



MATEMATIKA

Valstybinio brandos egzamino užduotis

Pakartotinė sesija

2023 m. liepos 3 d.

Egzamino trukmė – 3 val. (180 min.)

NURODYMAI

1. Gavę užduoties sąsiuvinį, jo priedą ir atsakymų lapą, pasitikrinkite, ar juose nėra tuščių lapų arba kito aiškiai matomo spausdinimo broko. Pastebėję praneškite egzamino vykdytojui.
2. **Įsitikinkite, kad ant jūsų atsakymų lapo užklijuotas kodas, kurio numeris sutampa su jūsų eilės numeriu egzamino vykdymo protokole.**
3. Bendrojo kurso uždaviniai arba jų dalys pažymėti **B→**.
4. Uždavinių sprendimus ir (ar) atsakymus pirmiausia galite rašyti užduoties sąsiuvinyje, kuriame yra palikta vietos juodraščiui. Jei neabejojate dėl sprendimo ir (ar) atsakymo, iš karto rašykite atsakymų lape. **Vertintojams bus pateikiamas tik atsakymų lapas!**
5. Per egzaminą galite rašyti juodai rašančiu tušinuku, pieštuku, naudotis trintuku, braižybos ir matavimo įrankiais, skaičiuotuvu be tekstinės atminties.
6. **Atsakymų lape** rašykite ir braižykite **tik juodai** rašančiu tušinuku tvarkingai ir įskaitomai. Atsakymų lape nesinaudokite trintuku ir koregavimo priemonėmis.
7. Saugokite atsakymų lapą (neįplėškite ir nesulamdykite). Sugadintuose lapuose įrašyti atsakymai nebus vertinami.
8. Stenkitės išspręsti kuo daugiau uždavinių, neatsižvelgdami į tai, pagal kurio kurso (bendrojo ar išplėstinio) programą dalyko mokėtės mokykloje. Neišsprendę kurio nors uždavinio, nenusiminkite ir stenkitės išspręsti kitus.
9. Pasirinktus **I dalies** uždavinių atsakymus atsakymų lape pažymėkite kryželiu (žymėkite tik vieną atsakymo variantą). Jei pažymėsite neaiškiai arba daugiau kaip vieną atsakymo variantą, tas uždavinys bus vertinamas 0 taškų. Suklydę atsakymą galite taisyti atsakymų lape nurodytoje vietoje.
10. **II dalies** uždavinių atsakymus įrašykite tam skirtoje atsakymų lapo vietoje.
11. **III dalies** uždavinių sprendimus ir atsakymus įrašykite tam skirtoje atsakymų lapo vietoje. Už ribų parašyti sprendimai ir atsakymai nebus vertinami. **III dalyje pateiktas atsakymas be sprendimo bus vertinamas 0 taškų.**
12. Atsakymų lape neturi būti užrašų ar kitokių ženklų, kurie leistų identifikuoti darbo autorių.
13. Pasibaigus egzaminui, užduoties sąsiuvinį galite pasiimti.

Linkime sėkmės!

I dalis

Kiekvienas šios dalies uždavinys (01–10) turi tik vieną teisingą atsakymą, vertinamą **1 tašku**. Pasirinkite, jūsų nuomone, teisingą atsakymą ir pažymėkite jį atsakymų lape kryželiu.

B→01. $(-\infty; 1) \cap (-2; 1] =$

A $(-2; 1)$

B $(-2; 1]$

C $(-\infty; 1)$

D $(-\infty; 1]$

Juodraštis

B→02. Pasirašius terminuotojo indėlio sutartį, bankas moka 4,3 % sudėtinės metinės palūkanas, kasmet pridedamas prie indėlio vertės. Apskaičiuokite, kokia bus indėlio vertė (suapvalinta iki sveikojo skaičiaus) po ketverių metų, jei pradinio indėlio vertė lygi 770 Eur.

A 911 Eur

B 902 Eur

C 874 Eur

D 869 Eur

Juodraštis

B→03. Vandens siurblys ritinio¹ formos baseiną, kurio aukštis lygus 1 m, o pagrindo spindulio ilgis lygus 2 m, pripildo per 3 val. Per kiek valandų šis vandens siurblys, dirbdamas tokiu pačiu pajėgumu, pripildys kitą ritinio formos baseiną, kurio aukštis ir pagrindo spindulio ilgis dvigubai didesni? Siurblys dirba tolygiai, t. y. per vienodus laikotarpius pripildo vandeniu vienodus tūrius.

