



MATEMATIKA

Valstybinio brandos egzamino užduotis

Pagrindinė sesija

2015 m. birželio 5 d.

Trukmė – 3 val. (180 min.)

MATEMATIKOS FORMULĖS

Greitosios daugybos formulės: $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$, $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$.

Aritmetinė progresija: $a_n = a_1 + d(n-1)$, $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$.

Geometrinė progresija: $b_n = b_1 q^{n-1}$, $S_n = \frac{b_1 - qb_n}{1-q} = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$.

Nykstamoji geometrinė progresija: $S = \frac{b_1}{1-q}$.

Sudėtinių procentų formulė: $S_n = S \left(1 \pm \frac{p}{100}\right)^n$; čia S – pradinis dydis, p – procentai, n – kartai.

Trikampis: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$,

$S = \frac{1}{2}ab \sin C = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = rp = \frac{abc}{4R}$;

čia a, b, c – trikampio kraštinių ilgiai, A, B, C – prieš jas esančių kampų didumai, p – pusperimetris, r ir R – įbrėžtinio ir apibrėžtinio apskritimų spindulių ilgiai, S – trikampio plotas.

Skritulys, apskritimas: $S = \frac{\pi R^2}{360^\circ} \cdot \alpha$, $l = \frac{2\pi R}{360^\circ} \cdot \alpha$; čia α – centrinio kampo didumas laipsniais, S – išpjovos plotas, l – išpjovos lanko ilgis, R – spindulio ilgis.

Kūgis: $S_{\text{son. pav.}} = \pi Rl$, $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$; čia R – pagrindo spindulio ilgis, l – sudaromosios ilgis, H – aukštinės ilgis.

Rutulys: $S = 4\pi R^2$, $V = \frac{4}{3}\pi R^3$; čia R – spindulio ilgis.

Nupjautinis kūgis: $S_{\text{son. pav.}} = \pi(R+r)l$, $V = \frac{1}{3}\pi H(R^2 + Rr + r^2)$; čia R ir r – pagrindų spindulių ilgiai, l – sudaromosios ilgis, H – aukštinės ilgis.

Nupjautinės piramidės tūris: $V = \frac{1}{3}H(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)$; čia S_1, S_2 – pagrindų plotai, H – aukštinės ilgis.

Rutulio nuopjova: $S = 2\pi RH$, $V = \frac{1}{3}\pi H^2(3R - H)$; čia R – rutulio spindulio ilgis, H – nuopjovos aukštinės ilgis.

Erdvės vektoriaus ilgis: $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; čia $\vec{a} = (x; y; z)$.

Vektorių skaliarinė sandauga: $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha$; čia α – kampo tarp vektorių $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ ir $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$ didumas.

Trigonometrinių funkcijų sąryšiai:

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \quad 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}, \quad 2 \sin^2 \alpha = 1 - \cos 2\alpha, \quad 2 \cos^2 \alpha = 1 + \cos 2\alpha,$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta, \quad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta, \quad \operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}.$$

Trigonometrinių funkcijų reikšmių lentelė:

α laipsniais	0°	30°	45°	60°	90°
α radianais	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–

Trigonometrinės lygtys:

$$\begin{cases} \sin x = a, \\ x = (-1)^k \arcsin a + \pi k; \text{ čia } k \in \mathbf{Z}, -1 \leq a \leq 1; \\ \cos x = a, \\ x = \pm \arccos a + 2\pi k; \text{ čia } k \in \mathbf{Z}, -1 \leq a \leq 1; \\ \operatorname{tg} x = a, \\ x = \operatorname{arctg} a + \pi k; \text{ čia } k \in \mathbf{Z}, a \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

Išvestinių skaičiavimo taisyklės:

$$(cu)' = cu', \quad (u \pm v)' = u' \pm v', \quad (uv)' = u'v + uv', \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2};$$

čia u ir v – diferencijuojamosios funkcijos, c – konstanta.

$$\text{Funkcijų išvestinės: } (a^x)' = a^x \ln a, \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

Sudėtinės funkcijos $h(x) = g(f(x))$ **išvestinė:** $h'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$.

Funkcijos grafiko liestinės taške $(x_0; f(x_0))$ **lygtis:** $y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$.

