Лабораторная работа №4
Тема «ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ»

Пусть на отрезке $a,\ b$ задана функция $y = f(x)$. Разобьем отрезок на элементарные отрезки (рис. 1).

$$x_0 = a; x_n = b$$

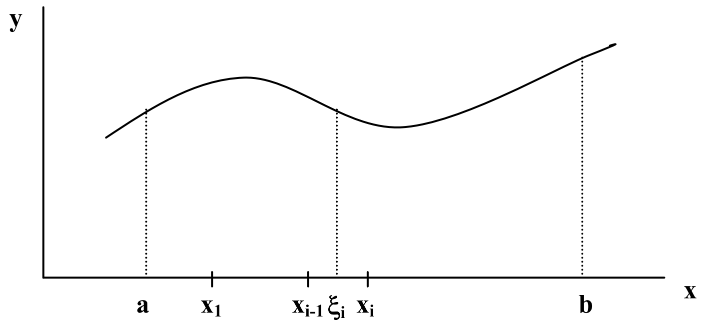


Рис. 1. Разбиение отрезка

На каждом из этих отрезков выберем произвольную точку: $x_{i-1} \le \varepsilon_i \le x_i$. Найдем произведение S_i значения функции в точке ε_i на длину элементарного отрезка:

$$S_i = f(\varepsilon_i)(x_i - x_{i-1}) \qquad (1)$$

Составим сумму всех таких произведений:

$$S_n = S_1 + S_2 + \ldots + S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\,\Delta x_i \qquad (2)$$

S_n – называется интегральной суммой.

Определенным интегралом от функции f(x) на [a;b] называется предел интегральной суммы при неограниченном увеличении числа точек разбиения, или при $\Delta x_i \to 0$ (максимального из отрезков)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_i f(\varepsilon_i)\,\Delta x_i \qquad (3)$$

Геометрический смысл

Выражение (1) при i=1, 2,…, n описывает площадь элементарных прямоугольников $S_1, S_2, \ldots, S_n$ а выражение (2) интегральной суммы – является суммой всей ступенчатой фигуры (рис. 2).

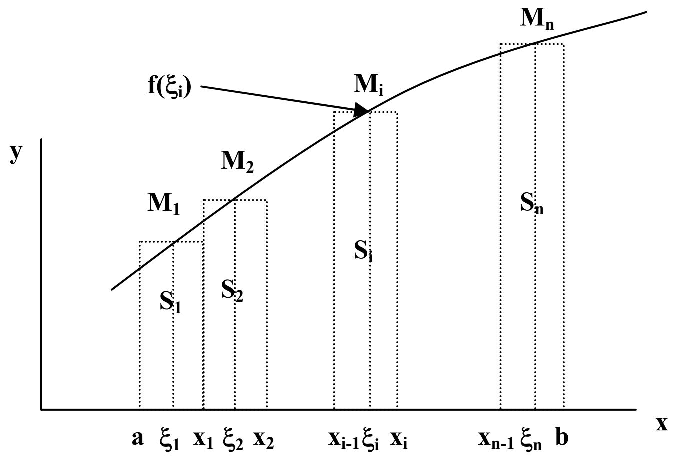


Рис. 2. Геометрический смысл

При неограниченном увеличении числа точек деления или $\Delta x \to 0$, верхняя граница фигуры (ломаная линия) переходит в кривую *y=f(x)*. Площадь полученной фигуры (криволинейной трапеции) – определенный интеграл.

Во многих случаях, когда подынтегральная функция задана в аналитическом виде, определенный интеграл удается вычислить непосредственно с помощью определенного (с помощью первообразной) используя формулу Ньютона-Лейбница. Она состоит в том, что определенный интеграл равен приращению первообразной *F(x)* на отрезке интегрирования [*a;b*].

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) \qquad (4)$$

Однако, на практике этой формулой часто нельзя воспользоваться по двум основным причинам:

- вид подынтегральной функции f(x) не допускает непосредственного интегрирования (т.е. первообразную нельзя выразить в элементарной функции);
- значение f(x) задано на фиксированном множестве точек, т.е. в виде таблицы.

Тогда используются методы численного интегрирования. Они основаны на аппроксимации подынтегральной функции (замене ее некоторым более простым выражением).

