



MATEMATIKA

Valstybinio brandos egzamino užduotis
Pagrindinė sesija

2007 m. gegužės 16 d.

Egzamino trukmė – 3 val. (180 min.)

Valstybinio brandos egzamino formulės

Trikampis. $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = rp = \frac{abc}{4R}$; čia a, b, c – trikampio kraštinės, p – pusperimetris, r ir R – įbrėžtinio ir apibrėžtinio apskritimų spinduliai, S – trikampio plotas.

Skritulio išpjova. $S = \frac{\pi R^2}{360^\circ} \cdot \alpha$, $l = \frac{2\pi R}{360^\circ} \cdot \alpha$; čia α – centrinio kampo didumas laipsniais, S – išpjovos plotas, l – išpjovos lanko ilgis, R – apskritimo spindulys.

Nupjautinis kūgis. $S = \pi(R+r) \cdot l$, $V = \frac{1}{3} \pi H(R^2 + Rr + r^2)$; čia R ir r – kūgio pagrindų spinduliai, S – šoninio paviršiaus plotas, V – tūris, H – aukštinė, l – sudaromoji.

Nupjautinės piramidės tūris. $V = \frac{1}{3} H(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)$; čia S_1, S_2 – pagrindų plotai, H – aukštinė.

Rutulys. $S = 4\pi R^2$, $V = \frac{4}{3} \pi R^3$; čia S – rutulio paviršiaus plotas, V – tūris, R – spindulys.

Rutulio nuopjovos tūris. $V = \frac{1}{3} \pi H^2(3R - H)$; čia R – spindulys, H – nuopjovos aukštinė.

Vektorių skaliarinė sandauga. $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha$;
čia α – kampas tarp vektorių $\vec{a} \{x_1, y_1, z_1\}$ ir $\vec{b} \{x_2, y_2, z_2\}$.

Geometrinė progresija. $b_n = b_1 q^{n-1}$, $S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$.

Begalinė nykstamoji geometrinė progresija. $S = \frac{b_1}{1-q}$.

Trigonometrinės funkcijos. $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$, $1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$, $2 \sin^2 \alpha = 1 - \cos 2\alpha$,

$2 \cos^2 \alpha = 1 + \cos 2\alpha$, $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$, $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$,

$\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha \pm \beta}{2} \cos \frac{\alpha \mp \beta}{2}$, $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$, $\cos \alpha - \cos \beta =$

$= -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$, $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$. $\begin{cases} \sin x = a, \\ x = (-1)^k \arcsin a + \pi k, \quad k \in \mathbf{Z}, -1 \leq a \leq 1; \end{cases}$

$\begin{cases} \cos x = a, \\ x = \pm \arccos a + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}, -1 \leq a \leq 1; \end{cases}$ $\begin{cases} \operatorname{tg} x = a, \\ x = \operatorname{arctg} a + \pi k, \quad k \in \mathbf{Z}. \end{cases}$

Deriniai. $C_n^k = C_n^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Tikimybių teorija. Atsitiktinio dydžio X matematinė viltis yra $EX = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n$,
dispersija $DX = (x_1 - EX)^2 p_1 + (x_2 - EX)^2 p_2 + \dots + (x_n - EX)^2 p_n$.

Išvestinių skaičiavimo taisyklės. $(Cu)' = Cu'$; $(u \pm v)' = u' \pm v'$; $(uv)' = u'v + uv'$; $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$;

čia u ir v – taške diferencijuojamos funkcijos, C – konstanta. $(a^x)' = a^x \ln a$, $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$.

Sudėtinės funkcijos $h(x) = g(f(x))$ išvestinė $h'(x) = g'(f(x))f'(x)$.

Funkcijos grafiko liestinės taške $(x_0; f(x_0))$ lygtis. $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Logaritmo pagrindo keitimo formulė. $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$.

Kiekvienas teisingai išspręstas uždavinys (1–6) vertinamas 1 tašku.

