Sprawozdanie

Metody numeryczne

Laboratorium 5.

Wyznaczanie wartości i wektorów własnych macierzy symetrycznej metodą potęgową z redukcją Hotellinga

09.04.2020 r.

Aleksandra Rolka

Celem 5. laboratorium było wyznaczanie wartości i wektorów własnych macierzy symetrycznej iteracyjną metodą - metodą potęgową z redukcją Hotellinga.

1. Wstęp teoretyczny

Metoda potęgowa

Metoda potęgowa jest jedną z metod iteracyjnych wyznaczania wartości i wektorów własnych macierzy. Metoda ta działa dla macierzy o elementach i wartościach własnych rzeczywistych.

Zakładając, że istnieje *n* liniowo niezależnych wektorów własnych macierzy *A*, które stanowią bazę przestrzeni liniowej:

$$x_1 x_2 x_3, \dots, x_n. \tag{1}$$

Wówczas dla dowolnego wektora v_o:

$$v_o = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i. \tag{2}$$

Jeśli λ_i stanowią wartości własne macierzy:

$$A v_o = \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda_i x_i, \tag{3}$$

$$v_m = A^m v_o = \sum_{i=1}^{n} a_i {\lambda_i}^m x_i. \tag{4}$$

Zakładane jest, że wartości własne tworzą ciąg:

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n|. \tag{5}$$

Jeśli λ_1 jest dominującą wartością własną oraz wektor v_o ma składową w kierunku x_1 to wówczas zachodzi:

$$\lim_{m\to\infty} \frac{A^m v_o}{{\lambda_1}^m} = a_1 x_1 \tag{6}$$

Z czego nasuwa się wniosek, że wartość własną można obliczyć następująco:

$$\lambda_1 = \lim_{m\to\infty} \frac{y^T v_{m+1}}{y^T v_m} . \tag{7}$$

Dla dowolnego wektora *y* nieortogonalnego do x_1 . Zazwyczaj *y* ma 1 na pozycji elementu o największym module w v_{m+1} , a na pozostałych 0.

Na podstawie wzoru:

$$v_m = {\lambda_1}^m \left[a_1 x_1 + \sum_{i=2}^{n} (\frac{\lambda_i}{\lambda_1})^m a_i x_i \ \right]. \tag{8}$$

Widoczne jest, że zbieżność zależy od $(\lambda_i/\lambda_1)^m$, ale również od współczynników a_i czyli od wyboru v_0 . Jeśli wartość własna o największym module jest zespolona to ciąg nie jest zbieżny.

Wyznaczenie wektora własnego x_1 :

ponieważ

$$v_m \approx {\lambda_1}^m a_1 x_1, \tag{9}$$

więc unormowany wektor własny ma postać:

$$x_1 = \frac{v_m}{|v_m|}\,. \tag{10}$$

Jeśli znana jest wartość własną o największym module to można wykorzystać ten fakt przy wyznaczaniu kolejnych największych co do modułu wartości własnych.

Do wyznaczenia pozostałych wartości można skorzystać z metody redukcji Hotellinga.

Redukcja Hotellinga

Za wektor *v* przyjmuje się lewy wektor własny przynależny do wartości własnej λ_1. Ale na ogół nieznane są lewe wektory.
Tak, więc metoda jest skuteczna tylko w przypadku macierzy symetrycznych, wtedy lewe wektory są identyczne z prawymi

$$v = x_1, \tag{11}$$

$$W_1 = A - \lambda_1 x_1 {x_1}^T, \tag{12}$$

Lub rekurencyjnie

$$W_0 = A, \tag{13}$$

$$W_i = W_{i-1} - \lambda_{i-1} x_{i-1} {x_{i-1}}^T, \tag{14}$$

gdzie $i = 1, 2, \dots, n-1$

(w programie wykorzystana wersja druga, rekurencyjny wzór (14))

2. Zadanie do wykonania

2.1 Opis problemu

Zadanie: znaleźć wartości własne symetrycznej macierzy *A* o wymiarze *n = 7*, której elementy zdefiniowano jako:

$$A_{ij} = \sqrt{i+j} \quad , \tag{15}$$

gdzie: *i, j* = 1, 2, . . . , *n*.

Zadanie należało rozwiązać dwoma sposobami: **metodą bezpośrednią** oraz **metodą iteracyjną**, a dokładniej **metodą potęgową**.