В дальнейшем будем использовать кусочную (локальную) интерполяцию. Это позволяет приближенно заменить определенный интеграл (3) интегральной суммой (2). В зависимости от способа интерполяции подынтегральные функции различают разные методы численного интегрирования (методы прямоугольников, трапеций, парабол и др.).

К вычислению определенного интеграла сводится большое количество задач (вычисление площадей фигур, определение работы переменной силы и т.п.). Решение задач с использованием кратных интегралов тоже может быть в конечном итоге сведено к вычислению определенного интеграла.

Метод прямоугольников

Метод непосредственно использует замену определенного интеграла (3) интегральной суммой (2). В качестве точек ε_i может выбираться любая точка в промежутке $[x_{i-1}; x_i]$. В зависимости от выбора этой точки различают методы левых, правых и центральных прямоугольников.

1. $\varepsilon_i = x_{i-1}$ - левая граница интервала – метод левых;
2. $\varepsilon_i = x_i$ - правая граница интервала – метод правых;
3. $\varepsilon_i = \dfrac{x_i + x_{i-1}}{2}$ - середина интервала – метод центральных

Обычно, когда рассматривают метод прямоугольников, разбивают $[a,b]$ на n равных отрезков $\Delta x_i = h = const$.

В этом случае получаем следующие формулы для разных методов (рис. 3 – 5).

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h\sum_{k=0}^{n-1} y_k,\ \ y_k = f(\varepsilon_k) \qquad (\text{для левых}) \tag{5}$$

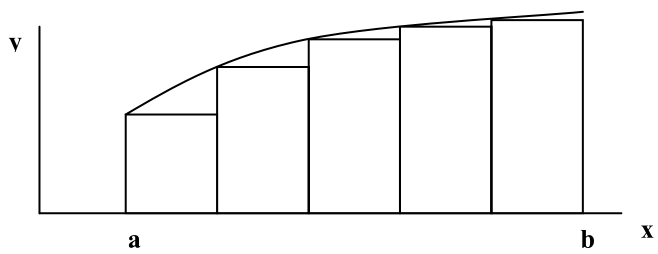


Рис. 3. Метод левых прямоугольников

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h\sum_{k=1}^{n} y_k,\ \ y_k = f(\varepsilon_k) \qquad (\text{для правых}) \tag{6}$$

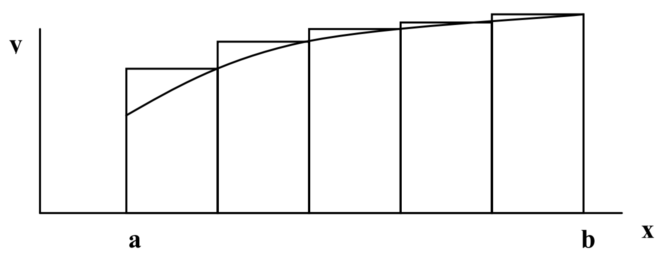


Рис. 4. Метод правых прямоугольников

Заметим, что в пределах одного шага подынтегральная функция заменяется (аппроксимация) отрезком горизонтальной прямой т.е. первым членом полинома $y = a_0$.

Коэффициент a_0 ищется из условия прохождения кривой через точки ε_i, т.е. в случае левых прямоугольников $y_i = y(x_i - 1)$, а в случае правых $y_i = y(x_i)$.

Широко распространенным и более точным является вид формулы прямоугольников, использующий значения функции в средних точках элементарных отрезков, т.е.

$$y(\varepsilon_i) = y_i = y\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) = y\left(x_{i-\frac{1}{2}}\right)$$

В этом случае формула прямоугольника имеет вид:

$$\int_a^b f(x)\,dx = h\sum_{i=1}^{n} y\left(x_{i-\frac{1}{2}}\right),\ i = 1,2...n \quad (\text{для центральных}) \qquad (7)$$

