

Федеральное агентство по образованию

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

**НИЖЕГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. Р.Е. АЛЕКСЕЕВА**

В.И. Голубев, А.В. Назаров, Т.С. Рыжакова, Г.И. Шишков

ФИЗИКА

ЧАСТЬ 2

КОМПЛЕКС УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ

Рекомендовано Ученым советом Нижегородского государственного
технического университета им. Р.Е. Алексеева в качестве учебно-методического
пособия для студентов всех технических специальностей заочной и
дистанционной форм обучения

Нижний Новгород

2007

УДК 53.076

Голубев В.И., Назаров А.В., Рыжакова Т.С., Шишков Г.И. Физика. Ч 2: Комплекс учебно-методических материалов / В.И. Голубев, А.В. Назаров, Т.С. Рыжакова, Г.И. Шишков /Нижегород. гос. техн. ун.-т им. Р.Е. Алексеева. Н. Новгород, 2007.-58 с.

Изложен опорный конспект лекций, соответствующий рабочей программе по второй части курса физики, приведены описания лабораторных работ и примеры решения типовых задач. Рекомендуются для студентов всех технических специальностей заочной и дистанционной форм обучения.

Научный редактор Г.И. Шишков

Редактор Э.Б. Абросимова

Подп. к печ.12.12.07г. Формат 60х84¹/₁₆. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Печ.л. 3,6 . Уч.-изд. л. 3 . Тираж 500 экз. Заказ

Нижегородский государственный технический университет
им. Р.Е. Алексеева.

Типография НГТУ. 603950, Н.Новгород, ул. Минина, 24.

© Нижегородский государственный
технический университет
им. Р.Е. Алексеева, 2007

© Голубев В.И., Назаров А.В.,
Рыжакова Т.С., Шишков Г.И.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие.....	4
Глава 1. Электростатика.....	4
1.1. Электрическое поле.....	4
1.2. Теорема Остроградского - Гаусса.....	5
1.3. Циркуляция вектора напряженности электростатического поля. Потенциал электростатического поля.....	7
1.4. Связь между напряженностью и потенциалом	8
1.5. Электрический диполь. Поляризация диэлектриков.....	8
1.6. Электрическое смещение. Теорема Остроградского - Гаусса для поля вектора \vec{D} в диэлектрике. Условия на границе раздела двух диэлектрических сред.....	9
1.7. Проводники в электростатическом поле.....	10
1.8. Конденсаторы.....	11
Глава 2 Постоянный электрический ток.....	12
2.1. Электрический ток. Сила и плотность тока.....	12
2.2. Сторонние силы. Электродвижущая сила и напряжение.....	13
2.3. Закон Ома. Сопротивление проводников.....	13
2.4. Работа и мощность тока. Закон Джоуля - Ленца.....	14
2.5. Закон Ома для неоднородного участка цепи.....	14
2.6. Правила Кирхгофа для разветвленных цепей.....	15
Глава 3 Магнитное поле в вакууме.....	15
3.1. Магнитный момент. Магнитная индукция.....	15
3.2. Закон Ампера.....	16
3.3. Сила Лоренца.....	16
3.4. Напряженность магнитного поля. Закон Био - Савара - Лапласа.....	17
3.5. Закон полного тока для магнитного поля в вакууме. Теорема Гаусса для поля \vec{B}	18
Глава 4 Электромагнитная индукция.....	18
4.1. Основной закон электромагнитной индукции.....	18
4.2. Самоиндукция. Индуктивность.....	18
4.3. Взаимная индукция.....	19
Глава 5 Электрические колебания.....	20
5.1. Собственные незатухающие колебания.....	20
5.2. Собственные затухающие колебания. Вынужденные колебания.....	21
Лабораторная работа № 2-24. Экспериментальные исследования электростатических полей с помощью электролитической ванны.....	23
Лабораторная работа № 2-28. Экспериментальные исследования электромагнитной индукции.....	37
Лабораторная работа № 2-2. Изучение компенсационного метода измерения ЭДС.....	47
Библиографический список.....	58

Предисловие

Настоящий комплекс учебно-методических материалов содержит краткий теоретический материал по статическому электрическому полю, постоянному электрическому току, магнитному полю в вакууме, электромагнитной индукции и электрическим колебаниям.

По основным разделам второй части курса физики приведены описания трёх лабораторных работ (по электростатике, электромагнитной индукции, постоянному току). Студентам заочной формы обучения, как правило, предлагаются к выполнению две из них. В каждой работе детально рассматриваются физические процессы и методика выполнения эксперимента, в Приложении приведены подробные решения типовых задач.

За основу указанных лабораторных работ взяты работы, ранее составленные сотрудниками кафедры «Физика и техника оптической связи» НГТУ им. Р.Е. Алексеева.

Глава 1 Электростатика

1.1. Электрическое поле

Электрический заряд. Электрический заряд частицы является одной из основных её характеристик. Ему присущи следующие свойства:

- 1) в природе существует два типа электрических зарядов: положительные и отрицательные;
- 2) в любой электрически замкнутой системе алгебраическая сумма зарядов не изменяется;
- 3) величина электрического заряда не зависит от системы отсчета, а значит, не зависит от того, движется он или покоится.

Закон Кулона. Сила взаимодействия между двумя неподвижными точечными зарядами, находящимися в вакууме, пропорциональна зарядам q_1 и q_2 и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними:

$$\vec{F}_{12} = k \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \frac{\vec{r}_{12}}{r}, \quad (1.1)$$

где \vec{F}_{12} - сила, действующая на заряд q_1 со стороны заряда q_2 , k - коэффициент пропорциональности, в практической системе измерений СИ $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$;

$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$ - электрическая постоянная, \vec{r}_{12} - радиус вектор, соединяющий заряд q_2 с зарядом q_1 (рис. 1.1), $r = |\vec{r}_{12}|$.

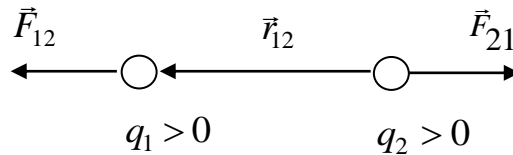


Рис. 1.1

Электрическое поле. Всякий электрический заряд q изменяет свойства окружающего его пространства – создает электрическое поле. Это поле проявляется в том, что помещенный в какую-либо его точку другой, пробный, заряд испытывает действие силы. Взаимодействие между зарядами осуществляется через поле.

Опыт показывает, что сила \vec{F} , действующая на неподвижный точечный пробный заряд q' , всегда может быть представлена как

$$\vec{F} = q'\vec{E}, \quad (1.2)$$

где векторную величину \vec{E} называют напряженностью электрического поля в данной точке пространства. Электрическое поле наглядно представляется с помощью силовых линий (линий вектора \vec{E}) – линий, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением вектора \vec{E} .

Как следует из формул (1.1) и (1.2), величина напряженности поля точечного заряда в вакууме на расстоянии r от него равна

$$E = k \frac{q}{r^2}. \quad (1.3)$$

Электрическое поле, образованное системой неподвижных электрических зарядов, называется электростатическим.

Единица напряженности – вольт на метр (В/м).

Принцип суперпозиции. Напряженность поля системы точечных неподвижных зарядов равна векторной сумме напряженностей полей, создаваемых в данной точке каждым из зарядов в отдельности:

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i. \quad (1.4)$$

1.2. Теорема Остроградского - Гаусса

Поток вектора \vec{E} . Число линий \vec{E} , пронизывающих элементарную площадку dS , нормаль \vec{n} к которой составляет угол α с вектором \vec{E} (рис. 1.2), определяется как $E dS \cos \alpha$. Эта величина называется потоком $d\Phi$ вектора \vec{E} через площадку dS . В компактной форме

$$d\Phi = E dS \cos \alpha = E_n dS = \vec{E} d\vec{S},$$

где E_n – проекция вектора \vec{E} на нормаль \vec{n} к площадке dS ; $d\vec{S} = dS \cdot \vec{n}$.

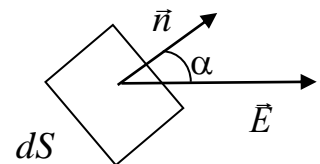


Рис. 1.2

Если имеется некоторая произвольная поверхность S , то поток вектора \vec{E} через неё

$$\Phi = \int_S \vec{E} d\vec{S}. \quad (1.5)$$

В случае замкнутой поверхности под \vec{n} понимают внешнюю нормаль.

Теорема Остроградского - Гаусса (далее просто теорема Гаусса). Поток вектора \vec{E} через произвольную замкнутую поверхность в вакууме равен алгебраической сумме заключенных внутри этой поверхности зарядов, деленной на ϵ_0 :

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i. \quad (1.6)$$

Теорема Гаусса применима для расчета напряженности электростатических полей, обладающих симметрией, например, сферической (или радиальной), плоскостной и др.

В общем случае источниками электростатического поля могут быть не только отдельно взятые точечные электрические заряды, но и заряды распределенные по объему пространства (объемные заряды) с объемной плотностью $\rho = \frac{q}{V}$, по какой-либо поверхности (поверхностные) с поверхностной плотностью $\sigma = \frac{q}{S}$ или вдоль тонкой нити (линейные) с линейной плотностью $\tau = \frac{q}{L}$.

Тогда теорему Гаусса можно записать в виде

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \left(\sum_i q_i + \int_V \rho dV + \int_S \sigma dS + \int_L \tau dl \right). \quad (1.7)$$

Воспользовавшись теоремой Гаусса, рассчитаем напряженность электростатического поля равномерно заряженного бесконечного цилиндра (нити).

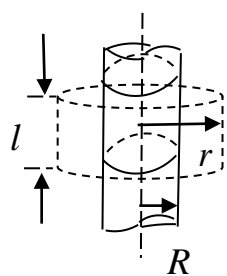


Рис. 1.3

Бесконечный цилиндр радиуса R (рис. 1.3) заряжен равномерно с линейной плотностью τ . Из соображений симметрии следует, что поле имеет радиальный характер. Следовательно, в качестве замкнутой поверхности надо взять коаксиальный цилиндр радиуса r и длиной l (рис. 1.3). Тогда поток вектора \vec{E} через торцы этого цилиндра равен нулю, а через боковую поверхность равен $E \cdot 2\pi r l$. По теореме Гаусса (1.6) вне цилиндра ($r \geq R$) $2\pi r l E = \tau \frac{l}{\epsilon_0}$, откуда

$$E_{\text{внеш}} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\tau}{r}. \quad (1.8)$$

Внутри цилиндра ($r < R$) напряженность $E_{\text{внутр}} = 0$, так как внутри цилиндра заряды отсутствуют.

1.3. Циркуляция вектора напряженности электростатического поля. Потенциал электростатического поля

Электростатическое поле является потенциальным. Тогда работа сил этого поля по переносу единичного положительного заряда на замкнутом участке пути равна нулю, т.е.

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0. \quad (1.9)$$

Иными словами, циркуляция вектора \vec{E} в электростатическом поле равна нулю. Это выражение называется теоремой о циркуляции вектора \vec{E} .

Электростатическое поле обладает двумя характеристиками: силовой, которой является векторная величина \vec{E} – напряженность поля, и энергетической, которой является скалярная величина φ – потенциал поля.

Потенциал – это физическая величина, численно равная потенциальной энергии, которой обладал бы в данной точке поля единичный положительный заряд:

$$\varphi = \frac{W}{q}. \quad (1.10)$$

При этом имеется в виду, что потенциал на бесконечности равен нулю.

Потенциал поля точечного заряда q в вакууме определяется следующим образом:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}, \quad (1.11)$$

где r – расстояние от заряда до рассматриваемой точки поля.

Для потенциала справедлив принцип суперпозиции, согласно которому потенциал поля системы зарядов равен алгебраической сумме потенциалов полей всех этих зарядов:

$$\varphi = \sum_i \varphi_i. \quad (1.12)$$

Разность потенциалов двух точек 1 и 2 поля определяется формулой

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l}. \quad (1.13)$$

Разность потенциалов $(\varphi_1 - \varphi_2)$ можно определить как работу сил электростатического поля по переносу единичного положительного заряда из точки 1 в точку 2 поля. Элементарная работа dA по переносу заряда q на расстояние $d\vec{l}$ равна $dA = q\vec{E}d\vec{l}$, где $q\vec{E}$ – сила, с которой поле действует на заряд q . Положим, что величина заряда q равна единице. Тогда $dA = \vec{E}d\vec{l}$. Консервативные силы совершают работу за счет убыли потенциальной энергии, тогда

$$\vec{E}d\vec{l} = -d\varphi. \quad (1.14)$$

Единица потенциала – вольт (В). Можно сказать, что 1В есть потенциал такой точки поля, в которой заряд в 1Кл обладает потенциальной энергией 1Дж (1В=1Дж/1Кл).

1.4. Связь между напряженностью и потенциалом

Соотношение

$$\vec{E} = -grad\varphi, \quad (1.15)$$

устанавливает связь между напряженностью \vec{E} и потенциалом φ электростатического поля: вектор \vec{E} равен с обратным знаком градиенту потенциала. В декартовой системе координат выражение (1.15) записывается в виде

$$\vec{E} = -\left(\vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right), \quad (1.16)$$

где $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ - частные производные функции φ по соответствующим координатам. В одномерном случае, когда потенциал зависит только от одной пространственной координаты, например, координаты x , $\vec{E} = -\vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x}$. Зная распределение потенциала по координате x , можно найти напряженность поля \vec{E} .

1.5. Электрический диполь. Поляризация диэлектриков

Электрическим диполем называют систему, состоящую из двух равных, но противоположных по знаку точечных электрических зарядов, расположенных на расстоянии l друг от друга (рис. 1.4). Основной характеристикой диполя является его дипольный момент:

$$\vec{p} = |q| \cdot l. \quad (1.17)$$

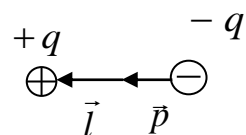


Рис. 1.4

Диэлектриками называют вещества, практически не проводящие электрический ток.

Диэлектрик состоит из атомов и молекул. При внесении любого вещества в электрическое поле происходит смещение положительных и отрицательных зарядов (ядер и электронов), что, в свою очередь, приводит к частичному разделению этих зарядов. Молекулы приобретают дипольные моменты.

Таким образом, внесение диэлектрика во внешнее электрическое поле \vec{E}_0 приводит к возникновению отличного от нуля результирующего дипольного момента диэлектрика – происходит поляризация диэлектрика.

Для количественного описания поляризации диэлектрика пользуются векторной величиной – поляризованностью, определяемой как дипольный момент единицы объема диэлектрика:

$$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i / V, \quad (1.18)$$

где \vec{p}_i - дипольный момент одной молекулы. Единицей поляризованности является кулон на метр в квадрате (Кл/м²).

Из опыта следует, что для большинства диэлектриков поляризованность \vec{P} линейно зависит от напряженности поля внутри диэлектрика \vec{E} :

$$\vec{P} = \chi \varepsilon_0 \vec{E}, \quad (1.19)$$

где χ – диэлектрическая восприимчивость вещества; χ – величина безразмерная.

При поляризации диэлектрика на одной его поверхности (грани) появляются положительные заряды, а на другой – отрицательные. Эти электрические заряды называют связанными, так как они принадлежат молекулам диэлектрика и не могут перемещаться в отрыве от молекул.

Появление связанных зарядов приводит к возникновению дополнительного поля \vec{E}' , которое направлено против внешнего поля \vec{E}_0 и ослабляет его. Результирующее поле внутри диэлектрика

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'. \quad (1.20)$$

Величина суммарного поля в диэлектрике

$$E = E_0 / \varepsilon, \quad (1.21)$$

где безразмерная величина

$$\varepsilon = 1 + \chi \quad (1.22)$$

называется диэлектрической проницаемостью среды.

1.6. Электрическое смещение. Теорема Остроградского - Гаусса для поля вектора \vec{D} в диэлектрике. Условия на границе раздела двух диэлектрических сред

При решении задач, связанных с расчетом электрического поля в диэлектрике, в ряде случаев оказывается удобным учитывать только поле свободных (сторонних) зарядов. Для этого вводится вспомогательный вектор электрического смещения:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}. \quad (1.23)$$

Используя формулы (1.19), (1.22) и (1.23), вектор электрического смещения можно записать в виде

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}. \quad (1.24)$$

Единица электрического смещения – кулон на метр в квадрате (Кл/м²).

Поток вектора смещения электростатического поля в диэлектрике через произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме заключенных внутри этой поверхности свободных электрических зарядов:

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \sum_i q_i. \quad (1.25)$$

Это выражение называется теоремой Гаусса для поля вектора \vec{D} . Используя

теорему Гаусса для вектора \vec{D} (1.25), можно показать, что на границе раздела двух однородных диэлектриков с диэлектрическими проницаемостями ε_1 и ε_2 (рис. 1.5) при отсутствии на этой границе свободных (сторонних) зарядов нормальные компоненты вектора \vec{D} непрерывны, т.е.

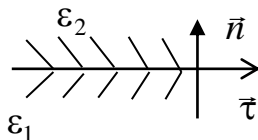


Рис. 1.5

$$D_{1n} = D_{2n}. \quad (1.26)$$

С помощью теоремы о циркуляции вектора \vec{E} (1.9) доказывается, что тангенциальные компоненты вектора \vec{E} также непрерывны, т.е.

