Sprawozdanie

Metody numeryczne

Laboratorium 12.

Zastosowanie ekstrapolacji Richardsona do całkowania przy użyciu wzorów Simpsona i Milne

02.06.2020 r.

Aleksandra Rolka

1. Wstęp teoretyczny

Kwadratura

Kwadraturą nazywa się funkcjonał liniowy:

$$S(f) = \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i), \tag{1}$$

gdzie:

$x_1, x_2, \dots, x_n$ −węzły kwadratury,
A_i − współczynniki kwadratury,

który oznacza skończoną sumę. Za pomocą kwadratur oblicza się numerycznie przybliżoną wartość całek oznaczonych:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i). \tag{2}$$

Kwadraturę opartą na węzłach o łącznej krotności $n+1$ nazywa się kwadraturą interpolacyjną.

Kwadratury Newtona-Cotesa

Kwadraturę interpolacyjną opartą na węzłach równoodległych $x_i = a + i \cdot h, \quad i = 0, 1, \dots, n$ o długości kroku $h = \frac{b-a}{n}$, $n > 0$ nazywa się kwadraturą Newtona-Cotesa.

Współczynniki kwadratury Newtona-Cotesa wyrażają się wzorem:

$$A_i = h \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \int_0^n \frac{t(t-1)\dots(t-n)}{(t-i)} dt. \tag{3}$$

Gdy n jest nieparzyste wówczas kwadratura jest rzędu $(n+1)$ (dokładna dla wielomianów stopnia n), dla parzystego n rząd kwadratury wynosi $(n+2)$.

W praktyce przedział całkowania dzieli się na m podprzedziałów. W każdym podprzedziale określa się n i przeprowadza całkowanie. Taka procedura prowadzi do uzyskania kwadratur złożonych

Metoda Simpsona

Metoda Simpsona oparta jest na przybliżeniu funkcji podcałkowej $f(x)$ wielomianem stopnia drugiego. Jest to tzw. metoda parabol.

Wzór Simpsona:

$$S = \int_{i=0}^{(n/2)-1} \frac{h}{3}(f_{2i} + 4f_{2i+1} + f_{2i+2}). \tag{4}$$

Metoda Milne'a

Metoda Milne'a oparta jest na przybliżeniu funkcji podcałkowej $f(x)$ wielomianem 4. stopnia.

Wzór Milne'a:

$$S = \int_{i=0}^{(n/4)-1} \frac{4h}{90}(7f_{4i} + 32f_{4i+1} + 12f_{4i+2} + 32f_{4i+3} + 7f_{4i+4}). \tag{5}$$

Ekstrapolacja Richardsona

Ekstrapolacja Richardsona jest procesem rekurencyjnego wyznaczania pewnej wielkości (pochodnej, całki), co można zdefiniować przy pomocy wzoru:

$$D_{n,k-1} = L + \sum_{j=k}^{\infty} A_{jk} (\frac{h}{2^n})^{2j}. \tag{6}$$

Algorytm jest następujący:

1) wybierane jest *h* i liczone:

$$D_{n,0} = \phi(\frac{h}{2^n}), n = 0,1,2,\ldots, M, \tag{7}$$

gdzie

M − ilość powtórzeń algorytmu

h − szerokość podprzedziału

2) następnie obliczane jest:

$$D_{n,k} = \frac{4^k D_{n,k-1} - D_{n-1,k-1}}{4^k - 1}. \tag{8}$$

Obliczając rekurencyjnie wyrazy wg podpunktu 2. otrzymuje się przybliżenia:

$$\begin{gathered} D_{n,0} = L + O(h^2) \\ D_{n,1} = L + O(h^4) \\ D_{n,2} = L + O(h^6) \\ D_{n,3} = L + O(h^8) \\ \dots \\ D_{n,k-1} = L + O(h^{2k}),\ \ h \to 0 \end{gathered} \tag{9}$$

gdzie

$L -$ kolejne przybliżenia funkcji

2. Zadanie do wykonania

2.1 Opis problemu

Zadanie: obliczyć wartość całki:

$$I = \int_0^1 f(x), \tag{10}$$

gdzie $$f(x) = ln(x^3 + 3x^2 + x + 0.1) \cdot sin(18x), \tag{11}$$

stosując ekstrapolację Richardsona w połączeniu z wzorami Simpsona (4) oraz Milne'a (5).

Dokładna wartość oczekiwana: $\underline{I = -0.186486896}$. (12)

Dla każdej z powyższych metod należało napisać funkcję, która będzie wyznaczać wartość całki na podstawie przekazywanych jej: stablicowanych wartości funkcji, wartości h i wartości n .
Zaprogramować metodę ekstrapolacji Richardsona.
Obliczenia całki z ekstrapolacją należało przeprowadzić dla obu wzorów całkowania.

