VILNIAUS UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
INFORMATIKOS KATEDRA

Baigiamasis bakalauro darbas

Algoritmas, maksimaliam srautui dinaminiuose tinkluose rasti

(Algorithm for the maximal flow in dynamic networks)

Atliko: 4 kurso 2 grupės studentas
Aleksas Vaitulevičius (parašas)
Darbo vadovas:
lekt. Irmantas Radavičius (parašas)
Recenzentas:
doc. dr. Vardauskas Pavardauskas (parašas)

Vilnius
2018

Santrauka

Paskutiniuose dviejuose dešimtmečiuose yra plačiai domimasi dinaminiais grafais, dėl jų naudos tokiose srityse kaip: komunikacijos tinkluose, VLSI kūrime, kompiuterinėje grafikoje. Šis darbas apima dinaminių grafų problemą, maksimalaus srauto radimą,viena iš labiausiai fundamentalių optimizavimo problemų. Šio darbo tikslas yra įrodyti, kad pateikiamo maksimalaus srauto radimo algoritmas yra efektyvesnis už statinio grafo Fordo Fulkersono algoritmą skaičiavimui panaudojamų briaunų atžvilgiu. Pateikiamo algoritmo veikimas yra pagrįstas modifikuotu grupavimo metodu ir modifikuotu Fordo Fulkersono algoritmu. Grupavimo metodas yra skirtas grafo išskirstymui į grupes, o modifikuotas Fordo Fulkersono algoritmas yra skirtas apskaičiuoti konkretaus regiono maksimaliems srautams. Atmintyje bus saugomas regionų išsidėstymas ir jų pralaidumas grafo pavidale. Perskaičiavus grupes kuriuose įvyko pokytis, galima rasti pakitusio grafo maksimalų srautą.

Raktažodžiai: dinaminiai grafai, maksimalūs srautai,grupavimo metodas, Fordo Fulkersono algoritmas, euristiniai bandymai.

Summary

In the last two decades, there was a growing interest in dynamical graphs, because of their use in such fields like: communication network, VLSI design, graphics. This work is only about dynamical graph problem, maximum flow, one of the most fundamental optimization problems. The main task of this work is to prove that provided algorithm for solving maximum flow problem is more efficient than Ford Fulkerson algorithm for static graph in the context of used edges for calculation. This algorithm is based on modified clustering method and modified Ford Fulkerson algorithm. Clustering method is used for clustering graph into clusters and modified Ford Fulkerson algorithm is used for computing maximum flows in particular cluster. Positioning and capacity of clusters will be saved in memory. Once updated clusters are computed, it is possible to find maximum flow for the whole updated graph.
Keywords: dynamic graphs, max flow, clustering, Ford Fulkerson algorithm, heuristic experiments.

Turinys

Sąvokų apibrėžimai

1. Dinaminiai grafai (angl. Dynamic graphs) - tai grafai, kuriuose galima atlikti tokias operacijas:
   - Pridėjimo
     - Pridėti briauną.
     - Pridėti viršūnę.
   - Atėmimo
     - Atimti briauną.
     - Atimti viršūnę.
   - Papildomos operacijos priklausomai nuo grafo savybių(pavyzdžiui jei grafas yra svorinis, tai jis galėtų turėti papildomą operaciją keisti svorį).
2. Dalinai dinaminis grafas (angl. Partial dynamic graph) - tai dinaminis grafas, kuriame yra uždrausta bent viena, bet ne visos dinaminio grafo operacijos.
3. Pilnai dinaminis grafas (angl. Fully dynamic graph) - tai dinaminis grafas, kuriame yra leidžiamos visos operacijos.
4. Inkrementalus dinaminis grafas (angl. Incremental dynamical graph) - dinaminis grafas, kuriame yra leidžiama pridėjimo operacijos.
5. Dekrementalus dinamainis grafas (angl. Decremental dynamical graph) - dinaminis grafas, kuriame leidžiamos atėmimo operacijos.
6. Grupė (angl. Cluster) - tinklo pografis, kuris yra naudojamas grupavimo metode.
7. Grupavimo metodas (angl. Clustering) - algoritmo dinaminiui grafui konstravimo būdas, kuriame grafas yra suskirstomas į grupes.
8. Tinklas (angl. Network) - orientuotas grafas, kurio briaunos turi pralaidumus.
9. Srautas (angle. Flow) - tai leistinas kelias konkrečiam kiekiui iš šaltinio į tikslą.
10. Šaltinis (angl. Source) - tinklo viršūnė, kuri yra srauto pradžios taškas.
11. Tikslas (angl. Sink) - tinklo viršūnė, kuri yra srauto pabaigos taškas.
12. Pralaidumas (angl. Capacity) - briaunos savybė, kuri nurodo koks kiekis gali ja praeiti.
13. Maksimalus srautas (angl. Max flow) - srautas, kurio dydis yra didžiausias iš visų leistinų srautų.

