PATVIRTINTA
Nacionalinės švietimo agentūros direktoriaus
2023 m. liepos 10 d. įsakymu Nr. VK-550

2023 METŲ PAKARTOTINĖS SESIJOS MATEMATIKOS VALSTYBINIO BRANDOS EGZAMINO KANDIDATŲ DARBŲ VERTINIMO INSTRUKCIJA

I dalis

Užd. Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ats.	A	A	D	C	C	B	A	D	D	B

II dalis

11	$f'(x) = 6x^2 - 30x + 24$
12.1	$x \in [0;5]$ (arba $[0;5]$)
12.2	-5
12.3	$y \in [-3;6]$ (arba $[-3;6]$)
13	$\cos\angle ABC = -\frac{1}{2}$ (arba $-\frac{1}{2}$)
14.1	0,25 (arba $\frac{1}{4}$)
14.2	$\mathbf{P}(A) = \frac{2}{15}$ (arba 0,1(3))
15.1	75°
15.2	S = 25 (arba 25)
16	$y = 11 - 3x$
17	$\sin\alpha$
18	$p^2 - q$

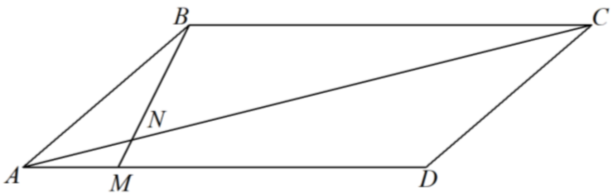
III dalis

Užd.	Sprendimas ir atsakymas	Taškai	Vertinimas
19		**2**	
19.1	$m(4) = 20 \cdot 3^{0,25 \cdot 4} = 20 \cdot 3 = 60$ (muselių). *Ats.:* 60 muselių.	1	Už gautą teisingą atsakymą.
19.2	$20 \cdot 3^{0,25 \cdot t} = 4860$, $3^{0,25 \cdot t} = 243$,	1	Už teisingai pasirinktą sprendimo būdą.
	$0,25t = 5$, $t = 20$ (val.). *Ats.:* po 20 valandų.	1	Už gautą teisingą atsakymą.

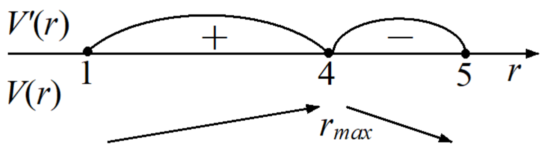
Užd.	Sprendimas ir atsakymas	Taškai	Vertinimas
20		**6**	
20.1	$25 + 27 + 29 = 81$. Arba $S_3 = \dfrac{25+29}{2} \cdot 3 = 81$. *Ats.:* 81 vieta.	1	Už gautą teisingą atsakymą.
20.2		**2**	
	$25 + 2(n-1) = 101$,	1	Už teisingai sudarytą tiesinę lygtį.
	$2n - 2 = 76$, $n = 39$ (eil.). *Ats.:* 39 eilės.	1	Už gautą teisingą atsakymą.
20.3		**3**	
	$S_n = \dfrac{2 \cdot 25 + 2(n-1)}{2} \cdot n = (24+n)n$.	1	Už teisingai pritaikytą ir pertvarkytą aritmetinės progresijos pirmųjų *n* narių sumos formulę.
	$n = 9k,\ k \in N$; $(24+9k) \cdot 9k =$	1	Už teisingai pasirinktą įrodymo būdą.
	$= (8+3k) \cdot 27k$. Kadangi $(8+3k)k \in N$ su $k \in N$, tai $27 \cdot (8+3k)k$ dalijasi iš 27.	1	Už pagrindimą, kad sandauga dalijasi iš 27.

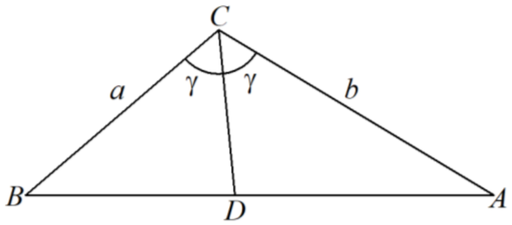
Užd.	Sprendimas ir atsakymas	Taškai	Vertinimas
21		**5**	
21.1		**2**	
	$\log_2(x^2-1)=3$, $x^2-1=2^3$,	1	Už teisingai pritaikytą logaritmo apibrėžimą.
	$x^2=9$, $x=\pm 3$. *Ats.:* $x=\pm 3$.	1	Už gautą teisingą atsakymą.
21.2		**3**	
	$\sqrt{x+3}+2x=0$, $\sqrt{x+3}=-2x$, $x+3=4x^2$,	1	Už teisingai pasirinktą iracionaliosios lygties sprendimo būdą.
	$4x^2-x-3=0$, $x=-\frac{3}{4}$ arba $x=1$.	1	Už gautus teisingus kvadratinės lygties sprendinius.
	Patikriname sprendinius, ar tinka pradinei lygčiai: $x=-\frac{3}{4}$ tinka, $x=1$ netinka. *Ats.:* $x=-\frac{3}{4}$.	1	Už gautą teisingą atsakymą.

