Sprawozdanie

Metody numeryczne

Laboratorium 7.

Interpolacja Newtona z optymalizacją położeń węzłów

30.04.2020 r.

Aleksandra Rolka

Celem 7. laboratorium było przeprowadzenie interpolacji dla konkretnej funkcji metodą Newtona dla węzłów równoodległych oraz dla tych, które są zerami wielomianu Czebyszewa.

1. Wstęp teoretyczny

Węzeł

Węzeł funkcji jest argumentem funkcji, dla którego znana jest jej wartość. Zbiór węzłów jest w praktyce skończonym zbiorem argumentów, dla których eksperymentalnie wyznaczono wartości nieznanej funkcji.

Interpolacja

Interpolacja polega na wyznaczeniu przybliżonych wartości funkcji w punktach nie będących węzłami oraz na oszacowaniu błędu przybliżonych wartości.
Problem interpolacji sprowadzić można do znalezienia funkcji interpolującej $F(x)$, która w węzłach przyjmuje wartości takie jak funkcja $y = F(x)$, czyli funkcja interpolowana, której postać funkcyjna może nie być nawet znana.

Ilorazy różnicowy

Funkcja $f(x)$przyjmuje w punktach x_i, $i = 0, 1, \dots, n$, wartości:

$$f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n).$$

Zakładając, że różnice, odległości między węzłowe: $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, mogą nie być stałe, można zdefiniować ilorazy różnicowe w następujący sposób, jako iloraz :

- pierwszego rzędu :

$$f(x_{n-1}; x_n) = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}, \tag{1}$$

- drugiego rzędu :

$$f(x_{n-2}; x_{n-1}; x_n) = \frac{f(x_{n-1}; x_n) - f(x_{n-2}; x_{n-1})}{x_n - x_{n-2}}, \tag{2}$$

- n-tego rzędu :

$$f(x_i; x_{i+1}; \dots; x_{i+n}) = \frac{f(x_{i+1}; x_{i+2}; \dots; x_{i+n}) - f(x_i; x_{i+1}; \dots; x_{i+n-1})}{x_{i+n} - x_i}. \tag{3}$$

Interpolacja wielomianowa metodą Newtona

Dane są wartości funkcji f(x):

$$y_i = f(x_i), \qquad i = 0,1,\dots,n$$

Dla siatki węzłów o stałym kroku h:

$$x_i = x_0 + ih,$$
$$i = 0,1,2,\dots n,$$
$$h = const.$$

Wzór interpolacyjny Newtona dla równoodległych węzłów wyraża się wzorem:

$$W_n(x) = y_o + \frac{\Delta y_o}{h}(x - x_o) + \frac{\Delta^2 y_o}{2!h^2}(x - x_o)(x - x_1) + \dots + \frac{\Delta^n y_o}{n!h^n}(x - x_o)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1}), \quad (4)$$

Wygodniej jest jednak używać wzoru w przekształconej wersji, podstawiając:

$$q = \frac{x - x_0}{h}$$

$$\frac{x - x_1}{h} = \frac{x - (x_0 + h)}{h} = q - 1$$

$$\frac{x - x_2}{h} = \frac{x - (x_0 + 2h)}{h} = q - 2$$

…

$$\frac{x - x_{n-1}}{h} = \frac{x - [x_0 + (n-1)h]}{h} = q - (n-1)$$

Otrzymując w ten sposób następującą postać:

$$W_n(x) = W_n(x_o + qh) = y_o + \frac{q}{1!}\Delta y_o + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_o + \dots + \frac{q(q-1)\dots(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_o, \quad (5)$$

