

Sprawozdanie

Metody numeryczne Laboratorium 1.

*Rozwiązywanie układów równań liniowych metodami bezpośrednimi
Metoda Gaussa-Jordana*

04.03.2020 r.

Aleksandra Rolka

1. Wstęp teoretyczny

Tematem 1. laboratorium były układy algebraiczne równań liniowych (UARL) oraz metody bezpośrednie ich rozwiązywania. Jedną z takich metod jest metoda eliminacji Gaussa-Jordana.

- **Metoda Gaussa-Jordana**- służy do rozwiązywania układów równań liniowych z wieloma niewiadomymi oraz do obliczania macierzy odwrotnych.

Polega na **srowadzeniu** wejściowej **macierzy rozszerzonej** układu równań (uzupełniona o kolumnę wyrazów wolnych) **do macierzy jednostkowej** (macierz diagonalna, w której wszystkie elementy leżące na głównej przekątnej są równe jeden, a pozostałe elementy wynoszą zero).

Dochodzi się do takiej postaci za pomocą operacji elementarnych na wierszach (wyłącznie na wierszach, kolumny można jedynie zamieniać miejscami).

Ostatecznie w łatwy sposób wylicza się niewiadome, wracając z zapisu macierzowego do zapisu równań pamiętając, że k -ta kolumna odpowiada za k -tą niewiadomą.

Dla danego układu równań:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

gdzie: a_{ij} to współczynniki układu, b_i to tzw. wyrazy wolne,

odpowiadają macierze:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

gdzie:

A – macierz podstawowa układu,

B – macierz rozszerzona (uzupełniona o kolumnę wyrazów wolnych)

Układ można również zapisać jako:

$$A\vec{x}=\vec{b},$$

gdzie:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{-wektor niewiadomych}$$

Po przeprowadzeniu operacji układ równań ma postać:

$$x_1=b_1$$

$$x_2=b_2$$

....

$$x_m=b_m ,$$

czyli gotowe rozwiązanie.

2.1 Problem do rozwiązania

Zadanie: rozwiązanie układu metodą Gaussa-Jordana oraz przedstawienie danych na wykresie.

Z uwagi na fakt, iż jednym ze źródeł UARL są równania różniczkowe, na przykład podany został prosty oscylator harmoniczny, dla którego z drugiej zasady dynamiki Newtona wynika równanie:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\frac{k}{m}x(t) = -\omega^2x(t) \quad (1)$$

Drugą pochodną położenia x w chwili t (występuje po lewej stronie równania), można przybliżyć ilorazem różnicowym:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} \approx \frac{x(t+\Delta t)-2x(t)+x(t-\Delta t))}{(\Delta t)^2} . \quad (2)$$

Dzięki wprowadzeniu oznaczeń $\Delta t = h$, $x_i = x(ih)$ z równania (1) powstaje iteracyjna zależność, która pozwala na wyznaczenie kolejnego x_{i+1} w stosunku do x_i oraz x_{i-1} :

$$x_{i+1} + (\omega^2 h^2 - 2)x_i + x_{i-1} = 0. \quad (3)$$

Do uzyskania jednoznacznego rozwiązania potrzebne są jeszcze wartości x_0 i x_1 . Dają je warunki początkowe:

- $x_0 = A$ - początkowe wychylenie z położenia równowagi
- $\frac{(x_1 - x_0)}{h} = V_0$ - iloraz ten informuje o początkowej wartości prędkości ciała.

Równanie (3) wraz z powyższymi warunkami początkowymi można zapisać w postaci macierzowej. Obrazując przykładowo dla pierwszych 7 kroków czasowych jako:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & (\omega^2 h^2 - 2) & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & (\omega^2 h^2 - 2) & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & (\omega^2 h^2 - 2) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & (\omega^2 h^2 - 2) & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & (\omega^2 h^2 - 2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \\ x^5 \\ x^6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ v_0 h \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Układ taki można rozwiązać metodą bezpośrednią, metodą Gaussa-Jordana. Napisany program rozwiązujący ten problem korzysta z biblioteki *Numerical Recipes* oraz przyjęte zostały do niego wartości:

- $N = 400$
- $\frac{k}{m} = \omega^2 = 1 \quad (--> \omega=1)$
- $V_0 = 0$
- $A = 1$
- $h = 0.1$

gdzie N -liczba kroków czasowych, h -krok całkowania.

2.2 Wyniki

Rezultatem działania programu są wyniki dla poszczególnych wartości czasu, które zostały przekierowane do pliku. Na tej podstawie stworzony został przy pomocy skryptu gnuplot.sh poniższy wykres.

