



MATEMATIKA

Valstybinio brandos egzamino užduotis

Pakartotinė sesija

2008 m. birželio 18 d.

Egzamino trukmė – 3 val. (180 min.)

Valstybinio brandos egzamino formulės

Trikampis. $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = rp = \frac{abc}{4R}$; čia a, b, c – trikampio kraštinės, p – pusperimetris, r ir R – įbrėžtinio ir apibrėžtinio apskritimų spinduliai, S – trikampio plotas.

Skritulio išpjova. $S = \frac{\pi R^2}{360^\circ} \cdot \alpha$, $l = \frac{2\pi R}{360^\circ} \cdot \alpha$; čia α – centrinio kampo didumas laipsniais, S – išpjovos plotas, l – išpjovos lanko ilgis, R – apskritimo spindulys.

Nupjautinis kūgis. $S = \pi(R+r) \cdot l$, $V = \frac{1}{3} \pi H(R^2 + Rr + r^2)$; čia R ir r – kūgio pagrindų spinduliai, S – šoninio paviršiaus plotas, V – tūris, H – aukštinė, l – sudaromoji.

Nupjautinės piramidės tūris. $V = \frac{1}{3} H(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)$; čia S_1, S_2 – pagrindų plotai, H – aukštinė.

Rutulys. $S = 4\pi R^2$, $V = \frac{4}{3} \pi R^3$; čia S – rutulio paviršiaus plotas, V – tūris, R – spindulys.

Rutulio nuopjovos tūris. $V = \frac{1}{3} \pi H^2 (3R - H)$; čia R – spindulys, H – nuopjovos aukštinė.

Vektorių skaliarinė sandauga. $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha$;

čia α – kampas tarp vektorių $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$ ir $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$.

Geometrinė progresija. $b_n = b_1 q^{n-1}$, $S_n = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q}$.

Begalinė nykstamoji geometrinė progresija. $S = \frac{b_1}{1 - q}$.

Trigonometrinės funkcijos. $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$, $1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$, $2 \sin^2 \alpha = 1 - \cos 2\alpha$,

$2 \cos^2 \alpha = 1 + \cos 2\alpha$, $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$, $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$,

$\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha \pm \beta}{2} \cos \frac{\alpha \mp \beta}{2}$, $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$,

$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$, $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$.

$\begin{cases} \sin x = a, -1 \leq a \leq 1, \\ x = (-1)^k \arcsin a + \pi k, k \in \mathbb{Z}; \end{cases} \begin{cases} \cos x = a, -1 \leq a \leq 1, \\ x = \pm \arccos a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; \end{cases} \begin{cases} \operatorname{tg} x = a, \\ x = \operatorname{arctg} a + \pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

Deriniai. $C_n^k = C_n^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Tikimybių teorija. Atsitiktinio dydžio X matematinė viltis yra $\mathbf{E} X = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n$, dispersija $\mathbf{D} X = (x_1 - \mathbf{E} X)^2 p_1 + (x_2 - \mathbf{E} X)^2 p_2 + \dots + (x_n - \mathbf{E} X)^2 p_n$.

Išvestinių skaičiavimo taisyklės. $(Cu)' = Cu'$; $(u \pm v)' = u' \pm v'$; $(uv)' = u'v + uv'$; $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$;

čia u ir v – diferencijuojamos funkcijos, C – konstanta. $(a^x)' = a^x \ln a$, $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$.

Sudėtinės funkcijos $h(x) = g(f(x))$ išvestinė $h'(x) = g'(f(x))f'(x)$.

Funkcijos grafiko liestinės taške $(x_0; f(x_0))$ lygtis. $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

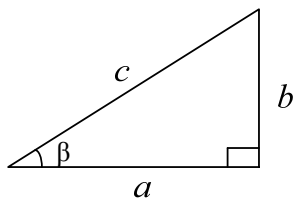
Logaritmo pagrindo keitimo formulė. $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$.

Kiekvienas teisingas 1–7 uždavinio atsakymas vertinamas 1 tašku.

1. Lygčių sistemos^I $\begin{cases} (x+0,2)^2 + (y+0,3)^2 = 0, \\ x-y = 0,1 \end{cases}$ sprendinys^{II} yra:

- A $(-0,2; 0,3)$ B $(-0,2; -0,3)$ C $(-0,3; -0,2)$ D $(1; 0,9)$ E nėra sprendinių

2. Jei β yra stačiojo trikampio kampas^{III} (žr. pav.), tai $\sin(2\beta) =$



- A $\frac{ab}{c}$ B $\frac{ab}{c^2}$ C $\frac{2a}{c}$ D $\frac{2ab}{c}$ E $\frac{2ab}{c^2}$

3. Funkcijos $f(x) = x^2 + 4x - 5$ reikšmių sritis^{IV}, kai $x \in [-3; 1]$, yra:

- A $[-9; +\infty)$ B $(-9; 0)$ C $[-3; 1]$ D $[-9; 0]$ E $[-8; 0]$

NEPAMIRŠKITE pasirinktus atsakymus žyminčių raidžių įrašyti lentelėje, esančioje paskutiniame šio sąsiuvinio puslapyje.