A 6 val.

B 9 val.

C 12 val.

D 24 val.

Juodraštis

B→04. Kuri iš pateiktų funkcijų yra mažėjančioji savo apibrėžimo srityje?

A $f(x) = \sqrt{x}$

B $g(x) = \sin x$

C $k(x) = 0,5^x$

D $h(x) = \log_2 x$

Juodraštis

¹ ritinys – walec – цилиндр

B→05. Duota imtis²: 1; 2; x ; y ; 10; 11 (čia imties duomenys užrašyti didėjančiai). Yra žinoma, kad šios imties mediana lygi 4,5. Apskaičiuokite šios imties duomenų vidurkį.

A 4,5

B 4,8

C 5,5

D 5,7

Juodraštis

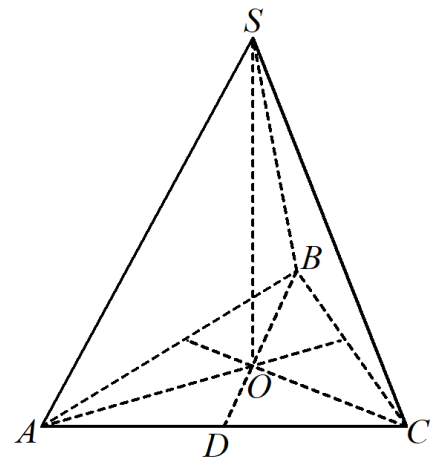
B→06. Paveiksle pavaizduota taisyklingoji trikampė piramidė³ $SABC$. SO yra piramidės aukštinė. Piramidės briauna SA su pagrindo plokštuma ABC sudaro:

A $\angle SAC$

B $\angle SAO$

C $\angle SDA$

D $\angle SOA$



Juodraštis

07. Pertvarkę reiškini $2^n \cdot 4^n \cdot 8^n$, gausime:

A 2^{6n}

B 2^{6n^3}

C 2^{3n+3}

D $2^{n+n^2+n^3}$

Juodraštis

² imtis – próba – выборка

³ taisyklingoji trikampė piramidė – ostrosłup prawidłowy trójkątny – правильная треугольная пирамида

08. Nustatykite, keliuose taškuose susikerta funkcijų $f(x) = \sin x$ ir $g(x) = \frac{1}{3}$ grafikai, kai $x \in [0; 5\pi]$.

A 3

B 4

C 5

D 6

Juodraštis

09. Raskite funkcijos $f(x) = 1 - 3x^2$ pirmyktę funkciją⁴ $F(x)$, jeigu yra žinoma, kad $F(2) = 0$.

A $F(x) = -x^3$

B $F(x) = 8 - x^3$

C $F(x) = x - x^3$

D $F(x) = x - x^3 + 6$

Juodraštis

10. Lygiakraščio trikampio⁵ kraštinės ilgis lygus a , o į šį trikampį įbrėžto apskritimo spindulio⁶ ilgis lygus r . Kuria lygybe teisingai užrašyta a priklausomybė nuo r ?

A $a = \sqrt{3}r$

B $a = 2\sqrt{3}r$

C $a = 4\sqrt{3}r$

D $a = 6\sqrt{3}r$

Juodraštis

⁴ pirmyktė funkcija – funkcja pierwotna – первообразная функция

⁵ lygiakraštis trikampis – trójkąt równoboczny – равносторонний треугольник

⁶ apskritimo spindulys – promień okręgu – радиус окружности

II dalis

Kiekvieno šios dalies uždavinio (11–18) ar jo dalies teisingas atsakymas vertinamas **1 tašku**. Išspręskite uždavinius ir gautus atsakymus įrašykite į atsakymų lapą.

B→11. Duota funkcija $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x - 8$. Raskite šios funkcijos išvestinę $f'(x)$.

Juodraštis

B→12. Paveiksle pavaizduotas funkcijos $y = f(x)$ grafikas.

