

**MATEMATIKOS VALSTYBINIO BRANDOS EGZAMINO KANDIDATŲ DARBŲ
 VERTINIMO INSTRUKCIJA**
 Pagrindinė sesija

I dalis

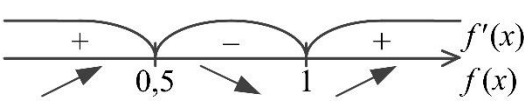
Užd. Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ats.	C	D	C	A	A	D	B	C	B	C

II dalis

11.1	12.
11.2	15π .
11.3	18.
12	6 val. (arba 6 h, arba 6).
13.1	60° (arba $\frac{\pi}{3}$).
13.2	$-\vec{a} - \vec{b}$ (arba $-\vec{b} - \vec{a}$).
14.1	$\frac{1}{36}$ (arba 0,02(7)).
14.2	$\frac{15}{16}$ (arba 0,9375).
15	23.
16	9.
17	30 dB (arba 30).
18	$g(-1) = 4 - \sqrt{3}$ (arba $4 - \sqrt{3}$).

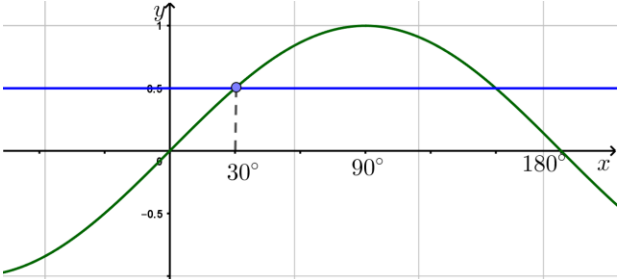
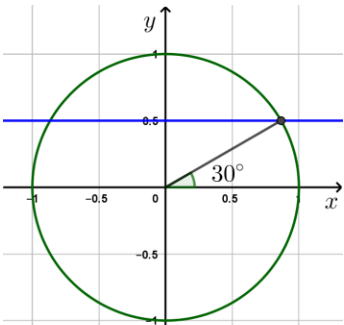
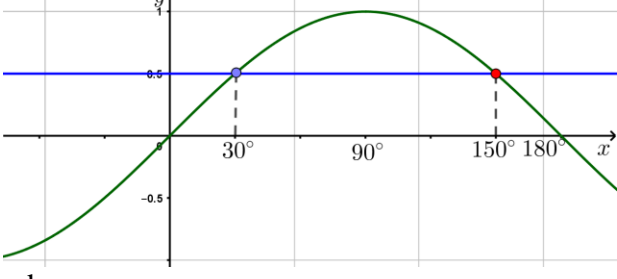
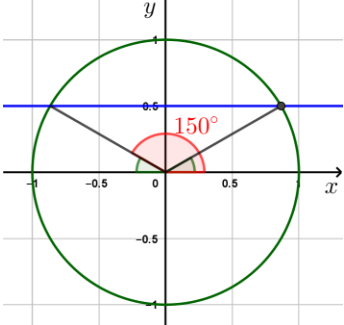
III dalis

Užd.	Sprendimas ir atsakymas	Taškai	Vertinimas
19		4	
19.1		1	
	$120 \cdot 1,05 = 126$ (Eur). <i>Ats.:</i> 126 Eur.	1	Už teisingą atsakymą.
19.2		2	
	$126 \cdot 1,05 = 132,30$ (Eur),	1	Už teisingai apskaičiuotą trečio mėnesio pabaigoje grąžinamą sumą.
	$120 + 126 + 132,30 = 378,30$ (Eur). <i>Ats.:</i> 378,30 Eur.	1	Už gautą teisingą atsakymą.
19.3		1	
	Pagal geometrinės progresijos pirmųjų n narių sumos formulę: $\frac{120 \cdot (1,05^n - 1)}{1,05 - 1} = 2400(1,05^n - 1).$ <i>Ats.:</i> $2400(1,05^n - 1).$	1	Už gautą teisingą atsakymą.

