VILNIAUS UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
INFORMATIKOS KATEDRA

Baigiamasis bakalauro darbas

Algoritmas maksimaliam srautui dinaminiuose tinkluose rasti

(Algorithm for the maximal flow in dynamic networks)

Atliko: 4 kurso 2 grupės studentas
Aleksas Vaitulevičius (parašas)
Darbo vadovas:
lekt. Irmantas Radavičius (parašas)
Recenzentas:
(parašas)

Vilnius
2018

Turinys

Sąvokų apibrėžimai

1. Dinaminiai grafai (angl. Dynamic graphs) - tai grafai, kuriuose galima atlikti tokias operacijas: pridėjimo (pridėti briauną, pridėti viršūnę), atėmimo (atimti briauną. atimti viršūnę), papildomos operacijos priklausomai nuo grafo savybių (pavyzdžiui jei grafas yra svorinis, tai jis galėtų turėti papildomą operaciją keisti svorį).
2. Dalinai dinaminis grafas (angl. Partial dynamic graph) - tai dinaminis grafas, kuriame yra uždrausta bent viena, bet ne visos dinaminio grafo operacijos.
3. Pilnai dinaminis grafas (angl. Fully dynamic graph) - tai dinaminis grafas, kuriame yra leidžiamos visos operacijos.
4. Inkrementalus dinaminis grafas (angl. Incremental dynamic graph) - dinaminis grafas, kuriame yra leidžiama pridėjimo operacijos.
5. Dekrementalus dinaminis grafas (angl. Decremental dynamic graph) - dinaminis grafas, kuriame leidžiamos atėmimo operacijos.
6. Grupė (angl. Cluster) - tinklo subgrafas, kuris yra naudojamas grupavimo metode.
7. Grupavimo metodas (angl. Clustering) - algoritmo dinaminiui grafui konstravimo būdas, kuriame grafas yra suskirstomas į grupes.
8. Tinklas (angl. Network) - orientuotas grafas, kurio briaunos turi talpas.
9. Srautas (angle. Flow) - tai leistinas kelias konkrečiam kiekiui iš šaltinio į tikslą.
10. Šaltinis (angl. Source) - tinklo viršūnė, kuri yra srauto pradžios taškas.
11. Tikslas (angl. Sink) - tinklo viršūnė, kuri yra srauto pabaigos taškas.
12. Talpa (angl. Capacity) - briaunos savybė, kuri nurodo koks kiekis gali ja praeiti.
13. Maksimalus srautas (angl. Max flow) - srautas, kurio dydis yra didžiausias iš visų leistinų srautų.
14. Vieno šaltinio ir kelių tikslų maksimalus srautas (angl. Single source multi sink max flow) - tai maksimalaus srauto tipas, kuriame yra vienas šaltinis ir daugiau nei vienas tikslas.
15. Kelių šaltinių ir vieno tikslo maksimalus srautas (angl. Multi source single sink max flow) - tai maksimalaus srauto tipas, kuriame yra daugiau nei vienas šaltinis ir vienas tikslas.
16. Kelių šaltinių ir kelių tikslų maksimalus srautas (angl. Multi source multi sink max flow) - tai maksimalaus srauto tipas, kuriame yra daugiau nei vienas šaltinis ir daugiau nei vienas tikslas.

17. Vieno šaltinio ir vieno tikslo maksimalus srautas (angl. Single source single sink max flow) - tai maksimalaus srauto tipas, kuriame yra vienas šaltinis ir vienas tikslas.
18. BFS (angl. Breadth first search) - paieška į plotį.
19. Euristinis eksperimentas (angl. heuristic experiment) -

Įvadas

Paskutiniuose dviejuose dešimtmečiuose yra plačiai domimasi algoritmais skirtais spręsti įvairias problemas dinaminiuose grafuose. Šių problemų sprendimai optimizuoja tokias sritis kaip: komunikacijos tinklus, VLSI kūrimą, kompiuterinę grafiką [DFI01; EGI98] Šios problemos yra statinių grafų problemų poaibis. Tačiau dinaminių grafų problemų sprendimai gali būti labiau optimizuoti nei statinių, nes yra daugiau informacijos apie grafą nei statiniame grafe (pavyzdžiui, jei buvo apskaičiuotas grafo maksimalus srautas ir prie grafo buvo pridėta briauna, tai bus žinomas grafo poaibio, kuriam nepriklauso naujai pridėta briauna, maksimalus srautas). Vienai iš šių problemų, maksimalaus srauto paieškos problemai, buvo sukurtas algoritmas kursiniame darbe. Sukurtasis algoritmas šiame darbe buvo įgyvendintas ir ištirtas. Įgyvendinimo metu buvo pastebėta daug netikslumų, tad algoritmas buvo pataisytas.

Dinaminis grafas - tai grafas, kuriam yra galima atlikti bent vieną iš šių operacijų: pridėjimo (pridėti briauną, pridėti viršūnę), atėmimo (atimti briauną, atimti viršūnę), papildomos operacijos priklausomai nuo grafo savybių (pavyzdžiui jei grafas yra svorinis, tai jis galėtų turėti papildomą operaciją keisti svorį). Pagal leidžiamas operacijas dinaminiai grafai yra skirstomi į: dalinai dinaminius grafus, kurie yra skirstomi į inkrementalius (vykdoma tik pridėjimo operacija) ir dekrementalius (vykdoma tik atėmimas), ir pilnai dinaminius grafus, kuriuose vykdomos visos operacijos. Sukurtas algoritmas yra skirtas spręsti pilnai dinaminio grafo uždavinį.

Maksimalus srautas - tai didžiausias galimas srautas tinkle iš viršūnių s_i (šaltinių) iki viršūnių t_i (tikslų). Tinklas - tai orientuotas grafas $G = \{V, E, u\}$, kur V yra viršūnių aibė, E - briaunų aibė, o u - briaunų talpų aibė $(u : E \to R)$. Pagal šaltinių ir tikslų skaičių ši problema yra skirstoma į:

- Vieno šaltinio ir kelių tikslų - tai srautas, kuriame yra vienas šaltinis ir daugiau nei vienas tikslas.
- Kelių šaltinių ir vieno tikslo - tai srautas, kuriame yra vienas tikslas ir daugiau nei vienas šaltinis.
- Kelių šaltinių ir kelių tikslų - tai srautas, kuriame yra daugiau nei vienas šaltinis ir daugiau nei vienas tikslas.
- Vieno šaltinio ir vieno tikslo - tai srautas, kuriame yra vienas šaltinis ir vienas tikslas.

Sukurtas algoritmas gali rasti tik vieno šaltinio ir kelių tikslų maksimalų srautą. Tačiau tarpinėms reikšmėms gauti algoritmas turi rasti ir visų kitų tipų maksimalius srautus. Tam naudojamas Fordo Fulkersono algoritmas [JF62] pritaikytas rasti kelių šaltinių ir kelių tikslų maksimalius srautus. Taip modifikuotas Fordo Fulkersono algoritmas gali rasti maksimalius srautus grupėse. Grupės - tai tinklo, kuriame ieškomas maksimalus srautas, subgrafai. Metodas, kuriame yra naudojamos grupės yra vadinamas grupavimo metodu [Fre85], kuriame tinklas yra padalinamas į grupes. Šis metodas buvo pritaikytas konstruojant algoritmą.

Sukurto algoritmo korektiškumui įrodyti reikia pateikti formalų įrodymą. Tačiau formalus įrodymas yra sudėtingas procesas. Todėl verta ištirti algoritmo korektišką veikimą naudojantis empiriniais tyrimais prieš formalų įrodymą. Šie tyrimai suteikia galimybę lengvai nustatyti ar sukurtas algoritmas veikia nekorektiškai. Jei empiriniais tyrimais yra nustatomas nekorektiškas algoritmo veikimas, tai reiškia, kad formalus įrodymas yra neprasmingas. Tad šiame darbe yra atliekami empiriniai tyrimai, o ne formalus įrodymas. Taip pat nėra nustatyta ar sukurtas algoritmas yra efektyvesnis už algoritmą randantį maksimalų srautą statiniame tinkle. Jei sukurtas algoritmas nėra efektyvesnis, tai jo formalus įrodymas yra neprasmingas, nes algoritmai skirti statiniams grafams, gali būti pritaikyti ir dinaminiams. Tad algoritmai, skirti dinaminiams grafams, yra naudojami tik tuo atveju jei jie yra efektyvesni už algoritmus, skirtus statiniams grafams.

