



MATEMATIKA

Valstybinio brandos egzamino pavyzdinė užduotis

Trukmė – 3 val. (180 min.)

NURODYMAI

1. Gavę užduoties sąsiuvinį bei atsakymų lapą patikrinkite, ar juose nėra tuščių lapų ar kitokio aiškiai matomo spausdinimo broko. Pastebėję praneškite egzamino vykdytojui.
2. Įsitikinkite, kad atsakymų lapas pažymėtas lipduku, kurio numeris sutampa su jūsų eilės numeriu.
3. Stenkitės išspręsti kuo daugiau uždavinių, neatsižvelgdami į tai, pagal kokio kurso (bendrojo ar išplėstinio) programą dalyko mokėtės mokykloje. Neatsakę į kurį nors klausimą, nenusiminkite ir stenkitės atsakyti į kitus.
4. Uždavinių sprendimus / atsakymus pirmiausia galite rašyti užduoties sąsiuvinyje, kuriame yra palikta vietos juodraščiui. Galite naudotis rašymo priemonėmis (pieštuku, tamsiai mėlynai rašančiu rašikliu), trintuku, braižybos įrankiais, skaičiuotuvu be tekstinės atminties. Jei neabejojate dėl atsakymo, iš karto rašykite atsakymų lape. **Vertintojams bus pateikiamas tik atsakymų lapas!**
5. Atsakymų lape rašykite TIK tamsiai mėlynai rašančiu rašikliu. Saugokite atsakymų lapą (neįplėškite ir nesulamdykite), nesinaudokite trintuku ir koregavimo priemonėmis. Sugadintuose lapuose įrašyti atsakymai nebus vertinami.
6. Pasirinktus **I dalies** uždavinių atsakymus atsakymų lape pažymėkite kryželiu ☒ (žymėkite tik vieną atsakymo variantą). Jei pažymėjote neaiškiai arba daugiau kaip vieną atsakymo variantą, tas klausimas bus vertinamas 0 taškų. Suklydę atsakymą galite taisyti atsakymų lape nurodytoje vietoje.
7. **II dalies** uždavinių ar jų dalių atsakymus įrašykite tam skirtose atsakymų lapo vietose.
8. Atsakymų lape skirtose vietose įrašykite **III dalies** uždavinių sprendimus ir atsakymus. Už ribų parašyti sprendimai ir atsakymai nebus vertinami.
9. Atsakymų lape neturi būti užrašų ar kitokių ženklų, kurie leistų identifikuoti darbo autorių.

Linkime sėkmės!

MATEMATIKOS FORMULĖS

Greitosios daugybos formulės: $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$, $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$.

Aritmetinės progresijos pirmųjų n narių suma: $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$.

Geometrinė progresija: $b_n = b_1 q^{n-1}$; $S_n = \frac{b_1 - qb_n}{1 - q} = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q}$.

Nykstamosios geometrinės progresijos narių suma: $S = \frac{b_1}{1 - q}$.

Sudėtinių procentų formulė: $S_n = S \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$; čia S – pradinis dydis, p – palūkanų norma, n – laikotarpio skaičius.

Trikampis: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$,

$S = \frac{1}{2} ab \sin C = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = rp = \frac{abc}{4R}$;

čia a, b, c – trikampio kraštinių ilgiai, A, B, C – prieš jas esančių kampų didumai, p – pusperimetris, r ir R – įbrėžtinio ir apibrėžtinio apskritimų spindulių ilgiai, S – plotas.

Skritulio išpjova: $S = \frac{\pi R^2}{360^\circ} \cdot \alpha$, $l = \frac{2\pi R}{360^\circ} \cdot \alpha$;

čia α – centrinio kampo didumas laipsniais, S – išpjovos plotas, l – išpjovos lanko ilgis, R – apskritimo spindulio ilgis.

Kūgis: $S_{\text{šon. pav.}} = \pi R l$, $V = \frac{1}{3} \pi R^2 H$.

Rutulys: $S = 4\pi R^2$, $V = \frac{4}{3} \pi R^3$.

Nupjautinis kūgis: $S_{\text{šon. pav.}} = \pi(R+r)l$, $V = \frac{1}{3} \pi H(R^2 + Rr + r^2)$;

čia R ir r – kūgio pagrindų spindulių ilgiai, V – tūris, H – aukštinės ilgis, l – sudaromosios ilgis.