Program rozwiązujący problem wykorzystuje bibliotekę numeryczną *Numerical Recipes (NR).*

I. Metoda bezpośrednia

1) **inicjalizacja macierzy** *A* według przepisu (wzór (1))

2) **redukcja macierzy** *A* **do postaci trójdiagonalnej** ($A->T$) przy użyciu procedury *tred2(A, n, d,e)*,

   gdzie:

   A - macierz diagonalizowana,
   d, *e* - wektory *n*-elementowe w których zapisane są składowe diagonali i poddiagonali macierzy wynikowej (trójdiagonalnej)

   Przekształcona macierz ma postać iloczynu: $T = P^{-1}AP$ (P- macierz przekształcenia)

3) **znalezienie wartości macierzy trójdiagonalnej** *T* za pomocą procedury *tqli(d, e, n, Z)*,

   gdzie:

   d, e - wektory otrzymane z procedury *tred2(),*
   Z - macierz n × n, w której (w kolumnach) mogą być zapisane wektory własne macierzy *T* (jeśli na wejściu *Z* jest macierzą jednostkową)

II. Metoda iteracyjna

(wykorzystana **metoda potęgowa**)

Algorytm:

1) **inicjalizacja macierzy** W_1 według przepisu (wzór (1))

2) **ustalenie numer poszukiwanej wartości własnej** $k = 1, 2, . . . , n$

3) przed rozpoczęciem procesu iteracyjnego, dla danego *k*, **zdeklarowanie wektora startowego**, np.: $x_0 = [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]$

4) dla ustalonego *k*, w każdej iteracji **obliczenie kolejno**:

- $$x_{i+1} = W_k x_i, \tag{16}$$
- $$\lambda_i = \frac{x^T{}_{i+1} x_i}{x^T{}_i x_i}, \tag{17}$$
- $$x_{i+1} = \frac{x_{i+1}}{\|x_{i+1}\|_2}, \tag{18}$$
- $$x_i = x_{i+1}, \tag{19}$$

W programie wykonano obliczenia dla 8 iteracji.

5) **przeprowadzenie redukcji macierzy** (po zakończeniu procesu iteracyjnego):

- $W_{k+1} = W_k - \lambda_k x_k x^T{}_k$, (20)

2.2 Wyniki

Otrzymane wyniki programu zostały w zapisane pliku dane.dat.

Początkowa macierz A:

$$A = \begin{bmatrix} 1.414214 & 1.732051 & 2.000000 & 2.236068 & 2.449490 & 2.645751 & 2.828427 \\ 1.732051 & 2.000000 & 2.236068 & 2.449490 & 2.645751 & 2.828427 & 3.000000 \\ 2.000000 & 2.236068 & 2.449490 & 2.645751 & 2.828427 & 3.000000 & 3.162278 \\ 2.236068 & 2.449490 & 2.645751 & 2.828427 & 3.000000 & 3.162278 & 3.316625 \\ 2.449490 & 2.645751 & 2.828427 & 3.000000 & 3.162278 & 3.316625 & 3.464102 \\ 2.645751 & 2.828427 & 3.000000 & 3.162278 & 3.316625 & 3.464102 & 3.605551 \\ 2.828427 & 3.000000 & 3.162278 & 3.316625 & 3.464102 & 3.605551 & 3.741657 \end{bmatrix}$$

Wartości własne otrzymane z:

- **metody bezpośredniej** – przy wykorzystaniu funkcji *tred2* oraz *tqli*:

  - 4.02198e-07
  4.43579e-07
  - 7.10793e-06
  - 0.00033598
  - 0.0133178
  - 0.712341
  19.7862

- **metoda iteracyjnej** – dzięki metodzie potęgowej z zastosowaniem normalizacji wektora w kolejnych iteracjach (wzór (18)):

  19.7862
  - 0.712341
  - 0.0133172
  - 0.000335581
  - 6.55765e-06
  8.71798e-07
  - 5.77264e-08

Dla porównania wyniki przedstawione w tabeli, odpowiadające sobie wartości własne z różnych metod:

• metoda **bezpośrednia**	-4.02198e-07	4.43579e-07	-7.10793e-06	-0.00033598	-0.0133178	-0.712341	19.7862
• metoda **iteracyjna (potęgowa)** **<u>z normalizacją</u>** wektora	-5.77264e-08	8.71798e-07	-6.55765e-06	-0.000335581	-0.0133172	-0.712341	19.7862

• metoda **iteracyjna (potęgowa)** **<u>bez normalizacji</u>** wektora	-nan	-nan	-nan	-nan	-nan	-nan	19.7862

3. Wnioski

Metoda iteracyjna wyznaczania wartości własnych macierzy jest efektywną metodą, ponieważ już w kilku iteracjach otrzymano zbieżność wyników. Różnice w wartościach otrzymanych z metody potęgowej i metody bezpośredniej wynikają z precyzji zapisu liczb zmiennoprzecinkowych i kolejności wykonywanych obliczeń numerycznych na takich właśnie liczbach. Wyniki pokazują również, że jeśli wektor nie jest normalizowany to tylko pierwsza wartość jest wyznaczona poprawnie.
Można stwierdzić, że wykorzystana potęgowa metoda iteracyjna jest bardzo prosta w implementacji jak i również skuteczna. Dzięki temu znajduje ona szerokie zastosowanie. Stosuje się ją np. w algorytmie *PageRank,* wspomagającym tworzenie rankingu stron internetowych.

Źródła:

[1] Dr hab inż. Tomasz Chwiej – Notatki do wykładu *„Wyznaczanie wartości i wektorów własnych macierzy”*