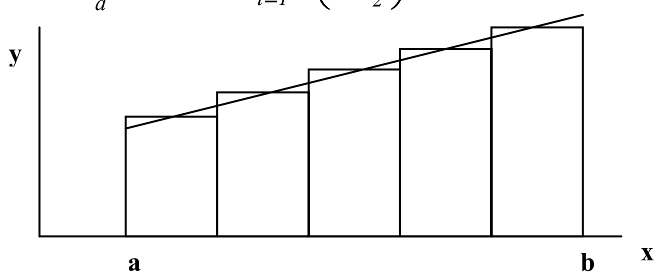


Рис. 5. Метод центральных прямоугольников

Пример №1: Вычислить приближенное значение интеграла методом прямоугольников:

$$I = \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1}dx \text{ с шагом h=0,2.}$$

Решение

1. ***Метод левых прямоугольников***

a) ***Ручной счет***

k	x	$F_k(x)$
1	0	1
2	0.2	0.9615
3	0.4	0.8620
4	0.6	0.7353
5	0.8	0.6098

$$I_Л = h \cdot \sum_{k=1}^{5} f_k(x) = 0.2 \cdot 4.169 \approx 0.834$$

б) Реализация в Microsoft Excel

Вычисление интеграла методом левых прямоугольников				
к	x	$F_k(x)$	h=	0,2
1	0	1		
2	0,2	0,961538462		
3	0,4	0,862068966		
4	0,6	0,735294118		
5	0,8	0,609756098		
	I=	**0,833731528**		

c) Реализация в Mathcad

$i := 0..n-1 \qquad x_i := a + i \cdot hx \qquad y_i := f(x_i)$

$$I := \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx \qquad f(x) := \frac{1}{x^2+1}$$

$a := 0 \qquad b := 1$

$n := 5$

$$hx := \frac{b-a}{n}$$

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.2 \\ 0.4 \\ 0.6 \\ 0.8 \end{pmatrix} \qquad y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.962 \\ 0.862 \\ 0.735 \\ 0.61 \end{pmatrix}$$

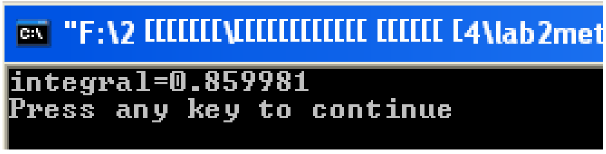
$$ILP := hx \cdot \left(\sum_i f(x_i) \right)$$

$ILP = 0.834$

d) Реализация в Microsoft Visual C++

```
#include "stdafx.h"
#include "iostream.h"
#include "math.h"

double f(double x)
{
	return 1/(pow(x,2)+1);
}

int main(int argc, char* argv[])
{
	double s,h,a=0,b=1;
	s=0;
	h=0.1;
	while(a<b)
	{
		s=s+f(a)*h;
		a=a+h;
	}
	cout<<"integral="<<s<<endl;
	return 0;
}
```

Результат



2. *Метод правых прямоугольников*

a) Ручной счет

k	x	$F_k(x)$
1	0.2	0.9615
2	0.4	0.8620
3	0.6	0.7353
4	0.8	0.6098
5	1	0.5

$$I_{ПР} \approx 0.733$$

b) Реализация в Microsoft Excel

Вычисление интеграла методом правых прямоугольников				
к	x	$F_k(x)$	h=	0,2
1	0,2	0,961538462		
2	0,4	0,862068966		
3	0,6	0,735294118		
4	0,8	0,609756098		
5	1	0,5		
	I=	**0,733731528**		

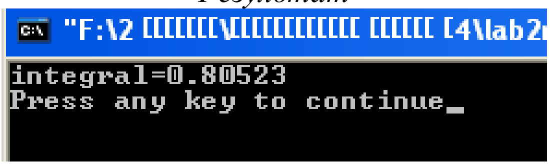
c) Реализация в Mathcad

d) Реализация в Microsoft Visual C++

```
#include "stdafx.h"

#include "iostream.h"
#include "math.h"

double f(double x)
```

```
{
	return 1/(pow(x,2)+1);
}

int main(int argc, char* argv[])
{
	double s,h,a=0,b=1;
	s=0;
	h=0.1;
	while(a<=b)
	{
		s=s+f(a+h)*h;
		a=a+h;
	}
	cout<<"integral="<<s<<endl;
	return 0;
}
```