Efekt Rungego

Zwiększanie liczby węzłów interpolacji (przy stałych odległościach) nie zawsze prowadzi do mniejszego oszacowania błędu. Wpływ na to mają oscylacje wielomianów wyższych rzędów. Początkowo ze wzrostem liczby węzłów n przybliżenie poprawia się, jednak po dalszym wzroście n, zaczyna się pogarszać, co jest szczególnie widoczne na końcach przedziałów.
Takie zachowanie się wielomianu interpolującego jest zjawiskiem typowym dla interpolacji za pomocą wielomianów wysokich stopni przy stałych odległościach węzłów.
Występuje ono również, jeśli interpolowana funkcja jest nieciągła albo odbiega znacząco od funkcji gładkiej. Ponieważ zgodnie z twierdzeniem Weierstrassa istnieje ciąg interpolujących wielomianów coraz wyższych stopni, które przybliżają jednostajnie funkcje ciągłą, można uważać to za paradoks, iż efekt Rungego ma dokładnie odwrotny wynik. Jest to spowodowane nałożeniem warunku na równoodległość węzłów.
Aby uniknąć tego efektu, stosuje się interpolację z węzłami coraz gęściej upakowanymi na krańcach przedziału interpolacji. Np. węzłami interpolacji n-punktowej wielomianowej powinny być miejsca zerowe wielomianu Czebyszewa n-tego stopnia.

Zera wielomianów Czebyszewa

Optymalne położenia węzłów stanowią zera wielomianów Czebyszewa, które wyraża się wzorem:

$$x_m = \cos\left(\frac{2m_1}{2n+2}\pi\right), \quad m = 0,1,2,\dots,n \tag{6}$$

2. Zadanie do wykonania

2.1 Opis problemu

Należało przeprowadzić interpolację wielomianową Newtona dla funkcji:

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \tag{7}$$

Wzór interpolacyjny zapisano w postaci:

$$W_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f^{(j)}(x_0) \cdot \prod_{i=0}^{j-1}(x - x_i), \tag{8}$$

gdzie:

x_i – położenia węzłów
$f^{(j)}(x_0)$ – iloraz rzędu j liczony dla węzła x_0

Położenia węzłów zapisano w tablicy według przepisu:

$$f_{i,j} = \frac{f_{i,j-1} - f_{i-1,j-1}}{x_i - x_{i-j}}. \tag{9}$$

Dla tak wyznaczonych ilorazów różnicowych można zastosować wzór interpolacyjny (5) do wyznaczenia przybliżonych wartości funkcji w przedziale $[x_{min}, x_{max}]$.

Założenia wykonanego ćwiczenia:

- indeksowanie węzłów $i = 0, 1, 2, \dots, n$,
- $x_{min} = -5$, $x_{max} = 5$,
- liczba węzłów określona jako $n + 1$, położenia węzłów równoodległe,

Interpolacje przeprowadzono dla węzłów rozłożonych równomiernie oraz dla tych, które są zerami wielomianu Czebyszewa, zgodnie ze wzorem:

