2002

MATEMATIKA

Valstybinio brandos egzamino užduotis
Pagrindinė sesija

2002 m. gegužės mėn. 21 d. **Trukmė – 3 val.**

NURODYMAI

1. Pasitikrinkite, ar užklijuotame kode esantis skaičius atitinka jūsų vietos egzamino patalpoje numerį. Jeigu neatitinka, pasakykite vykdytojui.
2. Egzamino metu galima naudotis rašymo priemonėmis, braižybos įrankiais ir skaičiuokliu be tekstinės atminties.
3. Pateikti 1-8 uždavinių atsakymo variantai. Jūsų nuomone teisingą atsakymą pažymėkite apvesdami prieš jį esančią raidę. Šių uždavinių sprendimai nebus tikrinami. Teisingas 1-8 uždavinio atsakymas vertinamas 1 tašku.

   NEPAMIRŠKITE pasirinktus atsakymus žyminčias raides įrašyti lentelėje, esančioje paskutiniame šio sąsiuvinio puslapyje. Priešingu atveju už tuos uždavinius gausite po 0 taškų.
4. Jei savo pasirinkimą keičiate, perbraukite senąjį ir aiškiai pažymėkite naujai pasirinktąjį atsakymą. Nepamirškite pakeisti atsakymo ir lentelėje.
5. Jei manote, kad uždavinyje (ar jo dalyje) yra klaida, jį (ar tą dalį) praleiskite ir spręskite kitus uždavinius (ar kitas uždavinio dalis). Jeigu uždavinyje (ar jo dalyje) iš tikrųjų yra klaida, jis (ta dalis) nebus vertinamas (vertinama).
6. 9-19 uždavinių sprendimus užrašykite po sąlyga paliktoje vietoje. Prašome rašyti tvarkingai, įskaitomai. Atsakymas, pateiktas be sprendimo, bus vertinamas 0 taškų.
7. Galite naudotis 2 puslapyje pateiktomis formulėmis.
8. Juodraščiams skirtos vietos nurodytos užrašu „Juodraštis“. Juodraščių tekstai netikrinami ir nevertinami.
9. Nerašykite langeliuose, kurie skirti vertintojų įrašams. Visame darbe negali būti užrašų ar kitokių ženklų, kurie leistų identifikuoti darbo autorių (pvz., vardo, pavardės, miesto ir t.t.).

   Linkime sėkmės!

F O R M U L Ė S

Trikampis. $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=rp=\frac{abc}{4R}$; čia a,b,c – trikampio kraštinės, p – pusperimetris, r ir R – įbrėžtinio ir apibrėžtinio apskritimų spinduliai, S – trikampio plotas.

Skritulio išpjova. $S=\frac{\pi R^2}{360^\circ}\cdot\alpha$, $l=\frac{\pi R}{180^\circ}\cdot\alpha$; čia α – centrinio kampo didumas laipsniais, S – išpjovos plotas, l – išpjovos lanko ilgis, R – apskritimo spindulys.

Nupjautinis kūgis. $S=\pi(R+r)\cdot l$, $V=\frac{1}{3}\pi H(R^2+Rr+r^2)$; čia R ir r – kūgio pagrindų spinduliai, S – šoninio paviršiaus plotas, V – tūris, H – aukštinė, l – sudaromoji.

Nupjautinės piramidės tūris. $V=\frac{1}{3}H(S_1+\sqrt{S_1S_2}+S_2)$; čia S_1, S_2 – pagrindų plotai, H – aukštinė.

Rutulys. $S=4\pi R^2$, $V=\frac{4}{3}\pi R^3$, čia S – rutulio paviršiaus plotas, V – tūris, R – spindulys.

Rutulio nuopjovos tūris. $V=\frac{1}{3}\pi H^2(3R-H)$; čia R – spindulys, H – nuopjovos aukštinė.

Vektorių skaliarinė sandauga. $\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\alpha$; čia α – kampas tarp vektorių $\vec{a}\{x_1;y_1;z_1\}$ ir $\vec{b}\{x_2;y_2;z_2\}$.

Geometrinė progresija. $b_n=b_1q^{n-1}$, $S_n=\frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$.

Begalinė nykstamoji geometrinė progresija. $S=\frac{b_1}{1-q}$.