Nupjautinės piramidės tūris: $V = \frac{1}{3} H(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)$;

čia S_1, S_2 – pagrindų plotai, H – aukštinės ilgis.

Rutulio nuopjova: $S = 2\pi R H$, $V = \frac{1}{3} \pi H^2(3R - H)$; čia R – rutulio spindulio ilgis, H – nuopjovos aukštinės ilgis.

Erdvės vektoriaus ilgis: $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; čia $\vec{a} = \{x, y, z\}$.

Vektorių skaliarinė sandauga: $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha$;

čia α – kampas tarp vektorių $\vec{a} \{x_1, y_1, z_1\}$ ir $\vec{b} \{x_2, y_2, z_2\}$.

Trigonometrinių funkcijų sąryšiai:

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \quad 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}, \quad 2 \sin^2 \alpha = 1 - \cos 2\alpha, \quad 2 \cos^2 \alpha = 1 + \cos 2\alpha,$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta, \quad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta, \quad \operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}.$$

Trigonometrinių funkcijų reikšmių lentelė:

α°	0°	30°	45°	60°	90°
$\alpha \text{ rad}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–

Trigonometrinės lygtys:

$$\sin x = a,$$

$$x = (-1)^k \arcsin a + \pi k; \text{ čia } k \in \mathbb{Z}, -1 \leq a \leq 1;$$

$$\cos x = a,$$

$$x = \pm \arccos a + 2\pi k; \text{ čia } k \in \mathbb{Z}, -1 \leq a \leq 1;$$

$$\operatorname{tg} x = a,$$

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi k; \text{ čia } k \in \mathbb{Z}.$$

Išvestinių skaičiavimo taisyklės:

$$(cu)' = cu', \quad (u \pm v)' = u' \pm v', \quad (uv)' = u'v + uv', \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2};$$

čia $u = u(x)$ ir $v = v(x)$ – diferencijuojamosios funkcijos, c – konstanta.

$$\textbf{Funkcijų išvestinės: } (a^x)' = a^x \ln a, \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a};$$

$$\text{sudėtinės funkcijos } h(x) = g(f(x)) \text{ išvestinė } h'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

$$\textbf{Funkcijos grafiko liestinės taške } (x_0, f(x_0)) \text{ lygtis: } y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

$$\textbf{Pagrindinės logaritmų savybės: } \log_a(xy) = \log_a x + \log_a y, \quad \log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y,$$

$$\log_a x^k = k \log_a x, \quad \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

$$\textbf{Derinių skaičius: } C_n^k = C_n^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \quad \textbf{Gretinių skaičius: } A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

$$\textbf{Tikimybių teorija: } \text{atsitiktinio dydžio } X \text{ matematinė viltis } EX = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n,$$

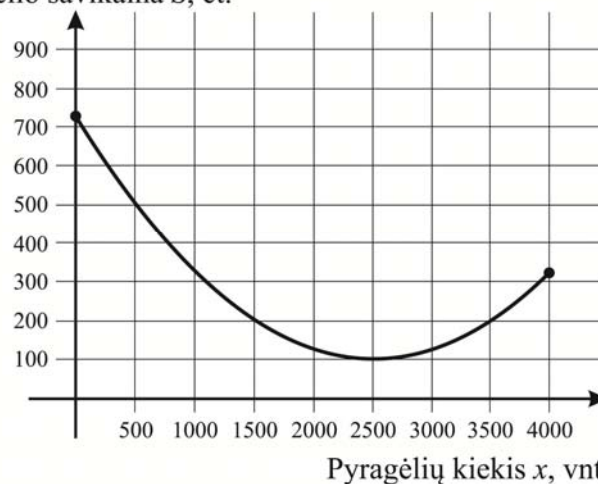
$$\text{dispersija } DX = (x_1 - EX)^2 p_1 + (x_2 - EX)^2 p_2 + \dots + (x_n - EX)^2 p_n.$$

I dalis

Kiekvienas šios dalies uždavinys (01–10) turi tik vieną teisingą atsakymą, vertinamą **1 tašku**. Pasirinkite, jūsų nuomone, teisingą atsakymą ir pažymėkite jį atsakymų lape kryželiu ☒.

