

**2019 M. MATEMATIKOS VALSTYBINIO BRANDOS EGZAMINO UŽDUOTIES
 VERTINIMO INSTRUKCIJA**

Pagrindinė sesija

I dalis

Užd. Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ats.	B	D	A	C	B	C	C	D	B	D

II dalis

11	1365 Eur (arba 1365).
12	75 Eur (arba 75).
13	4,5 (arba $4\frac{1}{2}$, arba $\frac{9}{2}$).
14.1	40° (arba 40).
14.2	30.
15.1	720 (arba 6!).
15.2	240.
16	$x \in (3;5)$ (arba $3 < x < 5$, arba (3,5)).
17	$\lg 7$ (arba $\log_{10} 7$, arba $\frac{\log_a 7}{\log_a 10}$, arba $\frac{\log_a 7}{\log_a 5 + \log_a 2}$, kai $a > 0, a \neq 1$, arba $\frac{\log_5 7}{\log_5 2 + 1}$, arba $\frac{\log_2 7}{\log_2 5 + 1}$).
18	$a \in (2; +\infty) \cup \{0\}$ (arba $a = 0$, arba $a > 2$).
19.1	-5.
19.2	-36.

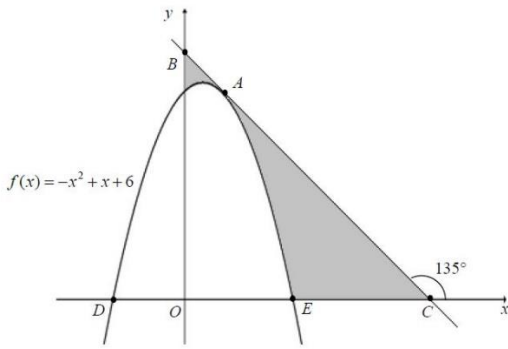
III dalis

Pastaba.

III dalyje pateiktas atsakymas be sprendimo vertinamas 0 taškų.

Užd.	Sprendimas ir atsakymas	Taškai	Vertinimas
20		7	
20.1		1	
	$f(30^\circ) = 5 \sin 30^\circ - \cos 60^\circ + 1 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} + 1 = 3.$ <i>Ats.: 3.</i>	1	Už teisingą atsakymą.
20.2		2	
	$f(x) = 5 \sin x - \cos(2x) + 1 =$ $= 5 \sin x - \cos^2 x + \sin^2 x + 1,$ arba $f(x) = 5 \sin x - \cos(2x) + 1 =$ $= 5 \sin x - 1 + 2 \sin^2 x + 1,$	1	Už teisingą $\cos(2x)$ formulės pritaikymą.
	$= 5 \sin x - 1 + \sin^2 x + \sin^2 x + 1 =$ $= 5 \sin x + 2 \sin^2 x = 2 \sin x(\sin x + 2,5),$ arba $= 5 \sin x + 2 \sin^2 x = 2 \sin x(\sin x + 2,5).$	1	Už gautą teisingą sandaugą.
<p><i>Pastabos</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <i>Atvirkštinis įrodymo būdas.</i> $2 \sin x(\sin x + 2,5) = 2 \sin^2 x + 5 \sin x = 2 \frac{1 - \cos 2x}{2} + 5 \sin x = 1 - \cos 2x + 5 \sin x.$ Už šį sprendimą skiriami 2 taškai. <i>Suvedant į lygtį.</i> Sudarome lygtį ir keliame klausimą, kokiems x ji galioja. $1 - \cos 2x + 5 \sin x = 2 \sin x(\sin x + 2,5),$ $1 - \cos 2x + 5 \sin x - 2 \sin^2 x - 5 \sin x = 0, \quad 1 - \cos 2x - 2 \sin^2 x = 0, \quad 0 = 0.$ Paskutinė, todėl ir pirma, lygtys galioja visiems realiems skaičiams. Už šį sprendimą skiriami 2 taškai. 			
20.3		3	
	$2 \sin x(\sin x + 2,5) = 0,$ $2 \sin x = 0$ arba $\sin x + 2,5 = 0,$ $x = 180^\circ \cdot k, (k \in \mathbb{Z}),$ arba $\sin x = -2,5,$ (arba $x = \pi k, (k \in \mathbb{Z}),$ Sprendinių nėra.	2	Po 1 tašką už kiekvieną teisingai išspręstą lygtį.
	$x = -180^\circ; 0^\circ; 180^\circ.$ (arba $x = -\pi; 0; \pi).$ <i>Ats.: $x = -180^\circ; 0^\circ; 180^\circ$ (arba $x = \pi k, k = -1; 0; 1,$ arba $x = -\pi; 0; \pi).$</i>	1	Už teisingą atsakymą.
<p><i>Pastaba</i></p> <p>Jei vietoje $x = \pi k$ parašyta $x = (-1)^k \cdot 0 + \pi k,$ už šį atsakymą skiriamas pirmasis taškas.</p>			

