PATVIRTINTA
Nacionalinės švietimo agentūros direktoriaus
2023 m. birželio 20 d. įsakymu Nr. VK-444

2023 METŲ PAGRINDINĖS SESIJOS MATEMATIKOS VALSTYBINIO BRANDOS EGZAMINO KANDIDATŲ DARBŲ VERTINIMO INSTRUKCIJA

I dalis

Užd. Nr.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Ats.	**C**	**D**	**B**	**D**	**C**	**C**	**B**	**A**	**C**	**D**

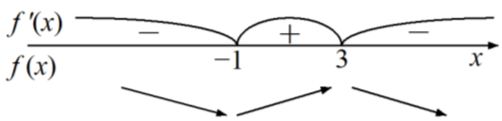
II dalis

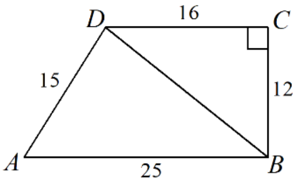
11	$S = 18$ (arba 18)
12.1	120° (arba $\frac{2\pi}{3}$)
12.2	6
13.1	$a_1 = 18$ (arba 18)
13.2	$k = 19$ (arba 19)
14.1	$x = -2$ (arba -2)
14.2	$x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3}k, k \in Z$ (arba $15^{\circ} + 60^{\circ}k, k \in Z$)
14.3	$x = \pm\sqrt{\ln 2}$ (arba $\pm\sqrt{\ln 2}$)
15	1,5 karto (arba 1,5, arba $\frac{3}{2}$, arba $1\frac{1}{2}$)
16	$I = 1 \cdot 10^{-5}$ W/m^2 (arba 10^{-5}, arba $\frac{1}{10^5}$, arba $\frac{1}{100000}$, arba 0,00001)
17	120
18	$\left[\frac{3}{4}; 1\right]$ (arba $[0{,}75; 1]$, arba $0{,}75 \le y \le 1$)

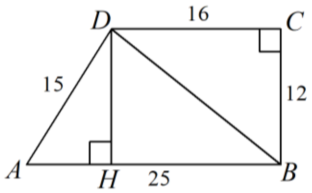
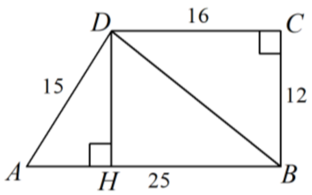
III dalis

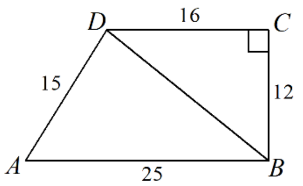
Užd.	Sprendimas ir atsakymas	Taškai	Vertinimas
19		**2**	
	$640\cdot 0{,}7\cdot 0{,}85\cdot 0{,}85=$	1	Už bent vieną teisingai apskaičiuotą procentinį sumažėjimą (pvz., sudarant proporciją).
	$=323{,}68$ (Eur). *Ats.:* 323,68 Eur.	1	Už gautą teisingą atsakymą.

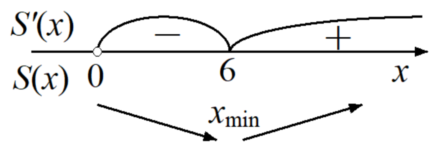
Užd.	Sprendimas ir atsakymas	Taškai	Vertinimas
20		**5**	
20.1		**2**	
	$\begin{cases}2-3x>0,\\4+x>0;\end{cases}$	1	Už teisingai sudarytą nelygybių sistemą.
	$\begin{cases}x<\frac{2}{3},\\x>-4;\end{cases}$ $-4<x<\frac{2}{3}$. *Ats.:* $x\in\left(-4;\frac{2}{3}\right)$ (arba $-4<x<\frac{2}{3}$).	1	Už gautą teisingą atsakymą.
20.2		**3**	
	$\log_{0,3}(2-3x)\geq\log_{0,3}(4+x)$, $2-3x\leq 4+x$,	1	Už teisingai sudarytą tiesinę nelygybę.
	$-4x\leq 2$, $x\geq-\frac{1}{2}$.	1	Už teisingai išspręstą tiesinę nelygybę.
	$\begin{cases}x\in\left(-4;\frac{2}{3}\right),\\x\geq-\frac{1}{2}.\end{cases}$ Arba nubraižyta skaičių tiesė, pavaizduoti nelygybių sprendiniai ir pažymėta jų sankirta. *Ats.:* $x\in\left[-\frac{1}{2};\frac{2}{3}\right)$ (arba $-\frac{1}{2}\leq x<\frac{2}{3}$).	1	Už gautą teisingą atsakymą.