Užd.	Sprendimas ir atsakymas	Taškai	Vertinimas
20		8	
20.1		1	
	<i>Ats.:</i> $f'(x) = 12x^2 - 18x + 6.$	1	Už teisingą atsakymą.
20.2		2	
	$12x^2 - 18x + 6 = 0,$ $2x^2 - 3x + 1 = 0,$ $x_1 = 0,5,$ $x_2 = 1.$	1	Už teisingai pasirinktą sprendimo būdą.
	 <i>Ats.:</i> $x \in (-\infty; 0,5), (1; +\infty).$	1	Už gautą teisingą atsakymą.
20.3		2	
	$f'(x) = -1,$ $12x^2 - 18x + 6 = -1,$ $12x^2 - 18x + 7 = 0,$	1	Už teisingai sudarytą kvadratinę lygtį.
	$D = -12.$ Lygtis sprendinių neturi, todėl neegzistuoja toks taškas, kuriame duotosios funkcijos grafikui nubrėžtos liestinės krypties koeficientas lygus $-1.$	1	Už teisingą pagrindimą.

20.4		3	
	$\int_{-1}^a (4x^3 - 9x^2 + 6x)dx = -3a^3 - 7,$ $(x^4 - 3x^3 + 3x^2)\Big _{-1}^a = -3a^3 - 7,$	1	Už teisingai gautą pirmykštę funkciją.
	$a^4 - 3a^3 + 3a^2 - (1 + 3 + 3) = -3a^3 - 7,$ $a^4 - 3a^3 + 3a^2 - 7 = -3a^3 - 7,$	1	Už teisingai įstatytus rėžius.
	$a^4 + 3a^2 = 0,$ $a^2(a^2 + 3) = 0,$ $a^2 = 0 \text{ arba } a^2 + 3 = 0,$ $a = 0 \quad \text{sprendinių nėra.}$ $\text{Ats.: } a = 0.$	1	Už teisingai išspręstą lygtį.

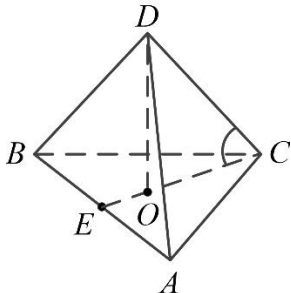
Užd.	Sprendimas ir atsakymas	Taškai	Vertinimas
21		7	
21.1		2	
	$\log_2(9 - x^2) = 3,$ $9 - x^2 = 8,$	1	Už teisingai pritaikytą logaritmo apibrėžimą.
	$x^2 = 1,$ $x = -1 \text{ arba } x = 1.$ $\text{Ats.: } x = -1 \text{ arba } x = 1.$	1	Už gautą teisingą atsakymą.
21.2		2	
	I būdas $2 \sin x = 1, \text{ kai } x \in (90^\circ; 180^\circ),$ $\sin x = \frac{1}{2},$ $x = (-1)^k \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) + \pi k, k \in \mathbb{Z},$ $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k \text{ (arba } x = (-1)^k \cdot 30^\circ + 180^\circ k \text{)}.$	1	Už teisingai pasirinktą lygties sprendimo būdą.
	Kai $k = 0$, tai $x = \frac{\pi}{6}$ (arba $x = 30^\circ$) nepriklauso duotajam intervalui. Kai $k = 1$, tai $x = \frac{5\pi}{6}$ (arba $x = 150^\circ$) priklauso duotajam intervalui. Kai $k = 2$, tai $x = \frac{13\pi}{6}$ (arba $x = 390^\circ$) nepriklauso duotajam intervalui. $\text{Ats.: } x = 150^\circ \text{ (arba } x = \frac{5\pi}{6} \text{)}.$	1	Už teisingai pasirinktą sprendinį, priklausančią duotajam intervalui.