14. Vienšaltinis daugtikslinis maksimalus srautas (angl. Single source multi sink max flow) - tai maksimalaus srauto tipas, kuriame yra vienas šaltinis ir daugiau nei vienas tikslas.

15. Daugiašaltinis vientikslinis maksimalus srautas (angl. Multi source single sink max flow) - tai maksimalaus srauto tipas, kuriame yra vienas šaltinis ir vienas tikslas.

16. Daugiašaltinis daugtikslinis maksimalus srautas (angl. Multi source multi sink max flow) - tai maksimalaus srauto tipas, kuriame yra daugiau nei vienas šaltinis ir daugiau nei vienas tikslas.

17. Vienšaltinis vientikslinis maksimalus srautas (angl. Single source single sink max flow) - tai maksimalaus srauto tipas, kuriame yra daugiau nei vienas šaltinis ir daugiau nei vienas tikslas.

18. Euristinis experimentas (angl. heuristic experiment) -

Įvadas

Paskutiniuose dviejuose dešimtmečiuose yra plačiai domimasi dinaminiais grafais. Ši sritis suteikia daug teorinių žinių, kurios gali būti pritaikytos optimizuojant tokias sritis kaip: komunikacijos tinklus, VLSI kūrimą, kompiuterinę grafiką, kaip yra teigiama publikacijose [DFI01; EGI98]. Šiame darbe bus tiriamas algoritmas skirtas maksimaliam srautui rasti dinaminiuose tinkluose.

Dinaminis grafas - tai grafas, kuriam yra galima atlikti bent vieną iš šių operacijų:

- Pridėjimo
  - Pridėti briauną.
  - Pridėti viršūnę.
- Atėmimo
  - Atimti briauną.
  - Atimti viršūnę.
- Papildomos operacijos priklausomai nuo grafo savybių(pavyzdžiui jei grafas yra svorinis, tai jis galėtų turėti papildomą operaciją keisti svorį).

Pagal leidžiamas operacijas dinaminiai grafai yra skirstomi į:

- dalinai dinaminius grafus, kurie yra skirstomi į:
  - inkrementalus - vykdoma tik pridėjimo operacija
  - dekrementalus - Vykdoma tik atėmimas
- pilnai dinaminius grafus, kuriuose vykdomos visos operacijos.

Šiame darbe tiriamas algoritmas yra skirtas spręsti pilnai dinaminio grafo uždavinį.

Visa statinio grafo problemų aibė yra dinaminio grafo problemų poaibis. Tačiau dinaminiame grafo problemos sprendimas gali būti optimizuotas, nes yra daugiau informacijos apie grafą nei statiniame grafe (pavyzdžiui, jei buvo apskaičiuotas grafo maksimalus srautas ir prie grafo buvo pridėta briauna, tai bus žinomas grafo poaibio, kuriam nepriklauso naujai pridėta briauna, maksimalus srautas). Šiame darbe tiriamas algoritmas sprendžia maksimalaus srauto problemą, kuri priklauso šiai aibei.

