Лабораторная работа №5

Модель хищник-жертва

Рытов Алексей Константинович

Цель работы

Изучить жесткую модель хищник-жертва и построить эту модель.

Теоретическое введение

- Модель Лотки—Вольтерры — модель взаимодействия двух видов типа «хищник — жертва», названная в честь её авторов, которые предложили модельные уравнения независимо друг от друга. Такие уравнения можно использовать для моделирования систем «хищник — жертва», «паразит — хозяин», конкуренции и других видов взаимодействия между двумя видами. [4]

Данная двувидовая модель основывается на следующих предположениях [4]:

1. Численность популяции жертв x и хищников y зависят только от времени (модель не учитывает пространственное распределение популяции на занимаемой территории)

2. В отсутствии взаимодействия численность видов изменяется по модели Мальтуса, при этом число жертв увеличивается, а число хищников падает

3. Естественная смертность жертвы и естественная рождаемость хищника считаются несущественными

4. Эффект насыщения численности обеих популяций не учитывается

5. Скорость роста численности жертв уменьшается пропорционально численности хищников

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (-ax(t) + by(t)x(t)) \\ \frac{dy}{dt} = (cy(t) - dy(t)x(t)) \end{cases}$$

В этой модели x – число жертв, y - число хищников. Коэффициент a описывает скорость естественного прироста числа жертв в отсутствие хищников, ñ - естественное вымирание хищников, лишенных пищи в виде жертв. Вероятность взаимодействия жертвы и хищника считается пропорциональной как количеству жертв, так и числу самих хищников (xy). Каждый акт взаимодействия уменьшает популяцию жертв, но способствует увеличению популяции хищников (члены $-bxy$ и dxy в правой части уравнения).

Математический анализ этой (жёсткой) модели показывает, что имеется стационарное состояние, всякое же другое начальное состояние приводит к периодическому колебанию численности как жертв, так и хищников, так что по прошествии некоторого времени такая система вернётся в изначальное состояние.

Стационарное состояние системы (положение равновесия, не зависящее от времени решения) будет находиться в точке $x_0 = \frac{c}{d}, y_0 = \frac{a}{b}$. Если начальные значения задать в стационарном состоянии $x(0) = x_0, y(0) = y_0$, то в любой момент времени численность популяций изменяться не будет. При малом отклонении от положения равновесия численности как хищника, так и жертвы с течением времени не возвращаются к равновесным значениям, а совершают периодические колебания вокруг стационарной точки. Амплитуда колебаний и их период определяется начальными значениями численностей $x(0), y(0)$. Колебания совершаются в противофазе.

Задачи

1. Построить график зависимости численности хищников от численности жертв
2. Построить график зависимости численности хищников и численности жертв от времени
3. Найти стационарное состояние системы

Задание

Вариант 12:

Для модели «хищник-жертва»:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -0.24x(t) + 0.044y(t)x(t) \\ \frac{dy}{dt} = 0.44y(t) - 0.024y(t)x(t) \end{cases}$$

Постройте график зависимости численности хищников от численности жертв, а также графики изменения численности хищников и численности жертв при следующих начальных условиях: $x_0 = 4, y_0 = 10$ Найдите стационарное состояние системы.

Выполнение лабораторной работы

Написали скрипты на языках julia и openModelica для решения диф. уравнений.

```
using DifferentialEquations
using Plots

a = 0.24
b = 0.044
c = 0.44
d = 0.024

function func(du, u, p, t)
    x, y = u
    du[1] = -a * u[1] + b * u[1] * u[2]
    du[2] = c * u[2] - d * u[2] * u[1]
end

v0 = [4, 10]
tspan = (0.0, 60.0)

prob = ODEProblem(func, v0, tspan)
sol = solve(prob, dtmax=0.05)

X = [u[1] for u in sol.u]
```

```
Y = [u[2] for u in sol.u]
T = [t for t in sol.t]

plt1 = plot(dpi=300,legend=false)
plot!(plt1, X, Y, color=:blue)
savefig(plt1, "1.png")

plt2 = plot(dpi=300,legend=true)
plot!(plt2, T, X, label="Численность жертв", color=:red)
plot!(plt2, T, Y, label="Численность хищников", color=:green)
savefig(plt2, "2.png")

v1 = [c/d, a/b]


prob1 = ODEProblem(func, v1, tspan)
sol1 = solve(prob1, dtmax=0.05)

X1 = [u[1] for u in sol1.u]
Y1 = [u[2] for u in sol1.u]
T1 = [t for t in sol1.t]

plt3 = plot(dpi=300,legend=true)
plot!(plt3, T1, X1, label="Численность жертв", color=:red)
plot!(plt3, T1, Y1, label="Численность хищников", color=:green)
savefig(plt3, "3.png")
```

