Урок 2.

Анализ данных и проверка статистических гипотез.

План занятия

Теоретическая часть

Теория вероятностей и математическая статистика

Теория вероятностей изучает модели случайных величин и свойства этих моделей.

Математическая статистика и анализ данных пытаются по свойствам конечных выборок определить свойства случайной величины, чтобы понять, как она будет вести себя в будущем.

Что такое статистическая гипотеза?

Статистическая гипотеза - предположение о виде распределения и свойствах случайной величины, которое можно подтвердить или опровергнуть применением статистических методов к данным выборки.

Нулевая гипотеза - некоторое, принимаемое по-умолчанию предположение, о том, что не существует связи между двумя наблюдаемыми событиями, отклонения показателей и других неожиданных результатов, словом нет никакого эффекта.

Альтернативная гипотеза - в качестве альтернативы, как правило, выступает проверяемое предположение, но также бывает, что альтернатива не задана явно, в этом случаем рассматривают отрицание утверждение, заданного в нулевой гипотезе.

Проверка статистической гипотезы - это процесс принятия решения о том, противоречит ли рассматриваемая статистическая гипотеза наблюдаемой выборке данных.

Статистический тест или статистический критерий - строгое математическое правило, по которому принимается или отвергается статистическая гипотеза.

Пример формализованного описания гипотезы

$x^n = (x_1, .., x_n),\ x^n \in X,\ X \sim P$
$H_0 : P \in \omega$
$H_1 : P \notin \omega$
$T(x^n),\ T(x^n) \sim F_0(t) \mid H_0,\ T(x^n) \nsim F_0(t) \mid H_1$

H_0 - нулевая гипотеза
H_1 - альтернативная гипотеза
X - случайная величина
x^n - выборка размера n из случайной величины X
P - некоторое распределение случайной величины X
ω - некоторое семейство распределений
$T(x^n)$ - статистика от выборки x^n
$F_0(t)$ - нулевое распределение статистики

В данном примере проверяется гипотеза H_0 о том, что распределение P случайной величины X, принадлежит некоторому семейству распределений, которое определёно нами заранее, допустим это семейство нормальных распределений. В качестве альтернативы выступает гипотеза H_1, утверждающая, что распределение P принадлежит какому то иному семейству распределений.

Статистика $T(x^n)$ и её нулевое распределение $F_0(t)$ образуют *статистический критерий*.

Проверка статистических гипотез

Методика проверки статистических гипотез

1. Сформулировать гипотезы H_0 и H_1
2. Выбрать подходящий статистический критерий, исходя из сформулированных гипотез, размера выборки(ок) и т.д.
3. Зафиксировать уровень значимости α
4. На множестве значений выбранной статистики T определить критическую область Ω_α наименее вероятных значений, таких, что $P(T \in \Omega_\alpha | H_0) = \alpha$, как правило, рассматривается двусторонняя критическая область: $(-\infty; x_{\alpha/2}) \cup (x_{1-\alpha/2}; +\infty)$
5. Рассчитать значение статистики T и достигаемые уровень значимости $p - value^* = P(T \geq t \mid H_0)$
6. Если $p - value < \alpha$, H_0 отвергается в пользу H_1, т.к вероятность получить такие данные (выборку), при верности H_0, крайне мала.

\достигаемый уровень значимости, p-value* - это вероятность, при справедливости нулевой гипотезы, получить такое же распределение статистики, как в эксперименте, или ещё более экстремальное.

Ошибки первого и второго рода

Ошибка первого рода — когда нулевая гипотеза отвергается, хотя на самом деле она верна.
Ошибка второго рода — когда нулевая гипотеза принимается, хотя на самом деле она не верна.

H_0	**верная**	**ложная**
принимается	H_0 верно принята	H_0 неверно принята (ошибка второго рода)
отклоняется	H_0 неверно отвергнута (ошибка первого рода)	H_0 верно отвергнута

В механизме проверки гипотез ошибки первого и второго рода неравнозначны, ошибка первого рода критичнее, любой корректный статистический критерий должен обеспечивать вероятность ошибки первого рода не больше, чем α,
$P(H_0 \text{ отвергнута} \mid H_0) = P(p \leq \alpha \mid H_0) \leq \alpha$

