Лабораторная работа №6

Модель эпидемии

Рытов Алексей Константинович

Цель работы

Изучить и построить модель эпидемии.

Теоретическое введение. Построение математической модели.

Рассмотрим простейшую модель эпидемии. Предположим, что некая популяция, состоящая из N особей, (считаем, что популяция изолирована) подразделяется на три группы. Первая группа - это восприимчивые к болезни, но пока здоровые особи, обозначим их через $S(t)$. Вторая группа – это число инфицированных особей, которые также при этом являются распространителями инфекции, обозначим их $I(t)$. А третья группа, обозначающаяся через $R(t)$ – это здоровые особи с иммунитетом к болезни. До того, как число заболевших не превышает критического значения I^*, считаем, что все больные изолированы и не заражают здоровых. Когда $I(t) > I^*$, тогда инфицирование способны заражать восприимчивых к болезни особей.

Таким образом, скорость изменения числа $S(t)$ меняется по следующему закону:

$$\frac{dS}{dt} = \begin{cases} -\alpha S & \text{,если } I(t) > I^* \\ 0 & \text{,если } I(t) \leq I^* \end{cases}$$

Поскольку каждая восприимчивая к болезни особь, которая, в конце концов, заболевает, сама становится инфекционной, то скорость изменения числа инфекционных особей представляет разность за единицу времени между заразившимися и теми, кто уже болеет и лечится, то есть:

$$\frac{dI}{dt} = \begin{cases} \alpha S - \beta I & \text{, если } I(t) > I^* \\ -\beta I & \text{, если } I(t) \leq I^* \end{cases}$$

А скорость изменения выздоравливающих особей (при этом приобретающие иммунитет к болезни):

$$\frac{dR}{dt} = \beta I$$

Постоянные пропорциональности α, β - это коэффициенты заболеваемости и выздоровления соответственно. Для того, чтобы решения соответствующих уравнений определялось однозначно, необходимо задать начальные условия. Считаем, что на начало эпидемии в момент времени $t = 0$ нет особей с иммунитетом к болезни $R(0) = 0$, а число инфицированных и восприимчивых к болезни особей $I(0)$ и $S(0)$ соответственно. Для анализа картины протекания эпидемии необходимо рассмотреть два случая: $I(0) \leq I^*$ и $I(0) > I^*$

Задание

Вариант 12

На одном острове вспыхнула эпидемия. Известно, что из всех проживающих на острове ($N = 18000$) в момент начала эпидемии ($t = 0$) число заболевших людей (являющихся распространителями инфекции) $I(0) = 118$, А число здоровых людей с иммунитетом к болезни $R(0) = 18$. Таким образом, число людей восприимчивых к болезни, но пока здоровых, в начальный момент времени $S(0) = N - I(0) - R(0)$. Постройте графики изменения числа особей в каждой из трех групп.

Рассмотрите, как будет протекать эпидемия в случае:

1. $I(0) \leq I^*$
2. $I(0) > I^*$

Задачи

Построить графики изменения числа особей в каждой из трех групп S, I, R. Рассмотреть, как будет протекать эпидемия в случаях:

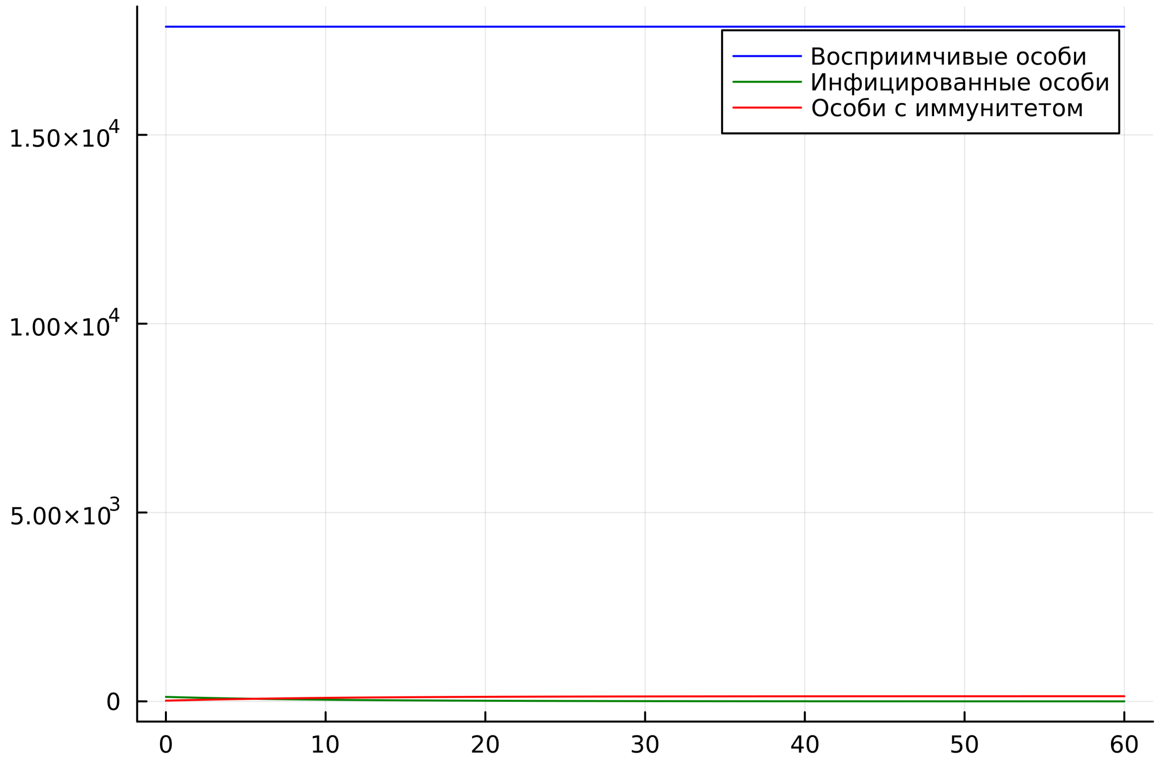
1. $I(0) \leq I^*$
2. $I(0) > I^*$

Выполнение лабораторной работы

Написали скрипты на языках julia и openModelica для решения диф. уравнений.

```
using DifferentialEquations
using Plots

beta = 0.1

function f(du, u, p, t)
    S, I, R = u
    du[1] = 0
    du[2] = -beta*u[2]
    du[3] = beta*I
end

N = 18000
I0 = 118
R0 = 18
S0 = N - I0 - R0

v0 = [S0, I0, R0]
tspan = (0.0, 60.0)
prob =ODEProblem(f, v0, tspan)
sol = solve(prob, dtmax = 0.1)
```

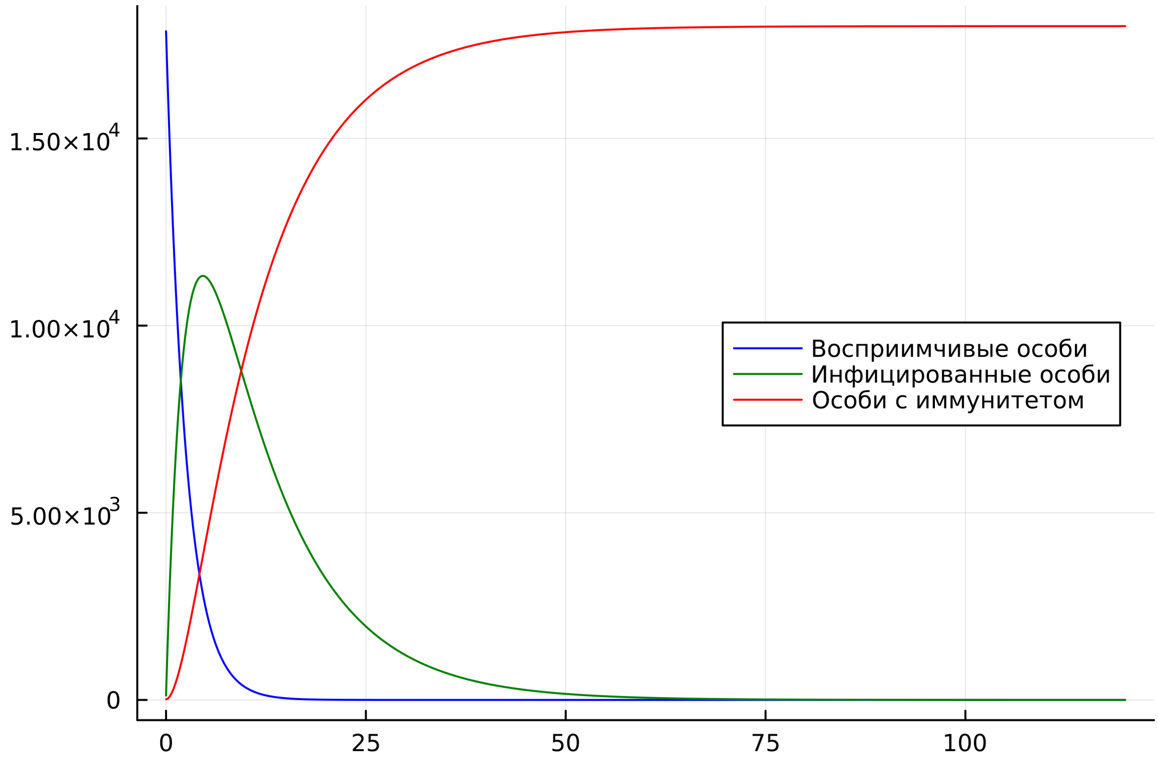
```
S = [u[1] for u in sol.u]
I = [u[2] for u in sol.u]
R = [u[3] for u in sol.u]
T = [t for t in sol.t]

plt1 = plot(dpi=600,legend=:topright)
plot!(plt1, T, S, label = "Восприимчивые особи", color=:blue)
plot!(plt1, T, I, label = "Инфицированные особи", color=:green)
plot!(plt1, T, R, label = "Особи с иммунитетом", color=:red)
savefig(plt1, "1.png")
```



```
using Plots
using DifferentialEquations
```

```
N = 18000
I0 = 118
R0 = 18
S0 = N - I0 - R0

alpha = 0.4
beta = 0.1

function ode_fn(du, u, p, t)
    S, I, R = u
    du[1] = -alpha*u[1]
    du[2] = alpha*u[1] - beta*u[2]
    du[3] = beta*I
end

v0 = [S0, I0, R0]
tspan = (0.0, 120.0)
prob = ODEProblem(ode_fn, v0, tspan)
sol = solve(prob, dtmax=0.05)
S = [u[1] for u in sol.u]
I = [u[2] for u in sol.u]
R = [u[3] for u in sol.u]
T = [t for t in sol.t]

plt = plot(
  dpi=600,
  legend=:right)
```

```
plot!(
  plt,
  T,
  S,
  label="Восприимчивые особи",
  color=:blue)
plot!(
  plt,
  T,
  I,
  label="Инфицированные особи",
  color=:green)
plot!(
  plt,
  T,
  R,
  label="Особи с иммунитетом",
  color=:red)


savefig(plt, "2.png")
```

