

Проект: Забавная горка

Цель: Применить изученные методы численного моделирования для решения уравнения Лагранжа 1-го рода для тела, движущегося по горке произвольной формы.

Формулировка задачи: смоделировать движение тела по поверхности произвольной формы (например, санок по снежной горке) в 2-х измерениях.

Входные данные: горка определенной формы, начальная скорость и координаты тела, скатывающегося по горке (или, наоборот, поднимающегося в гору).

Результат: программа для расчетов поставленной задачи; анимация движения тела; статья о проведенном исследовании.

Приблизительный алгоритм решения:

1. Задайте форму горки. Для простоты можно выбрать горку в виде двух пологих участков на разном уровне, соединенных между собой гладким образом какой-то кривой. Например,

$$y=0 \text{ при } 0 < x < \pi/2$$

$$y=5 \cdot \sin(x-\pi) + 5 \text{ при } \pi/2 < x < 3\pi/2$$

$$y=10 \text{ при } x > 3\pi/2$$

Здесь форма горки подобрана так, что кривой участок гладко соединяется с пологими (производные по x равны нулю в граничных точках). Это, конечно, не обязательно.

1. Запишите уравнения Лагранжа для движения тела по горке. Следует учесть, что уравнение связи меняется, поэтому на разных участках траектории уравнения будут разные. Для уравнений Лагранжа следует представить уравнение формы горки $y=f(x)$ как $F(x,y)=y-f(x)=0$ и вычислить частные производные по x и y функции $F(x,y)$.

2. Выразите неизвестные множители Лагранжа, используя стандартные приемы.
3. Решите дифференциальные уравнения движения при заданных начальных условиях.
4. Учтите, что на каких-то участках тело может отрываться от горки, тогда связь перестает “работать”, это можно учесть, введя оператор ветвления с условием, что если $y > f(x)$ (тело находится выше горки), то надо интегрировать уравнения без связи, т. е. обнуляя множитель λ . Если же тело падает на горку, то надо учесть изменение скорости тела при ударе о поверхность. В большинстве случаев удар можно считать неупругим, поэтому составляющая скорости, перпендикулярная к поверхности, становится равной нулю. Если поверхность негоризонтальная, то учесть это достаточно сложно. Надо вычислять направление нормали к поверхности (см. рис).