NACIONALINIS
EGZAMINŲ CENTRAS

2015

MATEMATIKA

Valstybinio brandos egzamino užduotis

Pakartotinė sesija

2015 m. birželio 29 d. **Trukmė – 3 val. (180 min.)**

NURODYMAI

1. Gavę užduoties sąsiuvinį ir atsakymų lapą pasitikrinkite, ar juose nėra tuščių lapų arba kito aiškiai matomo spausdinimo broko. Pastebėję praneškite egzamino vykdytojui.
2. Įsitikinkite, kad atsakymų lapas pažymėtas lipduku, kurio numeris sutampa su jūsų eilės numeriu.
3. Bendrojo kurso uždaviniai arba jų dalys pažymėti **B➔**.
4. Stenkitės išspręsti kuo daugiau uždavinių, neatsižvelgdami į tai, pagal kurio kurso (bendrojo ar išplėstinio) programą dalyko mokėtės mokykloje. Neišsprendę kurio nors uždavinio, nenusiminkite ir stenkitės išspręsti kitus.
5. Uždavinių sprendimus ir (ar) atsakymus pirmiausia galite rašyti užduoties sąsiuvinyje, kuriame yra palikta vietos juodraščiui. Galite naudotis rašymo priemonėmis (pieštuku, tamsiai mėlynai rašančiu rašikliu), trintuku, braižybos įrankiais, skaičiuotuvu be tekstinės atminties. Jei neabejojate dėl atsakymo, iš karto rašykite atsakymų lape. **Bus surenkamas ir vertintojams pateikiamas tik atsakymų lapas!**
6. Atsakymų lape rašykite TIK tamsiai mėlynai rašančiu rašikliu. Saugokite atsakymų lapą (neįplėškite ir nesulamdykite), nesinaudokite trintuku ir koregavimo priemonėmis. Sugadintuose lapuose įrašyti atsakymai nebus vertinami.
7. Pasirinktus **I dalies** uždavinių atsakymus atsakymų lape pažymėkite kryželiu ☒ (žymėkite tik vieną atsakymo variantą). Jei pažymėsite neaiškiai arba daugiau kaip vieną atsakymo variantą, tas uždavinys bus vertinamas 0 taškų. Suklydę atsakymą galite taisyti atsakymų lape nurodytoje vietoje.
8. **II dalies** uždavinių atsakymus įrašykite tam skirtoje atsakymų lapo vietoje.
9. Atsakymų lape skirtoje vietoje įrašykite **III dalies** uždavinių sprendimus ir atsakymus. Už ribų parašyti sprendimai ir atsakymai nebus vertinami.
10. Atsakymų lape neturi būti užrašų ar kitokių ženklų, kurie leistų identifikuoti darbo autorių.

Linkime sėkmės!

MATEMATIKOS FORMULĖS

Greitosios daugybos formulės: $(a\pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3,\ a^3 \pm b^3 = (a\pm b)(a^2 \mp ab + b^2).$

Aritmetinė progresija: $a_n = a_1 + d(n-1),\ S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2}\cdot n.$

Geometrinė progresija: $b_n = b_1 q^{n-1},\ S_n = \dfrac{b_1 - qb_n}{1-q} = \dfrac{b_1(1-q^n)}{1-q}.$

Nykstamoji geometrinė progresija: $S = \dfrac{b_1}{1-q}.$

Sudėtinių procentų formulė: $S_n = S\left(1 \pm \dfrac{p}{100}\right)^n$; čia S – pradinis dydis, p – procentai, n – kartai.

Trikampis: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A,\ \dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R,$

$S = \dfrac{1}{2}ab\sin C = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = rp = \dfrac{abc}{4R};$

čia a, b, c – trikampio kraštinių ilgiai, A, B, C – prieš jas esančių kampų didumai,
p – pusperimetris, r ir R – įbrėžtinio ir apibrėžtinio apskritimų spindulių ilgiai, S – trikampio plotas.

Skritulys, apskritimas: $S = \dfrac{\pi R^2}{360°}\cdot\alpha,\ l = \dfrac{2\pi R}{360°}\cdot\alpha$; čia α – centrinio kampo didumas laipsniais, S – išpjovos plotas, l – išpjovos lanko ilgis, R – spindulio ilgis.