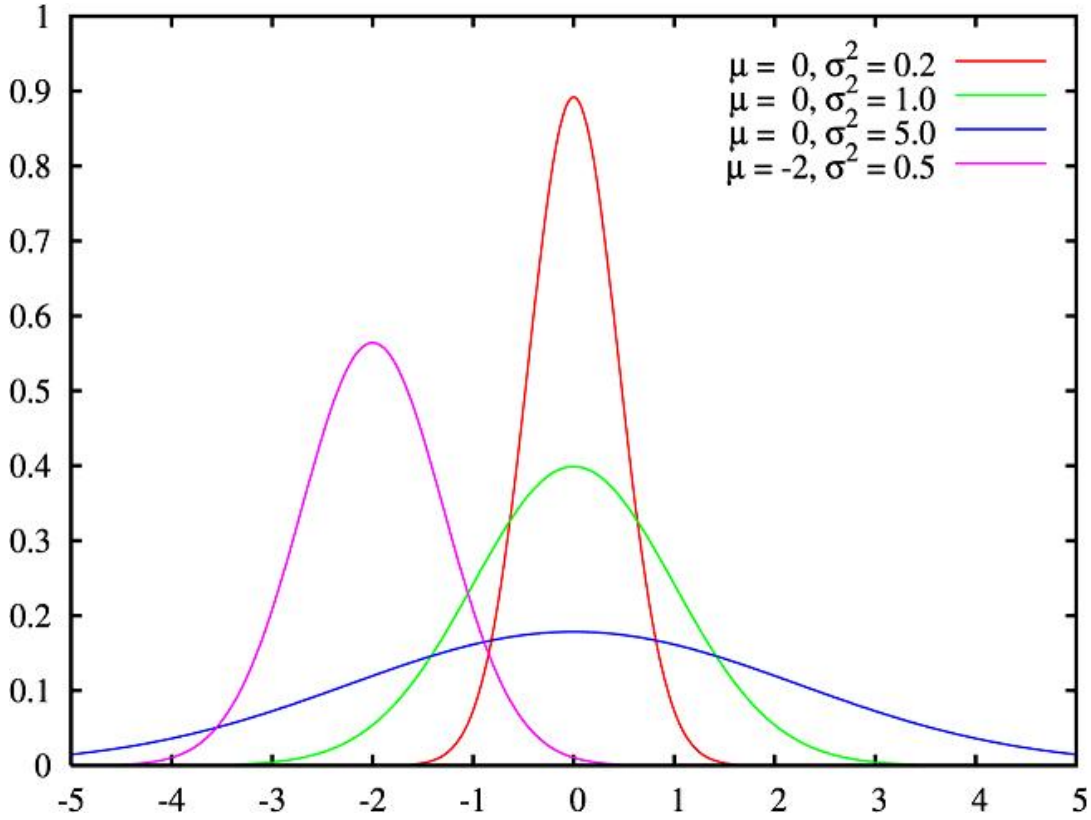
Ошибка второго рода связана с понятием мощности статистического критерия,
$pow = P(H_0 \text{ отвергнута} \mid H_1) = 1 - P(H_0 \text{ принята} \mid H_1)$ - вероятность отклонить нулевую гипотезу, при верности альтернативы.

Критерий Шапиро-Уилка

Данный критерий проверяет гипотезу о том, что некоторая случайная величина имеет нормальное распределение (распределение Гаусса). Необходимость проверять случайную величину на "нормальность", обусловлена тем, что многие статистические критерии и аналитические методы из мат. статистики ориентированы на выборки из нормально распределённых случайных вечличин и перед их использование необходимо убедиться в том, что закон распределния приближен к нормальному.

Помимо этого нормально распределённые случайные величины обладают некоторыми полезными свойствами, которые могут быть полезны в процессе работы с ними.

Нормальное распределение



Формализованное описание

$x^n = (x_1, .., x_n),\ x^n \in X$

$H_0 : X \sim N(\mu, \sigma^2)$
$H_1 : H_0$ неверна

$W(x^n) = \frac{(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i)^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$

Нулевое распределение статистики - табличное.

Критерий Стьюдента (t-test), двухвыборочный

Критерий Стьюдента — общее название для статистических тестов, в которых статистика критерия имеет распределение Стьюдента.
Наиболее часто данные критерии применяются для проверки равенства средних значений (мат. ожиданий) в двух выборках.

Формализованное описание

$x_1^{n_1} = (x_{11}, .., x_{1n_1}),\ x_1^{n_1} \in X_1,\ X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), \sigma_1$ неизвестна
$x_2^{n_2} = (x_{21}, .., x_{2n_1}),\ x_2^{n_2} \in X_2,\ X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2), \sigma_2$ неизвестна

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$
$H_1 : \mu_1 <\neq> \mu_2$

$T(x_1^{n_1}, x_2^{n_2}) = \frac{\bar{x_1} - \bar{x_2}}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} - \frac{s_2^2}{n_2}}}$
$T(x_1^{n_1}, x_2^{n_2}) \sim St$

Условия применения

- нормальное распределение, отсутствие выбросов
- размер выборки не меньше 30 наблюдений

Если данные не отвечают этим критериям, то применяется *U критерий Манна-Уитни* - это непараметрический тест, в котором для расчета используются не исходные данные, а их ранговые позиции.

Если групп больше двух, подойдет *критерий Краскела-Уоллиса*.

Если выборок две и они зависимые применяется ранговый Т-критерий Уилкоксона.

Критерий хи-квадрат (критерий согласия Пирсона)

Критерий хи-квадрат позволяет оценить значимость различий между фактическим (выявленным в результате исследования) количеством исходов и теоретическим количеством, которое можно ожидать в изучаемых группах при справедливости нулевой гипотезы. Выражаясь проще, метод позволяет оценить статистическую значимость различий двух или нескольких относительных показателей (частот, долей).

