

MATEMATIKA

Valstybinio brandos egzamino užduotis

Pagrindinė sesija

2008 m. gegužės 28 d.

Egzamino trukmė – 3 val. (180 min.)

Valstybinio brandos egzamino formulės

Trikampis. $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = rp = \frac{abc}{4R}$; čia a, b, c – trikampio kraštinės, p – pusperimetris, r ir R – įbrėžtinio ir apibrėžtinio apskritimų spinduliai, S – trikampio plotas.

Skritulio išpjova. $S = \frac{\pi R^2}{360^\circ} \cdot \alpha$, $l = \frac{2\pi R}{360^\circ} \cdot \alpha$; čia α – centrinio kampo didumas laipsniais, S – išpjovos plotas, l – išpjovos lanko ilgis, R – apskritimo spindulys.

Nupjautinis kūgis. $S = \pi(R+r) \cdot l$, $V = \frac{1}{3} \pi H(R^2 + Rr + r^2)$; čia R ir r – kūgio pagrindų spinduliai, S – šoninio paviršiaus plotas, V – tūris, H – aukštinė, l – sudaromoji.

Nupjautinės piramidės tūris. $V = \frac{1}{3} H(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)$; čia S_1, S_2 – pagrindų plotai, H – aukštinė.

Rutulys. $S = 4\pi R^2$, $V = \frac{4}{3} \pi R^3$; čia S – rutulio paviršiaus plotas, V – tūris, R – spindulys.

Rutulio nuopjovos tūris. $V = \frac{1}{3} \pi H^2 (3R - H)$; čia R – spindulys, H – nuopjovos aukštinė.

Vektorių skaliarinė sandauga. $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha$;

čia α – kampas tarp vektorių $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$ ir $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$.

Geometrinė progresija. $b_n = b_1 q^{n-1}$, $S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$.

Begalinė nykstamoji geometrinė progresija. $S = \frac{b_1}{1-q}$.

Trigonometrinės funkcijos. $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$, $1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$, $2 \sin^2 \alpha = 1 - \cos 2\alpha$,

$2 \cos^2 \alpha = 1 + \cos 2\alpha$, $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$, $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$,

$\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha \pm \beta}{2} \cos \frac{\alpha \mp \beta}{2}$, $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$,

$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$, $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$.

$\begin{cases} \sin x = a, -1 \leq a \leq 1, \\ x = (-1)^k \arcsin a + \pi k, k \in \mathbb{Z}; \end{cases} \begin{cases} \cos x = a, -1 \leq a \leq 1, \\ x = \pm \arccos a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; \end{cases} \begin{cases} \operatorname{tg} x = a, \\ x = \operatorname{arctg} a + \pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

Deriniai. $C_n^k = C_n^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Tikimybių teorija. Atsitiktinio dydžio X matematinė viltis yra $\mathbf{E} X = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n$, dispersija $\mathbf{D} X = (x_1 - \mathbf{E} X)^2 p_1 + (x_2 - \mathbf{E} X)^2 p_2 + \dots + (x_n - \mathbf{E} X)^2 p_n$.

Išvestinių skaičiavimo taisyklės. $(Cu)' = Cu'$; $(u \pm v)' = u' \pm v'$; $(uv)' = u'v + uv'$; $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$;

čia u ir v – diferencijuojamos funkcijos, C – konstanta. $(a^x)' = a^x \ln a$, $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$.

Sudėtinės funkcijos $h(x) = g(f(x))$ išvestinė $h'(x) = g'(f(x))f'(x)$.

Funkcijos grafiko liestinės taške $(x_0; f(x_0))$ lygtis. $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Logaritmo pagrindo keitimo formulė. $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$.

Kiekvienas teisingas 1–7 uždavinio atsakymas vertinamas 1 tašku.