Tad šio darbo **TIKSLAS** yra nustatyti ar sukurtą algoritmą verta formaliai įrodyti. Šiam tikslui pasiekti reikia atlikti šiuos uždavinius:

1. Pateikti sukurtą algoritmą:
   (a) Pateikti Fordo Fulkersono algoritmą ir kaip jis buvo pritaikytas kelių šaltinių ir kelių tikslų problemai.
   (b) Pateikti grupavimo funkciją.
   (c) Pateikti funkciją, kuri randa viso tinklo maksimalų srautą su pakitusiu bent vienu maksimaliu srautu vienoje ar keliose grupėse.
   (d) Pateikti sukurto algoritmo pagrindines funkcijas.
2. Įgyvendinti sukurtą algoritmą.
3. Įgyvendinti ir atlikti empirinius tyrimus.
4. Atlikti statistinius skaičiavimus su atliktų tyrimų rezultatais.

Darbas susideda iš trijų dėstymo skyrių. Pirmame skyriuje yra pateikiamas sukurtas algoritmas (1. užduotis). Jame išdėstoma kaip Fordo Fulkersono algoritmas buvo pritaikytas sukurtam algoritmui (1.a užduotis), grupavimo funkcija (1.b užduotis), funkcija, kuri randa viso tinklo maksimalų srautą su pakitusiu bent vienu maksimaliu srautu vienoje ar keliose grupėse (1.c užduotis), ir sukurto algoritmo pagrindinė funkcija (1.d užduotis). Antrame skyriuje yra aprašomas sukurto algoritmo įgyvendinimas (2 užduotis). TRečiame skyriuje yra aprašomi empiriniai bandymai, pateikiami jų rezultatai (3 užduotis), aprašomi atlikti statistiniai skaičiavimai ir jų rezultatai (4 užduotis).

1. Algoritmas maksimaliam srautui dinaminiuose tinkluose rasti

1.1. Grupės apibrėžimas

Grupė - tai grupuojamo tinklo T subgrafas $G = \{V, E, u\}$. Subgrafo G šaltiniai s_i yra:

1. tinklo šaltinis, jei jis yra subgrafo G viršūnių aibėje,
2. menamos viršūnės. Jei $\exists x : x \in V$ ir grupė $G_i : G_i \neq G$ turi viršūnę y, kuri nepriklauso grafui G, bei egzistuoja briauna $y \to x$, tai egzistuoja menama viršūnė x' ir briauna $x' \to x$, kurios talpa yra lygi grupės G_i maksimaliam srautui su tikslu x.

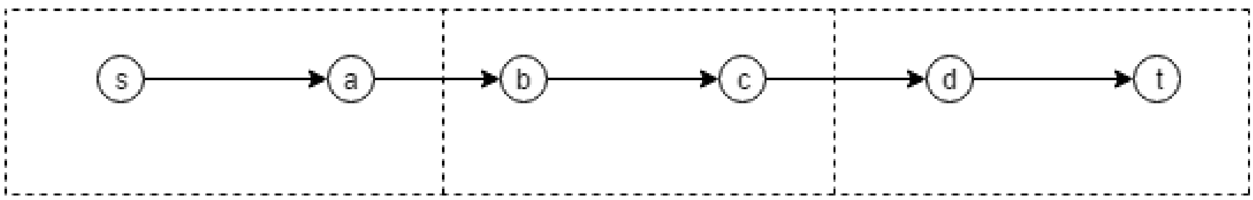
subgrafo G tikslai t_i yra:

1. tinklo tikslas, jei jis yra subgrafo G viršūnių aibėje,
2. menama viršūnė. Jei $\exists x : x \in V$ ir grupė $G_i : G_i \neq G$ turi viršūnę y, kuri nepriklauso grafui G, bei egzistuoja briauna $x \to y$, tai egzistuoja menama viršūnė x' ir briauna $x \to x'$, kurios talpa yra lygi briaunos $x \to y$ talpai.

Kiekviena tinklo T viršūnė v priklauso tik vienai grupei. Kiekviena tinklo T briauna e priklauso tik vienai grupei, nebent $e = x \to y : x \in G_i, y \in G_j, i \neq j$. Taip pat jei tinkle egzistuoja subgrafas, kuriame yra Eulerio ciklas, tai visos viršūnės priklausančios tam subgrafui turi būti vienoje grupėje.

Pavyzdys: tarkime turime tinklą $G = V = s, a, b, c, d, t, E = s \to a, a \to b, b \to c.c \to d, d \to t$, kuris yra sugrupuotas į grupes, kurių V yra lygūs s, a, b, c, d, t. Šis grupavimas pavaizduotas paveikslėlyje - 1.

1 pav. Grupavimo pavyzdys



Tada subgrafo b, c šaltinis yra menama viršūnė s_a, kuri yra sujungta briauna, kurios talpa yra subgrafo s, a maksimalus srautas iki tikslo b, o tikslas yra d.

1.2. Fordo Fulkersono algoritmas

Maksimaliems srautams grupėse rasti algoritmas naudoja modifikuotą Fordo Fulkersono algoritmą, kuris naudojasi BFS [BAP13] galimam srautui rasti. Originalus Fordo Fulkersono algoritmas

[JF62] yra skirtas rasti vieno šaltinio ir vieno tikslo maksimalų srautą, tačiau sukurto algoritmo atveju gali susidaryti grupės, kurios turi kelis tikslus ir arba kelis šaltinius. Tad modifikuotas Fordo Fulkersono algoritmas yra skirtas rasti kelių šaltinių ir kelių tikslų maksimalų srautą.

BFS algoritmas, aprašytas publikacijoje :

1. Inicializuojami masyvai V, Q ir FLOW, į V ir Q patalpinamas tinklo šaltinis.
2. Jei Q yra tuščias, tai einama į žingsnį 9.
3. Išimamas paskutinis masyvo Q elementas y.
4. Jei $\nexists$ viršūnė $x : y \rightarrow x, x \notin V$, tai einama į žingsnį 2.
5. Briauna $y \rightarrow x$ patalpinama į masyvą FLOW.
6. Viršūnė x patalpinama į masyvą V.
7. Viršūnė x patalpinama į Q masyvo pradžią.
8. Einama į žingsnį 4.
9. Baigiamas algoritmas.

Klasikinis Fordo Fulkersono algoritmas, kuris yra aprašytas publikacijoje bei naudojantis BFS:

1. Maksimaliam srautui priskiriama reikšmė nulis.Sukuriama tinklo kopija G ir inicializuojama tinklo MAX reikšmė V={}, E={},u={}.
2. Naudojant BFS randamas srautas nuo šaltinio iki tikslo.
3. Jei nė vieno srauto nėra randama einama į žingsnį 8.
4. Sumažinama visų briaunų, kurie priklauso rastam srautui, talpas per rasto srauto dydį tinkle G.
5. Rastas srautas pridedamas prie tinklo MAX.
6. Maksimalaus srauto reikšmė yra padidinama per rasto srauto dydį.
7. Einama į žingsnį 2.
8. Baigiamas algoritmas.

Modifikuotas Fordo Fulkersono algoritmas, naudojantis BFS:

1. Masyvo maksimalaus srauto dydžiai, kurio dydis yra lygus tikslų skaičiui, reikšmės nustatomos į nulį.Sukuriama tinklo kopija G ir inicializuojama tinklo MAX reikšmė V={}, E={},u={}.

2. Naudojant BFS randami srautai nuo visų šaltinių iki visų tikslų.

3. Jei nė vieno srauto nėra randama einama į žingsnį 8.

4. Sumažinama visų briaunų, kurie priklauso rastiems srautams, talpas per rasto srauto dydį tinkle G.

5. Rasti srautai pridedamas prie tinklo MAX.

6. Masyvo maksimalaus srauto dydžiai elementų, kurie atitinka pasiektus tikslus, reikšmės padidinamos per rastų srautų dydžius.

7. Einama į žingsnį 2.

8. Baigiamas algoritmas.

1.3. Grupavimo funkcija

Šiame darbe tiriamas algoritmas yra paremtas Frederiksono suformuluotu grupavimo metodu [Fre85]. Grupavimo metodas - tai metodas, kuris yra pagrįstas grafo dalinimu į subgrafus vadinamus grupėmis. Grafas yra padalinamas taip, kad kiekviena atlikta operacija turėtų įtakos tik daliai grupių, bet ne visoms. Todėl tiriamas algoritmas veikia pagal grupavimo metodą tik tada kai yra patenkinta sąlyga: jei tinkle egzistuoja subgrafas, kuriame yra Eulerio ciklas, tai visos viršūnės priklausančios tam subgrafui yra vienoje grupėje. Šitai sąlygai patenkinti yra naudojama grupavimo funkcija, kuri naudoja šias pagalbines funkcijas:

Subgrafų su Eulerio ciklais radimo funkcija - tinklo EG, kurio viršūnės yra grupių, tenkinančių pateiktą sąlygą (subgrafai su Eulerio ciklais), viršūnių masyvai, kūrimo funkcija:

1. Iš apskaičiuojamo tinklo $C = \{V_C, E_C, u_C\}$ sukuriamas tinklas EG, kurio viršūnės būtų apskaičiuojamo tinklo viršūnės patalpintos masyvuose, o briaunos atitiktų apskaičiuojamo tinklo briaunas.