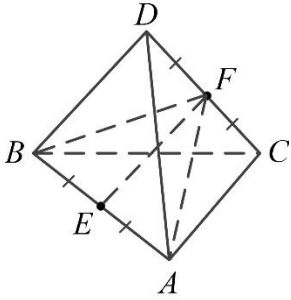
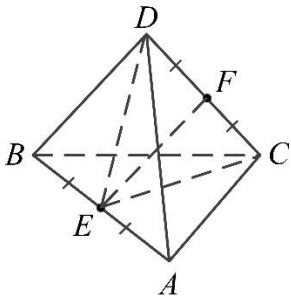
<p>II būdas</p> <p>$2 \sin x = 1$, kai $x \in (90^\circ; 180^\circ)$,</p> <p>$\sin x = \frac{1}{2}$,</p> <p>$x = \frac{\pi}{6}$ (arba $x = 30^\circ$).</p>	1	Už teisingai pasirinktą sprendimo būdą (iš trigonometrinių funkcijų reikšmių lentelės teisingai pasirinktą x reikšmę).
<p>Kadangi $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$, tai $x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$</p> <p>(arba $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$, tai $x = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$).</p> <p>Ats.: $x = 150^\circ$ (arba $x = \frac{5\pi}{6}$).</p>	1	Už teisingai panaudotą redukcijos formulę.
<p>III būdas</p>  <p>arba</p> 	1	Už teisingai pasirinktą sprendimo būdą.
 <p>arba</p>  <p>Ats.: $x = 150^\circ$ (arba $x = \frac{5\pi}{6}$).</p>	1	Už teisingai pasirinktą sprendinį, priklausantį duotajam intervalui.

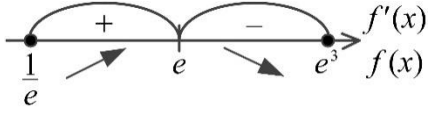
21.3		3	
	I būdas $\sqrt{2-x} = \sqrt{x} - 2,$ $2-x = x - 4\sqrt{x} + 4,$	1	Už teisingai atliktus pertvarkymus, abi lygties puses pakėlus kvadratu.
	$4\sqrt{x} = 2x + 2,$ $2\sqrt{x} = x + 1,$ $x^2 - 2x + 1 = 0,$	1	Už teisingai gautą kvadratinę lygtį.
	$x = 1.$ Patikriname: $\sqrt{1} = \sqrt{1} - 2.$ Gauname neteisingą lygybę. <i>Ats.:</i> Sprendinių nėra (arba \emptyset).	1	Už gautą teisingą atsakymą.
	II būdas Lygties $\sqrt{2-x} = \sqrt{x} - 2$ sprendiniai turi tenkinti šias sąlygas: $\begin{cases} 2-x \geq 0, \\ x \geq 0, \\ \sqrt{x} - 2 \geq 0; \end{cases}$	1	Už teisingai sudarytą nelygybių sistemą.
	$\begin{cases} x \leq 2, \\ x \geq 0, \\ x \geq 4. \end{cases}$	1	Už teisingai išspręstas nelygybes.
	Nelygybių sistema sprendinių neturi, todėl ir lygtis neturi sprendinių, nes lygybė nėra teisinga su jokia x reikšme. <i>Ats.:</i> Sprendinių nėra (arba \emptyset).	1	Už gautą teisingą atsakymą.