- 01.** Paveiksle pavaizduota vieno pyragėlio kepimo ir pardavimo savikainos S euro centais priklausomybė nuo per dieną pagamintų ir parduotų pyragėlių kiekio x . Kiek reikia pagaminti ir parduoti pyragėlių per dieną, kad vieno pyragėlio savikaina būtų mažiausia?

- A** 4000
B 2500
C 100
D 0

Pyragėlio savikaina S , ct.

Juodraštis

- 02.** Mokytoja, įvertinusi 30 mokinių kontrolinius darbus, apskaičiavo, kad visų darbų pažymių vidurkis yra 7,1. Rašydama pažymius į elektroninį dienyną, mokytoja pasigedo vieno darbo. 29 įrašytų į elektroninį dienyną pažymių vidurkis yra 7. Koku pažymiu buvo įvertintas dingęs darbas?

- A** 7 **B** 8 **C** 9 **D** 10

Juodraštis

03. Mažiausias lygties $\sqrt{x^2 - 9} = 4$ sprendinys yra:

A 7

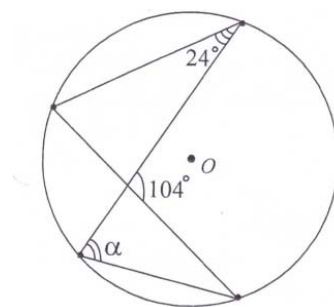
B 5

C -5

D -7

Juodraštis

04. Taškas O yra apskritimo centras. Kampo α didumas yra:

A 90° B 80° C 76° D 24° 

Juodraštis

05. Kuris intervalas¹ yra nelygybės $\log_8 x < \log_8 3$ visų sprendinių aibė²?

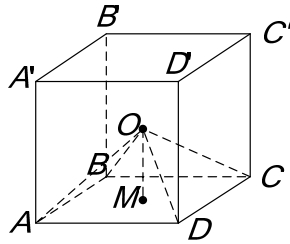
A $(-\infty; 3)$ B $(3; +\infty)$ C $(0; 3)$ D $(1; 3)$

Juodraštis

¹ intervalas – interwał – интервал

² sprendinių aibė – mnogość rozwiązań – множестворешений

06. Taškas O yra kubo $ABCD A' B' C' D'$ įstrižainių¹ susikirtimo taškas. Kubo briaunos² ilgis lygus 2. Kam lygus piramidės³ $OABCD$ tūris?



A $\frac{4}{3}$

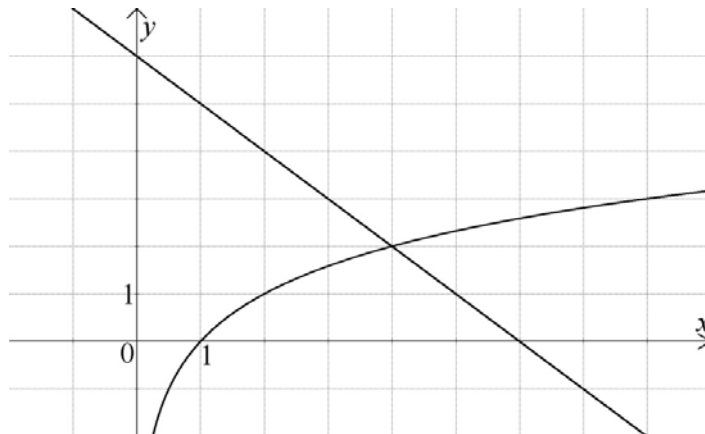
B 2

C $\frac{8}{3}$

D 4

Juodraštis

07. Paveiksle pavaizduotas lygties $\log_2 x = 6 - x$ grafinis sprendimo būdas.



Šios lygties sprendinys yra:

A 1

B 2

C 4

D 6

Juodraštis

¹ įstrižainių – przekątnych – диагоналей

² briaunos – krawędzi – ребра

³ piramidės – ostrosłupa – пирамиды

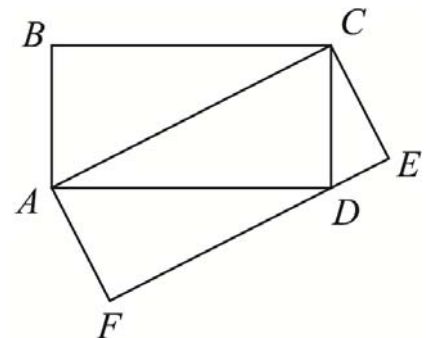
- 08.** Automobilio numerį sudaro penki skirtingi skaitmenys. Pirmieji du parenkami iš skirtingų nelyginių skaitmenų, o kiti trys skaitmenys – iš skirtingų lyginių, įskaitant nulį. Kiek skirtingų automobilio numerių galima sudaryti tokiu būdu?