Pagrindinės logaritmų savybės: $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$, $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$, $\log_a x^k = k \log_a x$,

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

$$\text{Derinių skaičius: } C_n^k = C_n^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

$$\text{Gretinių skaičius: } A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

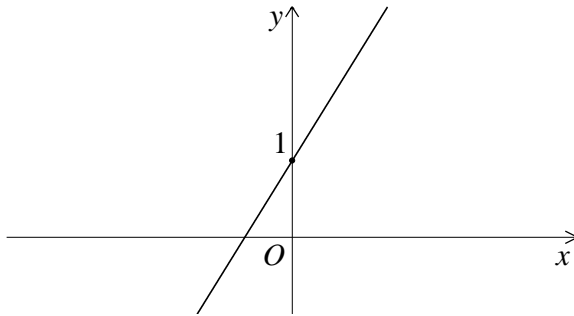
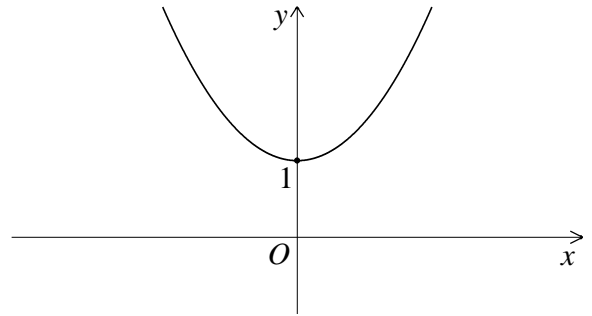
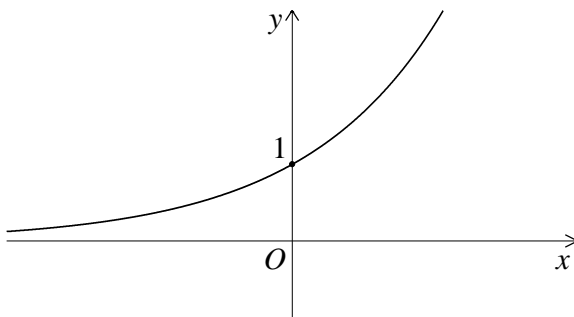
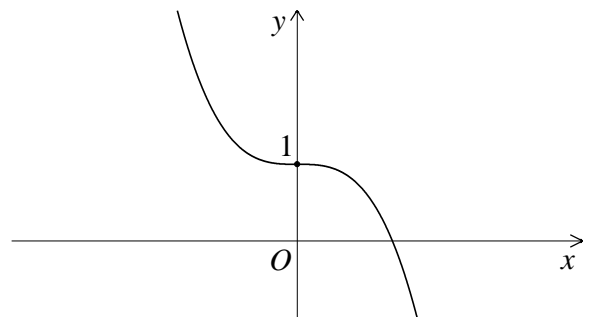
Tikimybių teorija: atsitiktinio dydžio X matematinė viltis $\mathbf{E}X = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n$,

dispersija $\mathbf{D}X = (x_1 - \mathbf{E}X)^2 p_1 + (x_2 - \mathbf{E}X)^2 p_2 + \dots + (x_n - \mathbf{E}X)^2 p_n$.

I dalis

Kiekvienas šios dalies uždavinys (01–10) turi tik vieną teisingą atsakymą, vertinamą **1 tašku**. Pasirinkite, jūsų nuomone, teisingą atsakymą ir pažymėkite jį atsakymų lape kryželiu ☒.

B→01. Kuris iš pateiktų eskizų yra funkcijos $y = 2^x$ grafiko eskizas?

A**B****C****D**

Juodraštis

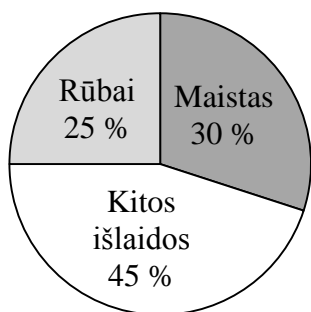
B→02. Sekos bendrasis narys¹ užrašomas formule $a_n = 3n - 1$ ($n = 1, 2, 3, \dots$). Šios sekos penktasis narys a_5 yra lygus:

A 5**B** 14**C** 15**D** 34

Juodraštis

¹ sekos bendrasis narys – ogólny wyraz ciągu – общий член последовательности

B→03. Diagramoje pavaizduotas šeimos vieno mėnesio visų išlaidų paskirstymas procentais. Tą mėnesį **maistui** šeima išleido 420 eurų. Kiek eurų šeima išleido rūbams?



