



MATEMATIKA

Valstybinio brandos egzamino užduotis

Pagrindinė sesija

2023 m. birželio 14 d.

Egzamino trukmė – 3 val. (180 min.)

NURODYMAI

1. Gavę užduoties sąsiuvinį, jo priedą ir atsakymų lapą, pasitikrinkite, ar juose nėra tuščių lapų arba kito aiškiai matomo spausdinimo broko. Pastebėję praneškite egzamino vykdytojui.
2. **Įsitikinkite, kad ant jūsų atsakymų lapo užklijuotas kodas, kurio numeris sutampa su jūsų eilės numeriu egzamino vykdymo protokole.**
3. Bendrojo kurso uždaviniai arba jų dalys pažymėti **B→**.
4. Uždavinių sprendimus ir (ar) atsakymus pirmiausia galite rašyti užduoties sąsiuvinyje, kuriame yra palikta vietos juodraščiui. Jei neabejojate dėl sprendimo ir (ar) atsakymo, iš karto rašykite atsakymų lape. **Vertintojams bus pateikiamas tik atsakymų lapas!**
5. Per egzaminą galite rašyti juodai rašančiu tušinuku, pieštuku, naudotis trintuku, braižybos ir matavimo įrankiais, skaičiuotuvu be tekstinės atminties.
6. **Atsakymų lape** rašykite ir braižykite **tik juodai** rašančiu tušinuku tvarkingai ir įskaitomai. Atsakymų lape nesinaudokite trintuku ir koregavimo priemonėmis.
7. Saugokite atsakymų lapą (neįplėškite ir nesulamdykite). Sugadintuose lapuose įrašyti atsakymai nebus vertinami.
8. Stenkitės išspręsti kuo daugiau uždavinių, neatsižvelgdami į tai, pagal kurio kurso (bendrojo ar išplėstinio) programą dalyko mokėtės mokykloje. Neišsprendę kurio nors uždavinio, nenusiminkite ir stenkitės išspręsti kitus.
9. Pasirinktus **I dalies** uždavinių atsakymus atsakymų lape pažymėkite kryželiu (žymėkite tik vieną atsakymo variantą). Jei pažymėsite neaiškiai arba daugiau kaip vieną atsakymo variantą, tas uždavinys bus vertinamas 0 taškų. Suklydę atsakymą galite taisyti atsakymų lape nurodytoje vietoje.
10. **II dalies** uždavinių atsakymus įrašykite tam skirtoje atsakymų lapo vietoje.
11. **III dalies** uždavinių sprendimus ir atsakymus įrašykite tam skirtoje atsakymų lapo vietoje. Už ribų parašyti sprendimai ir atsakymai nebus vertinami. **III dalyje pateiktas atsakymas be sprendimo bus vertinamas 0 taškų.**
12. Atsakymų lape neturi būti užrašų ar kitokių ženklų, kurie leistų identifikuoti darbo autorių.
13. Pasibaigus egzaminui, užduoties sąsiuvinį galite pasiimti.

Linkime sėkmės!

I dalis

Kiekvienas šios dalies uždavinys (01–10) turi tik vieną teisingą atsakymą, vertinamą **1 tašku**. Pasirinkite, jūsų nuomone, teisingą atsakymą ir pažymėkite jį atsakymų lape kryželiu.

B→01. Duotos dvi skaičių aibės¹: $A = \{-5; -1; 0; 2; 3; 5; 7\}$ ir $B = \{-5; -2; 0; 1; 7; 9\}$. Nustatykite, kiek elementų priklauso aibių A ir B sąjungai.