1. $2^{2008} - 2^{2007} =$

A 2^{1004}

B 2^{2007}

C 2

D $2^{\frac{2008}{2007}}$

E 1

2. Nurodykite funkcijos $y = 4x^2 + 4x + 10$ reikšmių sritį^I.

A $(-\infty; +\infty)$

B $[0; +\infty)$

C $[9; +\infty)$

D $[10; +\infty)$

E $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right)$

3. Nurodykite, kokia yra funkcijos $f(x) = \cos^2 x$ išvestinės^{II} reikšmė^{III} taške $x = \frac{\pi}{3}$.

A $-\sqrt{3}$

B $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

C $\frac{3}{4}$

D 1

E $\frac{1}{4}$

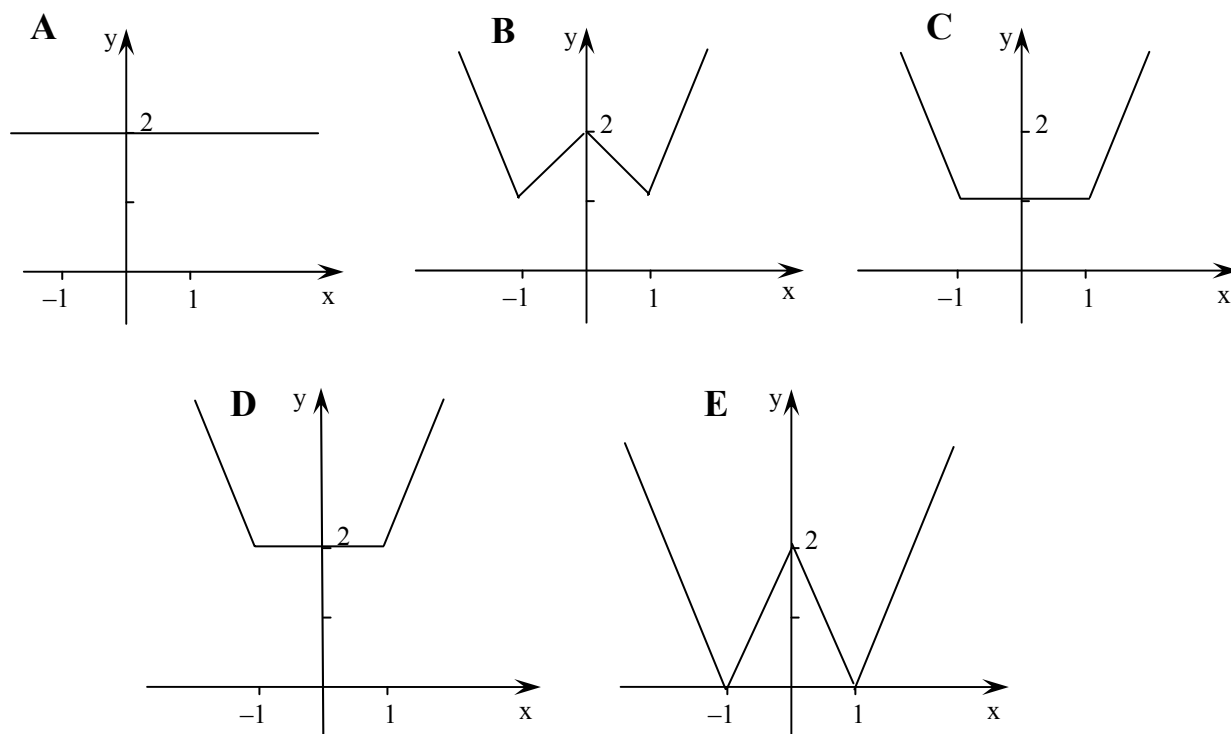
NEPAMIRŠKITE pasirinktus atsakymus žyminčių raidžių įrašyti lentelėje, esančioje paskutiniame šio sąsiuvinio puslapyje.

^I reikšmių sritis – zbiór wartości – область значений

^{II} išvestinė – pochodna – производная

^{III} reikšmė – wartość – значение

4. Kuri iš nubraižytų kreivių yra funkcijos $y = |1 + x| + |1 - x|$ grafiko^I eskizas?



5. Skaičiai $\sqrt[k]{18}$, $\sqrt[3]{18}$, $\sqrt{18}$ nurodyta tvarka yra geometrinės progresijos^{II} nariai^{III}. Tuomet k yra:

- A $\frac{2}{3}$ B 4 C 6 D $\frac{3}{4}$ E 5

6. Nurodykite, kiek nelyginių skaičių^{IV} galima sudaryti iš skaičiaus 3694 skaitmenų^V, jeigu skaitmenys nesikartoja?

- A 12 B 24 C 30 D 64 E 32

NEPAMIRŠKITE pasirinktus atsakymus žyminčių raidžių įrašyti lentelėje, esančioje paskutiniame šio sąsiuvinio puslapyje.

^I grafikas – wykres – график

^{II} geometrinė progresija – ciąg geometryczny – геометрическая прогрессия

^{III} narys – wyraz – член

^{IV} nelyginis skaičius – liczba nieparzysta – нечётное число

^V skaitmuo – cyfra – цифра

7. Išspręskite nelygybę^I:

$$\frac{1-3x}{1-2x} \leq 1.$$

(2 taškai)

Čia rašo vertintojai		
I	II	III
_____	_____	_____

JUODRAŠTIS

^I nelygybė – nierówność – неравенство

8. Automobilis iš miesto A į miestą B nuvažiavo 30 km/h vidutiniu greičiu^I. Po to apsisuko ir grįžo atgal. Apskaičiuokite, koks vidutinis grįžimo greitis, jei visos kelionės vidutinis važiavimo greitis 35 km/h.