A 105

B 350

C 399

D 400

Juodraštis

B→04. Imties¹ 5; 14; 11; 6; 5; 10; 12 mediana yra:

A 10

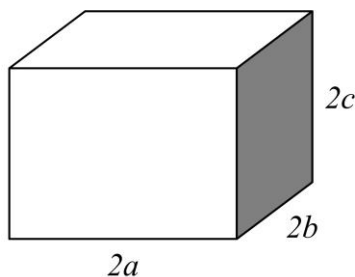
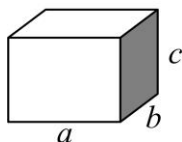
B 9

C 6

D 5

Juodraštis

B→05. Vandens čiaupo pajėgumas yra toks, kad stačiakampio gretasienio² formos baseinas, kurio matmenys yra a , b ir c , pripildomas per 1 valandą. Per kiek laiko iš to paties vandens čiaupo, veikiančio tokiu pačiu pajėgumu, galima būtų pripildyti stačiakampio gretasienio formos $2a$, $2b$ ir $2c$ matmenų baseiną?



A 2 val.

B 4 val.

C 6 val.

D 8 val.

Juodraštis

¹ imties – próby – выборки

² stačiakampio gretasienio – prostopadościanu – прямоугольного параллелепипеда

06. Išspręskite lygtį $(x + 2011)(x + 2013)(x + 2014) = (x + 2013)(x + 2014)(x + 2015)$.

- A** $-2011; -2013; -2014; -2015$
B $-2011; -2015$
C $-2013; -2014$
D sprendinių nėra

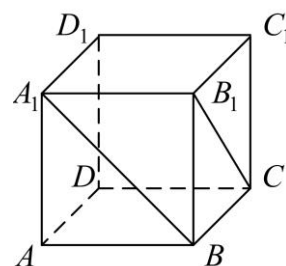
Juodraštis

07. Su kuria x reikšme vektoriai $\vec{a} = (x; 3)$ ir $\vec{b} = (-2; 6)$ yra kolinearūs?

- A** -9 **B** -1 **C** 1 **D** 9

Juodraštis

08. Paveiksle pavaizduotas kubas $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Raskite kampo tarp tiesių, kuriose yra kubo sienų įstrižainės¹ $A_1 B$ ir $B_1 C$, didumą.



- A** 0° **B** 45° **C** 60° **D** 90°

Juodraštis

¹ įstrižainės – przekątne – диагонали

09. Seifo kodą turi sudaryti trys skirtingi skaitmenys¹, užrašyti didėjimo tvarka. Kiek tokių skirtingų kodų galima sudaryti?

A 84

B 120

C 504

D 720

Juodraštis

10. Žinoma, kad funkcija $f(x)$ yra lyginė², o $g(x)$ – nelyginė³. Jei $f(a) = -b$, $g(-b) = a$, kur $a \neq 0, b \neq 0$, tai $g(f(-a)) + f(g(b))$ lygu:

A $a + b$

B $-a - b$

C $b - a$

D $a - b$

Juodraštis

¹ skaitmenys – cyfry – цифры

² lyginė – parzysta – чётная

³ nelyginė – nieparzysta – нечётная

II dalis

Kiekvieno šios dalies uždavinio (11–17) ar jo dalies teisingas atsakymas vertinamas **1 tašku** (kitu atveju vertinama 0 taškų). Išspręskite uždavinius ir gautus atsakymus įrašykite į atsakymų lapą.

B→11. Raskite aibių¹ $A = [-2; 4)$ ir $B = (-6; 3]$ sankirtą² $A \cap B$.

Juodraštis

B→12. Išspręskite lygtis:

12.1. $5^{2x} = 125;$

Juodraštis

12.2. $|x - 2| = 5.$

Juodraštis

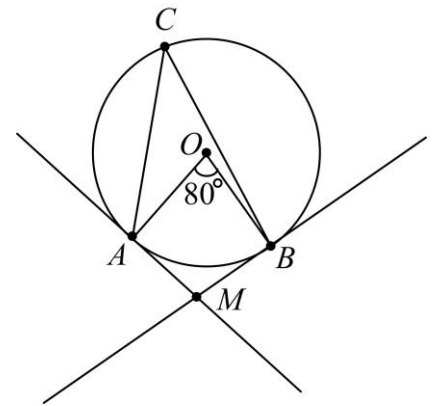
¹ aibių – zbiorów – множеств

² sankirtą – przecięcie – пересечение

B→13. Taškas C priklauso apskritimui, kurio centras yra taškas O . Iš taško M , esančio apskritimo išorėje, nubrėžtos dvi tiesės, kurios liečia apskritimą taškuose A ir B , $\angle AOB = 80^\circ$ (žr. pav.).

13.1. Apskaičiuokite $\angle ACB$ didumą.

Juodraštis

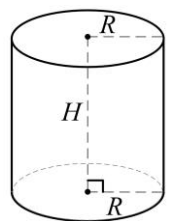


13.2. Apskaičiuokite $\angle AMB$ didumą.

Juodraštis

B→14. Ritinio¹ pagrindo apskritimo ilgis lygus 30, o ritinio aukštinės² ilgis lygus 6 (žr. pav.). Apskaičiuokite šio ritinio šoninio paviršiaus plotą³.