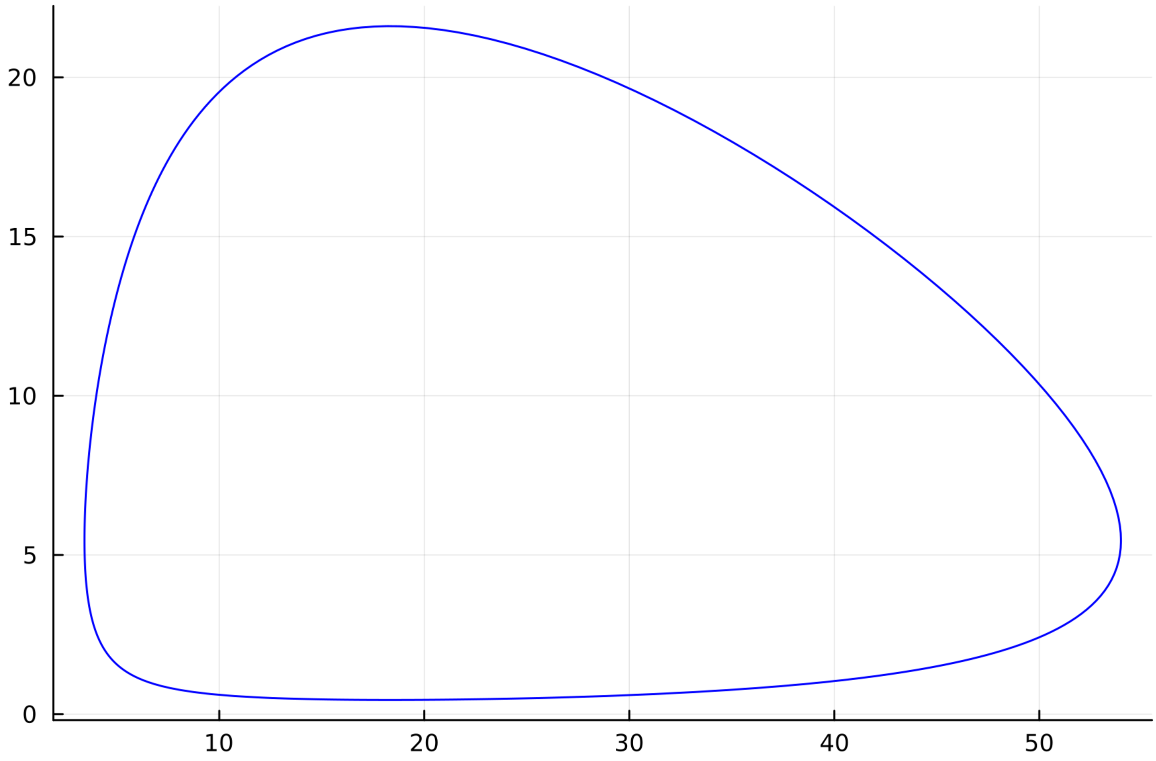

Рис. 1: 1-ый график

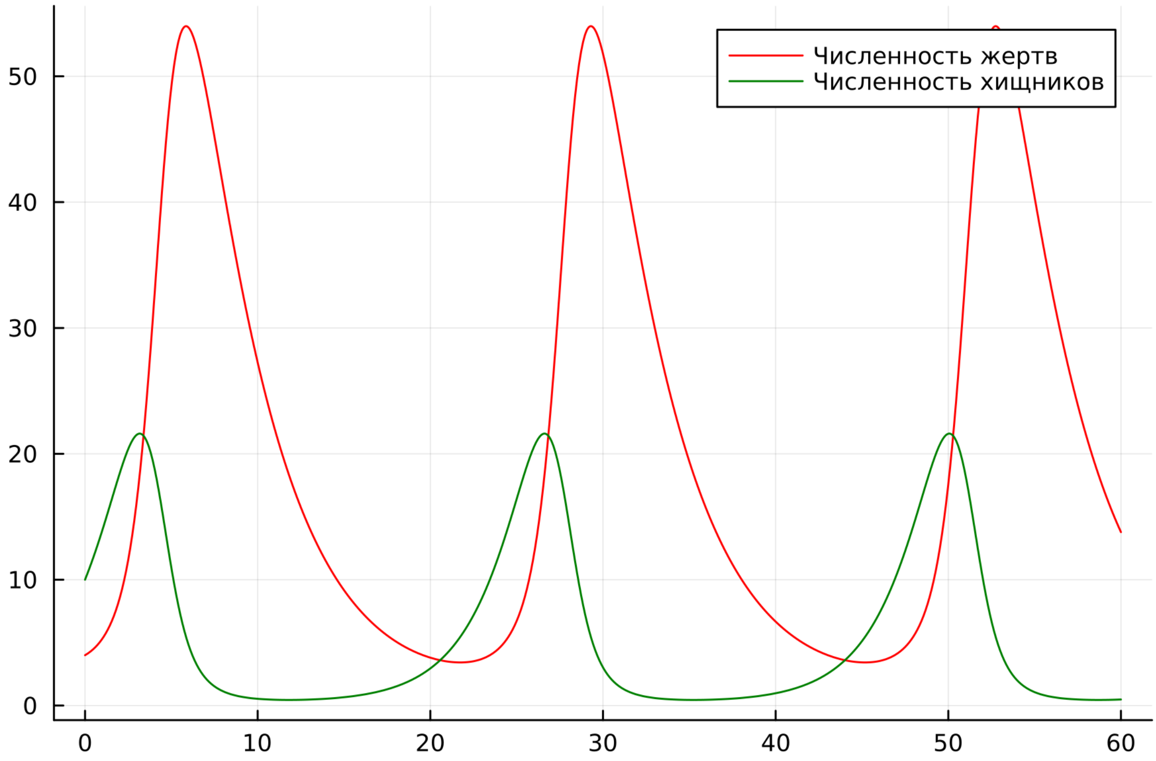

Рис. 2: 2-ой график

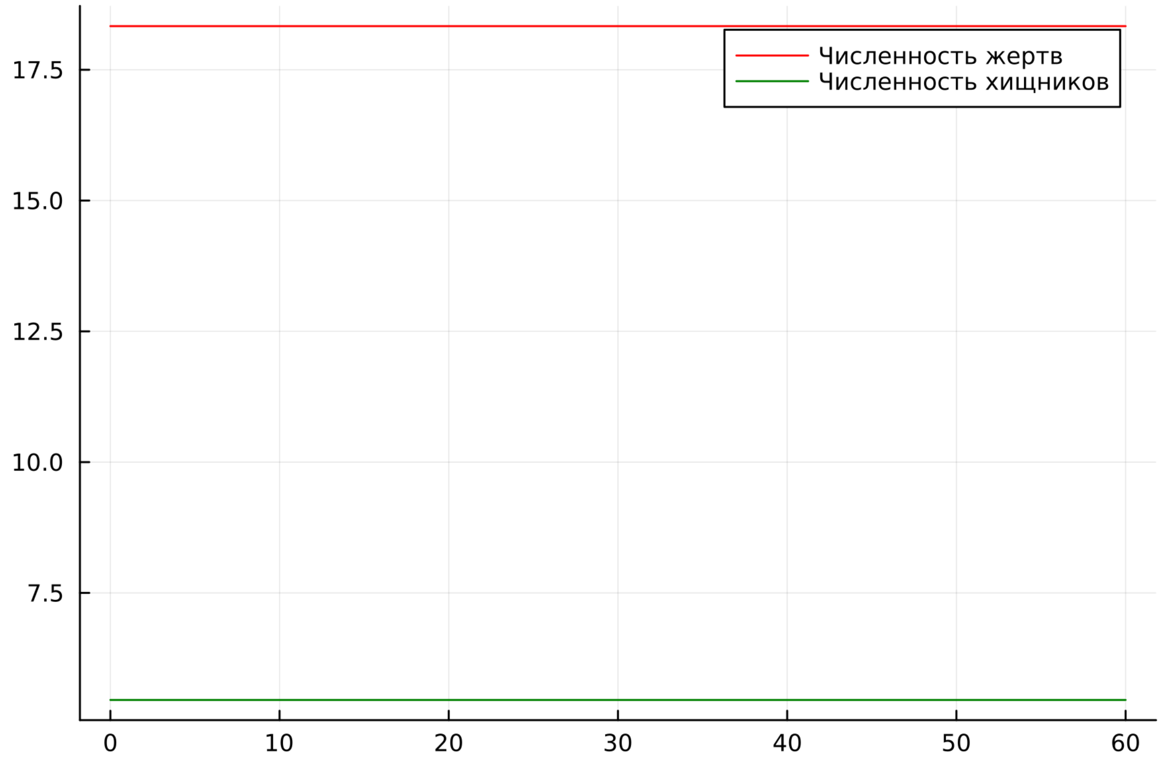

Рис. 3: 3-ий график

```
model lab05_1
Real a = 0.24;
Real b = 0.044;
Real c = 0.44;
Real d = 0.024;
Real x;
Real y;
initial equation
x = 4;
y = 10;
equation
der(x) = -a*x + b*x*y;
der(y) = c*y - d*x*y;
```

```
end lab05_1;

model lab05_2
Real a = 0.24;
Real b = 0.044;
Real c = 0.44;
Real d = 0.024;
Real x;
Real y;
initial equation
x = c / d;
y = a / b;
equation
der(x) = -a*x + b*x*y;
der(y) = c*y - d*x*y;
end lab05_2;
```