Kūgis: $S_{šon.\,pav.} = \pi Rl,\ V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 H$; čia R – pagrindo spindulio ilgis, l – sudaromosios ilgis, H – aukštinės ilgis.

Rutulys: $S = 4\pi R^2,\ V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$; čia R – spindulio ilgis.

Nupjautinis kūgis: $S_{šon.\,pav.} = \pi(R+r)l,\ V = \dfrac{1}{3}\pi H(R^2 + Rr + r^2)$; čia R ir r – pagrindų spindulių ilgiai, l – sudaromosios ilgis, H – aukštinės ilgis.

Nupjautinės piramidės tūris: $V = \dfrac{1}{3}H(S_1 + \sqrt{S_1S_2} + S_2)$; čia S_1, S_2 – pagrindų plotai, H – aukštinės ilgis.

Rutulio nuopjova: $S = 2\pi RH,\ V = \dfrac{1}{3}\pi H^2(3R - H)$; čia R – rutulio spindulio ilgis, H – nuopjovos aukštinės ilgis.

Erdvės vektoriaus ilgis: $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; čia $\vec{a} = (x;\ y;\ z)$.

Vektorių skaliarinė sandauga: $\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\alpha$; čia α – kampo tarp vektorių $\vec{a} = (x_1;\ y_1;\ z_1)$ ir $\vec{b} = (x_2;\ y_2;\ z_2)$ didumas.

Trigonometrinių funkcijų sąryšiai:

$1+\mathrm{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$, $1+\mathrm{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}$, $2\sin^2\alpha=1-\cos 2\alpha$, $2\cos^2\alpha=1+\cos 2\alpha$,

$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$, $\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$, $\mathrm{tg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\mathrm{tg}\alpha\pm\mathrm{tg}\beta}{1\mp\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta}$.

Trigonometrinių funkcijų reikšmių lentelė:

α laipsniais	0°	30°	45°	60°	90°
α radianais	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tg α	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–

Trigonometrinės lygtys:

$$\left[\begin{array}{l}\sin x=a,\\ x=(-1)^k\arcsin a+\pi k;\ \text{čia}\ \ k\in\boldsymbol{Z},\ -1\le a\le 1;\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\cos x=a,\\ x=\pm\arccos a+2\pi k;\ \text{čia}\ \ k\in\boldsymbol{Z},\ -1\le a\le 1;\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\mathrm{tg}\, x=a,\\ x=\mathrm{arctg}\, a+\pi k;\ \text{čia}\ \ k\in\boldsymbol{Z},\ a\in\boldsymbol{R}.\end{array}\right.$$

Išvestinių skaičiavimo taisyklės:

$(cu)'=cu'$, $(u\pm v)'=u'\pm v'$, $(uv)'=u'v+uv'$, $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$;

čia u ir v – diferencijuojamosios funkcijos, c – konstanta.

Funkcijų išvestinės: $(a^x)'=a^x\ln a$, $(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$.

Sudėtinės funkcijos $h(x)=g(f(x))$ **išvestinė:** $h'(x)=g'(f(x))\cdot f'(x)$.

Funkcijos grafiko liestinės taške $(x_0;\ f(x_0))$ **lygtis:** $y=f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)$.

Pagrindinės logaritmų savybės: $\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y$, $\log_a\left(\frac{x}{y}\right)=\log_a x-\log_a y$, $\log_a x^k=k\log_a x$,

$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$.

Derinių skaičius: $C_n^k=C_n^{n-k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Gretinių skaičius: $A_n^k=\frac{n!}{(n-k)!}$.

Tikimybių teorija: atsitiktinio dydžio X matematinė viltis $\mathbf{E}X=x_1p_1+x_2p_2+\ ...\ +x_np_n$,

dispersija $\mathbf{D}X=(x_1-\mathbf{E}X)^2p_1+(x_2-\mathbf{E}X)^2p_2+\ ...\ +(x_n-\mathbf{E}X)^2p_n$.

