

# Sprawozdanie

## Metody numeryczne Laboratorium 6.

*Poszukiwanie pierwiastków wielomianów metodą iterowanego dzielenia  
(metoda Newtona)*

18.04.2020 r.

Aleksandra Rolka

Celem 6. laboratorium było wyznaczenie wartości miejsc zerowych wielomianu metodą iterowanego dzielenia, a dokładniej metodą stycznych – metodą Newtona.

## 1. Wstęp teoretyczny

### Metoda dzielenia wielomianu

Dany jest wielomian:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0 = 0. \quad (1)$$

$n$  – stopień wielomianu

Dzieląc go przez dwumian  $(x - x_j)$  otrzymuje się:

$$f(x) = (x - x_j)(b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \dots + b_0 + R_j). \quad (2)$$

Współczynniki nowego wielomianu wyznacza się rekurencyjnie:

$$b_0 = 0, \quad (3)$$

$$b_k = a_{k+1} + x_j b_{k+1}, \quad k = n-1, n-2, \dots, 0 \quad (4)$$

$$R_j = a_0 + x_j b_0. \quad (5)$$

Wraz z następnym dzieleniem wielomianu otrzymuje się:

$$f(x) = (x - x_j)^2 (c_{n-2} x^{n-2} + c_{n-3} x^{n-3} + \dots + c_0 + R'_j (x - x_j) + R_j), \quad (6)$$

gdzie:

współczynniki  $c_n$  i  $R'_j$  wyznaczone są podobnie jak  $b_n$  i  $R_j$  (wzory 3-5).

### Metoda Newtona

Zwana również **metodą Newtona-Raphsona** lub **metodą stycznych** jest iteracyjnym algorytmem wyznaczania przybliżonej wartości pierwiastka funkcji.

W metodzie przyjmuje się następujące założenia dla funkcji  $f$ :

- 1) W przedziale  $[a, b]$  znajduje się dokładnie jeden pierwiastek.
- 2) Funkcja ma różne znaki na krańcach przedziału, tj.  $f(a) \cdot f(b) < 0$
- 3) Pierwsza i druga pochodna funkcji mają stały znak w tym przedziale.

W pierwszym kroku metody wybierany jest punkt startowy  $x_1$  (zazwyczaj jest to wartość  $a, b, 0$  lub  $1$ ), z którego następnie wyprowadzana jest styczna w  $f(x_1)$ . Odcięta punktu przecięcia stycznej z osią  $OX$  jest pierwszym przybliżeniem rozwiązania (ozn.  $x_2$ ).

Jeśli to przybliżenie nie jest satysfakcjonujące, wówczas punkt  $x_2$  jest wybierany jako nowy punkt startowy i wszystkie czynności są powtarzane. Proces jest kontynuowany, aż zostanie uzyskane wystarczająco dobre przybliżenie pierwiastka.

Stosując tą metodę można iteracyjnie wyznaczyć kolejne zera funkcji wielomianowej zgodnie z formułą:

$$x_{j+1} = x_j - \frac{R_j}{R'_j}, \quad (7)$$

gdzie

$x_{j+1}$  - kolejne, lepsze przybliżenie zera  
 $R_j, R'_j$  - czynniki wyznaczone zgodnie ze wzorem (5.)

Obliczenia przybliżeń wykonuje się iteracyjnie, aż do uzyskania satysfakcjonującego wyniku. Aby określić kiedy program za zakończyć obliczenia stosuje się różne kryteria, jednym z nich jest:

- odległość między kolejnymi przybliżeniami – zadaje się pewną dokładność obliczeń  $\varepsilon$ :

$$|x_{j+1} - x_j| \leq \varepsilon \quad (8)$$

## 2. Zadanie do wykonania

### 2.1 Opis problemu

Do ułatwienia rozwiązania problemu podany został poniższy pseudokod:

*"ustalenie stopienia wielomianu: N*

*inicjalizacja wektora danych: a[i]=..., dla i=0,1,...,N*

*pętla po kolejnych zerach wielomianu*

*for(L=1; L<=N; L++) {*

*ustalenie aktualnego stopienia wielomianu: n=N-L+1*

*inicjalizacja wzoru iteracyjnego: x0*

*for(it=1; it<=IT\_MAX; it++){*

*wyznaczenie: Rj=...*

*wyznaczenie: Rj'=...*

*x1=x0-Rj/Rj'*

*warunek wcześniejszego opuszczenia pętli: |x1-x0| < 1.0E-7*

← ustalona dokładność obliczeń

```

        zachowywanie nowego przybliżenia:
        x0=x1
        zapisanie do pliku: L, it, x0, Rj, Rj'
    }
    usuwanie znalezionej zera z wielomianu (redukcja stopnia wielomianu o 1):

    for ( i=0; i<=(n-1); i++)
        a[i]=b[i]
    } "

```

### Zadania:

- napisać funkcję  $licz\_r$  obliczającą wartość  $R_i$  dla danej wartości  $x_i$  ( $x0$  w pseudokodzie)

$$licz\_r(a, b, n, x0), \quad (9)$$

gdzie

$a$  – wektor zawierający współczynniki aktualnego wielomianu  $\vec{a}$

$b$  – wektor do którego funkcja wpisze współczynniki wielomianu o stopień niższego  $\vec{b}$