Maksimalus srautas - tai didžiausias galimas srautas tinkle iš viršūnių s_i (šaltinių) iki viršūnių t_i (tikslų). Tinklas - tai orientuotas grafas $G = \{V, E, u\}$, kur V yra viršūnių aibė, E - briaunų aibė, o u - briaunų pralaidumų aibė $(u : E \to R)$. Dinaminio tinklo apibrėžimas yra analogiškas dinaminio grafo apibrėžimui. Pagal šaltinių ir tikslų skaičių ši problema yra skirstoma į:

- Vienšaltinę daugtikslinę - tai srautas, kuriame yra vienas šaltinis ir daugiau nei vienas tikslas.

- Daugiašaltinę vientikslinę - tai srautas, kuriame yra vienas tikslas ir daugiau nei vienas šaltinis.
- Daugiašaltinę daugtikslinę - tai srautas, kuriame yra daugiau nei vienas šaltinis ir daugiau nei vienas tikslas.
- Vienšaltinę vientikslinę - tai srautas, kuriame yra vienas šaltinis ir vienas tikslas.

Algoritmas, tiriamas šiame darbe, sprendžia tik vienšaltinę vientikslinę problemą. Tačiau tarpinėms reikšmėms gauti yra naudojama ir likusių problemų sprendimo būdas, Fordo Fulkersono algoritmas pritaikytas spręsti daugiašaltinę daugtikslinę problemą. Tiriamo algoritmo veikimo principas yra pagrįstas grupavimo metodu. Tai reiškia, kad tinklas yra padalinamas į grupes. Šių grupių maksimaliams srautams rasti ir yra naudojamas modifikuotas Fordo Fulkersono algoritmas.

Šiame darbe tiriamo algoritmo korektiškumas nėra įrodytas. Jo veikimo korektiškumą gali pagrįsti tik matematinis įrodymas. Tačiau matematinis įrodymas yra sudėtingas procesas. Tad reikia atlikti empirinius tyrimus su algoritmu, kurie parodytų ar verta tirti algoritmą. Taip pat nėra nustatyta ar tiriamas algoritmas yra efektyvesnis už algoritmą randantį maksimalų srautą statiniame tinkle. Jei tiriamas algoritmas nėra efektyvesnis, tai jo įrodyta neapsimoka, nes algoritmai skirti statiniams grafams, gali būti pritaikyti ir dinaminiams. Tad algoritmai, skirti dinaminiams grafams, yra naudojami tik tuo atveju jei jie yra efektyvesni už algoritmus, skirtus statiniams grafams.

Tad šio darbo **TIKSLAS** yra įgyvendinti empirinį tyrimą, kuris įrodytų, kad šiame darbe tiriamą algoritmą yra verta matematiškai ištirti. Šiam tikslui pasiekti reikia atlikti šiuos uždavinius:

1. Pateikti tiriamą algoritmą:
   (a) Pateikti grupės, į kurias bus sugrupuotas grafas, apibrėžimą.
   (b) Pateikti Fordo Fulkersono algoritmą ir kaip jis buvo pritaikytas daugšaltinei daugtikslinei problemai.
   (c) Pateikti grupavimo funkciją.
   (d) Apibrėžti funkciją, kuri randa viso tinklo maksimalų srautą su pakitusiu bent vienu maksimaliu srautu vienoje ar keliose grupėse. Jei buvo įvykdyta operacija:
      i. Pridėti viršūnę
      ii. Pridėti briauną
      iii. Atimti viršūnę
      iv. Atimti briauną
      v. Pakeisti briaunos pralaidumą
   (e) Pateikti tiriamo algoritmo pagrindinę funkciją.
2. Pateikti tiriamo algoritmo panaudojimo pavyzdį.
3. Įgyvendinti tiriamą algoritmą.
4. Įgyvendinti Fordo Fulkersono algoritmą, skirtą rasti maksimalų srautą statiniame tinkle.
5. Atlikti empirinius bandymus:
   (a) Surinkti šiuos duomenis apie tiriamą algoritmą ir įgyvendintą algoritmą, skirtą rasti maksimalų srautą statiniame tinkle:
      i. Abiejų algoritmų skaičiavimų rezultatus.
      ii. Abiejų algoritmų skaičiavimuose panaudotų briaunų kiekius.
      iii. Abiejų algoritmų skaičiavimuose panaudotų viršūnių kiekius.
   (b) Ištirti koreliaciją tarp briaunų panaudotų skaičiavimuose tiriamo algoritmo ir tinklo, naudojamo skaičiavimuose, briaunų kiekius.
   (c) Ištirti koreliaciją tarp briaunų panaudotų skaičiavimuose tiriamo algoritmo ir tinklo, naudojamo skaičiavimuose, viršūnių kiekius.
   (d) Ištirti koreliaciją tarp briaunų panaudotų skaičiavimuose Fordo Fulkersono algoritmo ir tinklo, naudojamo skaičiavimuose, briaunų kiekius.
   (e) Ištirti koreliaciją tarp briaunų panaudotų skaičiavimuose Fordo Fulkersono algoritmo ir tinklo, naudojamo skaičiavimuose, viršūnių kiekius.