I dalis

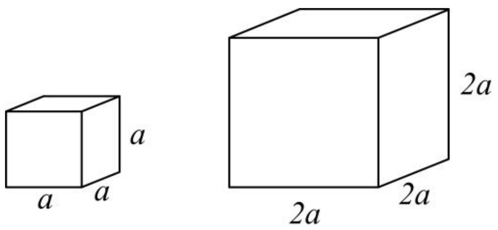
Kiekvienas šios dalies uždavinys (01–10) turi tik vieną teisingą atsakymą, vertinamą ***1 tašku****. Pasirinkite, jūsų nuomone, teisingą atsakymą ir pažymėkite jį atsakymų lape kryželiu* ☒ .

B➔01. Kai $x \neq -3$ ir $x \neq 3$, tai $\dfrac{x-3}{x^2-9} =$

A $x+3$ **B** $x-3$ **C** $\dfrac{1}{x+3}$ **D** $\dfrac{1}{x-3}$

Juodraštis

B➔02. Medinio kubelio briauna[1] lygi a. Visam jo paviršiui[2] nudažyti reikia 8 g dažų. Kiek gramų dažų reikės kubelio, kurio briauna lygi $2a$, visam paviršiui nudažyti?



A 16 **B** 32 **C** 48 **D** 64

Juodraštis

B➔03. Dėžėje yra 4 geltoni, 3 žali ir 1 mėlynas rutuliukas. Rita atsitiktinai[3] ištraukė du rutuliukus ir jų negrąžino į dėžę. Jei Rita atsitiktinai trauktų dar vieną rutuliuką, tai tikimybė[4], kad iš dėžės ištrauktų žalią, būtų lygi $\dfrac{1}{6}$. Kokių spalvų du pirmuosius rutuliukus Rita ištraukė iš dėžės?

A Abu geltonus.

B Vieną mėlyną ir vieną žalią.

C Abu žalius.

D Vieną mėlyną ir vieną geltoną.

Juodraštis

[1] briauna – krawędź – ребро
[2] paviršius – powierzchnia – поверхность
[3] atsitiktinai – losowo – случайно
[4] tikimybė – prawdopodobieństwo – вероятность

B➔04. Reiškinio[1] $\log_3(2-x)$ apibrėžimo sritis[2] yra:

A $(-\infty; 2)$ **B** $(-\infty; 2]$ **C** $(2; +\infty)$ **D** $[2; +\infty)$

Juodraštis

B➔05. Televizorius kainavo 900 eurų. Prieš Kalėdas jo kaina sumažinta 20 %. Po švenčių naujoji televizoriaus kaina vėl sumažinta 20 %. Kokia televizoriaus kaina buvo po antrojo kainos sumažinimo?

A 540 **B** 576 **C** 600 **D** 625

Juodraštis

B➔06. Iš skaitmenų 1, 2, 3, 4 ir 5 sudaromi triženkliai nelyginiai skaičiai[3], kurių visi skaitmenys yra skirtingi. Kiek iš viso galima sudaryti tokių skaičių?

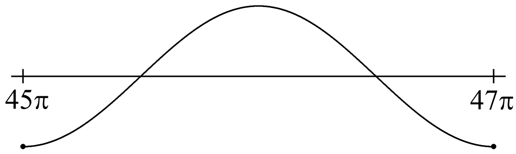
A 24 **B** 36 **C** 60 **D** 75

Juodraštis

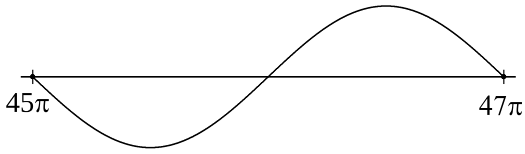
[1] reiškinio – wyrażenia – выражения
[2] apibrėžimo sritis – dziedzina – область определения
[3] triženkliai nelyginiai skaičiai – nieparzyste liczby trzycyfrowe – трёхзначные нечётные числа