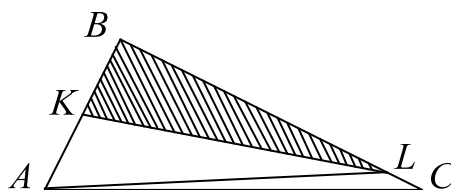
^I sistema – układ – система

^{II} sprendinys – rozwiązanie – решение

^{III} stačiojo trikampio kampas – kąt trójkąta prostokątnego – угол прямоугольного треугольника

^{IV} reikšmių sritis – zbiór wartości – область значений

4. Trikampio ABC kraštinėse AB ir BC taip pažymėti taškai K ir L (žr. pav.), kad $BK : KA = 1 : 1$ ir $BL : LC = 8 : 1$. Jei trikampio ABC plotas^I lygus 180, tai trikampio BKL plotas lygus:

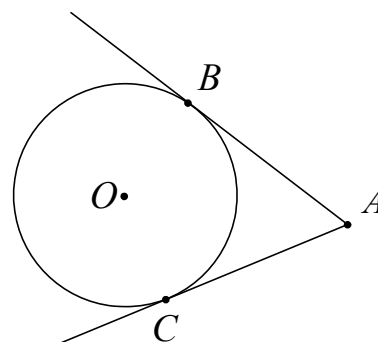


- A 70 B 80 C 85 D 90 E 100

5. Sekos^{II} bendrojo nario^{III} formulė $a_n = 3^n$. Pirmųjų dešimties iš eilės einančių šios sekos narių sandauga $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{10} =$

- A 88 572 B $3^{3\,628\,800}$ C 3^{55} D 3^{10} E $10 \cdot 3^n$

6. Žinoma, kad atstumas^{IV} nuo taško A iki apskritimo centro O yra dvigubai ilgesnis už apskritimo spindulį^V. Iš taško A nubrėžtos liestinės^{VI} AB ir AC liečia apskritimą taškuose B ir C (žr. pav.). $\angle BAC$ didumas yra:



- A 30° B $\arcsin 0,6$ C 45° D 60° E 90°

NEPAMIRŠKITE pasirinktus atsakymus žyminčių raidžių įrašyti lentelėje, esančioje paskutiniame šio sąsiuvinio puslapyje.

^I plotas – pole – площадь

^{II} seka – ciąg – последовательность

^{III} bendrasis narys – wyraz ogólny – общий член

^{IV} atstumas – odległość – расстояние

^V spindulys – promień – радиус

^{VI} liestinė – styczna – касательная

7. Kiek yra triženklių^I natūraliųjų skaičių, kurių bent vienas skaitmuo^{II} 0?

A 162

B 171

C 180

D 189

E 271

JUODRAŠTIS

NEPAMIRŠKITE pasirinktus atsakymus žyminčių raidžių įrašyti lentelėje, esančioje paskutiniame šio sąsiuvinio puslapyje.

^I triženklis – trzycyfrowa – трёхзначное

^{II} skaitmuo – cyfra – цифра

JUODRAŠTIS

8. Naujas automobilis kainuoja 56 000 Lt. Per pirmus naudojimo metus automobilio vertė^I sumažėja 30 proc., o per kiekvienus kitus metus – 15 proc. paskutinių praėjusių metų vertės.
Kiek šis automobilis kainuotų:

8.1. po 1 metų?

(1 taškas)

8.2. po 7 metų? (Atsakymą pateikite šimtų litų tikslumu^{II}.)

(2 taškai)

Čia rašo vertintojai		
I	II	III

Taškų suma			
-------------------	--	--	--

JUODRAŠTIS

^I vertė – wartość – стоимость

^{II} šimtų litų tikslumu – z dokładnością do setek litów – с точностью до сотен литов

9. Išspręskite lygtis:

9.1. $5^{x-2} = 1$.

9.2. $(6-3x)\sqrt{0,2^x-25} = 0$.

