



# MATEMATIKA

## Valstybinio brandos egzamino užduotis

Pagrindinė sesija

2013 m. birželio 5 d.

Trukmė – 3 val. (180 min.)

## MATEMATIKOS FORMULĖS

**Greitosios daugybos formulės:**  $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$ ,  $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$ .

**Aritmetinės progresijos pirmųjų  $n$  narių suma:**  $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ .

**Geometrinė progresija:**  $b_n = b_1 q^{n-1}$ ;  $S_n = \frac{b_1 - qb_n}{1 - q} = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q}$ .

**Nykstamosios geometrinės progresijos narių suma:**  $S = \frac{b_1}{1 - q}$ .

**Sudėtinių procentų formulė:**  $S_n = S \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$ ; čia  $S$  – pradinis dydis,  $p$  – palūkanų norma,  $n$  – laikotarpių skaičius.

**Trikampis:**  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ ,  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ ,

$$S = \frac{1}{2} ab \sin C = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = rp = \frac{abc}{4R};$$

čia  $a, b, c$  – trikampio kraštinių ilgiai,  $A, B, C$  – prieš jas esančių kampų didumai,  $p$  – pusperimetris,  $r$  ir  $R$  – įbrėžtinio ir apibrėžtinio apskritimų spindulių ilgiai,  $S$  – plotas.

**Skritulio išpjova:**  $S = \frac{\pi R^2}{360^\circ} \cdot \alpha$ ,  $l = \frac{2\pi R}{360^\circ} \cdot \alpha$ ;

čia  $\alpha$  – centrinio kampo didumas laipsniais,  $S$  – išpjovos plotas,  $l$  – išpjovos lanko ilgis,  $R$  – apskritimo spindulio ilgis.

**Kūgis:**  $S_{\text{šon. pav.}} = \pi Rl$ ,  $V = \frac{1}{3} \pi R^2 H$ .

**Rutulys:**  $S = 4\pi R^2$ ,  $V = \frac{4}{3} \pi R^3$ .

**Nupjautinis kūgis:**  $S_{\text{šon. pav.}} = \pi(R + r) \cdot l$ ,  $V = \frac{1}{3} \pi H(R^2 + Rr + r^2)$ ;

čia  $R$  ir  $r$  – kūgio pagrindų spindulių ilgiai,  $V$  – tūris,  $H$  – aukštinės ilgis,  $l$  – sudaromosios ilgis.

**Nupjautinės piramidės tūris:**  $V = \frac{1}{3} H(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)$ ;

čia  $S_1, S_2$  – pagrindų plotai,  $H$  – aukštinės ilgis.

**Rutulio nuopjova:**  $S = 2\pi RH$ ,  $V = \frac{1}{3} \pi H^2(3R - H)$ ; čia  $R$  – rutulio spindulio ilgis,  $H$  – nuopjovos aukštinės ilgis.

**Erdvės vektoriaus ilgis:**  $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

**Vektorių skaliarinė sandauga:**  $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha$ ;

čia  $\alpha$  – kampas tarp vektorių  $\vec{a}\{x_1, y_1, z_1\}$  ir  $\vec{b}\{x_2, y_2, z_2\}$ .

**Trigonometrinių funkcijų sąryšiai:**

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \quad 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}, \quad 2 \sin^2 \alpha = 1 - \cos 2\alpha, \quad 2 \cos^2 \alpha = 1 + \cos 2\alpha,$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta, \quad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta, \quad \operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}.$$

**Trigonometrinių funkcijų reikšmių lentelė:**

$\alpha$	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–

**Trigonometrinės lygtys:**

$$\begin{cases} \sin x = a, \\ x = (-1)^k \arcsin a + \pi k; \end{cases} \quad \text{čia } k \in \mathbf{Z}, -1 \leq a \leq 1;$$

$$\begin{cases} \cos x = a, \\ x = \pm \arccos a + 2\pi k; \end{cases} \quad \text{čia } k \in \mathbf{Z}, -1 \leq a \leq 1;$$

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x = a, \\ x = \operatorname{arctg} a + \pi k; \end{cases} \quad \text{čia } k \in \mathbf{Z}.$$

**Išvestinių skaičiavimo taisyklės:**

$$(cu)' = cu', \quad (u \pm v)' = u' \pm v', \quad (uv)' = u'v + uv', \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2};$$

čia  $u = u(x)$  ir  $v = v(x)$  – diferencijuojamosios funkcijos,  $c$  – konstanta.

$$\textbf{Funkcijų išvestinės: } (a^x)' = a^x \ln a, \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a};$$

Sudėtinės funkcijos  $h(x) = g(f(x))$  išvestinė  $h'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$ .