A 3

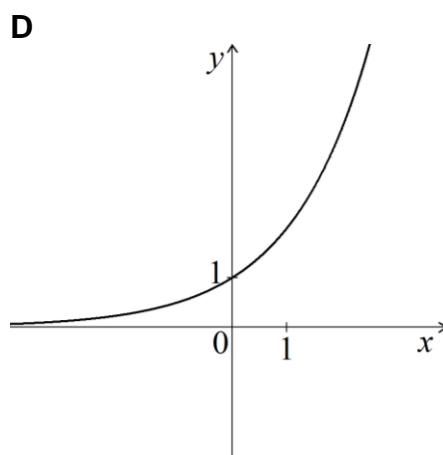
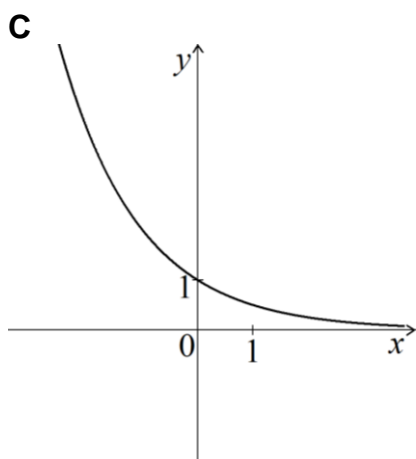
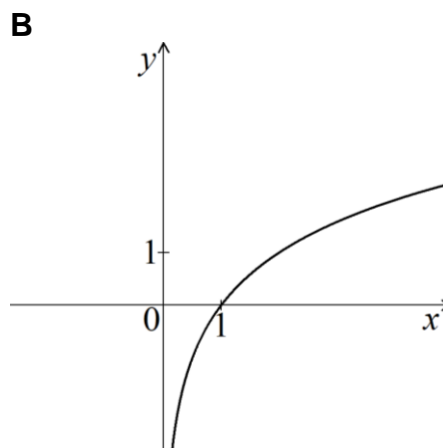
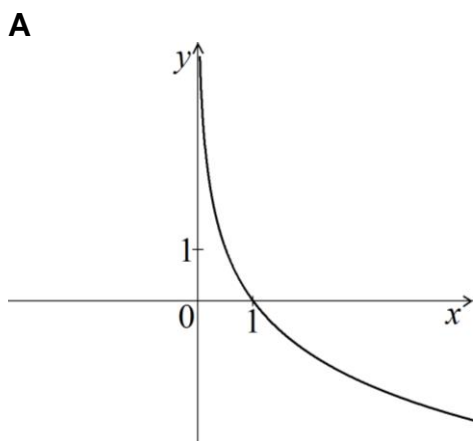
B 7

C 10

D 13

Juodraštis

B→02. Kuriame paveiksle pavaizduotas funkcijos $y = 2^x$ grafiko eskizas?



Juodraštis

¹ aibė – zbiór – множество

B→03. Buvo apklausti vienos klasės mokiniai, kiek valandų per savaitę jie sportuoja. Lentelėje pateikti šios apklausos rezultatai.

Laikas, kurį mokinys skiria sportui (val.)	2	5	7	8
Mokinių skaičius	9	5	3	1

Nustatykite laiko, kurį mokinys skiria sportui, imties² medianą.

A 2 val.

B 3,5 val.

C 4 val.

D 5,5 val.

Juodraštis

B→04. Durų kodą turi sudaryti trys simboliai. Pirmasis simbolis turi būti viena iš trijų raidžių: A, B arba C, o kiti du simboliai – bet kurie skaitmenys³ (pvz., A16, B77, C09 ir t. t.). Kiek tokių skirtingų kodų galima sudaryti?

A 150

B 243

C 270

D 300

Juodraštis

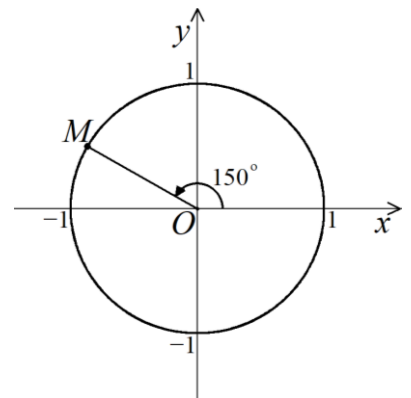
B→05. Paveiksle pavaizduotas vienetinis apskritimas, kurio centras yra taškas O . Remdamiesi paveikslu, nustatykite taško M koordinatės⁴.