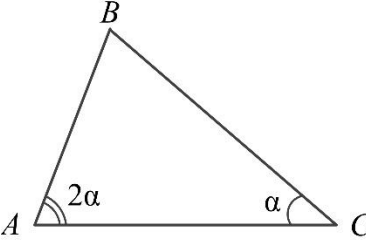
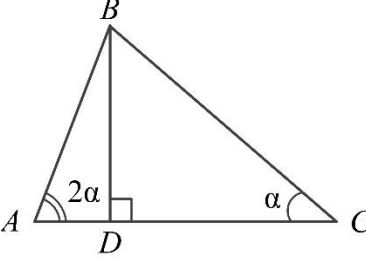
Užd.	Sprendimas ir atsakymas	Taškai	Vertinimas
22		4	
22.1		1	
	$P(R) = \frac{1 - \frac{1}{5}}{2} = \frac{2}{5} = 0,4.$ <i>Ats.:</i> 0,4.	1	Už teisingą atsakymą.
22.2.1		1	
	$P(MM) = P(M) \cdot P(M) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{25} = 0,04.$ <i>Ats.:</i> 0,04.	1	Už gautą teisingą atsakymą.
22.2.2		2	
	I būdas Skaiciuojame įvykio A – ištraukti kamuoliukai yra vienodos spalvos – tikimybę: $P(A) = \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{9}{25},$	1	Už teisingai apskaičiuotą įvykio A tikimybę.
	$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} = 0,64.$ <i>Ats.:</i> 0,64.	1	Už gautą teisingą atsakymą.

	II būdas Skačiuojame įvykio B – ištraukti kamuoliukai yra skirtingos spalvos – tikimybę: $P(B) = P(MR) + P(RM) + P(M\check{Z}) + P(\check{Z}M) + P(\check{Z}R) + P(R\check{Z}) =$ $= 2\left(\frac{1}{5} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5}\right) = \frac{16}{25} = 0,64.$ Ats.: 0,64.	1	Už bent vieną teisingai apskaičiuotą tikimybę, kai ištrauktų kamuoliukų spalvos skiriasi.
		1	Už gautą teisingą atsakymą.

Užd.	Sprendimas ir atsakymas	Taškai	Vertinimas
23		5	
23.1		1	
	$S_{\text{pav.}} = 4S_{\Delta} = 4 \cdot \frac{6^2 \sqrt{3}}{4} = 36\sqrt{3}.$ Ats.: $S_{\text{pav.}} = 36\sqrt{3}.$	1	Už gautą teisingą atsakymą.
23.2		2	
	 I būdas $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} BA \cdot EC = 9\sqrt{3},$ $EC = 3\sqrt{3},$ $OC = \frac{2}{3} EC = 2\sqrt{3}.$	1	Už teisingai apskaičiuotą OC ilgį.
	Iš stačiojo trikampio DOC : $\cos \angle DCO = \frac{OC}{DC} = \frac{2\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$ Ats.: $\cos \angle DCO = \frac{\sqrt{3}}{3}.$	1	Už gautą teisingą atsakymą.
	II būdas Pagal kosinusų teoremą trikampyje DEC : $DE^2 = DC^2 + EC^2 - 2DC \cdot EC \cos \angle DCE,$	1	Už teisingai pasirinktą sprendimo būdą (pvz., kosinusų teoremos taikymas).
	$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} BA \cdot EC = 9\sqrt{3},$ $EC = ED = 3\sqrt{3},$ $\cos \angle DCE = \frac{27 - 27 - 36}{-2 \cdot 6 \cdot 3\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$ Ats.: $\cos \angle DCE = \frac{\sqrt{3}}{3}.$	1	Už gautą teisingą atsakymą.

23.3		1	
	<p>I būdas Įrodome, kad $EF \perp AB$.</p>  <p>Sujungę tašką F su tetraedro viršūnėmis B ir A, gauname trikampį ABF, kuris yra lygiašonis, nes $BF = AF$ yra kaip lygių lygiakraščių trikampių ACD ir BCD pusiaukraštinės. Todėl lygiašonio trikampio AFB pusiaukraštinė EF į pagrindą AB yra ir šio trikampio aukštinė, t. y. $EF \perp AB$.</p>	1	Už teisingą įrodymą.
	<p>II būdas Įrodome, kad $EF \perp AB$.</p>  <p>Sujungę tašką E su tetraedro viršūnėmis D ir C, gauname, kad $AB \perp DE$ ir $AB \perp EC$ (lygiakraščio trikampio pusiaukraštinė sutampa su aukštine). Todėl AB yra statmena plokštumai DEC, todėl ir bet kuriai tos plokštumos tiesei, t. y. $EF \perp AB$.</p>	1	Už teisingą įrodymą.
23.4		1	
	<p>Analogiškai įrodome, kad EF yra lygiašonio trikampio CED pusiaukraštinė, todėl $EF \perp CD$. Kadangi $EF \perp AB$ ir $EF \perp DC$, tai atkarpos EF ilgis lygus atstumui tarp prasilenkiančių tiesių.</p>	1	Už teisingą įrodymą.