Užd.	Sprendimas ir atsakymas	Taškai	Vertinimas
21		**8**	
21.1		**1**	
	Ats.: $f'(x) = -3x^2 + 6x + 9.$	1	Už teisingą išvestinę.
21.2		**3**	
	$f'(x) = -3x^2 + 6x + 9 = 0,$	1	Už pasirinktą teisingą sprendimo būdą (pvz., funkcijos išvestinės prilyginimą nuliui)
	$x^2 - 2x - 3 = 0,$ $x = -1$ arba $x = 3.$	1	Už teisingus kritinius taškus.
	 *Ats.:* $x \in (-\infty; -1), (3; +\infty).$	1	Už gautą teisingą atsakymą.
21.3		**4**	
	Kadangi $f'(3) = 0,$ tai liestinės lygtis bus $y = f(3) \Rightarrow y = 31.$	1	Už gautą teisingą liestinės lygtį.
	I būdas $\int_0^3 \left(31 - \left(-x^3 + 3x^2 + 9x + 4\right)\right)dx =$ **II būdas** $31 \cdot 3 - \int_0^3 \left(-x^3 + 3x^2 + 9x + 4\right)dx =$	1	Už sudarytą teisingą apibrėžtinį integralą plotui apskaičiuoti.
	I būdas: $= \left(\frac{x^4}{4} - x^3 - \frac{9x^2}{2} + 27x\right)\Big\|_0^3 =$ II būdas: $= 93 - \left(-\frac{x^4}{4} + x^3 + \frac{9x^2}{2} + 4x\right)\Big\|_0^3 =$	1	Už gautą teisingą pirmykštę funkciją.
	I būdas: $= \frac{3^4}{4} - 3^3 - \frac{9 \cdot 3^2}{2} + 27 \cdot 3 =$ $= 33{,}75.$ II būdas: $= 93 + \frac{3^4}{4} - 3^3 - \frac{9 \cdot 3^2}{2} - 4 \cdot 3 =$ $= 93 - 59{,}25 = 33{,}75.$ *Ats.:* 33,75.	1	Už gautą teisingą atsakymą.