07. Kuris iš pateiktų eskizų yra funkcijos $y = \sin(-x)$ grafiko eskizas intervale $x \in [45\pi; 47\pi]$?

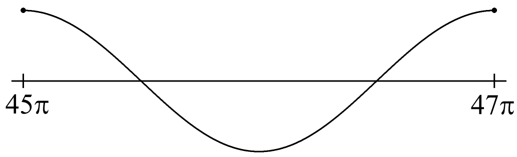
A



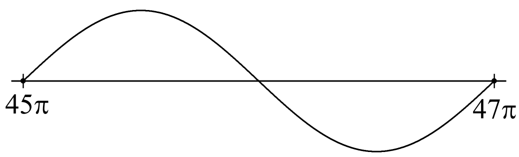
B



C

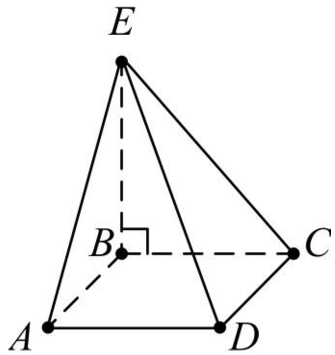


D



Juodraštis

08. Atkarpa[1] EB statmena kvadrato $ABCD$ plokštumai (žr. pav.). Koks yra $\angle EAD$?



A Bukasis[2].

B Statusis[3].

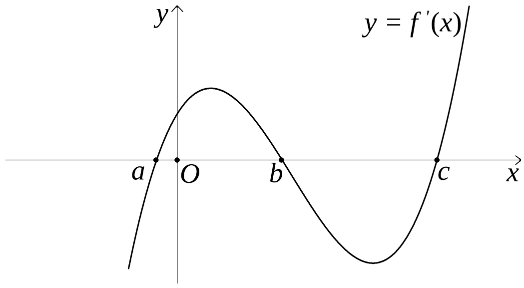
C Smailusis[4].

D Negalima nustatyti.

Juodraštis

[1] atkarpa – odcinek – отрезок
[2] bukasis – rozwarty – тупой
[3] statusis – prostokątny – прямоугольный
[4] smailusis – ostry – острый

09. Funkcijos $f(x)$ **išvestinės**[1] grafikas kerta Ox ašį taškuose a, b ir c. Paveiksle pavaizduotas funkcijos $f(x)$ išvestinės grafiko eskizas. Kuris teiginys apie funkciją $f(x)$ yra teisingas?



A c yra funkcijos $f(x)$ maksimumo taškas.

B Funkcija $f(x)$ turi tik du ekstremumo taškus.

C Funkcijos $f(x)$ minimumo taškas yra intervale $(b; c)$.

D a yra funkcijos $f(x)$ minimumo taškas.

Juodraštis

10. Nurodykite funkcijos $f(x) = 3^{1+\cos^2 x}$ **reikšmių** sritį[2].

A $\left[\frac{1}{3}; 3\right]$ **B** $[1; 3]$ **C** $[1; 9]$ **D** $[3; 9]$

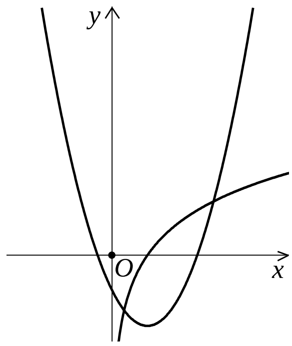
Juodraštis

[1] išvestinės – pochodnej – производной
[2] reikšmių sritį – dziedzinę wartości, zbiór wartości – область значений

II dalis

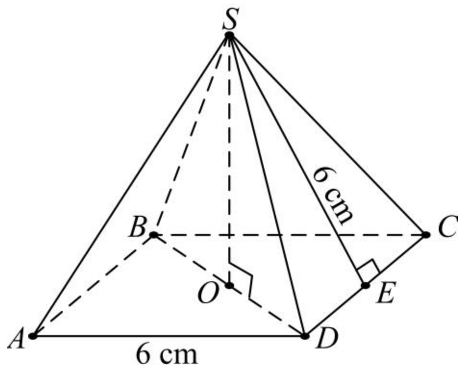
Kiekvieno šios dalies uždavinio (11–18) ar jo dalies teisingas atsakymas vertinamas ***1 tašku*** *(kitu atveju vertinama 0 taškų). Išspręskite uždavinius ir gautus atsakymus įrašykite į atsakymų lapą.*

B➔11. Raskite lygties $x^2-2x-1=\log_2 x$ sprendinių skaičių. Remkitės pavaizduotais funkcijų $y=x^2-2x-1$ ir $y=\log_2 x$ grafikų eskizais.



Juodraštis

12. Taisyklingosios keturkampės piramidės $SABCD$ pagrindo kraštinės ilgis 6 cm, šoninės sienos aukštinės[1] (apotemos) SE ilgis 6 cm (žr. pav.).