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}. \quad (1.27)$$

В (1.26) и (1.27) D_{1n} и D_{2n} – проекции вектора \vec{D} на нормаль к границе раздела двух диэлектриков, $E_{1\tau}$ и $E_{2\tau}$ – проекции вектора \vec{E} на направление касательной к границе раздела сред.

1.7. Проводники в электростатическом поле

Если проводник поместить в электростатическое поле, то в нем произойдет перераспределение свободных электронов. Перемещение зарядов будет продолжаться до тех пор, пока не установится равновесное распределение зарядов, при котором электростатическое поле внутри проводника обращается в нуль.

Силовые линии электростатического поля перпендикулярны к поверхностям одинакового потенциала (эквипотенциальным поверхностям). Рассмотрим в качестве эквипотенциальной поверхности металлическую поверхность (рис. 1.6), находящуюся во внешнем электростатическом поле.

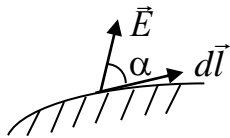


Рис. 1.6

Элементарная работа поля \vec{E} по перемещению единичного положительного заряда, находящегося на поверхности на расстояние $d\vec{l}$, определяется формулой

(1.14):

$$\vec{E}d\vec{l} = -d\phi,$$

где $d\phi = 0$, так как на поверхности металла потенциал имеет одну и ту же величину. Тогда и скалярное произведение двух векторных величин \vec{E} и $d\vec{l}$ равно нулю. Отсюда следует, что косинус угла α между ними равен нулю. Это означает, что $\alpha = 90^\circ$.

Электростатическая защита. Если проводнику сообщить некоторый заряд, то нескомпенсированные заряды располагаются только на поверхности проводника. Поэтому удаление внутренней части металлического проводника не должно повлиять на размещение зарядов на его поверхности. На рис. 1.7 изображены одинаковые по форме сплошной (а) и полый (б) проводники, находящиеся в одинаковых электрических полях.

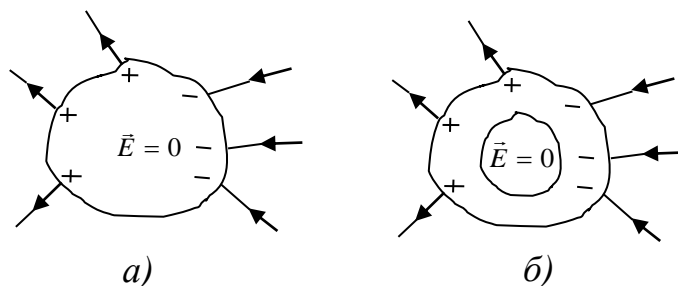


Рис. 1.7

Из рис. 1.7 следует, что проводник экранирует внутреннее пространство от внешних электростатических полей. Эту особенность проводников используют при электростатической защите.

1.8. Конденсаторы

Устройства, обладающие способностью при малых размерах и небольших потенциалах накапливать значительные по величине заряды, получили название конденсаторов.

Конденсатор состоит из двух проводников (обкладок) разделенных диэлектриком.

Под емкостью C конденсатора понимается физическая величина, равная отношению заряда q , накопленного в конденсаторе, к разности потенциалов $(\varphi_1 - \varphi_2)$ между его обкладками:

$$C = q / (\varphi_1 - \varphi_2). \quad (1.28)$$

Единицей емкости служит фарад (Ф) – $1\text{Ф} = 1\text{Кл}/1\text{В}$.

На практике применяют более мелкие единицы емкости: 1 микрофарад (мкФ) = 10^{-6}Ф и пикофарад (пФ) = 10^{-12}Ф .

Для того чтобы, располагая определенными конденсаторами, получить желаемую емкость при нужном рабочем напряжении, конденсаторы соединяют в батареи (рис. 1.8).

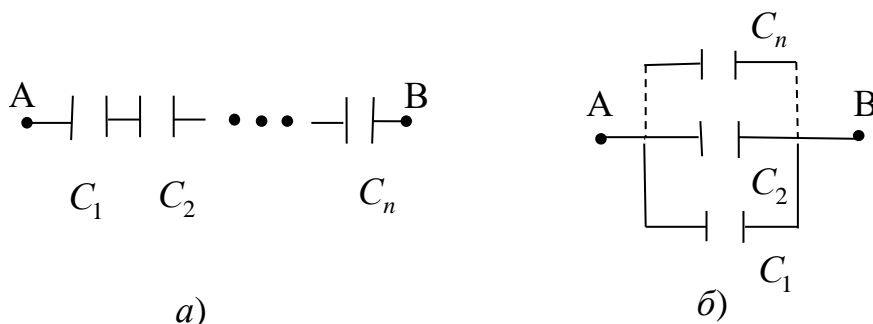


Рис. 1.8

На рис. 1.8, а изображено последовательное соединение конденсаторов.

В этом случае заряды всех конденсаторов одинаковы, напряжение на батарее равно сумме напряжений на отдельных конденсаторах, т.е.

$$U = \sum_i U_i = q \sum_i \left(\frac{1}{C_i} \right),$$

откуда

$$\frac{1}{C} = \sum_i \left(\frac{1}{C_i} \right), \quad (1.29)$$

Таким образом, при последовательном соединении конденсаторов суммируются величины обратные емкостям.

На рис. 1.8, б показано параллельное соединение конденсаторов.

В этом случае суммарный заряд батареи равен

$$q = \sum_i q_i = U \sum_i C_i,$$

и поэтому емкость батареи

$$C = q/U = \sum_i C_i, \quad (1.30)$$

т.е. при параллельном соединении конденсаторов полная емкость батареи равна сумме емкостей отдельных конденсаторов.

Как всякий заряженный проводник, конденсатор обладает энергией

$$W = CU^2/2 = q^2/2C = qU/2. \quad (1.31)$$

Электрическая энергия конденсатора, выраженная через напряженность поля конденсатора, определяется формулой

$$W = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} V, \quad (1.32)$$

где V - объем конденсатора; ε - диэлектрическая проницаемость среды, заполняющей пространство между обкладками.

Глава 2

Постоянный электрический ток

2.1. Электрический ток. Сила и плотность тока

Электрический ток – любое упорядоченное движение электрических зарядов.

Количественной мерой электрического тока служит сила тока I - скалярная физическая величина, определяемая электрическим зарядом, проходящим через поперечное сечение однородного проводника в единицу времени:

$$I = \frac{dq}{dt}. \quad (2.1)$$

Ток, сила и направление которого не изменяются со временем, называется постоянным. Для постоянного тока

$$I = q/t. \quad (2.2)$$

Единица силы тока – ампер (A). Физическая величина, определяемая силой тока, проходящего через единицу площади поперечного сечения проводника, перпендикулярного направлению тока, называется плотностью тока:

$$j = \frac{dI}{dS}. \quad (2.3)$$

Сила тока через произвольную поверхность S определяется как поток вектора \vec{j} , т.е.

$$I = \int_S \vec{j} d\vec{S}, \quad (2.4)$$

где \vec{j} – плотность тока – вектор, ориентированный по направлению тока; $d\vec{S} = dS\vec{n}$; \vec{n} – единичный вектор нормали к площадке dS .

2.2. Сторонние силы. Электродвижущая сила и напряжение

Для того, чтобы постоянный ток протекал по проводнику, необходимо на его концах поддерживать разность потенциалов. Это осуществляется источником тока. Силы неэлектростатического происхождения, действующие на заряды со стороны источника тока, называются сторонними. Под действием создаваемого поля сторонних сил электрические заряды движутся внутри источника тока против сил электростатического поля, благодаря чему на концах цепи поддерживается разность потенциалов и в цепи течет постоянный ток.

Сторонние силы могут быть обусловлены химическими процессами, электрическими (но не электростатическими) полями, порождаемыми меняющимися во времени магнитными полями, и т.д.

Электродвижущей силой (ЭДС) источника тока называют величину ε , равную отношению работы сторонних сил при перемещении положительного заряда по всей цепи к заряду:

$$\varepsilon = A/q. \quad (2.5)$$

Сторонняя сила, отнесенная к единичному положительному заряду, равна напряженности поля сторонних сил:

$$\vec{E}_{\text{ст}} = \vec{F}_{\text{ст}}/q. \quad (2.6)$$

Величина ЭДС, действующей на участке цепи 1-2, определяется как

$$\varepsilon_{12} = \int_1^2 \vec{E}_{\text{ст}} d\vec{l}. \quad (2.7)$$

Участок цепи, на котором не действуют сторонние силы, называется однородным. Участок, на котором на носители тока действуют сторонние силы, называется неоднородным.

Величина, численно равная работе, совершаемой электростатическими и сторонними силами при перемещении единичного положительного заряда из точки 1 цепи в точку 2, называется напряжением на данном участке цепи:

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_{12}. \quad (2.8)$$

Для однородного участка цепи

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2, \quad (2.9)$$

т.е. для однородного проводника напряжение совпадает с разностью потенциалов $(\varphi_1 - \varphi_2)$.

2.3. Закон Ома. Сопротивление проводников

Сила тока I , текущего по однородному металлическому проводнику, пропорциональна напряжению U на концах проводника:

$$I = U/R, \quad (2.10)$$

где R – электрическое сопротивление проводника. Уравнение (2.10) выражает закон Ома для участка цепи, не содержащего источника ЭДС.

Единица сопротивления – Ом.

Для однородного цилиндрического проводника сопротивление R прямо пропорционально его длине l и обратно пропорционально площади его поперечного сечения S :

$$R = \rho \frac{l}{S}, \quad (2.11)$$

где ρ – коэффициент пропорциональности, характеризующий электрическую проводимость материала проводника. Он называется удельным электрическим сопротивлением. Единица удельного сопротивления – ом-метр (Ом·м).

2.4. Работа и мощность тока. Закон Джоуля - Ленца

Через каждое сечение участка цепи постоянного тока, к концам которого приложено напряжение U , за время t проходит заряд $q = It$. Это равносильно тому, что заряд It переносится за время t из одного конца проводника в другой. При этом силы электростатического поля и сторонние силы, действующие на данном участке цепи, совершают работу

$$A = qU = IUt. \quad (2.12)$$

Мощность, развиваемая указанными силами, определяется как

$$P = \frac{A}{t}.$$

Тогда

$$P = IU = I^2 R = U^2 / R. \quad (2.13)$$

Если проводник неподвижен и в нем не совершаются химические превращения, то работа тока затрачивается на увеличение внутренней энергии проводника. В этом случае в проводнике выделяется тепло

$$Q = A = IUt,$$

или

$$Q = RI^2 t. \quad (2.14)$$

Это соотношение называется законом Джоуля - Ленца. Закон Джоуля - Ленца был установлен авторами экспериментально.

2.5. Закон Ома для неоднородного участка цепи

Работа электростатических и сторонних сил, совершаемая при перемещении заряда q на участке цепи 1-2 за время t , определяется в соответствии с (2.12) как

$$A_{12} = qU_{12},$$

где $U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_{12}$.

$$A_{12} = q(\varphi_1 - \varphi_2) + q\varepsilon_{12}. \quad (2.15)$$

Полагаем, что за указанное время в проводнике выделяется теплота

$$Q = RI^2t = qIR, \quad (2.16)$$

на которую затрачивается вся работа сил, действующих в проводнике. Тогда $A_{12} = Q$, откуда получаем выражение для тока I в цепи:

$$I = \frac{\Phi_1 - \Phi_2 + \varepsilon_{12}}{R}. \quad (2.17)$$

Соотношение (2.17) выражает закон Ома для неоднородного участка цепи.

Для замкнутой цепи $\Phi_1 = \Phi_2$. Тогда ток I в цепи

$$I = \frac{\varepsilon}{R}, \quad (2.18)$$

где ε - алгебраическая сумма отдельных ЭДС, действующих в данной цепи.

2.6. Правила Кирхгофа для разветвленных цепей

Закон Ома в форме (2.17) записан для участка цепи. На практике часто возникает потребность расчета токов для разветвленной цепи.

Узлом цепи называется точка, в которой сходится не менее трех проводников с током.

Первое правило Кирхгофа формулируется применительно к узлам: алгебраическая сумма токов для каждого узла равна нулю:

$$\sum_i I_i = 0. \quad (2.19)$$

Принято считать $I_i > 0$, если ток направлен от узла, и $I_i < 0$, если ток направлен к узлу.

Второе правило Кирхгофа применяют к контурам: алгебраическая сумма ЭДС в контуре равна сумме падений напряжений на всех участках этого контура:

$$\sum_k \varepsilon_k = \sum_i I_i R_i. \quad (2.20)$$

Ток и величина $I_i R_i > 0$, если направление тока совпадает с выбранным направлением обхода контура. $\varepsilon_k > 0$, если ЭДС повышает потенциал в направлении обхода контура.

Глава 3 Магнитное поле в вакууме

3.1. Магнитный момент. Магнитная индукция

Опыт показывает, что на пробную рамку (контур) с током в магнитном поле действует момент сил \vec{M} , зависящий от ряда факторов, в том числе и от ориентации рамки.

Максимальное значение M_{\max} момента сил зависит от магнитного поля, в котором находится контур, от силы тока в контуре и площади S , охватываемой контуром, т.е.

$$M_{\max} \sim IS. \quad (3.1)$$

Величину

$$\vec{p}_m = IS\vec{n}, \quad (3.2)$$

называют вектором магнитного момента контура с током, где \vec{n} - единичный вектор нормали к поверхности контура.

Единица магнитного момента – ампер-квадратный метр ($A \cdot m^2$).

Зависимость (3.1) используют для введения силовой характеристики магнитного поля – магнитной индукции \vec{B} .

Магнитная индукция в некоторой точке поля равна отношению максимального момента сил, действующих на рамку с током, помещенную в эту точку, к магнитному моменту этой рамки:

$$B = \frac{M_{\max}}{p_m}. \quad (3.3)$$

Единицей магнитной индукции является тесла ($1 \text{ Тл} = 1 \text{ Н} / (A \cdot m)$).

Магнитное поле графически изображают с помощью линий магнитной индукции, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением вектора \vec{B} . Линии вектора \vec{B} являются замкнутыми. Подобные поля называют вихревыми.

3.2. Закон Ампера

Одним из главных проявлений магнитного поля является его силовое действие на движущиеся электрические заряды и токи.

Ампер установил, что сила $d\vec{F}$, с которой магнитное поле действует на элемент проводника $d\vec{l}$ с током, находящимся в магнитном поле, прямо пропорциональна силе тока I в проводнике и векторному произведению элемента проводника $d\vec{l}$ на магнитную индукцию \vec{B} :

$$d\vec{F} = I[d\vec{l}, \vec{B}]. \quad (3.4)$$

Здесь $d\vec{l}$ - вектор, по модулю равный длине dl элемента проводника и совпадающий по направлению с током.

3.3. Сила Лоренца

Опыт показывает, что магнитное поле действует и на отдельные заряды, движущиеся в магнитном поле, с силой, называемой силой Лоренца, которая выражается формулой

$$\vec{F} = q[\vec{v}, \vec{B}], \quad (3.5)$$

где \vec{B} - индукция магнитного поля, в котором движется заряд q со скоростью \vec{v} .

Если заряженная частица движется в магнитном поле со скоростью \vec{v} , перпендикулярной вектору \vec{B} , то её траекторией является окружность.

Если скорость \vec{v} заряженной частицы направлена под углом α к вектору \vec{B} , то она будет двигаться по спирали, ось которой параллельна магнитному полю.

3.4. Напряженность магнитного поля. Закон Био - Савара - Лапласа

Если все пространство заполнено изотропным веществом с магнитной проницаемостью μ_1 , то в точке A (рис. 3.1) магнитная индукция будет \vec{B}_1 . При заполнении всего пространства другим веществом с магнитной проницаемостью μ_2 магнитная индукция в точке A станет \vec{B}_2 . Продолжая этот опыт, можно убедиться, что

$$\frac{\vec{B}_1}{\mu_1} = \frac{\vec{B}_2}{\mu_2} = \dots = \frac{\vec{B}}{\mu}. \quad (3.6)$$

Величину

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu\mu_0} \quad (3.7)$$

называют напряженностью магнитного поля. В (3.7) μ_0 - магнитная постоянная, $\mu_0 = 1,257 \cdot 10^{-6} \text{ Гн/м}$ (генри на метр).

Для проводника с током I , элемент которого $d\vec{l}$ создает в некоторой точке A (рис. 3.1) магнитное поле, напряженность $d\vec{H}$ записывается в виде

$$d\vec{H} = \frac{I}{4\pi} \frac{[d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3}, \quad (3.8)$$

где $d\vec{l}$ - вектор, по модулю равный длине dl элемента проводника и совпадающий по направлению с током, \vec{r} - радиус-вектор, проведенный из элемента $d\vec{l}$ в точку A .

Формула (3.8) есть закон Био - Савара - Лапласа для вектора \vec{H} .

В вакууме для вектора \vec{B} этот закон записывается в виде

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{[d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3}. \quad (3.9)$$

Для магнитного поля, как и для электрического, справедлив принцип суперпозиции:

$$\vec{B} = \sum_i \vec{B}_i. \quad (3.10)$$

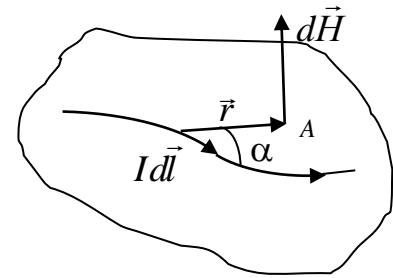


Рис. 3.1

3.5. Закон полного тока для магнитного поля в вакууме. Теорема Гаусса для поля \vec{B}

Циркуляция вектора \vec{B} по произвольному замкнутому контуру равна произведению магнитной постоянной μ_0 на алгебраическую сумму токов, охватываемых этим контуром:

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum_k I_k. \quad (3.11)$$

Ток I_k считается положительным, если его направление связано с направлением обхода по контуру правилом правого винта.