Juodraštis



¹ ritinio – walca – цилиндра

² aukštinės – wysokości – высоты

³ šoninio paviršiaus plotą – pole bocznej powierzchni – площадь боковой поверхности

B→15. Lentelėje pateikta informacija apie funkcijos $f(x)$ išvestinės¹ $f'(x)$ reikšmes.

x	$(-\infty; -2)$	-2	$(-2; 1)$	1	$(1; 6)$	6	$(6; +\infty)$
$f'(x)$	$f'(x) > 0$	0	$f'(x) < 0$	0	$f'(x) > 0$	0	$f'(x) < 0$

15.1. Užrašykite funkcijos $f(x)$ reikšmių didėjimo intervalą (-us)².

Juodraštis

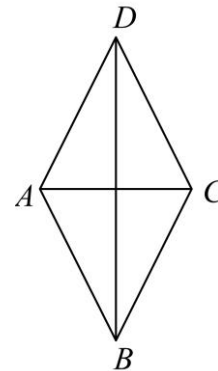
15.2. Užrašykite funkcijos $f(x)$ minimumo tašką (-us).

Juodraštis

16. Keturkampis $ABCD$ yra rombas (žr. pav.).

16.1. Užrašykite vektorių, lygų vektorių sumai $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

Juodraštis



16.2. Apskaičiuokite vektorių skaliarinę sandaugą $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Juodraštis

¹ išvestinės – pochodnej – производной

² reikšmių didėjimo intervalą (-us) – odstęp(y) wzrastania wartości – интервал(ы) возрастания значений

17. Vandens lygis d (metrais) uoste laiko momentu t paros laikotarpyje, pradedant nuo vidurnakčio, apskaičiuojamas pagal formulę $d(t) = 10 + 1,8 \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$, $0 \leq t \leq 24$.

17.1. Apskaičiuokite vandens lygį uoste 9 valandą ryto.

Juodraštis

17.2. Nustatykite didžiausią galimą d reikšmę.

Juodraštis

III dalis

Išspręskite 18–25 uždavinius. Sprendimus ir atsakymus perrašykite į atsakymų lapą.

18. Duota funkcija $g(x) = x^3 - 6x^2$.

B→18.1. Apskaičiuokite $g'(2)$.

(2 taškai)

Juodraštis

18.2. Raskite funkcijos $g(x)$ pirmąją funkciją $G(x)$.

(1 taškas)

Juodraštis

B→19. Raskite lygties $2\sin x = -1$ sprendinius, priklausančius intervalui $[-180^\circ; 360^\circ]$.

(3 taškai)

Juodraštis

20. Duotas reiškinys $\log_{0,2}(2x+3) + \log_{0,2}(4x-5)$.

B→20.1. Parodykite, kad šio reiškinio apibrėžimo sritis¹ yra intervalas $(1,25; +\infty)$.

(2 taškai)

Juodraštis

20.2. Išspręskite nelygybę² $\log_{0,2}(2x+3) + \log_{0,2}(4x-5) \geq \log_{0,2} 13$.

(5 taškai)

Juodraštis

¹ apibrėžimo sritis – dziedzina – область определения

² nelygybė – nierówność – неравенство

- 21.** Dėžėje yra raudoni, mėlyni ir geltoni rutuliukai. Iš dėžės atsitiktinai¹ išimamas vienas rutuliukas, lape užrašoma jo spalva ir jis padedamas atgal į dėžę. Tikimybė², kad lape bus užrašyta „raudona“, lygi $\frac{5}{12}$, o kad užrašyta „mėlyna“, lygi $\frac{1}{3}$.

B→21.1. Apskaičiuokite tikimybę, kad lape bus užrašyta arba „raudona“, arba „mėlyna“.

(1 taškas)

Juodraštis

B→21.2. Apskaičiuokite tikimybę, kad lape bus užrašyta „geltona“.

(1 taškas)

Juodraštis

- 21.3.** Iš dėžės atsitiktinai išimamas vienas rutuliukas, lape užrašoma jo spalva ir jis padedamas atgal į dėžę. Tai kartojama tris kartus. Kuri tikimybė yra didesnė: lape bus užrašytos trys vienodos ar trys skirtingos spalvos? Atsakymą pagrįskite.

