Sprawozdanie

Metody numeryczne

Laboratorium 2.

Odwracanie macierzy, obliczanie wyznacznika i wskaźnika uwarunkowania macierzy przy użyciu rozkładu LU

08.03.2020 r.

Aleksandra Rolka

Celem 2. Laboratorium było zapoznaniem się z zagadnieniem rozkładu LU oraz jego zastosowaniem w odwracaniu macierzy, obliczaniu jej wyznacznika oraz wskaźnika uwarunkowania macierzy.

1. Wstęp teoretyczny

- **Metoda rozkładu LU-** metoda rozwiązywania metoda rozwiązywania układu równań liniowych. Polega na rozkładzie macierzy ***A*** na iloczyn macierzy trójkątnej: dolnej **L** (ang. lower-dolny) oraz górnej **U** (ang. upper-górny).
  Macierz trójkątna **–** macierz kwadratowa, której wszystkie współczynniki pod główną przekątną lub wszystkie współczynniki nad tą przekątną są równe zero. Wyznacznik takiej macierzy równy jest iloczynowi elementów leżących na głównej przekątnej.

  Dla danego układu równań:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}, \tag{1}$$

  gdzie: a_{ij} to współczynniki układu, b_i to tzw. wyrazy wolne,

  odpowiada macierz współczynników:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}. \tag{2}$$

  Układ można również zapisać jako:

$$A\vec{x} = \vec{b}\,, \tag{3}$$

  gdzie: $\vec{x}$ -wektor niewiadomych,
  $\vec{b}$-wektor wyrazów wolnych

  W metodzie LU macierz A równa się iloczynowi:

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{U}\,, \tag{4}$$

  gdzie L oraz U mają postać:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}. \qquad (5)\ (6)$$

Układ równań przyjmuje wówczas postać:

$$\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{U} \cdot \vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{b}}, \tag{7}$$

a jego rozwiązanie sprowadza się do rozwiązania dwóch układów równań z macierzami trójkątnymi:

$$L \cdot \vec{y} = \vec{b}, \tag{8}$$
$$U \cdot \vec{x} = \vec{y}. \tag{9}$$

- **Wyznacznik macierzy** z *twierdzenia Cauchy'ego:*

$$\det(\mathrm{A}) = \det(\mathrm{L}\cdot\mathrm{U}) = \det(\mathrm{L}) * \det(\mathrm{U})\ . \tag{10}$$

- **Wskaźnik uwarunkowania macierzy** – iloczyn normy macierzy A i normy macierzy odwrotnej A^{-1}:

$$\kappa(A) = ||A|| \cdot ||A^{-1}||. \tag{11}$$

2. Zadanie do wykonania

2.1 Opis problemu

Zdefiniowano macierz kwadratową A o liczbie wierszy/kolumn równej 4, które elementy zdefiniowano jako:

$$a_{ij} = \frac{1}{i+j+\delta}, \tag{12}$$

dla $\delta=2$.

Zadania do rozwiązania:

- znaleźć rozkład LU macierzy A przy użyciu procedury z biblioteki GSL:
  *int gsl linalg LU decomp(gsl matrix *a, gsl permutation *p, int *signum)*

- wyznaczyć elementy diagonalne macierzy U oraz wyznacznik macierzy A

- znaleźć macierz odwrotną A^{-1} rozwiązując n układów równań z wektorami wyrazów wolnych:

$$b_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix} \qquad b_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix} \qquad b_3 = \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix} \qquad b_4 = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix},$$

  korzystając z procedury z biblioteki GSL:
  *int gsl linalg LU solve(gsl matrix *A, gsl permutation *p, gsl vector *b, gsl vector *x)*

- obliczyć iloczyn AA^{-1}, korzystając ze wzoru na element macierzowy iloczynu macierzy C=A·B:

$$C_{ij} = \sum_{k=0}^{n} A_{ik} B_{kj} \quad , \tag{13}$$

który jest iloczynem skalarnym i − tego wiersza A oraz j − tej kolumny B.