20.4		1	
	$f(-x) = 5 \sin(-x) - \cos(-2x) + 1 =$ $= -5 \sin x - \cos(2x) + 1 \neq f(x),$ $f(-x) = -(5 \sin x + \cos(2x) - 1) \neq -f(x),$ <p>arba</p> $f(-x) = 2 \sin(-x)(\sin(-x) + 2,5) = -2 \sin x(-\sin x + 2,5) =$ $= 2 \sin x(\sin x - 2,5) \neq f(x).$ $f(-x) = -(2 \sin x(-\sin x + 2,5)) \neq -f(x).$ <p>Todėl funkcija yra nei lyginė, nei nelyginė.</p>	1	Už teisingą pagrindimą, kad funkcija yra nei lyginė, nei nelyginė.

Užd.	Sprendimas ir atsakymas	Taškai	Vertinimas
21		11	
21.1		2	
			
	$-x^2 + x + 6 = 0,$	1	Už teisingai pasirinktą sprendimo būdą (teisingai sudarytą lygtį).
	$D = 25,$ $x_{1,2} = \frac{-1 \pm 5}{-2} = \begin{cases} 3 \\ -2 \end{cases} \text{ (netenkina sąlygos).}$ Ats.: $x = 3.$	1	Už gautą teisingą atsakymą.
21.2		1	
	$f'(x) = -2x + 1.$ Ats.: $-2x + 1.$	1	Už teisingą atsakymą.
21.3		2	
	$f'(x_A) = \operatorname{tg} 135^\circ = -1,$ $-2x_A + 1 = -1,$ $x_A = 1,$	1	Už teisingą pagrindimą, kad $x = 1.$
	$y = f(1) = -1 + 1 + 6 = 6.$	1	Už teisingą pagrindimą, kad $y = 6.$
21.4		2	
	I būdas $k = \operatorname{tg} 135^\circ = -1,$ todėl $y = -x + b,$	1	Už pasirinktą teisingą sprendimo būdą.
	$A(1; 6),$ $6 = -1 + b,$ $b = 7.$ Ats.: $y = -x + 7.$	1	Už gautą teisingą atsakymą.
	II būdas $y = f(1) + f'(1)(x - 1).$	1	Už pasirinktą teisingą sprendimo būdą.
	$y = 6 + (-1)(x - 1).$ $y = -x + 7.$ Ats.: $y = -x + 7.$	1	Už gautą teisingą atsakymą.

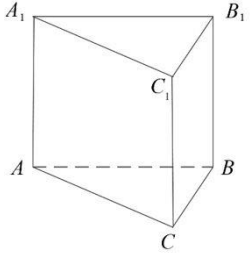
21.5		4	
I būdas		1	Už teisingai apskaičiuotą trikampio OBC plotą.
$S_{\triangle OBC} = \frac{1}{2} OB \cdot OC = \frac{7 \cdot 7}{2} = \frac{49}{2} = 24,5,$		1	Už teisingą figūros, apribotos parabole ir ašimis, kai $x \in [0; 3]$, ploto išreiškimą apibrėžtiniu integralu.
$S_1 = \int_0^3 (-x^2 + x + 6) dx =$		1	Už teisingą pirmąją funkciją.
$= \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 6x \right) \Big _0^3 =$		1	Už gautą teisingą atsakymą.
$= \frac{27}{2} = 13,5,$ $S_{\text{figūros}} = 24,5 - 13,5 = 11.$ Ats.: 11.		1	
II būdas		2	Po vieną tašką už teisingą figūrą, apribotą parabole ir tiese, plotų išreiškimą apibrėžtiniais integralais.
$S = \int_0^7 (-x + 7) dx - \int_0^3 (-x^2 + x + 6) dx =$		1	Už teisingą pirmąją funkciją.
$= \left(-\frac{x^2}{2} + 7x \right) \Big _0^7 - \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 6x \right) \Big _0^3 =$		1	Už gautą teisingą atsakymą.
$= 24,5 - 13,5 = 11.$ Ats.: 11.		1	