Trigonometrinės funkcijos. $1+\mathrm{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$, $1+\mathrm{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}$, $2\sin^2\alpha=1-\cos 2\alpha$,

$2\cos^2\alpha=1+\cos 2\alpha$, $\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$, $\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$,

$\sin\alpha\pm\sin\beta=2\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2}\cos\frac{\alpha\mp\beta}{2}$, $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$,

$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$, $\mathrm{tg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\mathrm{tg}\alpha\pm\mathrm{tg}\beta}{1\mp\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta}$.

Niutono binomo formulė. $(a+b)^n=C_n^o a^n+C_n^1a^{n-1}b+\ldots+C_n^k a^{n-k}b^k+\ldots+C_n^n b^n$.

$C_n^k=C_n^{n-k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$, $A_n^k=\frac{n!}{(n-k)!}$, $P_n=n!$.

Tikimybių teorija. Atsitiktinio dydžio X, įgyjančio reikšmes $x_1,x_2,\ldots,x_n$ su tikimybėmis atitinkamai $p_1,p_2,\ldots,p_n$, matematinė viltis $\mathrm{E}X=x_1p_1+x_2p_2+\ldots+x_np_n$,
dispersija $\mathrm{D}X=(x_1-\mathrm{E}X)^2p_1+(x_2-\mathrm{E}X)^2p_2+\ldots+(x_n-\mathrm{E}X)^2p_n$.

Išvestinių skaičiavimo taisyklės. $(Cu)'=Cu'$; $(u\pm v)'=u'\pm v'$; $(uv)'=u'v+uv'$; $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$;

čia u ir v – diferencijuojamos funkcijos, C – konstanta. $(a^x)'=a^x\ln a$, $(\log_a x)'=\frac{1}{x\cdot\ln a}$.

Sudėtinės funkcijos $h(x)=g(f(x))$ išvestinė $h'(x)=g'(f(x))\cdot f'(x)$.

Funkcijos grafiko liestinės taške $(x_0,\ f(x_0))$ lygtis. $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$.

Logaritmo pagrindo keitimo formulė. $\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$.

1. $1+\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\dfrac{2}{\sqrt{3}}}=$

A $\sqrt{3}+2$ **B** $1+\dfrac{\sqrt{3}}{5}$ **C** $1{,}6$ **D** $1+\sqrt{3}$ **E** $1{,}3$

---

2. Trikampio kampų didumai α, β, γ, $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$, $0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$. Jei $\sin\alpha=0{,}6$, $\sin\beta=0{,}8$, tai $\sin\gamma=$

A $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **B** $-\dfrac{1}{2}$ **C** -1 **D** 1 **E** $\dfrac{4}{5}$

---

3. $f(1)=1$, $f(2)=2$. Kai natūralusis skaičius $n>2$, tai $f(n)=f(n-2)+(-1)^n\cdot n\cdot f(n-1)$. Apskaičiuokite $f(5)$.

A -112 **B** 120 **C** 64 **D** -85 **E** 85

---

4. Kai $a<0$, tai $\sqrt{4(a-1)^2}-\sqrt{\dfrac{a^2}{4}}=$

A $2-\dfrac{3}{2}a$ **B** $\dfrac{5}{2}a-2$ **C** $\dfrac{3}{2}a-2$ **D** $4-5a$ **E** $2-\dfrac{5a}{2}$

Juodraštis

5. Jonas didesnis už Tomą 5 cm, o Andrius didesnis už Joną 2 cm. Koks turėtų būti didžiausias Tomo ūgis, kad visų trijų berniukų ūgių vidurkis[1] neviršytų 175 cm?

A 171 **B** 175 **C** 170 **D** 173 **E** 174

---

6. Iš 20 loterijos bilietų, tarp kurių 5 „laimingi“, atsitiktinai traukiami du. Kiek yra galimybių ištraukti bent vieną „laimingą“?