A $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$

B $\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

C $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$

D $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$



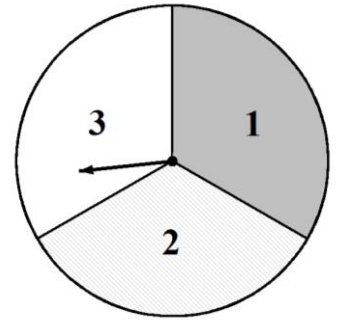
Juodraštis

² imtis – próba – выборка

³ skaitmuo – cyfra – цифра

⁴ koordinatė – współrzędna – координата

B→06. Paveiksle pavaizduotas žaidimo ratas, padalytas į tris vienodus sektorius. Vienas iš jų pažymėtas skaičiumi **1**, kitas – skaičiumi **2**, o trečias – skaičiumi **3**. Rato rodyklė sukama **du kartus** ir kiekvieną kartą užrašoma, kuriuo skaičiumi pažymėtame sektoriuje ji atsitiktinai sustoja (ant sektorių ribos rodyklė sustoti negali). Apskaičiuokite tikimybę⁵, kad užrašytų skaičių suma bus lygi 5.



A $\frac{1}{6}$

B $\frac{1}{9}$

C $\frac{2}{9}$

D $\frac{2}{3}$

Juodraštis

07. Kuriuo atveju abi nurodytos funkcijos yra lyginės⁶?

A $f(x) = 2^x$ ir $g(x) = |x|$

B $g(x) = |x|$ ir $k(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

C $g(x) = |x|$ ir $h(x) = \sqrt[3]{x}$

D $f(x) = 2^x$ ir $k(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

Juodraštis

08. Paveiksle pavaizduotas kubas⁷ $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, kurio kraštinės ilgis lygus 1. Nustatykite kampo tarp tiesės $D_1 A$ ir tiesės AB didumą.

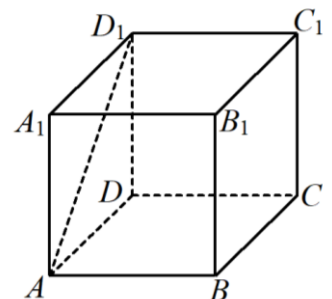
A 90°

B 60°

C 45°

D 30°

Juodraštis



⁵ tikimybė – prawdopodobieństwo – вероятность

⁶ lyginė – parzysta – четная

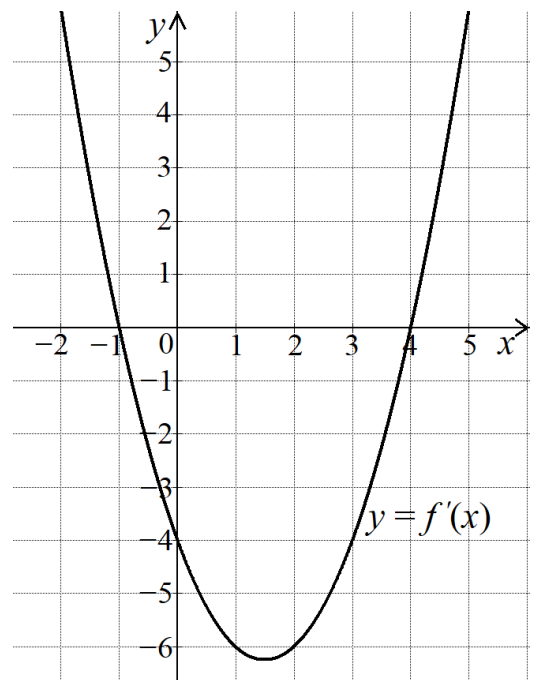
⁷ kubas – sześcian – куб

09. Kvadratinė lygtis $x^2 - (p-6)x + q = 0$ turi du skirtingus realiuosius sprendinius $x = p$ ir $x = q$, nelygius nuliui. Apskaičiuokite $p + q$.

A -7 **B** -6 **C** -5 **D** -4 *Juodraštis*

10. Paveiksle pavaizduotas funkcijos $y = f(x)$ išvestinės⁸ grafikas, abscisių⁹ ašį kertantis taškuose $(-1; 0)$ ir $(4; 0)$. Funkcija $y = f(x)$ ir jos išvestinė $y = f'(x)$ yra apibrėžtos, kai $x \in \mathbf{R}$.