(f) Palyginti tiriamo algoritmo ir Fordo Fulkersono algoritmo rezultatus.

(g) Palyginti tiriamo algoritmo ir Fordo Fulkersono algoritmo koreliacijas.

Darbas susideda iš dviejų dėstymo skyrių. Pirmame skyriuje yra pateikiamas tiriamas algoritmas. Pirmo skyriaus pirmame poskyryje yra pateikiamas grupės apibrėžimas, tam, kad žinoti į kokius subgrafus bus skaidomi tinklai tiriamame algoritme. Antrame poskyryje yra pateikiamas Fordo Fulkersono algoritmas ir kaip jis buvo pritaikytas maksimaliems srautams rasti grupėse. Trečiame poskyryje pateikiama grupavimo funkcija. Ketvirtas poskyris yra skirtas pateikti visoms funkcijoms, kurios būna iškviečiamos atlikus pridėjimo, atėmimo arba briaunos pralaidumo pakeitimo operacijas. Paskutiniame poskyryje pirmo skyriaus yra apibrėžiama funkcija, kuri apskaičiuoja visą informaciją, kuri yra reikalinga funkcijoms, kurios yra iškviečiamos atlikus pridėjimo, atėmimo arba briaunos pralaidumo pakeitimo operacijas. Antrame skyriuje yra aprašomi empiriniai bandymai ir pateikiami jų rezultatai.

1. Tiriamas Algoritmas Maksimaliam Srautui Dinaminiuose Tinkluose rasti

1.1. Grupės Apibrėžimas

Grupė - tai grupuojamo tinklo T subgrafas $G = \{V, E, u\}$. Subgrafo G šaltiniai s_i yra:

1. tinklo šaltinis, jei jis yra subgrafo G viršūnių aibėje,
2. menamos viršūnės. Jei $\exists x : x \in V$ ir grupė $G_i : G_i \neq G$ turi viršūnę y, kuri nepriklauso grafui G, bei egzistuoja briauna $y \to x$, tai egzistuoja menama viršūnė x' ir briauna $x' \to x$, kurios pralaidumas yra lygus grupės G_i maksimaliam srautui su tikslu x.

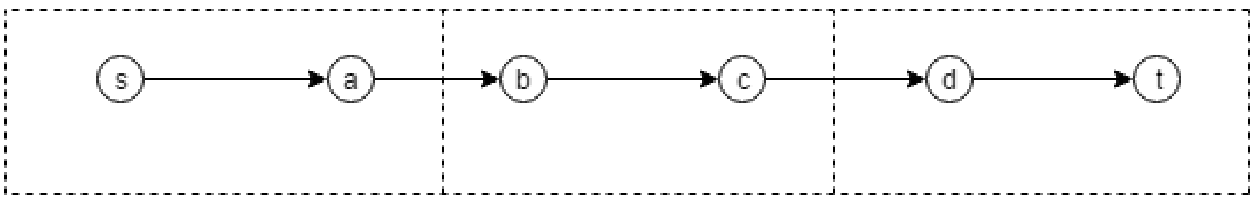
subgrafo G tikslai t_i yra:

1. tinklo tikslas, jei jis yra subgrafo G viršūnių aibėje,
2. menama viršūnė. Jei $\exists x : x \in V$ ir grupė $G_i : G_i \neq G$ turi viršūnę y, kuri nepriklauso grafui G, bei egzistuoja briauna $x \to y$, tai egzistuoja menama viršūnė x' ir briauna $x \to x'$, kurios pralaidumas yra lygus briaunos $x \to y$ pralaidumui.

Kiekviena tinklo T viršūnė v priklauso tik vienai grupei. Kiekviena tinklo T briauna e priklauso tik vienai grupei, nebent $e = x \to y : x \in G_i, y \in G_j, i \neq j$. Taip pat jei tinkle egzistuoja subgrafas, kuriame yra Eulerio ciklas, tai visos viršūnės priklausančios tam subgrafui turi būti vienoje grupėje.

Pavyzdys: tarkime turime tinklą $G = V = s, a, b, c, d, t, E = s \to a, a \to b, b \to c.c \to d, d \to t$, kuris yra sugrupuotas į grupes, kurių V yra lygūs s, a, b, c, d, t. Šis grupavimas pavaizduotas paveikslėlyje - 1.

1 pav. Grupavimo pavyzdys



Tada subgrafo b, c šaltinis yra menama viršūnė s_a, kuri yra sujungta briauna, kurios pralaidumas yra subgrafo s, a maksimalus srautas iki tikslo b, o tikslas yra d.

1.2. Fordo Fulkersono algoritmas pritaikytas tiriamam algoritmui

Maksimaliems srautams grupėse rasti algoritmas naudoja modifikuotą Fordo Fulkersono algoritmą, kuris naudojasi BFS galimam srautui rasti. Originalus Fordo Fulkersono algoritmas yra skirtas rasti vienšaltinį vientikslinį maksimalų srautą, tačiau tiriamo algoritmo atveju gali susidaryti grupės, kurios turi kelis tikslus ir arba kelis šaltinius. Tad modifikuotas Fordo Fulkersono algoritmas yra skirtas rasti daugšaltinį daugtikslinį maksimalų srautą.

BFS algoritmas, aprašytas publikacijoje [BAP13] :

1. Inicializuojami masyvai V, Q ir FLOW, į V ir Q patalpinamas tinklo šaltinis.
2. Jei Q yra tuščias, tai einama į žingsnį 9
3. Išimamas paskutinis masyvo Q elementas y.
4. Jei $\nexists$ viršūnė x : $y \to x, x \notin V$, tai einama į žingsnį 2.
5. Briauna $y \to x$ patalpinama į masyvą FLOW.
6. Viršūnė x patalpinama į masyvą V
7. Viršūnė x patalpinama į Q masyvo pradžią.
8. Einama į žingsnį 4.
9. Baigiamas algoritmas.

Klasikinis Fordo Fulkersono algoritmas, kuris yra aprašytas publikacijoje [JF62] bei naudojantis BFS:

1. Maksimaliam srautui priskiriama reikšmė nulis.Sukuriama tinklo kopija G ir inicializuojama tinklo MAX reikšmė V={}, E={},u={}.
2. Naudojant BFS randamas srautas nuo šaltinio iki tikslo.
3. Jei nė vieno srauto nėra randama einama į žingsnį 8.
4. Sumažinama visų briaunų, kurie priklauso rastam srautui, pralaidumus per rasto srauto dydį tinkle G.
5. Rastas srautas pridedamas prie tinklo MAX.
6. Maksimalaus srauto reikšmė yra padidinama per rasto srauto dydį.
7. Einama į žingsnį 2.
8. Baigiamas algoritmas.