B➔12.1. Apskaičiuokite piramidės $SABCD$ šoninio paviršiaus plotą.

Juodraštis

12.2. Apskaičiuokite dvisienio kampo[2], kurį sudaro pagrindas $ABCD$ ir siena SCD, didumą.

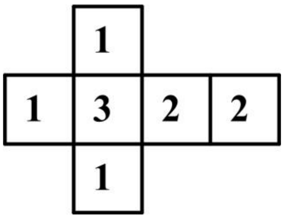
Juodraštis

12.3. Išreikškite vektorių $\overrightarrow{SO}$ vektoriais $\vec{a}=\overrightarrow{BO}$ ir $\vec{b}=\overrightarrow{SD}$.

Juodraštis

[1] šoninės sienos aukštinės – wysokości ściany bocznej – высоты боковой грани
[2] dvisienio kampo – dwuściennego kąta – двугранного угла

13. Paveiksle pavaizduota šešiasienio simetriško lošimo kauliuko[1] išklotinė[2].



B➔13.1. Apskaičiuokite tikimybę, kad, atsitiktinai metus šį kauliuką vieną kartą, atvirs skaičius 2.

Juodraštis

13.2. Kauliukas atsitiktinai metamas du kartus. Apskaičiuokite tikimybę, kad pirmą kartą atvirs lyginis[3] skaičius, o antrą kartą – nelyginis.

Juodraštis

B➔14. Iš 30 dvyliktos klasės mokinių matematikos egzaminą pasirinko laikyti 25 mokiniai, o istorijos – 22 mokiniai. Visi klasės mokiniai pasirinko laikyti bent vieną šių egzaminų. Kiek mokinių pasirinko matematikos egzaminą, bet nepasirinko istorijos egzamino?

Juodraštis

[1] šešiasienio simetriško lošimo kauliuko – sześciościennej symetrycznej kostki do gry – шестигранной симметричной игральной кости
[2] išklotinė – rozwinięcie – развёртка
[3] lyginis – parzysta – чётное

B➔15. Karlsonas vienas suvalgo didelį tortą per 30 minučių, freken Bok tokį patį tortą suvalgo per 45 minutes, o Mažylis – per 90 minučių. Per kiek minučių tokį tortą Karlsonas, freken Bok ir Mažylis suvalgytų kartu?

Juodraštis

16. Per funkcijos $y = f(x)$ grafiko tašką $\left(\sqrt{3};\, 2\right)$ nubrėžta liestinė[1]. Žinoma, kad $f'\left(\sqrt{3}\right) = \sqrt{3}$.

16.1. Raskite kampo, kurį sudaro ši liestinė su Ox ašimi, didumą.

Juodraštis

16.2. Parašykite šios liestinės lygtį.

Juodraštis

[1] liestinė – styczna – касательная

17. Apskaičiuokite $\int_0^4 (f(x)+2x)\mathrm{d}x$, kai $\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x = 12$.

Juodraštis

18. Pateikta mokinių kontrolinio darbo pažymių dažnių lentelė[1].

Pažymys	4	5	6	7	8	9	10
Mokinių skaičius	1	3	n	3	3	2	1

Šių pažymių mediana lygi 7. Raskite didžiausią galimą n reikšmę.

