



MATEMATIKA

2013 m. valstybinio brandos egzamino
pavyzdinė užduotis

2013 m.

Trukmė – 3 val. (180 min.)

NURODYMAI

1. Gavę užduoties sąsiuvinį bei atsakymų lapą patikrinkite, ar juose nėra tuščių lapų ar kitokio aiškiai matomo spausdinimo broko. Pastebėję praneškite egzamino vykdytojui.
2. Stenkitės išspręsti kuo daugiau uždavinių, neatsižvelgdami į tai, pagal kokio kurso (bendrojo ar išplėstinio) programą dalyko mokėtės mokykloje. Neatsakę į kurį nors klausimą, nenusiminkite ir stenkitės atsakyti į kitus.
3. Uždavinių sprendimus / atsakymus pirmiausia galite rašyti užduoties sąsiuvinyje, kuriame yra palikta vietos juodraščiui. Galite naudotis rašymo priemonėmis (pieštuku, tamsiai mėlynai rašančiu rašikliu), trintuku, braižybos įrankiais, skaičiuotuvu be tekstinės atminties. Jei neabejojate dėl atsakymo, iš karto rašykite atsakymų lape. **Vertintojams bus pateikiamas tik atsakymų lapas!**
4. Atsakymų lape rašykite TIK tamsiai mėlynai rašančiu rašikliu. Saugokite atsakymų lapą (neįplėškite ir nesulamdykite), nesinaudokite trintuku ir koregavimo priemonėmis. Sugadintuose lapuose įrašyti atsakymai nebus vertinami.
5. Pasirinktus **I dalies** uždavinių atsakymus atsakymų lape pažymėkite kryželiu ☒ (žymėkite tik vieną atsakymo variantą). Jei bus pažymėta daugiau kaip vienas atsakymo variantas arba pažymėtas neaiškiai, tas klausimas bus vertinamas 0 taškų. Suklydę atsakymą galite taisyti atsakymų lape nurodytoje vietoje.
6. **II dalies** uždavinių **atsakymus** įrašykite tam skirtoje atsakymų lapo vietoje.
7. Atsakymų lape skirtoje vietoje įrašykite **III dalies uždavinių sprendimus ir atsakymus**. Už ribų parašyti sprendimai ir atsakymai nebus vertinami.

Linkime sėkmės!

MATEMATIKOS BRANDOS EGZAMINO PAGRINDINĖS FORMULĖS

Prie egzamino užduoties pateikiamas matematinių formulių rinkinys:

Greitosios daugybos formulės: $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$, $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$

Aritmetinės progresijos pirmųjų n narių suma: $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$

Geometrinė progresija: $b_n = b_1 q^{n-1}$; $S_n = \frac{b_1 - qb_n}{1 - q} = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q}$

Nykstamosios geometrinės progresijos narių suma: $S = \frac{b_1}{1 - q}$

Sudėtinių procentų formulė: $S_n = S \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$; čia S – pradinis dydis, p – palūkanų norma, n – laikotarpių skaičius.

Trikampis: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$,

$$S = \frac{1}{2} ab \sin C = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = rp = \frac{abc}{4R},$$

čia a, b, c – trikampio kraštinės, A, B, C – prieš jas esantys kampai, p – pusperimetris, r ir R – įbrėžtinio ir apibrėžtinio apskritimų spinduliai, S – plotas.

Skritulio išpjova: $S = \frac{\pi R^2}{360} \cdot \alpha$, $l = \frac{2\pi R}{360} \cdot \alpha$; čia α – centrinio kampo didumas laipsniais,

S – išpjovos plotas, l – išpjovos lanko ilgis, R – apskritimo spindulys.

Kūgis: $S_{\text{son.pav.}} = \pi R l$, $V = \frac{1}{3} \pi R^2 H$

Rutulys: $S = 4\pi R^2$, $V = \frac{4}{3} \pi R^3$

Nupjautinis kūgis: $S_{\text{son.pav.}} = \pi (R+r) \cdot l$, $V = \frac{1}{3} \pi H (R^2 + Rr + r^2)$, čia R ir r – kūgio pagrindų spinduliai, V – tūris, H – aukštinė, l – sudaromoji.