Формализованное описание

$x^n = (x_1, .., x_n),\ x^n \in X$

$H_0 :$ Эмпирические $\left($наблюдаемые$\right)$ и теоретические $\left($ожидаемые$\right)$ частоты согласованы
$H_1 :$ H_0 неверна

$\chi^2(x^n) = \sum_{i=1}^{K} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$
O (Observed) - наблюжаемые частоты
E (Expected) - ожидаемые частоты
K - количество оцениваемых частот

$\chi^2(x^n) \sim \chi^2$

Условия применения

Сопоставляемые группы должны быть независимыми, то есть критерий хи-квадрат не должен применяться при сравнении наблюдений "до-после" или связанных пар. Аналог для зависимых выборок - *тест Мак-Немара* или *Q-критерий Кохрена* для сравнения трех и более групп.

Если в ячейке меньше 10 наблюдений, применяется *поправка Йетса*.

Если меньше 5, то вместо хи-квадрат используется *точный тест Фишера*.

Доверительные интервалы

Вид интервальной оценки, которая задаёт числовые границы, в которых, с определённой вероятностью, находится истинное значение оцениваемого параметра.

Порядок расчета доверительного интервала (для мат. ожидания)

1. Задать уровень достоверности (confidence level), $\alpha = 95\% = 0.95$
2. Найдите по таблице Z-оценок или рассчитать коэффициент достоверности (confidence coefficient) - $Z_{\alpha/2}$, для $\alpha = 0.95, Z_{\alpha/2} = 1.96$
3. Рассчитать доверительный интервал (confidence interval), $CI = \bar{x} \pm Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$,

   где $\bar{x}$ - выборочное среднее, σ - стандартное отклонение, n - размер выборки

Практическая часть

Подключение библиотек и скриптов

In [5]:
```
import numpy as np
import pandas as pd

from scipy.stats import shapiro
from scipy.stats import probplot
from scipy.stats import ttest_ind, mannwhitneyu
from scipy.stats import chi2_contingency
from statsmodels.stats.weightstats import zconfint

import seaborn as sns
from matplotlib import pyplot as plt
%matplotlib inline
```

In [6]:
```
import warnings
warnings.simplefilter('ignore')
```

Пути к директориям и файлам

In [7]:
```
DATASET_PATH = '../training_project_data.csv'
PREP_DATASET_PATH = '../training_project_data_prep.csv'
```

Загрузка данных

Описание базового датасета

- **LIMIT_BAL** - Сумма предоставленного кредита
- **SEX** - Пол (1=мужчина, 2=женщина)
- **EDUCATION** - Образование (1=аспирантура, 2=университет, 3=старшая школа, 4=прочее, 5=неизвестно, 6=неизвестно)
- **MARRIAGE** - Семейное положение (1=женат/замужен, 2=не женат/не замуженм, 3=прочее)
- **AGE** - Возраст (в годах)
- **PAY_1** - Статус погашения в Сентябре (-1=погашен полностью, 0=погашен частично, 1=отсрочка платежа на один месяц, .., 3=отсрочка платежа на три месяца и более)
- **PAY_2** - Статус погашения в Августе
- **PAY_3** - Статус погашения в Июле
- **PAY_4** - Статус погашения в Июне
- **PAY_5** - Статус погашения в Мае
- **PAY_6** - Статус погашения в Апреле
- **BILL_AMT1** - Сумма выписки по счету в Сентябре
- **BILL_AMT2** - Сумма выписки по счету в Августе
- **BILL_AMT3** - Сумма выписки по счету в Июле
- **BILL_AMT4** - Сумма выписки по счету в Июне
- **BILL_AMT5** - Сумма выписки по счету в Мае
- **BILL_AMT6** - Сумма выписки по счету в Апреле
- **PAY_AMT1** - Сумма предыдущего платежа в Сентябре
- **PAY_AMT2** - Сумма предыдущего платежа в Августе
- **PAY_AMT3** - Сумма предыдущего платежа в Июле
- **PAY_AMT4** - Сумма предыдущего платежа в Июне
- **PAY_AMT5** - Сумма предыдущего платежа в Мае
- **PAY_AMT6** - Сумма предыдущего платежа в Апреле
- **NEXT_MONTH_DEFAULT** - Просрочка платежа в следующем месяце (1=да, 0=нет)

In [8]:
```
df_base = pd.read_csv(DATASET_PATH)
df = pd.read_csv(PREP_DATASET_PATH)

df.head()
```

Out[8]:

	LIMIT_BAL	SEX	EDUCATION	MARRIAGE	AGE	PAY_1	PAY_2	PAY_3	PAY_4	PAY_5	...	PAY_4_2	PAY_4_3
0	150000.0	2	2	2	24	1	2	0	0	0	...	0	0
1	50000.0	2	3	1	46	3	3	3	3	2	...	0	1
2	150000.0	2	2	1	41	-1	-1	-1	-1	0	...	0	0
3	150000.0	2	2	2	35	0	0	0	0	0	...	0	0
4	70000.0	2	1	1	35	1	2	2	2	2	...	1	0