2. Sukuriamas masyvas B, kuriame talpinamos briaunos, su kuriomis reikia daryti skaičiavimus, stekas PATH, kuriame talpinamos aplankytos viršūnės, ir viršūnių iteratorius x, jam suteikiama C šaltinio reikšmė ir patalpinamas į steką PATH.

3. Jei PATH yra tuščias, einama į žingsnį 19.

4. Jei masyve B $\exists x \rightarrow y : y \in V_C$, tai sukuriamas masyvas B', į kurį yra sudedamos visos viršūnės y iš B masyvo.

5. Jei masyve B $\nexists x \rightarrow y : y \in V_C$, tai sukuriamas masyvas B', į kurį yra sudedamos visos viršūnės y iš tinklo V.

6. Jei B' yra tuščias tai einama į žingsnį 17.

7. Iš masyvo B’ yra išimamas pirmas elementas y.

8. Jei $\nexists y \in V_C$, tai surandama viršūnė z, kuri turi visus y elementus (toliau y := z).

9. Jei PATH neturi elemento y, tai elementas y įdedamas į PATH ir einama į žingsnį 15.

10. Inicializuojama nauja viršūnė n su visais y elementais.

11. Iš PATH išimamas elementas z.

12. Jei elementas z = y, tai einama į žingsnį 15 ir y = n.

13. Tinklo EG viršūnės z ir n yra pakeičiamos x ir n konkatenacija (toliau n yra z ir n konkatenacija).

14. Einama į žingsnį 11.

15. Visi $x \to y : y \in B'$ įdedami į masyvą B ir viršūnių iteratoriui x suteikiama y reikšmė.

16. Einama į žingsnį 3.

17. Iš steko PATH išimamas elementas, iteratoriui x suteikiama PATH viršutinio elemento reikšmė.

18. Einama į žingsnį 3.

19. Pabaiga.

Srautui priklausančių grupių sukūrimo funkcija - iš pateikto tinklo $EG = \{V_E G, E_E G, u_E G\}$, kurio viršūnės yra apskaičiuojamo tinklo $C = \{V_C, E_C, u_C\}$ viršūnių, masyvai, sukuriamas grupių tinklas R.

1. Sukuriamas stekas B, kuriame talpinamos viršūnės, kurios priklauso konkrečiai grupei, masyvas VR, kuriame talpinamos viršūnės, kurias reikia ištrinti iš tinklo EG, stekas NC, kuriame talpinamos viršūnės kitų grupių kūrimui, ir viršūnių iteratorius x, jam suteikiama EG tinklo viršūnės, kurioje yra tinklo C šaltinis, reikšmė ir patalpinamas į steką NC.

2. Inicializuojama nauja grupė G.

3. Jei NC yra tuščias, einama į žingsnį 21.

4. Viršutinis NC elementas yra perkeliamas į B ir iteratoriui x yra suteikiama to elemento reikšmė.

5. Jei x dydis = 1, tai į tinklą G patalpinama viršūnė elemento x reikšmė ir einama į žingsnį 10.

6. Tinklui G priskiriama reikšmė $G = \{x, Y, Y_u\}$, kur Y yra tinklo C briaunos tarp x viršūnių, o Y_u - tai tų briaunų svoriai.

7. Naudojantis apibrėžimu sukuriamos tinklo R briaunos $G \to Q$, kur Q yra menamos viršūnės, nustatomi grupės G šaltiniai ir tikslai.
8. Tinklas G patalpinamas į tinklą R.
9. Tinklui G inicializuojama naujos grupės reikšmė.
10. Jei B yra tuščias einama į žingsnį 16.
11. Iš steko B išimamas viršutinis elementas, kurio reikšmė priskiriama iteratoriui x.
12. Jei $\exists y : x \to y$, y dydis > 1, $y \notin NC, y \notin B$, tai y talpinamas į steką NC ir einama į žingsnį 12.
13. Jei $\exists y : x \to y$, y dydis = 1,$y \notin NC, y \notin B$, tai y elemento reikšmė patalpinama į steką B, to elemento reikšmė pridedama į grupę G kaip viršūnė ir einama į žingsnį 12.
14. Į steką VR įdedama iteratoriaus x reikšmė.
15. Einama į žingsnį 10.
16. Tinklui G priskiriamos tinklo C briaunos, kurių viršūnės atitinka G viršūnes.
17. Naudojantis apibrėžimu sukuriamos tinklo R briaunos $G \to Q$, kur Q yra menamos viršūnės, nustatomi grupės G šaltiniai ir tikslai.
18. Tinklas G patalpinamas į tinklą R.
19. Tinklui G inicializuojama naujos grupės reikšmė.
20. Einama į žingsnį 3.
21. Iš tinklo EG ištrinamos visos viršūnės, kurios yra VR masyve.
22. Pabaiga.

Pati grupavimo funkcija:

1. Kviečiama subgrafų su Eulerio ciklais radimo funkcija (rezultatas tinklas EG).
2. Kviečiama srautui priklausančių grupių sukūrimo funkcija su tinklu EG.
3. Likusios tinklo EG viršūnės konkatenuojamos į masyvą X.
4. Sukuriamas tinklas $G = \{X, Y, Y_u\}$, kur Y yra tinklo C briaunos tarp X viršūnių, o Y_u - tai tų briaunų svoriai.
5. Naudojantis apibrėžimu sukuriamos tinklo R briaunos $G \to Q$, kur Q yra menamos viršūnės, nustatomi grupės G šaltiniai ir tikslai.

6. Tinklas G patalpinamas į tinklą R.

7. Pabaiga.

1.4. Sukurtas algoritmas

Sukurtas algoritmas turi dvi fazes: inicializavimo ir skaičiavimo po kiekvieno pokyčio. Inicializavimo fazėje yra išskaidomas pateiktas tinklas į grupes, apskaičiuojami maksimalūs srautai kiekvienoje grupėje, kuri priklauso maksimaliam pateikto tinklo srautui, ir iš rastų srautų yra gaunamas maksimalus pateikto tinklo srautas. Tada skaičiavimo po kiekvieno pokyčio fazėje yra laukiama pokyčio. Kai jis įvyksta, yra kviečiama funkcija priklausomai nuo to koks pokytis įvyko. Visos funkcijos gali pasiekti ir keisti grupių tinklą $CLUSTERS = \{V_{CLUSTERS}, E_{CLUSTERS}, u_{CLUSTERS}\}$, apskaičiuojmą tinklą $NETWORK = \{V_{NETWORK}, E_{NETWORK}, u_{NETWORK}\}$.

1.4.1. Inicializavimo fazė

Inicializavimo fazė (maksimalus NETWORK tinklo srautas yra grupėje su apskaičiuojamo tinklo tikslu):

1. Tinklui NETWORK yra kviečiama grupavimo funkcija, kuri grąžina grupių tinklą, kuris patalpinmas į tinklą CLUSTERS.

2. Inicializuojamas sąrašas MF, kuriame laikoma kokiam tikslui koks maksimalus srautas buvo apskaičiuotas, ir masyvas CAL, kuriame laikomos visos grupės, kurios jau buvo apskaičiuotos.

3. Apskaičiuojama grupės, kurioje yra tinklo NETWORK šaltinis, maksimalus srautas, kviečiant modifikuotą Fordo Fulkersono algoritmą. Rezultatas įsimenamas sąraše MF ir pačioje grupėje.

4. Grupė G patalpinama į masyvą CAL.

5. Jei masyve CAL yra grupė, kurioje yra tinklo NETWORK tikslas tai einama į žingsnį 11.

6. Jei $\nexists$ grupė $G : Y \to G, \forall Y \in CAL, G \in V_{CLUSTERS}, G \notin CAL$, tai einama į žingsnį 11.

7. Kiekvienam grupės $G : Y \to G, \forall Y \in CAL, G \in V_{CLUSTERS}, G \notin CAL$ briaunai $m \to s$, kur m yra menama viršūnė, kuri yra grupės G šaltinis, yra suteikiama talpa iš sąrašo MF elemento, kuris atitinka tikslą s.

8. Grupei G apskaičiuojamas maksimalus srautas naudojant modifikuotą Fordo Fulkersono algoritmą. Rezultatas įsimenamas sąraše MF ir pačioje grupėje.

9. Grupė G patalpinama į masyvą CAL.

10. Einama į žingsnį 5.

11. Algoritmo pabaiga.

1.4.2. Po kiekvieno pokyčio fazės pagalbinės funkcijos

Dalis funkcijų, kurios yra kviečiamos po konkretaus pakeitimo, naudoja šias pagalbines funkcijas:

Perskaičiuoti pokyčio paveiktas grupes funkcija. Šios funkcijos parametrai yra grupių , kuriuose įvyko pokytis masyvas AFFECTED ir trinama viršūnė DELETE(jei viršūnė nėra nurodoma, tai jokia viršūnė neištrinama):

1. Inicializuojamas sąrašas CHANGES(t, change) elementų, kuriuose yra tikslų ir maksimalių srautų iki jų pokyčių poros.

2. Jei AFFECTED yra tuščias, tai einama į žingsnį 7.

3. Kiekvienai grupei $G = \{V_G, E_G, u_G\}$ iš masyvo AFFECTED:

   (a) Apskaičiuojamas naujas maksimalus srautas naudojantis Fordo Fulkersono algoritmu. Rezultatas patalpinamas sąraše RESULTS.