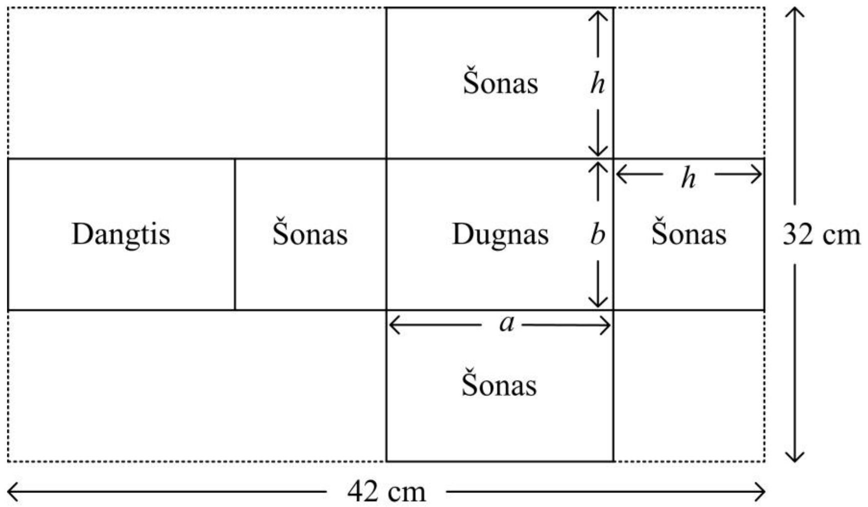
Juodraštis

[1] dažnių lentelė – tabela częstości – таблица частот

III dalis

Išspręskite 19–26 uždavinius. Sprendimus ir atsakymus perrašykite į atsakymų lapą.

B➔19. Iš stačiakampio kartono lapo, kurio matmenys 42 cm ir 32 cm, gaminama stačiakampio gretasienio[1] formos h cm aukščio dėžutė su dangčiu (dangtis ir dugnas yra vienodi). Paveiksle pavaizduota šios dėžutės išklotinė.



19.1. Dėžutės dugno plotis b lygus $32-2h.$ Išreikškite dėžutės dugno ilgį a per $h.$

(1 taškas)

Juodraštis

19.2. Pagrįskite, kad šios dėžutės tūris[2] $V(h)=2h^3-74h^2+672h,\ \ 0\le h\le 16.$

(1 taškas)

Juodraštis

[1] stačiakampio gretasienio – prostopadłościanu – прямоугольного параллелепипеда
[2] tūris – objętość – объём

19.3. Nustatykite, su kuria h reikšme šios dėžutės tūris yra didžiausias.

(3 taškai)

Juodraštis

19.4. Apskaičiuokite dėžutės tūrį, jeigu jos dugnas yra kvadratas.

(2 taškai)

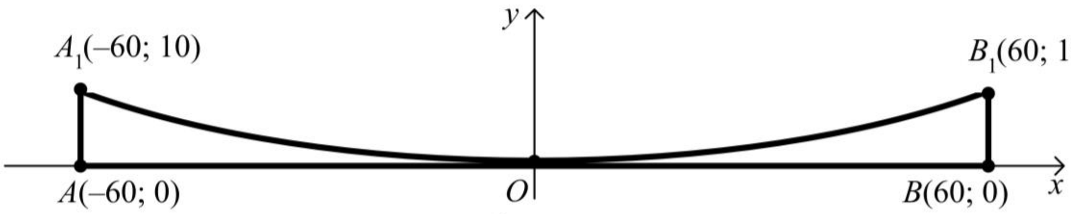
Juodraštis

B➔20. Studentas Rimas iš tėvų pasiskolino tam tikrą pinigų sumą. Pirmąjį mėnesį jis grąžino 48 eurus, o kiekvieną kitą mėnesį grąžindavo 2 eurais mažiau negu prieš tai buvusį mėnesį. Tai tęsėsi tol, kol Rimas grąžino paskutinius 2 pasiskolintus eurus. Kiek eurų Rimas buvo pasiskolinęs iš tėvų?

(3 taškai)

Juodraštis

21. Koordinačių plokštumoje[1] pavaizduota kabamojo tilto schema (žr. 1 pav.). Tilto važiuojamoji dalis pažymėta AB, bokštai – A_1A ir B_1B. Tarp bokštų galų A_1, B_1 ir taško O nutiestas lynas A_1OB_1.



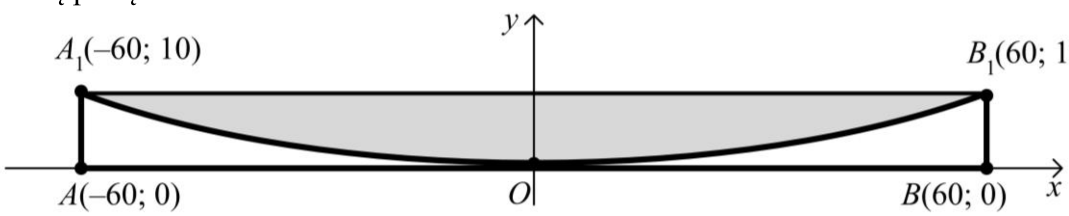
1 pav.

