

# Моделирование частотных сканов

Богачев А.М.

30 августа 2022 г.

## Аннотация

В отчёте приведены результаты моделирования частотных сканов, образованных сигналом релаксации, состоящим из трёх экспоненциальных сигналов с единичной амплитудой. При моделировании не учитывается влияние шумов. Показано, что показатель нелинейности-неэкспоненциальности  $p$  убывает с увеличением разницы между постоянными времени крайних составляющих на спектре, при этом растёт среднеквадратическая ошибка между результатами измерений и результатами моделирования. В отчёте также приведена математическая модель частотного скана и краткое описание её программной реализации. В графическом виде приведены примеры спектров, результатов идентификации модели; приведён график зависимости  $p$  от разности между постоянными времени крайних составляющих на спектре, в приложении приведена таблица с результатами моделирования частотных сканов.

## Содержание

<b>1</b>	<b>Цели и задачи</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Математические модели</b>	<b>2</b>
2.1	Модель сигнала релаксации ёмкости . . . . .	2
2.2	Модель аппаратных преобразований спектрометра DLS-82E	3
2.3	Модель для расчёта исходных данных . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Моделирование и его результаты</b>	<b>5</b>
3.1	Реализация модели . . . . .	5
3.2	Результаты моделирования . . . . .	8
<b>4</b>	<b>Выводы</b>	<b>9</b>
	<b>Список литературы</b>	<b>10</b>
	<b>Приложение 1</b>	<b>11</b>

# 1 Цели и задачи

*Цель работы:* изучить влияние расположения линий на спектрах на коэффициент нелинейности-неэкспоненциальности  $p$ .

Для достижения поставленной цели нужно решить следующие задачи:

1. Разработать программу идентификации частотного скана. Модель частотного скана должна учитывать коэффициент нелинейности-неэкспоненциальности  $p$ .
2. Рассчитать частотные сканы для разных спектров.
3. Выполнить идентификацию полученных сканов.
4. Построить зависимость коэффициента  $p$  от расстояния между крайними линиями на спектре.

## 2 Математические модели

В данном разделе представлено описание модели частотного скана в математических выражениях.

### 2.1 Модель сигнала релаксации ёмкости

Согласно обзору [2], зависимость значения ёмкости от времени  $f(t)$  для моноэкспоненциального сигнала релаксации имеет вид выражения 1.

$$f(t) = A \exp(-\lambda t), \quad (1)$$

где

$A$  – амплитуда сигнала релаксации ёмкости;

$\lambda$  – скорость экспоненциального спада, обратнопропорциональная постоянной времени сигнала релаксации  $\tau$  (выражение 2).

$$\lambda = \tau^{-1} \quad (2)$$

Спектр моноэкспоненциального сигнала релаксации имеет вид, представленный на рисунке 1.

Согласно источнику [2], зависимость сигнала релаксации ёмкости от времени  $f(t)$  для сигнала, образованного несколькими дискретными экспоненциальными сигналами, определяется выражением 3.

$$f(t) = \sum_{i=1}^n A_i \exp(-\lambda_i t), \quad (3)$$

где  $n$  – количество экспоненциальных составляющих в спектре. Пример спектра такого сигнала показан на рисунке 2.

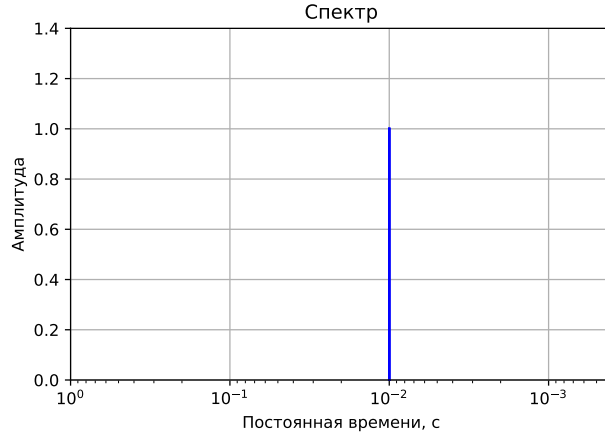


Рис. 1: Пример спектра моноэкспоненциального сигнала релаксации ёмкости.

