

Sprawozdanie

Metody numeryczne Laboratorium 3.

Iteracyjne rozwiązywanie układu równań liniowych metodą Jacobiego

26.03.2020 r.

Aleksandra Rolka

Celem 3. laboratorium było znalezienie rozwiązania równania różniczkowego, które opisuje ruch ciała poddanego działaniu siły sprężystej, siły tarcia zależnej od prędkości oraz siły wymuszającej ruch. Jednak głównym celem było przedstawienie iteracyjnego rozwiązania powstałego układu równań liniowych metodą Jacobiego.

1. Wstęp teoretyczny

• **Metoda Jacobiego** jest jedną z metod iteracyjnych. Metody iteracyjne polegają na zastosowaniu prostych rozwiązań iteracyjnych do każdego z równań algebraicznych z osobna, co daje w rezultacie ciąg wektorów przybliżeń rozwiązania ścisłego. Nadają się do rozwiązywania dużych układów równań, ponieważ przeważnie mają mniejszą złożoność obliczeniową niż metody dokładne.

Stosować można taki sposób rozwiązywania dla układów równań z macierzą nieosobliwą o niezerowych elementach na diagonalu.

Za pomocą tej metody oblicza się układ n równań z n niewiadomymi postaci:

$$A\vec{x} = \vec{b} , \quad (1)$$

A - macierz współczynników

\vec{x} - wektor niewiadomych

\vec{b} - wektor wyrazów wolnych

Metoda Jacobiego zawsze korzysta z wyników z poprzedniej iteracji.

Schemat rozwiązania pokazuje poniższy przepis:

$$\begin{cases} x^{(0)} = \{x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}\} \\ x_i^{k+1} = \frac{1}{a_{ii}} (b_i - \sum_{j \neq i}^n a_{ij} \cdot x_j^k) , \quad i = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (2)$$

$x^{(0)}$ – wektor początkowy (może mieć dowolne wartości)

x^{k+1} – wektor rozwiązania w każdej następnej iteracji

Rozkładając macierz A otrzymujemy:

$$A = L + D + U , \quad (3)$$

Gdzie

D - macierz diagonalna

L – macierz trójkątna dolna z zerami na diagonalu

U - macierz trójkątna górna z zerami na diagonalu

Można sformułować algorytm metody Jacobiego w zapisie macierzowym jako:

$$x^{k+1} = -D^{-1} \cdot (L + U)x^k + D^{-1} \cdot b, \quad (4)$$

W metodzie Jacobiego obliczamy kolejno wszystkie składowe nowego przybliżenia wektora rozwiązań.

2. Zadanie do wykonania

2.1 Opis problemu

Zadanie: znaleźć rozwiązanie **równania różniczkowego**, opisującego **ruch ciała poddanego działaniu siły sprężystej** ($-\omega^2 x$), **siły tarcia** ($-\beta V$) **zależnej od prędkości** oraz **siły wymuszającej** ($F_0 \sin(\Omega t)$) :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 x - \beta V + F_0 \sin(\Omega t). \quad (5)$$

Problem rozwiązywany jest w czasie, dlatego definiowano chwile czasowe:

$$t = t_i = h * i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, h - \text{krok czasowy.}$$

Tak więc rozwiązanie określone jest jako: $x(t) = x_{t_i} = x_i$.

Druga pochodna zamieniona została na symetryczny trójpunktowy iloraz różnicowy:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{x_{i-1} - 2x_i + x_{i+1}}{h^2}. \quad (6)$$

Fakt, że prędkość jest pierwszą pochodną położenia po czasie pozwala na zastąpienie jej ilorazem różnicowym (dwupunktowym niesymetrycznym):

$$V_i = \frac{x_{i+1} - x_i}{h}, \quad (7)$$

co po wstawieniu i przekształceniu równania różniczkowego daje:

$$x_{i-1} - 2x_i + x_{i+1} + \omega^2 h^2 x_i + \beta h(x_{i+1} - x_i) = F_0 \sin(\Omega h i) h^2. \quad (8)$$

Symboliczny zapis jako:

$$a_1 x_{i-1} + a_2 x_i + a_3 x_{i+1} = b_i, \quad (9)$$

gdzie

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \omega^2 h^2 - 2 - \beta h, \quad a_3 = 1 + \beta h, \quad b_i = F_0 \sin(\Omega h i) h^2$$

Daje jasną postać układu równań $Ax=b$.