5 rows × 62 columns

Выделение целевой переменной и групп признаков

In [9]:
```
TARGET_NAME = 'NEXT_MONTH_DEFAULT'
BASE_FEATURE_NAMES = df_base.columns.drop(TARGET_NAME).tolist()
NEW_FEATURE_NAMES = df.columns.drop([TARGET_NAME] + BASE_FEATURE_NAMES)
```

Анализ целевой переменной

Обзор распределения

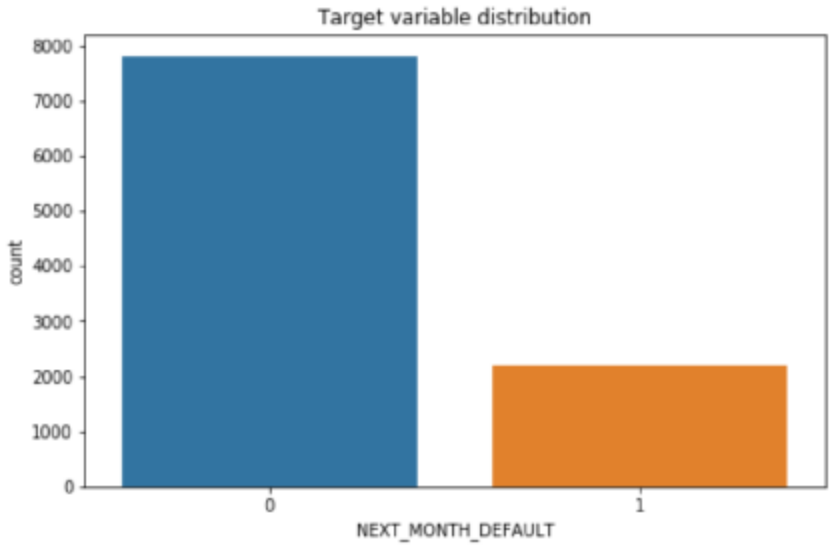
In [10]:
```
df[TARGET_NAME].value_counts()
```

Out[10]:
```
0    7805
1    2195
Name: NEXT_MONTH_DEFAULT, dtype: int64
```

In [11]:
```
plt.figure(figsize=(8, 5))

sns.countplot(x=TARGET_NAME, data=df)

plt.title('Target variable distribution')
plt.show()
```



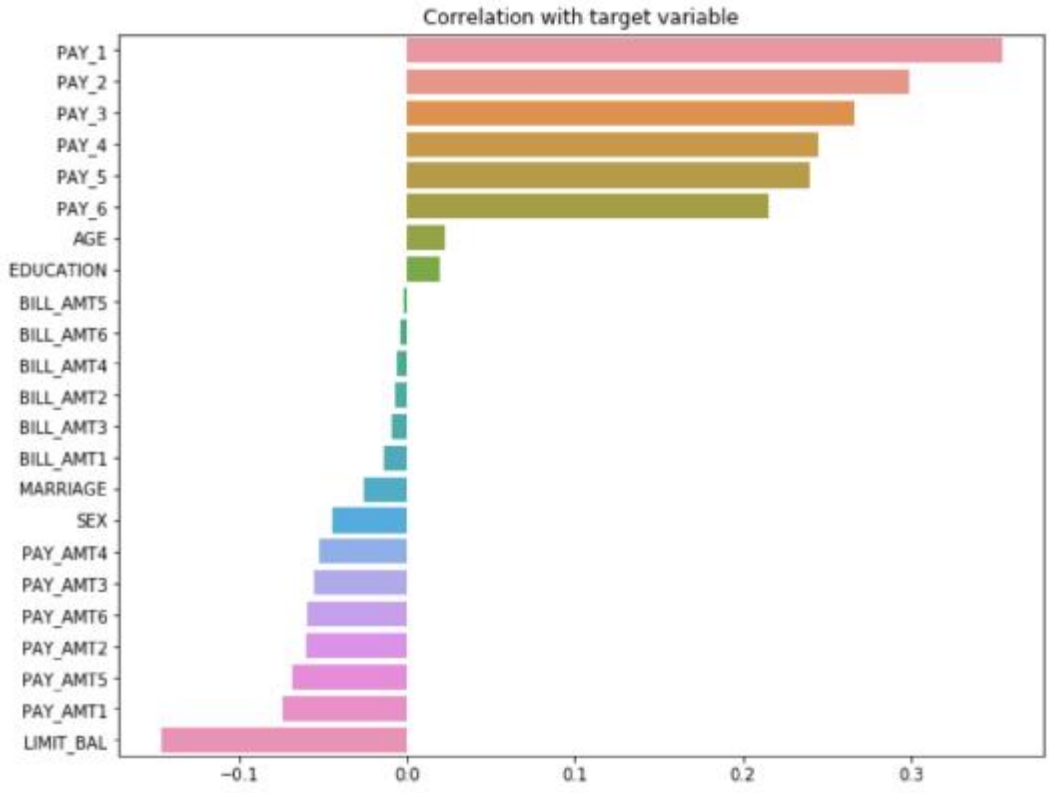
Корреляция с базовыми признаками

In [12]:
```
corr_with_target = df[BASE_FEATURE_NAMES + [TARGET_NAME]].corr().iloc[:-1, -1].sort_values(ascending=False)

plt.figure(figsize=(10, 8))

sns.barplot(x=corr_with_target.values, y=corr_with_target.index)

plt.title('Correlation with target variable')
plt.show()
```