A 75 **B** 190 **C** 210 **D** 85 **E** 80

---

7. Funkcijos $f(x)=\dfrac{2x-3}{x+1}$ išvestinės[2] reikšmė, kai $x=-2$, $f'(-2)=$

A -1 **B** 5 **C** 7 **D** -9 **E** $\dfrac{5}{2}$

---

8. Trikampio viršūnės yra taškai $M(2;-2)$, $N(-3;2)$ ir $K(1;3)$, o P – kraštinės[3] MK vidurio taškas[4]. Vektoriaus $\overrightarrow{NP}$ koordinatės yra

A $(-4; 4{,}5)$ **B** $(-4{,}5; 1{,}5)$ **C** $(4{,}5; -1{,}5)$ **D** $(-1{,}5; -3)$ **E** $(1{,}5; 2{,}5)$

Juodraštis

[1] vidurkis – среднее – średnia
[2] išvestinė – производная – pochodna
[3] kraštinė – сторона – bok
[4] vidurio taškas – середина – środek

NEPAMIRŠKITE pasirinktus atsakymus žyminčias raides įrašyti lentelėje, esančioje paskutiniame šio sąsiuvinio puslapyje.

9. Automašinų kolona, kurios ilgis 10 km, juda plentu pastoviu 60 km per valandą greičiu. Iš paskutinės mašinos siunčiamas pasiuntinys – motociklininkas į kolonos priekį. Jam pavedama per 1 val. pasivyti priekinę mašiną ir, perdavus laišką, grįžti į kolonos galą.

1. Ar važiuodamas vidutiniu 72 km/h greičiu jis spės atlikti užduotį? *Atsakymą pagrįskite.*

(3 taškai)

2. Ar jam pakaktų vidutinio 71 km/h greičio? *Atsakymą pagrįskite.*

(1 taškas)

Čia rašo vertintojai

	I	II	III
1.			
2.			
Taškų suma			

10. Kiek sprendinių[1] turi lygtis[2]

$$(\sin x - \cos x)^2 = 1$$

intervale $[-3\pi; \pi]$?

(3 taškai)

Čia rašo vertintojai

I	II	III

[1] sprendinys – решение – rozwiązanie
[2] lygtis – уравнение – równanie

11. Išspręskite nelygybių[1] sistemą

$$\begin{cases} x^2 - 5 \le 0, \\ 3x + 2 > 0. \end{cases}$$

(4 taškai)

Čia rašo vertintojai		
I	*II*	*III*

12. Išspręskite lygtį

$$3^{\log_3(x-1)} = x^2 - 13 .$$

(4 taškai)

Čia rašo vertintojai		
I	*II*	*III*

[1] nelygybė – неравенство – nierówność

Juodraštis

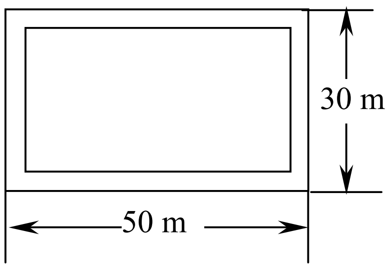
13. Trapecijos $ABCD$ įstrižainės[1] kertasi taške O. Atkarpų OA, OB, OC, OD vidurio taškai paeiliui sujungiami atkarpomis. Įrodykite, kad gautojo keturkampio plotas lygus ketvirtadaliui trapecijos ploto.

(3 taškai)

Čia rašo vertintojai
I II III

14. Pagal projektą pastato, kurio pagrindas stačiakampis[2] su 50 m ir 30 m ilgio kraštinėmis (žr. pav.), 0,5 m pločio pamatams reikia 158 m^3 betono.

Statomas pastatas, kurio pagrindas panašus projektuotam, o pagrindo plotas sudaro 0,81 projektuoto ploto. Apskaičiuokite, kiek kubinių metrų betono reikės jo pamatams. (Pamatai liejami projektuoto pločio ir gylio.)



(4 taškai)

Čia rašo vertintojai
I II III

[1] įstrižainė – диагональ – przekątna
[2] stačiakampis – прямоугольник – prostokąt

J u o d r a š t i s

15. Turnyre dalyvauja dvi šachmatininkų komandos. Kiekvienoje komandoje po du žaidėjus. Kiekvienas pirmosios komandos šachmatininkas žaidžia po vieną partiją su antrosios komandos kiekvienu žaidėju. Už laimėtą partiją komanda gauna 2 taškus, už lygiąsias – 1 tašką, už pralaimėtą – taškų negauna.

Tikimybė[1] pirmosios komandos šachmatininkui partiją laimėti lygi lygiųjų tikimybei ir lygi pralaimėjimo tikimybei. Kiekvienos partijos baigtis nepriklauso nuo kitų partijų baigčių. Apskaičiuokite tikimybę, kad pirmoji komanda surinks:

Čia rašo vertintojai I II III

1) 8 taškus;

(2 taškai)

2) 7 taškus;

(1 taškas)

3) 6 taškus;

(2 taškai)

4) ne mažiau kaip 6 taškus.