Remdamiesi šiuo grafiku, nustatykite, kuri iš pateiktų funkcijos $y = f(x)$ reikšmių¹⁰ yra **mažiausia**.

A $f(-1)$ **B** $f(0)$ **C** $f(2)$ **D** $f(4)$ *Juodraštis*

⁸ funkcijos išvestinė – pochodna funkcji – производная функции

⁹ abscisė – odcięta – абсцисса

¹⁰ reikšmės – wartości – значения

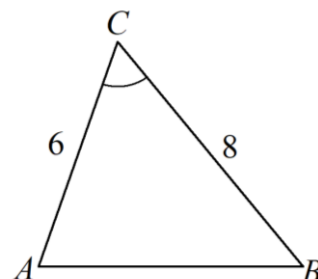
II dalis

Kiekvieno šios dalies uždavinio (11–18) ar jo dalies teisingas atsakymas vertinamas **1 tašku**. Išspręskite uždavinius ir gautus atsakymus įrašykite į atsakymų lapą.

B→11. Paveiksle pavaizduotas trikampis ABC . Yra žinoma, kad $AC = 6$,

$BC = 8$, o $\sin \angle ACB = \frac{3}{4}$. Apskaičiuokite trikampio ABC plotą¹¹.

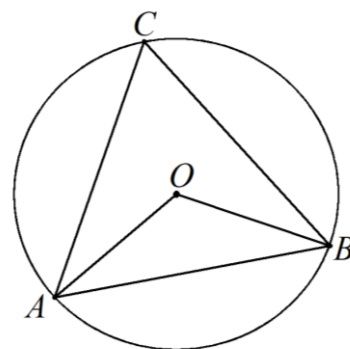
Juodraštis



12. Paveiksle pavaizduotas apskritimas, kurio centras yra taškas O . Taškai A , B ir C priklauso šiam apskritimui. Trikampis ABC yra lygiakraštis¹².

B→12.1. Apskaičiuokite kampo AOB didumą.

Juodraštis



12.2. Yra žinoma, kad apskritimo spindulio¹³ ilgis lygus $2\sqrt{3}$.

Apskaičiuokite trikampio ABC kraštinės ilgį.

Juodraštis

¹¹ plotas – pole – площадь

¹² lygiakraštis trikampis – trójkąt równoboczny – равносторонний треугольник

¹³ apskritimo spindulys – promień okręgu – радиус окружности

13. Aritmetinės progresijos¹⁴ n -tojo nario formulė yra $a_n = 21 - 3n$.

B→13.1. Apskaičiuokite šios progresijos pirmąjį narį.

Juodraštis

13.2. Yra žinoma, kad $a_k = -36$. Apskaičiuokite k reikšmę.

Juodraštis

14. Išspręskite lygtis:

B→14.1. $3^{1-x} = 27$;

Juodraštis

14.2. $\operatorname{tg}(3x) = 1$;

Juodraštis

14.3. $e^{x^2} = 2$.

Juodraštis

¹⁴ aritmetinė progresija – ciąg arytmetyczny – арифметическая прогрессия

- B→15.** Dėžėje yra vienodo dydžio raudonų ir baltų rutulių. Atsitiktinai iš dėžės traukiamas vienas rutulys. Tikimybė, kad jis bus raudonas, lygi $\frac{2}{5}$. Apskaičiuokite, kiek kartų pradinis baltų rutulių skaičius dėžėje yra didesnis už pradinį raudonų rutulių skaičių.

Juodraštis

- 16.** Garso, kurį girdi žmogus, intensyvumo lygį D decibelais (dB) galima apskaičiuoti pagal formulę $D = 10 \cdot \lg(I \cdot 10^{12})$; čia I – garso stipris (W/m^2). Žmogus žadintuvo garsą girdi 70 dB intensyvumu. Apskaičiuokite šio žadintuvo garso stiprį I (W/m^2).

Juodraštis

- 17.** Ingos penktadienio pamokų tvarkaraštyje turi būti šešios pamokos: dvi matematikos ir po vieną biologijos, istorijos, etikos bei anglų kalbos. Keliais skirtingais būdais galima sudaryti Ingos penktadienio pamokų tvarkaraštį, jeigu abi matematikos pamokos privalo eiti iš eilės?