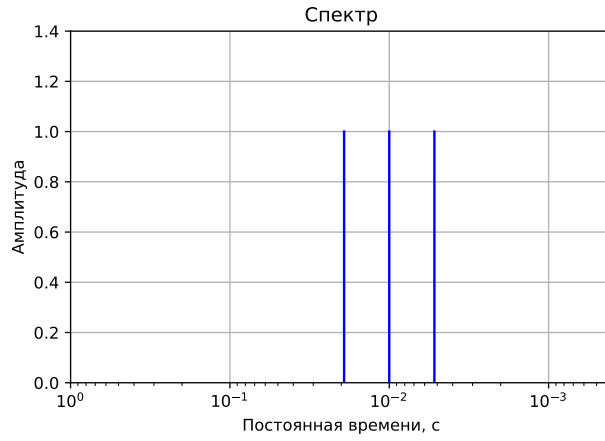


Рис. 2: Пример спектра сигнала релаксации ёмкости, содержащего несколько экспоненциальных составляющих.

## 2.2 Модель аппаратных преобразований спектрометра DLS-82E

В спектрометре DLS-82E реализована корреляционная обработка сигнала релаксации ёмкости, таким образом сигнал на выходе аналогового тракта спектрометра определяется выражением 4, согласно публикации [2].

$$S[g(\lambda), t_c, t_d] = \frac{1}{t_c} \int_{t_d}^{t_d+t_c} f(t) W(t - t_d) dt, \quad (4)$$

где

$W(t)$  – весовая функция, определённая на интервале времени  $[0, t_c]$ ,

$t_c$  – период (длительность) весовой функции  $W(t)$ ,

$t_d$  – время задержки между началом сигнала релаксации и началом корреляционной обработки. Согласно обзору [2], время задержки  $t_d$ , обыч-

но, вводится для улучшения избирательности или для снижения искажения сигнала из-за перегрузки измерительной системы.

$g(\lambda)$  – распределение скоростей экспоненциальных спадов, составляющих релаксационный сигнал.

Модель аппаратных преобразований (корреляционной обработки), учитывающая форму весовой функции, реализованной в спектрометре DLS-82E, для моноэкспоненциального сигнала определяется выражением 5 [3].

$$S(\tau, C_A, F_0, t_1) = C_A K_{BS} K_{LS} \phi(\tau, F_0, t_1), \quad (5)$$

где

$C_A$  – амплитуда емкостного релаксационного сигнала,

$K_{BS}$  – масштабный коэффициент, зависящий от чувствительности емкостного моста,

$K_{LS}$  – масштабный коэффициент селектора,

$\tau$  – постоянная времени релаксации глубокого уровня,

$F_0$  – частота сканирования импульсов заполнения,

$t_1$  – длительность импульса заполнения,

$\phi(\tau, F_0, t_1)$  – функция определяемая выражением 6.

$$\phi(\tau, F_0, t_1) = M \tau F_0 e^{-\frac{0.05}{\tau F_0}} \left( 1 - e^{\frac{t_1 F_0 - 0.45}{\tau F_0}} - e^{-\frac{0.5}{\tau F_0}} + e^{\frac{t_1 F_0 - 0.95}{\tau F_0}} \right), \quad (6)$$

где  $M$  – масштабный множитель.

Масштабный множитель  $M$  определяется выражением 7.

$$M(\tau, F_0, t_1) = \frac{1}{\max \left[ \tau F_0 e^{-\frac{0.05}{\tau F_0}} \left( 1 - e^{\frac{t_1 F_0 - 0.45}{\tau F_0}} - e^{-\frac{0.5}{\tau F_0}} + e^{\frac{t_1 F_0 - 0.95}{\tau F_0}} \right) \right]} \quad (7)$$

Введём коэффициент  $A$  (выражение 8), характеризующий амплитуду сигнала релаксации ёмкости и перепишем выражение 5 с учётом того, что длительность импульса заполнения  $t_1$  является неизменной величиной, и получим выражение 9.

$$A = C_A K_{BS} K_{LS}. \quad (8)$$

$$S(\tau, A, F_0) = A \phi(\tau, F_0) \quad (9)$$

Для одновременного учёта нелинейности аппаратного тракта и неэкспоненциальности сигнала релаксации, связанной с присутствием нескольких

экспоненциальных составляющих в модель вводят коэффициент нелинейности-неэкспоненциальности  $p$  [3], после чего выражение 9 приобретает вид выражения 10.

$$S(\tau, A, F_0, p) = A [\phi(\tau, F_0)]^p. \quad (10)$$

Для моноэкспоненциальных сигналов релаксации коэффициент  $p = 1$ , но, как будет показано далее, в случае наличия нескольких экспоненциальных составляющих в сигнале релаксации коэффициент  $p$  становится меньше 1.