   (b) Kiekvienam grupės G tikslui t, iki kurio maksimalus srautas pakito:

      i. Iš grupės G gaunama sena maksimalaus srauto iki t reikšmė OLD.

      ii. Iš sąrašo RESULTS gaunama nauja maksimalaus srauto iki t reikšmė NEW.

      iii. Į sąrašą CHANGES patalpinama pora t ir NEW - OLD.

      iv. Jei $NEW \neq 0$, tai Grupėje G išsaugomas nauja srauto reikšmė iki t, NEW.

      v. Jei $NEW = 0$, tai iš grupės G ištrinamas tikslas t.

4. Išimami visi elementai iš sąrašo AFFECTED.

5. Kiekvienai grupei $NG = \{V_{NG}, E_{NG}, u_{NG}\} : NG \in V_{CLUSTERS}$, kurios šaltinis s yra yra sąraše CHANGES(s, change):

   (a) Jei briaunos $s \to x$, kur $x \in V_{NG}$, talpa $z : z + change \neq 0$, tai briaunai $s \to x$ suteikiama reikšmė $z + change$, einama į 5.a su kita grupe NG.

   (b) Iš grupės NG ištrinamas šaltinis s.

   (c) Jei $DELETE = x$, kur $x : s \to x$, tai viršūnė x yra ištrinama iš grupės NG.

   (d) Jei grupės NG nėra masyve AFFECTED, tai grupė NG įdedama į masyvą AFFECTED.

6. Einama į žingsnį 2.

7. Algoritmo pabaiga.

Eulerio ciklo aptikimo funkcija. Ši funkcija nustato ar pridėta briauna $x \to y$ sukuria naują subgrafą, kuriame yra Eulerio ciklas. Funkcijos parametrai yra briauna $x \to y$. Funkcija grąžina masyvą EULER, kuriame yra visos viršūnės priklausančios Eulerio ciklams:

1. Inicializuojamas stekas POSSIBLE, kuriame talpinami viršūnių masyvai, kurie gali sudaryti Eulerio ciklą.
2. Į steką POSSIBLE patalpinamas masyvas, kurio elementai yra viršūnės x ir y.
3. Inicializuojamas masyvas EULER.
4. Jei POSSIBLE yra tuščias, tai einama į žingsnį 10.
5. Sukuriamas masyvas CYCLE, jam suteikiama iš POSSIBLE steko išimto elemento reikšmė.
6. Jei $\nexists a \to b$, kur a yra paskutinė CYCLE masyvo elemento reikšmė, o $b \in V_{NETWORK}$, tai einama į žingsnį 4. Kitu atveju pasirenkamas bet kuris b.
7. Jei $x = b$, tai visos viršūnės $z : z \in CYCLE, z \notin EULER$ yra pridedamos į masyvą EULER.
8. Jei $x \neq b$, tai sukuriama CYCLE kopija CYCLE', į CYCLE' patalpinama viršūnė b ir CYCLE' patalpinamas į steką POSSIBLE.
9. Einama į žingsnį 6.
10. Algoritmo pabaiga.

1.4.3. Po kiekvieno pokyčio fazės funkcijos kiekvinam pokyčio tipui

Jei įvyksta viršūnės x pridėjimas, tai tada yra įvykdoma funkcija:

1. Jei $\exists$ grupė $G : G \in CLUSTERS$, kuri neturi šaltinių ir tikslų (iki grupės nėra kelio nuo NETWORK tinklo šaltinio), tai grupei G yra pridedama viršūnė x ir einama į žingsnį 5.
2. Sukuriama grupė N.
3. Grupei N yra pridedama viršūnė x.
4. Grupė N yra pridedama į tinklą CLUSTERS.
5. Algoritmo pabaiga.

Jei įvyksta viršūnės x atėmimas, tai tada yra įvykdoma funkcija:

1. Jei $\nexists s \to x$, kur s yra grupės $SG \in CLUSTERS$, šaltinis, tai randama grupė $G = \{V_G, E_G, u_G\} : x \in V_G, G \in CLUSTERS$, grupė G patalpinama į masyvą AFFECTED ir ištrinamas x iš grupės G.

2. Jei $\exists s \rightarrow x$, kur s yra grupės $G : G \in CLUSTERS$ šaltinis ir grupės $PG : PG \in CLUSTERS$ tikslas, tai iš PG ištrinama viršūnė x ir į AFFECTED įdedama grupė PG.

3. Kviečiama perskaičiuoti pokyčio paveiktas grupes funkcija su argumentais AFFECTED ir viršūnę x.

4. Algoritmo pabaiga.

Jei įvyksta briaunos $x \rightarrow y$ pridėjimas, tai tada yra įvykdoma funkcija:

1. Kviečiama Eulerio ciklo aptikimo funkcija. Rezultatas patalpinamas į viršūnių masyvą EULER.

2. Jei EULER nėra tuščias:

   (a) Sukuriamas masyvas AFFECTED, į masyvą AFFECTED sudedamos visos grupės, kurios turi bent vieną viršūnę, kuri yra EULER masyve.

   (b) Grupės masyve AFFECTED yra sujungiamos į vieną grupę G.

   (c) Ištrinamos grupės iš tinklo CLUSTERS, kurios yra masyve AFFECTED.

   (d) Grupė G patalpinama į tinklą CLUSTERS.

   (e) Kviečiama perskaičiuoti pokyčio paveiktas grupes funkcija su argumentu masyvu, į kurį patalpinta grupė G.

3. Jei EULER yra tuščias:

   (a) Sukuriamas masyvas AFFECTED.

   (b) Į AFFECTED masyvą įdedamos visos grupės, kurios turi viršūnę x ir priklauso tinklui CLUSTERS.

   (c) Kviečiama perskaičiuoti pokyčio paveiktas grupes funkcija su argumentu AFFECTED.

4. Algoritmo pabaiga.

Jei įvyksta briaunos $x \rightarrow y$ atėmimas, tai tada yra įvykdoma funkcija:

1. Randama grupė $G : G \in V_{CLUSTERS}$ su briauna $x \rightarrow y$

2. Grupės G briauna $x \rightarrow y$.

3. Grupė G patalpinama į masyvą AFFECTED.

4. Kviečiama perskaičiuoti pokyčio paveiktas grupes funkcija su argumentu AFFECTED.

5. Algoritmo pabaiga.

Jei įvyksta briaunos $x \rightarrow y$ talpos pakeitimas į u, tai tada yra įvykdoma funkcija:

1. Randama grupė $G : G \in V_{CLUSTERS}$ su briauna $x \to y$.
2. Grupės G briaunos $x \to y$ talpa pakeičiama į u.
3. Grupė G patalpinama į masyvą AFFECTED.
4. Kviečiama perskaičiuoti pokyčio paveiktas grupes funkcija su argumentu AFFECTED.
5. Algoritmo pabaiga.

2. Sukurto algoritmo įgyvendinimas

Tam, kad pasiekti šio darbo tikslą buvo įgyvendintas sukurtas algoritmas. Įgyvendinimas buvo parašytas JAVA kalba versija 9, visos naudojamos bibliotekos yra įdiegiamos į algoritmo įgyvendinimą naudojantis įrankiu MAVEN versija 3. Šis įgyvendinimas naudojasi šių bibliotekų funkcionalumu:

1. Jgrapht - ši biblioteka yra naudojama grafų saugojimui, generavimui ir skaičiavimams.
2. Jgraphx - ši biblioteka yra naudojama grafų atspausdinimui vartotojo grafinėje sąsajoje.
3. lombok - naudojama kodo generavimui, kuris yra skirtas pasiekti ir modifikuoti privačius laukus.
4. junit - naudojamas kodo modulių testavimui.

Įgyvendinto algoritmo architektūra pavaizduota 2. Šioje architektūroje kiekviena klasė atlieka šias funkcijas:

1. DynamicNetworkWithMaxFlowAlgorithm - šioje klasėje yra laikomas apskaičiuojamas dinaminis algoritmas NETWORK, yra atliekami pokyčiai tinklui NETWORK ir yra atliekama pagrindinės sukurto algoritmo funkcijos.
2. FordFulkerson - ši klasė atlieka modifikuoto Fordo Fulkersono algoritmo funkciją.
3. BFS - ši klasė atlieka paieška platyn algoritmo funkciją.
4. DividerToClusters - ši klasė atlieka grupavimo funkciją.
5. Network - ši klasė yra tinklas.
6. DynamicNetwork - ši klasė yra dinaminis tinklas.
7. EulerCycleWarps - ši klasė yra tinklas, kurio viršūnės yra grupių, tenkinančių sąlygą subgrafai su Eulerio ciklais, viršūnių masyvai.
8. ClustersNetwork - ši klasė yra grupių tinklas.