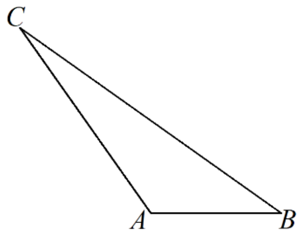
Užd.	Sprendimas ir atsakymas	Taškai	Vertinimas
22		**5**	
22.1		**2**	
	 Pagal Pitagoro teoremą: $BD^2 = DC^2 + CB^2 = 400,$ $BD = 20.$	1	Už teisingai apskaičiuotą įstrižainės *BD* ilgį.
	I būdas Trikampiai *ABD* ir *BDC* yra panašieji pagal tris kraštines: $\frac{AB}{BD} = \frac{BD}{DC} = \frac{AD}{BC}$, nes $k = \frac{25}{20} = \frac{20}{16} = \frac{15}{12} = 1{,}25.$ **II būdas** Trikampiai *ABD* ir *BDC* yra panašieji pagal dvi kraštines ir kampą tarp jų: $\angle ABD = \angle BDC$ (vidaus priešiniai, $DC \parallel AB$) ir $\frac{AB}{BD} = \frac{BD}{DC}$, nes $k = \frac{25}{20} = \frac{20}{16} = 1{,}25.$ **III būdas** Pagal atvirkštinę Pitagoro teoremą pastebime, kad trikampis *ABD* yra statusis: $AB^2 = AD^2 + BD^2$, nes $25^2 = 15^2 + 20^2$. Todėl $\angle ADB = 90^\circ$. Trikampiai *ABD* ir *BDC* yra panašieji pagal du kampus: $\angle ADB = \angle BCD = 90^\circ$, $\angle ABD = \angle BDC$ (vidaus priešiniai, $DC \parallel AB$).	1	Už teisingą pagrindimą.
22.2		**3**	
	I būdas $\angle ADB = 90^\circ$, nes panašiųjų trikampių *ABD* ir *BDC* atitinkami kampai yra lygūs. Pagal atvirkštinę Pitagoro teoremą pastebime, kad trikampis *ABD* yra statusis: $AB^2 = AD^2 + BD^2$, nes $25^2 = 15^2 + 20^2$. Todėl $\angle ADB = 90^\circ$.	1	Už teisingą pagrindimą, kad $\angle ADB = 90^\circ$.
	$\cos\angle BAD = \frac{AD}{AB} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}.$	1	Už teisingai apskaičiuotą kampo kosinuso reikšmę.
	$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 25 \cdot 15 \cdot \cos\angle BAD,$ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 25 \cdot 15 \cdot \frac{3}{5} = 225.$ *Ats.:* 225.	1	Už gautą teisingą atsakymą.

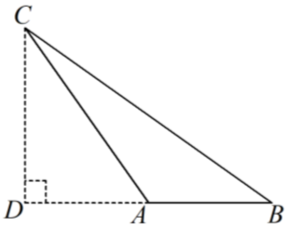
	II būdas  $AH = 25 - 16 = 9$, nes $DC = HB$.	1	Už brėžinio papildymą trapecijos aukštine *DH* ir teisingai apskaičiuotą atkarpos *AH* ilgį.
	$\cos\angle DAH = \dfrac{9}{15} = \dfrac{3}{5} = \cos\angle DAB$,	1	Už teisingai apskaičiuotą kampo kosinuso reikšmę.
	$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 25 \cdot 15 \cdot \cos\angle DAB$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 25 \cdot 15 \cdot \dfrac{3}{5} = 225.$ *Ats.:* 225.	1	Už gautą teisingą atsakymą.
	III būdas  $AH = 25 - 16 = 9$, nes $DC = HB$.	1	Už brėžinio papildymą trapecijos aukštine *DH* ir teisingai apskaičiuotą atkarpos *AH* ilgį.
	$DH = CB = 12.$ Įvedame koordinačių sistemą (koordinačių pradžios taškas *A*), tada: $\overrightarrow{AD} = (9; 12)$, $\overrightarrow{AB} = (25; 0)$.	1	Už teisingai gautas vektorių $\overrightarrow{AD}$ ir $\overrightarrow{AB}$ koordinates.
	$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 9 \cdot 25 + 12 \cdot 0 = 225.$ *Ats.:* 225.	1	Už gautą teisingą atsakymą.

	IV būdas  Pagal kosinusų teoremą: $DB^2 = AD^2 + AB^2 - 2\cdot AD\cdot AB\cdot \cos\angle BAD,$ $20^2 = 15^2 + 25^2 - 2\cdot 15\cdot 25\cdot \cos\angle BAD,$	1	Už teisingai pritaikytą kosinusų teoremą.
	$\cos\angle BAD = \dfrac{400-225-625}{-2\cdot 15\cdot 25} = \dfrac{3}{5}.$	1	Už teisingai apskaičiuotą kampo kosinuso reikšmę.
	$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = 25\cdot 15\cdot \cos\angle DAB,$ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = 25\cdot 15\cdot \dfrac{3}{5} = 225.$ *Ats.:* 225.	1	Už gautą teisingą atsakymą.