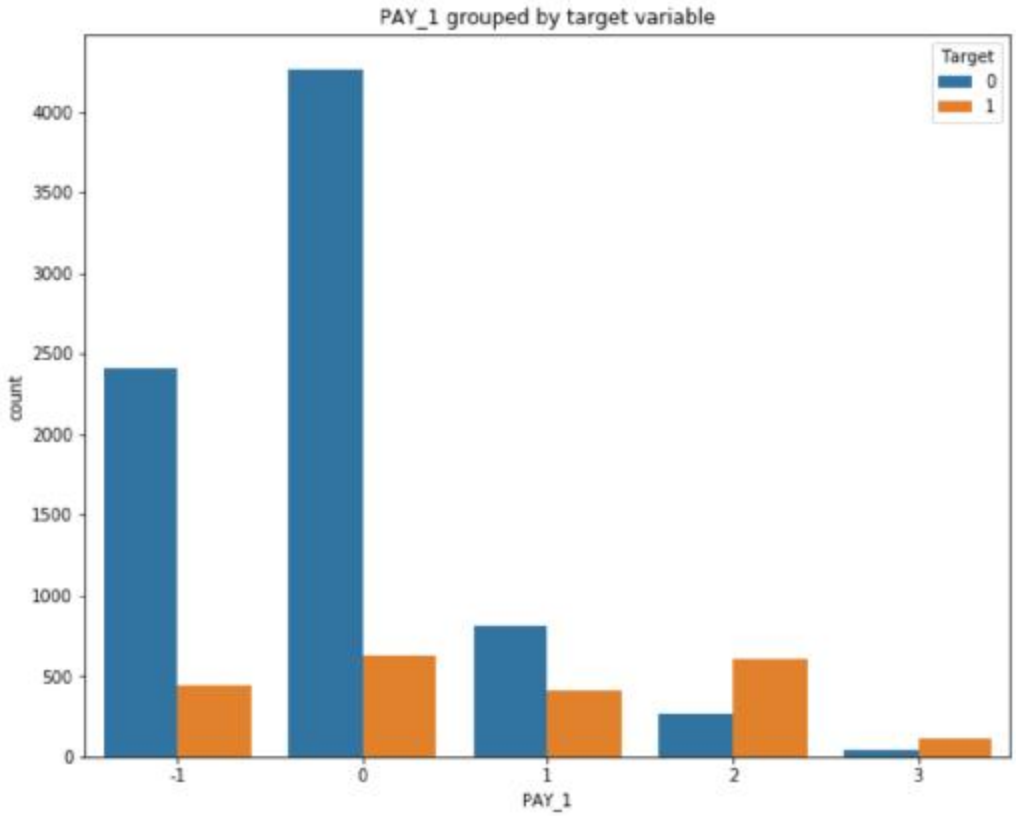


Оценка признака "PAY_1" в разрезе целевой переменной

In [13]:
```
plt.figure(figsize=(10, 8))

sns.countplot(x="PAY_1", hue=TARGET_NAME, data=df)
plt.title('PAY_1 grouped by target variable')
plt.legend(title='Target', loc='upper right')

plt.show()
```



Наблюдение

Изучив получившийся график, видно, что значения -1 (погашен полностью) и 0 (погашен частично) признака PAY_1 имеют схожие доли в разрезе целевой переменной. Если это действительно так, то можно будет, например, объединить их в одну категорию.

Гипотеза

- Нулевая гипотеза: ожидаемые и наблюдаемые частоты согласованы
- Альтернативная гипотеза: отклонения в частотах выходят за рамки случайных колебаний, расхождения статистически значимы
- Критерий: Хи-квадрат Пирсона
- Уровень значимости α: 0.05
- Критическая область: двухсторонняя

Для проверки данной гипотезы необходимо подать наблюдаемые частоты категорий -1 и 0 признака PAY_1 в выбранный критерий, после чего оценить значение достигаемого уровня значимости p-value и сравнить с его с выбранным порогом альфа, если p-value получится больше выбранного порога, то гипотезу о согласованности частот можно не отбрасывать.