Потоком вектора магнитной индукции через площадку $d\vec{S}$ называется скалярная физическая величина, равная

$$d\Phi = \vec{B} d\vec{S}, \quad (3.12)$$

где $d\vec{S} = dS \cdot \vec{n}$ - вектор, модуль которого равен dS , а направление совпадает с направлением нормали \vec{n} к площадке.

Теорема Гаусса для поля \vec{B} определяет, что поток вектора магнитной индукции через любую замкнутую поверхность равен нулю:

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0. \quad (3.13)$$

Это означает, что линии вектора \vec{B} являются замкнутыми.

Глава 4 Электромагнитная индукция

4.1. Основной закон электромагнитной индукции

При всяком изменении магнитного потока, пронизывающего контур, в нем возникает ЭДС электромагнитной индукции.

$$\varepsilon_i = - \frac{d\Phi}{dt}, \quad (4.1)$$

где $\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S}$ - магнитный поток.

Используя закон Ома для полной цепи и основной закон электромагнитной индукции (4.1), можно получить выражение для индукционного тока:

$$I_i = \frac{\varepsilon_i}{R} = - \frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt}. \quad (4.2)$$

4.2. Самоиндукция. Индуктивность

Возникновение ЭДС индукции в проводящем контуре при изменении в нем силы тока называют самоиндукцией.

При отсутствии вблизи контура с током ферромагнетиков полный магнитный поток Φ через контур пропорционален силе тока I :

$$\Phi = LI, \quad (4.3)$$

где L - коэффициент, называемый индуктивностью контура. Индуктивность L зависит от размеров и формы контура, а также от магнитных свойств окружающей среды. Единицей индуктивности является генри (Гн).

При изменении магнитного потока в контуре возникает ЭДС самоиндукции ε_S :

$$\varepsilon_S = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(LI).$$

Если при этом индуктивность L не изменяется, то:

$$\varepsilon_S = -L \frac{dI}{dt}. \quad (4.4)$$

4.3. Взаимная индукция

Возникновение ЭДС в одном контуре при изменении силы тока, протекающего по другому контуру, называют взаимной индукцией.

Рассмотрим два неподвижных друг относительно друга контура (рис.4.1), по одному из которых течет ток I_1 , создающий магнитное поле \vec{B}_1 . Согласно (3.9), $B_1 \sim I_1$, поэтому магнитный поток, созданный током I_1 и пронизывающий контур 2, $\Phi_{21} \sim I_1$. Тогда можно записать:

$$\Phi_{21} = L_{21}I_1, \quad (4.5)$$

где L_{21} - взаимная индуктивность - коэффициент пропорциональности, зависящий от размеров обоих контуров, их взаимного расположения и магнитной проницаемости окружающей среды.

Задав ток I_2 в контуре 2 и проведя аналогичные рассуждения для потока Φ_{12} , созданного током I_2 и пронизывающего контур 1, запишем:

$$\Phi_{12} = L_{12}I_2. \quad (4.6)$$

Коэффициенты пропорциональности L_{12} и L_{21} равны между собой ($L_{12} = L_{21}$) и называются взаимной индуктивностью контуров. Единицей измерения для них так же, как и для индуктивности, является генри (Гн).

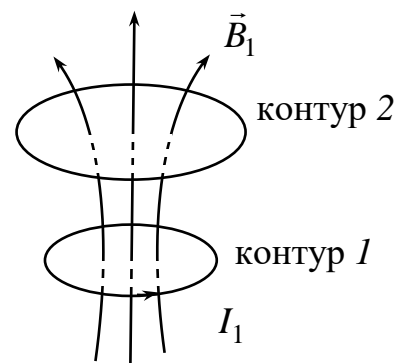


Рис. 4.1

Глава 5 Электрические колебания

5.1. Собственные незатухающие колебания

В цепи (рис. 5.1), содержащей катушку индуктивности L , конденсатор емкости C и сопротивление R , могут возникнуть электрические колебания. Такая цепь называется колебательным контуром.

Пусть вначале нижняя обкладка конденсатора заряжена положительно, а верхняя – отрицательно. При этом вся энергия сосредоточена в конденсаторе. Замкнем ключ K . Конденсатор начнет разряжаться, через катушку и сопротивление потечет ток I . Электрическая энергия конденсатора начнет превращаться в магнитную энергию катушки и джоулево тепло в сопротивлении.

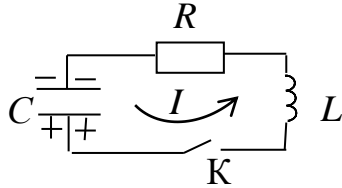


Рис. 5.1

Для мгновенных значений тока, которые оказываются практически одинаковыми на всех участках цепи (такой ток называют квазистационарным), запишем закон Ома:

$$IR = U_c + \varepsilon_s, \quad (5.1)$$

где $U_c = \frac{q}{C}$, $\varepsilon_s = -L \frac{dI}{dt}$, $I = \frac{dq}{dt}$.

При выбранном, как показано на рис. 5.1, направлении обхода цепи, ток $I > 0$.

После преобразований получаем уравнение:

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = 0, \quad (5.2)$$

или

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = 0. \quad (5.3)$$

Это есть уравнение колебательного контура – линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка. Уравнение колебательного контура можно записать в ином виде:

$$\ddot{q} + 2\delta \dot{q} + \omega_0^2 q = 0, \quad (5.4)$$

где введены обозначения:

$$2\delta = R/L, \quad \omega_0^2 = 1/LC. \quad (5.5)$$

Величина ω_0 называется собственной частотой свободных колебаний контура, δ – коэффициентом затухания. При отсутствии в контуре потерь на джоулево тепло и на излучение ($R=0$) колебания будут незатухающими, при наличии потерь ($R \neq 0$) – затухающими.

В отсутствие потерь уравнение (5.4) принимает вид

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0. \quad (5.6)$$

Решением этого уравнения является функция:

$$q = q_0 \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad (5.7)$$

где q_0 - амплитудное значение заряда на обкладках конденсатора; ω_0 - собственная частота контура; φ - начальная фаза. Значение ω_0 определяется только параметрами самого контура. Значения q_0 и φ определяются начальными условиями, например, значениями заряда q и тока $I = \dot{q}$ в момент $t = 0$.

Период свободных незатухающих колебаний определяется по формуле

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}. \quad (5.8)$$

5.2. Собственные затухающие колебания. Вынужденные колебания

В реальном контуре свободные колебания всегда являются затухающими и описываются уравнением (5.4). При достаточно малых потерях ($\delta < \omega_0$) решение этого уравнения имеет вид

$$q = q_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi), \quad (5.9)$$

где ω - частота затухающих колебаний:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}. \quad (5.10)$$

Функция (5.9) определяет затухающие колебания. Множитель $q_0 e^{-\delta t}$ в (5.9) называется амплитудой затухающих колебаний.

Величина $T = 2\pi/\omega$ называется периодом затухающих колебаний:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} = \frac{2\pi\sqrt{LC}}{\sqrt{1 - \left(\delta/\omega_0\right)^2}} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \left(\delta/\omega_0\right)^2}}, \quad (5.11)$$

где T_0 - период свободных незатухающих колебаний.

График функции (5.9) показан на рис. 5.2.

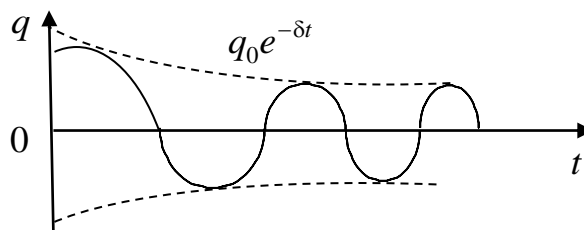


Рис. 5.2

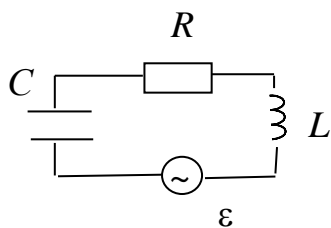


Рис. 5.3

Для поддержания в контуре незатухающих колебаний необходимо скомпенсировать потери энергии. Компенсация возможна с помощью периодически действующей внешней силы (рис. 5.3), изменяющейся по периодическому закону:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \cos \omega t. \quad (5.12)$$

В этом случае уравнение (5.2) принимает вид

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = \varepsilon_0 \cos \omega t, \quad (5.13)$$

или

$$\ddot{q} + 2\delta \dot{q} + \omega_0^2 q = \left(\varepsilon_0 / L \right) \cos \omega t. \quad (5.14)$$

Колебания, совершающиеся при воздействии внешней периодической силы, называются вынужденными. Они описываются линейными неоднородными дифференциальными уравнениями второго порядка.

Подробно вынужденные электрические колебания рассматриваются в соответствующих разделах курса «Радиотехника».

Лабораторная работа № 2-24

Экспериментальные исследования электростатических полей с помощью электролитической ванны

Введение

При конструировании электровакуумных приборов, электронных ламп, ускорителей заряженных частиц, при расчете характеристик волноводов и т.д. требуется знать распределение электрического поля в пространстве, заключенном между электродами различной формы. Аналитический расчет поля удастся выполнить для весьма ограниченного набора конфигураций и взаимного расположения электродов. Сложные электростатические поля исследуются экспериментально, в частности, с помощью электролитической ванны.

Цель работы – изучение метода моделирования электростатических полей в электролитической ванне и исследование их характеристик в пространстве между электродами различной формы.

1. Теоретическая часть

Электростатическое поле – это поле, создаваемое покоящимися электрическими зарядами. Силовой характеристикой поля является напряженность \vec{E} , которая равна отношению силы \vec{F} , действующей со стороны электрического поля на точечный пробный заряд, помещенный в рассматриваемую точку поля, к величине $q_{пр}$ этого заряда:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_{пр}}. \quad (1.1)$$

Пробный заряд должен быть столь малым, чтобы его внесение не искажало исследуемое с его помощью поле.

Энергетической характеристикой электростатического поля служит его потенциал φ , численно равный работе, которую совершают силы поля над единичным положительным зарядом при удалении его из данной точки на бесконечность:

$$\varphi = \frac{A_{эл.}}{q}. \quad (1.2)$$

Напряженность и потенциал связаны друг с другом соотношением:

$$\vec{E} = -grad\varphi = -\nabla\varphi, \quad (1.3)$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 E_l dl, \quad (1.4)$$

где φ_1 , φ_2 – потенциалы в точках 1 и 2, $d\vec{l}$ – вектор элементарного перемещения в электростатическом поле, E_l – проекция вектора напряженности на $d\vec{l}$. В декартовых координатах для \vec{E} имеем:

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}\right), \quad (1.5)$$

где \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} – единичные орты в направлениях x , y , z соответственно.

Удобной моделью электрического поля является его изображение в виде силовых и эквипотенциальных линий. Силовые линии – это кривые, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением вектора \vec{E} . Силовые линии начинаются на положительных зарядах (источники), а заканчиваются на отрицательных (стоки). В такой модели величина напряженности \vec{E} пропорциональна густоте силовых линий (числу линий, пронизывающих единицу площади поверхности, перпендикулярной к ним). Поэтому там, где силовые линии идут гуще, напряженность поля $|\vec{E}|$ – больше. Картину силовых линий удобно дополнить картиной эквипотенциальных поверхностей – поверхностей равного потенциала. Пересекаясь с плоскостью чертежа, эквипотенциальные поверхности дают эквипотенциальные линии (рис.1).

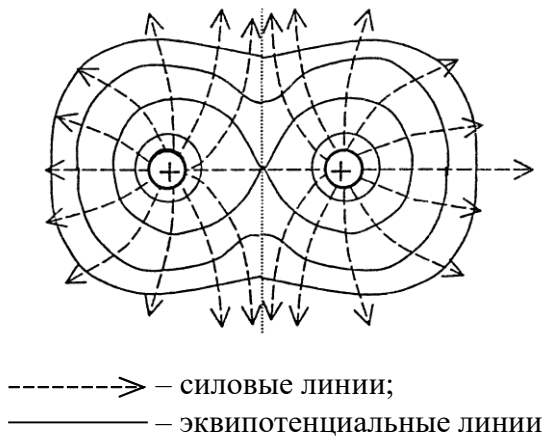


Рис.1

Линии напряженности перпендикулярны эквипотенциальным поверхностям (линиям), в том числе и поверхностям проводников в электростатическом поле, так как последние являются эквипотенциальными объемами. Тогда вектор средней напряженности $\langle\vec{E}\rangle$ между двумя эквипотенциальными поверхностями (линиями) с разностью потенциалов $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ направлен вдоль линии, соответствующей кратчайшему расстоянию между ними $\Delta\vec{l}$ от большего потенциала к меньшему – вдоль направления наибольшего изменения потенциала (навстречу $grad\varphi$). Согласно (1.5) для модуля средней напряженности поля $\langle E \rangle$ имеем:

$$\langle E \rangle = \left| \frac{\Delta\varphi}{\Delta l} \right|. \quad (1.6)$$

Ведем понятие потока напряженности через поверхность S :

$$N = \int_S E_n ds, \quad (1.7)$$

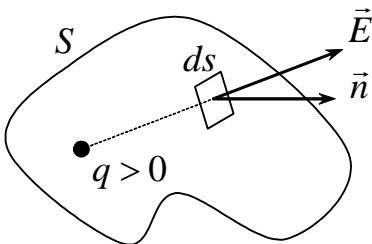


Рис.2

где E_n – проекция вектора напряженности на нормаль к элементу поверхности ds (рис.2). Графический смысл потока – число силовых линий, пронизывающих поверхность S .

Для расчета электростатических полей в вакууме применяется теорема Остроградского – Гаусса. Она гласит, что поток вектора напряженности элек-

трического поля через произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме заключенных внутри этой поверхности зарядов, деленной на ϵ_0 :

$$\oint_S \vec{E}_n ds = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^{\infty} q_i, \quad (1.8)$$

где $\sum_{i=1}^{\infty} q_i$ – сумма зарядов, находящихся внутри замкнутой поверхности S ;

$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м – электрическая постоянная. В (1.8) под \vec{n} понимается внешняя нормаль к поверхности.

Использование теоремы особенно удобно в случае полей обладающих заранее известной симметрией, обусловленной симметрией в конфигурации зарядов – источников рассматриваемого поля. При этом удастся так выбрать поверхность интегрирования, что поток напряженности сквозь нее можно выразить через искомую напряженность поля, что существенно упрощает вычисления. Используя теорему Остроградского – Гаусса (1.8) и формулу (1.4), можно получить значения напряженности и потенциала полей, созданных следующими заряженными телами:

1. Поле равномерно заряженной бесконечной плоскости:

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}, \quad (1.9)$$

где $\sigma = q/S$ – поверхностная плотность заряда на плоскости, q – заряд на участке плоскости площадью S .

2. Поле конденсатора, образованного двумя бесконечными пластинами (рис.3):

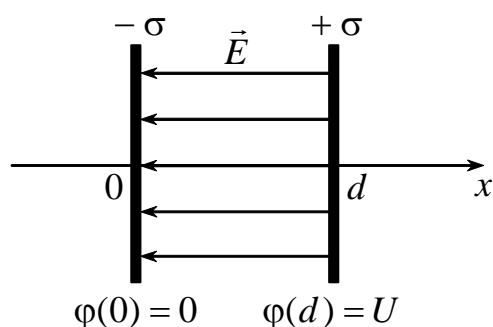


Рис.3

$$E(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \frac{\sigma}{\epsilon_0}, & 0 \leq x \leq d; \\ 0, & x > d. \end{cases} \quad (1.10)$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ Ex, & 0 \leq x \leq d; \\ U, & x > d, \end{cases} \quad (1.11)$$

где x – координата, отсчитываемая от пластины с нулевым потенциалом; d – расстояние между пластинами; $U = Ed$ – напряжение на конденсаторе.

конденсаторе.

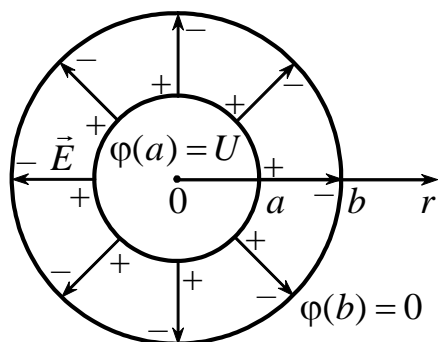


Рис.4

3. Поле конденсатора, образованного двумя бесконечно длинными коаксиальными цилиндрами (рис.4):

$$E(r) = \begin{cases} 0, & 0 \leq r < a; \\ \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r}, & a \leq r \leq b; \\ 0, & r > b. \end{cases} \quad (1.12)$$

$$\varphi(r) = \begin{cases} U, & 0 \leq r < a; \\ \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{b}{r}\right), & a \leq r \leq b; \\ 0, & r > b, \end{cases} \quad (1.13)$$

где $\tau = q/l$ – линейная плотность зарядов, q – заряд на участке цилиндра длиной l ; r – расстояние от оси цилиндров до точки расчета напряженности и потенциала; a и b – радиусы внутреннего и внешнего цилиндров соответственно; U – напряжение на конденсаторе.

