



MATEMATIKOS

2006 m. valstybinio brandos egzamino užduotis

Pagrindinė sesija

2006 m. gegužės 17 d.

Trukmė – 3 val.

Valstybinio brandos egzamino formulės

Trikampis. $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = rp = \frac{abc}{4R}$; čia a, b, c – trikampio kraštinės, p – pusperimetris, r ir R – įbrėžtinio ir apibrėžtinio apskritimų spinduliai, S – trikampio plotas.

Iškilojo daugiakampio kampų suma. $S_n = 180^\circ (n - 2)$.

Skritulio išpjova. $S = \frac{\pi R^2}{360^\circ} \cdot \alpha$, $l = \frac{2\pi R}{360^\circ} \cdot \alpha$; čia α – centrinio kampo didumas laipsniais, S – išpjovos plotas, l – išpjovos lanko ilgis, R – apskritimo spindulys.

Nupjautinis kūgis. $S = \pi(R+r) \cdot l$, $V = \frac{1}{3} \pi H(R^2 + Rr + r^2)$; čia R ir r – kūgio pagrindų spinduliai, S – šoninio paviršiaus plotas, V – tūris, H – aukštinė, l – sudaromoji.

Nupjautinės piramidės tūris. $V = \frac{1}{3} H(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)$; čia S_1, S_2 – pagrindų plotai, H – aukštinė.

Rutulys. $S = 4\pi R^2$, $V = \frac{4}{3} \pi R^3$; čia S – rutulio paviršiaus plotas, V – tūris, R – spindulys.

Rutulio nuopjovos tūris. $V = \frac{1}{3} \pi H^2(3R - H)$; čia R – spindulys, H – nuopjovos aukštinė.

Vektorių skaliarinė sandauga. $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha$;

čia α – kampas tarp vektorių $\vec{a} \{x_1, y_1, z_1\}$ ir $\vec{b} \{x_2, y_2, z_2\}$.

Geometrinė progresija. $b_n = b_1 q^{n-1}$, $S_n = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q}$.

Begalinė nykstamoji geometrinė progresija. $S = \frac{b_1}{1 - q}$.

Trigonometrinės funkcijos. $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$, $1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$, $2 \sin^2 \alpha = 1 - \cos 2\alpha$,

$2 \cos^2 \alpha = 1 + \cos 2\alpha$, $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$, $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$,

$\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha \pm \beta}{2} \cos \frac{\alpha \mp \beta}{2}$, $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$,

$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$, $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$.

Niutono binomo formulė. $(a + b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \dots + C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + C_n^n b^n$.

$C_n^k = C_n^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$.

Tikimybių teorija. Atsitiktinio dydžio X matematinė viltis yra $EX = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n$, dispersija $DX = (x_1 - EX)^2 p_1 + (x_2 - EX)^2 p_2 + \dots + (x_n - EX)^2 p_n$.

Išvestinių skaičiavimo taisyklės. $(Cu)' = Cu'$; $(u \pm v)' = u' \pm v'$; $(uv)' = u'v + uv'$; $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$;

čia u ir v – taške diferencijuojamos funkcijos, C – konstanta. $(a^x)' = a^x \ln a$, $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$.

Sudėtinės funkcijos $h(x) = g(f(x))$ išvestinė $h'(x) = g'(f(x)) f'(x)$.

Funkcijos grafiko liestinės taške $(x_0; f(x_0))$ lygtis. $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Logaritmo pagrindo keitimo formulė. $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$.

Kiekvienas teisingai išspręstas uždavinys (1–6) vertinamas 1 tašku.

1. Kuriam intervalui priklauso skaičius¹ $\log_3 10$?

- A** $(-3; -2)$ **B** $(0; 1)$ **C** $(1; 2)$ **D** $(3; 4)$ **E** $(2; 3)$

2. Knygas dedant į krūveles po 3, lieka 2 knygos, taip pat 2 knygos lieka ir dedant jas į krūveles po 10. Knygų buvo:

- A** 12 **B** 8 **C** 32 **D** 16 **E** 24

3. Kuri pora lygčių² yra ekvivalenčios lygtys?

- A** $\frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$ ir $x + 2 = 4$ **B** $x - 1 = 3$ ir $(x - 1)^2 = 9$
C $x = 3$ ir $x + \frac{1}{x - 3} = 3 + \frac{1}{x - 3}$ **D** $x + 1 = 1$ ir $x + 1 + \frac{1}{x - 1} = 1 + \frac{1}{x - 1}$
E $\sqrt{x^2} = 1$ ir $x = 1$