Užd.	Sprendimas ir atsakymas	Taškai	Vertinimas
22		**6**	
22.1		**2**	
	Įvykis A – „moneta atvirto arba tris kartus herbu, arba tris kartus skaičiumi“. Todėl $m = 2$, o $n = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.	1	Už įvykiui palankių arba visų baigčių skaičiaus nustatymą.
	$\mathbf{P}(A) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$. *Ats.:* $\frac{1}{4}$.	1	Už gautą teisingą atsakymą.
22.2.1		**2**	
	$\{(\mathrm{H;H;S}); (\mathrm{H;S;H}); (\mathrm{S;H;H})\}$	1	Už teisingai išvardytas įvykiui $X = 2$ palankias baigtis.
	$\mathbf{P}(X = 2) = \frac{3}{8}$. *Ats.:* $\frac{3}{8}$.	1	Už gautą teisingą atsakymą.
22.2.2		**2**	
	$\mathbf{P}(X = 1) = 1 - \frac{1}{8} - \frac{1}{8} - \frac{3}{8} = \frac{3}{8}$. <table><tr><td>$m$</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>$\mathbf{P}(X = m)$</td><td>$\frac{1}{8}$</td><td>$\frac{3}{8}$</td><td>$\frac{3}{8}$</td><td>$\frac{1}{8}$</td></tr></table>	1	Už teisingai užpildytą lentelę.
	$\mathbf{E}X = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = 1{,}5$. *Ats.:* 1,5.	1	Už gautą teisingą atsakymą.

Užd.	Sprendimas ir atsakymas	Taškai	Vertinimas
23		4	
23.1		2	
	 Trikampiai *AMN* ir *CBN* yra panašūs pagal du kampus, nes $\angle ANM = \angle CNB$ (kryžminiai) ir $\angle NAM = \angle NCB$ (vidaus priešiniai, $AD \parallel BC$).	1	Už pagrindimą, kad trikampiai *AMN* ir *CBN* yra panašūs.
	Todėl: $\frac{AM}{CB} = \frac{MN}{BN} = \frac{1}{6}$, $MN = \frac{1}{6}BN$, $BN = BM - MN = BM - \frac{1}{6}BN \Rightarrow$ $\frac{7}{6}BN = BM \Rightarrow BN = \frac{6}{7}BM$.	1	Už teisingą pagrindimą, kad $BN = \frac{6}{7}BM$.
23.2		2	
	$\overrightarrow{BN} = \frac{6}{7}\overrightarrow{BM} = \frac{6}{7}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}\right) =$	1	Už teisingai pritaikytą vektorių sudėties trikampio taisyklę.
	$= \frac{6}{7}\left(\overrightarrow{BA} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AD}\right) = \frac{6}{7}\left(-\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b}\right) = -\frac{6}{7}\vec{a} + \frac{1}{7}\vec{b}.$ *Ats.:* $\overrightarrow{BN} = -\frac{6}{7}\vec{a} + \frac{1}{7}\vec{b}.$	1	Už gautą teisingą atsakymą.

Užd.	**Sprendimas ir atsakymas**	**Taškai**	**Vertinimas**
24		**4**	
	$kx^3 = k, \quad k > 0,$ $x^3 = 1,$ $x = 1.$	1	Už teisingai rastą grafikų susikirtimo taško abscisę.
	$\int_0^1 \left(k - kx^3\right) dx = 6,$	1	Už teisingai užrašytą apibrėžtinį integralą figūros plotui apskaičiuoti.
	$\left(kx - \frac{kx^4}{4}\right)\Big\vert_0^1 = 6,$	1	Už teisingai surastą pirmykštę funkciją.
	$k - \frac{k}{4} = 6,$ $k = 8.$ *Ats.:* $k = 8.$	1	Už gautą teisingą atsakymą.

Užd.	**Sprendimas ir atsakymas**	**Taškai**	**Vertinimas**
25		**7**	
25.1		**3**	
	$\pi rl = 16\pi\sqrt{3}$, $l = \frac{16\sqrt{3}}{r}$,	1	Už teisingai pasirinktą sprendimo būdą.
	$h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{\frac{768}{r^2} - r^2} = \frac{1}{r}\sqrt{768 - r^4}$,	1	Už teisingai išreikštą *h* per *r*.
	$V(r) = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot \frac{1}{r}\sqrt{768 - r^4} = \frac{1}{3}\pi r\sqrt{768 - r^4}$.	1	Už teisingą pagrindimą.
25.2		**2**	
	$V'(r) = \left(\frac{1}{3}\pi r\sqrt{768 - r^4}\right)' = \frac{1}{3}\pi\left(\sqrt{768 - r^4} - \frac{2r^4}{\sqrt{768 - r^4}}\right) =$	1	Už teisingai gautą sudėtinės funkcijos išvestinę.
	$\frac{1}{3}\pi\frac{768 - r^4 - 2r^4}{\sqrt{768 - r^4}} = \frac{1}{3}\pi\frac{768 - 3r^4}{\sqrt{768 - r^4}}$.	1	Už gautą teisingą išvestinę.
25.3		**2**	
	$\frac{1}{3}\pi\frac{768 - 3r^4}{\sqrt{768 - r^4}} = 0, \quad 1 \le r \le 5$, $768 - 3r^4 = 0$, $r = 4$.	1	Už teisingai gautą kritinį tašką.
	 *Ats.:* $r = 4$.	1	Už teisingą pagrindimą, kad kūgio tūris yra didžiausias, kai $r = 4$.