	III būdas $\int_0^3 ((-x+7) - (-x^2+x+6))dx + \int_3^7 (-x+7)dx =$ $= \int_0^3 (x^2 - 2x + 1)dx + \int_3^7 (-x+7)dx =$ $= \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + x \right) \Big _0^3 + \left(-\frac{x^2}{2} + 7x \right) \Big _3^7 =$ $= \frac{27}{3} - 9 + 3 + \left(-\frac{49}{2} + 49 + \frac{9}{2} - 21 \right) = 11.$ Ats.: 11.	2	Po vieną tašką už teisingą figūrų, apribotų parabole ir tiese, plotų išreiškimą apibrėžtiniais integralais.
		1	Už teisingą pirmąją funkciją.
		1	Už gautą teisingą atsakymą.

Pastaba

Sprendimas $S = \int_0^7 (-x+7 - (-x^2+x+6))dx = \int_0^7 (x^2 - 2x + 1)dx = \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + x \right) \Big|_0^7 = 72 \frac{1}{3}$


vertinamas 2 taškais.

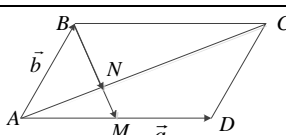
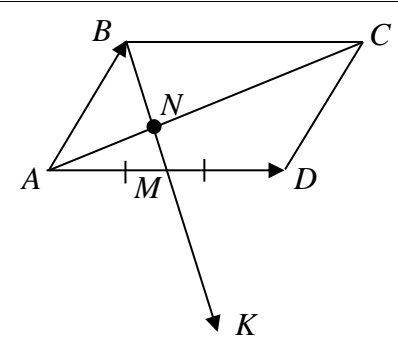
Užd.	Sprendimas ir atsakymas	Taškai	Vertinimas
22		3	
	 $V = S_{\text{pagrindo}} \cdot H,$ $28\sqrt{3} = 7 \cdot S_{\triangle ABC},$ $S_{\triangle ABC} = 4\sqrt{3},$	1	Už teisingai apskaičiuotą prizmės pagrindo plotą.
	$\frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3} \text{ (arba } \frac{1}{2} a \cdot a \cdot \sin 60^\circ = 4\sqrt{3} \text{)},$	1	Už sudarytą teisingą lygtį prizmės pagrindo kraštinės ilgiui apskaičiuoti.
	$a^2 = 16,$ $a = 4.$ Ats.: 4.	1	Už gautą teisingą atsakymą.

Pastaba

Tegul $|AC| = x$, tada $S_{\text{pagrindo}} = 0,5x^2 \frac{\sqrt{3}}{2}$ (pirmas taškas – už apskaičiuotą pagrindo plotą),

$7x^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = 28\sqrt{3}$ (antras taškas – už teisingai sudarytą lygtį), $x = 4$ (trečias taškas – už teisingai išspręstą lygtį).

Užd.	Sprendimas ir atsakymas	Taškai	Vertinimas
23		3	
23.1		1	
	 <p> $AB = h\sqrt{3}.$ <i>Ats.: $AB = h\sqrt{3}.$</i> </p>	1	Už teisingą atsakymą.
23.2		2	
	<p>Pagal kosinusų teoremą:</p> $105^2 = h^2 + (h\sqrt{3})^2 - 2 \cdot h \cdot h\sqrt{3} \cdot \cos 150^\circ,$	1	Už teisingai pasirinktą sprendimo būdą (pvz., pritaikytą kosinusų teoremą).
	$105^2 = 7h^2,$ $h = 15\sqrt{7} \text{ (arba } h = \sqrt{1575} \text{)}.$ <p><i>Ats.: $15\sqrt{7}$ (arba $\sqrt{1575}$).</i></p>	1	Už gautą teisingą atsakymą.