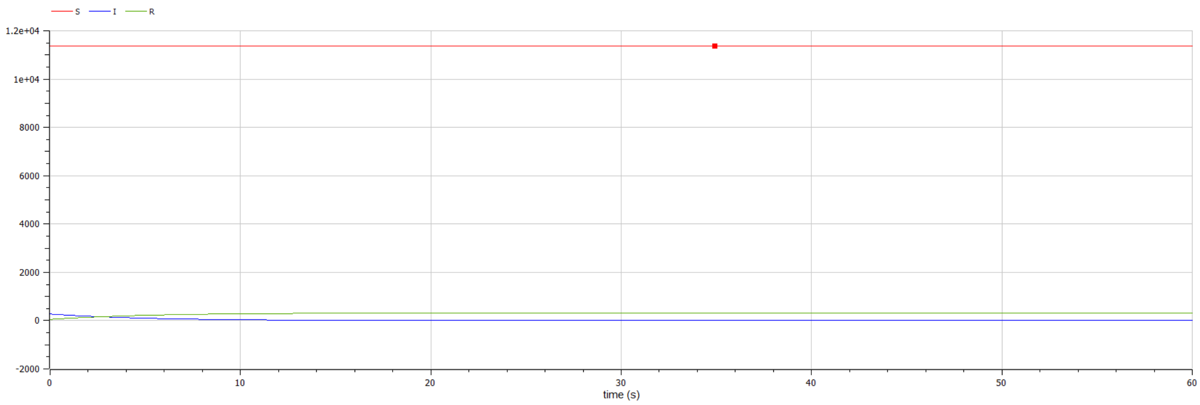



```
model lab06_1
Real N = 18000;
Real I;
Real R;
Real S;
Real alpha = 0.6;
Real beta = 0.2;
initial equation
I = 118;
R = 18;
S = N - I - R;
equation
der(S) = 0;
```

der(I) = -beta*I;

der(R) = beta*I;

end lab06_1;



---

model lab06_2

Real N = 18000;

Real I;

Real R;

Real S;

Real alpha = 0.4;

Real beta = 0.1;

initial equation

I = 118;

R = 18;

S = N - I - R;

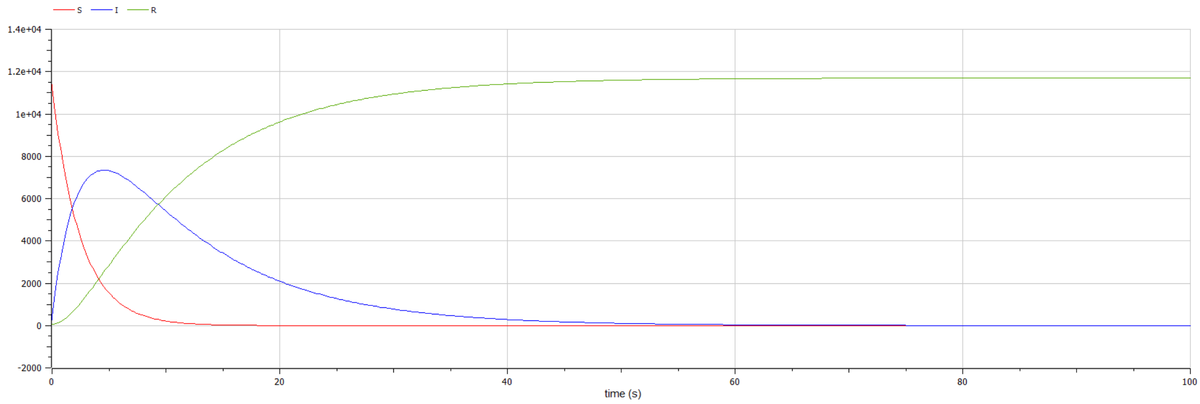
equation

der(S) = -alpha*S;

der(I) = alpha*S - beta*I;

der(R) = beta*I;

end lab06_2;



S
I
R
1.4e+04
1.2e+04
1e+04
8000
6000
4000
2000
0
-2000
0
20
40
60
80
100
time (s)

Вывод

Мы изучили модель эпидемии.