Лабораторная работа №3

Модель боевых действий

Рытов Алексей Константинович

Список иллюстраций

Цель работы

Изучить модели боевых действий Ланчестера. Решить поставленную задачу с помощью языка julia.

Выполнение лабораторной работы

Задание

Между страной Х и страной У идет война. Численность состава войск исчисляется от начала войны, и являются временными функциями $x(t)$ и $y(t)$. В начальный момент времени страна Х имеет армию численностью 50 000 человек, а в распоряжении страны У армия численностью в 39 000 человек. Для упрощения модели считаем, что коэффициенты a, b, c, h постоянны. Также считаем $P(t)$ и $Q(t)$ непрерывными функциями.

Постройте графики изменения численности войск армии Х и армии У для следующих случаев:

1. Модель боевых действий между регулярными войсками:

$$\frac{dx}{dt} = -0.445x(t) - 0.806y(t) + sin(t+7) + 1$$
$$\frac{dy}{dt} = -0.419x(t) - 0.703y(t) + cos(t+4) + 1$$

2. Модель ведение боевых действий с участием регулярных войск и партизанских отрядов:

$$\frac{dx}{dt} = -0.203x(t) - 0.705y(t) + sin(2t)$$
$$\frac{dy}{dt} = -0.203x(t)y(t) - 0.801y(t) + 2cos(t)$$

1-ый случай

Численность регулярных войск определяется тремя факторами:

1. Скорость уменьшения численности войск из-за причин, не связанных с боевыми действиями (болезни, травмы, дезертирство);
2. Скорость потерь, обусловленных боевыми действиями противоборствующих сторон (что связанно с качеством стратегии, уровнем вооружения, профессионализмом солдат и т.п.);
3. Скорость поступления подкрепления (задаётся некоторой функцией от времени).

В этом случае модель боевых действий между регулярными войсками описывается следующим образом:

$$\frac{dx}{dt} = -a(t)x(t) - b(t)y(t) + P(t)$$
$$\frac{dy}{dt} = -c(t)x(t) - h(t)y(t) + Q(t)$$

В первом пункте нами рассматривается как раз такая модель. Она является доработанной моделью Ланчестера, так его изначальная модель учитывала лишь члены $b(t)y(t)$ и $c(t)x(t)$, то есть, на потери за промежуток времени влияли лишь численность армий и “эффективность оружия” (коэффициенты $b(t)$ и $c(t)$).

$$\frac{dx}{dt} = -ax(t) - by(t) + P(t)$$
$$\frac{dy}{dt} = -cx(t) - hy(t) + Q(t)$$

Именно эти уравнения и будут решать наши программы для выполнения первой части задания. В конце мы получим график кривой в декартовых координатах, где по оси ox будет отображаться численность армии государства X, по оси oy будет отображаться соответствующая численность армии Y. По тому, с какой осью пересечётся график, можно определить исход войны. Если ось ox будет пересечена в положительных значениях, победа будет на стороне армии государства X (так как при таком раскладе численность армии Y достигла нуля при положительном значении численности армии X). Аналогичная ситуация для оси oy и победы армии государства Y.

2-ой случай

Для второй части задания, то есть, для моделирования боевых действий между регулярной армией и партизанской армией, необходимо внести поправки в предыдущую модель. Считается, что темп потерь партизан, проводящих свои операции в разных местах на некоторой известной территории, пропорционален не только численности армейских соединений, но и численности самих партизан.

$$\frac{dx}{dt} = -a(t)x(t) - b(t)y(t) + P(t)$$
$$\frac{dy}{dt} = -c(t)x(t)y(t) - h(t)y(t) + Q(t)$$

Коэффициенты a, b, c и h всё так же будут положительными десятичными числами:

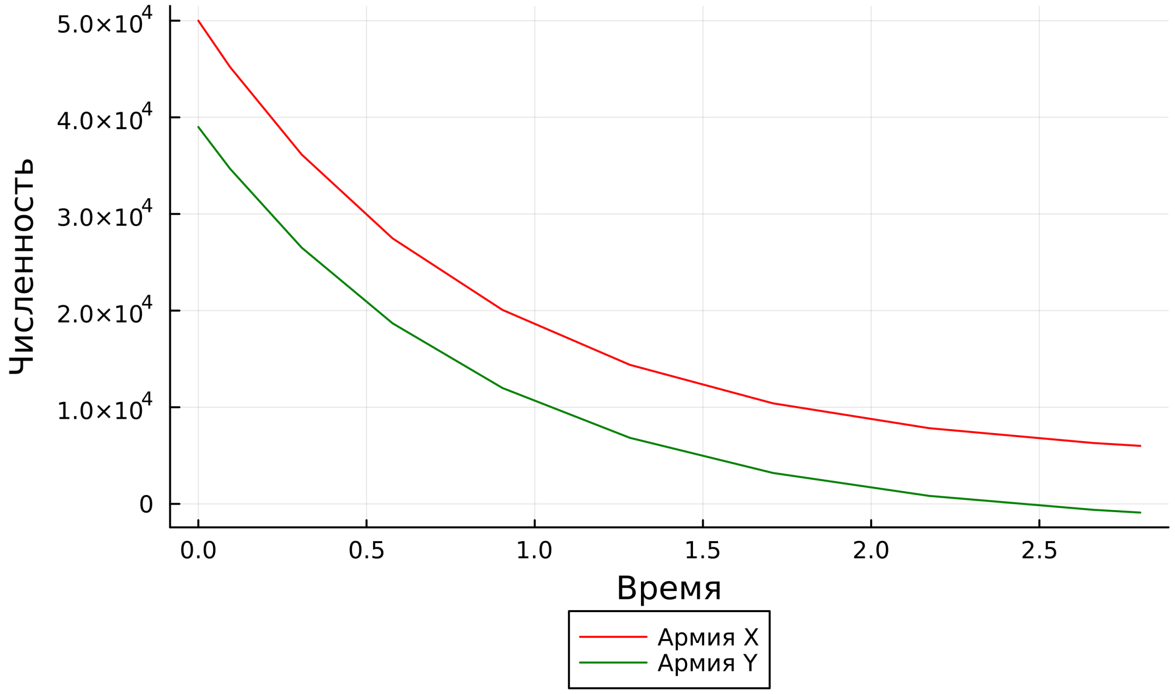
$$\frac{dx}{dt} = -ax(t) - by(t) + P(t)$$
$$\frac{dy}{dt} = -cx(t)y(t) - hy(t) + Q(t)$$