**Funkcijos grafiko liestinės taške  $(x_0, f(x_0))$  lygtis:**  $y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ .

$$\textbf{Pagrindinės logaritmų savybės: } \log_a(xy) = \log_a x + \log_a y, \quad \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y,$$

$$\log_a x^k = k \cdot \log_a x, \quad \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

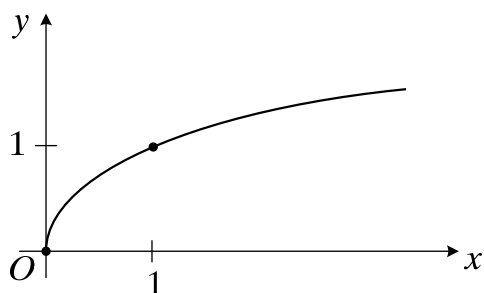
$$\textbf{Derinių skaičius: } C_n^k = C_n^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad \textbf{Gretinių skaičius: } A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

**Tikimybių teorija:** atsitiktinio dydžio  $X$  matematinė viltis  $EX = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n$ ,  
dispersija  $DX = (x_1 - EX)^2 p_1 + (x_2 - EX)^2 p_2 + \dots + (x_n - EX)^2 p_n$ .

## I dalis

Kiekvienas šios dalies uždavinys (01–12) turi tik vieną teisingą atsakymą, vertinamą 1 tašku. Pasirinkite, jūsų nuomone, teisingą atsakymą ir pažymėkite jį atsakymų lape kryželiu ☒.

01. Kurios iš žemiau užrašytų funkcijų grafiko eskizas pavaizduotas paveiksle?



A  $y = \sqrt{x}$

B  $y = \log_4 x$

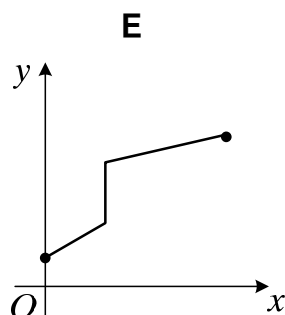
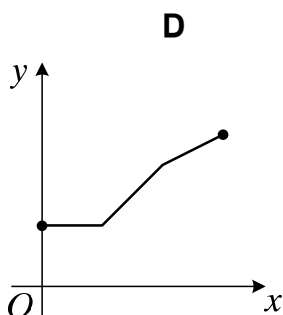
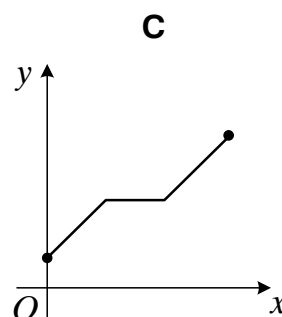
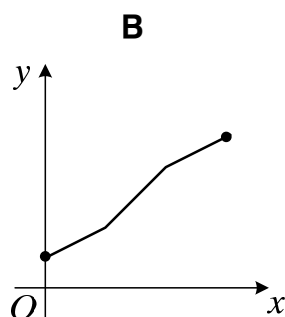
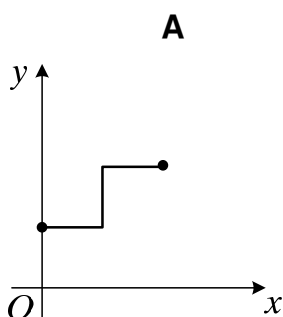
C  $y = 2^x$

D  $y = x^3$

E  $y = \frac{1}{x}$

Juodraštis

02. Kuriame paveiksle pavaizduota didėjančioji<sup>1</sup> funkcija?



Juodraštis

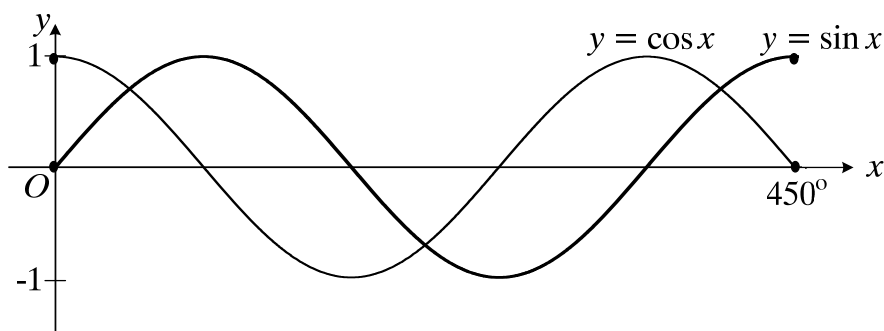
<sup>1</sup> didėjančioji – rosnąća – возрастающая