Сформируем выборку и рассчитаем наблюдаемые частоты

In [14]:
```
pay1_and_target_s = df.loc[df['PAY_1'].isin([-1, 0]), ['ID', 'PAY_1', 'NEXT_MONTH_DEF
AULT']].sample(1000)
```

In [15]:
```
table = pay1_and_target_s.pivot_table(values='ID', index='PAY_1', columns='NEXT_MONTH
_DEFAULT', aggfunc='count')
table
```

Out[15]:

NEXT_MONTH_DEFAULT	0	1
PAY_1		
-1	320	66
0	535	79

Проверим нашу гипотезу используя критерий Хи-квадрат Пирсона

In [16]:
```
chi2, p, dof, expected = chi2_contingency(table, correction=False)
p
```

Out[16]: 0.06426179976666606

P-value получилось больше выбранного уровня значимости, соответственно у нас нет оснований для отвержения нулевой гипотезы и можно допустить, что категории -1 (погашен полностью) и 0 (погашен частично) одинаково влияют на целевую переменную и их можно объединить в одну категорию.

*Для других признаков PAY_2, PAY_3, и т.д. следует провести аналогичный анализ и после этого решать о целесообразности изменения категорий или построения новых признаков.

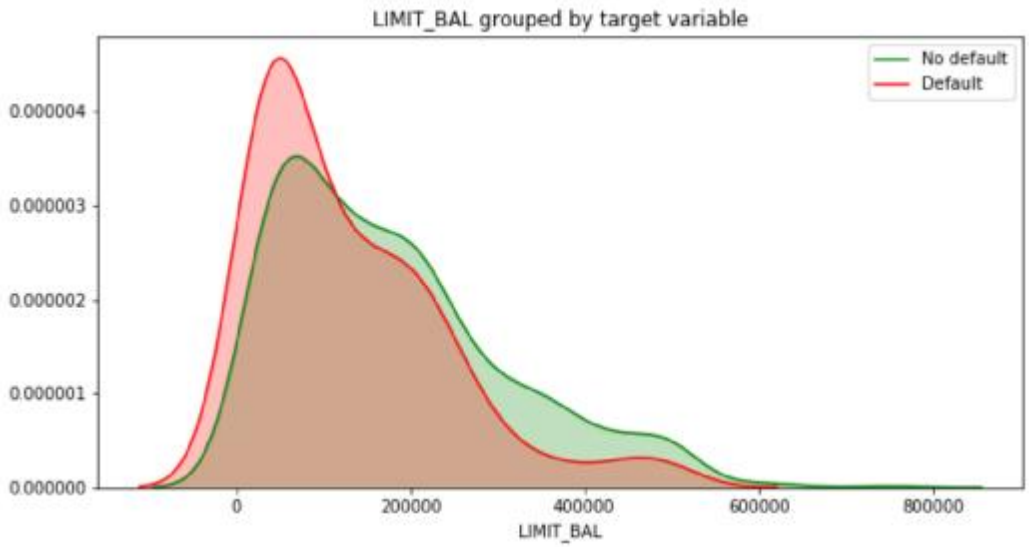
Оценка признака "LIMIT_BAL" в разрезе целевой переменной

In [17]:
```
limit_bal_with_target_s = df[['LIMIT_BAL', TARGET_NAME]].sample(1000)
limit_bal_s = limit_bal_with_target_s['LIMIT_BAL']
limit_bal_target_0 = limit_bal_s[limit_bal_with_target_s[TARGET_NAME] == 0]
limit_bal_target_1 = limit_bal_s[limit_bal_with_target_s[TARGET_NAME] == 1]

plt.figure(figsize=(10, 5))

sns.kdeplot(limit_bal_target_0, shade=True, label='No default', color='g')
sns.kdeplot(limit_bal_target_1, shade=True, label='Default', color='r')

plt.xlabel('LIMIT_BAL')
plt.title('LIMIT_BAL grouped by target variable')
plt.show()
```



Наблюдение

Похоже что две группы, полученные в результате разбиения признака "LIMIT_BAL" по целевой переменной, имеют различные распределения, что может помочь при построение модели, т.к. это будет означать, что между признаком "LIMIT_BAL" и целевой переменной, возможно, существует некоторая функциональная зависимость.

Гипотеза

- Нулевая гипотеза: средние значения в двух независимых выборках равны
- Альтернативная гипотеза: средние значения в двух независимых выборках различаются
- Критерий: критерий Стьюдента (t-тест) и его аналоги
- Уровень значимости α: 0.05
- Критическая область: двухсторонняя

Что бы проверить данную гипотезу сравним две выборки из рассматриваемых групп на предмет равенства средних значений. Если вероятность того, что мат. ожидания в исходных группах равны, при данных выборках, буде менее 5%, то можно будет говорить о том, что скорее всего выборки имеют различные распределения.

Проверка распределения признака на "нормальность" с помощью критерия Шапиро-Уилка

In [18]:
```
shapiro(limit_bal_s)
```

Out[18]:
```
(0.9073566198348999, 3.613657816416651e-24)
```

По полученному значению p-value, которое сильно меньше 0.05, можем заключить, что гипотеза о "нормальности" отвергается.