Nupjautinės piramidės tūris: $V = \frac{1}{3} H (S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)$, čia S_1, S_2 – pagrindų plotai, H – aukštinė.

Rutulio nuopjova: $S = 2\pi R H$, $V = \frac{1}{3} \pi H^2 (3R - H)$, čia R – rutulio spindulys, H – nuopjovos aukštinė.

Erdvės vektoriaus ilgis: $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Vektorių skaliarinė sandauga: $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha$,

čia α – kampas tarp vektorių $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ ir $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$.

Trigonometrinių funkcijų sąryšiai:

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \quad 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha},$$

$$2 \sin^2 \alpha = 1 - \cos 2\alpha, \quad 2 \cos^2 \alpha = 1 + \cos 2\alpha,$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta, \quad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta,$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$$

Trigonometrinių funkcijų reikšmių lentelė

α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–

Trigonometrinės lygtys:

$$\begin{cases} \sin x = a, \\ x = (-1)^k \arcsin a + \pi k; \text{ čia } k \in \mathbb{Z}, -1 \leq a \leq 1; \\ \cos x = a, \\ x = \pm \arccos a + 2\pi k; \text{ čia } k \in \mathbb{Z}, -1 \leq a \leq 1; \\ \operatorname{tg} x = a, \\ x = \operatorname{arctg} a + \pi k; \text{ čia } k \in \mathbb{Z}, a \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Išvestinių skaičiavimo taisyklės: $(cu)' = cu'$; $(u \pm v)' = u' \pm v'$; $(uv)' = u'v + uv'$; $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$;

čia u ir v – diferencijuojamosios funkcijos, c – konstanta.

Funkcijų išvestinės: $(a^x)' = a^x \ln a$, $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$

Sudėtinės funkcijos $h(x) = g(f(x))$ išvestinė: $h'(x) = g'(f(x))f'(x)$.

Funkcijos grafiko liestinės taške $(x_0, f(x_0))$ lygtis: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

Pagrindinės logaritmų savybės: $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$, $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$,

$$\log_a x^k = k \cdot \log_a x, \quad \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

Derinių skaičius: $C_n^k = C_n^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Gretinių skaičius: $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$

Tikimybių teorija: Atsitiktinio dydžio X matematinė viltis yra $EX = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n$, dispersija $DX = (x_1 - EX)^2 p_1 + (x_2 - EX)^2 p_2 + \dots + (x_n - EX)^2 p_n$.

I dalis

Kiekvienas teisingas 1–13 uždavinio atsakymas vertinamas 1 tašku. Atsakymų lape pasirinktą atsakymą pažymėkite ☐.

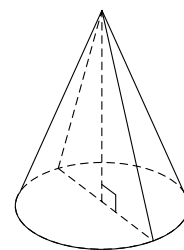
01. Kurio reiškinių reikšmė didžiausia?

- A $\cos 60^\circ$ B $\sin 120^\circ$ C $\cos 150^\circ$ D $\sin 180^\circ$

Juodraštis

02. Kūgio¹ sudaromoji² dvigubai ilgesnė už jo pagrindo³ spindulį. Kuris teiginys apie šį kūgį yra neteisingas?

- A Kūgio ašinis pjūvis⁴ yra lygiašonis trikampis.
 B Kūgio sudaromoji su kūgio aukštine sudaro 30° kampą.
 C Kūgio aukštinė nelygi kūgio pagrindo skersmeniui.
 D Kūgio pagrindo skersmuo dvigubai ilgesnis už kūgio sudaromąją.



Juodraštis

03. $\frac{a-1}{a^2-1} =$

- A $a-1$ B $\frac{1}{a-1}$ C $\frac{1}{a+1}$ D $a+1$

Juodraštis

¹ kūgis – stożek – конус

² sudaromoji – tworząca – образующая

³ pagrindas – podstawa – основание

⁴ ašinis pjūvis – przekrój osiowy – осевое сечение

- 04.** Visi dėžėje esantys rutuliukai yra vienodo dydžio. Ant kiekvieno rutuliuko užrašytas skaičius 1 arba 2, arba 3, arba 4. Tikimybė¹ ištraukti rutuliuką su skaičiumi 1 lygi $\frac{1}{5}$, su skaičiumi 2 lygi $\frac{2}{5}$, su skaičiumi 4 lygi $\frac{1}{10}$. Koku skaičiumi pažymėtų rutuliukų dėžėje yra daugiausia?

