



MATEMATIKA

Valstybinio brandos egzamino užduotis

Pagrindinė sesija

2014 m. birželio 5 d.

Trukmė – 3 val. (180 min.)

MATEMATIKOS FORMULĖS

Greitosios daugybos formulės: $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$, $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$.

Aritmetinė progresija: $a_n = a_1 + d(n-1)$; $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$.

Geometrinė progresija: $b_n = b_1 q^{n-1}$; $S_n = \frac{b_1 - qb_n}{1-q} = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$.

Nykstamosios geometrinės progresijos narių suma: $S = \frac{b_1}{1-q}$.

Sudėtinių procentų formulė: $S_n = S \left(1 + \frac{P}{100}\right)^n$; čia S – pradinis dydis, P – palūkanų norma, n – laikotarpių skaičius.

Trikampis: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$,

$S = \frac{1}{2}ab \sin C = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = rp = \frac{abc}{4R}$;

čia a, b, c – trikampio kraštinių ilgiai, A, B, C – prieš jas esančių kampų didumai, p – pusperimetris, r ir R – įbrėžtinio ir apibrėžtinio apskritimų spindulių ilgiai, S – plotas.

Skritulio išpjova: $S = \frac{\pi R^2}{360^\circ} \cdot \alpha$, $l = \frac{2\pi R}{360^\circ} \cdot \alpha$;

čia α – centrinio kampo didumas laipsniais, S – išpjovos plotas, l – išpjovos lanko ilgis, R – apskritimo spindulio ilgis.

Kūgis: $S_{\text{šon. pav.}} = \pi Rl$, $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$.

Rutulys: $S = 4\pi R^2$, $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Nupjautinis kūgis: $S_{\text{šon. pav.}} = \pi(R+r)l$, $V = \frac{1}{3}\pi H(R^2 + Rr + r^2)$;

čia R ir r – kūgio pagrindų spindulių ilgiai, V – tūris, H – aukštinės ilgis, l – sudaromosios ilgis.

Nupjautinės piramidės tūris: $V = \frac{1}{3}H(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)$;

čia S_1, S_2 – pagrindų plotai, H – aukštinės ilgis.

Rutulio nuopjova: $S = 2\pi RH$, $V = \frac{1}{3}\pi H^2(3R - H)$; čia R – rutulio spindulio ilgis, H – nuopjovos aukštinės ilgis.

Erdvės vektoriaus ilgis: $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; čia $\vec{a} = \{x, y, z\}$.

Vektorių skaliarinė sandauga: $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha$;

čia α – kampas tarp vektorių $\vec{a}\{x_1, y_1, z_1\}$ ir $\vec{b}\{x_2, y_2, z_2\}$.

Trigonometrinių funkcijų sąryšiai:

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \quad 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}, \quad 2 \sin^2 \alpha = 1 - \cos 2\alpha, \quad 2 \cos^2 \alpha = 1 + \cos 2\alpha,$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta, \quad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta, \quad \operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}.$$

Trigonometrinių funkcijų reikšmių lentelė:

α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–

Trigonometrinės lygtys:

$$\begin{cases} \sin x = a, \\ x = (-1)^k \arcsin a + \pi k; \text{ čia } k \in \mathbf{Z}, -1 \leq a \leq 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos x = a, \\ x = \pm \arccos a + 2\pi k; \text{ čia } k \in \mathbf{Z}, -1 \leq a \leq 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x = a, \\ x = \operatorname{arctg} a + \pi k; \text{ čia } k \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Išvestinių skaičiavimo taisyklės:

$$(cu)' = cu', \quad (u \pm v)' = u' \pm v', \quad (uv)' = u'v + uv', \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2};$$

čia $u = u(x)$ ir $v = v(x)$ – diferencijuojamosios funkcijos, c – konstanta.

$$\textbf{Funkcijų išvestinės: } (a^x)' = a^x \ln a, \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a};$$

sudėtinės funkcijos $h(x) = g(f(x))$ išvestinė $h'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$.

Funkcijos grafiko liestinės taške $(x_0, f(x_0))$ lygtis: $y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$.

$$\textbf{Pagrindinės logaritmų savybės: } \log_a(xy) = \log_a x + \log_a y, \quad \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y,$$

$$\log_a x^k = k \log_a x, \quad \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

$$\textbf{Derinių skaičius: } C_n^k = C_n^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \quad \textbf{Gretinių skaičius: } A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Tikimybių teorija: atsitiktinio dydžio X matematinė viltis $EX = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n$,

dispersija $DX = (x_1 - EX)^2 p_1 + (x_2 - EX)^2 p_2 + \dots + (x_n - EX)^2 p_n$.

