Содержание

1 Круг

Найти площадь круга $x^2 + y^2 = 9$*. Эквивалентно:* $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 9\}$

Выполним для наглядности расстановку пределов интегрирования в декартовой системе координат. Например, поставив внутри интеграл по y. Тогда $y = \pm\sqrt{9 - x^2}$ и имеем

$$S_c = \iint_D dx\,dy = \int\limits_{-3}^{3} dx \int\limits_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} dy = 2\int\limits_{-3}^{3} \sqrt{9 - x^2}\,dx.$$

Это берущийся интеграл, который из естественных соображений равен 9π. Однако,

Правило

Если область интегрирования и/или подынтегральная функция описываются уравнением, содержащим $x^2 + y^2$, то следует задуматься о полярной замене.

Почему это может быть удобно? Вспомним (рис. 1):

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \\ r \geq 0, \quad \forall\alpha \in \mathbb{R} \quad \varphi \in [\alpha, \alpha + 2\pi)\,, \end{cases}$$

то есть точка в плоскости задается расстоянием до нее от центра и углом относительно направления a (чаще удобно принять $a = 0$). Заметим:

$$x^2 + y^2 = \rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi = \rho^2,$$

что способно значительно упростить вычисления.

В случае с рассматриваемой окружностью

$$x^2 + y^2 = 9 \implies \rho^2 = 9 \implies \rho = 3.$$

Остается понять, как расставлять пределы и чему равен якобиан. Ответим на второй вопрос:

$$I_{\rho,\varphi} = \det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial\rho} & \dfrac{\partial x}{\partial\varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial\rho} & \dfrac{\partial y}{\partial\varphi} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\,\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\,\cos\varphi \end{pmatrix} =$$
$$= \cos\varphi\cdot\rho\,\cos\varphi - \sin\varphi(-\rho\,\sin\varphi) = \rho\cdot(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = \rho$$

То есть справедливо условное соотношение при замене переменных:

$$dx\,dy = I\,d\rho\,d\varphi = \rho\,d\rho\,d\varphi.$$

Расставлять можно делать двумя способами (хотя и в 99% случаев используется второй вариант): ставить внутрь интеграл по φ или интеграл по ρ.

1. Если внутрь ставить интеграл по φ, то область с двух сторон зажимается максимальным и минимальным радиусом (рис. 2, зеленая и красная дуги), а затем производится интегрирование от правой стороны фигуры к левой (синие дуги).