A 1 **B** 2 **C** 3 **D** 4

Juodraštis

- 05.** Jei $x^2 > (x-1)^2$, tai:

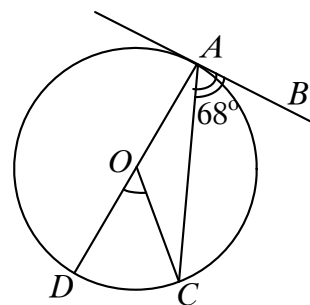
A $x \in \mathbb{R}$ **B** $x > 1$ **C** $x < \frac{1}{2}$ **D** $x > \frac{1}{2}$

Juodraštis

- 06.** Per apskritimo tašką A nubrėžta liestinė² AB . Taškas O – apskritimo centras, AD – skersmuo, $\angle CAB = 68^\circ$. Kokio didumo³ yra kampas DOC ?

A 22° **B** 34° **C** 44° **D** 68°

Juodraštis



¹ tikimybė – prawdopodobieństwo – вероятность

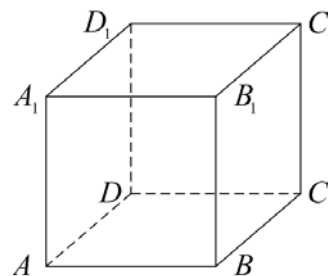
² liestinė – styczna – касательная

³ didumas – miara – величина

- 07.** Kokių kampų kertasi dvi plokštumos, iš kurių viena eina per kubo viršūnes¹ A, B, C_1 , o kita – per viršūnes A_1, B_1, C ?

A 30° **B** 45° **C** 60° **D** 90°

Juodraštis



- 08.** Tris skaičius a, b ir c sieja lygybė $|a| = b^2(b - c)$. Vienas iš šių skaičių yra teigiamas, kitas – neigiamas, o trečiasis – lygus nuliui. Kuri teiginys apie skaičius a, b ir c yra teisingas?

A $a < 0, b > 0, c = 0$ **B** $a = 0, b > 0, c < 0$
C $a > 0, b = 0, c < 0$ **D** $a > 0, b < 0, c = 0$

Juodraštis

- 09.** Nelygybės² $\log_{0,3}(4 + x) > \log_{0,3} 6$ visų sprendinių aibė³ yra:

A $(-\infty; 2)$ **B** $(-4; 2)$ **C** $(-4; +\infty)$ **D** $(2; +\infty)$

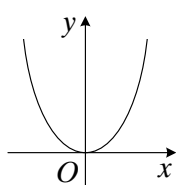
Juodraštis

¹ viršūnė – wierzchołek – вершина

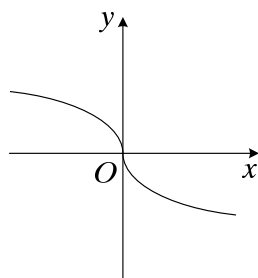
² nelygybė – nierówność – неравенство

³ sprendinių aibė – mnogość / zbiór rozwiązań – множество решений

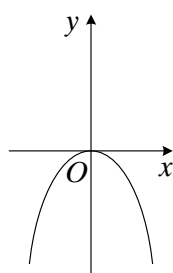
10. Žinoma, kad $f'(x) > 0$, kai $x < 0$, $f'(x) = 0$, kai $x = 0$ ir $f'(x) < 0$, kai $x > 0$. Kuris iš pateiktų eskizų galėtų būti funkcijos $y = f(x)$ grafiko eskizas?