	Čia rašo vertintojai		
	I	II	III
(1 taškas)	—	—	—
(3 taškai)	—	—	—

Taškų suma			
------------	--	--	--

JUODRAŠTIS

10. Duota nelygybė^I $\log_{0,5}(2x-5) \leq \log_{0,5}(3x+1)$.

10.1. Parodykite, kad nelygybės apibrėžimo sritis^{II} yra $x > 2,5$.

(1 taškas)

10.2. Raskite nelygybės sprendinius.

(2 taškai)

Čia rašo vertintojai		
I	II	III

Taškų suma			
------------	--	--	--

JUODRAŠTIS

^I nelygybė – nierówność – неравенство

^{II} apibrėžimo sritis – dziedzina – область определения

12. Nustatykite, su kuriomis x reikšmėmis lygybė^I $|1 - x| = x - 1$ yra teisinga.

(2 taškai)

Čia rašo vertintojai		
I	II	III
_____	_____	_____

JUODRAŠTIS

^I lygybė – równość – равенство

13. Paveiksle pavaizduota kreivė^I $y = -x^2 + 7x - 10$ ir jos liestinė^{II}, nubrėžta per tašką $(3; 2)$.

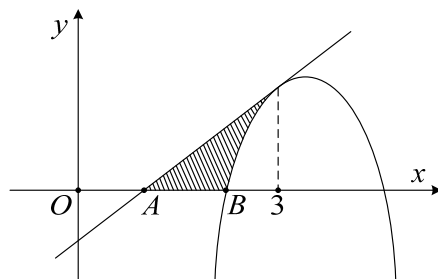
13.1. Parodykite, kad šios liestinės lygtis^{III} yra $y = x - 1$.

(1 taškas)

13.2. Raskite taškų A ir B koordinates.

(2 taškai)

13.3. Apskaičiuokite figūros, kurią riboja parabolė^{IV}, jos liestinė ir ašis Ox , plotą (žr. pav.).



(3 taškai)

Čia rašo vertintojai		
I	II	III

Taškų suma

--	--	--

^I kreivė – krzywa – кривая

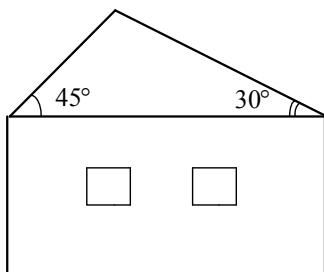
^{II} liestinė – styczna – касательная

^{III} liestinės lygtis – równanie stycznej – уравнение касательной

^{IV} parabolė – parabola – парабола

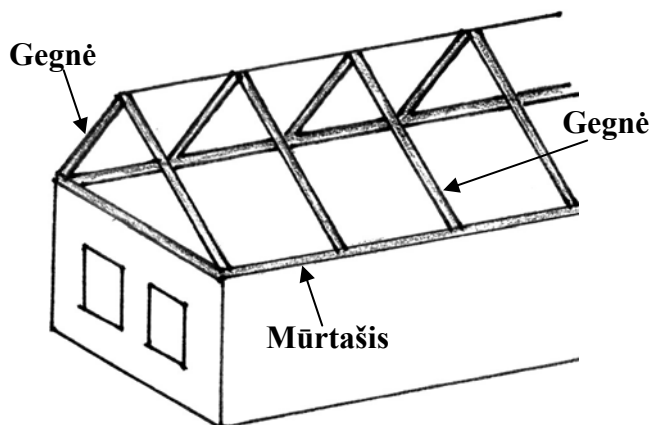
JUODRAŠTIS

14. Statant pirties stogą, 6 m ilgio gegnė turėjo būti padalyta į dvi dalis taip, kad tos dalys su atrama sudarytų 45° ir 30° kampus (žr. 1 pav.). Raskite trumpesniosios dalies ilgį. Atsakymą suapvalinkite iki dešimtųjų metro dalių^I. Laikykite, kad $\sqrt{2} = 1,41$.



1 pav.

Gegnė^{II} – šlaitinio stogo^{III} laikantysis konstrukcinis elementas, kurio vienas galas remiasi į atramą^{IV} (mūrtašį) (žr. 2 pav.).



2 pav.

(3 taškai)

Čia rašo vertintojai

I

II

III

^I metro dešimtosios dalys – dziesiąte części metra – десятые части метра

^{II} gegnė – krokiew – стропилина

^{III} šlaitinis stogas – dach spadowy – скатная крыша

^{IV} atrama – podpora – подпора

JUODRAŠTIS

- 15.** Iš sugedusio vandens čiaupo per pirmą valandą nuo gedimo pradžios prilašėjo 200 mililitrų vandens. Buto savininkas pastebėjo, kad per kiekvieną kitą valandą prilaša 100 mililitrų vandens daugiau nei per ankstesniąją.