Klasės SimpleDirectedGraph<List<int>, DefaultEdge> ir SimpleDirectedWeightedGraph<int, WeightedEdge> yra klasės iš jgrapht bibliotekos.

3. Empiriniai bandymai

Tam, kad nustatyti ar verta formaliai įrodyti sukurtą algoritmą buvo atlikti empiriniai bandymai, kurie skirti ištirti algoritmo korektišką veikimą ir efektyvumą. Šiems bandymams atlikti buvo įgyvendintas sukurtas algoritmas, modulis, generuojanti tinklus, ir modulis, kuris atlieka bandymus su tinklus generuojančio modulio rezultatais. Su bandymus atliekančio modulio rezultatais yra atliekami statistiniai skaičiavimai.

3.1. Tinklus generuojantis modulis

Šiame darbe reikia ištirti kuo įvairesnius tinklus, iš kurių parametrų būtų paprasta sukonstruoti regresinius modelius. Tad tinklus generuojantis modulis turi generuoti tinklus $N_i = \{V_{N_i}, E_{N_i}, uN_i\}$, kurių parametrai tenkintų šias sąlygas:

- Viršūnių aibių V_{N_i} dydžių aibės SV augimo greitis būtų linijinis ir SV turi būti baigtinė.
- Kiekvieną kartą generuojant tinklą N_i yra tikimybė sugeneruoti jungų tinklą.
- Sugeneruotų tinklų aibėje egzistuoja tinklai su skirtingais viršūnių aibių dydžiais ir vidutiniu galimų briaunų skaičiumi. Vidutinis galimų briaunų skaičius yra apskaičiuojamas $SE_a = \frac{SE_{max}+SE_{min}}{2}$, kur SE_{max} yra maksimalus galimų briaunų skaičius, o SE_{min} - minimalus galimų briaunų skaičius.
- Sugeneruotų tinklų aibėje egzistuoja tinklai su skirtingais viršūnių aibių dydžiais ir vidutiniškai mažesniu briaunų skaičiumi negu vidutinis galimų briaunų skaičius. Tinklo briaunų skaičius yra laikomas vidutiniškai mažesniu negu vidutinis galimų briaunų skaičius, jei tenkinama sąlyga: $SE_{a_{min}} = \frac{SE_a+SE_{min}}{2}$, kur SE_a yra vidutinis galimų briaunų skaičius, o SE_{min} - minimalus galimų briaunų skaičius.
- Sugeneruotų tinklų aibėje egzistuoja tinklai skirtingais viršūnių aibių dydžiais ir vidutiniškai didesniu briaunų skaičiumi negu vidutinis galimų briaunų skaičius. Tinklo briaunų skaičius yra laikomas vidutiniškai didesniu negu vidutinis galimų briaunų skaičius, jei tenkinama sąlyga: $SE_{a_{max}} = \frac{SE_a+SE_{max}}{2}$, kur SE_a yra vidutinis galimų briaunų skaičius, o SE_{max} - maksimalus galimų briaunų skaičius.

Žinant, kad minimalus galimų briaunų skaičius tinkle yra $SE_{min}(SV_i) = SV_i - 1$, o maksimalus galimų briaunų skaičius tinkle yra $SE_{max}(SV_i) = SV_i \times (SV_i - 1)$, kur SV_i yra tinko viršūnių skaičius, tai gauname, kad $SE_a(SV_i) = \frac{SV_i^2-1}{2}$, $SE_{a_{min}}(SV_i) = \frac{SV_i^2+2\times SV_i-3}{4}$ ir $SE_{a_{max}}(SV_i) = \frac{3\times SV_i^2-2\times SV_i-1}{4}$.

Tad tinklus generuojantis modulis sugeneruoja tinklų $N_i = \{V_{N_i}, E_{N_i}, uN_i\}$ aibę A. Aibėje A yra 10 poaibių A'_j, kurių tinklų viršūnių aibių V_{N_i} dydžiai SV_i yra lygūs. Tad kiekvienas poaibis A'_j turi skirtingą dydį SV_j. Modulis sugeneruoja poaibius A'_j su šiais $SV_j = 10 \times j : j = 1..10$. Kiekviename poaibyje A'_j yra po 3 poaibius A''_j, kuriuose yra po 10 tinklų N_i, kurių briaunų aibių

E_{N_i} dydžiai yra lygūs. Tad kiekvienas poaibis A''_j turi skirtingą dydį SE_j. Modulis sugeneruoja poaibius A''_j su šiais $SE_j : SE_a(SV_i), SE_{a_{min}}(SV_i), SE_{a_{max}}(SV_i)$.

3.2. Bandymus atliekantis modulis

Šiame darbe buvo sukurtas modulis ,kuris atlieka bandymus su kiekvienu tinklu, kurį sugeneravo tinklus generuojantis modulis. Šių bandymų metu yra skaičiuojamas briaunų panaudotų skaičiavimuose skaičius. Šio bandymo rezultatai yra masyvai INCORRECT, ACTION, $Algorithm_{\{T\}}$ ir $Test_{\{T\}}$, kur T yra kiekvieno dinaminio tinklo operacijos tipas. Šio bandymo eiga su tinklu NETWORK:

1. Apskaičiuojamas tinklo NETWORK maksimalus srautas ACTUAL, naudojant sukurto algoritmo įgyvendinimą.
2. Apskaičiuojamas tinklo NETWORK maksimalus srautas EXPECTED, naudojant modifikuotą Fordo Fulkersono algoritmą.
3. Jei $ACTUAL \neq EXPECTED$, tai į masyvą INCORRECT įdedama grupė G, o į masyvą ACTION reikšmė *INIT*.
4. Su kiekvienu dinaminio tinklo operacijos tipu TYPE yra atliekami šie veiksmai:
   (a) Tinklui NETWORK atliekama operacija TYPE.
   (b) Apskaičiuojamas tinklo NETWORK maksimalus srautas ACTUAL, naudojant sukurto algoritmo įgyvendinimą. Į $Algorithm_{TYPE}$ įdedamas skaičiavime panaudotų briaunų skaičius.
   (c) Apskaičiuojamas tinklo NETWORK maksimalus srautas EXPECTED, naudojant modifikuotą Fordo Fulkersono algoritmą. Į $Test_{TYPE}$ įdedamas skaičiavime panaudotų briaunų skaičius.
   (d) Jei $ACTUAL \neq EXPECTED$, tai į masyvą INCORRECT įdedamas tinklas NETWORK, o į masyvą ACTION įdedamas TYPE.

3.3. Statistiniai skaičiavimai ir jų rezultatai

Išvados

Išvadose ir pasiūlymuose, nekartojant atskirų dalių apibendrinimų, suformuluojamos svarbiausios darbo išvados, rekomendacijos bei pasiūlymai.

Conclusions

Šiame skyriuje pateikiamos išvados (reziume) anglų kalba.

Literatūra

[BAP13] S. Beamer, K. Asanovic, and D Patterson. Direction-optimizing breadth-first search. , 2013. pages 137–148, 1685 KB accessed 2018-05-15.

[DFI01] C. Demetrescu, I Finocchi, and G. F. Italiano. Dynamic graphs. http://www.diku.dk/PATH05/CRC-book1.pdf, 2001. pages 1-2, 215 KB, accessed 2018-05-13.

[EGI98] D. Eppstein, Z. Galil, and G. F. Italiano. Dynamic graph algorithms. https://pdfs.semanticscholar.org/d381/f9a7234fcfb57c2f615e5c99cc7362ab60c9.pdf, 1998. pages 13-18, 324 KB, accessed 2018-05-15.