Przyjęto warunki początkowe na:

- wychylenie $x(t = 0) = x_0 = 1$
- prędkość początkowa $V(t = 0) = V_0 = (V_{i+1} - x_i) / h = 0$

Dzięki czemu układ przyjął postać:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A1 \\ 0 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ \vdots \\ b_0 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Macierz układu jest rzadką macierzą trójkątniową, do przechowania wystarczą trzy n-elementowe wektory:

$$d0 = [1, 1, a_3, a_3, \dots, a_3] \quad (11)$$

$$d1 = [0, -1, a_2, a_2, \dots, a_2] \quad (12)$$

$$d2 = [0, 0, a_1, a_1, \dots, a_1] \quad (13)$$

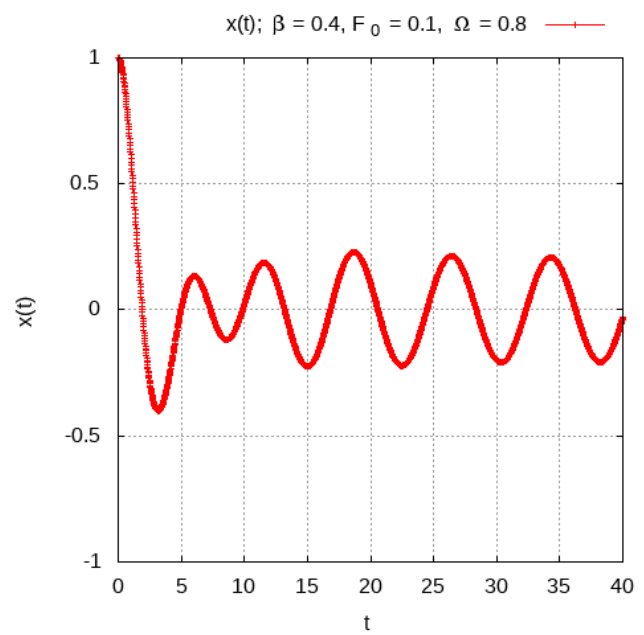
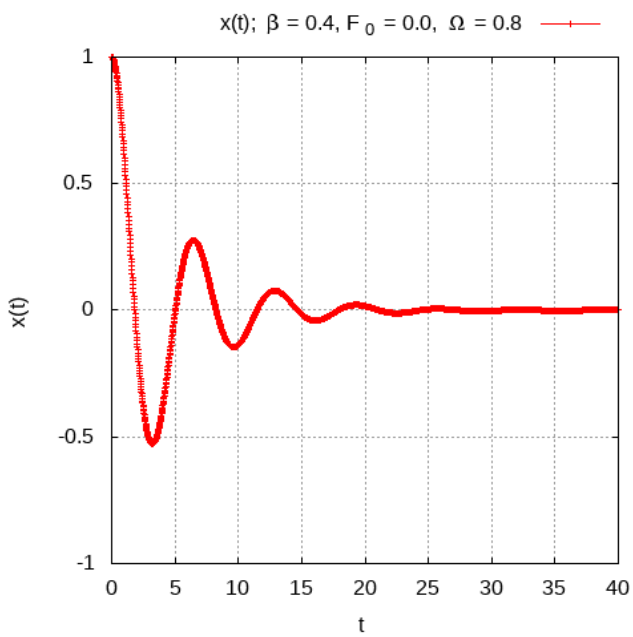
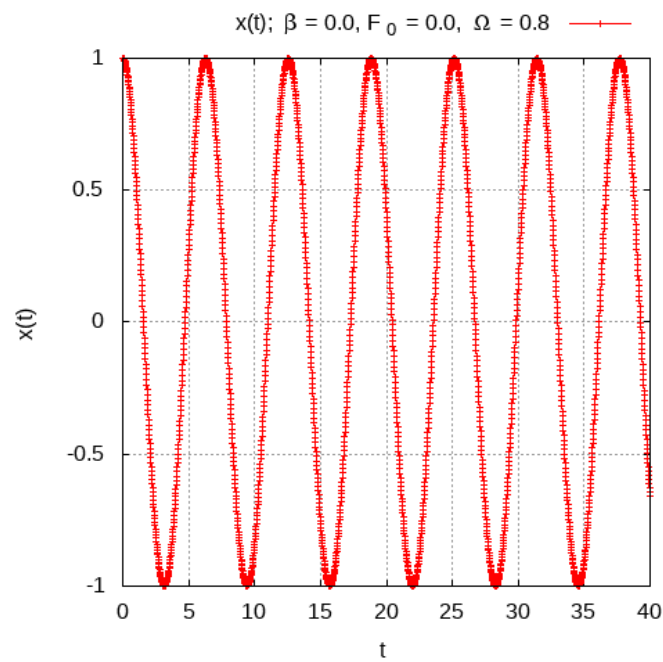
Do wyznaczenia i-tego elementu nowego przybliżenia ($x[i]$) na podstawie przybliżenia z poprzedniej iteracji należy wykonać obliczenia korzystając ze wzoru (2).