24		3	
	$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2},$	1	Už teisingai rastą išvestinę.
	$\frac{1 - \ln x}{x^2} = 0,$ $1 - \ln x = 0,$ $\ln x = 1,$ $x = e.$	1	Už teisingai rastą kritinį tašką.
	<div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <div style="width: 45%;"> <p>I būdas</p>  <p>Kadangi $f'(1) = 1 > 0$, $f'(e^2) = -\frac{1}{e^4} < 0$, tai taške $x = e$ funkcija įgyja didžiausią reikšmę. <i>Ats.: $x = e$.</i></p> </div> <div style="width: 45%;"> <p>II būdas</p> <p>Apskaičiuojame funkcijos reikšmes intervalo galuose ir kritiniame taške bei jas palyginame:</p> $f\left(\frac{1}{e}\right) = -e,$ $f(e) = \frac{1}{e},$ $f(e^3) = \frac{3}{e^3}.$ <p>Kadangi $f\left(\frac{1}{e}\right) < f(e^3) < f(e)$, tai taške $x = e$ funkcija įgyja didžiausią reikšmę. <i>Ats.: $x = e$.</i></p> </div> </div>	1	Už teisingą pagrindimą.

Užd.	Sprendimas ir atsakymas	Taškai	Vertinimas
25		3	
	<p>I būdas</p>  <p>Tegul $AB = a$. Tai $BC = ka$. Pagal sinusų teoremą:</p> $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{ka}{\sin 2\alpha},$ $\frac{1}{\sin \alpha} = \frac{k}{\sin 2\alpha},$	1	Už teisingai pritaikytą sinusų teoremą.
	$\frac{1}{\sin \alpha} = \frac{k}{2 \sin \alpha \cos \alpha},$ $1 = \frac{k}{2 \cos \alpha},$ $\cos \alpha = \frac{k}{2}.$	1	Už teisingai panaudotą dvigubo kampo sinuso formulę ir teisingą pagrindimą.
	<p>Kai $0 < \alpha < \frac{\pi}{3}$, tai $\frac{1}{2} < \cos \alpha < 1$, todėl</p> $\frac{1}{2} < \frac{k}{2} < 1,$ $1 < k < 2.$ <p>Ats.: $1 < k < 2$.</p>	1	Už teisingai nustatytas k reikšmes.
	<p>II būdas</p>  <p>Brėžiame aukštinę BD. Iš stačiojo $\triangle ABD$, $BD = \sin 2\alpha \cdot AB$ Iš stačiojo $\triangle BCD$, $BD = \sin \alpha \cdot AB \cdot k$ } \rightarrow</p>	1	Už teisingai pasirinktą sprendimo būdą (abi teisingas aukštinės išraiškas per kampo sinusą).
	$\frac{BD}{BD} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin \alpha \cdot k}, \cos \alpha = \frac{k}{2}.$	1	Už teisingą pagrindimą.
	<p>Kai $0 < \alpha < \frac{\pi}{3}$, tai $\frac{1}{2} < \cos \alpha < 1$, todėl</p> $\frac{1}{2} < \frac{k}{2} < 1, \quad 1 < k < 2.$ <p>Ats.: $1 < k < 2$.</p>	1	Už teisingai nustatytas k reikšmes.