1. $\frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} =$

A $x^2 - 8$

B $3 - x$

C $x - 3$

D $x + 3$

E kitas atsakymas

2. Aritmetinės progresijos^I pirmasis narys $a_1 = 102$, o antrasis narys $a_2 = 97$. Šios progresijos teigiamų^{II} narių skaičius yra:

A 19

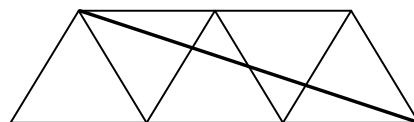
B 20

C 102

D 22

E 21

3. Iš penkių lygiakraščių trikampių^{III}, kurių kiekvieno kraštinė^{IV} lygi 1, sudėta lygiašonė trapecija^V (žr. pav.). Apskaičiuokite gautos trapecijos įstrižainės^{VI} ilgį.



A $\sqrt{13}$

B $\sqrt{10}$

C $\sqrt{8}$

D $\sqrt{7}$

E $\sqrt{5}$

NEPAMIRŠKITE pasirinktus atsakymus žyminčių raidžių įrašyti lentelėje, esančioje paskutiniame šio sąsiuvinio puslapyje.

^I aritmetinė progresija – ciąg arytmetyczny – арифметическая прогрессия

^{II} teigiamas – dodatni – положительный

^{III} lygiakraštis trikampis – trójkąt równoboczny – равносторонний треугольник

^{IV} kraštinė – bok – сторона

^V lygiašonė trapecija – trapez równoramienny – равнобедренная трапеция

^{VI} įstrižainė – przekątna – диагональ

4. Žinoma, kad Š. Amerikos indėnų būstą^I, vadinamą tipiu, statydavo dvi moterys ir šį darbą jos atlikdavo per 1 valandą. Per kiek laiko 10 tipių galėjo pastatyti 4 moterys, dirbdamos vienodu tempu?

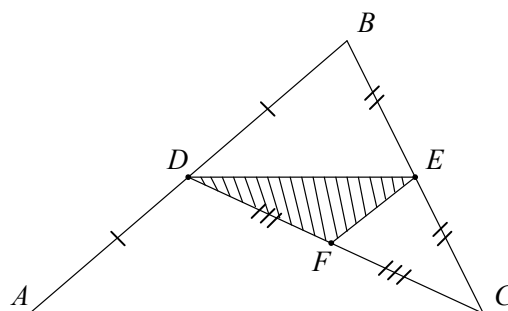


A 20 val. **B** 10 val. **C** 6 val. **D** 5 val. **E** 2,5 val.

5. $\lg\left(\log_5 30 + \log_5 \frac{1}{6}\right) =$

A 10 **B** 1 **C** 0 **D** $\lg 5$ **E** neįmanoma apskaičiuoti

6. Trikampio ABC kraštinėse AB ir BC atitinkamai pažymėti vidurio taškai D ir E , o pusiaukraštinėje^{II} CD – vidurio taškas F . Jei trikampio ABC plotas^{III} lygus 96, tai trikampio DEF plotas lygus:



A 24 **B** 16 **C** 12 **D** 10 **E** 8

NEPAMIRŠKITE pasirinktus atsakymus žyminčių raidžių įrašyti lentelėje, esančioje paskutiniame šio sąsiuvinio puslapyje.

^I būstas – lokum – жилище

^{II} pusiaukraštinė – środkowa – медиана

^{III} plotas – pole – площадь

7. Rita pamiršo slaptažodį. Ji prisimena, kad pirmieji slaptažodžio simboliai yra jos vardas, po to eina penkių skaitmenų rinkinys¹, kurio užrašė yra skaičiai 23 ir 57. Kiek daugiausia skirtingų bandymų reikėtų atlikti norint surinkti teisingą slaptažodį? (Slaptažodžio pavyzdžiai: rita02357, rita57323.)

A 120

B 60

C 30

D 20

E 10

JUODRAŠTIS

NEPAMIRŠKITE pasirinktus atsakymus žyminčių raidžių įrašyti lentelėje, esančioje paskutiniame šio sąsiuvinio puslapyje.
--

¹ skaitmenų rinkinys – wybór cyfr – набор цифр

8. Per vieną parą X banko akcijos atpigo 4 proc. ir dabar vienos akcijos kaina yra 3,12 litų. Atpigusių akcijų parduota už 2 340 000 litų.