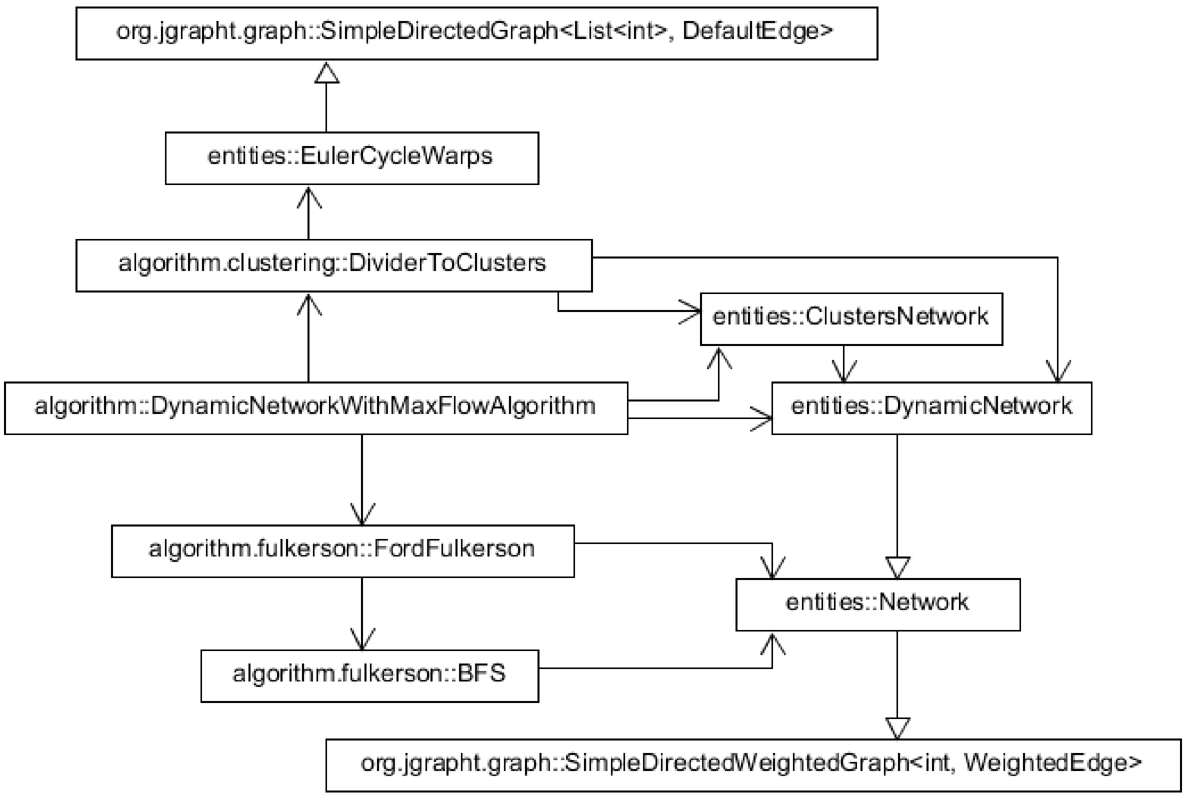
[Fre85] G. N. Frederickson. Data structures for on-line updating of minimum spanning trees. https://epubs.siam.org/doi/abs/10.1137/0214055, 1985. accessed 2018-05-14.

[JF62] L. R. Ford Jr. and D. R. Fulkerson. Flows in networks. https://books.google.lt/books?hl=lt&lr=&id=fw7WCgAAQBAJ&oi=fnd&pg=PP1&dq=ford+fulkerson, 1962. pages 1 - 16, accessed 2018-05-15.

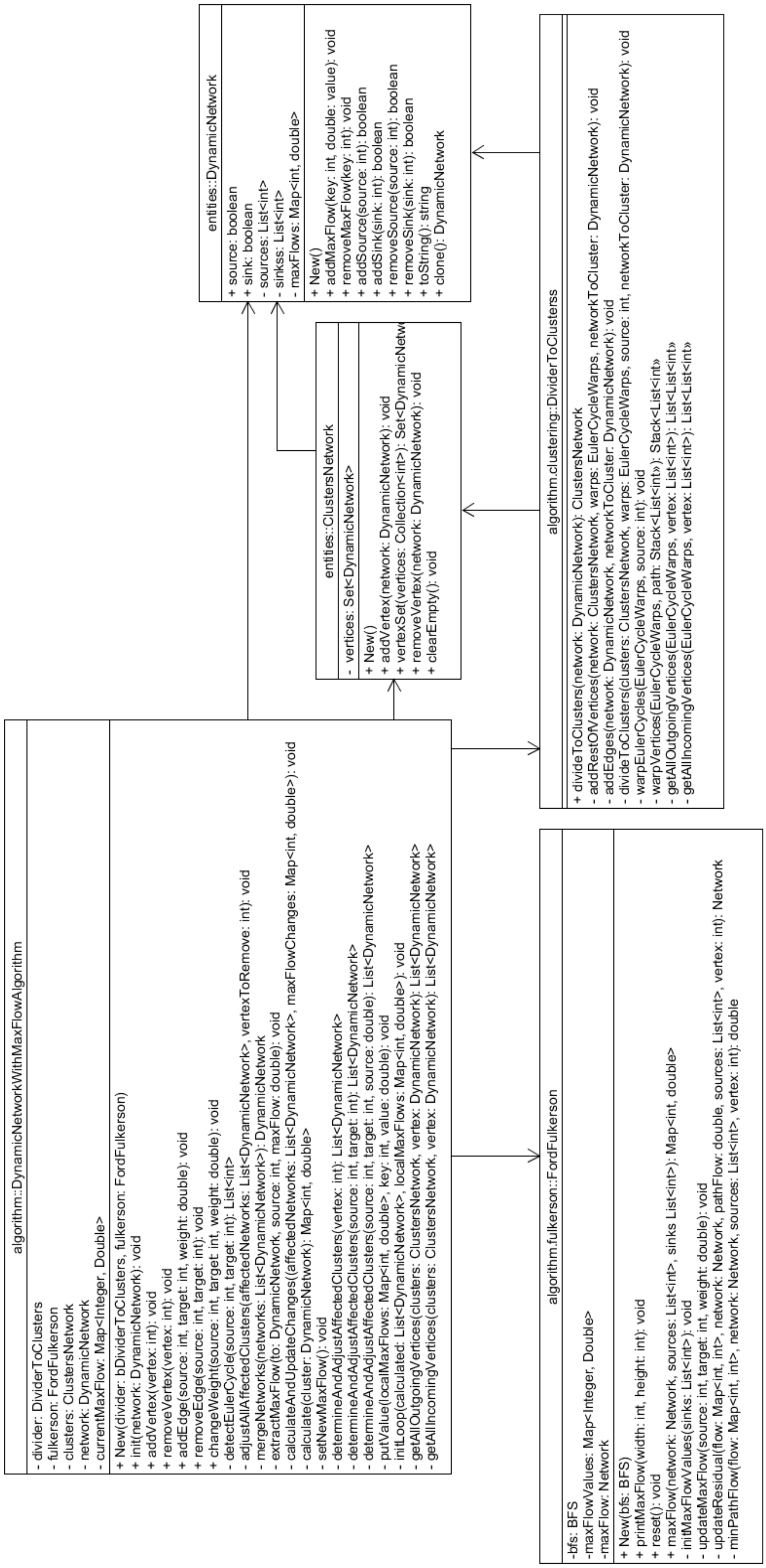
Priedas Nr. 1

Įgyvendinto algoritmo architektūra

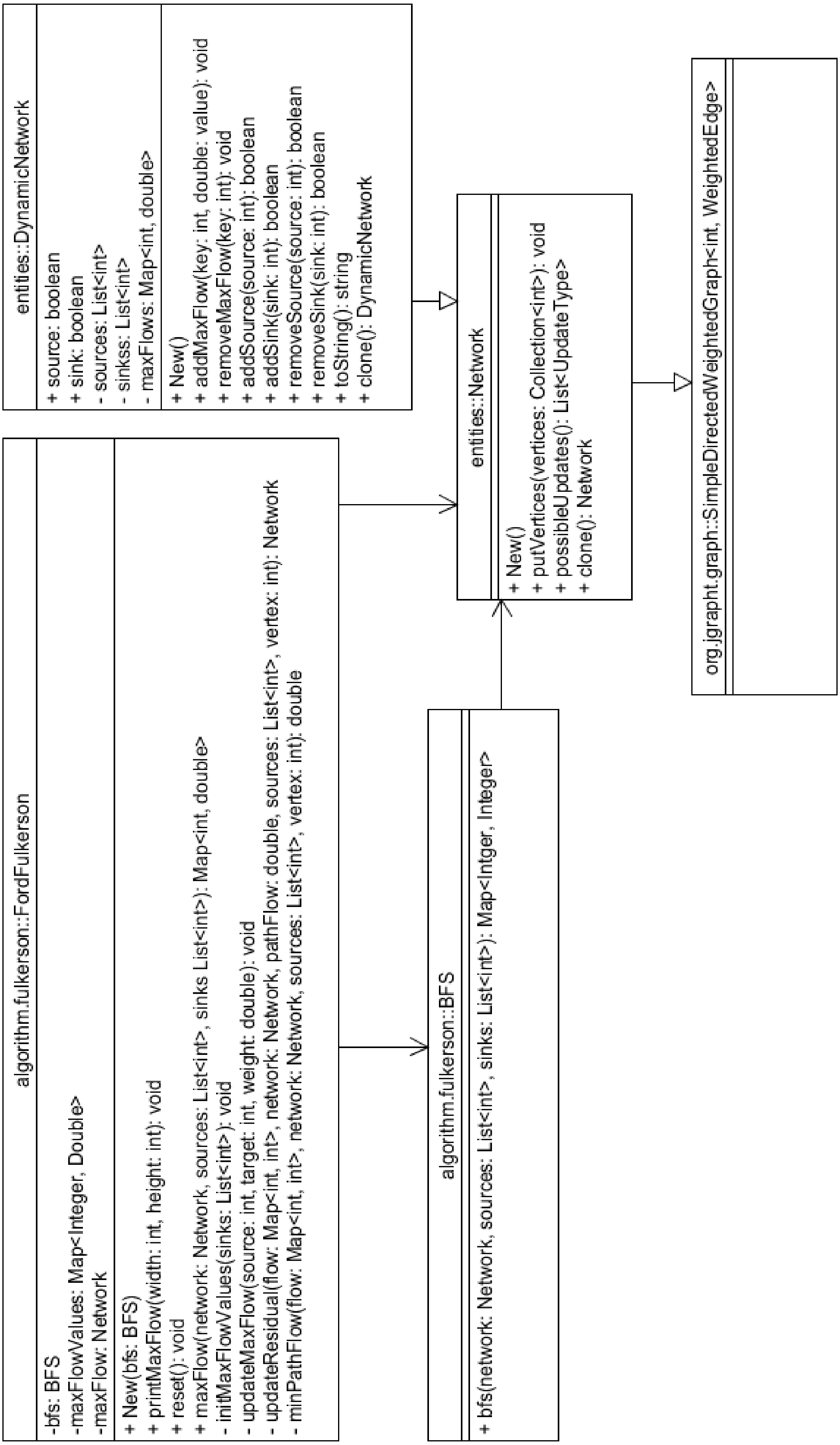
2 pav. Sukurto algoritmo įgyvendinimo UML klasių diagrama