Juodraštis

18. Nustatykite funkcijos $f(x) = 1 - \sin^2 x \cdot \cos^2 x$ reikšmių sritį¹⁵.

Juodraštis

¹⁵ reikšmių sritis – zbiór wartości – область значений

III dalis

Išspręskite 19–26 uždavinius. Sprendimus ir atsakymus perrašykite į atsakymų lapą.

- B→19.** Parduotuvėje naujas telefonas kainuoja 640 eurų. Įsigyto telefono vertė (eurais) po metų sumažėja 30 %, o paskui kasmet mažėja po 15 % nuo paskutinių praėjusių metų vertės. Apskaičiuokite, kokia bus įsigyto telefono vertė po trejų metų.

(2 taškai)

Juodraštis

- B→20.** Duotas reiškiny $\log_{0,3}(2 - 3x) - \log_{0,3}(4 + x)$.

20.1. Nustatykite šio reiškinio apibrėžimo sritį¹⁶.

(2 taškai)

Juodraštis

20.2. Išspręskite nelygybę $\log_{0,3}(2 - 3x) \geq \log_{0,3}(4 + x)$.

(3 taškai)

Juodraštis

¹⁶ apibrėžimo sritis – dziedzina – область определения

21. Duota funkcija $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x + 4$.

B→21.1. Raskite šios funkcijos išvestinę $f'(x)$.

(1 taškas)

Juodraštis

B→21.2. Nustatykite x reikšmes, su kuriomis funkcijos $y = f(x)$ reikšmės mažėja.

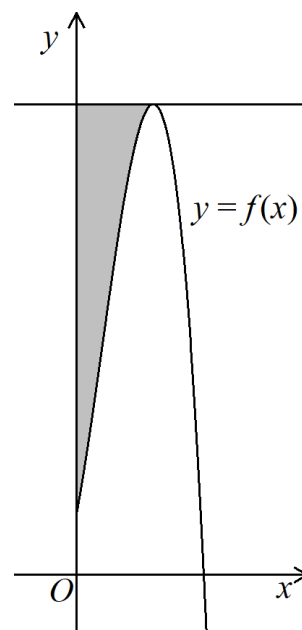
(3 taškai)

Juodraštis

21.3. Paveiksle pavaizduoti funkcijos $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x + 4$ grafikas (kai $x \geq 0$) ir grafiko liestinė¹⁷ taške, kurio abscisė lygi 3. Funkcijos grafiko, jo liestinės ir Oy ašies ribojama figūra (kai $x \geq 0$) nuspalvinta pilkai. Apskaičiuokite šios figūros plotą.

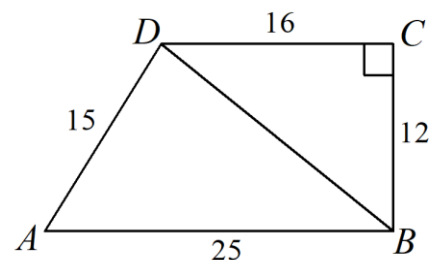
(4 taškai)

Juodraštis



¹⁷ liestinė – styczná – касательная

- 22.** Paveiksle pavaizduota stačioji trapezija $ABCD$ ($AB \parallel CD$, $\angle BCD = 90^\circ$). Yra žinoma, kad $AB = 25$, $BC = 12$, $CD = 16$ ir $DA = 15$.



- B→22.1.** Apskaičiuotą trapezijos įstrižainės¹⁸ BD ilgį, įrodykite, kad trikampiai ABD ir BDC yra panašieji¹⁹.

(2 taškai)

Juodraštis

- 22.2.** Apskaičiuokite vektorių \overrightarrow{AB} ir \overrightarrow{AD} skaliarinę sandaugą²⁰.