Užd.	Sprendimas ir atsakymas	Taškai	Vertinimas
24		5	
24.1		1	
	 $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}.$ <p>Ats.: $\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}.$</p>	1	Už teisingą atsakymą.
24.2		2	
	<p>I būdas</p> <p>$\triangle ANM \sim \triangle CNB$ (pagal du kampus), tai $\frac{BC}{AM} = \frac{BN}{NM} = \frac{2}{1},$</p> $\overrightarrow{BN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}.$ <p>Ats.: $\frac{1}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}.$</p>	1	Už teisingą pagrindimą, kad $BN : NM = 2 : 1.$
	<p>II būdas</p> <p>Nubrėžkime atkarpą BD. Taškas N yra $\triangle ABD$ pusiauakraštinių susikirtimo taškas, todėl $\frac{BN}{NM} = \frac{2}{1}.$</p> $\overrightarrow{BN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}.$ <p>Ats.: $\frac{1}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}.$</p>	1	Už teisingą pagrindimą, kad $BN : NM = 2 : 1.$
	$\overrightarrow{BN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}.$ <p>Ats.: $\frac{1}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}.$</p>	1	Už gautą teisingą atsakymą.
24.3.1		1	
	 <p>I būdas</p> $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{NK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BK} + \overrightarrow{NK} \Rightarrow$ $\Rightarrow \overrightarrow{NK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BK} \Rightarrow \overrightarrow{NK} \parallel \overrightarrow{BK}.$	1	Už teisingą pagrindimą, kad vektoriai kolinearūs.
	<p>II būdas</p> $\overrightarrow{BK} = 4\overrightarrow{BN} \Rightarrow \text{taškai } B, K \text{ ir } N \text{ yra vienoje tiesėje} \Rightarrow$ $\Rightarrow \overrightarrow{BK} \parallel \overrightarrow{NK}.$ <p>Arba</p> $\overrightarrow{BK} = 4\overrightarrow{BN} \Rightarrow \overrightarrow{NK} \text{ ir } \overrightarrow{BK} \text{ yra vienoje tiesėje} \Rightarrow \overrightarrow{NK} \parallel \overrightarrow{BK}.$	1	Už teisingą pagrindimą, kad vektoriai kolinearūs.

24.3.2		1	
	$\overrightarrow{NK} = \frac{3}{4} \overrightarrow{BK} \Rightarrow \overrightarrow{NK} = \frac{3}{4} \overrightarrow{BK} = \frac{3}{4} \cdot 8 = 6.$ <p>Arba</p> $\overrightarrow{BK} = 4 \overrightarrow{BN} \Rightarrow \overrightarrow{BN} : \overrightarrow{NK} = 1 : 3 \Rightarrow \overrightarrow{NK} = \frac{3}{4} \overrightarrow{BK} = 6.$ <p>Ats.: 6.</p>	1	Už gautą teisingą atsakymą.
Užd.	Sprendimas ir atsakymas	Taškai	Vertinimas
25		4	
	$b - a = 10 - a - b \Rightarrow b = 5,$ <p>(arba $b = \frac{a + 10 - a}{2} = 5$),</p>	1	Už teisingai sudarytą lygtį.
	$\frac{b + 4}{a + 1} = \frac{29 - a}{b + 4},$	1	Už teisingai pritaikytą geometrinės progresijos apibrėžtį.
	$\frac{9}{a + 1} = \frac{29 - a}{9},$ $(a + 1)(29 - a) = 81,$ $29a - a^2 + 29 - a = 81,$ $-a^2 + 28a - 52 = 0,$ $a^2 - 28a + 52 = 0,$	1	Už gautą teisingą kvadratinę lygtį.
	$a = 2 \text{ arba } a = 26 \text{ (netenkina sąlygos).}$ <p>Ats.: $a = 2, b = 5$.</p>	1	Už gautą teisingą atsakymą.
<p><i>Pastabos</i></p> <ul style="list-style-type: none"> $\begin{cases} b - a = 10 - a - b, \\ \frac{b + 4}{a + 1} = \frac{29 - a}{b + 4}. \end{cases}$ <p>Už pirmąją lygtį – pirmas taškas. Už antrąją lygtį – antras taškas.</p> <p>Už ekvivalentų pertvarkymą iki $\begin{cases} b = 5, \\ a^2 - 28a + 52 = 0, \end{cases}$ – trečias taškas. Už teisingą atsakymą $a = 2, b = 5$ – ketvirtas taškas.</p> <p>Už lygčių sistemą $\begin{cases} a_1 = a, \\ a_1 + d = b, \\ a_1 + 2d = 10 - a \end{cases}$ skiriamas pirmas taškas. Jis skiriamas tik už tokią lygčių sistemą, t. y. būtina, kad kairioji pusė būtų užrašyta tik per du naujus nežinomuosius: a_1 ir d.</p> <p>Už lygčių sistemą $\begin{cases} b_1 = a + 1, \\ b_1 q = b + 4, \\ b_1 q^2 = 29 - a \end{cases}$ skiriamas antras taškas. Būtina, kad papildomų naujų nežinomųjų būtų tik du, t. y. b_1 ir q.</p> <p>Už teisingą a ir b apskaičiavimą skiriami trečias ir ketvirtas taškai.</p> 			