Modifikuotas Fordo Fulkersono algoritmas, naudojantis BFS:

1. Masyvo maksimalaus srauto dydžiai, kurio dydis yra lygus tikslų skaičiui, reikšmės nustatomos į nulį.Sukuriama tinklo kopija G ir inicializuojama tinklo MAX reikšmė V={}, E={},u={}.

2. Naudojant BFS randami srautai nuo visų šaltinių iki visų tikslų.
3. Jei nė vieno srauto nėra randama einama į žingsnį 8.
4. Sumažinama visų briaunų, kurie priklauso rastiems srautams, pralaidumus per rasto srauto dydį tinkle G.
5. Rasti srautai pridedamas prie tinklo MAX.
6. Masyvo maksimalaus srauto dydžiai elementų, kurie atitinka pasiektus tikslus, reikšmės padidinamos per rastų srautų dydžius.
7. Einama į žingsnį 2.
8. Baigiamas algoritmas.

1.3. Grupavimo funkcija

Šiame darbe tiriamas algoritmas yra paremtas Frederiksono suformuluotu grupavimo metodu [Fre85]. Grupavimo metodas - tai metodas, kuris yra pagrįstas grafo dalinimu į subgrafus vadinamus grupėmis. Grafas yra padalinamas taip, kad kiekviena atlikta operacija turėtų įtakos tik daliai grupių, bet ne visoms. Todėl tiriamas algoritmas veikia pagal grupavimo metodą tik tada kai yra patenkinta sąlyga: jei tinkle egzistuoja subgrafas, kuriame yra Eulerio ciklas, tai visos viršūnės priklausančios tam subgrafui yra vienoje grupėje. Šitai sąlygai patenkinti yra naudojama grupavimo funkcija:

1. a

Išvados

Išvadose ir pasiūlymuose, nekartojant atskirų dalių apibendrinimų, suformuluojamos svarbiausios darbo išvados, rekomendacijos bei pasiūlymai.

Conclusions

Šiame skyriuje pateikiamos išvados (reziume) anglų kalba.

Literatūra

[BAP13] S. Beamer, K. Asanovic, and D Patterson. Direction-optimizing breadth-first search. , 2013. pages 137–148, 1685 KB accessed 2018-05-15.

[DFI01] C. Demetrescu, I Finocchi, and G. F. Italiano. Dynamic graphs. http://www.diku.dk/PATH05/CRC-book1.pdf, 2001. pages 1-2, 215 KB, accessed 2018-05-13.

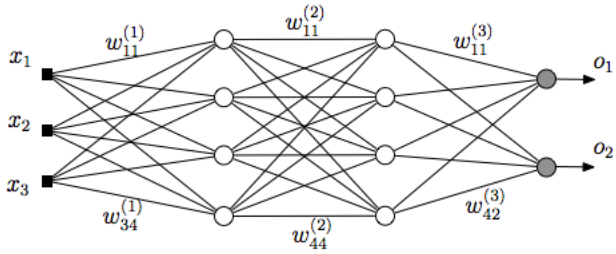
[EGI98] D. Eppstein, Z. Galil, and G. F. Italiano. Dynamic graph algorithms. https://pdfs.semanticscholar.org/d381/f9a7234fcfb57c2f615e5c99cc7362ab60c9.pdf, 1998. pages 13-18, 324 KB, accessed 2018-05-15.

[Fre85] G. N. Frederickson. Data structures for on-line updating of minimum spanning trees. https://epubs.siam.org/doi/abs/10.1137/0214055, 1985. accessed 2018-05-14.

[JF62] L. R. Ford Jr. and D. R. Fulkerson. Flows in networks, 1962. pages 1 - 16, accessed 2018-05-15.

Priedas Nr. 1

Niauroninio tinklo struktūra



2 pav. Paveikslėlio pavyzdys

Priedas Nr. 2

Eksperimentinio palyginimo rezultatai

1 lentelė. Lentelės pavyzdys

Algoritmas	$\bar{x}$	σ^2
Algoritmas A	1.6335	0.5584
Algoritmas B	1.7395	0.5647