12.1. Nustatykite funkcijos $y = f(x)$ apibrėžimo sritį⁷.

Juodraštis

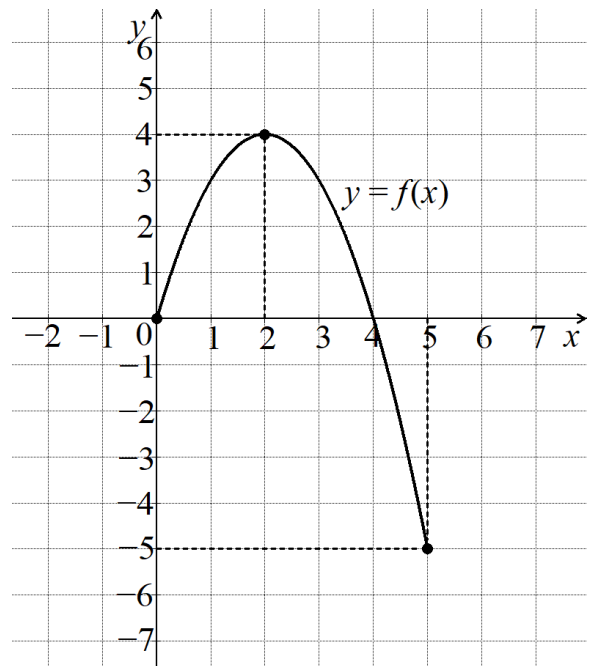
12.2. Nustatykite funkcijos $y = f(x)$ mažiausią reikšmę.

Juodraštis

12.3. Nustatykite funkcijos $y = g(x)$ reikšmių sritį⁸, jei

$$g(x) = f(x) + 2.$$

Juodraštis



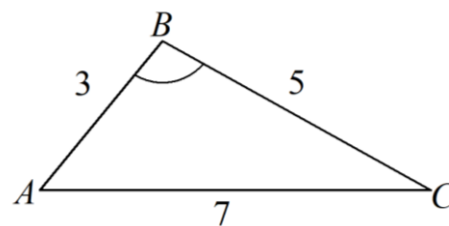
⁷ apibrėžimo sritis – dziedzina – область определения

⁸ reikšmių sritis – zbiór wartości – область значений

B→13. Paveiksle pavaizduotas trikampis ABC . Yra žinoma, kad

$$AB = 3, BC = 5 \text{ ir } AC = 7. \text{ Apskaičiuokite } \cos \angle ABC.$$

Juodraštis



- 14.** Dėžėje yra vienodo dydžio baltų, juodų ir raudonų rutulių. Atsitiktinai iš dėžės traukiant vieną rutulį, tikimybė⁹ ištraukti baltą rutulį lygi 0,35, o tikimybė ištraukti juodą rutulį lygi 0,4.

B→14.1. Apskaičiuokite tikimybę, kad, atsitiktinai iš dėžės traukiant vieną rutulį, ištrauktas rutulys bus raudonas.

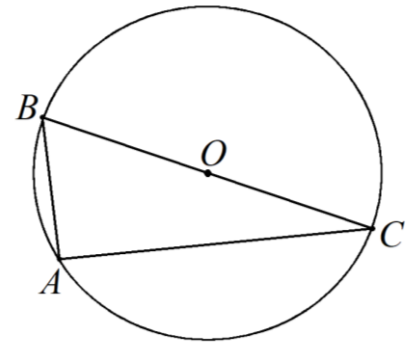
Juodraštis

- 14.2.** Iš dėžės atsitiktinai traukiamas vienas rutulys ir vieną kartą metamas šešiasienis standartinis žaidimo kauliukas. Įvykis A – „iš dėžės bus ištrauktas juodas rutulys, o kauliuko atvirtusių akučių skaičius bus dalus iš trijų“. Apskaičiuokite įvykio A tikimybę.

Juodraštis

⁹ tikimybė – prawdopodobieństwo – вероятность

B→15. Paveiksle pavaizduotas trikampis ABC , kurio kraštinė BC yra apie šį trikampį apibrėžto apskritimo skersmuo. Šio apskritimo centras yra taškas O . Yra žinoma, kad $\angle ACB = 15^\circ$ ir $OC = 10$.



15.1. Apskaičiuokite kampo ABC didumą.

Juodraštis

15.2. Apskaičiuokite trikampio AOC plotą¹⁰.

Juodraštis

16. Yra žinoma, kad funkcijos $y = f(x)$ grafikas eina per tašką $(2; 5)$ ir kad $f'(2) = -3$. Užrašykite šio grafiko liestinės¹¹ taške $(2; 5)$ lygtį.