Užd.	Sprendimas ir atsakymas	Taškai	Vertinimas
26		3	
	 **I būdas** Pastebėkime, kad $S_{\Delta ADC}+S_{\Delta BDC}=S_{\Delta ABC}$. Pažymėkime $CD=k$. $\frac{1}{2}ak\sin\gamma+\frac{1}{2}bk\sin\gamma=\frac{1}{2}ab\sin(2\gamma)$,	1	Už teisingai pasirinktą sprendimo būdą (pastebėjimą, kad dviejų trikampių *ADC* ir *BDC* plotų suma lygi trikampio *ABC* plotui) ir teisingai pritaikytą ploto formulę.
	$\frac{1}{2}ak\sin\gamma+\frac{1}{2}bk\sin\gamma=\frac{1}{2}ab\cdot 2\sin\gamma\cos\gamma$, $ak\sin\gamma+bk\sin\gamma=2ab\sin\gamma\cos\gamma$,	1	Už teisingai pritaikytą sinuso dvigubo kampo formulę.
	$k\sin\gamma(a+b)=2ab\sin\gamma\cos\gamma\Rightarrow$ $k=\frac{2ab\sin\gamma\cos\gamma}{\sin\gamma(a+b)}=\frac{2ab\cos\gamma}{a+b}=\frac{2ab}{a+b}\cdot\cos\gamma$.	1	Už teisingą įrodymą.
	II būdas Pažymėkime $CD=k$. Pagal kosinusų teoremą: $AD^2=b^2+k^2-2bk\cos\gamma$, $BD^2=a^2+k^2-2ak\cos\gamma$.	1	Už teisingai pasirinktą sprendimo būdą (kosinusų teoremos pritaikymą trikampiams *ADC* ir *BDC*).
	Pagal trikampio pusiaukampinės savybę: $\frac{AD}{BD}=\frac{b}{a}\Rightarrow\frac{AD^2}{BD^2}=\frac{b^2}{a^2}\Rightarrow$ $\frac{b^2+k^2-2bk\cos\gamma}{a^2+k^2-2ak\cos\gamma}=\frac{b^2}{a^2}\Rightarrow$	1	Už teisingai pritaikytą trikampio pusiaukampinės savybę ir teisingai pertvarkytą reiškinį.
	$a^2b^2+a^2k^2-2a^2bk\cos\gamma=b^2a^2+b^2k^2-2b^2ak\cos\gamma$, $a^2k^2-b^2k^2=2a^2bk\cos\gamma-2b^2ak\cos\gamma$, $k^2(a-b)(a+b)=2abk\cos\gamma(a-b)\Rightarrow$ $k=\frac{2ab\cos\gamma(a-b)}{(a-b)(a+b)}=\frac{2ab}{a+b}\cdot\cos\gamma$.	1	Už teisingą įrodymą.
	III būdas Pažymėkime $CD=k$. Pagal sinusų teoremą: $\frac{BD+AD}{\sin(2\gamma)}=\frac{a}{\sin\angle BAC}$, $\frac{k}{\sin\angle BAC}=\frac{AD}{\sin\gamma}$. $\Rightarrow$	1	Už teisingai pasirinktą sprendimo būdą (sinusų teoremos pritaikymą trikampiams *ABC* ir *ADC* arba *ABC* ir *BDC*).

	$\sin\angle BAC = \dfrac{a\sin(2\gamma)}{BD + AD} = \dfrac{k\sin\gamma}{AD}$. Pagal trikampio pusiaukampinės savybę: $\dfrac{AD}{BD} = \dfrac{b}{a} \Rightarrow \dfrac{a\sin(2\gamma)}{\dfrac{AD\cdot a}{b} + AD} = \dfrac{k\sin\gamma}{AD} \Rightarrow$	1	Už teisingai pritaikytą trikampio pusiaukampinės savybę ir teisingai pertvarkytą reiškinį.
	$\Rightarrow \dfrac{ab\sin(2\gamma)}{a+b} = k\sin\gamma \Rightarrow \dfrac{ab\cdot 2\sin\gamma\cos\gamma}{a+b} = k\sin\gamma \Rightarrow$ $\Rightarrow k = \dfrac{2ab}{a+b}\cdot\cos\gamma$.	1	Už teisingai pritaikytą sinuso dvigubo kampo formulę ir teisingą įrodymą.