15.1. Kiek mililitrų vandens prilašės per pirmąsias 5 valandas?

(1 taškas)

15.2. Jei savininkas nepašalintų gedimo, tai per kiek valandų nuo gedimo pradžios prilašėtų $6,003 \text{ m}^3$ vandens?

(3 taškai)

Čia rašo vertintojai		
I	II	III

Taškų suma			
-------------------	--	--	--

JUODRAŠTIS

16. Išspręskite lygtį $(\sin(2x) - 2)(\cos x - 1) = 0$.

(3 taškai)

Čia rašo vertintojai		
I	II	III
___	___	___

JUODRAŠTIS

17. Duoti du statmeni^I plokštumos vektoriai $\vec{m}\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{4}\right)$ ir $\vec{n}\left(x; \frac{1}{12}\right)$.

17.1. Apskaičiuokite x reikšmę.

(2 taškai)

17.2. Su kuriomis skaičiaus a reikšmėmis vektoriaus $\vec{p} = a\vec{m}$ ilgis^{II} lygus vienetui?

(2 taškai)

Čia rašo vertintojai		
I	II	III
—	—	—
—	—	—

Taškų suma			
------------	--	--	--

JUODRAŠTIS

^I statmenas – prostopadly – перпендикулярный

^{II} ilgis – długość – длина

18. Pašte yra 7 skirtingi siuntiniai, kuriuos du kurjeriai Lukas ir Andrius turi paimti ir išvežioti į skirtingas vietas.

18.1. Parodykite, kad Lukas ir Andrius šiuos 7 siuntinius gali pasidalyti 112 skirtingų būdų^I, jei kiekvienas iš jų turi paimti bent du siuntinius.

(2 taškai)

18.2. Apskaičiuokite tikimybę^{II}, kad pagal **18.1** dalyje nurodytą sąlygą, Lukas paims tris, o Andrius keturis siuntinius.

(1 taškas)

Čia rašo vertintojai		
I	II	III

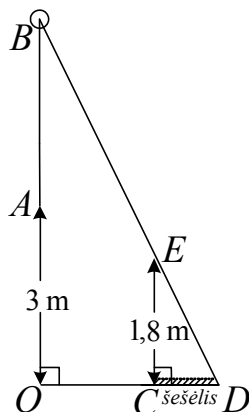
Taškų suma			
-------------------	--	--	--

JUODRAŠTIS

^I skirtingų būdų – różnych sposobów – разных способов

^{II} tikimybė – prawdopodobieństwo – вероятность

- 19.** Iš cirko arenos centro O pastoviu 1 m/s greičiu tiesia linija pradeda eiti $1,8 \text{ m}$ ūgio artistas. Tuo pačiu metu virš arenos centro 3 m aukštyje (taške A) kabojęs šviečiantis prožektorius 3 m/s greičiu kyla vertikaliai aukštyn. Po 3 sekundžių ir artistas (taške C), ir prožektorius (taške B) nustoja judėti.



- 19.1.** Parodykite, kad artisto šešėlio ilgis^I l laiko momentu t yra

$$l(t) = \frac{1,8t}{1,2 + 3t}, \quad 0 \leq t \leq 3.$$

(3 taškai)

- 19.2.** Kuriuo laiko momentu ($0 \leq t \leq 3$) artisto šešėlis yra ilgiausias^{II}?

(3 taškai)

Čia rašo vertintojai

I II III

Taškų suma

^I ilgis – długość – длина

^{II} ilgiausias – najdłuższy – самый длинный

JUODRAŠTIS

20. Mergaitė lentoje rašo įvairius skaičius.

20.1. Kiek daugiausia skirtingų sumų^I ji gali gauti 4 skirtingus natūraliuosius^{II} skaičius sudėjusi po 2 visais galimais būdais?

(1 taškas)

20.2. Ar skaičiai 17, 18, 20, 21, 23, 26 gali būti **20.1** klausime minimos sumos? Atsakymą pagrįskite.

(2 taškai)

Čia rašo vertintojai		
I	II	III
—	—	—
—	—	—

Taškų suma			
-------------------	--	--	--

JUODRAŠTIS

^I suma – suma – сумма

^{II} natūralusis – naturalna – натуральное

21. Taškai A, B, C ir D nepriklauso^I vienai plokštumai^{II}. Įrodykite, kad atkarpų AB, BC, CD ir DA vidurio taškai^{III} priklauso vienai plokštumai.

(3 taškai)

Čia rašo vertintojai		
I	II	III
_____	_____	_____

JUODRAŠTIS

^I nepriklauso – nie nalaży – не принадлежит

^{II} plokštuma – плоскость – płaszczyzna

^{III} vidurio taškas – środek – середина