Результат



3. Метод центральных прямоугольников

a) Ручной счет

k	x	$F_k(x)$
1	0.1	0.99
2	0.3	0.917
3	0.5	0.8
4	0.7	0.671
5	0.9	0.552

$$I_Ц \approx 0.786$$

b) Реализация в Microsoft Excel

Вычисление интеграла методом центральных прямоугольников				
к	x	$F_k(x)$	h=	0,2
1	0,1	0,99009901		
2	0,3	0,917431193		
3	0,5	0,8		
4	0,7	0,67114094		
5	0,9	0,552486188		
	I=	**0,786231466**		

c) *Реализация в Mathcad*

3. Метод центральных прямоугольников

$i := 1..n \qquad xc_i := a + \left(i - \frac{1}{2}\right)\cdot hx \qquad yc_i := f(xc_i)$

$$I := \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx \qquad f(x) := \frac{1}{x^2+1}$$

$a := 0 \qquad b := 1$

$n := 5 \qquad hx := \frac{b-a}{n}$

$$xc = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.1 \\ 0.3 \\ 0.5 \\ 0.7 \\ 0.9 \end{pmatrix} \qquad yc = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.99 \\ 0.917 \\ 0.8 \\ 0.671 \\ 0.552 \end{pmatrix}$$

$$ICP := hx\cdot\left(\sum_i f(xc_i)\right)$$

$ICP = 0.786$

d) *Реализация в Microsoft Visual C++*

```
#include "stdafx.h"
#include "iostream.h"
#include "math.h"

double f(double x)
{
	return 1/(pow(x,2)+1);
}

int main(int argc, char* argv[])
{
	double s,h,a=0,b=1;
	s=0;
	h=0.1;
	while(a<=b)
	{
		s=s+f(a+h/2)*h;
		a=a+h;
	}
	cout<<"integral="<<s<<endl;
	return 0;
}
```

Результат

```
"F:\2 [[[[[[\[[[[[[[[[[[[ [[[[[[ [4\lab
integral=0.833169
Press any key to continue
```

Метод трапеций

Отличается от метода прямоугольников способом аппроксимации отрезка Δx_i. В методе прямоугольников аппроксимация осуществлялась отрезком горизонтальной прямой, а в методе трапеций – прямой общего вида, т.е. полиномом 1-й степени:

$$y = a_0 + a_1 x.$$

Коэффициенты вычисляются из условия прохождения этой прямой через две точки (значения подынтегральной функции на краях интервала Δx_i).

График функции $y = f(x)$ представляется в виде ломаной, соединяющей точки (x_i, y_i) (рис. 6).

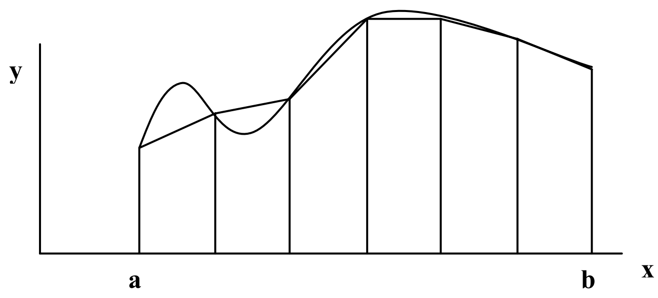


Рис. 6. Метод трапеций

Площадь всей фигуры складывается из элементарных прямоугольных трапеций. Площадь каждой элементарной трапеции может быть записана в виде:

$$S_i = \frac{y_{i-1} + y_i}{2} \Delta x_i \quad (i = 1,2,...)$$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} h_i (y_{i-1} + y_i)$$ - площадь всей фигуры.

Если $\Delta x_i = h_i = h = const$ (интегрирование с постоянным шагом), то формула трапеций принимает вид:

$$\int_a^b f(x)dx = h(\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n} y_i). \qquad (8)$$

Пример №2: Вычислить приближенное значение интеграла методом прямоугольников:

$$I = \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx$$ с шагом h=0,2.