Емкости плоского (рис.3) и цилиндрического (рис.4) конденсаторов даются формулами соответственно:

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d}, \quad (1.14)$$

где S – площадь пластины,

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln(b/a)}, \quad (1.15)$$

где L – длина цилиндра.

Вывод некоторых формул приведен в Приложениях.

Энергия W , запасенная в электрическом поле конденсатора, и объемная плотность энергии (энергия единицы объема) w определяются выражениями:

$$W = \frac{CU^2}{2}, \quad (1.16)$$

$$w = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}. \quad (1.17)$$

Сила F притяжения пластин в плоском конденсаторе (пондеромоторная сила) рассчитывается по формуле

$$F = \frac{Eq}{2} = \frac{q^2}{2\epsilon_0 S}. \quad (1.18)$$

В экспериментальной части работы будут исследованы электрические поля в плоском и цилиндрическом конденсаторах.

2 Методика эксперимента и описание установки

2.1. Выбор методики эксперимента

В данной работе для исследования электростатических полей выбран метод их моделирования в электролитической ванне. Он основан на том, что слабые токи в электролитах подчиняются закону Ома и связаны с напряженностью поля \vec{E} соотношением

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}, \quad (2.1)$$

где \vec{j} – плотность тока; γ – удельная проводимость электролита.

Поле плотности тока в электролите графически представляется линиями плотности тока так же, как электростатическое поле силовыми линиями, и, согласно уравнению (2.1), они совпадают. Если необходимо исследовать какое-либо электрическое поле, то металлические модели электродов, создающих его, помещают в ванну с электролитом (рис.5). Модели электродов должны быть подобны оригиналам по конфигурации, размерам и расположению, а подаваемые на них от источника потенциалы пропорциональны потенциалам на реальных электродах. В ванне возникает электрический ток, линии которого совпадают с силовыми линиями электрического поля.

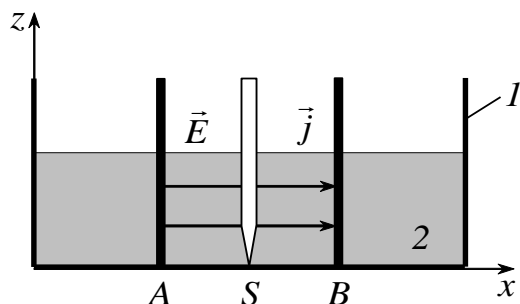


Рис.5

Для измерения потенциала в различных точках ванны используют проводник-зонд. Так как ток течет только в электролите, то на границах ванна – электролит и электролит – воздух линии плотности тока параллельны этим поверхностям

(рис.5), т.е. $j_z = 0$. 1 – ванна; 2 – электролит; S – зонд; A, B – электроды.

В случае неглубокой ванны это условие распространяется на весь объем электролита (рис.5), т.е. линии \vec{j} горизонтальны. Таким образом, можно достаточно точно моделировать лишь поля с горизонтальными силовыми линиями, зависящие только от двух координат x и y (плоскопараллельные поля). Такие поля создаются заряженными бесконечно длинными вдоль z цилиндрическими (плоскими) поверхностями. Для их моделирования электроды конечной длины погружают на дно неглубокой ванны и создают на них соответствующие потенциалы, при этом поле \vec{j} в ванне эквивалентно электрическому полю \vec{E} от бесконечно длинных вдоль z электродов.

В экспериментальной части работы будут исследоваться плоскопараллельные поля в неглубокой ванне.

2.2. Экспериментальная установка и требования к ее элементам

Схема установки представлена на рис.6. В эксперименте используются следующие приборы: генератор сигнала низкой частоты ГЗ (1), вольтметр универсальный В7 (2) с зондом (3), электролитическая ванна (4) с набором электродов различной формы (5).

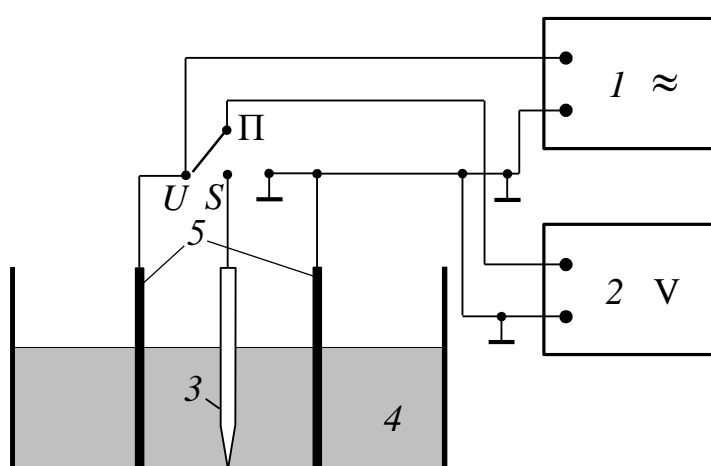


Рис.6

С генератора переменное напряжение подается на электроды, формируя электрическое поле и токи в ванне. В зависимости от положения переключателя П вольтметр измеряет:

- а) напряжение на электродах, если П в положении "U";
- б) потенциал поля в точке нахождения зонда относительно заземленного электрода, если П в положении "S";
- в) вход вольтметра закорочен, если П в положении "⊥".

Для уменьшения методических погрешностей моделирования электростатических полей к установке предъявляются следующие требования:

а) требования к электролиту: метод моделирования основан на соотношении (2.1). Электролит не должен искажать это соотношение, т.е. должен быть однородным ($\gamma = \text{const}$). Если в электролите будут течь заметные токи, то вследствие локального разогрева изменится его проводимость и соотношение (2.1) может нарушиться, поэтому электролит должен быть слабо проводящим. В качестве электролита обычно используется дистиллированная вода;

б) требования к ванне: для сохранения подобия линий поля и тока необходимо, чтобы проводимость материала ванны была много меньше проводимости электролита. В этом случае ток не ответвляется на ванну, а протекает лишь по электролиту. В качестве материала ванны обычно применяют органическое стекло;

в) требования к источнику напряжения: при использовании источника постоянного тока из-за электролиза изменяется состав электролита и нарушается его однородность. Поэтому в установке применяется источник переменного тока (генератор сигналов ГЗ);

г) требования к зонду и вольтметру: для минимального искажения зондом исследуемого поля его диаметр должен быть достаточно малым, так чтобы изменение потенциала в пределах зонда было много меньше его абсолютного значения. Входное сопротивление вольтметра должно быть много больше сопротивления участка электролита, к которому он подключается. При этом отвлечение тока на вольтметр мало, что делает искажения поля пренебрежимо малыми.

3. Экспериментальная часть

3.1. Правила техники безопасности при выполнении работы

При работе на экспериментальной установке необходимо соблюдать следующие правила техники безопасности:

а) включать установку в сеть только после проверки ее лаборантом или преподавателем;

- б) при включенной установке не касаться руками электродов;
- в) смену электродов проводить только при выключенном генераторе;
- г) по окончании измерений установку отключить от сети;
- д) дополнительные указания по технике безопасности представлены в инструкции по эксплуатации приборов.

3.2. Подготовка установки к работе

Для подготовки экспериментальной установки к работе:

- а) установить в ванну с дистиллированной водой электроды (форма электродов указывается преподавателем);
- б) собрать схему, изображенную на рис.6, и показать для проверки преподавателю или лаборанту;
- в) поставить переключатель П в положение "U";
- г) подготовить к работе и включить приборы;
- д) подать с генератора ГЗ сигнал частоты $f = 5 \text{ кГц}$ и напряжением $U = 5 \text{ В}$;
- е) по вольтметру В7 с помощью генератора установить напряжение на электродах $U = 5 \text{ В}$;
- ж) поставить переключатель П в положение "S". При этом вольтметр В7 подключен к зонду и измеряет разность потенциалов между зондом и заземленным электродом. Установка готова к работе.

3.3. Задание 1. Исследование электростатического поля плоского конденсатора

3.3.1. Измерения:

- а) в случае установленных в ванну плоских электродов, перемещая зонд от одного электрода к другому вдоль средней линии с шагом $\Delta x = 1 \text{ см}$, снять зависимость потенциала от расстояния $\varphi = \varphi(x)$ при $x < 0$, $0 \leq x \leq d$, $x > d$, где $x = 0$ и $x = d$ – координаты электродов. Расстояние d устанавливается по указанию преподавателя в пределах от 10 до 20 см;
- б) экспериментально определить четыре эквипотенциальные линии с потенциалами $\varphi = 1 \text{ В}$, 2 В , 3 В , 4 В . Для определения эквипотенциальной линии перемещать зонд по ванне, находя точки с одинаковым потенциалом и записывая их координаты. Для каждой линии необходимо определить не менее 7 точек, проверить, что электроды являются эквипотенциальными поверхностями.

3.3.2. Обработка результатов измерений:

- а) по результатам измерений построить график зависимости $\varphi = \varphi(x)$. Качественно сравнить экспериментальную кривую с теоретической;
- б) графическим дифференцированием (см. Приложение) рассчитать зависимость $E = E(x)$ при $x < 0$, $0 \leq x \leq d$, $x > d$, построить ее график, провести качественное сравнение с теорией;

в) по результатам измерений построить картину эквипотенциальных и силовых линий электростатического поля плоского конденсатора, образованного двумя бесконечными пластинами;

г) используя значение площади пластин $S = 1 \text{ м}^2$ и пренебрегая искажением поля на их краях, рассчитать следующие характеристики: q и σ – заряд и поверхностную плотность заряда на пластине, C – емкость конденсатора, W и w – энергию и объемную плотность энергии поля, F – силу притяжения пластин. Считая, что в моделируемом конденсаторе диэлектрик отсутствует, диэлектрические свойства электролита не учитывать;

д) рассчитать поток напряженности \vec{E} через плоскую поверхность площадью $S = 1 \text{ м}^2$, расположенную внутри конденсатора и наклоненную к силовым линиям под углом $\alpha = 30^\circ$.

3.4. Задание 2. Исследование электростатического поля цилиндрического конденсатора

3.4.1. Измерения:

а) в случае установленных в ванну коаксиальных цилиндрических электродов, перемещая зонд вдоль радиуса r (r – расстояние от оси цилиндров до зонда) с шагом $\Delta r = 1 \text{ см}$, снять зависимость потенциала $\varphi = \varphi(r)$ при $r < a$, $a \leq r \leq b$, $r > b$, где a и b – радиусы малого и большого электродов соответственно;

б) экспериментально определить четыре эквипотенциальные линии с потенциалами $\varphi = 1 \text{ В}$, 2 В , 3 В , 4 В , как это указано в пункте 3.3.1.б. Для построения каждой линии использовать не менее 8 – 10 точек. Проверить, что электроды являются эквипотенциальными поверхностями.

3.4.2. Обработка результатов измерений:

а) по результатам измерений построить график зависимости $\varphi = \varphi(r)$ и $\varphi = \varphi(\ln(r/a))$ при $r < a$, $a \leq r \leq b$, $r > b$. Качественно сравнить экспериментальные кривые с теоретическими;

б) графическим дифференцированием в нескольких точках (см. Приложение) рассчитать зависимость $E = E(r)$ при $r < a$, $a \leq r \leq b$, $r > b$. Построить графики $E = E(r)$ и $E = E(1/r)$, провести качественное сравнение их с теорией;

в) по результатам измерений построить картину эквипотенциальных и силовых линий электростатического поля цилиндрического конденсатора, образованного двумя бесконечно длинными цилиндрами;

г) из графика $\varphi = \varphi(\ln(r/a))$, используя формулу (1.13), по тангенсу угла наклона кривой рассчитать линейную плотность заряда τ на электроде. Считая, что в моделируемом конденсаторе диэлектрик отсутствует, диэлектрические свойства электролита не учитывать;

д) используя значение длины цилиндров $L = 1 \text{ м}$ и пренебрегая искажением поля на их торцах, рассчитать по формулам (1.15), (1.16), (1.17) емкость

конденсатора C , энергию W и объемную плотность энергии поля w в какой-либо точке поля;

е) рассчитать потоки напряженности \vec{E} через коаксиальные с электродами цилиндрические поверхности радиусов $r_1 = 5$ см, $r_2 = 8$ см и длиной $L = 1$ м. Проанализировать полученные результаты.

Контрольные вопросы

1. Закон Кулона. Напряженность и потенциал электрического поля. Связь между ними. Расчет напряженности и потенциала с помощью закона Кулона и принципа суперпозиции.
2. Поток напряженности. Теорема Остроградского – Гаусса.
3. Расчет поля равномерно заряженных:
 - а) плоскости, двух плоскостей (плоский конденсатор);
 - б) сферы;
 - в) шара;
 - г) бесконечно длинных нити и цилиндра.
4. Емкость плоского и цилиндрического конденсаторов.
5. Энергия и плотность энергии электрического поля.
6. Метод моделирования электростатических полей в электролитической ванне.

Приложение

Графическое дифференцирование

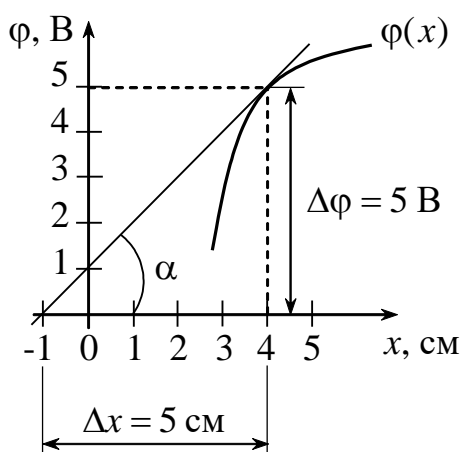


Рис.7

Известно, что производная dy/dx равна тангенсу угла наклона касательной к кривой $y = y(x)$ в соответствующей точке к положительному направлению оси x . Это позволяет по известному графику $y = y(x)$ провести графическое дифференцирование. Так, например, при исследовании электрических полей получают экспериментальную зависимость $\varphi = \varphi(x)$ и строят ее график (рис.7).

Согласно выражению (1.5) для одномерного поля, когда E и φ зависят лишь от одной координаты, имеем

$$E_x = -\frac{d\varphi}{dx}. \quad (\text{П.1})$$

Например, найдем значение напряженности E в точке $x = 4$ см. Для этого в данной точке проводим касательную к кривой $\varphi = \varphi(x)$ и определяем $\Delta\varphi$ и Δx (см. рис.7). Тогда

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta x} = \frac{5 \text{ В}}{5 \cdot 10^{-2} \text{ м}} = 100 \text{ В/м},$$

откуда $E_x = -100 \text{ В/м}$. Знак «минус» показывает, что напряженность \vec{E} направлена против оси x .

Примеры решения задач

24-1. Рассчитать напряженность электрического поля равномерно заряженной тонкой бесконечной плоскости в вакууме. Поверхностная плотность заряда на плоскости σ ($\sigma > 0$).

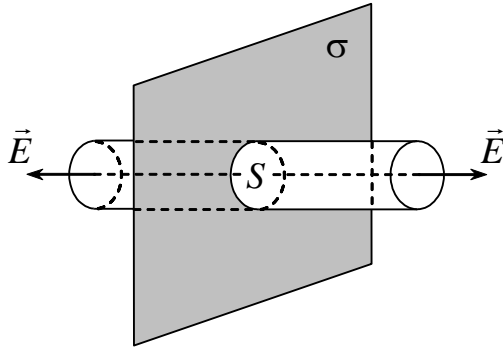


Рис.8

Решение. Из симметрии задачи (рис.8) очевидно, что линии напряженности \vec{E} перпендикулярны заряженной плоскости и направлены от нее в обе стороны (при $\sigma < 0$ силовые линии будут направлены к плоскости). Кроме того, ясно, что в симметричных относительно этой плоскости точках вектор \vec{E} одинаков по модулю и противоположен по направлению.

Для расчета напряженности поля воспользуемся теоремой Остроградского – Гаусса. В качестве произвольной замкнутой поверхности выберем прямой круговой цилиндр, основания которого параллельны заряженной плоскости и располагаются симметрично относительно нее (рис.8). Так как образующие цилиндра параллельны линиям напряженности, то поток вектора напряженности через боковую поверхность цилиндра равен нулю, а полный поток N через всю поверхность цилиндра равен сумме потоков через его основания. В пределах каждого из оснований $E_n = E = \text{const}$, площади оснований равны S , тогда $N = \oint_S E_n ds = 2ES$. Заряд, заключенный внутри построенной цилиндрической

поверхности, равен σS . Согласно теореме Остроградского – Гаусса (1.8), $2ES = \sigma S / \epsilon_0$, откуда

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}. \quad (\text{П.2})$$

Из формулы (П.2) следует, что E не зависит от длины цилиндра, т.е. напряженность поля на любых расстояниях от плоскости одинакова по модулю, иными словами, поле равномерно заряженной бесконечной плоскости однородно.