4. $\sqrt{(\sqrt{5} - 3)^2} - \sqrt{(\sqrt{5} - 2)^2} =$

- A** -1 **B** $5 - 2\sqrt{5}$ **C** $2\sqrt{5} - 5$ **D** 1 **E** 5

5. Kurios parabolės viršūnė yra II ketvirtyje?

- A** $y = (x - 1)^2 - 1$ **B** $y = (x + 2)^2 + 1$ **C** $y = (x + 2)^2 - 3$
D $y = (x - 4)^2$ **E** $y = x^2 - 1$

6. Kiek sprendinių intervale $\left[-\frac{5\pi}{2}; 2\pi\right]$ turi lygtis $\cos x = \frac{1}{2}$?

- A** 3 **B** 4 **C** 7 **D** 5 **E** 6

¹ skaičius – число – liczba

² lygtis – уравнение – równanie

JUODRAŠTIS

7. Palyginkite $\log_{\frac{1}{a}} a$ ir $\log_a \frac{1}{a}$, kai $a > 1$.

(2 taškai)

Čia rašo vertintojai		
I	II	III

8. Priekinio dviračio rato apskritimo¹ ilgis 120 cm, galinio rato – 122 cm. Kokį atstumą² (metrais) nuvažiavus dviračiu, jo priekinis ratas apsisuks vienu apsisukimu daugiau negu galinis?

(2 taškai)

Čia rašo vertintojai		
I	II	III

9. Su kuriomis a ($a \neq 0$) reikšmėmis³ funkcijų $y = ax^2 + 6x + 3$ ir $y = 2x - a$ grafikai neturi bendrų taškų?

(3 taškai)

Čia rašo vertintojai		
I	II	III

¹ apskritimas – окружность – okrag

² atstumas – расстояние – odległość

³ reikšmė – значение – wartość

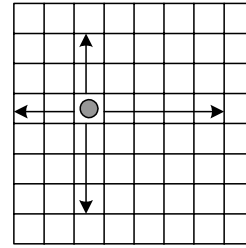
10. Draudžiant būstą metams 80 000 Lt draudimo suma nuo stichinės nelaimės, reikia mokėti 64 Lt, o draudžiant ta pačia suma nuo vagystės – 160 Lt. Draudžiant būstą 80 000 Lt suma nuo stichinės nelaimės ir nuo vagystės kartu, taikoma 25 procentų nuolaida. Kiek procentų draudimo sumos reikia mokėti draudžiant nuo abiejų rizikų kartu?

(3 taškai)

Čia rašo vertintojai		
I	II	III

JUODRAŠTIS

11. Paveiksle pavaizduotos šachmatų lentos viename iš langelių padėta šachmatų figūra – bokštas¹ ir parodytos šios figūros galimos judėjimo kryptys (bokštas gali judėti nurodytomis kryptimis ir užimti bet kurį langelį kiekviena nurodyta kryptimi). Keliais skirtingais būdais šachmatų lentoje galima taip padėti du bokštus, kad jie vienas kitą galėtų nukirsti (du bokštai kerta vienas kitą, kai jie gali užimti vienas kito langelį).



(3 taškai)

Čia rašo vertintojai		
I	II	III

JUODRAŠTIS

¹ bokštas – ладья – wieża

12. Išspręskite nelygybę¹

$$\frac{x^2 + x - 6}{4 - x} \leq 0.$$

(3 taškai)

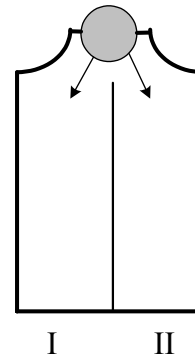
Čia rašo vertintojai		
I	II	III

JUODRAŠTIS

¹ nelygybė – неравенство – nierówność

- 14.** Į žaidimo urną mestas rutuliukas su vienodomis tikimybėmis¹ gali įkristi į bet kurią iš dviejų urnos sekcijų – į pirmąją arba į antrąją (žr. pav.). Į šią urną įmesti trys rutuliukai. Sakykime, X – rutuliukų skaičius pirmojoje sekcijoje. Parašykite atsitiktinio dydžio X skirstinį².

(3 taškai)



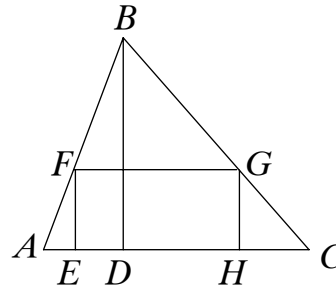
Čia rašo vertintojai		
I	II	III

JUODRAŠTIS

¹ tikimybė – вероятность – prawdopodobieństwo

² atsitiktinio dydžio skirstinys – распределение случайной величины – rozkład zmiennej losowej

- 15.** Į trikampį¹ ABC , kurio pagrindo kraštinės² AC ilgis 10 cm, o aukštinės BD ilgis 8 cm, įbrėžtas stačiakampis³ $EFGH$ (žr. pav.). Šio stačiakampio dvi viršūnės yra trikampio pagrindo kraštinėje, o kitos dvi – kitose trikampio kraštinėse.