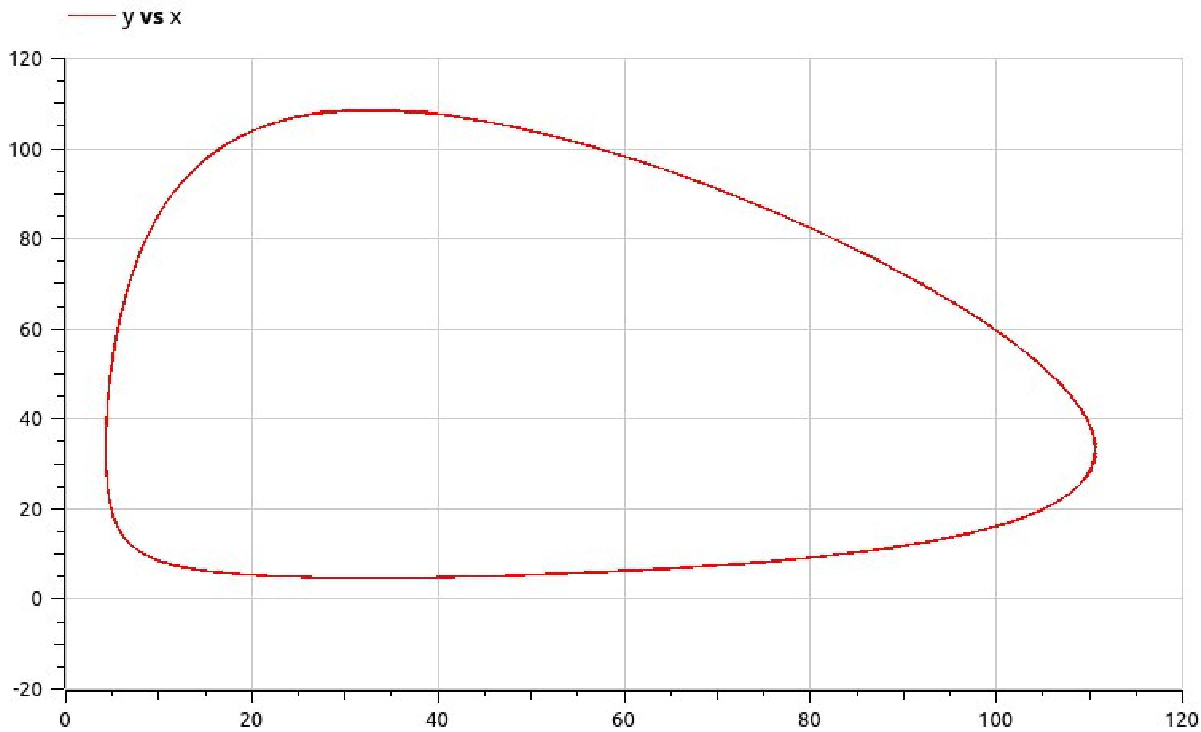

Рис. 4: 4-ый график

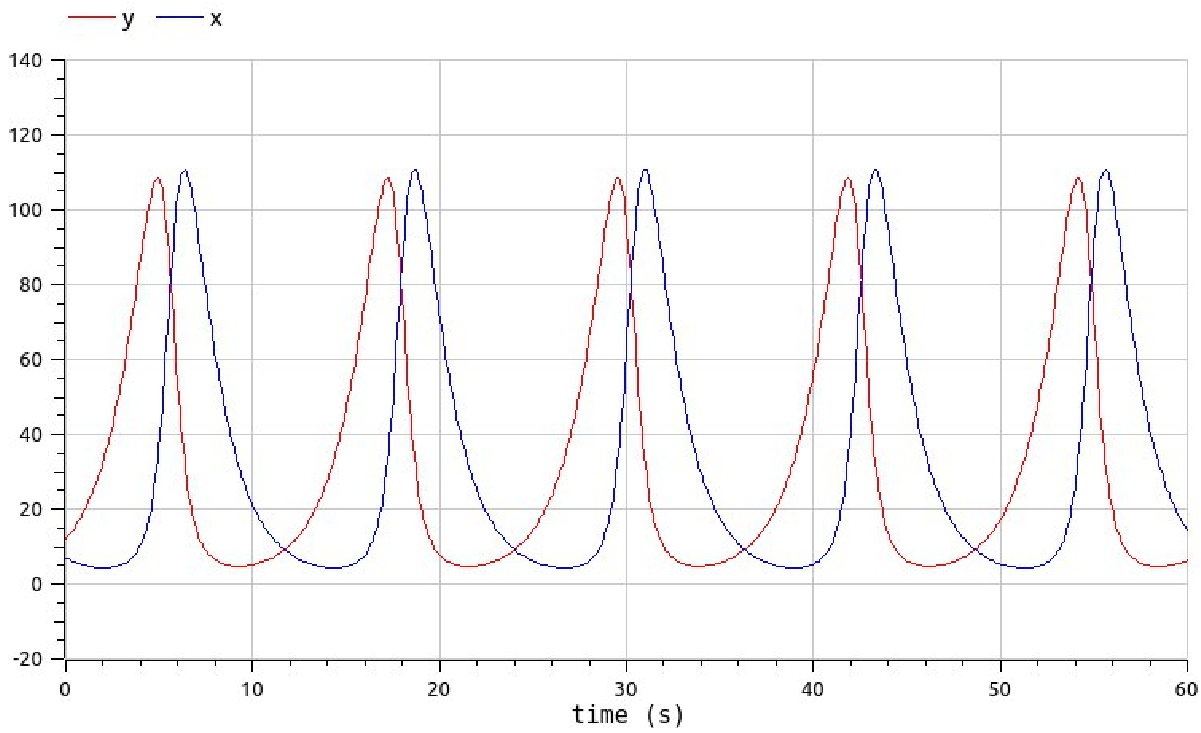