8.1. Kiek akcijų parduota?

(1 taškas)

8.2. Kiek litų kainavo viena akcija prieš parą?

(2 taškai)

Čia rašo vertintojai		
I	II	III

Taškų suma			
------------	--	--	--

JUODRAŠTIS

9. Išspręskite nelygybes^I:

9.1. $2(x-1) > 0,4$.

9.2. $5 - x - \frac{7}{x} \leq 0$.

	Čia rašo vertintojai		
	I	II	III
(1 taškas)	—	—	—
(3 taškai)	—	—	—

Taškų suma			
------------	--	--	--

JUODRAŠTIS

^I nelygybė – nierówność – неравенство

10. Išspręskite lygtis^I:

10.1. $3^{2x-1} = 9$.

10.2. $3^{x+1} - 3^{x+2} + 3^{x+3} = 7$.

	Čia rašo vertintojai		
	I	II	III
(1 taškas)	—	—	—
(2 taškai)	—	—	—

Taškų suma			
------------	--	--	--

JUODRAŠTIS

^I lygtis – równanie – уравнение

11. Duota funkcija $f(x) = 2\sin x + x$.

11.1. Raskite funkcijos išvestinę^I.

(1 taškas)

11.2. Apskaičiuokite funkcijos $y = f(x)$ grafiko liestinės^{II}, nubrėžtos taške $(\pi; \pi)$, krypties koeficientą^{III}.

(1 taškas)

Čia rašo vertintojai		
I	II	III
—	—	—
—	—	—

Taškų suma

--	--	--

JUODRAŠTIS

^I išvestinė – pochodna – производная

^{II} grafiko liestinė – styczna do wykresu – касательная графика

^{III} krypties koeficientas – współczynnik kierunkowy – угловой коэффициент

12. Išspręskite lygtį $\sin x \cdot \operatorname{ctg} x = 1$.

(3 taškai)	Čia rašo vertintojai		
	I	II	III
	_____	_____	_____

JUODRAŠTIS

13. Įrodykite, kad $\sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta) = \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha$, $\alpha \neq \beta$.

(3 taškai)

Čia rašo vertintojai		
I	II	III
_____	_____	_____

JUODRAŠTIS

14. Pateikta atsitiktinio dydžio^I X skirstinio^{II} lentelė:

X	0	1	2	3
$P(X)$	0,2	a	b	0,25

Yra žinoma, kad šio atsitiktinio dydžio matematinė viltis^{III} $E X = 1,55$.

14.1. Parodykite, kad $\begin{cases} a + b = 0,55, \\ a + 2b = 0,8. \end{cases}$

(2 taškai)

14.2. Apskaičiuokite a ir b reikšmes.

(1 taškas)

14.3. Raskite $P(X \geq 2)$.

(1 taškas)

Čia rašo vertintojai		
I	II	III

Taškų suma			
------------	--	--	--

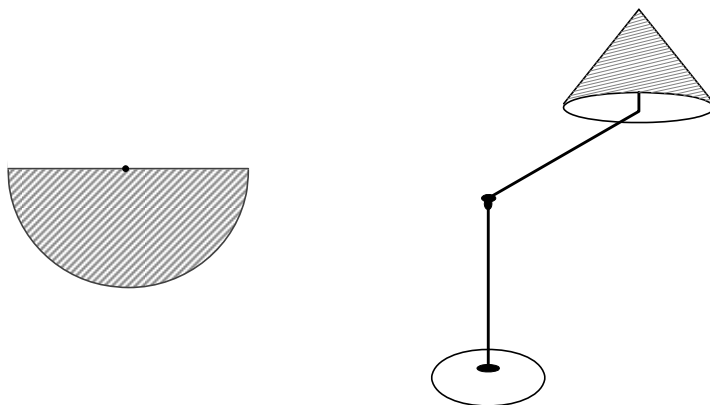
^I atsitiktinis dydis – zmienna losowa – случайная величина