B➔21.1. Lynas A_1OB_1 sudaro parabolės $y = ax^2$ formos lanką. Pagrįskite, kad $a = \dfrac{1}{360}$.

(1 taškas)

Juodraštis

21.2. Tarp bokštų galų A_1 ir B_1 buvo įtemptas dar vienas lynas. Tarp lynų A_1B_1 ir A_1OB_1 pritvirtintas šventinis tinklas (žr. 2 pav. pilkai nuspalvintą plotą). Apskaičiuokite tinklo užimamą plotą.



2 pav.

(3 taškai)

Juodraštis

[1] koordinačių plokštumoje – na płaszczyźnie współrzędnych – на плоскости координат

22. Duota funkcija $f(x) = \sin(3x) - \sin x \cdot \cos(2x)$.

B➔22.1. Apskaičiuokite $f(30°)$.

(1 taškas)

Juodraštis

22.2. Pagrįskite, kad $f(x) = \cos x \cdot \sin(2x)$.

(2 taškai)

Juodraštis

22.3. Išspręskite lygtį $\cos x \cdot \sin(2x) = 0$.

(3 taškai)

Juodraštis

22.4. Apskaičiuokite $f'(45°)$.

(3 taškai)

Juodraštis

23. Raskite x reikšmę (-es), su kuria (-iomis) vektoriai $\vec{a}\left(\sqrt{2-x};\,-1\right)$ ir $\vec{b}(1;\,-x)$ yra statmeni.

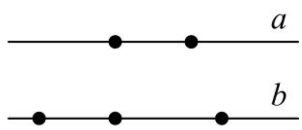
(4 taškai)

Juodraštis

24. Lygiagrečiose[1] tiesėse a ir b pažymėti taškai, kuriuos jungiant atkarpomis sudaromi trikampiai. Šių trikampių dvi viršūnės yra vienoje tiesėje, o trečia viršūnė yra kitoje tiesėje.

B➔24.1. Kiek iš viso galima sudaryti tokių trikampių, jei tiesėje a pažymėti du taškai, o tiesėje b – trys taškai (žr. pav.)?

(1 taškas)



Juodraštis

24.2. Pagrįskite, kad jei tiesėje a pažymėta n taškų, o tiesėje b pažymėti $n+2$ taškai, tai iš viso galima sudaryti n^3+2n^2 tokių trikampių.

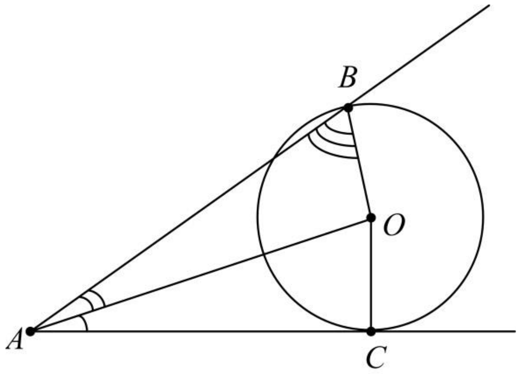
(3 taškai)

Juodraštis

[1] lygiagrečiose – w równoległych – в параллельных

25. Apskritimo centras yra taškas O. Tiesė AC liečia apskritimą taške C. Per tašką A ir apskritimo tašką B nubrėžta kirstinė[1] AB. Įrodykite, kad $\sin\angle OAB = \sin\angle CAO \cdot \sin\angle ABO$.

(3 taškai)



Juodraštis

[1] kirstinė – sieczna – секущая

26. Lentoje buvo užrašyti skirtingi natūralieji skaičiai ir apskaičiuotas jų sumos ir sandaugos santykis[1]. Nutrynus mažiausią lentoje užrašytą skaičių, vėl apskaičiuotas likusių skaičių sumos ir sandaugos santykis. Jis buvo tris kartus didesnis už pirmąjį santykį. Raskite skaičių, kuris buvo nutrintas.

Patarimas: spręsdami pažymėkite likusių skaičių sumą S, likusių skaičių sandaugą P ir nutrintąjį skaičių x.

(4 taškai)

Juodraštis

[1] sumos ir sandaugos santykis – stosunek sumy do iloczynu – отношение суммы и произведения