Užd.	Sprendimas ir atsakymas	Taškai	Vertinimas
26		5	
	<p>Skaičius $ab + c$ yra lyginis, kai:</p> <p>įvykis A – „sandauga ab yra nelyginė ir skaičius c – nelyginis“ (t. y. a, b ir c – visi nelyginiai skaičiai);</p> <p>įvykis B – „sandauga ab yra lyginė ir skaičius c – lyginis“ (t. y. bent vienas iš skaičių a ir b – lyginis taip pat c – lyginis skaičius).</p>	1	Už teisingai išvardytą bent vieną atvejį, kada skaičius $ab + c$ yra lyginis.
	<p>Tikimybė, kad a, b ir c – visi nelyginiai skaičiai, yra</p> $\mathbf{P}(A) = \left(\frac{50}{99}\right)^3 \text{ (arba } \mathbf{P}(A) = \frac{125000}{970299}\text{)}.$	1	Už teisingai apskaičiuotą įvykio A tikimybę.
	<p>Įvykis C – bent vienas iš skaičių a ir b – lyginis,</p> $\mathbf{P}(C) = 1 - \mathbf{P}(\bar{C}) = 1 - \left(\frac{50}{99}\right)^2 = 1 - \frac{2500}{9801} = \frac{7301}{9801},$ <p>arba</p> $\mathbf{P}(C) = \frac{49}{99} \cdot \frac{50}{99} \cdot 2 + \left(\frac{49}{99}\right)^2 = \frac{4900}{9801} + \frac{2401}{9801} = \frac{7301}{9801},$	1	Už teisingai apskaičiuotą tikimybę, kad bent vienas iš skaičių a ir b yra lyginis.
	$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(C) \cdot \frac{49}{99} = \frac{7301}{9801} \cdot \frac{49}{99} = \frac{357749}{970299},$	1	Už teisingai apskaičiuotą įvykio B tikimybę.
	<p>todėl tikimybė, kad $ab + c$ yra lyginis skaičius, yra:</p> $\frac{125000}{970299} + \frac{357749}{970299} = \frac{482749}{970299}.$ <p>Ats.: $\frac{482749}{970299}.$</p>	1	Už gautą teisingą atsakymą.