## 2.3 Модель для расчёта исходных данных

Если предположить, что сигнал релаксации ёмкости состоит из нескольких экспоненциальных составляющих и определяется выражением 3, то опираясь на выражения 3, 4, 9 и 6, можно сделать вывод, что частотный скан, созданный таким сигналом релаксации ёмкости определяется выражением 11.

$$Y = \sum_{i=1}^n A_i \phi(\tau_i, F_0), \quad (11)$$

где  $n$  – количество экспоненциальных составляющих в сигнале релаксации.

# 3 Моделирование и его результаты

В данном разделе приводится краткое описание программной реализации модели, примеры рассчитанных частотных сканов, примеры результатов идентификации их моделей и график зависимости коэффициента нелинейности-неэкспоненциальности  $p$  от расстояния между крайними линиями на спектре.

## 3.1 Реализация модели

Модель (выражение 10) реализована на языке программирования Python (версия 3.9.12) с применением библиотеки TensorFlow (версия 2.8.0) и других библиотек для научных вычислений.

Модель частотного скана реализованна в виде отдельного класса *FrequencyScan()* в модуле *fsmodels.py*. Код прокомментирован. Все параметры снабжены адекватными значениями по умолчанию. В дальнейшем планируется дополнение документации и перенос всех программных инструментов для обработки экспериментальных данных в один пакет.

Модель реализует две функции:

1. Вычисление частотного скана по заданным параметрам и заданному вектору десятичных логарифмов частот опорной функции.

## 2. Идентификация параметров модели частотного скана по экспериментальным данным.

Имеется возможность вывода значений параметров модели на каждой итерации при идентификации. Примеры использования модели можно найти в файле *tensorflow\_model.ipynb* (ПО Jupyter Notebook в составе дистрибутива Anaconda).

Программа при каждом вычислении значения  $\phi(\tau, F_0, t_1)$  (выражение 6) находит  $\max \left[ \tau F_0 e^{-\frac{0.05}{\tau F_0}} \left( 1 - e^{\frac{t_1 F_0 - 0.45}{\tau F_0}} - e^{-\frac{0.5}{\tau F_0}} + e^{\frac{t_1 F_0 - 0.95}{\tau F_0}} \right) \right]$  методом градиентного спуска и вычисляет масштабный множитель  $M$  (выражение 7).

Идентификация параметров модели производится методом градиентного спуска, при этом минимизируется среднеквадратическая ошибка между значениями, полученными в результате измерений, и результатами моделирования (выражение 12).

$$E = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - y_i^*)^2, \quad (12)$$

где

$y_i$  – значения, полученные в результате измерений,

$y_i^*$  – значения, полученные в результате моделирования,

$n$  – количество измерений.

Градиентный спуск везде реализован с помощью библиотеки TensorFlow, которая использует алгоритм дифференцирования на графе вычислений, таким образом, производная берётся символьно (точно), затем вычисляется её значение, поэтому точность вычисления градиента ограничена только разрядностью чисел [1].

**Для ускорения процесса идентификации и улучшения сходимости в модели вместо постоянной времени сигнала релаксации  $\tau$  выполняется идентификация величины  $\rho = \log_{10}(\tau)$ . По этим же и некоторым другим техническим причинам при вычислении частотного скана на вход модели нужно подавать не вектор частот опорной функции, а вектор их десятичных логарифмов.**

На рисунке 3 показан пример результата идентификации модели на тестовых (специально сгенерированных) данных.

На рисунке 4 показан «путь» изменения параметров (десятичного логарифма постоянной времени и амплитуды) при идентификации. Красными точками отмечены значения параметров на каждой итерации, изолинии показывают значения среднеквадратической ошибки.