Zadanie należało rozdzielić na dwie części:

1) W pętli obliczyć pierwszą kolumnę tablicy wartości całek $D_{w,0}$ w każdej iteracji posługując się krokiem:

   • dla wzoru Simpsona:

$$h_w = \frac{b-a}{2^{w+1}}, w = 0, 1, 2, \dots, 8\ , n = 2^{w+1}\ ,\ \ i = 0, 1, \dots, n \tag{13}$$

   • dla wzoru Milne'a:

$$h_w = \frac{b-a}{2^{w+2}}, w = 0, 1, 2, \dots, 8\ , n = 2^{w+2}\ ,\ \ i = 0, 1, \dots, n \tag{14}$$

2) Na podstawie znajomości pierwszej kolumny i wzoru ekstrapolacyjnego wyznaczyć pozostałe elementy tablicy

2.2 Wyniki

Napisany w języku C program rozwiązujący powyższy problem nie korzysta z żadnej dodatkowej biblioteki numerycznej.

Wyniki otrzymane korzystając z metody Simpsona:

```
-0.0971410499
0.4083851989   0.5768939485
-0.2209681412  -0.4307525879  -0.4979290236
-0.1880063997  -0.1770191525  -0.1601035901  -0.1547412817
-0.1865747211  -0.1860974949  -0.1867027177  -0.1871249261  -0.1872519207
-0.1864922827  -0.1864648033  -0.1864892905  -0.1864859028  -0.1864833968  -0.1864826455
-0.1864872311  -0.1864855472  -0.1864869302  -0.1864868927  -0.1864868966  -0.1864869000  -0.1864869011
-0.1864869169  -0.1864868122  -0.1864868965  -0.1864868960  -0.1864868960  -0.1864868960  -0.1864868960  -0.1864868960
-0.1864868973  -0.1864868908  -0.1864868960  -0.1864868960  -0.1864868960  -0.1864868960  -0.1864868960  -0.1864868960  -0.1864868960
```

Wyniki otrzymane korzystając z metody Milne'a:

```
0.4420869488
-0.2629250305  -0.4979290236
-0.1858089502  -0.1601035901  -0.1375818946
-0.1864792758  -0.1867027177  -0.1884759929  -0.1892838357
-0.1864867868  -0.1864892905  -0.1864750620  -0.1864433012  -0.1864321619
-0.1864868943  -0.1864869302  -0.1864867728  -0.1864869587  -0.1864871299  -0.1864871836
-0.1864868960  -0.1864868965  -0.1864868943  -0.1864868962  -0.1864868960  -0.1864868957  -0.1864868957
-0.1864868960  -0.1864868960  -0.1864868960  -0.1864868960  -0.1864868960  -0.1864868960  -0.1864868960  -0.1864868960
-0.1864868960  -0.1864868960  -0.1864868960  -0.1864868960  -0.1864868960  -0.1864868960  -0.1864868960  -0.1864868960  -0.1864868960
```

	Metoda Simpsona		**Metoda Milne'a**	
w	$D_{w,0}$	$D_{w,w}$	$D_{w,0}$	$D_{w,w}$
0	-0.0971410499	-0.0971410499	0.4420869488	0.4420869488
1	0.4083851989	0.5768939485	-0.2629250305	-0.4979290236
2	-0.2209681412	-0.4979290236	-0.1858089502	-0.1375818946
3	-0.1880063997	-0.1547412817	-0.1864792758	-0.1892838357
4	-0.1865747211	-0.1872519207	-0.1864867868	-0.1864321619
5	-0.1864922827	-0.1864826455	-0.1864868943	-0.1864871836
6	-0.1864872311	-0.1864869011	-0.1864868960	-0.1864868957
7	-0.1864869169	-0.1864868960	-0.1864868960	-0.1864868960
8	-0.1864868973	-0.1864868960	-0.1864868960	-0.1864868960

Tabela 1. *Wartości elementów $D_{w,0}$ oraz $D_{w,w}$ z tablicy całek, obliczone przy użyciu metody Simpsona (lewa połowa tabeli) oraz metody Milne'a (prawa część), w obu przypadkach z ekstrapolacją Richardsona.*
(kolorem zaznaczono osiągniętą wartość oczekiwaną (12))

3. Wnioski

Tabela 1. pokazuje, że bez zastosowania ekstrapolacji Richardsona w metodzie Simpsona nie udało się po wszystkich 8 iteracjach uzyskać oczekiwanego wyniku, w przeciwieństwie do metody Milne'a, gdzie zbieżność została osiągnięta w 6. iteracji. Przy dodatkowym zastosowaniu ekstrapolacji Richardsona (elementy na diagonali tablicy całek) w obu metodach uzyskano dokładny wynik po 7 iteracjach, czyli zgodnie z oczekiwaniem (teoretycznie) dla ostatnich elementów $D_{w,w}$ w obu metodach wartość jest równa oczekiwanej wartości podanej całki.

Stwierdzić można na podstawie tego przykładu, że lepszym wyborem jest całkowanie numeryczne metodą Milne'a, jednak metoda Simpsona również jest skuteczną metodą jednak z koniecznym zastosowaniem ekstrapolacji Richardsona (lub z ewentualnym zwiększeniem liczby iteracji, co nie jest optymalnym rozwiązaniem, jeśli chcemy rozwiązać problem nie zwiększając liczby obliczeń).

Źródła:

- Dr hab inż. Tomasz Chwiej – Notatki do wykładu *„Całkowanie numeryczne przy użyciu kwadratur"*. Dostępne w Internecie: http://galaxy.agh.edu.pl/~chwiej/mn/calkowanie_1819.pdf
- https://eti.pg.edu.pl/documents/176593/26763380/Wykl_AlgorOblicz_9.pdf