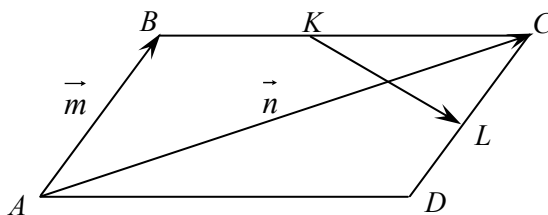
(2 taškai)

Čia rašo vertintojai		
I	II	III

JUODRAŠTIS

^I vidutinis greitis – prędkość średnia – средняя скорость

9. Lygiagretainio^I $ABCD$ kraštinių^{II} BC ir CD vidurio taškai^{III} yra K ir L . Vektorių \overrightarrow{KL} išreikškite vektoriais $\overrightarrow{m} = \overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{AC}$.



(2 taškai)

Čia rašo vertintojai		
I	II	III

JUODRAŠTIS

^I lygiagretainis – równoległobok – параллелограмм

^{II} kraštinė – bok – сторона

^{III} vidurio taškas – środek – середина

10. Išspręskite lygtį¹:

$$\frac{\lg(6x-5)}{2 \lg x} = 1.$$

(3 taškai)

Čia rašo vertintojai		
I	II	III

JUODRAŠTIS

¹ lygtis – równanie – уравнение

11. Parašykite funkcijos $f(x) = 2 \cdot e^{-x}$ grafiko liestinės^I, nubrėžtos per tašką $M(0; 2)$, lygtį.

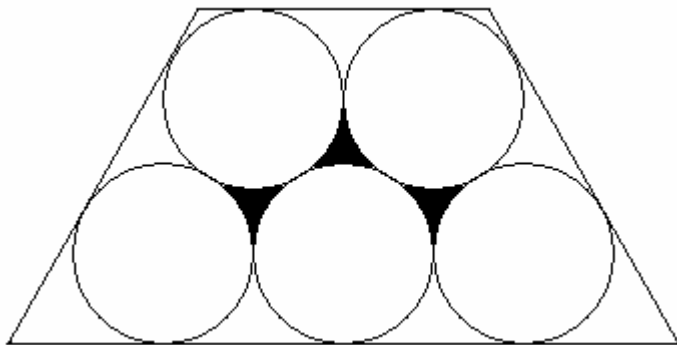
(2 taškai)

Čia rašo vertintojai		
I	II	III
___	___	___

JUODRAŠTIS

^I liestinė – styczna – касательная

12. Į lygiašonę trapeciją^I įbrėžti 5 vienodo dydžio besiliečiantys skrituliai^{II} (žr. pav.). Skritulio spindulys^{III} yra lygus 4. Apskaičiuokite užspalvintos dalies plotą^{IV}.



(4 taškai)

Čia rašo vertintojai		
I	II	III

JUODRAŠTIS

^I lygiašonė trapecija – trapez równoramienny – равнобедренная трапеция

^{II} skritulys – koło – круг

^{III} spindulys – promień – радиус

^{IV} plotas – pole – площадь

13. Išspręskite lygtį:

$$(1 + \cos x) \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 0.$$

(3 taškai)

Čia rašo vertintojai		
I	II	III
_____	_____	_____

JUODRAŠTIS

14. Įrodykite, kad su visomis realiosiomis k reikšmėmis funkcijos $f(x) = (x - 2)(x - 3) - k^2$ grafikas kerta Ox ašį dviejuose taškuose.

(3 taškai)

Čia rašo vertintojai		
I	II	III
_____	_____	_____

JUODRAŠTIS

15. Juvelyras gavo užsakymą pagaminti 38 gramų dirbinį, kurio aukso ir sidabro masių santykis¹ 7:12. Savo dirbtuvėje jis turi du lydinius, kurių aukso ir sidabro masių santykiai atitinkamai yra 1:2 ir 2:3. Kiek gramų kiekvieno lydinio juvelyras turėtų paimti, kad sulydęs juos gautų norimos sudėties juvelyrinį dirbinį?

(4 taškai)

Čia rašo vertintojai		
I	II	III

JUODRAŠTIS

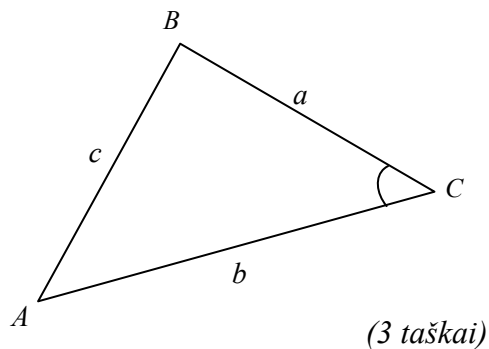
¹ santykis – stosunek – отношение

16. Jeigu trikampio ABC elementus

sieja lygybė^I $\frac{a-b}{a} = 1 - 2 \cos C$,

tai trikampis yra lygiašonis^{II}.