(3 taškai)

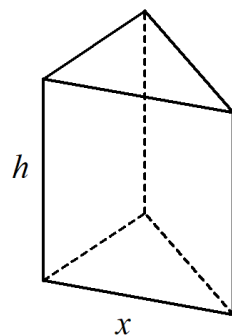
Juodraštis

¹⁸ įstrižainė – przekątna – диагональ

¹⁹ panašieji trikampiai – trójkąty podobne – подобные треугольники

²⁰ skaliarinė sandauga – iloczyn skalarny – скалярное произведение

- 23.** Paveiksle pavaizduotos stačiosios prizmės pagrindas yra lygiakraštis trikampis. Šios prizmės tūris lygus 54. Pažymėkime prizmės pagrindo kraštinės ilgį x , o prizmės aukštinės ilgį h .



- 23.1.** Išreiškę šios prizmės aukštinės ilgį h per x , parodykite, kad prizmės viso paviršiaus plotą galima

apskaičiuoti pagal formulę $S(x) = \frac{x^2\sqrt{3}}{2} + \frac{216\sqrt{3}}{x}$; čia $x > 0$.

(3 taškai)

Juodraštis

- 23.2.** Išspręskite lygtį $S'(x) = 0$.

(2 taškai)

Juodraštis

- 23.3.** Įrodykite, kad duotosios prizmės viso paviršiaus plotas su bet kuria jos pagrindo kraštinės ilgio x reikšme yra ne mažesnis kaip $54\sqrt{3}$.

(2 taškai)

Juodraštis

- 24.** Trys draugai – Giedrė, Tomas ir Mindaugas – laiko vairavimo egzaminą. Tegul įvykis G yra „Giedrė išlaikė vairavimo egzaminą“, įvykis T – „Tomas išlaikė vairavimo egzaminą“, o įvykis M – „Mindaugas išlaikė vairavimo egzaminą“ (G , T ir M yra nepriklausomieji įvykiai²¹). Žinoma, kad įvykių tikimybės yra $P(G) = \frac{3}{4}$, $P(T) = \frac{4}{5}$ ir $P(M) = \frac{2}{3}$.

Vairavimo egzaminą gali išlaikyti arba vienas iš draugų, arba du, arba trys, arba nė vienas iš jų. Atsitiktinis dydis²² X – „Vairavimo egzaminą išlaikiusių draugų skaičius“.

- 24.1.** Parodykite, kad $P(X = 2) = \frac{13}{30}$.

(2 taškai)

Juodraštis

- 24.2.** Atsitiktinio dydžio X skirstinys²³ pateiktas lentele.

m	0	1	2	3
$P(X = m)$	$\frac{1}{60}$	p	$\frac{13}{30}$	$\frac{2}{5}$

Apskaičiuokite atsitiktinio dydžio X matematinę viltį²⁴.

(2 taškai)

Juodraštis

²¹ nepriklausomieji įvykiai – zdarzenia niezależne – независимые события

²² atsitiktinis dydis – zmienna losowa – случайная величина

²³ atsitiktinio dydžio skirstinys – rozkład zmiennej losowej – распределение случайной величины

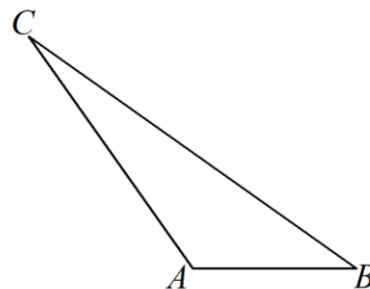
²⁴ matematinė viltis – nadzieja matematyczna – математическое ожидание

25. Paveiksle pavaizduotas bukasis trikampis ABC . Yra žinoma, kad $\angle BAC - \angle ABC = 90^\circ$, o $AC:BC = 3:4$.

Apskaičiuokite $\operatorname{tg} \angle BAC$.

Juodraštis

(3 taškai)



26. Trys pirmieji didėjančiosios geometrinės progresijos²⁵ nariai yra natūralieji skaičiai²⁶. Trečiasis narys lygus 90 % pirmųjų dviejų narių sumos. Trečiojo ir pirmojo narių skirtumas yra ne didesnis už 19. Nustatykite didžiausią galimą trečiojo nario reikšmę.

(4 taškai)

Juodraštis

²⁵ didėjančioji geometrinė progresija – rosnący ciąg geometryczny – возрастающая геометрическая прогрессия

²⁶ natūralieji skaičiai – liczby naturalne – натуральные числа

Juodraštis