03. Yra 5 bandomieji sklypai. Kiekviename iš jų pasodinta po 100 pupų. Po nustatyto laiko sklypuose sudygo atitinkamai 72, 82, 86, 80 ir  $x$  pupų. Žinoma, kad sudygusių pupų skaičių moda, mediana ir vidurkis<sup>1</sup> sutampa. Raskite nežinomą pupų skaičių  $x$ .

A 86                      B 84                      C 82                      D 80                      E 72

Juodraštis

04. Raskite lygties<sup>2</sup>  $\sin x = \cos x$  sprendinių<sup>3</sup> skaičių intervale  $0^\circ \leq x \leq 450^\circ$ , remdamiesi šiame intervale pavaizduotais funkcijų  $y = \sin x$  ir  $y = \cos x$  grafikais.



A 2                      B 3                      C 5                      D 7                      E 8

Juodraštis

05. Kiek viršūnių yra piramidėje<sup>4</sup>, turinčioje 12 briaunų<sup>5</sup>?

A 6                      B 7                      C 12                      D 15                      E 18

Juodraštis

<sup>1</sup> vidurkis – średnia – среднее

<sup>2</sup> lygties – równania – уравнения

<sup>3</sup> sprendinių – rozwiązań – решений

<sup>4</sup> piramidėje – w ostrosłupie – в пирамиде

<sup>5</sup> briaunų – krawędzi – ребер

06. Seka<sup>1</sup>  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  yra aritmetinė progresija<sup>2</sup>, kurios  $a_5 + a_n = a_2 + a_{10}$ . Raskite  $n$ .

A 5

B 6

C 7

D 8

E 9

Juodraštis

07. Visus iš eilės einančius natūraliuosius skaičius<sup>3</sup> keliant kvadratu buvo gauta seka  $1^2, 2^2, 3^2, \dots, n^2, \dots$ . Skaičius  $10^8$  yra šios sekos narys. Kuris skaičius šioje sekoje eis iš karto po skaičiaus  $10^8$ ?

A  $(10^8 + 1)^2$ B  $(10^8)^2$ C  $(10^5)^2$ D  $(10^4 + 1)^2$ E  $(10^4)^2 + 1$ 

Juodraštis

08. Išspręskite nelygybę<sup>4</sup>  $\log_{0,01} 100 < \log_{0,01} x$ .

A  $(-\infty; 100)$ B  $(0; 0,01)$ C  $(0,01; 100)$ D  $(0; 100)$ E  $(100; +\infty)$ 

Juodraštis

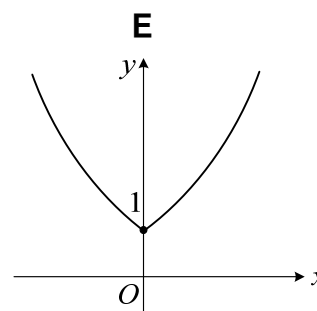
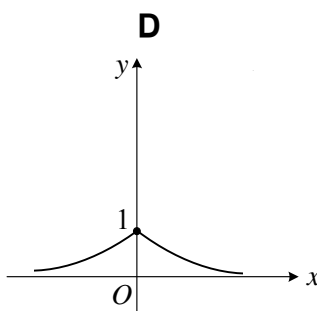
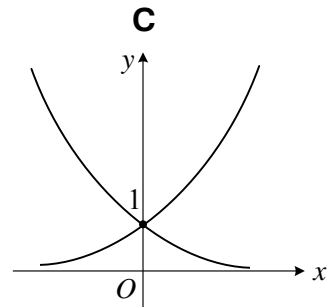
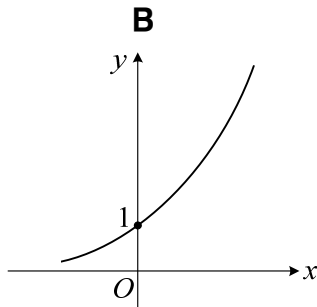
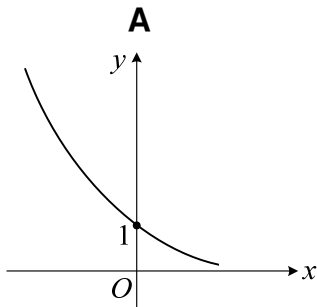
<sup>1</sup> seka – ciąg – последовательность