(2 taškai)

Taškų suma			

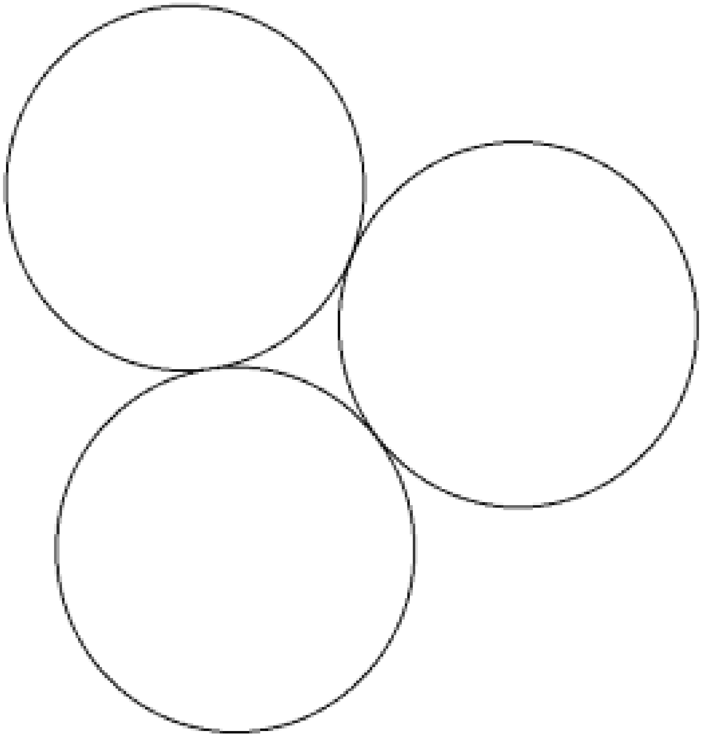
[1] tikimybė – вероятность – prawdopodobieństwo

Juodraštis

16. Trys apskritimai, kurių spindulių ilgiai lygūs r, liečiasi (žr. pav.).
Raskite šiuos apskritimus liečiančių dviejų apskritimų spindulių ilgius.

(6 taškai)

Čia rašo vertintojai		
I	II	III



Juodraštis

17. Parabolė, kurios šakos nukreiptos žemyn, kerta Ox ašį taškuose $x=0$ ir $x=1$. Plotas, apribotas parabole ir Ox ašimi, lygus 2. Raskite šios parabolės lygtį.

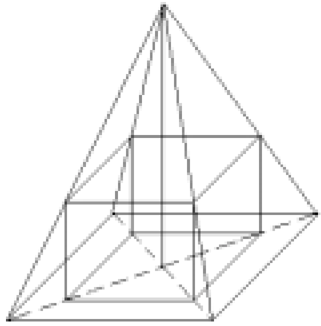
(5 taškai)

Čia rašo vertintojai		
I	*II*	*III*

J u o d r a š t i s

18. Į taisyklingą[1] keturkampę piramidę[2], kurios pagrindo kraštinės ilgis 6 cm, o aukštinės – 12 cm įbrėžiama taisyklingoji prizmė, kurios viršutinio pagrindo viršūnės yra piramidės briaunose (žr. pav.). Kokio didžiausio tūrio prizmę galima įbrėžti?

(6 taškai)



Čia rašo vertintojai

I	II	III

[1] taisyklingas – правильный – prawidłowy
[2] piramidė – пирамида – ostrosłup

Juodraštis

Čia rašo vertintojai		
I	II	III

19. Brilianto kainos formulė $C = am^2$, kurioje m – brilianto masė, o a – pastovus skaičius, nepriklausantis nuo brilianto masės. Briliantas perskeliamas į dvi dalis.

1. Raskite perskelto brilianto dalių masių santykį, kai jų kainų suma sudaro $\frac{5}{9}$ nesuskaldyto brilianto kainos.

   (3 taškai)

2. Koks yra perskelto brilianto dalių masių santykis[1], kai jų kainų suma mažiausia?

   (3 taškai)

Taškų suma			

[1] santykis – отношение – stosunek

J u o d r a š t i s