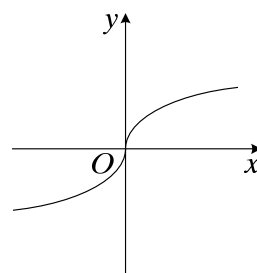
A



B



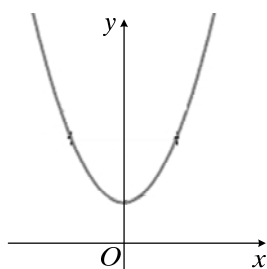
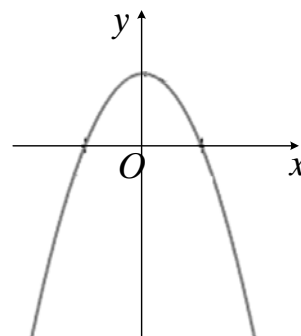
C



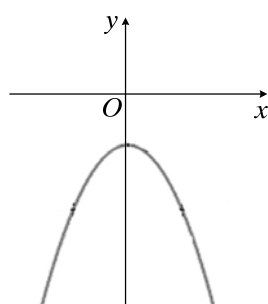
D

Juodraštis

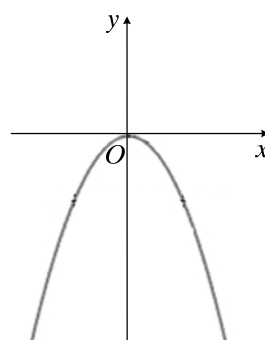
11. Paveiksle pavaizduotas funkcijos $f(x) = ax^2 + c$ grafiko eskizas. Kuris grafiko eskizas atitinka funkciją $g(x) = cx^2 + a$?



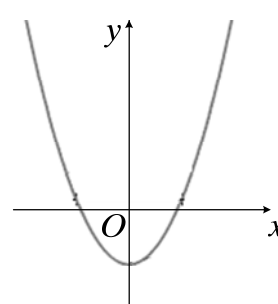
A



B



C



D

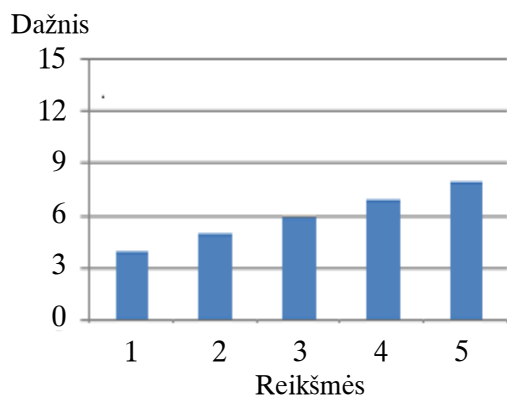
Juodraštis

12. Per tašką $(0; 0)$ nubrėžta funkcijos $f(x) = 5x^6 - x$ grafiko liestinė. Apskaičiuokite šios liestinės su teigiama Ox ašies kryptimi sudaromo kampo didumą.

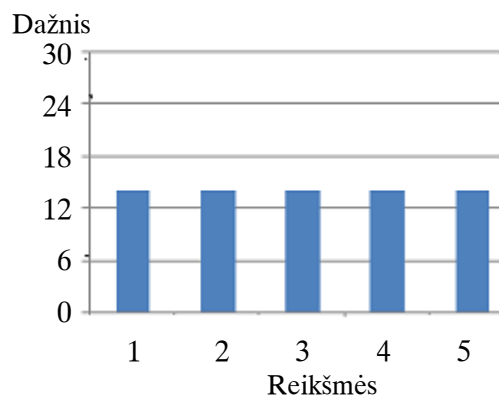
A 135° **B** 120° **C** 60° **D** 45°

Juodraštis

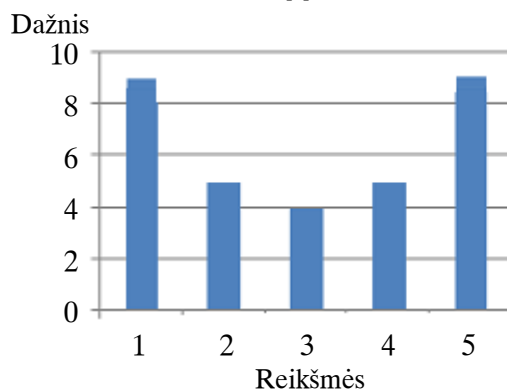
13. Atsakymuose pateiktos 4 imčių diagramos. Kurio imties vidurkis yra didžiausias?