В идеальном случае изолинии должны иметь форму концентрических окружностей, а «траектория» значений параметров должна быть прямой

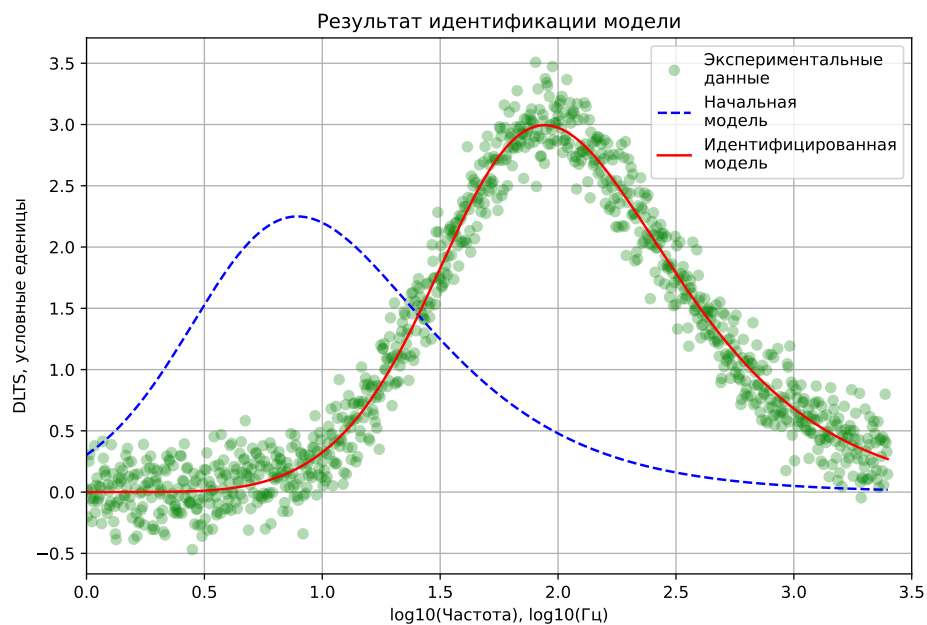


Рис. 3: Пример результата идентификации модели.

линией (в случае обычного градиентного спуска), направленной к центру данных окружностей. Таким образом, рисунок 4 позволяет сделать вывод о возможности повышения скорости идентификации.

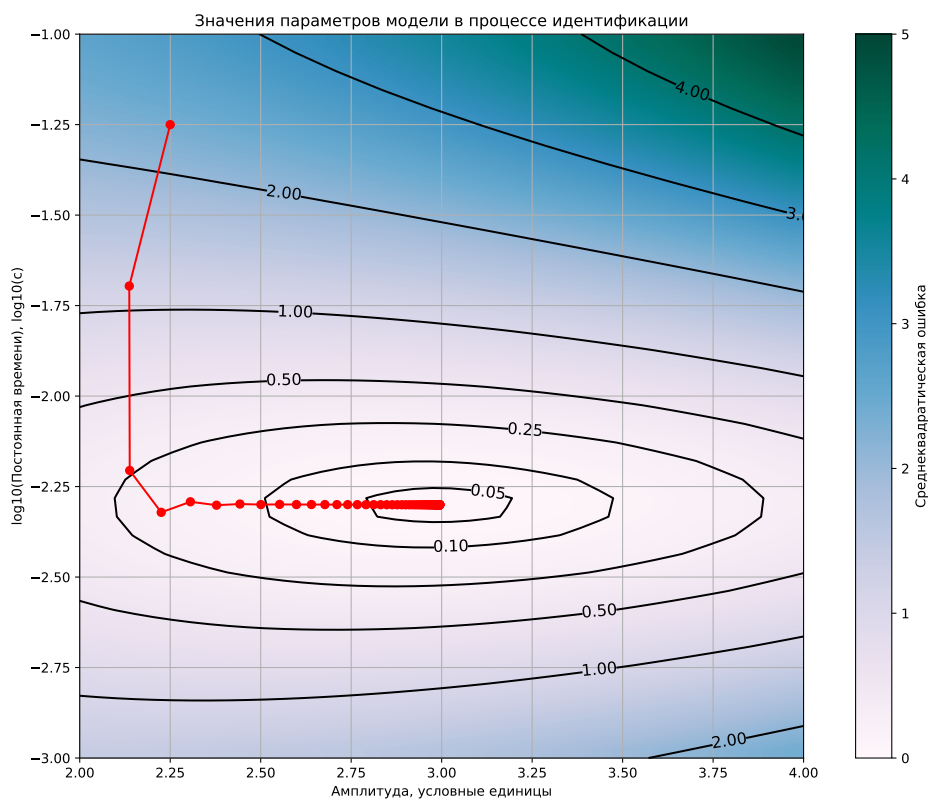


Рис. 4: «Путь» значений параметров при идентификации.