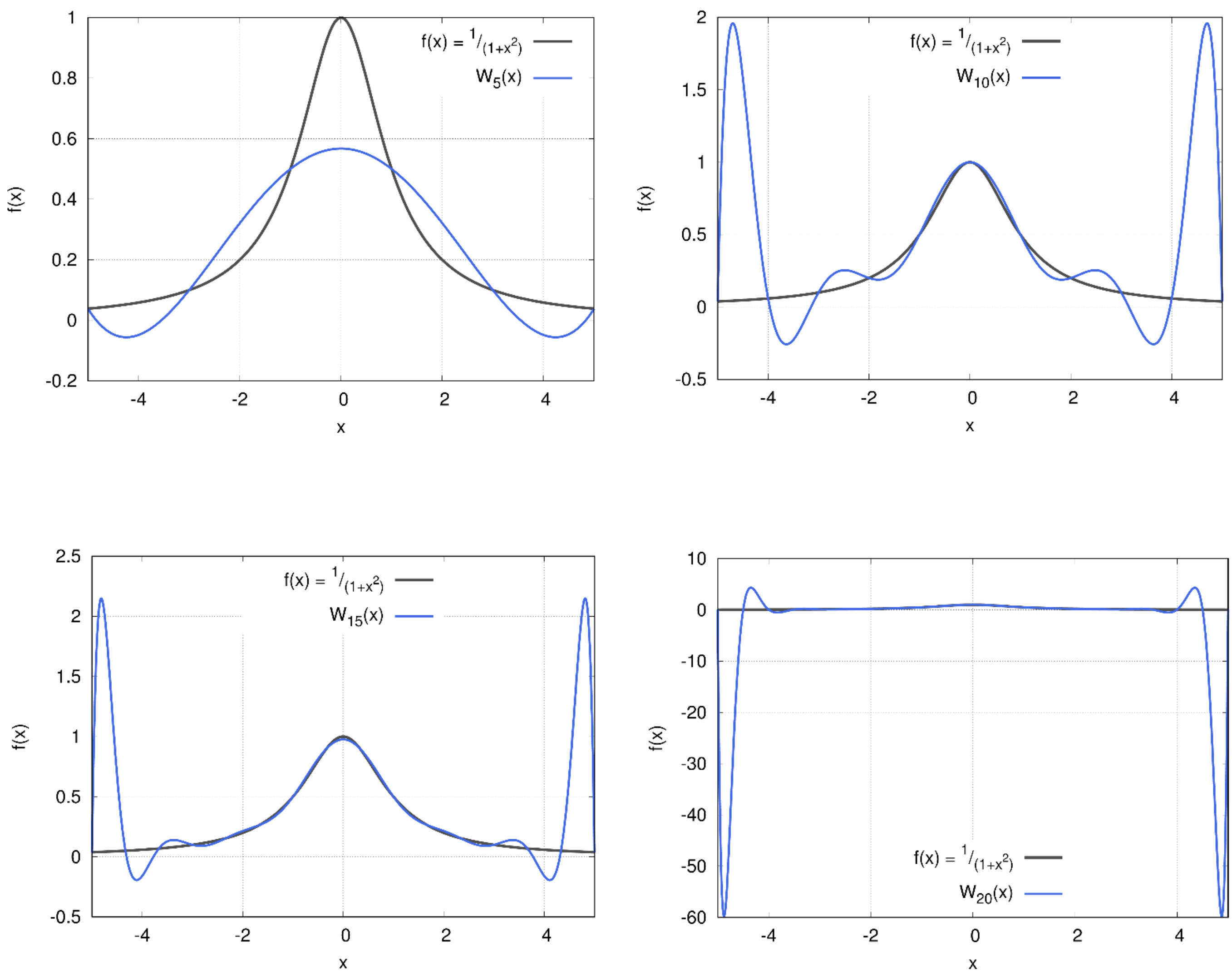
$$x_i = \frac{1}{2}\left[(x_{min} - x_{max})\cos\left(\pi\frac{2i+1}{2n+1}\right) + (x_{min} + x_{max})\right], \quad i = 0, 1, \dots, n \tag{10}$$

W zadaniu wykonano interpolacje kolejno dla n =5, 10, 15, 20.