^{II} skirstinys – rozkład – распределение

^{III} matematinė viltis – nadzieja matematyczna – математическое ожидание

JUODRAŠTIS

15. Kūgio^I formos šviestuvo gaubto šoninio paviršiaus išklotinė^{II} yra pusskritis^{III}.



- 15.1. Dizaineris, turėdamas $0,9 \text{ m}^2$ medžiagos, norėjo pagaminti šviestuvo gaubtą (kūgį be pagrindo^{IV}), kurio sudaromosios ilgis^V lygus $0,7 \text{ m}$. Gaubto gamybai buvo panaudota ne visa medžiaga. Kiek procentų medžiagos buvo nepanaudota? (Siūlėms sunaudojamos medžiagos neskaiciuokite).

Atsakymą suapvalinkite dešimtuųjų tikslumu. Laikykite $\pi = 3,14$.

(3 taškai)

- 15.2. Įrodykite, kad kūgio, kurio šoninio paviršiaus išklotinė yra pusskritis, ašinis pjūvis^{VI} yra lygiakraštis trikampis.

(2 taškai)

Čia rašo vertintojai

I	II	III

Taškų suma

--	--	--

^I kūgis – stožek – конус

^{II} šoninio paviršiaus išklotinė – rozwinięcie (siatka) powierzchni bocznej – развёртка боковой поверхности

^{III} pusskritis – półokrąg – полукруг

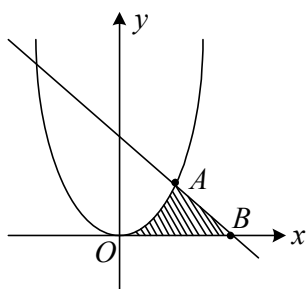
^{IV} pagrindas – podstawa – основание

^V sudaromosios ilgis – długość tworzącej – длина образующей

^{VI} ašinis pjūvis – przekrój osiowy – осевое сечение

JUODRAŠTIS

16. Paveiksle pavaizduoti funkcijų $y = x^2$ ir $y = 2 - x$ grafikai^I.



16.1. Raskite taškų A ir B koordinates^{II}.

(2 taškai)

16.2. Apskaičiuokite figūros^{III}, kurią riboja tų funkcijų grafikai ir teigiama ašies Ox dalis, plotą (žr. pav.).

(3 taškai)

Čia rašo vertintojai		
I	II	III

Taškų suma

--	--	--

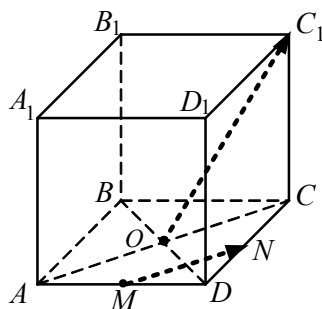
JUODRAŠTIS

^I grafikas – wykres – график

^{II} koordinatės – współrzędne – координаты

^{III} figūra – figura – фигура

17. Kubo^I, kurio briaunos ilgis lygus 2, pagrindo įstrižainės AC ir BD susikerta taške O . Taškai M ir N – atitinkamai kraštinių AD ir DC vidurio taškai^{II}.



Apskaičiuokite kampo^{III} tarp vektorių \overrightarrow{MN} ir $\overrightarrow{OC_1}$ didumą.

(3 taškai)

Čia rašo vertintojai

I

II

III

JUODRAŠTIS

^I kubas – sześcian – куб

^{II} vidurio taškas – środek – середина

^{III} kampas – kąt – угол

- 18.** Kolekcininkas dėžutėje turi 3 senovines monetas, kuriose yra išpaustas karaliaus atvaizdas: dviejų monetų – tik vienoje pusėje, trečiosios monetos – abiejose pusėse.