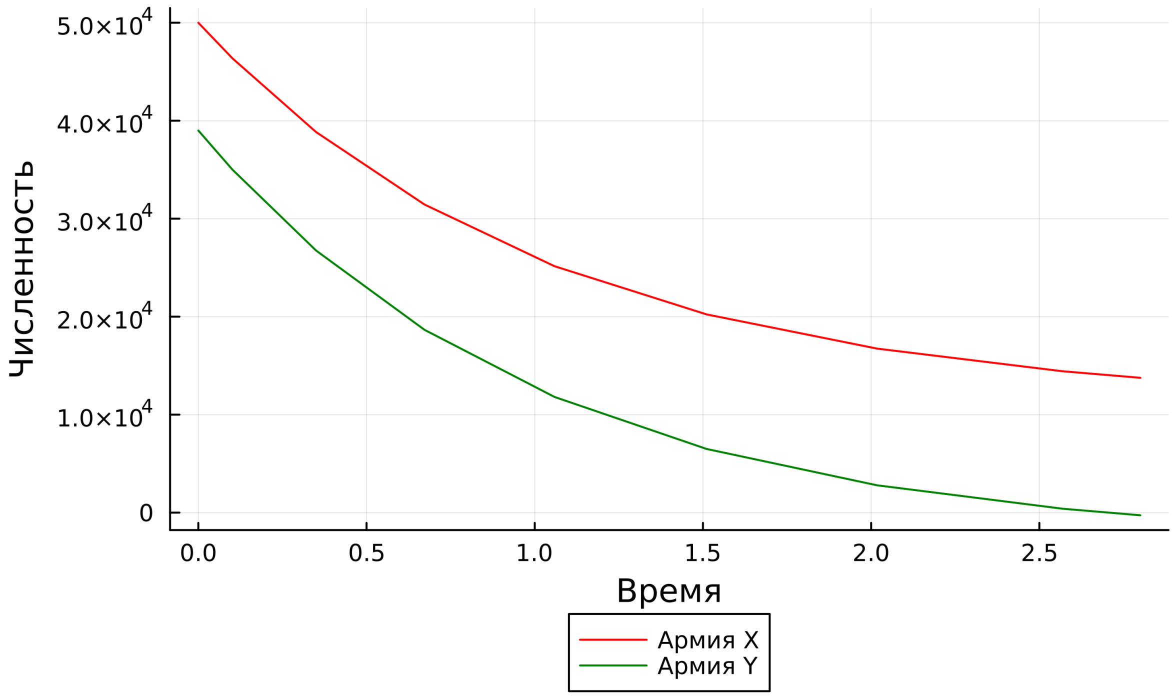
По ходу работу мы написали следующий скрипт (рис. 1).

labs > lab03 > 1.jl

```julia
using DifferentialEquations
using Plots

const army = Float64[50000, 39000]
const length = [0.0, 2.8]

function armyVsArmy(du, u, p, t)
    du[1] = -0.445 * u[1] - 0.806 * u[2] + sin(t + 7) + 1
    du[2] = -0.419 * u[1] - 0.703 * u[2] + cos(t + 4) + 1
end

function armyVsAPartesans(du, u, p, t)
    du[1] = -0.203 * u[1] - 0.705 * u[2] + sin(2 * t)
    du[2] = -0.203 * u[1] - 0.801 * u[2] + 2 * cos(t)
end


prob1 = ODEProblem(armyVsArmy, army, length)
prob2 = ODEProblem(armyVsAPartesans, army, length)

sol1 = solve(prob1)
sol2 = solve(prob2)

army1_1 = [u[1] for u in sol1.u]
army1_2 = [u[2] for u in sol1.u]
time1 = [t for t in sol1.t]

army2_1 = [u[1] for u in sol2.u]
army2_2 = [u[2] for u in sol2.u]
time2 = [t for t in sol2.t]

pltime1 = plot(dpi = 500, legend= true, bg =:white)
plot!(pltime1, xlabel="Время", ylabel="Численность", legend=:outerbottom)
plot!(pltime1, time1, army1_1, label="Армия X", color =:red)
plot!(pltime1, time1, army1_2, label="Армия Y", color =:green)

pltime2 = plot(dpi = 500, legend= true, bg =:white)
plot!(pltime2, xlabel="Время", ylabel="Численность", legend=:outerbottom)
plot!(pltime2, time2, army2_1, label="Армия X", color =:red)
plot!(pltime2, time2, army2_2, label="Армия Y", color =:green)

savefig(pltime1, "1.png")
savefig(pltime2, "2.png")
```

Полученные графики (рис 2-3).


Численность
Время
Армия X
Армия Y


Численность
Время
Армия X
Армия Y

Вывод

Мы изучили модели боевых действий Ланчестера и решили поставленную задачу с помощью языка julia.