Užd.	**Sprendimas ir atsakymas**	**Taškai**	**Vertinimas**
23		**7**	
23.1		**3**	
	$V=\frac{x^2\sqrt{3}}{4}\cdot h \Rightarrow 54=\frac{x^2\sqrt{3}}{4}\cdot h \Rightarrow h=\frac{216}{x^2\sqrt{3}},$	1	Už teisingai išreikštą *h* per *x*.
	$S=S_{šon.}+2S_{pagr.}=3\cdot h\cdot x+2\cdot\frac{x^2\sqrt{3}}{4},$	1	Už teisingai sudarytą reiškinį viso paviršiaus plotui apskaičiuoti.
	$S(x)=3\cdot\frac{216}{x^2\cdot\sqrt{3}}\cdot x+2\cdot\frac{x^2\sqrt{3}}{4}=\frac{x^2\sqrt{3}}{2}+\frac{216\sqrt{3}}{x}.$	1	Už teisingą pagrindimą.
23.2		**2**	
	$\left(\frac{x^2\sqrt{3}}{2}+\frac{216\sqrt{3}}{x}\right)'=x\sqrt{3}-\frac{216\sqrt{3}}{x^2},$	1	Už teisingai gautą išvestinę.
	$\frac{x^3\sqrt{3}-216\sqrt{3}}{x^2}=0\Rightarrow x^3=216\Rightarrow x=6.$ *Ats.:* $x=6$.	1	Už gautą teisingą atsakymą.
23.3		**2**	
		1	Už teisingą pagrindimą, kad $x=6$ yra minimumo taškas.
	Funkcija $S(x)$ įgyja mažiausią reikšmę, kai $x=6$. $S_{\min}=S(6)=\frac{6^2\sqrt{3}}{2}+\frac{216\sqrt{3}}{6}=18\sqrt{3}+36\sqrt{3}=54\sqrt{3},$ todėl $S(x)\geq S(6)$ su visomis $x>0$ reikšmėmis. Taigi $S(x)\geq 54\sqrt{3}$.	1	Už teisingą pagrindimą.

Užd.	Sprendimas ir atsakymas	Taškai	Vertinimas
24		**4**	
24.1		**2**	
	Įvykiui $X=2$ yra palankios trys baigtys: $\mathbf{P}(X=2)=\mathbf{P}(G\cap T\cap \overline{M})+\mathbf{P}(G\cap \overline{T}\cap M)+$ $+\mathbf{P}(\overline{G}\cap T\cap M)$.	1	Už teisingai išvardytas įvykiui $X=2$ palankias baigtis arba už teisingai apskaičiuotą bent vienos baigties tikimybę.
	Yra žinoma, kad įvykiai *G*, *T* ir *M* yra nepriklausomi, todėl: $\mathbf{P}(X=2)=\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{3}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{13}{30}$.	1	Už teisingą pagrindimą.
24.2		**2**	
	$\mathbf{P}(X=1)=1-\mathbf{P}(X=0)-\mathbf{P}(X=2)-\mathbf{P}(X=3)=$ $=1-\frac{1}{60}-\frac{13}{30}-\frac{2}{5}=\frac{3}{20}$.	1	Už teisingai gautą *p* reikšmę (pvz., teisingai pritaikytos žinios apie elementariųjų įvykių tikimybių sumą).
	$\mathbf{E}(X)=0\cdot\frac{1}{60}+1\cdot\frac{3}{20}+2\cdot\frac{13}{30}+3\cdot\frac{2}{5}=2\frac{13}{60}$. *Ats.:* $\mathbf{E}(X)=2\frac{13}{60}$.	1	Už gautą teisingą atsakymą.