A 80**B** 120**C** 1200**D** 3125*Juodraštis*

- 09.** a ir b – realieji skaičiai¹. Kokią mažiausią skaitinę reikšmę gali įgyti reiškinys² $a^2 - 2a + 4 + b^2 - 6b + 9$?

A 13**B** 3**C** 0**D** -2*Juodraštis*

- 10.** Stačiakampio $ABCD$ plotas lygus 1. Stačiakampio $ACEF$ plotas yra:

A $\frac{1}{2}$ **B** $\frac{2}{3}$ **C** 1**D** $\frac{3}{2}$ *Juodraštis*

¹ realieji skaičiai – liczby rzeczywiste – действительные числа

² reiškinys – wyrażenie – выражение

II dalis

Kiekvieno šios dalies uždavinio (11–18) ar jo dalies teisingas atsakymas vertinamas **1 tašku** (kitu atveju vertinama 0 tašku). Išspręskite uždavinius ir gautus atsakymus įrašykite į atsakymų lapą.

11. Išspręskite lygtį $2^{x-1} = 8$.

Juodraštis

12. Duota funkcija $f(x) = x^3 - 2x$.

12.1. Apskaičiuokite $f(-1)$.

Juodraštis

12.2. Raskite $f'(x)$.

Juodraštis

13. Tikimybė¹, jog pasėta sėkla sudygs, yra 0,8.

13.1. Kokia tikimybė, kad pasėta tokia sėkla nesudygs?

Juodraštis

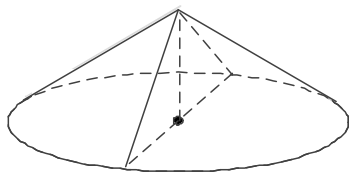
13.2. Kokia tikimybė, kad iš dviejų tokių pasėtų sėklų sudygs abi²?

Juodraštis

¹ tikimybė – prawdopodobieństwo – вероятность

² iš dviejų tokių pasėtų sėklų sudygs abi – z dwóch takich wysianych nasion wzejdą oba – из двух таких посеянных семян взойдут оба

14. Kūgio¹ aukštinės ilgis lygus 1, o pagrindo skersmens ilgis² 4.



Apskaičiuokite šio kūgio ašinio pjūvio³ plotą.

Juodraštis

15. Imtį 4; 4; 6; x ; 11; 14 sudaro šeši natūralieji skaičiai, kurie pateikti didėjimo tvarka. Šios imties mediana lygi 7. Raskite x reikšmę.

Juodraštis

16. Duota funkcija $f(x) = \cos x + a$; čia a – realusis skaičius, $f(-15^0) = 2$. Apskaičiuokite $f(15^0)$.

Juodraštis

¹ kūgio – stožka – конуса

² pagrindo skersmens ilgis – długość średnicy podstawy – длина диаметра основания

³ ašinio pjūvio – przekroju osiowego – осевого сечения

17. Seka $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ yra aritmetinė progresija¹, kurios $a_4 = -a_6$. Apskaičiuokite a_5 .

Juodraštis

18. Duoti vektoriai $\overrightarrow{AB}(5; 12)$ ir $\overrightarrow{AC}(x; -3)$.

18.1. Apskaičiuokite vektoriaus \overrightarrow{AB} ilgį.

Juodraštis

18.2. Užrašykite reiškiniu nuo x vektorių \overrightarrow{AB} ir \overrightarrow{AC} skaliarinę sandaugą $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Juodraštis

18.3. Taškai A, B ir C yra vienoje tiesėje. Raskite x reikšmę.

Juodraštis

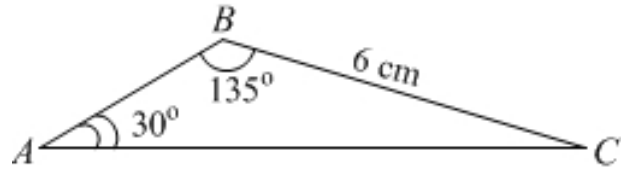
¹ aritmetinė progresija – postęp arytmetyczny – арифметическая прогрессия

Juodraštis

III dalis

Išspręskite 19–26 uždavinius. Sprendimus bei atsakymus perrašykite į atsakymų lapą.