24-2. Рассчитать напряженность E и потенциал φ электростатического поля цилиндрического конденсатора как функции расстояния r от оси системы до точки наблюдения (рис.9). Радиусы внутреннего и внешнего цилиндров равны a и b , цилиндры заряжены равномерно по поверхности так, что на единицу

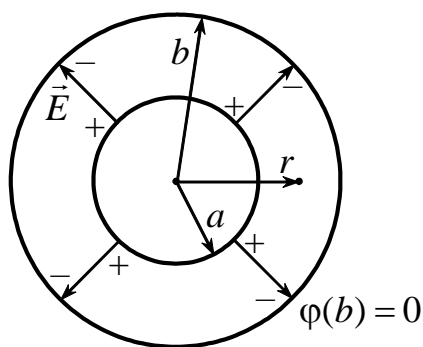


Рис.9

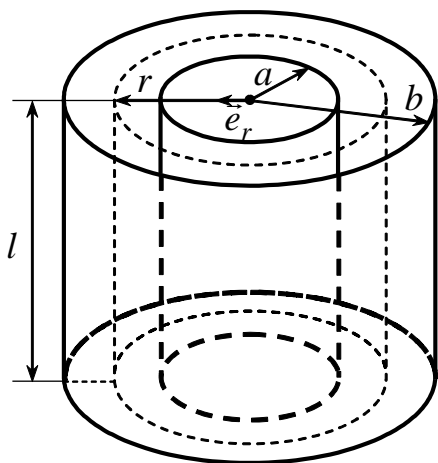


Рис.10

их длины приходится заряды $+\tau$ и $-\tau$ соответственно. Потенциал внешнего цилиндра принять равным нулю ($\varphi(b) = 0$). Искривлениями поля на торцах конденсатора пренебречь.

Решение. Из соображений симметрии (рис.9) следует, что поле цилиндрического конденсатора имеет радиальный характер, т.е. вектор \vec{E} в каждой точке перпендикулярен оси цилиндра, а модуль вектора \vec{E} зависит только от расстояния r от оси цилиндра до точки наблюдения.

В качестве произвольной замкнутой поверхности выберем коаксиальный с обкладками конденсатора прямой круговой цилиндр радиусом r и высотой l (рис.10).

Если $0 \leq r < a$, то рассматриваемая замкнутая поверхность зарядов внутри не содержит, поэтому, согласно теореме Остроградского – Гаусса (1.8), в этой области $E = 0$ независимо от r .

Если $r > b$, то воображаемая замкнутая поверхность будет содержать внутри себя две реальные заряженные поверхности, суммарный заряд которых $Q = \tau l + (-\tau)l = 0$. Тогда, в соот-

ветствии с (1.8), $E(r > b) = 0$.

Таким образом, за пределами цилиндрического конденсатора поле отсутствует.

Найдем поле внутри конденсатора (в пространстве между его обкладками). Для этого рассмотрим замкнутую цилиндрическую поверхность радиусом $a \leq r \leq b$. Поток вектора \vec{E} через торцы этого цилиндра равен нулю, а через боковую поверхность $E_r 2\pi r l$, где E_r – проекция вектора \vec{E} на орт \vec{e}_r радиального направления, совпадающий по направлению с внешней нормалью \vec{n} к боковой поверхности выбранного цилиндра. Заряд, заключенный внутри рассматриваемой поверхности, равен τl . По теореме Остроградского – Гаусса (1.8), $E_r 2\pi r l = \tau l / \epsilon_0$, откуда

$$E_r(a \leq r \leq b) = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r}. \quad (\text{П.3})$$

Заметим, что в нашем случае $E_r = |\vec{E}| = E$, так как $\vec{E} \uparrow\uparrow \vec{e}_r$.

Для нахождения зависимости потенциала поля φ от расстояния r в области между обкладками конденсатора ($a \leq r \leq b$) воспользуемся соотношением (1.3), записанным в цилиндрической системе координат с учетом того, что век-

тор \vec{E} имеет только радиальную составляющую: $\vec{E} = -\frac{d\varphi}{dr}\vec{e}_r$ или $E_r = -\frac{d\varphi}{dr}$, откуда

$$\varphi = -\int E_r dr. \quad (\text{П.4})$$

Подставив в (П.4) зависимость $E_r(r)$, определяемую соотношением (П.3), имеем

$$\varphi(a \leq r \leq b) = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln r + C,$$

где произвольная постоянная C находится из граничного условия $\varphi(r=b)=0$:

$$C = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln b. \text{ Тогда}$$

$$\varphi(a \leq r \leq b) = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{b}{r}\right). \quad (\text{П.5})$$

Очевидно, что $\varphi(0 \leq r < a) = \varphi(r=a) = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{b}{a}\right) = U$, где U – напряжение на конденсаторе; $\varphi(r > b) = \varphi(r=b) = 0$.

24-3. Пренебрегая краевыми эффектами, определить величину электрической емкости цилиндрического конденсатора длиной L с радиусами внутренней и внешней обкладок a и b , если пространство между обкладками заполнено однородным диэлектриком с относительной диэлектрической проницаемостью ϵ .

Решение. Согласно определению, электроемкостью (сокращенно емкостью) конденсатора называется величина

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2}, \quad (\text{П.6})$$

где q – заряд конденсатора, $(\varphi_1 - \varphi_2)$ – разность потенциалов между его обкладками (эту разность также называют напряжением на конденсаторе U).

Разность потенциалов между обкладками цилиндрического конденсатора вычислим по формуле (П.5), где $\tau = q/L$. При наличии диэлектрика между обкладками разность потенциалов

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \varphi(r=a) - \varphi(r=b) = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0\epsilon} \ln\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0\epsilon L} \ln\left(\frac{b}{a}\right). \quad (\text{П.7})$$

Подставив (П.7) в (П.6), получим выражение для емкости цилиндрического конденсатора:

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon L}{\ln(b/a)}.$$

24-4. Положительный заряд q распределен равномерно по поверхности сферы радиусом R . Полагая всюду $\epsilon=1$, определить напряженность электро-

статического поля E как функцию расстояния r от центра сферы до точки наблюдения. Построить примерный график зависимости $E(r)$.

Решение. Благодаря равномерному распределению заряда по поверхности, поле, создаваемое им, обладает сферической симметрией: направление вектора \vec{E} в любой точке проходит через центр сферы (рис.11), а модуль вектора

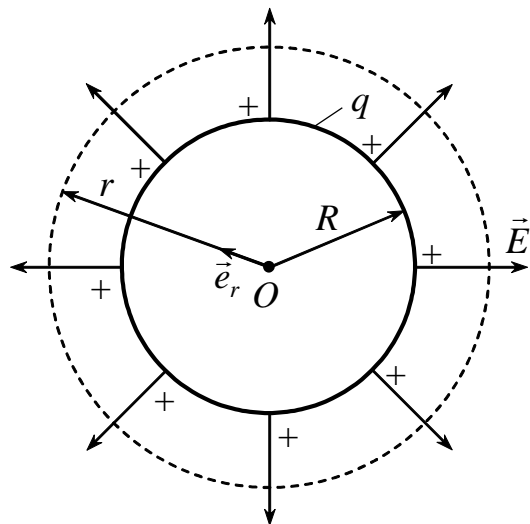


Рис.11

должен зависеть только от расстояния r от центра сферы до точки наблюдения.

Воспользуемся теоремой Остроградского – Гаусса (1.8). В качестве произвольной замкнутой поверхности выберем сферу радиусом r , имеющую общий центр с заряженной сферой (рис.11). Поток вектора \vec{E} через рассматриваемую поверхность $\oint_s \vec{E}_n ds = E_r 4\pi r^2$, где E_r – проекция вектора \vec{E} на орт радиального направления \vec{e}_r , совпадающий по направлению с внешней нормалью \vec{n} к поверхности в каждой ее точке ($\vec{E} = E_r \vec{e}_r$; $E = |\vec{E}| = |E_r|$).

Если $0 \leq r < R$, то замкнутая поверхность не содержит внутри зарядов, поэтому, согласно теореме Остроградского – Гаусса, в этой области всюду $E = 0$, т.е. внутри равномерно заряженной сферы электрическое поле отсутствует.

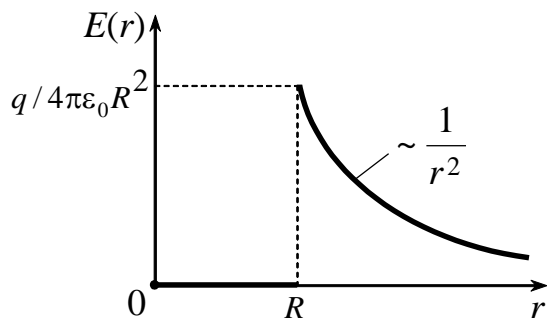


Рис.12

Если $r \geq R$, то внутрь поверхности попадает весь заряд q , создающий исследуемое поле, и, по теореме Остроградского – Гаусса, $E_r 4\pi r^2 = q / \epsilon_0$, откуда

$$E_r(r \geq R) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (\text{П.8})$$

Так как по условию задачи $q > 0$, то

$$E(r) = \begin{cases} 0, & 0 \leq r < R; \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, & r \geq R. \end{cases}$$

График зависимости E от r приведен на рис.12.

24-5. Положительный заряд q распределен равномерно по объему шара радиусом R . Считая, что система зарядов находится в вакууме, определить зависимость $E(r)$ и построить примерный график этой зависимости.

Решение. Электростатическое поле равномерно заряженного по объему шара, очевидно, также обладает сферической симметрией (рис.13):

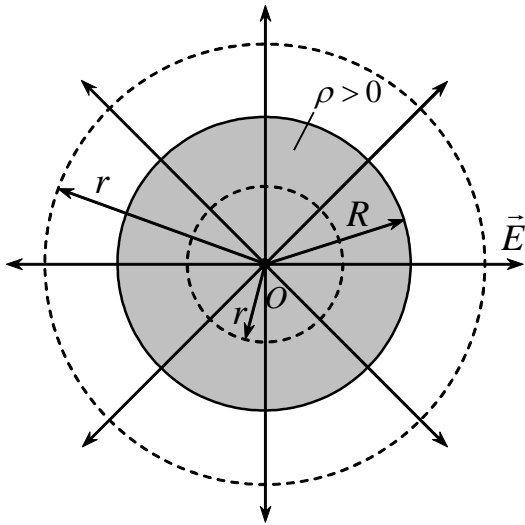


Рис.13

$\vec{E}(r) = E_r(r)\vec{e}_r$, где r – расстояние от центра шара до точки наблюдения, \vec{e}_r – орт радиального направления, поэтому и здесь для нахождения поля следует в качестве замкнутой поверхности взять сферу радиусом r , центр которой совпадает с центром шара. Поток вектора \vec{E} через рассматриваемую поверхность, как и в предыдущем случае (см. задачу 24-4), будет равен $E_r 4\pi r^2$.

Нетрудно сообразить, что для поля вне шара (при $r \geq R$) получится тот же результат, что и в задаче 24-4 (см. П.8). Внутри же шара (при $0 \leq r < R$) выражение для напряженности E будет другим. Сфера радиусом $0 \leq r < R$ охватывает заряд

$Q = \int_{V_{\text{сф}}} \rho dV$, где ρ – объемная плотность заряда, $V_{\text{сф}}$ – объем, заключенный

внутри замкнутой поверхности. Так как заряд распределен по объему шара равномерно, то $\rho = q/V_{\text{шара}} = q/(4/3 \pi R^3) = \text{const}$, тогда

$$Q = \rho \int_{V_{\text{сф}}} dV = \rho V_{\text{сф}} = \frac{q}{4/3 \pi R^3} \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 = q \left(\frac{r}{R} \right)^3.$$

Поэтому, согласно теореме Остроградского – Гаусса (1.8),

$$E_r 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} q \left(\frac{r}{R} \right)^3,$$

откуда

$$E_r(0 \leq r < R) = E(0 \leq r < R) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3} r, \quad (\text{П.9})$$

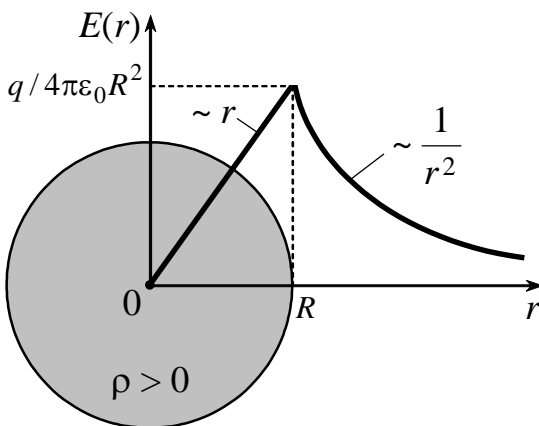


Рис.14

т.е. внутри равномерно заряженного по объему шара напряженность растет линейно с расстоянием r от его центра. В (П.9) учли, что $q > 0$.

Таким образом,

$$E(r) = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3} r, & 0 \leq r < R; \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, & r \geq R. \end{cases}$$

График зависимости E от r приведен на рис.14.

Лабораторная работа № 2-28

Экспериментальные исследования электромагнитной индукции

Введение

Явление электромагнитной индукции, открытое в 1831 г. М. Фарадеем, нашло широкое техническое применение. Оно лежит в основе всей современной электро- и радиотехники. Благодаря электромагнитной индукции (ЭМИ) происходит переход механической энергии в электрическую и, наоборот, электрической в механическую; трансформаторы преобразуют низкое напряжение в высокое и наоборот; возникают и распространяются радиоволны, свет, электромагнитные волны в различных линиях передачи. Переменные магнитные поля возбуждают в массивных проводниках индукционные токи Фуко, которые используются в металлургии для плавки металлов. Выход СВЧ-тока на поверхность проводника (скин-эффект), также связанный с ЭМИ, используется при поверхностной закалке деталей, его учитывают при конструировании СВЧ аппаратуры. В связи с этим экспериментальное изучение ЭМИ представляет значительный интерес.

Целью данной работы является экспериментальное изучение зависимости ЭДС индукции от ориентации контура в магнитном поле и от скорости изменения поля, измерение взаимной индукции двух катушек, индуктивности одной из них.

1. Теоретическая часть

1.1. Электромагнитная индукция

Рассмотрим контур, помещенный в магнитное поле с индукцией \vec{B} (рис.1). При всяком изменении магнитного потока Φ через площадь S поверхности, ограниченной контуром, в последнем возникает ЭДС индукции

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad (1.1)$$

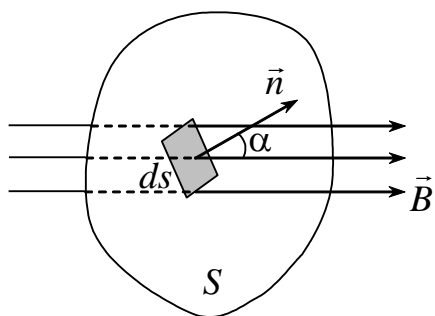


Рис.1

где магнитный поток $\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{s} = \int_S B_n ds$;
 $B_n = B \cos \alpha$ – проекция вектора \vec{B} на нормаль \vec{n} к площадке ds ; α – угол между векторами \vec{B} и \vec{n} .

Если контур образуется N витками проводника, вводится понятие потокосцепления $\Psi = N\Phi$, тогда (1.1) можно записать следующим образом:

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Psi}{dt}. \quad (1.1a)$$

Если магнитная индукция меняется по закону $B = B_m \cos \omega t$, где B_m – амплитуда индукции, ω – круговая частота, а угол α между векторами \vec{B} и \vec{n} одинаков на всей поверхности S , то из уравнения (1.1а) следует, что

$$\varepsilon_i = \varepsilon_{im} \sin \omega t,$$

где

$$\varepsilon_{im} = N \omega \cos \alpha \int_S B_m ds = 2\pi f \Psi_m \cos \alpha. \quad (1.2)$$

В (1.2) $\Psi_m = N \int_S B_m ds$ – максимальное потокосцепление; $f = \frac{\omega}{2\pi}$.