## 3.2 Результаты моделирования

Для определения формы зависимости показателя нелинейности-неэкспоненциальности  $p$  было выполнено моделирование 31 частотного скана со спектрами, состоящими из трёх экспоненциальных составляющих единичной амплитуды. При моделировании предполагалось, что условия идеальны и частотные сканы не содержат шума.

На первом этапе моделирования, согласно выражению 11, рассчитывался частотный скан, затем производилась идентификация параметров модели этого частотного скана, согласно выражению 10. Идентификация проводилась по всем точкам.

Результаты моделирования некоторых частотных сканов и спектры, по которым эти частотные сканы были рассчитаны, приведены на рисунках 5, 6, 7. В таблице 1, вынесенной в приложение приведены полные результаты моделирования. На рисунке 8 показан график полученной зависимости показателя нелинейности-неэкспоненциальности от разности постоянных времени крайних на спектре линий.

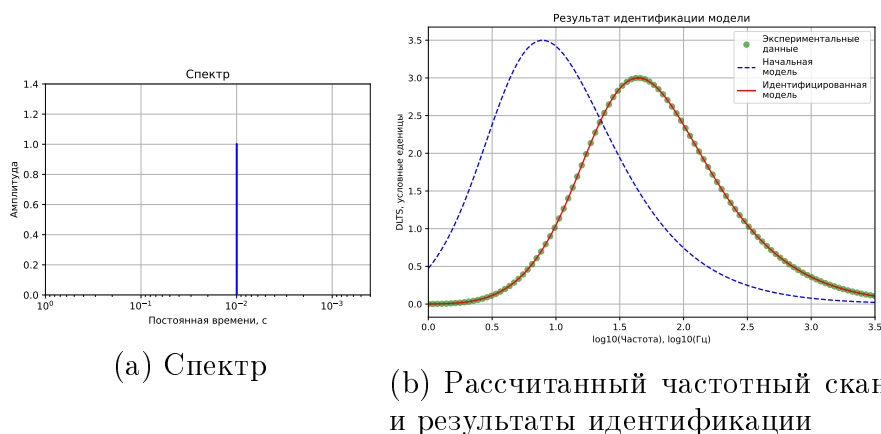


Рис. 5: Результаты моделирования частотного скана №1

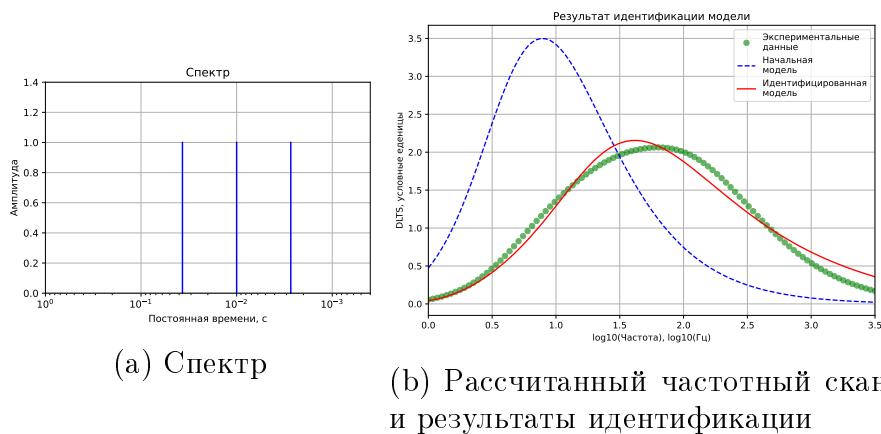


Рис. 6: Результаты моделирования частотного скана №18



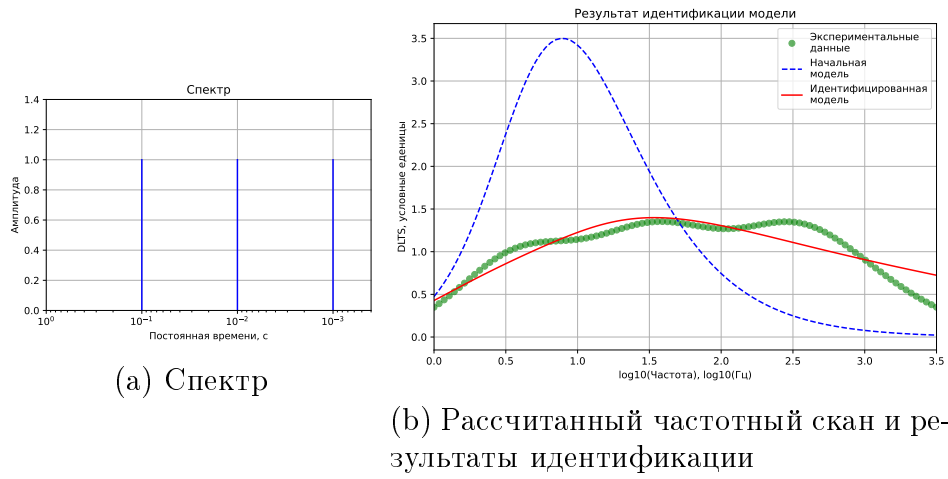


Рис. 7: Результаты моделирования частотного скана №31

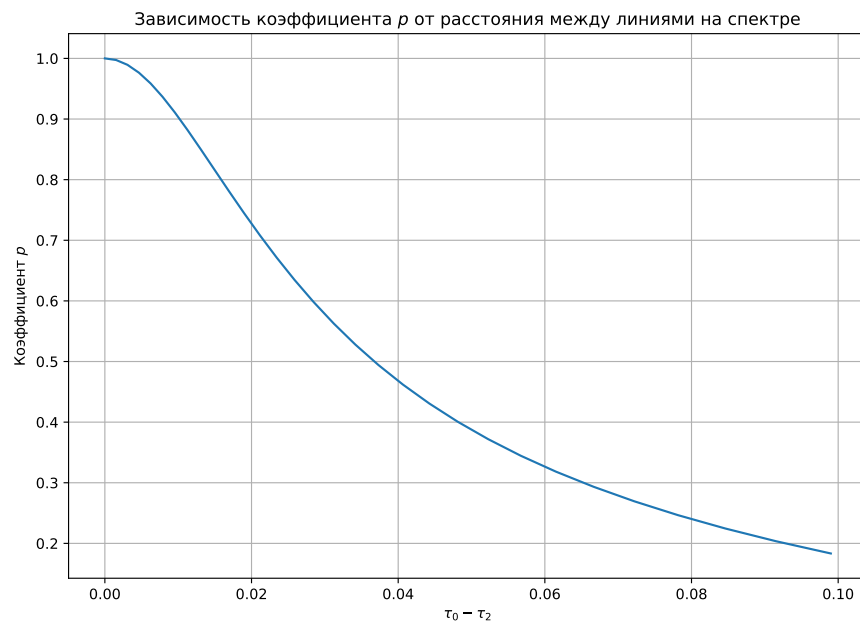


Рис. 8: Зависимость показателя  $p$  от разности постоянных времени крайних на спектре линий.

