

## ДВОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Каждый решенный пример стоит по 1 баллу.

### I. Расставить пределы интегрирования в интеграле

$$\int \int_D f(x, y) dx dy$$

двумя способами, если  $D$  — это

- 1) Область, ограниченная линиями  $y = x$ ,  $y = \frac{1}{x}$ ,  $x = 2$ ;
- 2) Четырехугольник с вершинами  $(2, 3)$ ,  $(-5, -1)$ ,  $(-3, 4)$ ,  $(0, 1)$ ;
- 3) Пятиугольник с вершинами  $(-1, 2)$ ,  $(0, 3)$ ,  $(1, -1)$ ,  $(2, -2)$ ,  $(4, 1)$ ;
- 4) Область, ограниченная кривыми  $y^2 = ax$ ,  $x^2 + y^2 = 2ax$ ,  $y = 0$  ( $a > 0$ ,  $y > 0$ );
- 5) Область, ограниченная кривыми  $x^2 + y^2 = 2a^2$ ,  $x^2 = ay$  ( $a > 0$ ,  $y > 0$ );
- 6) Область, ограниченная кривыми  $x^2 + y^2 = ax$ ,  $x^2 + y^2 = 2ax$ ,  $y = 0$  ( $a > 0$ ,  $y > 0$ ).

### II. Поменять порядок интегрирования

- 7)  $\int_3^7 dx \int_{9/x}^3 f(x, y) dy + \int_7^9 dx \int_{9/x}^{10-x} f(x, y) dy$ ; 8)  $\int_0^4 dx \int_{\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} f(x, y) dy$ ; 9)  $\int_{-2}^6 dx \int_{-3-\sqrt{12+4x-x^2}}^{-3+\sqrt{12+4x-x^2}} f(x, y) dy$ ;
- 10)  $\int_{-1}^1 dy \int_{y^2-1}^{1-y^2} f(x, y) dx$ ; 11)  $\int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{2-x^2}} f(x, y) dy$ ; 12)  $\int_{-2}^2 dx \int_0^{(x+2)/2} f(x, y) dy + \int_2^{10/3} dx \int_{\sqrt{x^2-4}}^{(x+2)/2} f(x, y) dy$ ;
- 13)  $\int_0^1 dy \int_{y^2/9}^y f(x, y) dx + \int_1^3 dy \int_{y^2/9}^1 f(x, y) dx$ ; 14)  $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dy \int_{y^2-1}^{y^2/2} f(x, y) dx$ ; 15)  $\int_0^a dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{a+\sqrt{a^2-x^2}} f(x, y) dy$ .

### III. Вычислить двойной интеграл

16)  $\int \int_G (x^2 + y^2) dx dy$ , где область  $G$  ограничена кривыми  $y = x$ ,  $x + y = 2a$ ,  $x = 0$ ;

17)  $\int \int_G (x^2 + y^2) dx dy$ , где область  $G$  ограничена кривой  $x^2 + y^2 = 2ax$ ;

18)  $\int \int_G (x^2 + y^2) dx dy$ , где область  $G$  ограничена кривыми  $x^2 + y^2 = ax$ ,  $x^2 + y^2 = 2ax$ ,  $y = 0$  ( $y > 0$ );

19)  $\int \int_G dx dy$ , где область  $G$  ограничена кривыми  $x^2 = ay$ ,  $x^2 + y^2 = 2a^2$ ,  $y = 0$  ( $x > 0$ ,  $a > 0$ );

20)  $\int \int_G x \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ , где область  $G$  ограничена лепестком лемнискаты  $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$  ( $x \geq 0$ );

21)  $\int \int_G xy dx dy$ , где область  $G$  ограничена кривыми  $x + y = 2$ ,  $x^2 + y^2 = 2y$  ( $x > 0$ );

22)  $\int \int_G (x + 2y) dx dy$ , где область  $G$  ограничена кривыми  $y = x^2$ ,  $y = \sqrt{x}$ ;

23)  $\int \int_G (4 - y) dx dy$ , где область  $G$  ограничена кривыми  $x^2 = 4y$ ,  $y = 1$ ,  $x = 0$  ( $x > 0$ );

24)  $\int \int_G \frac{x dx dy}{x^2 + y^2}$ , где область  $G$  ограничена кривыми  $y = x \operatorname{tg} x$ ,  $y = x$ ,  $x = \pi/8$  ( $x \geq \pi/8$ );

25)  $\int \int_G \sqrt{a^2 + x^2} dx dy$ , где область  $G$  ограничена кривыми  $y^2 - x^2 = a^2$ ,  $x = a$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$  ( $y > 0$ ,  $a > 0$ );

26)  $\int \int_G e^{x+y} dx dy$ , где область  $G$  ограничена кривыми  $y = e^x$ ,  $y = 2$ ,  $x = 0$ .

### IV. Найти

27) Площадь фигуры, ограниченной кривыми  $xy = 4$ ,  $x + y = 5$ ;

28) Площадь фигуры, ограниченной кривыми  $y^2 = 4ax + 4a^2$ ,  $x + y = 2a$  ( $a > 0$ );

29) Площадь фигуры, ограниченной кривыми  $y = \frac{8a^3}{x^2 + 4a^2}$ ,  $x = 2y$ ,  $x = 0$  ( $a > 0$ );

30) Площадь фигуры, ограниченной кривыми  $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$ ,  $x^2 + y^2 = 2ax$ ;

31) Координаты центра масс фигуры, ограниченной кривыми  $y^2 = ax$ ,  $y = x$ ;

32) Координаты центра масс фигуры, ограниченной кривыми  $xy = a^2$ ,  $y^2 = 8ax$ ,  $x = 2a$  ( $a > 0$ ).