1.2. Взаимная индукция

Рассмотрим два контура (рис.2), по одному из которых (контур 1) течет ток I_1 , создающий магнитное поле с индукцией \vec{B}_1 . Согласно закону Био – Савара – Лапласа $B_1 \sim I_1$, поэтому и потокосцепление Ψ_{21} контура 2 в магнитном поле B_1 пропорционально току I_1 :

$$\Psi_{21} = L_{21} I_1, \quad (1.3)$$

где L_{21} – взаимная индуктивность. При изменении тока I_1 в контуре 2 возникает ЭДС взаимоиндукции ε_2 . Если контуры находятся в пара- или диамагнитной среде, их форма, размеры и взаимное расположение не изменяются с течением времени, то взаимная индук-

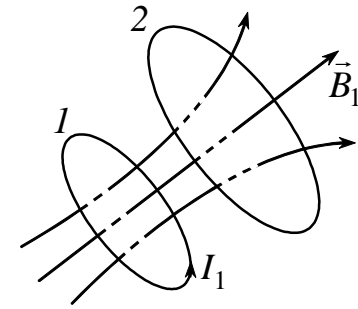


Рис.2

тивность $L_{21} = \text{const}$. Тогда, подставляя выражение (1.3) в (1.1а), имеем

$$\varepsilon_2 = -L_{21} \frac{dI_1}{dt}. \quad (1.4)$$

Если ток I_1 меняется по закону $I_1 = I_{1m} \cos \omega t$, где I_{1m} – амплитуда тока, ω – круговая частота, то из формулы (1.4) следует, что

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_{2m} \sin \omega t,$$

где

$$\varepsilon_{2m} = L_{21} \omega I_{1m} = 2\pi f L_{21} I_{1m}. \quad (1.5)$$

1.3. Самоиндукция

Рассмотрим одиночный контур (рис.3), по которому течет ток I , создающий магнитное поле с индукцией \vec{B} . Согласно закону Био – Савара – Лапласа $B \sim I$, поэтому и потокосцепление контура $\Psi \sim I$, т.е. можно записать, что

$$\Psi = LI, \quad (1.6)$$

где L – индуктивность контура. При изменении тока I в контуре возникает ЭДС самоиндукции ε_s . Если контур находится в

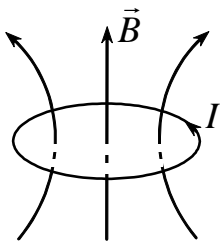


Рис.3

пара- или диамагнитной среде, его форма и размеры не изменяются с течением времени, то индуктивность $L = \text{const}$. Подставляя выражение (1.6) в (1.1a), имеем

$$\varepsilon_s = -L \frac{dI}{dt}. \quad (1.7)$$

Если ток I меняется по закону $I = I_m \cos \omega t$, где I_m – амплитуда тока, ω – круговая частота, то из формулы (1.7) получаем

$$\varepsilon_s = \varepsilon_{sm} \sin \omega t,$$

где

$$\varepsilon_{sm} = L\omega I_m = 2\pi f L I_m = X_L I_m, \quad (1.8)$$

$$X_L = \omega L = 2\pi f L, \quad (1.9)$$

X_L – индуктивное сопротивление контура переменному (синусоидальному) току.

2. Методика эксперимента и описание установки

Для исследования явлений электромагнитной индукции, взаимной индукции и самоиндукции используется схема, представленная на рис.4. В эксперименте используются следующие приборы: генератор низкочастотный ($\Gamma \approx$), осциллограф (N), стрелочный вольтметр (V_1), цифровой вольтметр (V_2). Макет включает в себя две катушки индуктивности (неподвижная L_1 и подвижная L_2), резистор R_1 , переключатель Π .

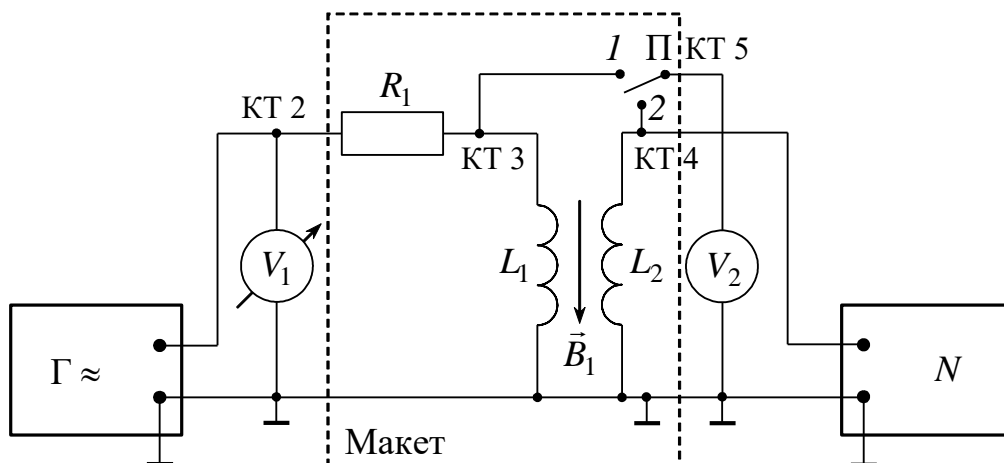


Рис.4

С низкочастотного генератора на цепь $L_1 R_1$ подается синусоидальное напряжение U_1 , и в цепи течет синусоидальный ток I_1 . Ток I_1 создает переменное магнитное поле с индукцией \vec{B}_1 , пронизывающее катушки L_1 и L_2 . В катушке L_2 возникает ЭДС индукции (взаимоиндукции), а в катушке L_1 – ЭДС самоиндукции. Вольтметр V_1 измеряет эффективное значение синусоидального

напряжения $U_{1\text{эф}}$ на $L_1 R_1$ -цепи, которое связано с амплитудным значением U_{1m} соотношением

$$U_{1\text{эф}} = \frac{U_{1m}}{\sqrt{2}}. \quad (2.1)$$

Параметры цепи подобраны так, что на используемых частотах $X_L \ll R_1$. При этом условии для I_{1m} , исходя из закона Ома, можно записать:

$$I_{1m} = \frac{U_{1m}}{R_1}. \quad (2.2)$$

Скорость изменения тока $\frac{dI_1}{dt}$ и магнитного поля $\frac{dB_1}{dt}$ пропорциональны частоте f , которая измеряется по шкале генератора. Когда переключатель П находится в положении 2, вольтметр V_2 подключен к катушке L_2 и измеряет эффективное значение ЭДС индукции (взаимоиндукции) $\varepsilon_{2\text{эф}}$, которое связано с амплитудным ε_{2m} соотношением $\varepsilon_{2\text{эф}} = \frac{\varepsilon_{2m}}{\sqrt{2}}$. На осциллографе наблюдается форма ЭДС. Когда переключатель П находится в положении 1, вольтметр V_2 подключен к катушке L_1 и измеряет эффективное значение ЭДС самоиндукции $\varepsilon_{1\text{эф}} = \frac{\varepsilon_{1m}}{\sqrt{2}}$, если активное сопротивление катушки много меньше индуктивного ($R_k \ll X_L$).

Изменяя частоту сигнала генератора, можно исследовать зависимость ЭДС индукции и самоиндукции от частоты. Вращая катушку L_2 , можно исследовать зависимость ЭДС индукции от ориентации контура в магнитном поле.

3. Экспериментальная часть

3.1. Подготовка установки к работе

Для подготовки экспериментальной установки к работе:

- а) подсоединить к макету приборы согласно схеме, изображенной на рис.4, и показать для проверки преподавателю или лаборанту;
- б) подготовить к работе и включить приборы;
- в) поставить переключатель П на макете в положение 2. При этом вольтметр V_2 будет измерять ЭДС индукции (взаимоиндукции) в катушке L_2 ;
- г) подать с генератора синусоидальный сигнал частотой $f = 200$ Гц и напряжением $U_{\text{эф}} = 8$ В;
- д) по вольтметру V_1 установить эффективное значение напряжения $U_{1\text{эф}} = 8$ В;
- е) ориентировать катушки L_1 и L_2 так, чтобы угол между их плоскостями был равен нулю;

- ж) вольтметром V_2 измерить эффективное значение ЭДС индукции (взаимоиндукции) $\varepsilon_{2\text{эф}}$ в катушке L_2 ;
- з) исследовать визуально форму $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(t)$ на осциллографе.

3.2. Исследование зависимости ЭДС индукции (взаимоиндукции) от частоты магнитного поля

3.2.1. Измерения:

Изменяя частоту генератора f от 200 Гц до 2000 Гц с интервалом $\Delta f = 200$ Гц, снять зависимость $\varepsilon_{2\text{эф}} = \varepsilon_{2\text{эф}}(f)$. При этом по вольтметру V_1 контролировать постоянство напряжения $U_{1\text{эф}}$ (амплитуды I_{1m} тока, протекающего через катушку L_1).

3.2.2. Обработка результатов измерений:

а) по результатам измерений построить график зависимости амплитуды ЭДС индукции (взаимоиндукции) от частоты $\varepsilon_{2m} = \varepsilon_{2m}(f)$. Качественно сравнить экспериментальную кривую с теоретической, полученной на основе формулы (1.5);

б) по экспериментальному графику $\varepsilon_{2m} = \varepsilon_{2m}(f)$ рассчитать максимальное потокосцепление Ψ_{21m} катушки L_2 и взаимную индуктивность L_{21} .

3.3. Исследование зависимости ЭДС индукции от ориентации контура в магнитном поле

3.3.1. Измерения:

а) установить частоту синусоидального тока $f = 2000$ Гц;

б) изменяя угол α между плоскостями катушек (угол между индукцией магнитного поля \vec{B}_1 и нормалью \vec{n}_2 к плоскости катушки L_2) от 0 до 180° с интервалом $\Delta\alpha = 15^\circ$, снять зависимость эффективного значения ЭДС индукции от угла $\varepsilon_{2\text{эф}} = \varepsilon_{2\text{эф}}(\alpha)$.

3.3.2. Обработка результатов измерений:

По результатам измерений построить график зависимости амплитуды ЭДС индукции от угла $\varepsilon_{2m} = \varepsilon_{2m}(\alpha)$. Здесь же построить теоретическую зависимость $\varepsilon_{2m}^{\text{теор}} = |\varepsilon_{2m}^{\text{теор}}(\alpha)|$ (см. формулу (1.2)), используя значение Ψ_{21m} , полученное в эксперименте на частоте $f = 2000$ Гц (см. пункт 3.2) так, чтобы $\varepsilon_{2m}^{\text{теор}}(0) = \varepsilon_{2m}^{\text{эксп}}(0)$. Сравнить экспериментальную и теоретическую кривые.

3.4. Исследование зависимости ЭДС самоиндукции от частоты синусоидального тока

3.4.1. Измерения:

а) поставить переключатель П на макете в положение I, при этом вольтметр V_2 будет измерять эффективное значение ЭДС самоиндукции $\varepsilon_{1\phi}$ в катушке L_1 (если $R_k \ll X_L$);

б) изменяя частоту генератора f от 500 Гц до 2 кГц с интервалом $\Delta f = 250$ Гц, снять зависимость $\varepsilon_{1\phi} = \varepsilon_{1\phi}(f)$. При этом необходимо по вольтметру V_1 контролировать постоянство напряжения $U_{1\phi}$ (амплитуды I_{1m} тока, протекающего через катушку L_1).

3.4.2. Обработка результатов измерений:

а) по результатам измерений построить график зависимости амплитуды ЭДС самоиндукции от частоты $\varepsilon_{1m} = \varepsilon_{1m}(f)$. Качественно сравнить экспериментальную кривую с теоретической, полученной на основе формулы (1.8);

б) по результатам измерений построить график зависимости индуктивного сопротивления катушки от частоты $X_L = X_L(f)$, где согласно формулам (1.8), (2.1) и (2.2)

$$X_L = \frac{R_1}{U_{1\phi}} \varepsilon_{1\phi}(f).$$

Качественно сравнить экспериментальную кривую с теоретической, полученной на основе формулы (1.9);

в) из экспериментального графика $X_L = X_L(f)$ определить индуктивность L катушки L_1 .

Контрольные вопросы

1. Магнитное поле. Источники магнитного поля.
2. Магнитный поток, потокосцепление.
3. Электромагнитная индукция. Обобщение закона электромагнитной индукции.
4. Взаимная индукция. Взаимная индуктивность.
5. Самоиндукция. Индуктивность контура.
6. Методика эксперимента. Назначение и функциональные возможности используемой в установке аппаратуры.

Примеры решения задач

28-1. На бесконечный соленоид с n витками на единицу длины и площадью поперечного сечения S намотана катушка из N витков. Найти взаимную индуктивность L_{21} катушки и соленоида. Относительная магнитная проницаемость среды, заполняющей соленоид, $\mu = 1$.

Решение. Согласно (1.3), взаимная индуктивность L_{21} определяется по формуле

$$L_{21} = \frac{\Psi_{21}}{I_1}, \quad (\text{П.1})$$

где I_1 – ток, протекающий по соленоиду; Ψ_{21} – суммарный магнитный поток, пронизывающий катушку (потокосцепление).

Известно, что магнитное поле внутри бесконечного соленоида является однородным и направлено вдоль оси соленоида. Тогда потокосцепление

$$\Psi_{21} = N\Phi = NB_1S, \quad (\text{П.2})$$

где $\Phi = \int_S B_{1n} ds = B_1S$ – магнитный поток через один виток катушки. Здесь учли, что $B_{1n} = B_1$, так как нормаль \vec{n} к плоскости витка катушки направлена вдоль оси соленоида, т.е. $\vec{B}_1 \uparrow \uparrow \vec{n}$.

Используя теорему о циркуляции вектора \vec{B} в вакууме

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I,$$

где Γ – произвольный замкнутый контур; $d\vec{l}$ – вектор элементарной длины контура, направленный вдоль обхода последнего; I – алгебраическая сумма токов, охватываемых контуром Γ ; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнитная постоянная, для B_1 можно получить следующее соотношение:

$$B_1 = \mu_0 n I_1. \quad (\text{П.3})$$

Подставив (П.2) в (П.1), с учетом (П.3), находим взаимную индуктивность L_{21} катушки и соленоида

$$L_{21} = \mu_0 n N S.$$

28-2. В однородном магнитном поле ($B = 200$ мТл) равномерно с частотой $\nu = 600$ мин⁻¹ вращается рамка, содержащая $N = 1200$ витков, плотно прилегающих друг к другу. Площадь рамки $S = 100$ см². Ось вращения лежит в плоскости рамки и перпендикулярна линиям магнитной индукции (рис.5). Определить максимальную ЭДС, индуцируемую в рамке.

Решение. Согласно закону электромагнитной индукции (1.1а),

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Psi}{dt}, \quad (\text{П.4})$$

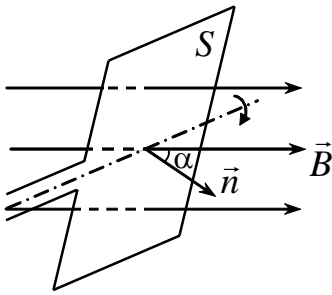


Рис.5

где потокосцепление $\Psi = N\Phi$; $\Phi = \int_S B_n ds = \int_S B ds \cos \alpha$ – магнитный поток через один виток; B_n – проекция вектора \vec{B} на нормаль \vec{n} к плоскости рамки; α – угол между векторами \vec{B} и \vec{n} (рис.5).

Пусть $\alpha(t=0) = 0$, тогда в произвольный момент времени t угол $\alpha = \omega t$, где $\omega = 2\pi\nu$ – угловая скорость вращения рамки. Так как магнитное поле, в котором находится рамка, однородно, то

$$\Psi = N \int_S B ds \cos \alpha = NB \cos \alpha \int_S ds = NBS \cos(2\pi\nu t). \quad (\text{П.5})$$

Подставив (П.5) в (П.4), получаем $\varepsilon_i = 2\pi\nu NBS \sin(2\pi\nu t)$, откуда максимальное значение ЭДС индукции $\varepsilon_{im} = 2\pi\nu NBS = 151 \text{ В}$.

28-3. Внутри длинного соленоида находится катушка из N витков с площадью поперечного сечения S . Катушку поворачивают с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси OO' (рис.6), совпадающей с ее диаметром и перпендикулярной оси соленоида. Найти ЭДС индукции в катушке, если индукция магнитного поля в соленоиде меняется во времени как $B = B_0 \sin \omega t$ и в момент $t=0$ ось катушки совпадала с осью соленоида.

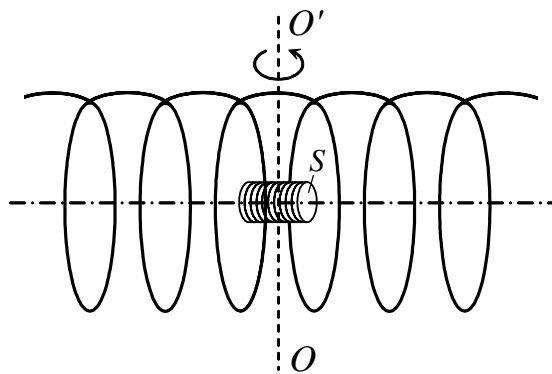


Рис.6

Решение. Согласно закону электромагнитной индукции (1.1а),

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Psi}{dt},$$

где $\Psi = N\Phi$ – полный магнитный поток сквозь катушку (потокосцепление); $\Phi = \int_S B_n ds = \int_S B ds \cos \alpha$ – магнитный поток

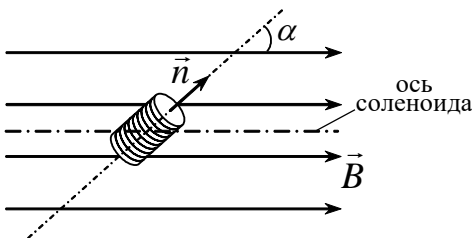


Рис.7

через один виток катушки; B_n – проекция вектора \vec{B} на нормаль \vec{n} к плоскости витка (рис.7); $\alpha = \omega t$ – угол между векторами \vec{B} и \vec{n} (здесь учли, что в момент времени $t=0$ ось катушки совпадала с осью соленоида, т.е. $\alpha(t=0) = 0$).

Так как поле внутри длинного соленоида однородно, то

$$\Psi = NB \cos \alpha \int_S ds = NBS \cos \omega t = NB_0 S \sin \omega t \cdot \cos \omega t = \frac{1}{2} NB_0 S \sin 2\omega t,$$

тогда ЭДС индукции в катушке

$$\varepsilon_i = -\frac{1}{2} NB_0 S \cdot 2\omega \cos 2\omega t = -NB_0 S \omega \cos 2\omega t.$$

28-4. Квадратная рамка со стороной a и длинный прямой провод с током I находятся в одной плоскости (рис.8). Рамку поступательно перемещают вправо с постоянной скоростью v . Найти ЭДС индукции в рамке как функцию расстояния x .

