

2015 M. MATEMATIKOS VALSTYBINIO BRANDOS EGZAMINO PAVYZDINĖS UŽDUOTIES VERTINIMO INSTRUKCIJA

I dalis

1–10 uždavinių atsakymai

Užd. Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ats.	B	D	C	B	C	A	C	C	B	C

II dalis

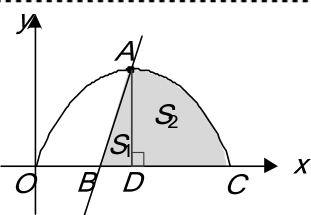
11–18 uždavinių ar jų dalių atsakymai

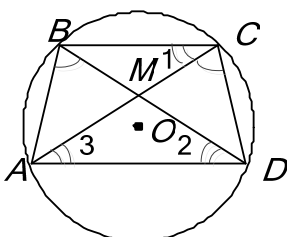
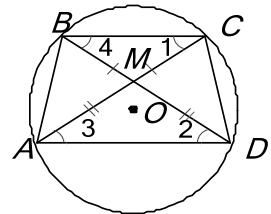
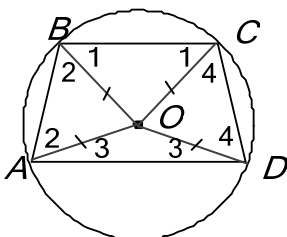
11	4
12.1	1
12.2	$3x^2 - 2$
13.1	0,2 arba $\frac{1}{5}$
13.2	0,64 arba $\frac{16}{25}$
14	2
15	8
16	2
17	0
18.1	13
18.2	$5x - 36$
18.3	$-\frac{5}{4}$ arba $-1\frac{1}{4}$ arba $-1,25$

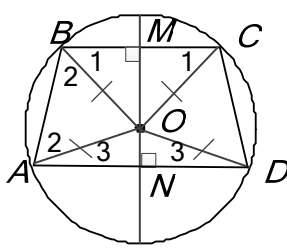
III dalis

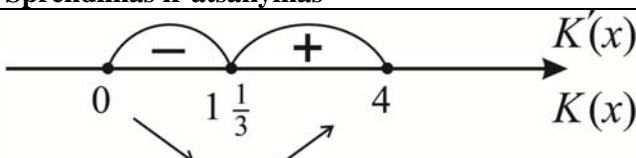
Užd.	Sprendimas ir atsakymas	Taškai	Vertinimas
19		5	
19.1		1	
	<i>Ats.: 15°</i>	• 1	Už teisingą atsakymą.
19.2		2	
	Pagal sinusų teoremą: $\frac{6}{\sin 30^\circ} = \frac{AC}{\sin 135^\circ}$ $\frac{6}{\frac{1}{2}} = \frac{AC}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ $AC = 6\sqrt{2} \text{ cm}$	<ul style="list-style-type: none"> • 1 Už teisingai pritaikytą sinusų teoremą. • 1 Už įrašytas teisingas kampų sinusų reikšmes ir gautą teisingą atsakymą. 	
19.3		2	
	$S = \frac{1}{2} AC \cdot BC \sin 15^\circ = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{2} \cdot 6 \cdot \sin 15^\circ =$ $= 3\sqrt{2} \cdot 6 \cdot \sin 15^\circ \approx 6,6 \text{ cm}^2$ <i>Ats.: 6,6 cm²</i>	<ul style="list-style-type: none"> • 1 Už teisingai pasirinktą būdą plotui apskaičiuoti. • 1 Už gautą teisingą atsakymą. 	
20		4	
20.1		1	
	$5! = 120$ būdų <i>Ats.: 120</i>	• 1	Už gautą teisingą atsakymą.
20.2		1	
	Ekologiškais produktais prekiaujantys ūkininkai bus greta $2 \cdot 4! = 48$ (arba $2 \cdot 3! \cdot 4 = 48$) būdais	• 1	Už teisingo sprendimo būdo pasirinkimą.
20.3		2	
	<i>I būdas</i> Ekologiškais produktais prekiaujantys ūkininkai nebus greta $5! - 2 \cdot 4! = 72$ būdais $P(\text{nebus greta}) = \frac{72}{120} = \frac{3}{5}$ <i>Ats.: $P(\text{nebus greta}) = \frac{3}{5}$</i>	<ul style="list-style-type: none"> • 1 Už teisingai apskaičiuotas įvykiui palankias baigtis. • 1 Už gautą teisingą atsakymą. 	
	<i>II būdas</i> $P(\text{bus greta}) = \frac{48}{120} = \frac{2}{5}$ $P(\text{nebus greta}) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$ <i>Ats.: $P(\text{nebus greta}) = \frac{3}{5}$</i>	<ul style="list-style-type: none"> • 1 Už teisingai apskaičiuotą tikimybę, kad ekologiškais produktais prekiaujantys ūkininkai bus greta. • 1 Už gautą teisingą atsakymą 	