Рис. 5: 5-ый график

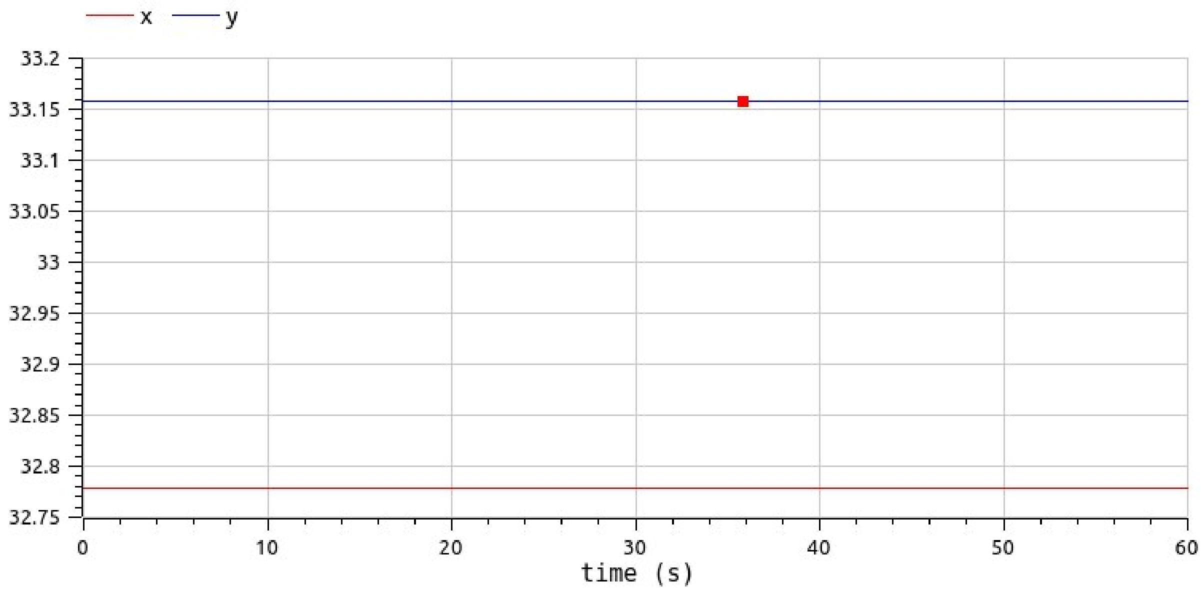

Рис. 6: 6-ой график

Вывод

Мы изучили модель хищник-жертва.