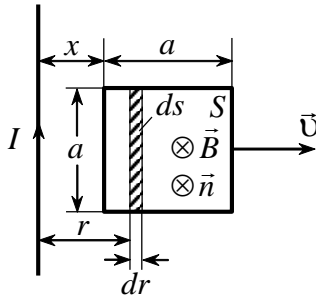


Рис.8

Решение. Для определения ЭДС индукции в рамке воспользуемся законом электромагнитной индукции (1.1), согласно которому

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad (\text{П.6})$$

где $\Phi = \int_S B_n ds$ – магнитный поток, пронизывающий

рамку; B_n – проекция вектора индукции \vec{B} магнитного поля, создаваемого проводом с током I , на нормаль \vec{n} к плоскости рамки; ds – элементарная площадка поверхности S , ограниченной рамкой.

Величина индукции магнитного поля, создаваемого прямолинейным длинным проводом с током I в вакууме на расстоянии r от него, определяется выражением

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}. \quad (\text{П.7})$$

Направление линий вектора \vec{B} в пределах поверхности S указано на рис.8.

Направим нормаль \vec{n} к плоскости рамки за чертеж («от нас»), тогда в каждой точке поверхности S векторы \vec{B} и \vec{n} будут параллельны и $B_n = B$.

Так как магнитное поле в пределах рамки является неоднородным и $B = B(r)$, то при вычислении магнитного потока Φ в качестве элементарной площадки ds выберем полоску, параллельную проводу с током, находящуюся от него на расстоянии r , шириной dr (рис.8). Величина магнитной индукции B в пределах элементарного участка ds будет определяться формулой (П.7). Тогда

$$\Phi = \int_S B_n ds = \int_S B ds = \int_x^{x+a} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} a dr = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln \frac{x+a}{x} = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln \left(1 + \frac{a}{x} \right). \quad (\text{П.8})$$

В (П.8) учли, что $ds = a dr$.

Согласно (П.8), $\Phi = \Phi(x)$, где $x = x(t)$. Следовательно, выражение (П.6) можно переписать в виде

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dx} \frac{dx}{dt}. \quad (\text{П.9})$$

Учитывая, что $\frac{dx}{dt} = v$, после подстановки (П.8) в (П.9) получаем

$$\varepsilon_i = -\frac{\mu_0 I a v}{2\pi} \frac{1}{1 + \frac{a}{x}} \left(-\frac{a}{x^2} \right) = \frac{\mu_0 I a^2 v}{2\pi x(x+a)}.$$

28-5. Катушка индуктивности L и сопротивления R подключена к источнику постоянной ЭДС ε (рис.9). Параллельно катушке включено сопротивление R_0 . Найти зависимость тока I в катушке от времени t после размыкания ключа K . Внутреннее сопротивление источника пренебрежимо мало.

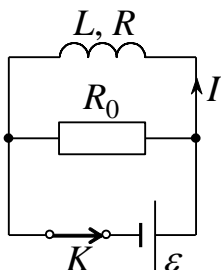


Рис.9

Решение. После размыкания ключа K в катушке возникает ЭДС самоиндукции

$$\varepsilon_s = -L \frac{dI}{dt}, \quad (\text{П.10})$$

где I – ток, текущий в контуре, образованном катушкой и сопротивлением R_0 , которые теперь оказываются соединенными последовательно (рис.9). Запишем для этого контура закон Ома:

$$I(R + R_0) = \varepsilon_s. \quad (\text{П.11})$$

Подставив (П.10) в (П.11), имеем

$$I(R + R_0) = -L \frac{dI}{dt}. \quad (\text{П.12})$$

После разделения переменных уравнение (П.12) примет вид

$$\frac{dI}{I} = -\frac{R + R_0}{L} dt. \quad (\text{П.13})$$

Интегрируя (П.13), получаем

$$\ln I = -\frac{R + R_0}{L} t + \ln C,$$

или

$$I = C \exp\left(-\frac{R + R_0}{L} t\right), \quad (\text{П.14})$$

где C – неизвестная постоянная интегрирования.

Для определения постоянной C воспользуемся начальным условием: в момент размыкания ключа ($t=0$) в катушке течет установившийся ток $I_0 = \varepsilon/R$ (значение установившегося тока I_0 можно найти, воспользовавшись вторым правилом Кирхгофа для контура, состоящего из катушки и источника ЭДС, при условии, что сопротивление источника пренебрежимо мало), т.е. $I(t=0) = I_0 = \varepsilon/R$. Тогда

$$C = \varepsilon/R. \quad (\text{П.15})$$

Подстановка (П.15) в (П.14) дает

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R} \exp\left(-\frac{R + R_0}{L} t\right).$$

График зависимости I от t приведен на рис.10.

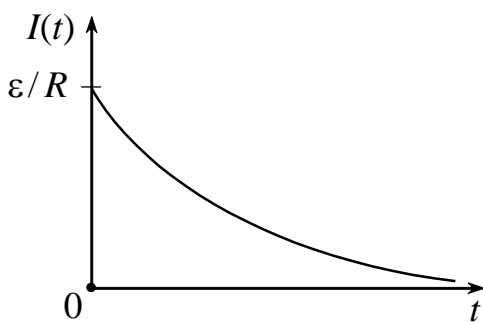


Рис.10

Лабораторная работа № 2-2

Изучение компенсационного метода измерения ЭДС

Введение

Измерения напряжений и ЭДС в электрических цепях являются основными. Существует большое многообразие методов этих измерений, применяются различные измерительные приборы: прямопоказывающие вольтметры со стрелочными индикаторами, цифровые вольтметры и интегрирующие цифровые вольтметры. Самыми простыми (по принципу действия) являются прямопоказывающие вольтметры со стрелочными индикаторами, более сложными – цифровые вольтметры. В основе работы этих вольтметров лежат разные методы измерений. В данной работе изучается компенсационный метод, который является универсальным.

Компенсационные методы измерения напряжения широко применяются в электро- и радиотехнике. Они используются при проверке электрических и радиоэлектронных измерительных приборов и источников напряжений для измерения с повышенной точностью напряжений и ЭДС, действующих в цепях, содержащих сопротивления больших величин.

На компенсационном методе основана работа компенсационных преобразователей напряжения в современных электронных цифровых вольтметрах. Поэтому современный инженер должен иметь представление о сущности и достоинствах этого метода и владеть навыками измерения напряжения с его помощью.

Цель работы – выработать у студентов четкие представления о физических величинах, описывающих электрический ток, изучить законы Ома и правила Кирхгофа для постоянного тока, освоить один из основных методов измерения напряжения – метод компенсации и его реализацию на постоянном токе.

1. Теоретическая часть

1.1. Характеристики электрического тока

Электрический ток представляет собой упорядоченное движение носителей электрических зарядов. За направление электрического тока условились принимать направление движения положительных носителей заряда. Основными количественными характеристиками электрического тока служат две величины: вектор плотности тока и сила тока.

Вектор плотности тока \vec{j} численно равен заряду, проходящему в единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную к направлению перемещения зарядов, а направление вектора \vec{j} совпадает с направлением скорости \vec{v} движения положительных носителей заряда:

$$\vec{j} = en\vec{v}, \quad (1.1)$$

где e – заряд отдельной частицы; n – концентрация носителей заряда одного знака; \vec{v} – вектор скорости упорядоченного движения носителя. Формула (1.1) относится к случаю, когда ток образован движением одинаковых заряженных частиц.

Сила тока I численно равна заряду, проходящему в единицу времени через полное сечение проводника:

$$I = \frac{dq}{dt}. \quad (1.2)$$

Сила тока через любую поверхность S вычисляется по формуле

$$I = \int_S \vec{j} d\vec{s}. \quad (1.3)$$

Ток, не изменяющийся во времени ни по величине, ни по направлению, называется стационарным, или постоянным. Для постоянного тока величина I одинакова для любого поперечного сечения проводника. В этой работе только такой ток и будет рассматриваться.

1.2. Электродвижущая сила. Закон Ома

Если в проводнике создать потенциальное электрическое поле напряженностью $\vec{E}_{\text{кул}}$, то положительные носители тока в этом поле будут перемещаться из точки с большим потенциалом ϕ_2 в точку с меньшим потенциалом ϕ_1 (рис.1). Работа, совершенная кулоновскими силами по перемещению единичного положительного заряда из точки 2 в точку 1, называется разностью потенциалов между этими точками:

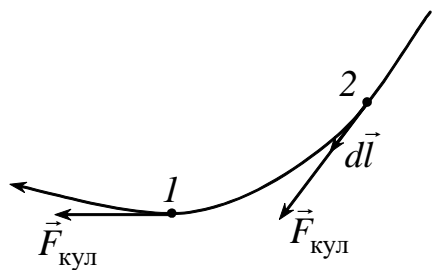


Рис.1

$$\phi_2 - \phi_1 = \frac{(A_{\text{кул}})_{21}}{q} = \frac{\int_2^1 \vec{F}_{\text{кул}} d\vec{l}}{q} = \int_2^1 \vec{E}_{\text{кул}} d\vec{l}. \quad (1.4)$$

Такое перемещение носителей тока очень быстро приведет к выравниванию потенциалов точек 1 и 2 и прекращению тока.

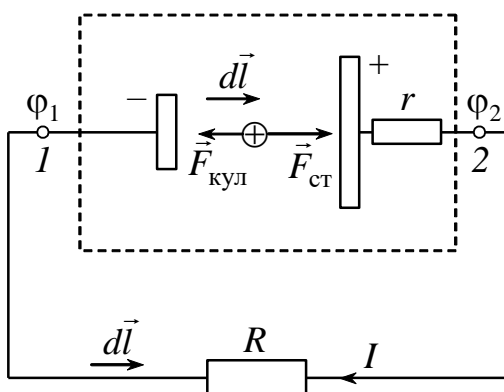


Рис.2

Для того, чтобы сила тока не менялась в течение длительного промежутка времени, необходимо, чтобы разность потенциалов между точками поддерживалась постоянной, т.е., кроме кулоновских сил, должны действовать силы другой природы, называемые сторонними. Устройство, где действуют сторонние силы, называется источником (генератором) тока. На рис.2 пунктиром выделена эквивалентная схема неоднородного (содержащего источник тока) участка цепи.

Внутри источника тока действуют и

сторонние, и кулоновские силы. Их направления противоположны. Под действием сторонних сил положительные заряды перемещаются от электрода с меньшим потенциалом φ_1 к электроду с большим потенциалом φ_2 . Природа сторонних сил различна. В гальванических элементах, например, непрерывное восстановление разности потенциалов на полюсах является результатом химических реакций. Так как внутри источника есть потери энергии, вводят понятие внутреннего сопротивления (здесь r).

Работа, совершенная сторонними силами на участке $1r2$ (рис.2) по перемещению единичного положительного заряда, называется электродвижущей силой (ЭДС) источника:

$$\varepsilon = \varepsilon_{1r2} = \frac{(A_{\text{ст}})_{1r2}}{q} = \frac{\int_{1r2} \vec{F}_{\text{ст}} d\vec{l}}{q} = \int_{1r2} \vec{E}_{\text{ст}} d\vec{l}, \quad (1.5)$$

где $\vec{E}_{\text{ст}}$ – напряженность поля сторонних сил. Стороннее поле, в принципе, не потенциально, поэтому величина ЭДС зависит от формы пути интегрирования в (1.5).

Величина U , численно равная работе, совершенной сторонними и кулоновскими силами по перемещению единичного положительного заряда от точки 1 к точке 2 (рис.2), называется падением напряжения на этом участке:

$$U_{1r2} = \frac{(A_{\text{кул}})_{12} + (A_{\text{ст}})_{1r2}}{q} = \int_1^2 \vec{E}_{\text{кул}} d\vec{l} + \int_{1r2} \vec{E}_{\text{ст}} d\vec{l}. \quad (1.6)$$

С учетом (1.4) и (1.5) формулу (1.6) можно записать в виде

$$U_{1r2} = (\varphi_1 - \varphi_2) + \varepsilon. \quad (1.6a)$$

Плотность тока \vec{j} и напряженности кулоновского $\vec{E}_{\text{кул}}$ и стороннего $\vec{E}_{\text{ст}}$ полей связаны между собой соотношением

$$\vec{j} = \gamma(\vec{E}_{\text{кул}} + \vec{E}_{\text{ст}}), \quad (1.7)$$

где γ – удельная проводимость (или электропроводность) данного материала. Величина ρ , обратная электропроводности, называется удельным сопротивлением материала:

$$\rho = \frac{1}{\gamma}. \quad (1.8)$$

Соотношение (1.7) называется законом Ома в дифференциальной форме. Если величина \vec{j} одинакова во всех точках поперечного сечения проводника, то из (1.3) получаем

$$j = \frac{I}{S}, \quad (1.9)$$

где S – площадь поперечного сечения, перпендикулярного \vec{j} .

Мощность, развиваемая током на рассматриваемом участке цепи, определяется работой кулоновских и сторонних сил в единицу времени и равна

$$P = U_{1r2} I = (\varphi_1 - \varphi_2) I + \varepsilon I. \quad (1.10)$$

При этом количество теплоты $dQ = I^2 r dt$, выделяемое на участке цепи $1R2$ за время dt , в соответствии с законом Джоуля – Ленца, будет равно работе $dA = P dt$, совершаемой током за время dt :

$$I^2 r dt = P dt = (\varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon) I dt. \quad (1.11)$$

Из (1.11) имеем

$$Ir = (\varphi_1 - \varphi_2) + \varepsilon. \quad (1.12)$$

Формула (1.12) выражает закон Ома для неоднородного участка цепи.

Если участок цепи однородный ($\vec{E}_{ct} = 0$), например, $1R2$ (на рис.2 – это внешний участок цепи с сопротивлением R), то падение напряжения на нем совпадает с разностью потенциалов на концах участка, и закон Ома для этого участка цепи примет вид

$$U_{1R2} = \varphi_1 - \varphi_2 = -IR. \quad (1.13)$$

Знак «минус» в (1.13) получился из-за того, что перемещение $d\vec{l}$ направлено навстречу току \vec{j} . Подставив (1.13) в (1.12), получим закон Ома для замкнутой цепи

$$IR + Ir = \varepsilon. \quad (1.14)$$

Из (1.12) видно, что ЭДС источника равна разности потенциалов на его клеммах в случаях, если он разомкнут ($I = 0$) или равно нулю его внутреннее сопротивление ($r = 0$). Так как обычно $r \neq 0$, ясно, что нельзя точно измерить ЭДС с помощью вольтметра, подключенного к полюсам источника. Его показания будут отличаться от ЭДС на величину падения напряжения внутри источника (Ir).

1.3. Правила Кирхгофа

Расчет сложных разветвленных цепей значительно упрощается, если пользоваться правилами, сформулированными Кирхгофом.

Узлом называется точка, в которой сходятся более чем два проводника. Току, текущему к узлу, присваивается один знак («плюс» или «минус»), текущему от узла – другой знак («минус» или «плюс», соответственно).

Первое правило Кирхгофа: алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна нулю:

$$\sum_k I_k = 0.$$

Например, для рис.3: $I_1 + I_2 - I_3 = 0$.

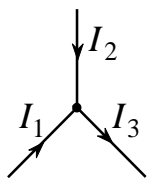


Рис.3

Второе правило Кирхгофа относится к любому выделенному в разветвленной цепи замкнутому контуру. Оно формулируется следующим образом: алгебраическая сумма ЭДС, действующих в замкнутом контуре, равна алгебраической сумме произведений силы тока на сопротивление отдельных участков этого контура:

$$\sum_k I_k R_k = \sum_i \varepsilon_i.$$

Ток и величина $I_k R_k$ считаются положительными, если направление тока совпадает с выбранным направлением обхода контура. Если направление тока противоположно выбранному направлению обхода, то он и величина $I_k R_k$ считаются отрицательными. ЭДС считается положительной, если направление поля сторонних сил совпадает с выбранным направлением обхода. В противном случае ЭДС считается отрицательной.

2. Методика эксперимента и описание установки

2.1. Сущность метода компенсации

Для точного измерения ЭДС элемента путем сравнения ее с ЭДС другого, эталонного, элемента используется метод компенсации. Схема этого метода приведена на рис.4. Два источника с ЭДС ε и ε_x ($\varepsilon > \varepsilon_x$) включены навстречу

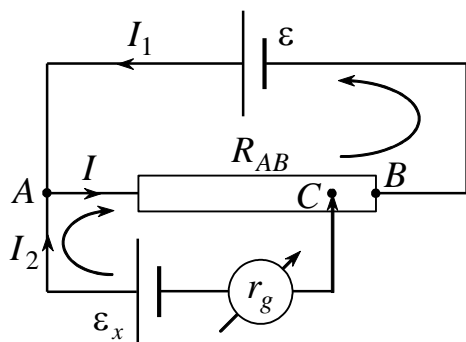


Рис.4

друг другу, т.е. к точке A подключены положительные полюса обоих источников. Элемент с большей ЭДС замкнут непосредственно на сопротивление R_{AB} . Другой элемент, величину ЭДС которого (ε_x) надо измерить, замкнут через гальванометр на часть этого сопротивления, а именно на R_{AC} .