Решение

1. ***Ручной счет***

k	x	$y_k(x)$
0	0	1
1	0.2	0.9615
2	0.4	0.8620
3	0.6	0.7353
4	0.8	0.6098
5	1	0.5

$$I_{mp} = h(\frac{y_0 + y_5}{2} + \sum_{i=1}^{n} y_i) = 0.783$$

2. ***Реализация в Microsoft Excel***

Вычисление интеграла методом трапеции					
k	x	$y_k(x)$	h=	0,2	
0	0	1			
1	0,2	0,961538			
2	0,4	0,862069			
3	0,6	0,735294			
4	0,8	0,609756			
5	1	0,5			
	Интеграл=		0,783731528		

3. ***Реализация в Mathcad***

4\. Метод трапеций

$i := 1 .. n - 1 \qquad x_i := a + i \cdot hx$

$$I := \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1}\,dx \qquad f(x) := \frac{1}{x^2 + 1}$$

$a := 0 \qquad b := 1$

$n := 5$

$$hx := \frac{b - a}{n}$$

$$ITR := hx \cdot \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_i f(x_i) \right)$$

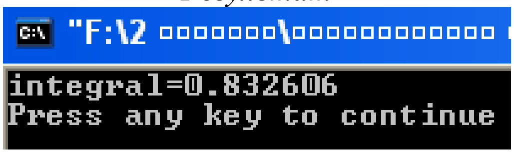
$ITR = 0.784$

4. ***Реализация в Microsoft Visual C++***

```
#include "stdafx.h"
#include "iostream.h"
#include "math.h"

double f(double x)
{
        return 1/(pow(x,2)+1);
}

int main(int argc, char* argv[])
{
        double s,h,a=0,b=1;
        s=0;
        h=0.1;
```

```
        while(a<=b)
        {
                s=s+(f(a)+f(a+h))*h/2;
                a=a+h;
        }
        cout<<"integral="<<s<<endl;
        return 0;
}
```

Результат



Метод Симпсона

Разобьем отрезок $[a,b]$ на четно число n равных частей с шагом h на каждом отрезке (рис.7).

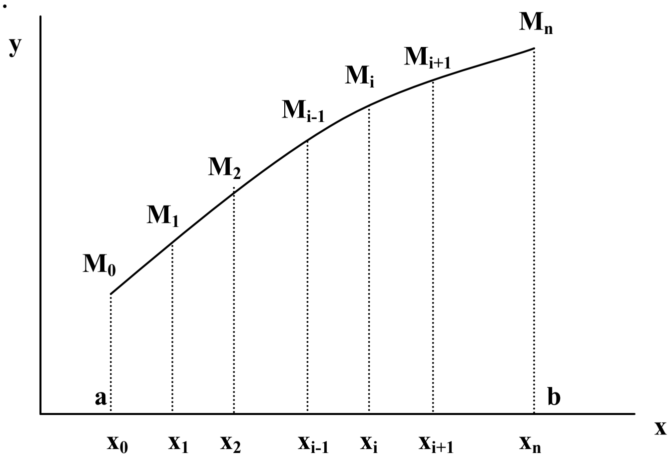


Рис. 7. Метод Симпсона

Возьмем отрезки, равные двум шагам: $[x_0,x_2],[x_2,x_4],...,[x_{i-1},x_{i+1}],...,[x_{n-2},x_n]$. На каждом из них подынтегральную функцию заменим интерполяционным полиномом второй степени:

$$f(x)=\varphi_i(x)=a_i x^2+b_i x+c_i$$
$$x_{i-1}\le x\le x_{i+1}\quad (\text{на каждом отрезке})$$

Коэффициенты a_i, b_i, c_i могут быть найдены из условий равенства многочлена в точках x_i соответствующим табличным значениям $f(x_i)$

В качестве $\varphi_i(x)$ можно взять интерполяционный многочлен Лагранжа, проходящий через точки

$$M_{i-1}(x_{i-1},y_{i-1}),M_i(x_i,y_i),M_{i+1}(x_{i+1},y_{i+1})$$

$$\varphi_i(x)=\frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{(x_{i-1}-x_i)(x_{i-1}-x_{i+1})}y_{i-1}+\frac{(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})}{(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})}y_i+$$
$$+\frac{(x-x_{i-1})(x-x_i)}{(x_{i+1}-x_{i-1})(x_{i+1}-x_i)}y_{i+1}$$