## 4 Выводы

1. Полученные результаты моделирования частотных сканов (рисунок 8, таблица 1) позволяют сделать вывод о том, что коэффициент нелинейности-неэкспоненциальности  $p$  нелинейно убывает с увеличением разности постоянных времени крайних линий на спектре ( $\tau_0 - \tau_2$ ).
2. С увеличением разности постоянных времени крайних линий на спектре растёт среднеквадратическая ошибка между результатами, полученными на идентифицированной модели, и исходными данными.
3. Возможно улучшение программной реализации модели и повышение скорости идентификации её параметров.

## Список литературы

- [1] Aurelien Geron. *Hands-On Machine Learning with Scikit-Learn, Keras, and TensorFlow: Concepts, Tools, and Techniques to Build Intelligent Systems*. 2nd. O'Reilly Media, Inc., 2019. ISBN: 1492032646.
- [2] Andrei A. Istratov и Oleg F. Vyvenko. «Exponential analysis in physical phenomena». В: *Review of Scientific Instruments* 70.2 (1999), с. 1233—1257. DOI: 10.1063/1.1149581. eprint: <https://doi.org/10.1063/1.1149581>. URL: <https://doi.org/10.1063/1.1149581>.
- [3] Vladimir Krylov, Aleksey Bogachev и Т. Pronin. «Deep level relaxation spectroscopy and nondestructive testing of potential defects in the semiconductor electronic component base». В: *Radio industry (Russia)* 29 (май 2019), с. 35—44. DOI: 10.21778/2413-9599-2019-29-2-35-44.