(5 taškai)

Juodraštis

¹ atsitiktinai – losowo – случайно

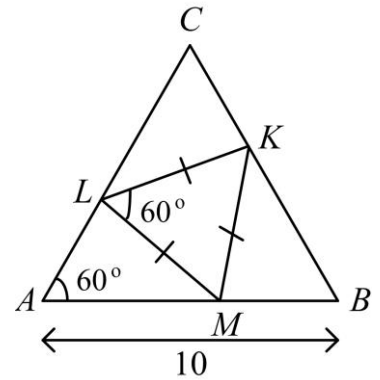
² tikimybė – prawdopodobieństwo – вероятность

22. Lygiakraščio trikampio¹ ABC kraštinės ilgis lygus 10. Kraštinėse BC , AC ir AB pasirinkti taškai K , L ir M taip, kad trikampis KLM yra lygiakraštis (žr. pav.).

B→22.1. Pagrįskite, kad $\angle AML = \angle CLK$.

(1 taškas)

Juodraštis



B→22.2. Pagrįskite, kad trikampiai AML ir CLK yra lygūs.

(1 taškas)

Juodraštis

22.3. Pažymėję atkarpos² AM ilgį x , o atkarpos LM ilgį y , pagrįskite, kad $y = \sqrt{3x^2 - 30x + 100}$, $0 \leq x \leq 10$.

(2 taškai)

Juodraštis

¹ lygiakraščio trikampio – trójkąta równobocznego – равностороннего треугольника

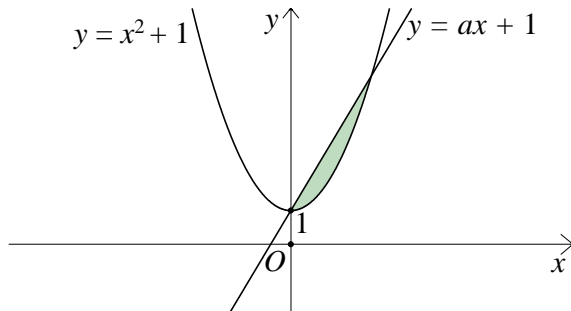
² atkarpos – odcinka – отрезка

22.4. Nustatykite, su kuria x reikšme LM ilgis yra mažiausias.

(3 taškai)

Juodraštis

23. Figūra yra ribojama parabolės $y = x^2 + 1$ ir tiesės $y = ax + 1$; čia $a > 0$ (žr. pav.). Su kuria a reikšme šios figūros plotas lygus 36?

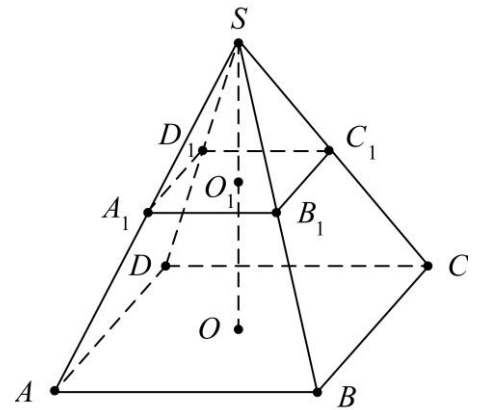


(5 taškai)

Juodraštis

24. Taisyklingosios keturkampės piramidės¹, kurios visos briaunos² lygios, tūris³ lygus $972\sqrt{2}$ cm³. Plokštuma⁴, lygiagreti piramidės pagrindui⁵ $ABCD$, piramidės briaunas kerta taškuose A_1, B_1, C_1 ir D_1 , o aukštinę SO – taške O_1 taip, kad $SO_1 : O_1O = 1:2$ (žr. pav.). Apskaičiuokite nupjautinės⁶ piramidės $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ tūrį. (3 taškai)

Juodraštis



¹ taisyklingosios keturkampės piramidės – prawidłowego czworokątnego ostrosłupu – правильной четырёхугольной пирамиды

² briaunos – krawędzi – рёбра

³ tūris – objętość – объём

⁴ plokštuma – płaszczyzna – плоскость

⁵ lygiagreti piramidės pagrindui – równoległe podstawie ostrosłupu – параллельная основанию пирамиды

⁶ nupjautinės – ściętej – усечённой

- 25.** Tuo pačiu metu iš miestelių A ir B pastoviais greičiais vienas priešais kitą išvažiavo du dviratininkai. Pirmasis važiavo iš miestelio A į miestelį B , o antrasis – iš miestelio B į miestelį A . Pakeliui jie susitiko. Po susitikimo pirmasis dviratininkas į miestelį B atvyko po 36 minučių, o antrasis į miestelį A atvyko po 25 minučių. Kiek minučių pirmasis dviratininkas važiavo iš miestelio A iki susitikimo su antruoju dviratininku?

(3 taškai)

Juodraštis