19. Trikampio ABC kraštinė $BC = 6$ cm, $\angle CAB = 30^\circ$
ir $\angle ABC = 135^\circ$ (žr. pav.).



- 19.1. Raskite kampo BCA didumą.

(1 taškas)

Juodraštis

- 19.2. Parodykite, kad $AC = 6\sqrt{2}$ cm.

(2 taškai)

Juodraštis

- 19.3. Apskaičiuokite trikampio ABC plotą. Atsakymą pateikite $0,1 \text{ cm}^2$ tikslumu.

(2 taškai)

Juodraštis

20. Ūkininkų turguje vienoje eilėje įrengtos penkios prekyvietės. Du iš šių penkių ūkininkų prekiauja ekologiškais produktais.

20.1. Keliais skirtingais būdais penkiems prekiaujantiems ūkininkams galima paskirstyti šias prekyvietes?
(1 taškas)

Juodraštis

20.2. Parodykite, kad ūkininkams šias prekyvietes galima paskirstyti 48 skirtingais būdais taip, kad prekiaujantieji ekologiškais produktais būtų greta.

(1 taškas)

Juodraštis

20.3. Apskaičiuokite tikimybę, kad paskirsčius prekyvietes ūkininkai, prekiaujantieji ekologiškais produktais, nebus greta.

(2 taškai)

Juodraštis

21. Išspręskite lygtį $\cos x + 2 \cos(x + \pi) = \frac{1}{2}$, kai $x \in [-\pi; 2\pi]$.

Juodraštis

(3 taškai)

22. Antanas **ketveriems** metams pasiskolino iš banko 12 000 Eur tokiomis sąlygomis: kiekvieno mėnesio gale jis sumoka 3 % palūkanų nuo negrąžintos (likusios) paskolos dalies ir po to dar grąžina bankui pastovią 250 Eur paskolos mėnesio įmoką.

22.1. Parodykite, kad **antrojo mėnesio gale** Antanas bankui turės iš viso sumokėti 602,50 Eur.

(1 taškas)

Juodraštis

22.2. Apskaičiuokite kiek iš viso pinigų (palūkanos ir paskolos mėnesio įmokos) bankui sumokės Antanas **per 3 mėnesius**.

(2 taškai)

Juodraštis

22.3. Po ketverių metų Antanas dar turės sumokėti paskolos aptarnavimo (tvarkymo) mokestį, kuris sudaro 1,8 % nuo visos pasiskolintos sumos. Apskaičiuokite kiek iš viso pinigų (palūkanos, paskolos mėnesio įmokos bei paskolos tvarkymo mokestis) bankui sumokės Antanas **per 4 metus**.

(3 taškai)

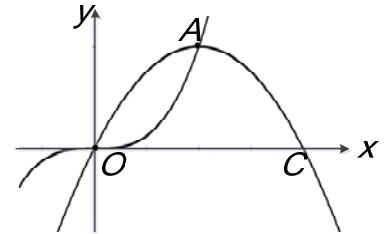
Juodraštis

23. Paveiksle pavaizduoti funkcijų $y = x^3$ ir $y = -x(x - 2)$ grafikų eskizai. Intervale $[0; 2]$ grafikai kertasi¹ taškuose O ir A .

23.1. Grafikų susikirtimo taško² A koordinatės yra $(1; 1)$. Pagrįskite šį teiginį³.

(1 taškas)

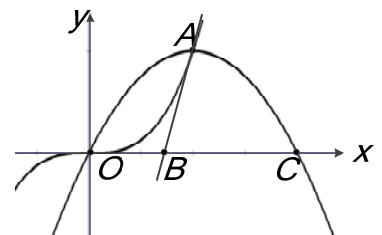
Juodraštis



23.2. Per tašką $A(1; 1)$ nubrėžta funkcijos $y = x^3$ grafiko liestinė⁴ kerta Ox ašį taške B . Pagrįskite teiginį, kad šios liestinės lygtis yra $y = 3x - 2$.

