

Źródła:

- Dr hab inż. Tomasz Chwiej – Notatki do wykładu *„Interpolacja"*. Dostępne w Internecie: http://galaxy.agh.edu.pl/~chwiej/mn/interpolacja_1819.pdf