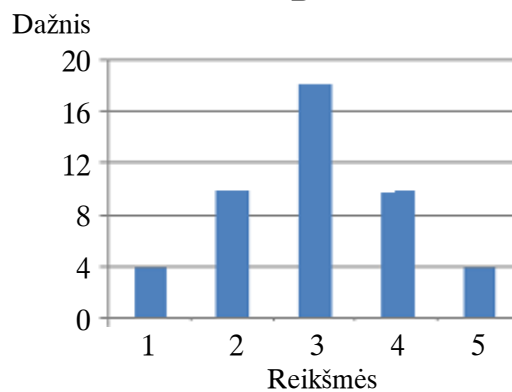
A



B



C



D

Juodraštis

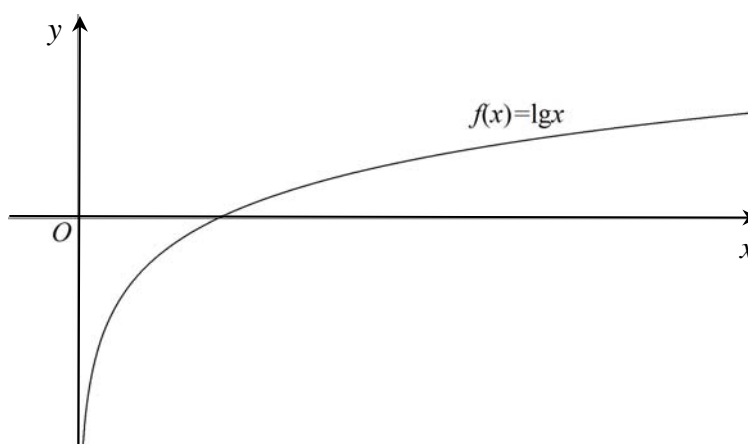
II dalis

Kiekvienas teisingas 14–25 uždavinio atsakymas vertinamas 2 taškais (kitu atveju vertinama 0 taškų). Atsakymų lapo tam skirtoje vietoje įrašykite tik gautą atsakymą.

- 14.** Dovana ir atvirukas kartu kainuoja 14 Lt. Dovana yra 80 proc. brangesnė už atviruką. Kiek kainuoja atvirukas?

Juodraštis

- 15.** Paveiksle pavaizduotas funkcijos $f(x) = \lg x$ grafiko eskizas. Užrašykite taško, kuriame grafikas kerta Ox ašį, koordinatas.



Juodraštis

- 16.** Kortelės sunumeruotos skirtingais sveikaisiais skaičiais nuo 7 iki 34 imtinai. Atsitiktinai¹ ištraukta viena kortelė. Kokia tikimybė, kad jos numeris yra skaičiaus 6 kartotinis²?

Juodraštis

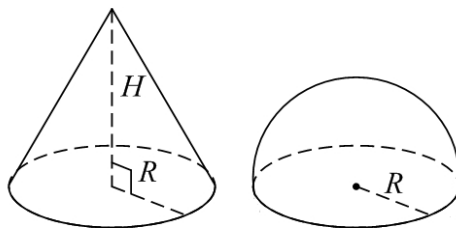
- 17.** Imtį sudaro trys natūralieji skaičiai a , 4, c . Žinoma, kad $a < 4 < c$, o šios imties vidurkis lygus 5. Kokia galima didžiausia skaičiaus c reikšmė?

Juodraštis

¹ atsitiktinai – losowo – случайно

² kartotinis – wielokratność – кратное

18. Kūgio pagrindo spindulys lygus pusrutulio spinduliui. Kiek kartų kūgio aukštinė H turi būti ilgesnė už pusrutulio spindulį R , kad abu kūnai būtų lygiatūriai?