Juodraštis

17. Suprastinkite $\frac{\sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha}{\cos(2\alpha)}$.

Juodraštis

18. Kvadratinė lygtis $x^2 + px + q = 0$ turi du skirtingus realiuosius sprendinius $x = a$ ir $x = b$.

Išreikškite $a^2 + b^2 + ab$ per p ir q .

Juodraštis

¹⁰ plotas – pole – площадь

¹¹ liestinė – styczn – касательная

III dalis

Išspręskite 19–26 uždavinius. Sprendimus ir atsakymus perrašykite į atsakymų lapą.

- B→19.** Per biologijos praktinį darbą buvo tiriama, kaip kinta vaisinių muselių populiacijos dydis. Nustatyta, kad populiacijos dydį $m(t)$ – muselių skaičių po t valandų – galima apskaičiuoti pagal formulę $m(t) = 20 \cdot 3^{0,25t}$; čia $t \geq 0$.

19.1. Apskaičiuokite vaisinių muselių skaičių po 4 valandų.

(1 taškas)

Juodraštis

19.2. Nustatykite, po kelių valandų muselių skaičius bus lygus 4860.

(2 taškai)

Juodraštis

- 20.** Koncertų salėje pirmojoje eilėje yra 25 vietos, o kiekvienoje kitoje eilėje yra dviem vietomis daugiau negu prieš tai buvusioje eilėje.

B→20.1. Apskaičiuokite, kiek iš viso yra vietų koncertų salės pirmosiose trijose eilėse.

(1 taškas)

Juodraštis

B→20.2. Nustatykite, kiek eilių būtų koncertų salėje, jeigu paskutinėje eilėje būtų 101 vieta.

(2 taškai)

Juodraštis

20.3. Įrodykite, kad jeigu koncertų salėje esančių eilių skaičius būtų dalus¹² iš 9, tai visų koncertų salėje esančių vietų skaičius būtų dalus iš 27.

(3 taškai)

Juodraštis

¹² dalus – podzielny – делимый

21. Išspręskite lygtis:

B→21.1. $\log_2(x^2 - 1) = 3;$

(2 taškai)

Juodraštis

21.2. $\sqrt{x+3} + 2x = 0.$

(3 taškai)

Juodraštis

22. Moneta metama tris kartus ir stebima, kuria puse ji kaskart atvirto – herbu ar skaičiumi.

Šio bandymo baigčių aibė gali būti užrašyta taip:

$\{(S; S; S), (S; S; H), (S; H; H), \dots\}$.

B→22.1. Apskaičiuokite tikimybę, kad moneta tris kartus atvirs ta pačia puse.

(2 taškai)

Juodraštis

22.2. Atsitiktinis dydis¹³ X – „skaičius, kiek kartų moneta atvirto herbu“.

22.2.1. Užrašykite įvykiui $X = 2$ palankių baigčių aibę ir apskaičiuokite $P(X = 2)$.

(2 taškai)

Juodraštis

22.2.2. Užpildykite atsitiktinio dydžio X skirstinio lentelę ir apskaičiuokite jo matematinę viltį¹⁴.

m	0	1	2	3
$P(X = m)$				

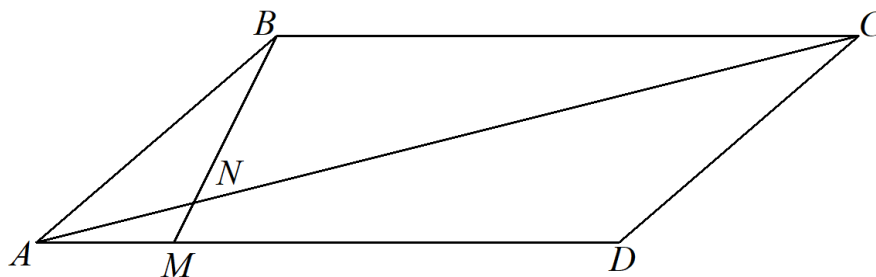
(2 taškai)

Juodraštis

¹³ atsitiktinis dydis – zmienna losowa – случайная величина

¹⁴ matematinė viltis – nadzieja matematyczna – математическое ожидание

- 23.** Lygiagretainio $ABCD$ kraštinėje AD pažymėtas taškas M . Atkarpa BM kerta įstrižainę¹⁵ AC taške N (žr. pav.). Yra žinoma, kad $AM = \frac{1}{6}BC$.