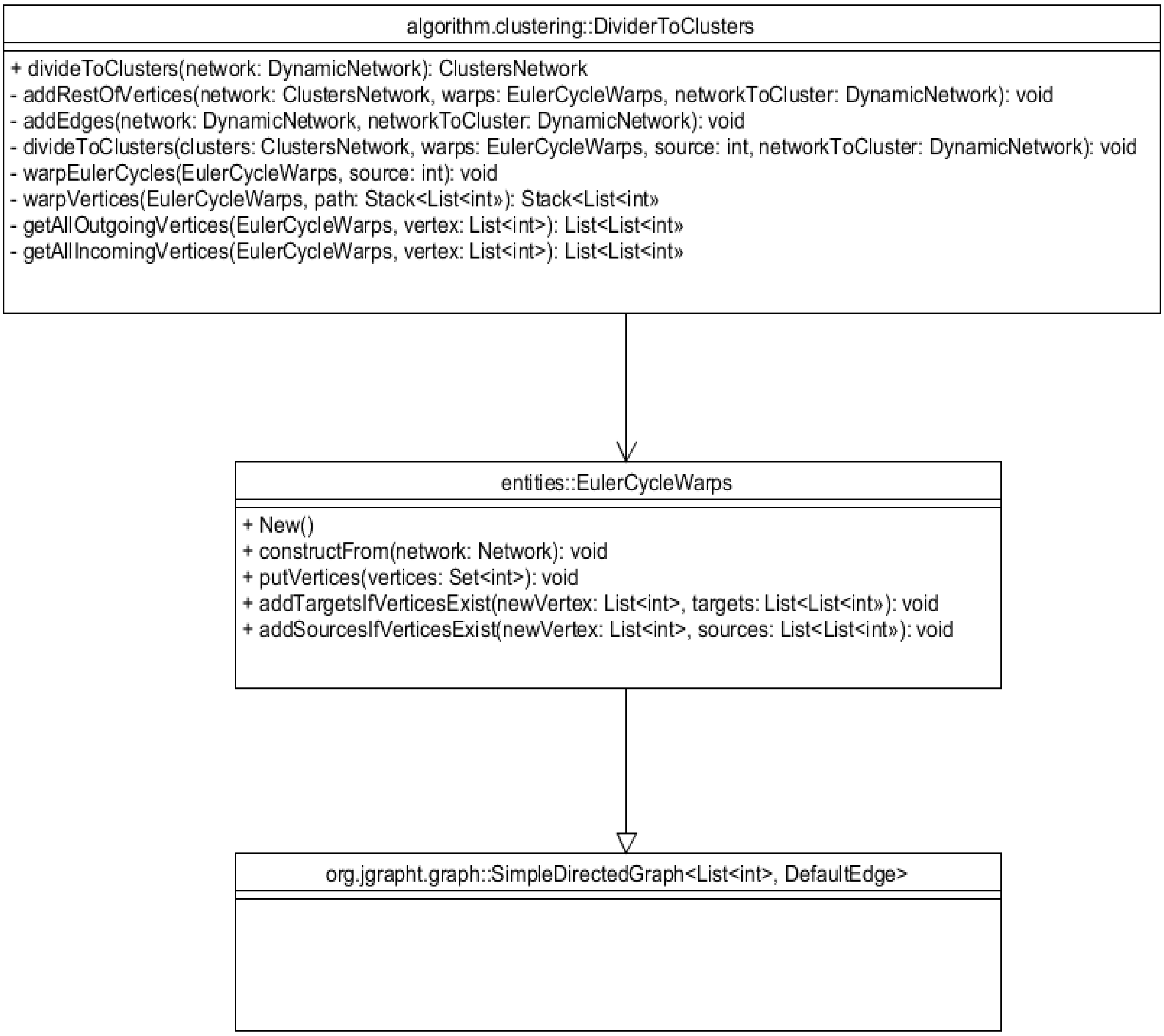
3 pav. Sukurto algoritmo įgyvendinimo UML klasių diagrama



4 pav. Sukurto algoritmo įgyvendinimo UML klasių diagrama



5 pav. Sukurto algoritmo įgyvendinimo UML klasių diagrama



Priedas Nr. 2
Atliktų bandymų rezultatai

1 lentelė. Eksperimento metu vidutiniškai panaudotų briaunų skaičius po viršūnės pridėjimo operacijos

		Vidutiniškai panaudotų briaunų skaičius	
Viršūnių skaičius	Briaunų skaičius	Sukurtas algoritmas	Fordo Fulkersono algoritmas
10	$SE_a(SV_i)$	0	337.5
20	$SE_a(SV_i)$	0	3494.8
30	$SE_a(SV_i)$	0	13897.6
40	$SE_a(SV_i)$	0	32817.7
50	$SE_a(SV_i)$	0	61791.6
60	$SE_a(SV_i)$	0	121531.3
70	$SE_a(SV_i)$	0	185358.2
80	$SE_a(SV_i)$	0	263378.5
90	$SE_a(SV_i)$	0	409542.5
100	$SE_a(SV_i)$	0	602902.2
10	$SE_{a_{max}}(SV_i)$	0	335.1
20	$SE_{a_{max}}(SV_i)$	0	3489.4
30	$SE_{a_{max}}(SV_i)$	0	14831.2
40	$SE_{a_{max}}(SV_i)$	0	34168.8
50	$SE_{a_{max}}(SV_i)$	0	67708.3
60	$SE_{a_{max}}(SV_i)$	0	125746.1
70	$SE_{a_{max}}(SV_i)$	0	201570.8
80	$SE_{a_{max}}(SV_i)$	0	307822.4
90	$SE_{a_{max}}(SV_i)$	0	457107.1
100	$SE_{a_{max}}(SV_i)$	0	623517.3
10	$SE_{a_{min}}(SV_i)$	0	328.8
20	$SE_{a_{min}}(SV_i)$	0	3336.8
30	$SE_{a_{min}}(SV_i)$	0	11871.5
40	$SE_{a_{min}}(SV_i)$	0	30765.3
50	$SE_{a_{min}}(SV_i)$	0	60194.1
60	$SE_{a_{min}}(SV_i)$	0	109840.5
70	$SE_{a_{min}}(SV_i)$	0	182275.5
80	$SE_{a_{min}}(SV_i)$	0	258420.5
90	$SE_{a_{min}}(SV_i)$	0	392022
100	$SE_{a_{min}}(SV_i)$	0	546443.3

2 lentelė. Eksperimento metu vidutiniškai panaudotų briaunų skaičius po briaunos pridėjimo operacijos