18.1. Sakyme, šios trys monetos metamos. Kokia tikimybė^I, kad visos jos atsivers karaliaus atvaizdu?

(1 taškas)

18.2. Berniukas iš kolekcininko dėžutės atsitiktinai^{II} išima dvi monetas ir jas meta. Apskaičiuokite tikimybę, kad abi monetos atsivers karaliaus atvaizdu.

(2 taškai)

Čia rašo vertintojai		
I	II	III

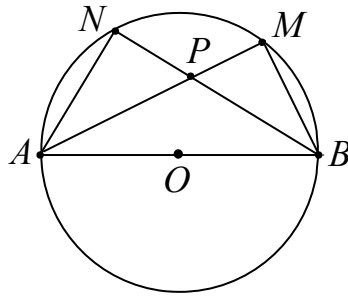
Taškų suma			
------------	--	--	--

JUODRAŠTIS

^I tikimybė – prawdopodobieństwo – вероятность

^{II} atsitiktinai – losowo – случайно

19. Per tašką P , esantį skritulio^I viduje ir nepriklausantį skersmeniui^{II} AB , nubrėžtos stygos^{III} AM ir BN . Įrodykite, kad $AN \cdot BP = BM \cdot AP$.



(3 taškai)

Čia rašo vertintojai		
I	II	III

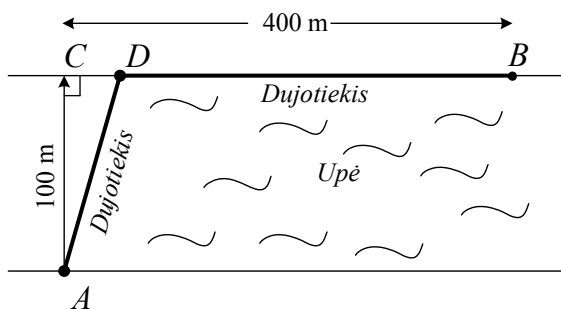
JUODRAŠTIS

^I skritulys – koło – круг

^{II} skersmuo – średnica – диаметр

^{III} styga – cięciwa – хорда

- 20.** Dujotiekis turi būti nutiestas iš taško A viename upės krante į gyvenvietę kitame upės krante – tašką B (žr. pav.). Dujotiekį galima tiesti arba tik upe, arba ir upe, ir sausuma palei upės krantą. Atstumas^I nuo taško A iki artimiausio jam taško C kitame upės krante lygus 100 m. Taškas B yra nutolęs nuo taško C 400 m atstumu. Nutiesti vieną metrą dujotiekio sausumoje kainuoja 120 Lt, o upėje – 25 proc. brangiau negu sausumoje.



- 20.1.** Pažymėję atstumą $CD = x$ m parodykite, kad dujotiekio tiesimo iš taško A į tašką B kaina (littais) yra

$$K(x) = 30(5\sqrt{10000 + x^2} - 4x + 1600), \quad 0 \leq x \leq 400.$$

(2 taškai)

- 20.2.** Nustatykite x reikšmę^{II}, su kuria dujotiekio tiesimo iš taško A į tašką B kaina būtų mažiausia.

(3 taškai)

Čia rašo vertintojai

I	II	III

Taškų suma

--	--	--

^I atstumas – odległość – расстояние

^{II} reikšmė – wartość – значение

JUODRAŠTIS

- 21.** Dviejų dienų renginiui tuščioje salėje reikėjo sustatyti atvežtas kėdes eilėmis, kiekvienoje eilėje statant po vienodą kėdžių skaičių. Pirmą renginio dieną visos atvežtosios kėdės buvo statomos į 13 eilių, bet paskutinė eilė liko nepilna. Antrą renginio dieną visos atvežtosios kėdės toje salėje buvo perstatomos į 27 eiles, kiekvienoje eilėje statant 7-iomis kėdėmis mažiau nei pirmą dieną. Tačiau ir vėl paskutinė eilė liko nepilna: joje trūko 3 kėdžių. Kiek kėdžių buvo atvežta į salę?

(4 taškai)

Čia rašo vertintojai		
I	II	III

JUODRAŠTIS