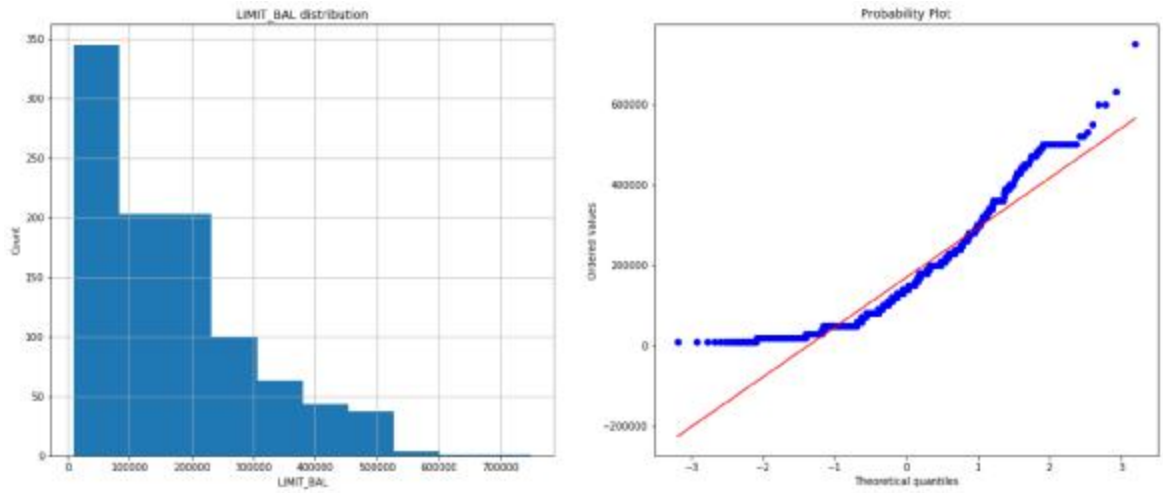
Для достоверности произведём визуальную оценку распределения признака, а так же построим QQ-график

In [19]:
```
plt.figure(figsize=(20, 8))

ax1 = plt.subplot(121)
ax1.set_xlabel('LIMIT_BAL')
ax1.set_ylabel('Count')
ax1.set_title('LIMIT_BAL distribution')
limit_bal_s.hist()

plt.subplot(122)
probplot(limit_bal_s, dist='norm', plot=plt)

plt.show()
```



Визуальная оценка подтверждает показания критерия Шапиро-Уилка по поводу того, что закон распределения отличный от "нормального", в связи с чем, мы не сможем воспользоваться критерием Стьюдента для проверки гипотезы о равности мат. ожиданий признака LIMIT_BAL в группах с просроченным и непросроченным платежом в следующем месяце, но мы сможем воспользоваться его непараметрическим аналогом - критерием Манна-Уитни, который не требователен к закону распределения.

Оценим эквивалентность мат. ожадиний, в исследуемых группах, с помощью критерия Манна-Уитни

In [20]:
```
mannwhitneyu(limit_bal_target_0, limit_bal_target_1)
```

Out[20]:
```
MannwhitneyuResult(statistic=63552.0, pvalue=6.102938357463406e-08)
```

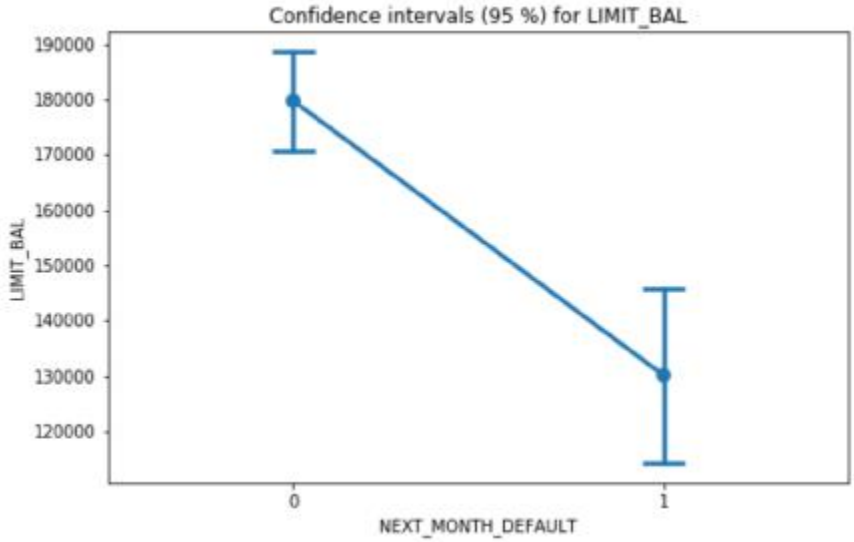
Согласно значению p-value, гипотеза о равности мат. ожиданий отвергается, но стоит ради дополнительной проверки обратиться к доверительным интервалам.