Užd.	Sprendimas ir atsakymas	Taškai	Vertinimas
25		3	
			
	I būdas Pagal sinusų teoremą: $\frac{BC}{\sin\angle BAC}=\frac{AC}{\sin\angle ABC}$, $\frac{4x}{\sin\angle BAC}=\frac{3x}{\sin\angle ABC}$,	1	Už teisingai pasirinktą sprendimo būdą.
	$\frac{4}{\sin\angle BAC}=\frac{3}{\sin\left(\angle BAC-90^{\circ}\right)}$, $\frac{4}{\sin\angle BAC}=\frac{3}{-\cos\angle BAC}\Rightarrow$	1	Už teisingai pritaikytą redukciją arba kampų sumos (skirtumo) sinuso formulę.
	$\frac{\sin\angle BAC}{\cos\angle BAC}=-\frac{4}{3}\Rightarrow \mathrm{tg}\angle BAC=-\frac{4}{3}$. *Ats.:* $\mathrm{tg}\angle BAC=-\frac{4}{3}$.	1	Už gautą teisingą atsakymą.
	II būdas Pagal trikampio ploto formulę teisinga lygybė: $\frac{1}{2}AC\cdot AB\sin\angle BAC=\frac{1}{2}BA\cdot BC\sin\angle ABC$, $3x\sin\angle BAC=4x\sin\angle ABC$,	1	Už teisingai pasirinktą sprendimo būdą.
	$3\sin\angle BAC=4\sin\left(\angle BAC-90^{\circ}\right)$, $3\sin\angle BAC=-4\cos\angle BAC$,	1	Už teisingai pritaikytą redukciją.
	$\frac{\sin\angle BAC}{\cos\angle BAC}=-\frac{4}{3}\Rightarrow \mathrm{tg}\angle BAC=-\frac{4}{3}$. *Ats.:* $\mathrm{tg}\angle BAC=-\frac{4}{3}$.	1	Už gautą teisingą atsakymą.

	III būdas  $\angle DAC = 90^\circ - \angle ABC \Rightarrow \angle ACD = \angle ABC$, $\cos\angle ABC = \cos\angle ACD = \frac{CD}{3x}$ ir $\sin\angle ABC = \frac{CD}{4x}$,	1	Už teisingai pasirinktą sprendimo būdą (šiuo atveju už brėžinio papildymą ir teisingą bent vieną $\sin\angle ABC$ arba $\cos\angle ABC$ išraišką).
	$\mathrm{tg}\angle ABC = \frac{\sin\angle ABC}{\cos\angle ABC} = \frac{3}{4}$,	1	Už gautą teisingą $\mathrm{tg}\angle ABC$ reikšmę.
	$\mathrm{tg}\angle BAC = \mathrm{tg}(90^\circ + \angle ABC) = -\mathrm{ctg}\angle ABC =$ $= -\frac{1}{\mathrm{tg}\angle ABC} = -\frac{4}{3}$. *Ats.:* $\mathrm{tg}\angle BAC = -\frac{4}{3}$.	1	Už gautą teisingą atsakymą.