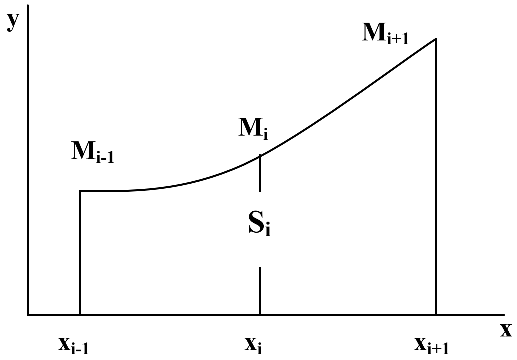


Рис. 8. Криволинейная трапеция

Элементарная функция S_i - площадь криволинейной трапеции (рис. 8) вычисляется с помощью определенного интеграла, подынтегральной функцией которого является многочлен Лагранжа:

$$S_i=\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}\varphi_i(x)dx=\frac{1}{2h^2}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}[(x-x_i)(x-x_{i+1})y_{i-1}-2(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})y_i+(x-x_{i-1})(x-x_i)y_{i+1}]dx$$

$$S_i=\frac{h}{3}(y_{i-1}+4y_i+y_{i+1})$$

$$S=\frac{h}{3}(y_0+4y_1+2y_2+4y_3+2y_4+...+2y_{n-2}+4y_{n-1}+y_n)$$

Данное выражение принимается в качестве значения определенного интеграла:

$$\int_a^b f(x)dx=\frac{h}{3}(y(a)+4y(a+h)+2y(a+2h)+4y(a+3h)+...$$
$$...+2y(b-2h)+4y(b-h)+y(b)$$

Это - формула Симпсона.

Пример №3: Вычислить приближенное значение интеграла методом прямоугольников:

$$I=\int_0^1\frac{1}{x^2+1}dx \text{ с шагом h=0,1.}$$

Решение

1. ***Ручной счет***

x_i	y_i
0	1
0,1	0,990099
0,2	0,961538
0,3	0,917431

0,4	0,862069
0,5	0,800000
0,6	0,735294
0,7	0,671141
0,8	0,609756
0,9	0,552486
1	0,500000

$$I_{точное} = 0.785398$$

$$I_{симсона} = \frac{0.1}{3}(y_0 + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9) +$$
$$2(y_2 + y_4 + y_6 + y_8) + y_{10}) = 0.785398$$

Таким образом, метод Симпсона является наиболее точным, поэтому его чаще всего используют при работе на ЭВМ. На ЭВМ есть стандартные программы, вычисляющие значения определенного интеграла методом Симпсона.

2. *Реализация в Microsoft Excel*

Вычисление интеграла методом Симпсона			
i	x_i	yi	
0	0	1	
1	0,1	0,990099	
2	0,2	0,961538	
3	0,3	0,917431	
4	0,4	0,862069	
5	0,5	0,8	
6	0,6	0,735294	
7	0,7	0,671141	
8	0,8	0,609756	
9	0,9	0,552486	
10	1	0,5	
	Интеграл=		0,785398153

3. *Реализация в Mathcad*

5. Метод Симпсона

$$i := 1,3..n-1$$

$$S1 := \sum_{i} f(x_i)$$

$$I := \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx \qquad f(x) := \frac{1}{x^2+1}$$

$$a := 0 \qquad b := 1$$

$$n := 5$$

$$hx := \frac{b-a}{n}$$

$$i := 2,4..n-2$$

$$S2 := \sum_{i} f(x_i)$$

$$IPR := \frac{hx\cdot(f(a) + f(b) + 4\cdot S1 + 2\cdot S2)}{3}$$

$$IPR = 0.667$$

5. *Реализация в Microsoft Visual C++*

```
#include "stdafx.h"
#include "iostream.h"
#include "math.h"

double f(double x)
{
	return 1/(pow(x,2)+1);
}

int main(int argc, char* argv[])
{
	double s,h,a=0,b=1;
	s=0;
	h=0.1;
	while(a<=b)
	{
		s=s+(f(a)+4*f(a+h/2)+f(a+h))*(h/3);
		a=a+h;
	}
	cout<<"integral="<<s<<endl;
	return 0;
}
```

Результат