<sup>2</sup> aritmetinė progresija – postęp arytmetyczny – арифметическая прогрессия

<sup>3</sup> natūraliuosius skaičius – liczby naturalne – натуральные числа

<sup>4</sup> nelygybę – nierówność – неравенство

09. Funkcijos  $y = 2^{|x|}$  grafiko eskizas yra:



*Juodraštis*

10. Kam lygu  $xyz$ , kai  $x^2yz^3 = 7^3$  ir  $xy^2 = 7^9$ ?

**A**  $7^4$

**B**  $7^6$

**C**  $7^8$

**D**  $7^9$

**E**  $7^{10}$

*Juodraštis*

11. Taškas  $\left(2; \frac{4}{9}\right)$  priklauso funkcijos  $f(x) = a^x$  grafikui. Kokia yra  $a$  skaitinė reikšmė<sup>1</sup>?

- A** 3                      **B**  $\frac{3}{2}$                       **C** 1                      **D**  $\frac{2}{3}$                       **E**  $\frac{1}{3}$

*Juodraštis*

12. Funkcijos  $f(x) = (x^{10} + 1)^{10}$  išvestinė<sup>2</sup> yra:

- A**  $10(x^{10} + 1)^9$                       **B**  $100(x^{10} + 1)^9$                       **C**  $100x^9(x^{10} + 1)^9$
- D**  $x^9(x^{10} + 1)^9$                       **E**  $100x(x^{10} + 1)^9$

*Juodraštis*

<sup>1</sup> skaitinė reikšmė – wartość liczbowa – числовое значение

<sup>2</sup> išvestinė – pochodna – производная



**II dalis**

Kiekvieno šios dalies uždavinio (13–24) teisingas atsakymas vertinamas **2 taškais** (kitu atveju vertinama 0 taškų). Išsprendę uždavinius, gautus atsakymus įrašykite į atsakymų lapą.

**13.**  $f(x) = \sqrt{2} x^2 + \sqrt{2}$ . Apskaičiuokite  $f'(\sqrt{2})$ .

*Juodraštis*

- 14.** Sausio 1 dieną pradėtame eksploatuoti smėlio karjere buvo 80 000 m<sup>3</sup> smėlio. Kasmet planuojama iškasti 20 % praėjusių metų gale karjere likusio smėlio. Kiek kubinių metrų smėlio karjere turėtų likti po 3 metų?

*Juodraštis*

- 15.** Duoti trys natūralieji skaičiai  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . Kiekvienas šių skaičių yra mažesnis už 11. Raskite didžiausią reiškinio<sup>1</sup>  $\frac{a+b}{c}$  skaitinę reikšmę.

*Juodraštis*

- 16.** Apskaičiuokite reiškinio  $1000^{\frac{1}{\lg 4}}$  reikšmę.

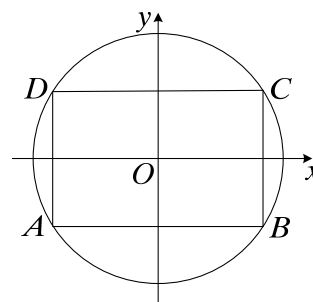
*Juodraštis*

---

<sup>1</sup> reiškinio – wyrażenia – выражения

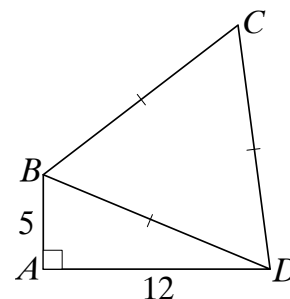
17. Į apskritimą<sup>1</sup> įbrėžtas stačiakampis<sup>2</sup>  $ABCD$  taip, kad kraštinė<sup>3</sup>  $AB$  lygiagreti  $Ox$  ašiai.  $AB = 4$ ,  $AD = 3$ . Raskite taško  $D$  koordinates.

Juodraštis



18. Keturkampio<sup>4</sup>  $ABCD$  kampas<sup>5</sup>  $A$  yra status<sup>6</sup>.  $AB = 5$ ,  $AD = 12$ ,  $BC = CD = BD$ . Apskaičiuokite keturkampio  $ABCD$  plotą<sup>7</sup>.