$n$  – stopień wielomianu

$x0$  – wartość  $x_j$  dla którego funkcja ma zwracać wartość  $R_j$

Stosując tą funkcję po raz drugi w danej iteracji dla wektora współczynników  $\vec{b}$  dostarczany jest wektor  $\vec{c}$  oraz wartość czynnika  $R'_j$ , przy czym stopień wielomianu jest o 1 mniejszy niż w pierwszym wywołaniu:

$$licz\_r(b, c, n-1, x0), \quad (10)$$

- zaprogramować metodę iterowanego dzielenia do poszukiwania zer wielomianu z wykorzystaniem powyższej funkcji
- znaleźć wszystkie zera wielomianu:

$$\underline{f(x) = x^5 + 14x^4 + 33x^3 - 92x^2 - 196x + 240}$$

Przyjęto:

$x_0 = 0$  – wartość startowa  $x_0$  dla każdego poszukiwanego zera

$IT_{MAX} = 30$

$\varepsilon = 10^{-7}$  – zadana dokładność obliczeń.

wzór (8), warunek, dla którego przerywane są obliczenia

## 2.2 Wyniki

Program rozwiązujący powyższy problem nie korzysta z żadnych dodatkowych bibliotek numerycznych. Otrzymane wyniki zapisane zostały w pliku *results.dat* (wyniki uzyskane dla typu *double*).

Z każdej iteracji zapisano:

>> numer zera ( $L$ ), numer iteracji ( $it$ ), wartość przybliżenia  $x_j$  oraz wartość reszty z dzielenia  $R_j$  i  $R'_j$ .

Wyniki przedstawione w formie tabeli:

| $L$                              | $it$ | $x_{it}$ | $R_{it}$     | $R'_{it}$ |
|----------------------------------|------|----------|--------------|-----------|
| 1                                | 1    | 1.22449  | 240          | -196      |
| 1                                | 2    | 0.952919 | -43.1289     | -158.813  |
| 1                                | 3    | 0.999111 | 10.5714      | -228.86   |
| 1                                | 4    | 1        | 0.195695     | -220.179  |
| 1                                | 5    | 1        | 7.96468e-05  | -220      |
| 1                                | 6    | 1        | 1.32729e-11  | -220      |
| Pierwsze miejsce zerowe: $x = 1$ |      |          |              |           |
| 2                                | 1    | -5.45455 | -240         | -44       |
| 2                                | 2    | -4.46352 | -120.975     | 122.071   |
| 2                                | 3    | -4.10825 | -24.2755     | 68.3304   |
| 2                                | 4    | -4.00957 | -4.31754     | 43.7539   |
| 2                                | 5    | -4.00009 | -0.347977    | 36.6891   |
| 2                                | 6    | -4       | -0.00323665  | 36.0065   |
| 2                                | 7    | -4       | -2.90891e-07 | 36        |
| Drugie miejsce zerowe: $x = -4$  |      |          |              |           |
| 3                                | 1    | 15       | -60          | 4         |
| 3                                | 2    | 9.20218  | 5850         | 1009      |
| 3                                | 3    | 5.53752  | 1687.53      | 460.488   |
| 3                                | 4    | 3.38316  | 469.259      | 217.818   |
| 3                                | 5    | 2.33534  | 118.159      | 112.767   |
| 3                                | 6    | 2.0277   | 22.07        | 71.739    |
| 3                                | 7    | 2.00021  | 1.67505      | 60.9441   |
| 3                                | 8    | 2        | 0.0128842    | 60.0073   |
| 3                                | 9    | 2        | 7.83733e-07  | 60        |
| Trzecie miejsce zerowe: $x = 2$  |      |          |              |           |
| 4                                | 1    | -2.30769 | 30           | 13        |
| 4                                | 2    | -2.94284 | 5.32544      | 8.38462   |
| 4                                | 3    | -2.99954 | 0.403409     | 7.11433   |
| 4                                | 4    | -3       | 0.00321531   | 7.00092   |
| 4                                | 5    | -3       | 2.10929e-07  | 7         |
| Czwarte miejsce zerowe: $x = -3$ |      |          |              |           |
| 5                                | 1    | -10      | 10           | 1         |
| 5                                | 2    | -10      | 0            | 1         |
| Piąte miejsce zerowe: $x = -10$  |      |          |              |           |

**Tabela 1: Przybliżenia miejsc zerowych** - w kolumnach kolejno:  $L$  – numer miejsca zerowego,  $it$  – numer iteracji,  $x_{it}$  – przybliżenie miejsca zerowego w danej iteracji,  $R_{it}$  – reszta z dzielenia wielomianu w danej iteracji,  $R'_{it}$  – reszta z powtórnego dzielenia wielomianu w danej iteracji.

### 3. Wnioski

Otrzymane pierwiastki wielomianu: 1, -4, 2, -3, -10, zostały wyznaczone poprawnie.

Metoda iterowanego dzielenia z metodą Newtona jest szybka i bardzo prosta w implementacji. Iteracje przerywane są, gdy osiągnięta jest założona zbieżność: kolejne znalezione punkty są już w przybliżeniu identyczne. Widoczna jest zależność, że im  $x_j$  jest bliższe miejscu zerowemu, tym reszta z dzielenia ( $R_j$ ) jest mniejsza. Z tabeli wyników widoczne jest również, że zbieżność uzyskiwana jest bardzo szybko.

Wadą metody jest jednak fakt, iż zbieżność nie musi zawsze zachodzić. W wielu przypadkach metoda bywa rozbieżna, kiedy punkt startowy jest zbyt daleko od szukanego pierwiastka równania.

#### Źródła:

[1] Dr hab inż. Tomasz Chwiej – Notatki do wykładu „Wyznaczanie wartości i wektorów własnych macierzy”

[2] [https://pl.wikipedia.org/wiki/Metoda\\_Newtona](https://pl.wikipedia.org/wiki/Metoda_Newtona)