I dalis

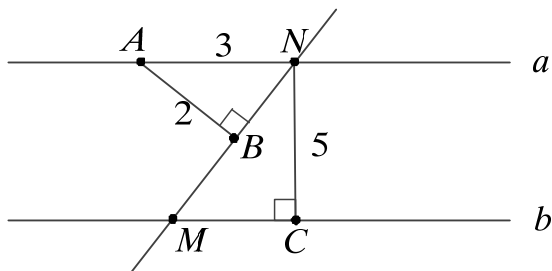
Kiekvienas šios dalies uždavinys (01–12) turi tik vieną teisingą atsakymą, vertinamą **1 tašku**. Pasirinkite, jūsų nuomone, teisingą atsakymą ir pažymėkite jį atsakymų lape kryželiu ☒.

- 01.** Kokia turi būti m reikšmė, kad taškas $A(0; 1)$ priklausytų funkcijos $f(x) = (m - 2)x + m - 3$ grafikui?

A $m = 1$ B $m = 2$ C $m = 3$ D $m = 4$

Juodraštis

- 02.** Dvi lygiagrečias¹ tieses a ir b kerta tiesė MN . Atkarpos² $AN = 3$, $AB = 2$ ir $NC = 5$.



Atkarpos MN ilgis:

A 6,5

B 7

C 7,5

D 8

Juodraštis

¹ lygiagrečios – równoległe – параллельные

² atkarpos – odcinki – отрезки

03. Lentelėje pateikti duomenys¹ apie vienos klasės mokinių miego trukmę.

Miego valandų skaičius	6	7	8	9	10	11
Mokinių skaičius	3	5	7	11	2	1

Šios imties² mediana lygi:

A 12

B 9

C 8,5

D 8

Juodraštis

04. Skaičių tiesėje pažymėti skaičiai a ir b .



Kuris iš žemiau užrašytų teiginių³ yra teisingas?

A $1 < \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

B $\frac{1}{a} < 1 < \frac{1}{b}$

C $\frac{1}{a} < \frac{1}{b} < 1$

D $\frac{1}{b} < \frac{1}{a} < 1$

Juodraštis

¹ duomenys – dane – данные

² imties – próby – выборки

³ teiginys – zdanie – утверждение

05. Jei $x = \sqrt{2}$, tai reiškinių¹ $\frac{3}{2-x}$ reikšmė² lygi:

A $\frac{6-3\sqrt{2}}{2}$

B $\frac{6-\sqrt{2}}{2}$

C $\frac{6+\sqrt{2}}{2}$

D $\frac{6+3\sqrt{2}}{2}$

Juodraštis

06. Tikimybė³, kad kilus gaisrui suveiks pirmoji gaisro gesinimo sistema, yra 0,9, o kad suveiks antroji – 0,97. Gaisro gesinimo sistemos veikia nepriklausomai⁴. Kokia yra tikimybė, kad kilus gaisrui suveiks bent viena iš sistemų?

A 0,997

B 0,97

C 0,9

D 0,873

Juodraštis

07. Kubo įstrižainė⁵ lygi $\sqrt{21}$. Koks yra kubo viso paviršiaus plotas⁶?

A $6\sqrt{7}$

B 21

C $8\sqrt{7}$

D 42

Juodraštis

¹ reiškinių – wyrażenia – выражения

² reikšmė – wartość – значение

³ tikimybė – prawdopodobieństwo – вероятность

⁴ nepriklausomai – niezależnie – независимо

⁵ įstrižainė – przekątna – диагональ

⁶ paviršiaus plotas – pole powierzchni – площадь поверхности

08. Kiek sprendinių turi lygtis $(2x + 5)\sqrt{x + 2} = 0$?

- A** nei vieno **B** tik vieną **C** tik du **D** be galo daug

Juodraštis

09. Senovės Babilono gyventojai žinojo skaičiaus π reikšmę kaip $3\frac{1}{8}$. Keliais procentais apytikslė¹ π reikšmė 3,142 didesnė už $3\frac{1}{8}$?

- A** 0,545 proc. **B** 0,544 proc. **C** 0,543 proc. **D** 0,542 proc.