Užd.	Sprendimas ir atsakymas	Taškai	Vertinimas
21	$\cos x + 2 \cos(x + \pi) = \frac{1}{2}$ $\cos x - 2 \cos x = \frac{1}{2}$ $\cos x = -\frac{1}{2}$ $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ $x = -\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$	3 <ul style="list-style-type: none"> • 1 • 1 • 1 	 Už teisingai pertvarkytą lygtį. Už teisingai užrašytus visus gautos lygties sprendinius. Už teisingą atsakymą.
22		6	
22.1	Antrojo mėnesio gale Antanas turės sumokėti palūkanų: $(12\,000 - 250) \cdot 0,03 = 352,5(\text{Eur})$ Iš viso antrojo mėnesio gale Antanas sumokės $250 + 352,5 = 602,50(\text{Eur})$	1 <ul style="list-style-type: none"> • 1 	Už atliktus teisingus skaičiavimus.
22.2	$12\,000 \cdot 0,03 + (12\,000 - 250) \cdot 0,03 + (12\,000 - 250 \cdot 2) \cdot 0,03 + 250 \cdot 3 = 1807,5(\text{Eur})$ <i>Ats.: 1 807,5 Eur</i>	2 <ul style="list-style-type: none"> • 1 • 1 	Už teisingai apskaičiuotą sumą, kiek Antanas turės sumokėti bankui pirmojo arba trečiojo mėnesio gale. Už gautą teisingą atsakymą.
22.3	Palūkanos per 4 metus arba per 48 mėnesius bus: $P = 12000 \cdot 0,03 + 11750 \cdot 0,03 + 11500 \cdot 0,03 + \dots + 250 \cdot 0,03 = 0,03(12000 + 11750 + 11500 + \dots + 250)$ Dėmenys 12000, 11750, 11500, ..., 250 sudaro aritmetinę progresiją. $S_{48} = \frac{12000 + 250}{2} \cdot 48 = 294000$ $P = 0,03 \cdot 294000 = 8820(\text{Eur})$ Iš viso per 4 metus Antanas turės grąžinti: $250 \cdot 48 + P + 12000 \cdot 0,018 = 21036(\text{Eur})$ <i>Ats.: 21 036 Eur</i>	3 <ul style="list-style-type: none"> • 1 • 1 • 1 	Už teisingo sprendimo būdo pasirinkimą. Už teisingą aritmetinės progresijos 48 narių sumos apskaičiavimą. Už gautą teisingą atsakymą.
23		7	
23.1	<i>I būdas</i> Lygybės $1 = 1^3$ ir $1 = -1(1 - 2)$ yra teisingos, todėl taškas (1; 1) priklauso abiejų funkcijų grafikams.	1 <ul style="list-style-type: none"> • 1 	Už teisingą pagrindimą.
	<i>II būdas</i>		

Užd.	Sprendimas ir atsakymas	Taškai	Vertinimas
	<p>Grafikų susikirtimo taške funkcijų reikšmės lygios, todėl teisinga lygybė:</p> $x^3 = -x(x-2),$ $x_1 = -2, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 1.$ <p>Kai $x = 1$, tai $y = 1^3 = 1$, t. y. $(1; 1)$ – ieškomos taško A koordinatės.</p>	<ul style="list-style-type: none"> 1 	Už teisingą pagrindimą.
<i>Pastaba.</i> 23.1. Taškas skiriamas ir tuo atveju, kai sudaręs lygtį, mokinys jos nesprensdžia, o patikrina, kad ji pavirsta teisinga lygybe, kai $x = 1$.			
23.2	<p><i>I būdas</i></p> $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$ $k = f'(1),$ $f'(x) = 3x^2, \quad f'(1) = 3.$ $f(x_0) = f(1) = 1,$ $y = 1 + 3(x - 1),$ $y = 3x - 2.$ <p>Įrodyta.</p> <hr/> <p><i>II būdas</i></p> $y = kx + l,$ $k = f'(1)$ $f'(x) = 3x^2, \quad f'(1) = 3 = k$ <p>Taškas A priklauso liestinei, todėl:</p> $1 = 3 \cdot 1 + l, \quad l = -2,$ $y = 3x - 2.$ <p>Įrodyta</p>	<p>2</p> <ul style="list-style-type: none"> 1 1 	<p>Už teisingai apskaičiuotą $f'(1)$.</p> <p>Už teisingai gautą lygtį.</p>
23.3	 <p>Randame taško B abscisę: $3x - 2 = 0, \quad x = \frac{2}{3}$.</p> <p>Taško C abscisė lygi 2.</p> $S_1 = \frac{1}{2} \cdot BD \cdot DA; \quad S_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{6}.$ $S_2 = \int_1^2 (2x - x^2) dx = \left(x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big _1^2 = \frac{2}{3}.$ $S_1 + S_2 = \frac{1}{6} + \frac{2}{3} = \frac{5}{6}.$ <p>Ats.: $S = \frac{5}{6}$.</p>	<p>4</p> <ul style="list-style-type: none"> 1 1 1 1 	<p>Už taškų B ir C abscisių nustatymą.</p> <p>Už teisingai apskaičiuotą trikampio ABD plotą.</p> <p>Už teisingai apskaičiuotą kreivinės trapecijos ADC plotą.</p> <p>Už teisingai gautą atsakymą.</p>