Построим доверительные интервалы для средних значений, каждой из двух групп и сравним их

In [21]:
```
plt.figure(figsize=(8, 5))

sns.pointplot(x=TARGET_NAME, y='LIMIT_BAL', data=limit_bal_with_target_s, capsize=.1)

plt.title('Confidence intervals (95 %) for LIMIT_BAL')
plt.show()
```



По данному графику так же видно, что интервалы, в которых с 95% вероятностью должны находится истинные мат. ожидания этих двух групп, не пересекаются, что подтверждает результаты полученные с помощью критерия Манна-Уитни.

Это означает, что группы из которых взяты данные выборки, с допускаемой нами вероятностью (95%), имеют различные распределения и этот признак может быть полезен для определения значения целевой переменной.

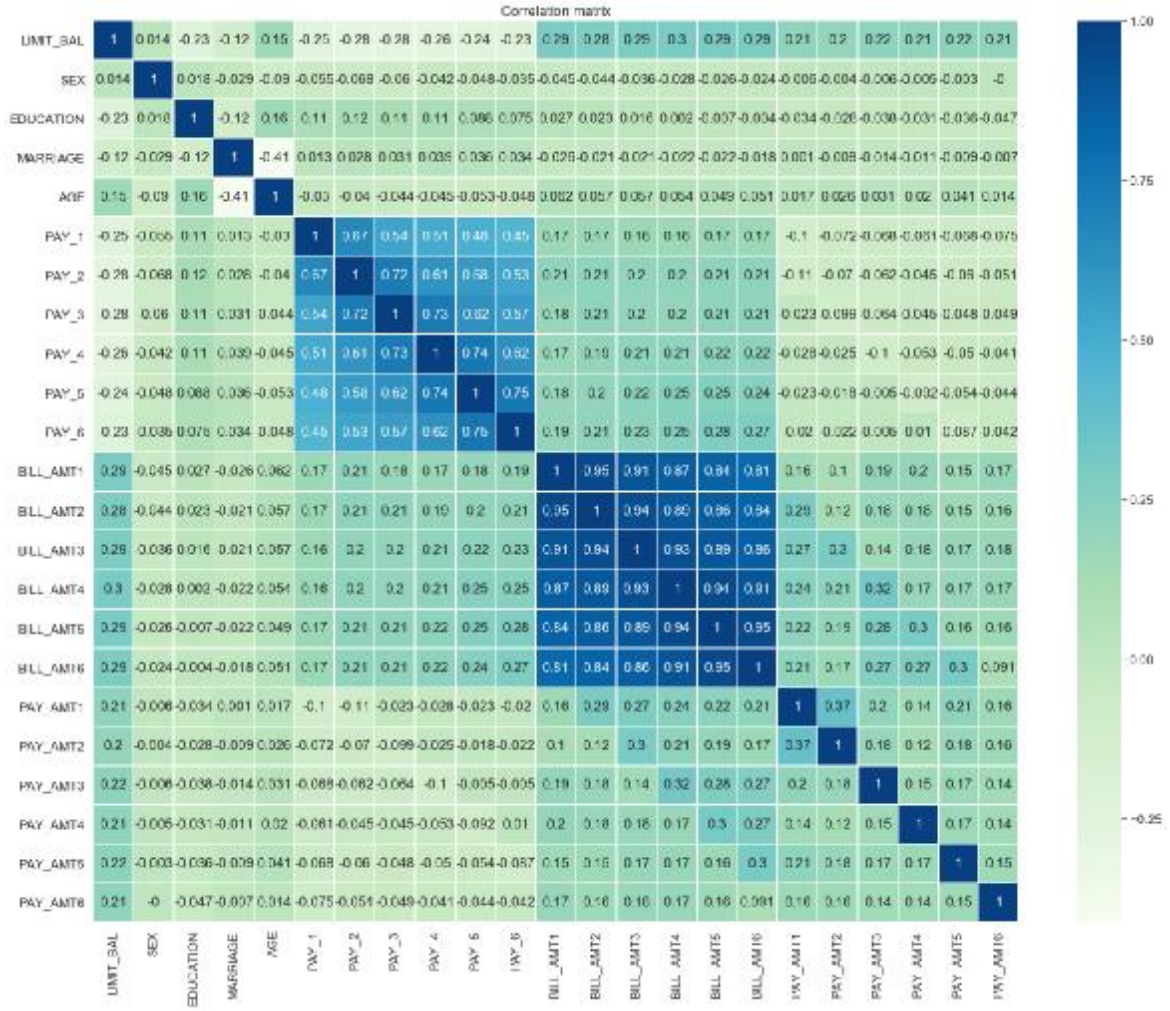
Анализ признакового пространства

Матрица корреляций

In [30]:
```
plt.figure(figsize = (25,20))

sns.set(font_scale=1.4)
sns.heatmap(df[BASE_FEATURE_NAMES].corr().round(3), annot=True, linewidths=.5, cmap='
GnBu')

plt.title('Correlation matrix')
plt.show()
```



In [ ]:
```

```