Pastabos

- Pažymėkime įvykius: a_1 – pirmojo ištraukto rutulio numeris yra lyginis, a_n – pirmojo ištraukto rutulio numeris yra nelyginis, analogiškai b_1 ir b_n – antrojo rutulio numeriai yra lyginis ir nelyginis, c_1 ir c_n trečiojo rutulio numeriai yra lyginis ir nelyginis. Tada $\mathbf{P}(L = \text{skaičius } ab + c \text{ yra lyginis}) = \mathbf{P}(a_nb_nc_n \cup a_1b_nc_1 \cup a_1b_1c_1 \cup a_nb_1c_1) = \mathbf{P}(a_nb_nc_n) + \mathbf{P}(a_1b_nc_1) + \mathbf{P}(a_1b_1c_1) + \mathbf{P}(a_nb_1c_1)$, nes šie įvykiai yra poromis nesutaikomi.

$\mathbf{P}(L) = \mathbf{P}(a_n)\mathbf{P}(b_n)\mathbf{P}(c_n) + \mathbf{P}(a_1)\mathbf{P}(b_n)\mathbf{P}(c_1) + \mathbf{P}(a_1)\mathbf{P}(b_1)\mathbf{P}(c_1) + \mathbf{P}(a_n)\mathbf{P}(b_1)\mathbf{P}(c_1)$, nes rutulių traukimas yra nepriklausomas vienas nuo kito.

$$\mathbf{P}(L) = \frac{50}{99} \cdot \frac{50}{99} \cdot \frac{50}{99} + \frac{49}{99} \cdot \frac{50}{99} \cdot \frac{49}{99} + \frac{49}{99} \cdot \frac{49}{99} \cdot \frac{49}{99} + \frac{50}{99} \cdot \frac{49}{99} \cdot \frac{49}{99} = \frac{482749}{970299}.$$

Taškas skiriamas už bent vieną palankų atvejį: $a_nb_nc_n$, $a_1b_nc_1$, $a_1b_1c_1$ arba $a_nb_1c_1$. Pirmas taškas skiriamas už išvardytą bent vieną atvejį, kai skaičius $ab + c$ yra lyginis, t. y. $a_nb_nc_n$, $a_1b_nc_1$, $a_1b_1c_1$ arba $a_nb_1c_1$. Už bent vieną iš keturių šių atvejų teisingai apskaičiuotų tikimybių skiriamas antras taškas, už visas keturias teisingai apskaičiuotas tikimybes skiriamas trečias taškas, už teisingą sumą, t. y. $\mathbf{P}(L)$ – ketvirtas taškas, o už įvykio L apibrėžimą – penktas taškas.

Trumpiau: už $\mathbf{P}(L) = \frac{50}{99} \cdot \frac{50}{99} \cdot \frac{50}{99} + \frac{49}{99} \cdot \frac{50}{99} \cdot \frac{49}{99} + \frac{49}{99} \cdot \frac{49}{99} \cdot \frac{49}{99} + \frac{50}{99} \cdot \frac{49}{99} \cdot \frac{49}{99} = \frac{482749}{970299}$ skiriami

4 taškai. Už L apibrėžimą skiriamas dar vienas taškas, taigi iš viso 5 taškai.

- Sprendimas, remiantis klasikiniu tikimybės apibrėžimu.

Visų bandymo baigčių skaičius $n = 99 \cdot 99 \cdot 99 = 99^3 = 970299$. Už šį skaičių skiriamas pirmas taškas.

(a , b , c) Įvykiui palankių baigčių skaičius

$$(N, N, N) \quad 50 \cdot 50 \cdot 50 = 125000,$$

$$(N, L, L) \quad 50 \cdot 49 \cdot 49 = 120050,$$

$$(L, N, L) \quad 49 \cdot 50 \cdot 49 = 120050,$$

$$(L, L, L) \quad 49 \cdot 49 \cdot 49 = 117649.$$

Už bent vieną teisingą iš šių keturių skaičių skiriamas antras taškas, už visus keturis teisingai išvardytus ir apskaičiuotus skaičius skiriamas trečias taškas.

Įvykiui L (suma $ab + c$ yra lyginė) palankių baigčių skaičius

$$m = 50^3 + 2 \cdot 50 \cdot 49^2 + 49^3 = 482749.$$

$$\text{Įvykio } L \text{ tikimybė } P(L) = \frac{m}{n} = \frac{482749}{970299}.$$

Už teisingą tikimybę $P(L)$ skiriamas ketvirtas taškas. Už L apibrėžimą skiriamas penktas taškas.