(2 taškai)

Juodraštis



¹ kertasi – przecinają się – пересекаются

² susikirtimo taško – punkt przecięcia – точка пересечения

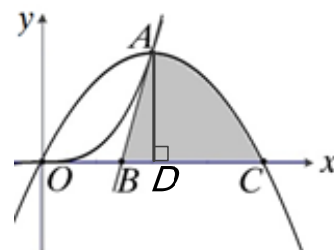
³ pagrįskite šį teiginį – uzasadnijcie zdanie – обоснуйте утверждение

⁴ liestinė – styczna – касательная

- 23.3.** Apskaičiuokite plotą pilkos figūros BAC , kurią riboja¹ funkcijų $y = 0$, $y = 3x - 2$ ir $y = -x(x - 2)$ grafikai.

(4 taškai)

Juodraštis

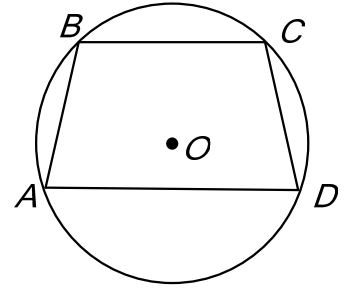


¹ riboja – ogranicza – ограничивает

24. Į apskritimą taip įbrėžtas keturkampis¹ $ABCD$, kad apskritimo centras O yra jo viduje². $BC \parallel AD$. Įrodykite³, kad $AB = CD$.

(3 taškai)

Juodraštis

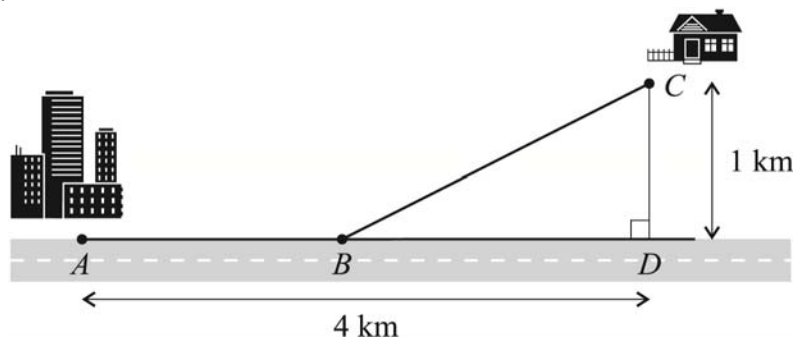


¹ keturkampis – czworokąt – четырёхугольник

² viduje – wewnątrz – внутри

³ įrodykite – udowodnijcie – докажете

- 25.** Telekomunikacijų kabelis turi būti nutiestas iš taško A rajono centre į laukuose esančios kaimo turizmo sodybos tašką C (žr. pav.). Kabelį galima tiesti arba tik laukais, arba ir paplente, ir laukais. Atstumas nuo kaimo turizmo sodybos taško C iki artimiausio paplentės taško D yra 1 km. Taškas A yra nutolęs nuo taško D 4 km atstumu. Nutiesti 1 km kabelio paplente kainuoja 1000 Eur, o laukais – 1250 Eur.



- 25.1.** Pažymėję atstumą $BD = x$ km, parodykite, kad kabelio tiesimo iš taško A į tašką C kaina (eurais) yra $K(x) = 250(5\sqrt{1+x^2} - 4x + 16)$, $0 \leq x \leq 4$.

(2 taškai)

Juodraštis

- 25.2.** Nustatykite x reikšmę, su kuria kabelio tiesimo iš taško A į tašką C kaina būtų mažiausia.

(4 taškai)

Juodraštis

- 26.** Realieji skaičiai a , b ir c yra trys iš eilės einantys aritmetinės progresijos nariai ($a \neq b$). Ar skaičiai a , $2b$ ir $3c$ gali būti trys iš eilės einantys geometrinės progresijos nariai? Atsakymą argumentuokite.

(4 taškai)

Juodraštis