- 23.1.** Įrodykite, kad $BN = \frac{6}{7}BM$.

(2 taškai)

Juodraštis

- 23.2.** Pažymėkime $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, o $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Išreikškite vektorių \overrightarrow{BN} vektoriais \vec{a} ir \vec{b} .

(2 taškai)

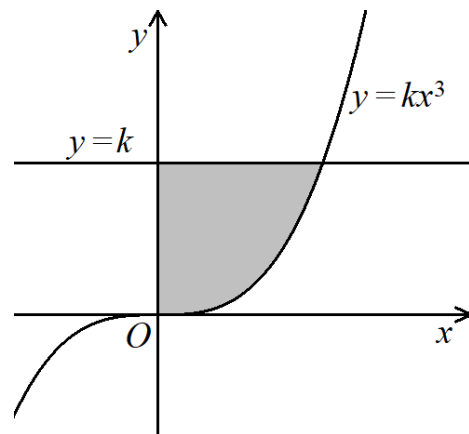
Juodraštis

¹⁵ įstrižainė – przekątna – диагональ

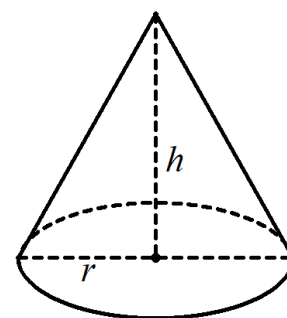
- 24.** Figūrą riboja funkcijos $y = kx^3$ grafikas, tiesė $y = k$ (čia $k > 0$) ir Oy ašis (žr. pav.). Nustatykite, su kuria skaitine k reikšme šios figūros plotas bus lygus 6.

(4 taškai)

Juodraštis



- 25.** Paveiksle pavaizduoto kūgio šoninio paviršiaus¹⁶ plotas yra $S_{\text{son}} = 16\pi\sqrt{3}$. Pažymėkime kūgio aukštinės ilgį h , o kūgio pagrindo spindulio ilgį r . Laikykite, kad $1 \leq r \leq 5$.



- 25.1.** Išreikškę kūgio aukštinės ilgį h per r , parodykite, kad šio kūgio tūrį¹⁷ galima apskaičiuoti pagal formulę $V(r) = \frac{1}{3}\pi r\sqrt{768-r^4}$.
(3 taškai)

Juodraštis

- 25.2.** Parodykite, kad $V'(r) = \frac{1}{3}\pi \frac{768-3r^4}{\sqrt{768-r^4}}$.

(2 taškai)

Juodraštis

- 25.3.** Nustatykite spindulio ilgio r reikšmę, su kuria šio kūgio tūris įgyja didžiausią reikšmę.

(2 taškai)

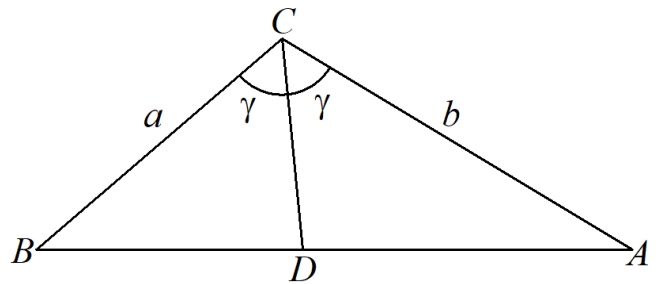
Juodraštis

¹⁶ šoninis paviršius – powierzchnia boczna – боковая поверхность

¹⁷ tūris – objętość – объём

- 26.** Yra žinoma, kad trikampio ABC kraštinės BC ilgis lygus a , kraštinės AC ilgis lygus b (čia $a \neq b$), kampo ACB didumas lygus 2γ , o CD yra trikampio pusiaukampinė¹⁸ (žr. pav.).

Išrodykite, kad $CD = \frac{2ab}{a+b} \cdot \cos \gamma$.



(3 taškai)

Juodraštis

¹⁸ pusiaukampinė – dwusieczna – биссектриса

Juodraštis