Точка C соответствует положению скользящего контакта на сопротивлении AB. Так как $\varepsilon > \varepsilon_x$, на сопротивлении AB всегда найдется такая точка C_x , разность потенциалов между

которой и точкой A будет равна разности потенциалов на клеммах элемента ε_x . При этом ток через гальванометр и элемент ε_x будет отсутствовать ($I_2 = 0$). И закон Ома (1.12) для участка цепи $A\varepsilon_x C_x$ можно записать следующим образом:

$$(\varphi_A - \varphi_{C_x}) - \varepsilon_x = -I_2(r_x + r_g) = 0, \quad (2.1)$$

где r_x – сопротивление элемента ε_x ; r_g – сопротивление гальванометра.

В этом случае элемент ε_x ведет себя как разомкнутый («скомпенсированный»). Условие

$$\varepsilon_x = \varphi_A - \varphi_{C_x} \quad (2.2)$$

называется условием компенсации, которое теоретически не накладывает ограничений на величины сопротивлений r_x и r_g . При смещении скользящего контакта C из точки компенсации C_x условие компенсации нарушается и гальванометр показывает величину тока ($I_2 \neq 0$) того или иного направления.

Если выбрать направление токов, как показано на рис.4, и применить к рассматриваемой схеме правила Кирхгофа, то первое правило для точки A (или C) даст

$$I_1 + I_2 - I = 0. \quad (2.3)$$

Второе правило для замкнутых контуров $ACB\&A$ и $AC\varepsilon_x A$ приводит к уравнениям

$$I_1(r + R_{CB}) + IR_{AC} = \varepsilon, \quad (2.4)$$

$$I_2(r_x + r_g) + IR_{AC} = \varepsilon_x, \quad (2.5)$$

где r – внутреннее сопротивление элемента ε .

Система трех уравнений (2.3) – (2.5) позволяет определить все неизвестные токи. Однако мы ограничимся рассмотрением только случая, когда выполняется условие компенсации (2.2). При этом $I_2 = 0$ и $I = I_1$.

Обозначим сопротивление R_{AC} при компенсации просто R_x , а R_{AB} через R . Тогда из (2.3) – (2.5) имеем

$$\begin{cases} I_1(r + R) = \varepsilon; \\ I_1 R_x = \varepsilon_x, \end{cases} \quad (2.6)$$

где $R = R_{AB} = R_{AC} + R_{CB}$; $R_x = R_{AC_x}$. Отсюда следует

$$\varepsilon_x = \varepsilon \frac{R_x}{r + R}. \quad (2.7)$$

В соотношение (2.7) входят сопротивления r , R , R_x . Чтобы не измерять их, применяется следующий метод. Опыт повторяют, заменив элемент ε_x на элемент с ЭДС $\varepsilon_l < \varepsilon$, оставляя все параметры схемы неизменными. Ток через гальванометр не пойдет при новом положении скользящего контакта C_l и новом значении сопротивления $R_{AC_l} = R_l$. Тогда аналогично (2.7) можно записать

$$\varepsilon_l = \varepsilon \frac{R_l}{r + R}. \quad (2.8)$$

Исключив из (2.7) и (2.8) $(r + R)$, получим

$$\varepsilon_x = \varepsilon_l \frac{R_x}{R_l}. \quad (2.9)$$

Равенство (2.9) лежит в основе измерения ЭДС методом компенсации. В качестве элемента и известной ЭДС обычно выбирают источник тока, называемый нормальным элементом, величина ЭДС которого известна с высокой степенью точности. В электрической измерительной технике нормальные элементы играют роль эталонов.

2.2. Выбор методики эксперимента. Метод вилки

Для практического измерения ЭДС компенсационным методом надо как можно точнее зафиксировать положение скользящего контакта C в моменты выполнения условия компенсации, когда ток I_2 обращается в нуль ($I_2 = 0$). При этом стрелка регистрирующего прибора гальванометра находится в центральном неотклоненном положении (на нулевой риске).

Однако при снятии точной зависимости показаний гальванометра I_g от положения l_{AC} контакта C (нуль отсчета длины l помещен в точку A) получается целая область, называемая «мертвой зоной», в которой $I_g = 0$ (рис.5).

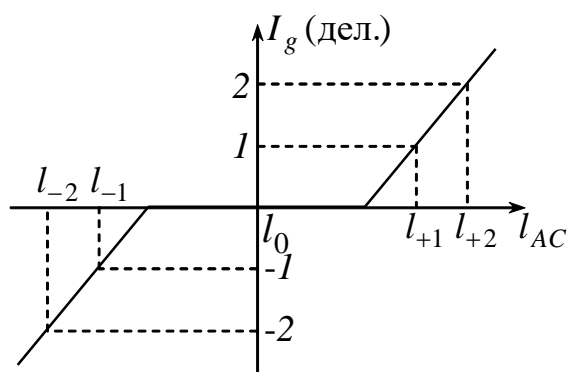


Рис.5

Размеры зоны могут зависеть от времени из-за вибраций и т.д. В этой области чувствительность метода равна нулю. При неоднократных измерениях нуль гальванометра получается с равной вероятностью при любом положении l_{AC} из «мертвой зоны».

Чтобы найти истинное положение точки компенсации l_0 , можно воспользоваться методом вилки, сущность которого заключается в следующем: линейные участки кривой $I_g(l_{AC})$ идут

симметрично относительно точки l_0 (в области малых токов – 1-2 деления на шкале гальванометра); поэтому, зафиксировав положение контакта C , при котором стрелка гальванометра сначала отклонена на несколько «чувствительных» делений влево, а затем на такое же число делений вправо (например, ± 1 дел.), l_0 находим как

$$l_0 = \frac{l_{+1} + l_{-1}}{2}. \quad (2.10)$$

Истинное положение компенсации найдено. Необходимо отметить, что метод вилки можно применять при условии $I_2 \ll I_1$. Это условие выполняется при $r_x + r_g \gg R_{AC}$.

2.3. Описание экспериментальной установки

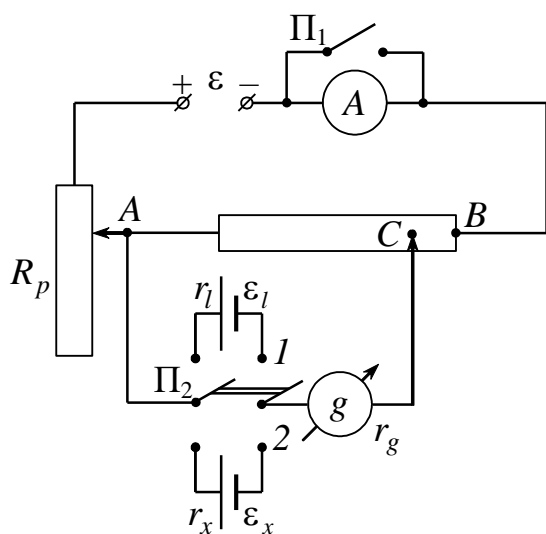


Рис.6

Экспериментальная установка (рис.6) содержит вертикально расположенный реохорд (ACB) с метрической шкалой и подвижным контактом C на кронштейне. В нее входят: ε – источник постоянного тока с достаточно большой ЭДС; ε_x – исследуемый источник; ε_l – эталонный источник ($\varepsilon_l = 0,5$ В); A – миллиамперметр (используется для измерения силы тока в цепи питания); g – нуль-гальванометр (служит для определения положения точки компенсации).

Переключатель Π_1 служит для замыкания миллиамперметра (в случае

протекания больших токов). Переключатель Π_2 служит для поочередного включения источников ε_l (позиция 1) и ε_x (позиция 2). R_p – переменное сопротивление (позволяет изменять силу тока в цепи питания). Измерения ε_x производятся при силе тока в цепи питания, заданной преподавателем. Сопротивление AB (реохорд) изготавливается из длинной однородной проволоки с большим удельным сопротивлением, так что отношение R_x / R_l в (2.9) можно заменить отношением соответствующих длин l_{AC} : l_x / l_l . Тогда окончательная расчетная формула для определения ЭДС неизвестного элемента примет вид

$$\varepsilon_x = \varepsilon_l \frac{l_x}{l_l}. \quad (2.11)$$

3. Экспериментальная часть

3.1. Правила техники безопасности при выполнении работы

При работе на экспериментальной установке необходимо соблюдать следующие правила техники безопасности:

- а) установку без проверки лаборантом или преподавателем не включать;
- б) не оставлять работающую установку без надзора;
- в) после выполнения измерений и проверки их лаборантом установку отключить от сети.

3.2. Подготовка установки к работе

Для подготовки экспериментальной установки к работе:

- а) включить установку в сеть;
- б) переключатель Π_2 поставить в положение 1, при этом включен элемент ε_l .

3.3. Определение ЭДС источника

3.3.1. Измерения:

а) найти точку отсчета, передвигая контакт C до тех пор, пока гальванометр не покажет отсутствие тока; записать показание l'_{0l} . Пройти эту точку и вернуться к ней с другой стороны, записать показание l''_{0l} . Обе эти точки лежат в «мертвой зоне» и являются просто ориентирами для проведения измерений методом вилки;

б) передвигать движок реохорда до тех пор, пока стрелка гальванометра не отклонится на одно деление шкалы; произвести отсчет l_l' по шкале реохорда;

в) переместить движок реохорда в противоположном направлении до положения, при котором стрелка гальванометра, миновав нуль, отклонится на та-

кое же число делений в противоположную сторону; по шкале реохорда произвести отсчет l_l'' ;

г) измерения l_l' и l_l'' повторить 5 раз;

д) переключатель Π_2 поставить в положение 2, при котором оказывается включенным элемент ε_x ;

е) повторить измерения, описанные в пунктах 3.3.1а – 3.3.1г, в прежнем порядке;

ж) результаты измерений занести в таблицу:

№	$l_l', \text{ см}$	$l_l'', \text{ см}$	$l_l = \frac{l_l' + l_l''}{2}, \text{ см}$	$\langle l_l \rangle, \text{ см}$	$l_x', \text{ см}$	$l_x'', \text{ см}$	$l_x = \frac{l_x' + l_x''}{2}, \text{ см}$	$\langle l_x \rangle, \text{ см}$
1								
2								
3								
4								
5								

3.3.2. Обработка результатов измерений:

Используя найденные значения $\langle l_l \rangle$ и $\langle l_x \rangle$, по формуле (2.11) найти ε_x .

Контрольные вопросы

1. Характеристики электрического тока: плотность тока, сила тока. Единицы их измерения.
2. Условия существования стационарного электрического тока.
3. Понятие ЭДС, разности потенциалов, падения напряжения. Единицы их измерения.
4. Понятия сопротивления участка цепи, удельного сопротивления, электропроводности. Единицы измерения.
5. Закон Ома.
6. Сущность метода компенсации.
7. Правила Кирхгофа и их применение к цепям в данной работе.
8. Применяя правила Кирхгофа, получить соотношение $\varepsilon_x = \varepsilon_l \frac{l_x}{l_l}$.
9. Метод вилки.
10. В чем преимущество компенсационного метода определения ЭДС перед методом непосредственного измерения вольтметром?

Примеры решения задач

2-1. Найти ток через сопротивление R в схеме (рис.7). Внутренние сопротивления источников пренебрежимо малы.

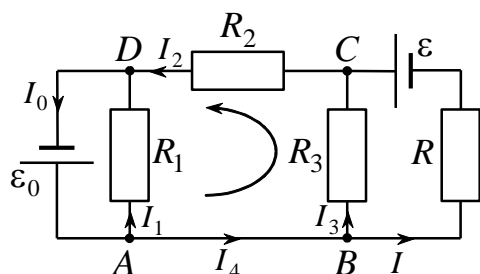


Рис.7

Решение. Обозначим стрелками предположительные направления токов в цепи (рис.7).

Для узла C составим уравнение в соответствии с первым правилом Кирхгофа:

$$I + I_3 - I_2 = 0. \quad (\text{П.1})$$

Рассмотрим контуры $CD\varepsilon_0BR_3C$ и $CD\varepsilon_0BRC$. Выбрав направление обхода каждого контура против часовой стрелки, запишем

для них второе правило Кирхгофа:

$$I_2 R_2 + I_3 R_3 = \varepsilon_0, \quad (\text{П.2})$$

$$I_2 R_2 + IR = \varepsilon_0 + \varepsilon. \quad (\text{П.3})$$

Решив систему трех уравнений (П.1) – (П.3), получим

$$I = \frac{\varepsilon(R_2 + R_3) + \varepsilon_0 R_3}{R(R_2 + R_3) + R_2 R_3}. \quad (\text{П.4})$$

Как видно из (П.4), искомый ток I не зависит от величины сопротивления R_1 .

2-2. Найти значение и направление тока через сопротивление R в схеме (рис.8), если $\varepsilon_1 = 1,5$ В, $\varepsilon_2 = 3,7$ В, $R_1 = 10$ Ом, $R_2 = 20$ Ом и $R = 5,0$ Ом. Внутренние сопротивления источников тока пренебрежимо малы.

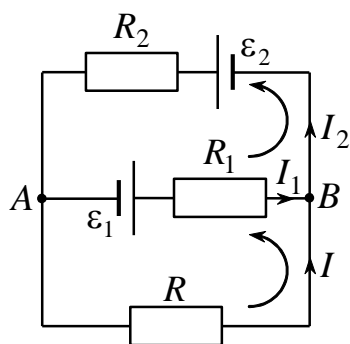


Рис.8

Решение. Обозначим стрелками предположительные направления неизвестных токов I , I_1 и I_2 в цепи (рис.8).

Запишем первое правило Кирхгофа для узла B и второе правило Кирхгофа для контуров BR_2AR_1B и BR_1ARB , выбрав направление обхода последних против часовой стрелки:

$$I + I_1 - I_2 = 0, \quad (\text{П.5})$$

$$I_1 R_1 + I_2 R_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \quad (\text{П.6})$$

$$IR - I_1 R_1 = -\varepsilon_1. \quad (\text{П.7})$$

Уравнения (П.5) – (П.7) составляют систему относительно неизвестных I , I_1 и I_2 , решая которую, находим

$$I = \frac{R_1 \varepsilon_2 - R_2 \varepsilon_1}{R(R_1 + R_2) + R_1 R_2} = 0,02 \text{ А.}$$

Поскольку $I > 0$, то в действительности искомый ток направлен так, как указано на рис.8.

2-3. Найти разность потенциалов $\varphi_A - \varphi_B$ между обкладками конденсатора C схемы (рис.9), если $\varepsilon_1 = 4,0$ В, $\varepsilon_2 = 1,0$ В, $R_1 = 10$ Ом, $R_2 = 20$ Ом, $R_3 = 30$ Ом. Внутренние сопротивления источников пренебрежимо малы.

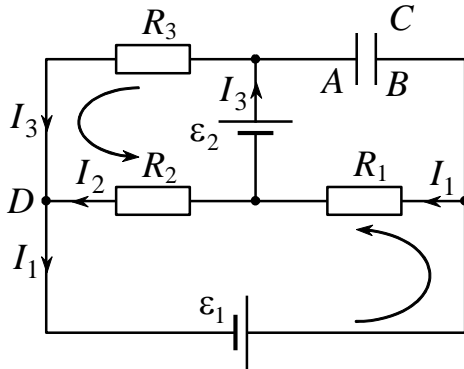


Рис.9

Решение. В установившемся режиме ток через конденсатор $I_C = 0$, и в цепи текут три неизвестных тока I_1 , I_2 , I_3 , предположительные направления которых указаны на рис.9.

Применим первое правило Кирхгофа к узлу D и второе правило Кирхгофа к контурам $DR_2\varepsilon_2R_3D$ и $D\varepsilon_1R_1R_2D$:

$$-I_1 + I_2 + I_3 = 0, \quad (\text{П.8})$$

$$-I_2R_2 + I_3R_3 = \varepsilon_2, \quad (\text{П.9})$$

$$I_1R_1 + I_2R_2 = \varepsilon_1. \quad (\text{П.10})$$

Решая систему уравнений (П.8) – (П.10),

находим ток I_1 :

$$I_1 = \frac{\varepsilon_1(R_2 + R_3) + \varepsilon_2R_2}{R_1(R_2 + R_3) + R_2R_3}. \quad (\text{П.11})$$

Для определения разности потенциалов $\varphi_A - \varphi_B$ применим обобщенный закон Ома к участку $A\varepsilon_2R_1B$:

$$-I_1R_1 = (\varphi_A - \varphi_B) - \varepsilon_2,$$

откуда

$$\varphi_A - \varphi_B = \varepsilon_2 - I_1R_1. \quad (\text{П.12})$$

Подстановка (П.11) в (П.12) дает

$$\varphi_A - \varphi_B = \frac{\varepsilon_2R_3(R_1 + R_2) - \varepsilon_1R_1(R_2 + R_3)}{R_1(R_2 + R_3) + R_2R_3} = -1,0 \text{ В.}$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Савельев И.В. Курс общей физики: в 5 кн. Кн. 2: Электричество и магнетизм / И.В. Савельев. – М.: ООО «Издательство Астрель»; ООО «Издательство АСТ», 2002.
2. Детлаф А.А. Курс физики / А.А. Детлаф, Б.М. Яворский. – М.: Издательский центр «Академия», 2003.
3. Калашников С.Г. Электричество / С.Г. Калашников. – М.: Физматлит, 2003.
4. Сивухин Д.В. Общий курс физики: в. т. 3. / Д.В. Сивухин. Электричество. – М.: Наука, 1983.
5. Иродов И.Е. Электромагнетизм. Основные законы /И.Е. Иродов. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2002.