		Vidutiniškai panaudotų briaunų skaičius	
Viršūnių skaičius	Briaunų skaičius	Sukurtas algoritmas	Fordo Fulkersono algoritmas
10	$SE_a(SV_i)$	254.1	252.6
20	$SE_a(SV_i)$	2821.2	2753
30	$SE_a(SV_i)$	12145.5	12365.7
40	$SE_a(SV_i)$	29922.4	29960.9
50	$SE_a(SV_i)$	57577.3	58114.7
60	$SE_a(SV_i)$	115215.7	116620
70	$SE_a(SV_i)$	183440.3	178516.9
80	$SE_a(SV_i)$	247684.4	253195.4
90	$SE_a(SV_i)$	395939.9	394776.3
100	$SE_a(SV_i)$	578632.3	582653.2
10	$SE_{a_{max}}(SV_i)$	258.2	262.2
20	$SE_{a_{max}}(SV_i)$	2867	2879.3
30	$SE_{a_{max}}(SV_i)$	13843.3	13720.5
40	$SE_{a_{max}}(SV_i)$	32319.9	31470.7
50	$SE_{a_{max}}(SV_i)$	63516.9	63161.5
60	$SE_{a_{max}}(SV_i)$	122982.1	118667.6
70	$SE_{a_{max}}(SV_i)$	191403.1	189832.3
80	$SE_{a_{max}}(SV_i)$	299296.9	300924.6
90	$SE_{a_{max}}(SV_i)$	438759.6	441613.8
100	$SE_{a_{max}}(SV_i)$	620915.7	610738
10	$SE_{a_{min}}(SV_i)$	215.3	203.1
20	$SE_{a_{min}}(SV_i)$	2823.7	2774.8
30	$SE_{a_{min}}(SV_i)$	11025.8	10897.1
40	$SE_{a_{min}}(SV_i)$	29606.3	28826.5
50	$SE_{a_{min}}(SV_i)$	56604.7	57044.1
60	$SE_{a_{min}}(SV_i)$	107065.7	105294.2
70	$SE_{a_{min}}(SV_i)$	171956.6	173280.7
80	$SE_{a_{min}}(SV_i)$	251290.9	249737
90	$SE_{a_{min}}(SV_i)$	376398.8	383328.9
100	$SE_{a_{min}}(SV_i)$	520533.3	529335.7

3 lentelė. Eksperimento metu vidutiniškai panaudotų briaunų skaičius po viršūnės atėmimo operacijos

		Vidutiniškai panaudotų briaunų skaičius	
Viršūnių skaičius	Briaunų skaičius	Sukurtas algoritmas	Fordo Fulkersono algoritmas
10	$SE_a(SV_i)$	249.9	250.6
20	$SE_a(SV_i)$	2816.2	2748.1
30	$SE_a(SV_i)$	12290.6	12462.7
40	$SE_a(SV_i)$	29904.4	29943.1
50	$SE_a(SV_i)$	58863	58091.3
60	$SE_a(SV_i)$	115185.1	116588.7
70	$SE_a(SV_i)$	183417.5	178494.2
80	$SE_a(SV_i)$	254944.4	253153.6
90	$SE_a(SV_i)$	395904.3	394740.8
100	$SE_a(SV_i)$	578579	582599.7
10	$SE_{a_{max}}(SV_i)$	246.1	251.3
20	$SE_{a_{max}}(SV_i)$	2859.8	2871.7
30	$SE_{a_{max}}(SV_i)$	13802.6	13844.5
40	$SE_{a_{max}}(SV_i)$	32290.8	31442
50	$SE_{a_{max}}(SV_i)$	63498	63143
60	$SE_{a_{max}}(SV_i)$	122969.1	118653.9
70	$SE_{a_{max}}(SV_i)$	191356.5	189786.1
80	$SE_{a_{max}}(SV_i)$	299251.2	300880.1
90	$SE_{a_{max}}(SV_i)$	438706	441559.6
100	$SE_{a_{max}}(SV_i)$	620874.6	610697.9
10	$SE_{a_{min}}(SV_i)$	208.7	196.5
20	$SE_{a_{min}}(SV_i)$	2819.4	2770.3
30	$SE_{a_{min}}(SV_i)$	11004.8	10876
40	$SE_{a_{min}}(SV_i)$	29588.8	28808.7
50	$SE_{a_{min}}(SV_i)$	56592.7	57031
60	$SE_{a_{min}}(SV_i)$	107029.7	105258.5
70	$SE_{a_{min}}(SV_i)$	171696.7	173020.4
80	$SE_{a_{min}}(SV_i)$	251252.7	249699.8
90	$SE_{a_{min}}(SV_i)$	376337.3	383265.7
100	$SE_{a_{min}}(SV_i)$	520487.5	529289.6

4 lentelė. Eksperimento metu vidutiniškai panaudotų briaunų skaičius po briaunos atėmimo operacijos

		Vidutiniškai panaudotų briaunų skaičius	
Viršūnių skaičius	Briaunų skaičius	Sukurtas algoritmas	Fordo Fulkersono algoritmas
10	$SE_a(SV_i)$	236.2	234.9
20	$SE_a(SV_i)$	2805	2744.9
30	$SE_a(SV_i)$	12327.8	12339.1
40	$SE_a(SV_i)$	29884.7	29993.1
50	$SE_a(SV_i)$	58842.9	58070.7
60	$SE_a(SV_i)$	115154.9	116558
70	$SE_a(SV_i)$	183370.4	178448.4
80	$SE_a(SV_i)$	254018.6	253280.1
90	$SE_a(SV_i)$	395469.8	394684.6
100	$SE_a(SV_i)$	577098.6	582077.4
10	$SE_{a_{max}}(SV_i)$	251.9	252.3
20	$SE_{a_{max}}(SV_i)$	2829.2	2820.7
30	$SE_{a_{max}}(SV_i)$	13459.2	13484.8
40	$SE_{a_{max}}(SV_i)$	32003.9	31154.2
50	$SE_{a_{max}}(SV_i)$	63469.5	62949.1
60	$SE_{a_{max}}(SV_i)$	122921.5	118608.4
70	$SE_{a_{max}}(SV_i)$	191331.9	189761.8
80	$SE_{a_{max}}(SV_i)$	299216.5	300843.3
90	$SE_{a_{max}}(SV_i)$	438665.1	441518.3
100	$SE_{a_{max}}(SV_i)$	620809.5	610633.8
10	$SE_{a_{min}}(SV_i)$	218.5	198.9
20	$SE_{a_{min}}(SV_i)$	2812.5	2763.8
30	$SE_{a_{min}}(SV_i)$	10999.7	10761.8
40	$SE_{a_{min}}(SV_i)$	28921.7	28583.5
50	$SE_{a_{min}}(SV_i)$	56503.2	57000.7
60	$SE_{a_{min}}(SV_i)$	106922.3	105237.4
70	$SE_{a_{min}}(SV_i)$	171889.4	173890.7
80	$SE_{a_{min}}(SV_i)$	250306.3	249207.6
90	$SE_{a_{min}}(SV_i)$	376309.1	383238.6
100	$SE_{a_{min}}(SV_i)$	519961.6	529235.6

5 lentelė. Eksperimento metu vidutiniškai panaudotų briaunų skaičius po briaunos talpos pakeitimo operacijos

		Vidutiniškai panaudotų briaunų skaičius	
Viršūnių skaičius	Briaunų skaičius	Sukurtas algoritmas	Fordo Fulkersono algoritmas
10	$SE_a(SV_i)$	239	234.9
20	$SE_a(SV_i)$	2805	2744.9
30	$SE_a(SV_i)$	12327.8	12339.1
40	$SE_a(SV_i)$	29734.2	29842.5
50	$SE_a(SV_i)$	59070.1	58069.2
60	$SE_a(SV_i)$	115154.9	116558
70	$SE_a(SV_i)$	183370.4	178448.4
80	$SE_a(SV_i)$	254018.6	253280.1
90	$SE_a(SV_i)$	395469.8	394684.6
100	$SE_a(SV_i)$	577098.6	582077.4
10	$SE_{a_{max}}(SV_i)$	254.2	255.6
20	$SE_{a_{max}}(SV_i)$	2846	2820.7
30	$SE_{a_{max}}(SV_i)$	13404.9	13318.2
40	$SE_{a_{max}}(SV_i)$	32003.9	31154.2
50	$SE_{a_{max}}(SV_i)$	63584.1	63123
60	$SE_{a_{max}}(SV_i)$	123090.4	118442.6
70	$SE_{a_{max}}(SV_i)$	191331.9	189761.8
80	$SE_{a_{max}}(SV_i)$	301766.2	300843.3
90	$SE_{a_{max}}(SV_i)$	438665.1	441518.3
100	$SE_{a_{max}}(SV_i)$	622936.7	611343.7
10	$SE_{a_{min}}(SV_i)$	222.1	202.5
20	$SE_{a_{min}}(SV_i)$	2820.3	2763.8
30	$SE_{a_{min}}(SV_i)$	11052.6	10886.9
40	$SE_{a_{min}}(SV_i)$	28993.4	28548.7
50	$SE_{a_{min}}(SV_i)$	56503.2	57000.7
60	$SE_{a_{min}}(SV_i)$	106922.3	105402.7
70	$SE_{a_{min}}(SV_i)$	171889.4	173890.7
80	$SE_{a_{min}}(SV_i)$	250306.3	249361.4
90	$SE_{a_{min}}(SV_i)$	376309.1	383238.6
100	$SE_{a_{min}}(SV_i)$	519961.6	529235.6