Užd.	Sprendimas ir atsakymas	Taškai	Vertinimas
24		3	
	<p><i>I būdas</i></p>  <p>$\angle 1 = \angle 2$ – įbrėžtiniai kampai, kurie remiasi į tą patį lanką AB.</p>	• 1	Už pastebėjimą ir pagrindimą, kad $\angle 1 = \angle 2$.
	<p>Kadangi $\angle 1 = \angle 2$ ir $\angle 1 = \angle 3$, nes $AD \parallel BC$, AC – kirstinė, tai $\angle 2 = \angle 3$.</p>	• 1	Už įrodymą, kad $\angle 2 = \angle 3$.
	<p>$\triangle ABD = \triangle ACD$, nes AD – bendra, $\angle 2 = \angle 3$ (įrodyta), $\angle ABD = \angle ACD$ (remiasi į lanką AD). $\angle BAD = \angle CDA$ (jei trikampiai turi du lygius kampus, tai ir tretieji jų kampai yra lygūs). Taigi $AB = CD$.</p>	• 1	Už trikampių ABD ir ACD lygumo įrodymą.
	<p><i>II būdas</i></p>  <p>$\angle 1 = \angle 2$ – įbrėžtiniai kampai, kurie remiasi į tą patį lanką AB.</p>	• 1	Už pastebėjimą ir pagrindimą, kad $\angle 1 = \angle 2$.
	<p>$\angle 1 = \angle 3$, nes $AD \parallel BC$, AC – kirstinė; $\angle 2 = \angle 4$, nes $AD \parallel BC$, BD – kirstinė. $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4$.</p>	• 1	Už įrodymą, kad $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4$.
	<p>$\angle AMB = \angle CMD$ – kryžminiai. $BM = MC$, $AM = MD$, nes trikampiai BMC ir AMD lygiašoniai. $\triangle AMB = \triangle CMD$ pagal dvi kraštines ir kampą tarp jų. Taigi, $AB = CD$.</p>	• 1	Už trikampių AMB ir CMD lygumo įrodymą.
	<p><i>III būdas</i></p>  <p>Trikampiai AOB, BOC, COD ir AOD lygiašoniai, nes kiekvieno dvi kraštinės lygios apskritimo spinduliui.</p>	• 1	Už pastebėjimą, kad trikampiai AOB , BOC , COD ir AOD lygiašoniai.
	<p>$\angle 1 + \angle 2 + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$, Vidaus vienašalių kampų prie dviejų lygiagrečių tiesių BC ir AD suma.</p>	• 1	Už teisingai pritaikytą dviejų kampų prie lygiagrečių tiesių ir kirstinės savybę.