Przyjęte parametry:

- $V_0 = 0$,
- $x_0 = 1$,
- $\omega = 1$,
- $n = 2000$
- $h = 0.02$
- *dokładność dla zbieżności wyniku: 10^{-6}*
 - Trzy przypadki :
 - 1) $\beta = 0.0, F_0 = 0.0 \Omega = 0.8$
 - 2) $\beta = 0.4, F_0 = 0.0 \Omega = 0.8$
 - 3) $\beta = 0.4, F_0 = 0.1 \Omega = 0.8$

2.2 Wyniki

Otrzymane wyniki programu zostały zapisane w plikach *.dat, a następnie za pomocą skryptu gnuplot'a wygenerowano dla nich wykresy (dla każdego przypadku osobny) :



W każdym przypadku ilość iteracji wyniosła 2000.

3. Wnioski

Liczba iteracji dla każdego przypadku była taka sama i wyniosła 2000. Wartość ta jest zależna od przyjętych wartości początkowych w wektorze startowym. Wektor początkowy może przyjmować dowolne wartości, jednak zainicjowanie go samymi jedynkami, zmniejsza tę liczbę o 2, ponieważ dwa pierwsze elementy rozwiązania faktycznie są równe 1, dlatego program nie musiał 'tracić czasu' na znalezienie tych dwóch pierwszych elementów.

Dodatkowo sprawdzone zostały dla porównania wyniki przy wykorzystaniu metody Gaussa-Seidla. Metodą tą otrzymano zbieżne wyniki już w 2 iteracjach. Taka różnica ilości iteracji spowodowana jest tym, że metoda Gaussa-Seidla nie opiera obliczeń na wektorach wyników poprzednich iteracji, a korzysta z aktualnych składowych przybliżeń rozwiązania. Sposób ten zmniejsza liczbę obliczeń i oszczędza pamięć w porównaniu do metody Jacobiego.

Metodami iteracyjnymi takimi jak przeprowadzona metoda Jacobiego i metoda Gaussa-Seidla pozwalają na większą wydajność przy macierzach rzadkich, w stosunku do metod bezpośrednich. Jest to bardzo ważne, ze względu na fakt, że takie macierze często pojawiają się w obliczeniach naukowych i inżynierskich.