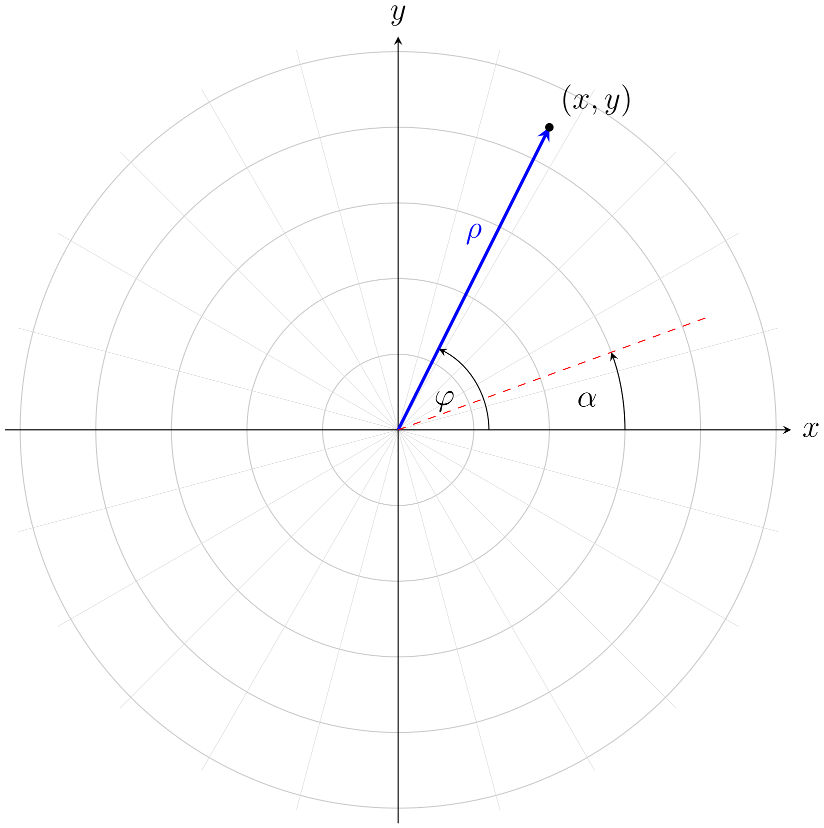

Рис. 1: Полярная сетка

2. Если внутрь ставить интеграл по ρ, то область с двух сторон зажимается максимальным и минимальным углом (рис. 3, зеленый и зеленый лучи), а затем производится интегрирование от ближней к центру до дальней от центра границы фигуры (синие части лучей).

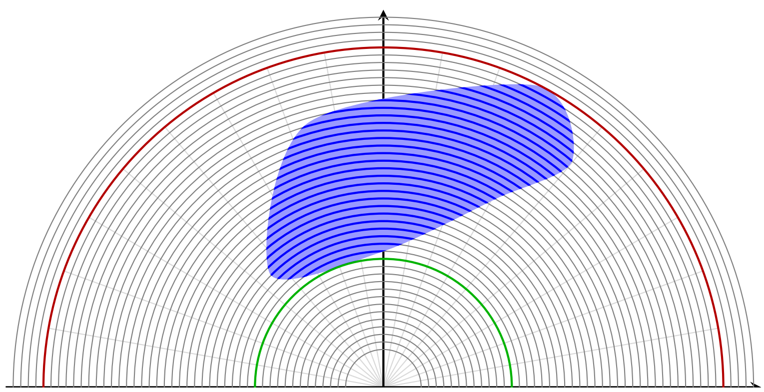

Рис. 2: φ внутри

Важно иметь в виду, что подобный алгоритм применим только для того случая, когда фигура *правильная*, то есть каждая дуга (в первом случае) или каждый луч (во втором случае) пересекают область не более двух раз. Иначе следует поступать так же, как это делали в декартовой системе координат: дробить фигуру на *правильные* составные части и воспитывать их по-отдельности. Вернемся к окружности:

1. Внутри φ.

$$x^2 + y^2 = 9 = 3^2, \implies D = \{(\rho, \varphi \mid 0 < \rho \leq 3)\}.$$

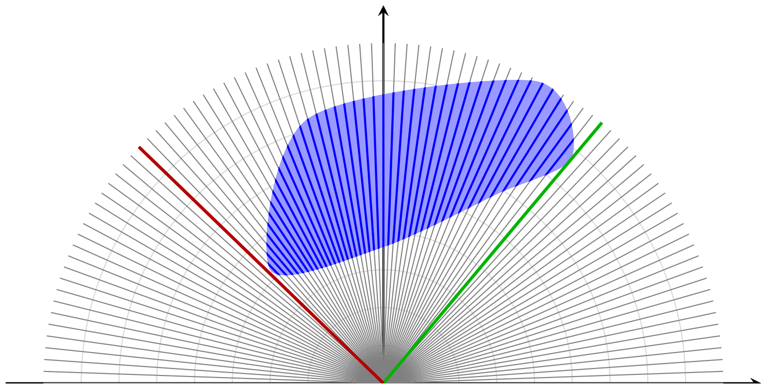

Рис. 3: ρ внутри

То есть радиус меняется от 0 до 3, а угол на всю катушку:

$$S_c = \iint_D dx\,dy = \iint_D \rho\,d\rho\,d\varphi = \int\limits_0^3 \rho\,d\rho \int\limits_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi\frac{3^2}{2} = \boxed{9\pi}$$

2. Внутри ρ. В данном случае формально отличий не будет, имеем

$$S_c = \iint_D dx\,dy = \iint_D \rho\,d\rho\,d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^3 \rho\,d\rho = 2\pi\frac{3^2}{2} = \boxed{9\pi}$$

2 Кардиоида

Вычислить площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $\rho = 2a\,(1 - \cos\varphi)$.