Juodraštis



<sup>1</sup> apskritimą – okrag – окружность

<sup>2</sup> stačiakampis – prostokāt – прямоугольник

<sup>3</sup> kraštinė – bok – сторона

<sup>4</sup> keturkampio – czworokąta – четырехугольника

<sup>5</sup> kampas – kāt – угол

<sup>6</sup> status – prosty – прямой

<sup>7</sup> plotą – powierzchnię – площадь

19. Tikimybė<sup>1</sup>, kad reikalinga knyga yra pirmos bibliotekos fonde, lygi 0,7, o kad ši knyga yra antros bibliotekos fonde, lygi 0,55. Apskaičiuokite tikimybę, kad knyga yra bent vienos bibliotekos fonde.

*Juodraštis*

20. Vektoriai  $\vec{a} + 2\vec{b}$  ir  $\vec{a} - 2\vec{b}$  statmeni,  $|\vec{a}| = 5$ . Raskite  $|\vec{b}|$ .

*Juodraštis*

---

<sup>1</sup> tikimybė – prawdopodobieństwo – вероятность

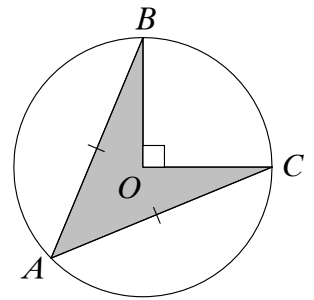
21. Apskaičiuokite

$$\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{1+\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{4}.$$

*Juodraštis*

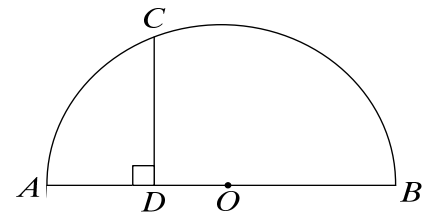
22. Apskritimo su centru  $O$  spindulio ilgis lygus 1.  $\angle BOC = 90^\circ$ . Apskritimo stygos<sup>1</sup>  $AB$  ir  $AC$  yra lygios. Apskaičiuokite pilkosios dalies  $ABOC$  plotą (žr. pav.).

*Juodraštis*



<sup>1</sup> stygos – сіяціwy – хорды

23. Taškas  $C$  priklauso pusapskritimiui<sup>1</sup> su centru  $O$ .  $CD \perp AB$ ,  
 $AD = 4$ ,  $DB = 9$ . Apskaičiuokite atkarpos<sup>2</sup>  $CD$  ilgį<sup>3</sup>.



*Juodraštis*

24. Į 5 litrų talpos indą įpilta 2 litrai 15 % druskos tirpalo. Kiek litrų 20 % druskos tirpalo reikia įpilti į šį indą, kad druskos kiekis procentais gautame tirpale būtų didžiausias?

*Juodraštis*

<sup>1</sup> pusapskritimiui – pólókragu – полуокружности

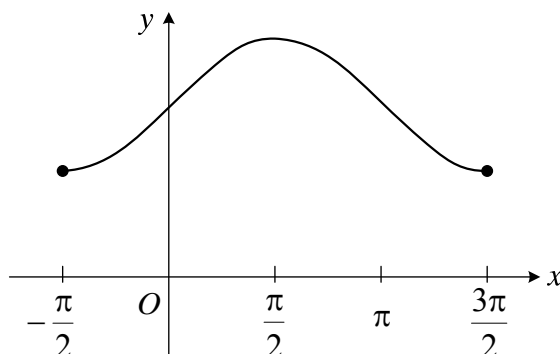
<sup>2</sup> atkarpos – odcinka – отрезка

<sup>3</sup> ilgį – długość – длину

## III dalis

Išspręskite 25–31 uždavinius. Sprendimus bei atsakymus perrašykite į atsakymų lapą.

- 25.** Paveiksle pavaizduotas funkcijos  $y = \sin x + a$  grafikas intervale  $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$ ; čia  $a$  – realusis skaičius. Funkcijos didžiausia reikšmė šiame intervale lygi 4, o mažiausia reikšmė lygi 2.



- 25.1.** Raskite skaičių  $a$ .

(1 taškas)

Juodraštis

- 25.2.** Per funkcijos grafiko tašką, kurio abscisė  $x_0 = \pi$ , nubrėžta liestinė<sup>1</sup>. Kokio didumo kampą sudaro ši liestinė su teigiamąja ašies  $Ox$  kryptimi?