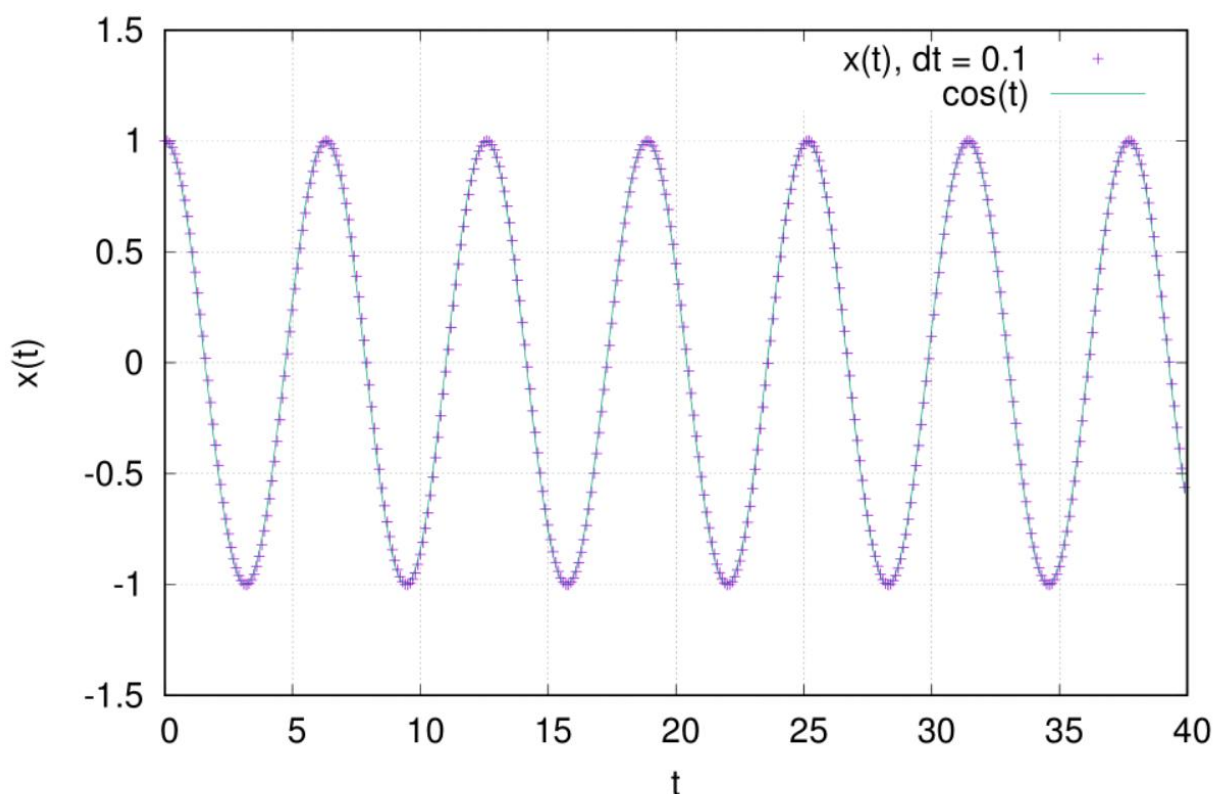
Znając rozwiązanie analityczne prostego oscylatora harmonicznego:

$$x(t)=A\cos(\omega t),$$

dzięki wstawieniu danych, czyli odpowiednio $A = 1$ oraz $\omega = 1$, ostateczna jego wersja to:

$$x(t)=\cos(t),$$

Zostało ono również naniesione na wykres w celach porównawczych z wynikami rozwiązania UARL metodami bezpośrednimi.



Wykres 1. Zależność $x(t)$ i porównanie z faktyczną wartością funkcji $\cos(t)$

Z obserwacji można stwierdzić, że wartość przybliżona i wartość dokładna są niemal identyczne.

3. Wnioski

Po analizie wyników, można stwierdzić, że rozwiązywanie układów algebraicznych równań liniowych metodami bezpośrednimi daje bardzo dokładne wyniki.

Po powiększeniu obrazu wykresu oraz po przeanalizowaniu danych w tabeli widoczne jest minimalne przesunięcie, jest ono spowodowane jak sądzę, założeniem, że $V_0 = 0$, a tym samym, że $x_1 = x_0$. Widoczne jest to dokładniej w tabeli, jako: $x(0) = 1$, $x(0.1) = 1$, podczas gdy wartość dokładna $\cos(0) = 1$ oraz $\cos(0.1) = 0.995004$.

Dokładność możemy zwiększyć zmniejszając krok całkowania. Wiąże się to jednak z większą ilością obliczeń. Tak, więc wartość tę dobiera się, w zależności jak bardzo dokładne wyniki są potrzebne oraz na jaki koszt obliczeniowy i pamięciowy można sobie pozwolić.