Užd.	Sprendimas ir atsakymas	Taškai	Vertinimas
26		4	
	I būdas $\begin{cases} b - a = c - b; \\ \frac{c}{b} = \frac{a}{c}. \end{cases}$	1	Už bent vieną teisingai sudarytą lygybę.
	$\begin{cases} 2b = a + c; \\ \frac{2c}{a + c} = \frac{a}{c}. \end{cases}$ Iš antros lygybės: $2c^2 = a^2 + ac,$	1	Už teisingai gautą lygybę su dviem nežinomaisiais.
	$c^2 - a^2 = ac - c^2,$ $(c - a)(c + a) = c(a - c),$ Kadangi $a \neq c$, tai $c + a = -c,$ $a = -2c,$	1	Už teisingai gautą a išraišką per c (arba atvirkščiai).
	$q = \frac{a}{c} = \frac{-2c}{c} = -2.$ <i>Ats.: $q = -2$.</i>	1	Už gautą teisingą atsakymą.
	II būdas $\begin{cases} b - a = c - b, \\ \frac{c}{b} = \frac{a}{c}; \end{cases}$	1	Už bent vieną teisingai sudarytą lygybę.
	$\begin{cases} a = 2b - c, \\ \frac{c}{b} = \frac{2b - c}{c}. \end{cases}$ Iš antros lygybės: $\frac{c}{b} = \frac{2b}{c} - 1,$	1	Už teisingai gautą lygybę su dviem nežinomaisiais.
	$q = \frac{2}{q} - 1,$ $q^2 + q - 2 = 0,$	1	Už teisingai sudarytą lygtį geometrinės progresijos vardikliui q apskaičiuoti.
	$q = -2$ arba $q = 1$ (netenkina sąlygos $a \neq b$). <i>Ats.: $q = -2$.</i>	1	Už gautą teisingą atsakymą.

	III būdas Jei b, c, a – iš eilės einantys geometrinės progresijos nariai, tai $c = bq$, $a = bq^2$, tuomet	1	Už teisingai pritaikytą geometrinės progresijos bendrojo nario formulę.
	bq^2, b, bq – iš eilės einantys aritmetinės progresijos nariai, tai $b - bq^2 = bq - b$,	1	Už teisingai pritaikytą aritmetinės progresijos apibrėžtį.
	$bq^2 + bq - 2b = 0 \mid :b \neq 0$, $q^2 + q - 2 = 0$,	1	Už teisingai gautą kvadratinę lygtį.
	$q_1 = -2, q_2 = 1$ (netenkina sąlygos $a \neq b$). Ats.: $q = -2$.	1	Už gautą teisingą atsakymą.
	IV būdas $\begin{cases} b - a = c - b; \\ \frac{c}{b} = \frac{a}{c}. \end{cases}$	1	Už bent vieną teisingai sudarytą lygybę.
	$\begin{cases} c = 2b - a; \\ \frac{2b - a}{b} = \frac{a}{2b - a}. \end{cases}$	1	Už teisingai gautą lygybę su dviem nežinomaisiais.
	Iš antros lygybės $(2b - a)^2 = ab$, $4b^2 - 5ab + a^2 = 0$, $\frac{a^2}{b^2} - 5\frac{a}{b} + 4 = 0$, $q^4 - 5q^2 + 4 = 0$,	1	Už teisingai sudarytą lygtį geometrinės progresijos q^2 apskaičiuoti.
	$q^2 = 4$ arba $q^2 = 1$, $q = -1$ arba $q = 1$ – netenkina sąlygos $a \neq b$, $q = 2$ arba $q = -2$, $q = 2$ – netinka, nes jei aritmetinės progresijos $a < b < c$, tai geometrinės progresijos $b < c > a$, ir atitinkamai jei aritmetinės progresijos $a > b > c$, tai geometrinės progresijos $b > c < a$. Tai įmanoma tada ir tik tada, kai $q < 0$. Ats.: $q = -2$.	1	Už gautą teisingą atsakymą.

Pastaba. Taškai skiriami ir už bet kurį kitą teisingą sprendimą, atsakymą.