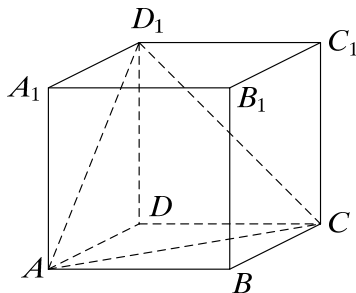


Juodraštis

19. Žinomi du aritmetinės progresijos nariai $a_{10} = \sqrt{2}$ ir $a_{19} = \sqrt{3}$. Apskaičiuokite šios progresijos narį a_1 .

Juodraštis

20. Kubo $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ tūris¹ lygus 27. Apskaičiuokite piramidės $D_1 ACD$ tūrį.



Juodraštis

21. Su kuria x reikšme vektoriai $\vec{c} = (x-5)\vec{i} + \vec{j}$ ir $\vec{d} = (2x-1)\vec{i} - \vec{j}$ yra kolinearūs? (\vec{i} ir \vec{j} – vienetiniai vektoriai)

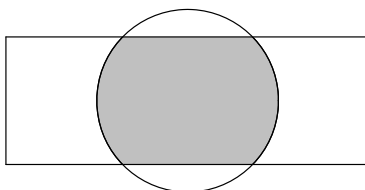
Juodraštis

¹ tūris – objętość – объём

22. Išspręskite lygtį $\sin x = \cos 15^\circ + \cos 75^\circ$.

Juodraštis

23. Stačiakampio¹ įstrižainių susikirtimo taškas sutampa su skritulio centru. Stačiakampio ilgis lygus 8, o plotis lygus $2\sqrt{2}$. Skritulio spindulio ilgis lygus 2. Apskaičiuokite stačiakampio ir skritulio bendrosios dalies (pilkosios) plotą².



Juodraštis

¹ stačiakampis – prostokąt – прямоугольник

² plotas – pole – площадь

24. Su kuria n reikšme yra teisinga lygybė:

$$\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \dots \cdot \log_n (n+1) = 4?$$

Juodraštis

25. Nuo vietovės A iki vietovės B yra 99 km. Pakelėje kas kilometrą įkasti stulpai. Ant kiekvieno stulpo yra du skaičiai: vienas rodo atstumą iki vietovės A, kitas – atstumą iki vietovės B; kiekvienas skaičius užrašomas dviem skaitmenimis¹:

00	99
----	----

 ,

01	98
----	----

 ,

02	97
----	----

 , ... ,

99	00
----	----

Kiek yra stulpų, ant kurių esantys du skaičiai užrašyti keturiais skirtingais skaitmenimis?

Juodraštis

¹ skaitmenys – cyfry – цифры

III dalis

Atsakymų lape skirtoje vietoje įrašykite šios dalies uždavinių sprendimus ir atsakymus.

26. Išspręskite lygčių sistemą
$$\begin{cases} 4x + y = 2, \\ -2x + y = 8. \end{cases}$$

(3 taškai)

Sprendimas

Juodraštis

27. Funkcijos $f(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{6} + mx + 2$ išvestinė lygi $\frac{x^2}{2} - \frac{x}{3} + 4$.

27.1. Apskaičiuokite koeficientą m .

(2 taškai)

Sprendimas

Juodraštis

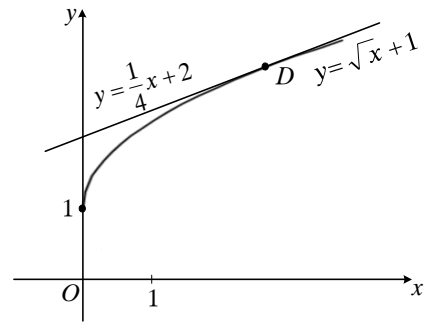
27.2. Išspręskite lygtį $f'(x) = 4$.

(2 taškai)

Sprendimas

Juodraštis

- 28.** Funkcijos $y = \sqrt{x} + 1$ grafiko liestinės taške D lygtis yra
 $y = \frac{1}{4}x + 2$.



- 28.1.** Užrašykite funkcijos $y = \sqrt{x} + 1$ apibrėžimo sritį.