(2 taškai)

Juodraštis

- 25.3.** Apskaičiuokite figūros, kurią riboja funkcijos  $f(x) = \sin x + a$  grafikas ir tiesės<sup>2</sup>  $y = 0$ ,  $x = -\frac{\pi}{2}$ ,  $x = \frac{\pi}{2}$ , plotą.

(2 taškai)

Juodraštis

<sup>1</sup> liestinė – stycznа – касательная

<sup>2</sup> tiesės – proste – прямые

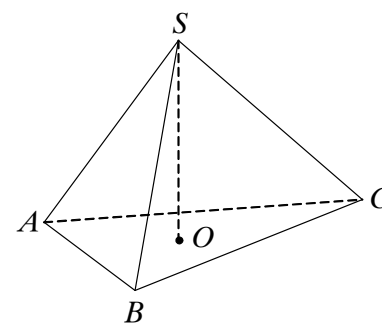
26. Raskite didžiausią sveikąjį lygties  $\sqrt{x^2 - 4x + 12} = 3$  sprendinį.

(3 taškai)

Juodraštis

27. Taisyklingosios trikampės piramidės  $ABCS$  tūris<sup>1</sup> lygus 8, piramidės aukštinė<sup>2</sup>  $SO$  yra  $2\sqrt{3}$  ilgio. Apskaičiuokite piramidės pagrindo<sup>3</sup>  $ABC$  aukštinės ilgį.

(3 taškai)



Juodraštis

<sup>1</sup> tūris – objętość – объем

<sup>2</sup> aukštinė – wysokość – высота

<sup>3</sup> pagrindo – podstawy – основания



**28.** Iš skaitmenų<sup>1</sup> 0, 3, 5 sudaromi visi galimi triženkliai<sup>2</sup> skaičiai. Skaičiaus skaitmenys gali kartotis (pvz., 555, 300, 303, ...).

**28.1.** Kiek tokių triženklių skaičių galima sudaryti?

(1 taškas)

*Juodraštis*

**28.2.** Apskaičiuokite tikimybę, kad iš sudarytų skaičių atsitiktinai<sup>3</sup> paimtas skaičius dalijasi iš 3.

(2 taškai)

*Juodraštis*

---

<sup>1</sup> skaitmenų – cyfr – цифр

<sup>2</sup> triženkliai – trzycyfrowe – трехзначные

<sup>3</sup> atsitiktinai – losowo – случайно

29. Šeši darbuotojai gavo dovanų 6 bilietus į teatrą, keturiuose iš jų vietos buvo nurodytos pirmoje eilėje. Darbuotojai dalijasi bilietus atsitiktinai juos traukdami. Kokia tikimybė, kad dviejų iš pirmų trijų ištrauktų bilietų vietos bus pirmoje eilėje?

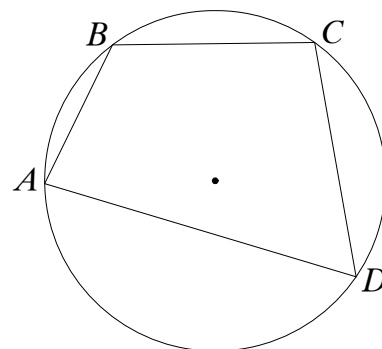
(3 taškai)

Juodraštis

30. Įbrėžtinio<sup>1</sup> keturkampio  $ABCD$  kraštinių  $AB$  ir  $AD$  ilgių sandauga<sup>2</sup> lygi kraštinių  $CB$  ir  $CD$  ilgių sandaugai. Trikampio  $ABD$  plotas lygus 20. Apskaičiuokite trikampio  $BCD$  plotą.

(3 taškai)

Juodraštis



<sup>1</sup> įbrėžtinio – wpisanego – вписанного

<sup>2</sup> sandauga – iloczyn – произведение

31. Trys dviratininkai kas valandą išvažiuoja iš tos pačios vietos ir važiuoja viena kryptimi. Pirmojo dviratininko greitis 12 km/h, antrojo – 10 km/h. Trečiasis dviratininkas, važiuodamas greičiau nei pirmasis, pirmiausia pavijo antrąjį, o praėjus dar 2 valandoms – pirmąjį dviratininką. Koks trečiojo dviratininko greitis?

(4 taškai)

*Juodraštis*