Užd.	Sprendimas ir atsakymas	Taškai	Vertinimas
	$2\angle 2 = 180^\circ - (\angle 1 + \angle 3)$ $\angle AOB = 180^\circ - 2 \cdot \angle 2 = 180^\circ - (\angle 1 + \angle 3),$ $\angle COD = 180^\circ - 2 \cdot \angle 4 = 180^\circ - (\angle 1 + \angle 3).$		
	$\triangle AOB = \triangle OCD$ pagal dvi kraštines ir kampą tarp jų. Taigi, $AB = CD$.	• 1	Už teisingai pritaikytą trikampių lygumo požymį.
	<p><i>IV būdas</i></p>  <p>Brėžiame skersmenį, statmeną stygomis BC ir AD.</p>	• 1	Už teisingo sprendimo būdo pasirinkimą.
	<p>Trikampiai AOD ir BOC – lygiašoniai, todėl aukštinės OM ir ON atitinkamai yra trikampių pusiauakraštinės $BM = MC$, $AN = ND$.</p>	• 1	Už lygiašonio trikampio aukštinės savybės teisingą pritaikymą.
	<p>$BM = MC$, $BC \perp MN$ taškai B ir C simetriški tiesės MN atžvilgiu. Analogiškai taškai A ir D yra simetriški tiesės MN atžvilgiu. AB simetriška CD tiesės MN atžvilgiu, todėl $AB = CD$.</p>	• 1	Už teisingą atkarpų AB ir CD simetriškumo tiesės MN atžvilgiu įrodymą.
25		6	
25.1		2	
	$BC = \sqrt{1+x^2}$ $AB = 4-x$ $K(x) = 1000(4-x) + 1250\sqrt{1+x^2} =$ $= 250(16-4x+5\sqrt{1+x^2})$	• 1 • 1	Už teisingai išreikštus per x atstumus BC ir AB . Už teisingai sudarytą kainos funkciją.
25.2		4	
	$K'(x) = 0$ $K'(x) = 250 \cdot \frac{5x - 4\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}$ $250 \cdot \frac{5x - 4\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} = 0$ $x^2 = \frac{16}{9}$ $x = \frac{4}{3}$ arba $x = -\frac{4}{3}$ (netinka)	• 1 • 1 • 1	Už teisingo sprendimo būdo pasirinkimą (kritinių taškų ieškojimą prilyginant funkcijos išvestinę 0). Už teisingai apskaičiuotą išvestinę ($K'(x)$). Už teisingai apskaičiuotas kritinių taškų x koordinates.

Užd.	Sprendimas ir atsakymas	Taškai	Vertinimas
	 <p> $K'(1) < 0$ $K'(2) > 0$ <i>Ats.:</i> $x = 1\frac{1}{3}$ km (arba $1\frac{1}{3}$) </p>	<ul style="list-style-type: none"> • 1 	Už teisingą pagrindimą, kad kai $x = 1\frac{1}{3}$ km kaina bus mažiausia.
26	<p><i>I būdas</i></p> $\frac{2b}{a} = \frac{3c}{2b}$ $\frac{2(a+d)}{a} = \frac{3(a+2d)}{2(a+d)}$ $4(a+d)^2 = 3a(a+2d)$ $a^2 + 2ad + 4d^2 = 0$ $D = -12d^2 < 0$ <p>Su bet kuria realia d reikšme ($d \neq 0$, nes $a \neq b$) $D < 0$ ir kvadratinė lygtis sprendinių neturi. Todėl, kai realieji skaičiai a, b ir c yra trys iš eilės einantys aritmetinės progresijos nariai, skaičiai a, $2b$ ir $3c$ negali būti trys iš eilės einantys geometrinės progresijos nariai.</p> <p><i>Ats.:</i> Negali.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • 2 • 1 • 1 	<p>Po 1 tašką už teisingą aritmetinės ir geometrinės progresijos savybių taikymą.</p> <p>Už kvadratinės lygties su dviem nežinomaisiais teisingą diskriminanto išraišką.</p> <p>Už teisingą argumentavimą, kad tokia geometrinė progresija neegzistuoja.</p>
	<p><i>II būdas</i></p> $\frac{2b}{a} = \frac{3c}{2b}$ $\frac{a+c}{a} = \frac{c}{a+c}$ $(a+c)^2 = ac$ $a^2 + ac + c^2 = 0$ $D = -3c^2 < 0$ <p>Su bet kuria realia c reikšme ($c \neq 0$, nes, kai $c = 0$ pagal geometrinės progresijos apibrėžimą turi būti ir $b = 0$, o tada pagal aritmetinės progresijos apibrėžimą $a = 0$, kas prieštarauja sąlygai $a \neq b$) $D < 0$ ir kvadratinė lygtis sprendinių neturi. Todėl, kai realieji skaičiai a, b ir c yra trys iš eilės einantys aritmetinės progresijos nariai, skaičiai a, $2b$ ir $3c$ negali būti trys iš eilės einantys geometrinės progresijos nariai.</p> <p><i>Ats.:</i> Negali.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • 2 • 1 • 1 	<p>Po 1 tašką už teisingą aritmetinės ir geometrinės progresijos savybių taikymą.</p> <p>Už kvadratinės lygties su dviem nežinomaisiais teisingą diskriminanto išraišką.</p> <p>Už teisingą argumentavimą, kad tokia geometrinė progresija neegzistuoja.</p>