(1 taškas)

Juodraštis

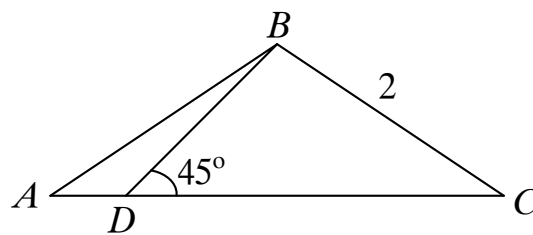
- 28.2.** Apskaičiuokite taško D koordinates.

(3 taškai)

Sprendimas

Juodraštis

- 29.** Iš trikampio ABC viršūnės B į priešais esančią kraštinę AC nubrėžta atkarpa BD taip, kad $\angle BDC = 45^\circ$. $BC = 2$.



- 29.1.** Pritaikę sinusų teoremą trikampiui BDC , apskaičiuokite apie jį apibrėžto apskritimo spindulio ilgį.

(2 taškai)

Sprendimas

Juodraštis

- 29.2.** Žinoma, kad apie trikampius ADB ir BDC apibrėžtų apskritimų spinduliai yra to paties ilgio. Įrodykite, kad trikampis ABC yra lygiašonis.

(2 taškai)

Įrodymas

Juodraštis

- 30.** Apskaičiuokite funkcijos $f(x) = \frac{x-3}{x+1}$ didžiausią ir mažiausią reikšmes intervale $[0; 2]$.

(3 taškai)

*Sprendimas**Juodraštis*

- 31.** Teniso varžybose dalyvauja 9 sportininkai. Kiekvienas sportininkas rungtyniaus su priešininku po vieną kartą. Rungtynių eilė sudaroma atsitiktinai. Reitingų lentelėje dalyviai surašyti nuo stipriausio iki silpniausio. Jonas yra trečias. Tikimybė Jonui nugalėti stipresnį varžovą lygi 0,3, nugalėti silpnesnį – 0,8.

- 31.1.** Kurią visų planuojamų rungtynių dalį sudaro rungtynės, kuriose turėtų dalyvauti Jonas?

(1 taškas)

*Sprendimas**Juodraštis*

Reitingų lentelė

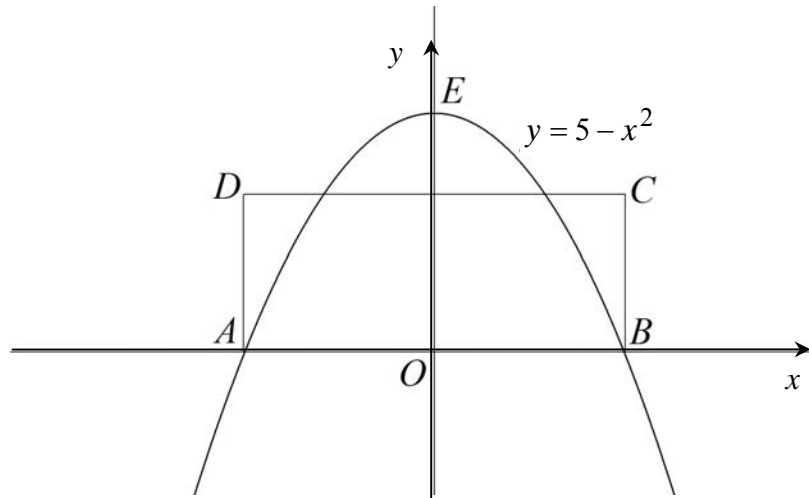
1.
2.
3. Jonas
4.
5.
6.
7.
8.
9.

- 31.2.** Kokia tikimybė, kad pirmąsias rungtynes Jonas žais su stipresniu už save varžovu ir šias rungtynes pralaimės?

(2 taškai)

*Sprendimas**Juodraštis*

32. Figūros, kurią riboja parabolė $y = 5 - x^2$ ir Ox ašis, plotas lygus stačiakampio $ABCD$ plotui. Apskaičiuokite stačiakampio $ABCD$ dviejų gretimų kraštinių ilgius.



(4 taškai)

Sprendimas

Juodraštis