Нетрудно построить график рис. 4.

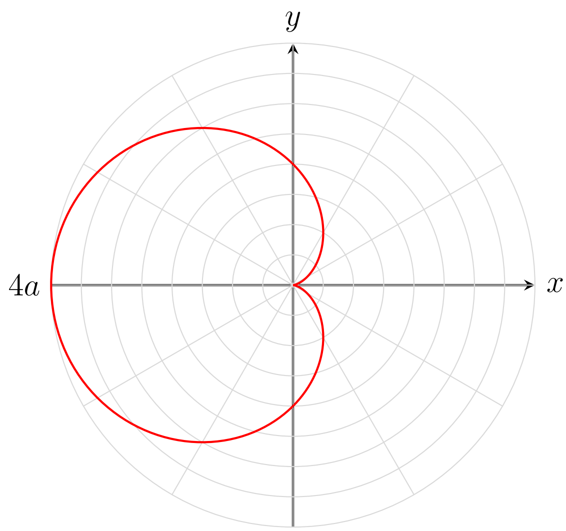

Рис. 4: Кардиоида

Сначала поставим внутрь ρ. Тогда из соображений

$$\rho \geq 0 \implies (1 - \cos\varphi) \geq 0 \implies (\alpha = 0) \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

имеем (принимая $\alpha = 0$)

$$D = \{(\rho,\ \varphi) \mid \rho \le 2a\,(1-\cos\varphi),\ 0 \le \varphi < 2\pi\}\,,$$

а значит

$$S_c = \iint_D dx\,dy = \iint_D \rho\,d\rho\,d\varphi = \int\limits_0^{\pi} d\rho \int\limits_0^{2a\,(1-\cos\varphi)} \rho\,d\rho = \frac{4a^2}{2}\int\limits_0^{2\pi}(1-\cos\varphi)^2\,d\varphi =$$

$$= 2a^2\int\limits_0^{2\pi}\left(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi\right)\,d\varphi = 4\pi a^2 + 2a^2\int\limits_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\varphi}{2}d\varphi = \boxed{6\pi a^2}$$

Но при попытке расставить пределы в другом порядке возникают сложности.

(a) Обратим внимание на симметрию кардиоиды и будем рассматривать только область $0 \le \varphi \le \pi$. То есть $\alpha = 0$ и

$$D = \{(\rho,\ \varphi) \mid \rho \le 2a\,(1-\cos\varphi),\ 0 \le \varphi \le 2\}\,,$$

$$\iint_D dx\,dy = 2\iint_{D_+} dx\,dy.$$

(b) Выразим φ через ρ:

$$\rho = 2a\,(1-\cos\varphi) \implies 1-\frac{\rho}{2a} = \cos\varphi \implies \varphi = \arccos\left(1-\frac{\rho}{2a}\right).$$

Мы можем не задумываться об угле, поскольку уже ограничили его на предыдущем пункте кообластью арккосинуса.

(c) Радиус из геометрических соображений (см. рис. 4) $0 \le \rho \le 4a$.

(d) Наконец, получаем

$$D_+ = \left\{(\rho,\varphi) \quad \middle| \quad 0 \le \rho \le 4a, \quad \arccos\left(1-\frac{\rho}{2a}\right) \le \varphi \le \pi\right\}.$$

Остается вычислить интеграл:

$$S_c = 2\iint_{D_+} \rho\,d\rho\,d\varphi = 2\int\limits_0^{4a} d\rho \int\limits_{\arccos\left(1-\frac{\rho}{4a}\right)}^{\pi} \rho\,d\varphi,$$

который оказался гораздо сложнее, чем устный интеграл варианта с внутренним интегрированием по ρ. Тем не менее,

$$2\int\limits_0^{4a} d\rho \int\limits_{\arccos\left(1-\frac{\rho}{4a}\right)}^{\pi} \rho\,d\varphi = 2\int\limits_0^{4a}\left(\pi - \arccos\left(1-\frac{\rho}{2a}\right)\right)\rho\,d\rho = \boxed{6\pi a^2}$$

однако, чтобы взять последний интеграл, придется потратить полжизни.