# Приложение

Таблица 1: Таблица с результатами моделирования.

№	$\tau_0$	$\tau_1$	$\tau_2$	$A_0, A_1, A_2$	$p$	$\tau$	$A$	$E$
1	0.010000	0.01	0.010000	1	1.000037	0.01	3.000065	0.0
2	0.010798	0.01	0.009261	1	0.997369	0.01	2.9958	0.0
3	0.011659	0.01	0.008577	1	0.989434	0.01	2.983085	0.000007
4	0.012589	0.01	0.007943	1	0.976442	0.01	2.962168	0.000037
5	0.013594	0.01	0.007356	1	0.958724	0.01	2.933441	0.000114
6	0.014678	0.01	0.006813	1	0.936716	0.01	2.897431	0.000269
7	0.015849	0.01	0.006310	1	0.910929	0.01001	2.854769	0.000535
8	0.017113	0.01	0.005843	1	0.881925	0.01002	2.806167	0.000943
9	0.018478	0.01	0.005412	1	0.85028	0.01003	2.75238	0.001521
10	0.019953	0.01	0.005012	1	0.816569	0.01005	2.69419	0.002287
11	0.021544	0.01	0.004642	1	0.781339	0.01008	2.63237	0.003251
12	0.023263	0.01	0.004299	1	0.745094	0.01012	2.567672	0.004408
13	0.025119	0.01	0.003981	1	0.708292	0.01016	2.500813	0.005745
14	0.027123	0.01	0.003687	1	0.67133	0.01022	2.432452	0.007235
15	0.029286	0.01	0.003415	1	0.634549	0.01029	2.363189	0.008842
16	0.031623	0.01	0.003162	1	0.598241	0.01038	2.293577	0.010522
17	0.034145	0.01	0.002929	1	0.562646	0.01047	2.224094	0.012227
18	0.036869	0.01	0.002712	1	0.527954	0.01059	2.155159	0.013904
19	0.039811	0.01	0.002512	1	0.494315	0.01071	2.087133	0.015505
20	0.042987	0.01	0.002326	1	0.461839	0.01086	2.020315	0.016982
21	0.046416	0.01	0.002154	1	0.430599	0.01101	1.954942	0.018296
22	0.050119	0.01	0.001995	1	0.400635	0.01118	1.891205	0.019415
23	0.054117	0.01	0.001848	1	0.371955	0.01135	1.829231	0.020314
24	0.058434	0.01	0.001711	1	0.344537	0.01154	1.769093	0.020979
25	0.063096	0.01	0.001585	1	0.318344	0.01173	1.710833	0.021404
26	0.068129	0.01	0.001468	1	0.293318	0.01193	1.654448	0.021592
27	0.073564	0.01	0.001359	1	0.269394	0.01213	1.599908	0.021553
28	0.079433	0.01	0.001259	1	0.246501	0.01232	1.54716	0.021303
29	0.085770	0.01	0.001166	1	0.224571	0.01252	1.496146	0.020866
30	0.092612	0.01	0.001080	1	0.203536	0.01271	1.446791	0.020268
31	0.100000	0.01	0.001000	1	0.183337	0.01289	1.399025	0.01954

В таблице 1 использованы следующие обозначения:

$\tau_0, \tau_1, \tau_2$  – Заданные постоянные времени экспоненциальных составляющих на спектре в секундах.

$A_0, A_1, A_2$  – Заданные амплитуды экспоненциальных составляющих на спектре в условных единицах. В данном случае амплитуды всех составляющих равны 1.

$p$  – коэффициент нелинейности-неэкспоненциальности, полученный в результате идентификации параметров модели. Безразмерная величина.

$\tau$  – постоянная времени, полученная в результате идентификации параметров модели, в секундах.

$A$  – амплитуда, полученная в результате идентификации параметров модели, в условных единицах.

$E$  – среднеквадратическая ошибка (квадрат единиц амплитуды  $A$ ).