Įrodykite.



Čia rašo vertintojai		
I	II	III

JUODRAŠTIS

^I lygybė – równość – равенство

^{II} lygiašonis – równopamienny – равнобедренный

17. Krepšelyje yra keturi saldainiai, kurie sveria atitinkamai 7, 8, 9 ir 10 gramų. Atsitiktinai^I paėmęs du saldinius, Jonas atiduoda sunkesnį draugui. Sakykime, atsitiktinis dydis^{II} X – Jonui tekusio saldainio svoris.

1. Parodykite, kad $P(X = 8) = \frac{1}{3}$.

(2 taškai)

2. Raskite atsitiktinio dydžio X skirstinį^{III}.

(1 taškas)

3. Apskaičiuokite atsitiktinio dydžio X matematinę viltį^{IV}.

(1 taškas)

	Čia rašo vertintojai		
	I	II	III
	—	—	—
	—	—	—
	—	—	—
Taškų suma			

JUODRAŠTIS

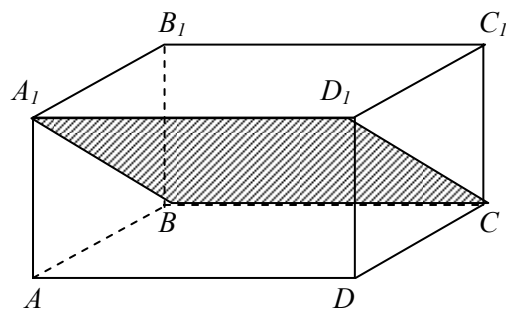
^I atsitiktinai – losowo – случайно

^{II} atsitiktinis dydis – zmienna losowa – случайная величина

^{III} skirstinys – rozkład – распределение

^{IV} matematinė viltis – nadzieja matematyczna – математическое ожидание

18. Duotas stačiakampis gretasienis^I $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.



1. Nubrėžta plokštuma, einanti per taškus A_1, D_1, C . Įrodykite, kad tiesė $B_1 C_1$ yra lygiagreti^{II} plokštumai $A_1 D_1 C B$.

(1 taškas)

2. Plokštuma $A_1 D_1 C$ su pagrindo $ABCD$ plokštuma sudaro 30° kampą ir $AB = a$. Parodykite, kad $AA_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} a$.

(1 taškas)

3. Įrodykite, kad iš visų stačiakampių gretasienių, tenkinančių sąlygas $AB = a$, $AA_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} a$, $AD = 2 - a$, didžiausią tūrį^{III} turi gretasienis, kurio briauna^{IV} $AB = \frac{4}{3}$.

(3 taškai)

4. Apskaičiuokite šio gretasienio tūrį.

(1 taškas)

Čia rašo vertintojai		
I	II	III

Taškų suma			
------------	--	--	--

^I stačiakampis gretasienis – prostopadłościan – прямоугольный параллелепипед

^{II} lygiagretus – równoległy – параллельный

^{III} tūris – objętość – объем

^{IV} briauna – krawędź – ребро

JUODRAŠTIS

19. Duota funkcija $f(x) = \sqrt{2x}$, kai $x \geq 0$.

1. Parodykite, kad jos atvirkštinė^I funkcija $g(x) = \frac{1}{2}x^2$, kai $x \geq 0$.

(1 taškas)

2. Raskite funkcijų $f(x)$ ir $g(x)$ grafikų susikirtimo taškų abscises^{II}.

(2 taškai)

3. Apskaičiuokite plotą figūros, kurią riboja funkcijų $f(x)$ ir $g(x)$ grafikai.

(3 taškai)

Čia rašo vertintojai		
I	II	III
—	—	—
—	—	—
—	—	—

Taškų suma			
-------------------	--	--	--

JUODRAŠTIS

^I atvirkštinė – odwrotna – обратная

^{II} abscisė – odcięta – абсцисса

20. Iš natūraliųjų skaičių sudaromos grupės (1), (2, 3, 4), (5, 6, 7, 8, 9), (10, 11, 12, 13, 14, 15, 16), ..., kurių kiekviena baigiasi eilės numerio kvadratu. Apskaičiuokite m – tosios grupės narių sumą.

(4 taškai)

Čia rašo vertintojai		
I	II	III

JUODRAŠTIS