Juodraštis

10. Jei $\frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\cos \alpha} = 2$, tai $\operatorname{tg} \alpha$ lygus:

- A** $\frac{1}{3}$ **B** $\frac{1}{2}$ **C** 2 **D** 3

Juodraštis

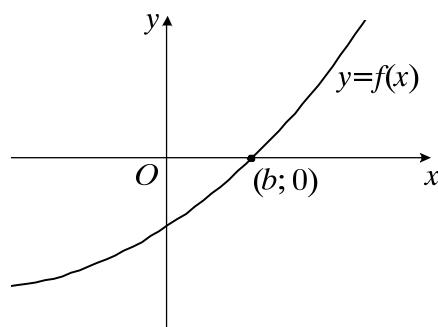
¹ apytikslė – przybliżona – приблизительное

11. Funkcijos $f(x) = \sin(2x + 5)$ išvestinė¹ yra:

- A** $\cos(2x + 5)$ **B** $2 \cos(2x + 5)$ **C** $2 \cos(2x) + 5$ **D** $-2 \cos(2x + 5)$

Juodraštis

12. Paveiksle pavaizduotas funkcijos $f(x) = e^{x-2} - 2$ grafikas. Šios funkcijos grafikas kerta² Ox ašį taške $(b; 0)$. Nustatykite b reikšmę.



- A** $\ln 2$ **B** $1 + \ln 2$ **C** $2 + \ln 2$ **D** $3 + \ln 2$

Juodraštis

¹ išvestinė – pochodna – производная

² kerta – przecina – пересекает

II dalis

Kiekvieno šios dalies uždavinio (13–22) teisingas atsakymas vertinamas **2 taškais** (kitu atveju vertinama 0 taškų). Išsprendę uždavinius, gautus atsakymus įrašykite į atsakymų lapą.

- 13.** Dviejų dviratininkų judėjimas apibūdinamas dėsniais, išreikšiamais formulėmis $s_1(t) = t^2 + 10t$ ir $s_2(t) = 2t^2 + 7t + 2$. (s_1 ir s_2 – kelias kilometrais, t – laikas valandomis). Po kiek laiko dviratininkų greičiai bus lygūs.

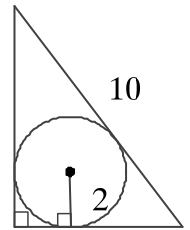
Juodraštis

- 14.** Apskaičiuokite sumą $2 + 5 + 8 + \dots + 251$.

Juodraštis

15. Stačiojo¹ trikampio įžambinė² lygi 10 cm, o į šį trikampį įbrėžto apskritimo spindulys lygus 2 cm. Apskaičiuokite trikampio plotą.

Juodraštis



16. Duoti taškai $A(-1; -2; 4)$, $B(-4; -2; 0)$, $C(3; -2; 1)$. Apskaičiuokite kampo tarp vektorių \vec{BA} ir \vec{BC} didumą³.

Juodraštis

17. Standartinis šešiasienis lošimo kauliukas⁴ metamas du kartus. Kokia tikimybė, kad antrą kartą atsivers daugiau akučių negu pirmą kartą?

Juodraštis

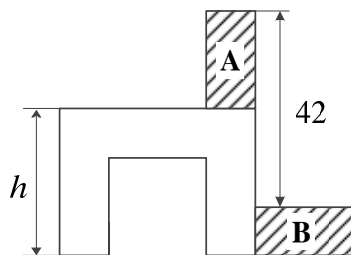
¹ stačiojo – prostego – прямоугольного

² įžambinė – przeciwprostokątna – гипотенуза

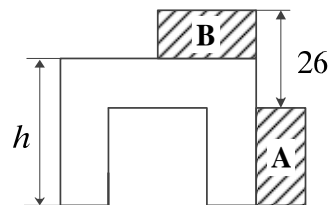
³ didumą – miarę – величину

⁴ standartinis šešiasienis lošimo kauliukas – standardowa sześcienna kostka do gry – стандартная шестигранная игральная кость

18. Pirmajame paveiksle pavaizduota kėdutė ir du vienodi¹ stačiakampio gretasienio² formos blokeliai. Antrajame paveiksle pavaizduota ta pati kėdutė, o blokeliai sukeisti³ vietomis. Naudodamiesi pateiktais duomenimis, apskaičiuokite kėdutės aukštį⁴ h .



1 pav.



2 pav.