Užd.	Sprendimas ir atsakymas	Taškai	Vertinimas
26		**4**	
	I būdas Sakykime, kad pirmasis geometrinės progresijos narys lygus *x*, tada teisinga lygybė: $(x+xq)\cdot 0{,}9=xq^2$,	1	Už teisingai pasirinktą sprendimo būdą (nežinomųjų įvedimą ir sudarytą teisingą lygtį).
	$0{,}9x+0{,}9xq=xq^2$. Kadangi $x\neq 0$, tai $q^2-0{,}9q-0{,}9=0$, $10q^2-9q-9=0$, $q=1{,}5$ arba $q=-0{,}6$.	1	Už teisingai gautus lygties sprendinius *q*.
	$q=-0{,}6$ netinka, nes progresija yra didėjanti. Kai $q=1{,}5$, tai teisinga nelygybė $x\cdot 1{,}5^2-x\leq 19$, $x\leq 15{,}2$.	1	Už teisingai nustatytą *x* reikšmių intervalą.
	Kadangi *x* ir kiti progresijos nariai yra natūralieji skaičiai ir reikia rasti didžiausią galimą trečiojo nario reikšmę, perrenkame, pradėdami nuo didžiausio galimo pirmojo nario: $x=15$, tai antrasis narys bus 22,5 (netinka); $x=14$, tai antrasis narys bus 21, o trečiasis – 31,5 (netinka); $x=13$, tai antrasis narys bus 19,5 (netinka); $x=12$, tai antrasis narys bus 18, o trečiasis 27 (tinka). *Ats.*: 27.	1	Už gautą teisingą atsakymą.
	II būdas $b_1,b_2,b_3\in N; q>1; b_3-b_1\leq 19$; $b_3=0{,}9(b_1+b_2)$, $b_1q^2=0{,}9b_1+0{,}9b_1q$.	1	Už teisingai pasirinktą sprendimo būdą (nežinomųjų įvedimą ir sudarytą teisingą lygtį).
	Kadangi $b_1\neq 0$, tai $q^2=0{,}9+0{,}9q$, $q^2-0{,}9q-0{,}9=0$, $q_{1,2}=\dfrac{0{,}9\pm 2{,}1}{2}\Rightarrow q_1=1{,}5; q_2=-0{,}6$.	1	Už teisingai gautus lygties sprendinius *q*.
	$q=-0{,}6$ netinka, nes progresija yra didėjanti. Tada galime perrinkti: 1; 1,5; ... (netinka); 2; 3; 4,5 (netinka); 3; 4,5; ... (netinka); 4; 6; 9 (tinka, bet tai dar ne didžiausia galima trečiojo nario reikšmė). Pastebime, kad pirmasis narys turi būti skaičiaus 4 kartotinis, todėl perrenkame	1	Už teisingai rastą bent vieną trijų natūraliųjų geometrinės progresijos narių aibę.

	8; 12; 18 (tinka, bet tai dar ne didžiausia galima trečiojo nario reikšmė); 12; 18; 27 (tinka, bet ar tai didžiausia galima trečiojo nario reikšmė?); 16; 24; 36 (netinka, nes $b_3 - b_1 = 20 > 19$).		
	$b_3 - b_1 \le 19$, $b_1(1{,}5^2 - 1) \le 19$, $b_1 \cdot 1{,}25 \le 19$, $b_1 \le 15{,}2$. Šią sąlygą tenkinanti didžiausia b_1 reikšmė yra 12, todėl $b_3 = 27$ yra didžiausia galima trečiojo nario reikšmė. *Ats.:* 27.	1	Už teisingą pagrindimą, kad $b_3 = 27$ yra didžiausia galima trečiojo nario reikšmė.
	III būdas $b_1, b_2, b_3 \in N; q > 1; b_3 - b_1 \le 19;$ $b_3 = 0{,}9(b_1 + b_2)$, $b_1 q^2 = 0{,}9 b_1 + 0{,}9 b_1 q$.	1	Už teisingai pasirinktą sprendimo būdą (nežinomųjų įvedimą ir sudarytą teisingą lygtį).
	Kadangi $b_1 \ne 0$, tai $q^2 = 0{,}9 + 0{,}9q$, $q^2 - 0{,}9q - 0{,}9 = 0$, $q_{1,2} = \dfrac{0{,}9 \pm 2{,}1}{2} \Rightarrow q_1 = 1{,}5; q_2 = -0{,}6$.	1	Už teisingai gautus lygties sprendinius *q*.
	$b_3 - b_3 \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right)^{-2} \le 19$, $b_3 \le 34{,}2$.	1	Už teisingai nustatytą b_3 reikšmių intervalą.
	$b_1 = \dfrac{4}{9} b_3 \in \boldsymbol{N}$, todėl b_3 dalus iš 9, o kadangi $b_3 \le 34{,}2$, tai didžiausia galima trečiojo nario reikšmė $b_3 = 27$, $b_2 = 18$, $b_1 = 9$ – tinka. *Ats.:* 27.	1	Už teisingą pagrindimą, kad $b_3 = 27$ yra didžiausia galima trečiojo nario reikšmė.