- obliczyć wskaźnik uwarunkowania macierzy korzystając z normy:

$$||A||_{1\infty} = max_{1 \ll \mathrm{i,j} \ll \mathrm{n}} \; |a_{ij}| \cdot \tag{14}$$

2.1 Wyniki

<u>Macierz początkowa :</u>

$$A=\begin{bmatrix} \mathbf{0.500000} & \mathbf{0.333333} & \mathbf{0.250000} & \mathbf{0.200000} \\ \mathbf{0.333333} & \mathbf{0.250000} & \mathbf{0.200000} & \mathbf{0.166667} \\ \mathbf{0.250000} & \mathbf{0.200000} & \mathbf{0.166667} & \mathbf{0.142857} \\ \mathbf{0.200000} & \mathbf{0.166667} & \mathbf{0.142857} & \mathbf{0.125000} \end{bmatrix}$$

Macierz LU powstała dzięki procedurze *<u>gsl_lin_alg_LU_decomp</u>*:

$$LU=\begin{bmatrix} 0.500000 & 0.333333 & 0.250000 & 0.200000 \\ 0.500000 & 0.033333 & 0.041667 & 0.042857 \\ 0.666667 & 0.833333 & -0.001389 & -0.002381 \\ 0.400000 & 1.000000 & -0.857143 & 0.000102 \end{bmatrix}$$

oraz **macierze L** I **macierz U** powstałe po rozłożeniu macierzy LU zgodnie ze wzorami (5) I (6):

$$L=\begin{bmatrix} 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 0.500000 & 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 0.666667 & 0.833333 & 1.000000 & 0.000000 \\ 0.400000 & 1.000000 & -0.857143 & 1.000000 \end{bmatrix}$$

$$U=\begin{bmatrix} 0.500000 & 0.333333 & 0.250000 & 0.200000 \\ 0.500000 & 0.033333 & 0.041667 & 0.042857 \\ 0.000000 & 0.000000 & -0.001389 & -0.002381 \\ 0.000000 & 0.000000 & -0.857143 & 0.000102 \end{bmatrix}$$

Elementy diagonalne macierzy U kolejno:

0.500000 0.033333 -0.001389 0.000102

Wyznacznik macierzy A*:*
det(A) *= 2.36206e-09* (~0.00000000236206*)*

Obliczony korzystając wzoru (10) oraz na podstawie faktu, że wyznacznik macierzy trójkątnej jest iloczynem elementów na przekątnej. Wiedząc, że na diagonali macierzy L znajdują się same jedynki, stwierdzamy, że det(A) wynosi tyle samo co det(U), czyli jest iloczynem elementów diagonalnych macierzy U.

Macierz odwrotna A^(-1):

$$A^{(-1)}=\begin{bmatrix} 200 & -1200 & 2100 & -1120 \\ -1200 & 8100 & -15120 & 8400 \\ 2100 & -15120 & 29400 & -16800 \\ -1120 & 8400 & -16800 & 9800 \end{bmatrix}$$

Iloczyn macierzy A*A^(-1):

$$A \cdot A^{(-1)}=\begin{bmatrix} 1.000000 & -1.36424\text{e}-12 & 9.09495\text{e}-13 & 0.000000 \\ 3.12639\text{e}-13 & 1.000000 & 9.09495\text{e}-13 & 0.000000 \\ 2.27374\text{e}-13 & -6.82121\text{e}-13 & 1.000000 & 0.000000 \\ 2.27374\text{e}-13 & -6.82121\text{e}-13 & 4.54747\text{e}-13 & 1.000000 \end{bmatrix}$$

Spodziewanym teoretycznym resultatem wymnożenia macierzy z jej odwrotnością jest macierz jednostkowa. Niestety iloczyn ten w obliczeniach dał macierz o innych,ale zbliżonych wartościach do macierzy jednostkowej.

Wskaźnik uwarunkowania macierzy:

k(A)= 14700.000000

Wskaźnik ten jest bardzo wysoki, dlatego otrzymane rozwiązanie jest niestabilne. Oznacza to, że mała zmiana wartości współczynników może znacząco wpłynąć na wynik. Dokładność jest zależna od dokładności obliczeń komputera.

3. Wnioski

Analizując powyższe wyniki stwierdzam, że metoda LU jest wygodnym narzędziem do odwracania macierzy oraz wyliczania wyznacznika macierzy A, który jest równy wyznacznikowi macierzy U z rozkładu LU, ponieważ na diagonali macierzy L znajdują się same jedynki.

Ważne również jest obliczanie wskaźnika uwarunkowania macierzy, ponieważ jego wysoka wartość mówi nam o źle uwarunkowanej macierzy oraz o tym, że wyniki będą obarczone dużym błędem. Wynika to z niedokładności obliczeń numerycznych przeprowadzanych przez dany program komputerowy, która zależy od specyfiki komputerowej arytmetyki oraz algorytmów obliczeniowych przyjętych przez programistów.