Juodraštis

19. Išspręskite nelygybę⁵

$$2^{5-x^2} \leq 16.$$

Juodraštis

¹ vienodi – jednakowe – одинаковые

² stačiakampio gretasienio – prostopadościanu – прямоугольного параллелепипеда

³ sukeisti – zamienić – заменить

⁴ aukštį – wysokość – высоту

⁵ nelygybė – nierówność – неравенство

20. Apskaičiuokite funkcijos $f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 6x - 2$ kritinių taškų sumą¹.

Juodraštis

21. Automobilio greitis 25 proc. didesnis už motociklo greitį. Apskaičiuokite motociklo greitį, jei automobilio greitis yra 85 km/h.

Juodraštis

22. Metalinį 2 m ilgio strypą sulenkė tiksliai per vidurį² taip, kad tarp strypo dalių susidarytų 120° kampas. Koks atstumas tarp sulenkto strypo galų? Atsakymą **suapvalinkite iki centimetrų**.

Pastaba. $\sqrt{3} \approx 1,73205$.



Juodraštis

¹ kritinių taškų sumą – sumę punktów krytycznych – сумму критических точек

² strypą sulenkė tiksliai per vidurį – pręt schylono dokładnie w śródku – стержень согнули точно в середине

III dalis

Išspręskite 23–30 uždavinius. Sprendimus bei atsakymus perrašykite į atsakymų lapą.

23. Duota funkcija $f(x) = \sin x - \cos(2x)$.

23.1. Apskaičiuokite $f(x)$ reikšmę, kai $x = \frac{\pi}{2}$.

(1 taškas)

Juodraštis

23.2. Parodykite, kad $f(x) = (\sin x + 1)(2 \sin x - 1)$.

(2 taškai)

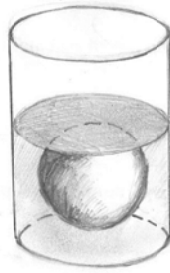
Juodraštis

23.3. Išspręskite lygtį $f(x) = 0$.

(2 taškai)

Juodraštis

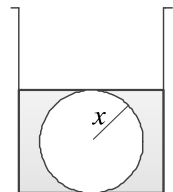
24. Į ritinio¹ formos indą, kurio pagrindo spindulys 6, įdėtas metalinis rutuliukas². Į indą įpilta tiek vandens, kad jo paviršius liečia rutuliuką.



- 24.1. Pažymėję rutuliuko spindulio ilgį x , įrodykite, kad taip įpildo³ į indą vandens tūris⁴ yra $V(x) = 72\pi x - \frac{4}{3}\pi x^3$, $0 < x < 6$.

(2 taškai)

Juodraštis



- 24.2. Koks turi būti rutuliuko spindulio ilgis x , kad taip įpildo į indą vandens tūris būtų didžiausias?

(2 taškai)

Juodraštis

¹ ritinio – walca – цилиндра

² rutuliukas – kulka – шарик

³ įpildo – wlanej – влитой

⁴ tūris – objętość – объём

25. Duota funkcija

$$f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 7x + 10).$$

25.1. Nustatykite funkcijos $f(x)$ apibrėžimo sritį¹.

(2 taškai)

Juodraštis

25.2. Raskite visas x reikšmes, su kuriomis funkcijos $f(x)$ reikšmės yra ne mažesnės² už -2 .

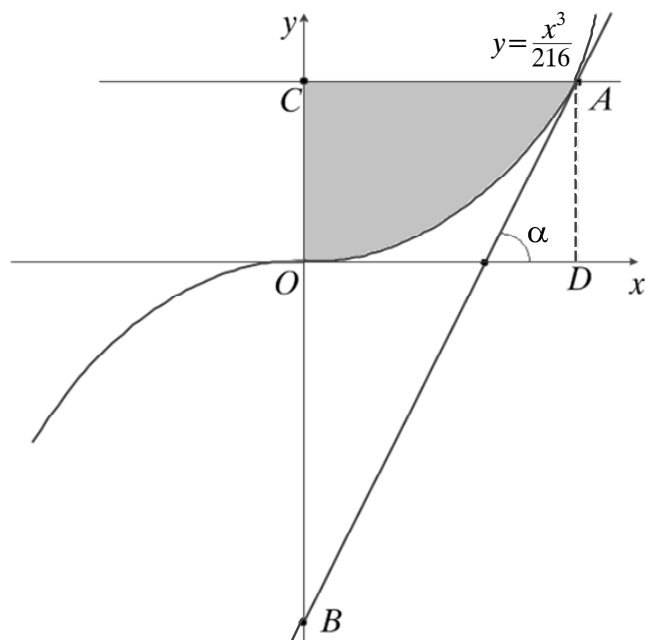
(3 taškai)