1. Sakykime, EF ilgis x cm. Įrodykite, kad stačiakampio $EFGH$ plotas yra

$$S = \frac{5}{4}(8x - x^2).$$

(2 taškai)

- 2.** Kokio didžiausio ploto⁴ stačiakampį galima įbrėžti į trikampį ABC ?

(3 taškai)

Ĉia raŝo vertintojai		
<i>I</i>	<i>II</i>	<i>III</i>
_____	_____	_____
_____	_____	_____

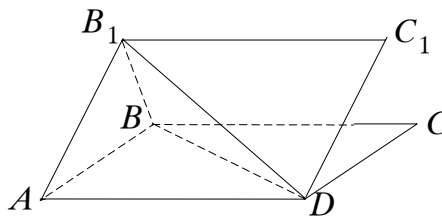
JUODRAŠTIS

¹ trikampis – треугольник – trójkąt

² kraštinė – сторона – bok, ramię

³ stačiakampis – прямоугольник – prostokąt⁴ plotas – площадь – pole

16. Du lygūs kvadratai $ABCD$ ir AB_1C_1D turi bendrą kraštinę AD , o jų plokštumos¹ sudaro 60° didumo dvisienį kampą². Iš bendros viršūnės D kiekviename kvadrate nubrėžtos įstrižainės³ DB ir DB_1 (žr. pav.). Raskite kampo tarp šių įstrižainių kosinuso.



(4 taškai)

Čia rašo vertintojai		
I	II	III

JUODRAŠTIS

¹ plokštuma – плоскость – płaszczyzna

² dvisienis kampas – двугранный угол – kąt dwuścienny

³ įstrižainė – диагональ – przekątna

17. Paveiksle pavaizduoti funkcijų $y = -x^2 + 1$ ir $y = -2x^2 + 2$ grafikai.

1. Raskite taškų A ir C koordinates.

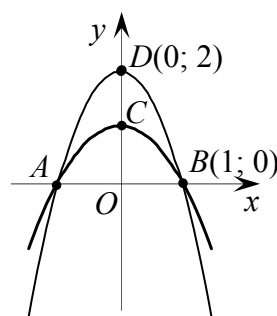
(1 taškas)

2. Įrodykite, kad kreivinės figūros $ACBOA$ plotas lygus $\frac{4}{3}$.

(2 taškai)

3. Apskaičiuokite kreivinės figūros $ADBCA$ plotą.

(2 taškai)



Čia rašo vertintojai

I II III

— — —

— — —

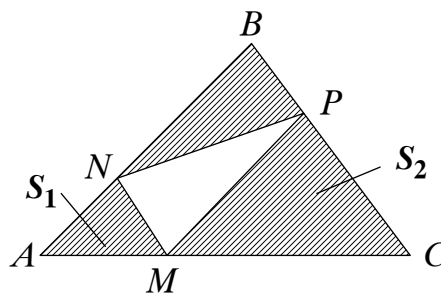
— — —

Taškų suma

— — —

JUODRAŠTIS

18. Per trikampio ABC kraštinės AC tašką M išvesta atkarpa¹ MN , lygiagreti su BC , ir atkarpa MP , lygiagreti su AB . Taškai N ir P sujungti atkarpa NP (žr. pav.).



1. Trikampiai MPC ir ABC yra panašūs. Jų panašumo koeficientas k . Įrodykite, kad $\frac{S_{ABC}}{S_{MPC}} = k^2$.

(2 taškai)

2. Trikampių ANM ir MPC plotai yra S_1 ir S_2 .

- a) Įrodykite, kad trikampio ABC plotas S gali būti išreikštas plotais S_1 ir S_2 šitaip: $S = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2$

(2 taškai)

- b) Apskaičiuokite trikampio BNP plotą, kai $S_1 = 4 \text{ cm}^2$, $S_2 = 9 \text{ cm}^2$.

(2 taškai)

Čia rašo vertintojai		
I	II	III

Taškų suma

JUODRAŠTIS

¹ atkarpa – отрезок – odcinek

19. Ar skaičiai 1, 7 ir 18 gali būti kurios nors didėjančios geometrinės progresijos¹ nariai (nebūtinai gretimi). Atsakymą pagrįskite.

(4 taškai)

Čia rašo vertintojai		
I	II	III

JUODRAŠTIS

¹ geometrinė progresija – геометрическая прогрессия – postęp geometryczny