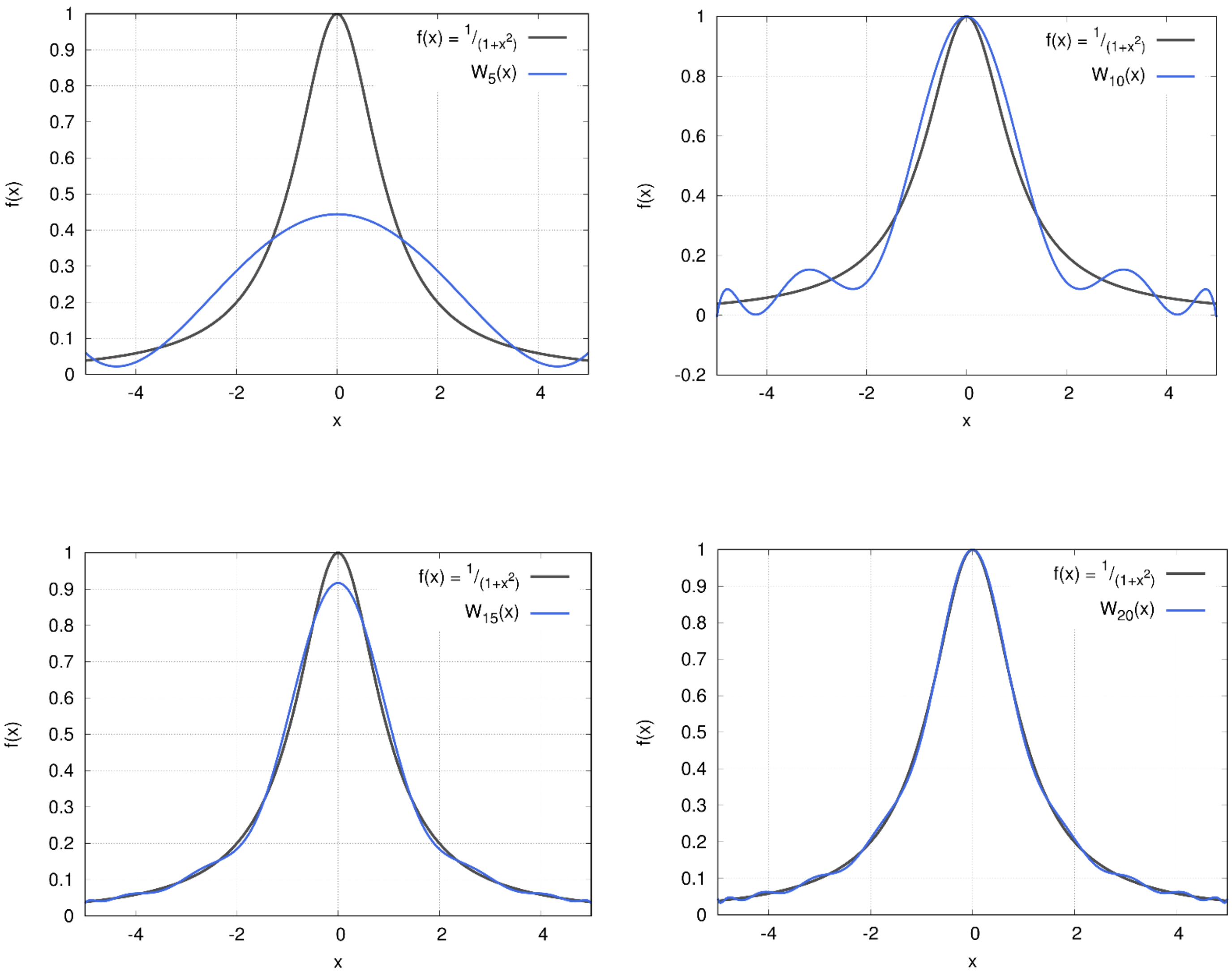
2.2 Wyniki

Program rozwiązujący powyższy problem nie korzysta z żadnych dodatkowych bibliotek numerycznych.

Otrzymane wyniki zapisane zostały w plikach *zad_1.dat* oraz *zad_2* odpowiednio dla węzłów rozłożonych równomiernie oraz dla tych będącymi zerami wielomianu Czebyszewa. Następnie na podstawie danych za pomocą skryptu Gnuplot'a wygenerowano poniższe wykresy:



Rysunek 1. *Wyniki interpolacji wielomianem Newtona $W_n(x)$ z równoodległymi węzłami; liczba węzłów: n + 1.*



Rysunek 2. *Wyniki interpolacji wielomianem Newtona $W_n(x)$ z węzłami, których współrzędne są wyznaczone przez miejsca zerowe wielomianów Czebyszewa; liczba węzłów: n + 1.*

3. Wnioski

Porównując powyższe wykresy można zauważyć, że interpolacja metodą Newtona z węzłami równoodległymi przy zwiększaniu liczby węzłów daje coraz lepsze dopasowanie w środkowej części wykresu, jednak na krańcach coraz bardziej się pogarsza, powodując coraz większe oscylacje. Obserwacja wskazuje na tzw. efekt Rungego. Gdy zaimplementowano tą samą metodę ale z węzłami, będącymi miejscami zerowymi wielomianów Czebyszewa, dokładność wyników się zwiększa wraz z ilością węzłów. Na ostatnim wykresie, gdzie liczba węzłów n=20, widoczne jest, że funkcja interpolująca jest bardzo zbliżona do analitycznej. Można stwierdzić, że interpolacja metodą Newtona jest skuteczna, ale jej dokładność odwzorowania zależy od położenia węzłów, dlatego równie ważne jest, aby wybrać jak najbardziej optymalne. Ćwiczenie pokazało, że o wiele lepszym wyborem są zera wielomianów Czebyszewa.

Źródła:

- Dr hab inż. Tomasz Chwiej – Notatki do wykładu *„Interpolacja”*. Dostępne w Internecie: http://galaxy.agh.edu.pl/~chwiej/mn/interpolacja_1819.pdf
- Efekt Rungego – Wikipedia.org Dostępne w Internecie: wikipedia.org/wiki/Efekt_Rungego