Juodraštis

¹ apibrėžimo sritis – dziedzina – область определения

² ne mažesnės – nie mniejsze – не меньшее

26. Paveiksle pavaizduotas funkcijos $f(x) = \frac{x^3}{216}$ grafikas, kurio liestinė¹ taške A su Ox ašimi sudaro kampą α . Žinoma, kad $\operatorname{tg} \alpha = 2$.



- 26.1. Raskite taško A koordinates.

(2 taškai)

Juodraštis

- 26.2. Parodykite, kad liestinės AB lygtis yra $y = 2x - 16$.

(1 taškas)

Juodraštis

¹ liestinė – styczna – касательная

26.3. Raskite liestinės susikirtimo¹ su Oy ašimi taško B koordinates.

(1 taškas)

Juodraštis

26.4. Figūrą ABO riboja funkcijos $y = \frac{x^3}{216}$ grafikas, liestinė AB ir Oy ašis. Figūrą AOC riboja funkcijos $y = \frac{x^3}{216}$ grafikas, Oy ašis ir tiesė AC , kuri yra lygiagreti Ox ašiai. Įrodykite, kad figūros ABO plotas² yra lygus figūros AOC plotui.

(3 taškai)

Juodraštis

¹ susikirtimo – przecięcia – пересения

² plotas – pole – площадь

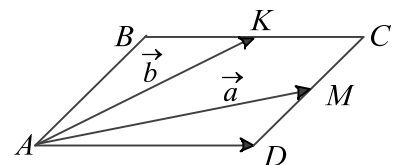
27. Duoti keturi teigiami skaičiai. Pirmas, antras ir trečias skaičiai sudaro aritmetinę progresiją¹, o šių skaičių suma lygi 12. Antras, trečias ir ketvirtas skaičiai sudaro geometrinę progresiją², jų suma lygi 19. Raskite šiuos keturis skaičius.

(4 taškai)

Juodraštis

28. Taškai K ir M yra lygiagretainio³ $ABCD$ kraštinių BC ir CD vidurio⁴ taškai. Vektorių \vec{AD} išreikškite vektoriais $\vec{AM} = \vec{a}$ ir $\vec{AK} = \vec{b}$.

(4 taškai)



Juodraštis

¹ aritmetinę progresiją – ciąg arytmetyczny – арифметическую прогрессию

² geometrinę progresiją – ciąg geometryczny – геометрическую прогрессию

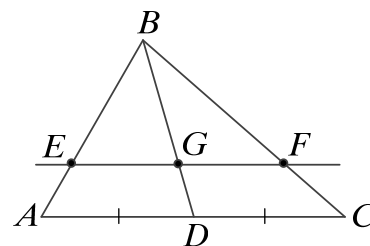
³ lygiagretainio – równoległoboku – параллелограмма

⁴ vidurio – środki – середины

29. Tiesė, lygiagreti trikampio ABC pagrindui AC , kerta kraštines AB , BC ir pusiaukraštinę¹ BD atitinkamai taškuose E , F ir G . Įrodykite, kad G yra atkarpos EF vidurio taškas².

(3 taškai)

Juodraštis



¹ pusiaukraštinė – środkową – медиану

² vidurio taškas – środek – середина

- 30.** Mokslo metų gale mokiniai paprastai organizuoja išvykas. Vieni klasės mokiniai norėtų išvykos į Druskininkus, kiti – į Birštoną. Ginčą išspręsti padėjo klasės auklėtojas – matematikos mokytojas, pasiūlęs tokį pasirinkimo būdą. Jis atnešė dėžę, kurioje yra 11 vienodų rutulių, sunumeruotų skaičiais 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, ir paprašė šešių mokinių atsitiktinai¹ ištraukti po rutulį iš dėžės ir padėti ant stalo. Jei ištrauktų rutulių numerių suma yra nelyginis skaičius², tai vykstama į Druskininkus, o jei lyginis – į Birštoną. Kokia tikimybė, kad klasė važiuos į Druskininkus?

(5 taškai)

Juodraštis

¹ atsitiktinai – losowo – случайно

² nelyginis skaičius – liczba nieparzysta – нечётное число