Совет

Если вам не удается вычислить интеграл одним из способов, попробуйте поменять порядок интегрирования. В первую очередь старайтесь ставить внутрь интеграла $d\rho$, зачастую этот способ дает более простой интеграл.

3 Лемниската бернулли

Найти интеграл от функции $p(x, y) = x^2 - y^2$, взятый по лемнискате Бернулли

$$\left(x^2 + y^2\right)^2 = 2a^2\left(x^2 - y^2\right).$$

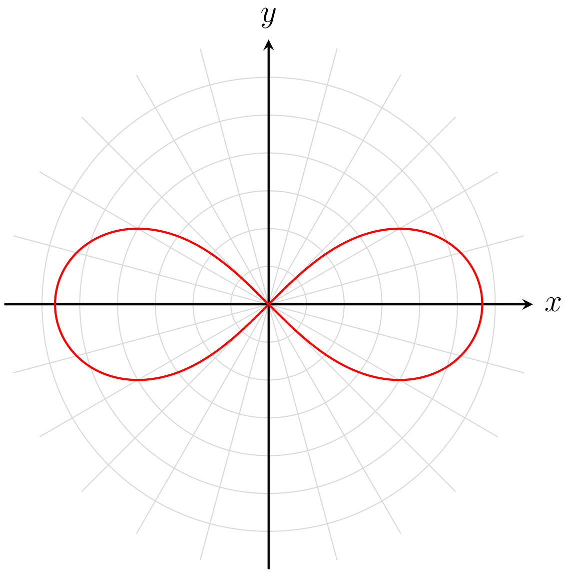

Рис. 5: Лемниската Бернулли

Расставлять пределы в декартовой системе по такой ботве не хочется. Поэтому сразу делаем полярную замену:

(a) В подынтегральной функции:

$$x^2 - y^2 = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi = \cos(2\varphi);$$

(b) В области интегрирования

$$\left(x^2 + y^2\right)^2 = 2a^2\left(x^2 - y^2\right) \implies \rho^4 = 2a^2\left(\rho^2\cos^2\varphi - \rho^2\sin^2\varphi\right) = 2a^2\rho^2\cos(2\varphi),$$

То есть в итоге

$$\rho^2 = 2a^2\cos(2\varphi).$$

Поставим интеграл по ρ внутрь. Из неравенства $\cos(2\varphi) \geq 0$ получаем условие на угол:

$$\cos(2\varphi) \geq 0 \implies -\frac{\pi}{4} + 2\pi k \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Из соображений симметрии достаточно оставить лишь углы из области $0 \leq \varphi \leq \pi/2$, а результат вычисления в конце домножить на четыре. Теперь область

$$D_+ = \left\{(\rho, \varphi) \mid \rho \leq \sqrt{2a^2\cos(2\varphi)},\ 0 \leq \varphi \leq \pi/4\right\}.$$

Заметим, если бы мы не прибегали к симметрии, то удобно было бы принять $\alpha = -\pi/2$.

$$M_l = 4\iint_{D_+} \rho\,\cos\left(2\varphi\right)\,d\varphi\,d\rho = 4\int\limits_0^{\pi/4} d\varphi \int\limits_0^{a\sqrt{2\cos(2\varphi)}} \rho\cos\left(2\varphi\right)d\rho =$$
$$= 4\int\limits_0^{\pi/4} a^2\cos^2\left(2\varphi\right) = 2a^2\int\limits_0^{\pi/4}\Big(1+\cos(4\varphi)\Big)\,d\varphi = \boxed{\frac{\pi a^2}{2}}$$

Поменяем порядок интегрирования.

$$\rho^2 = 2a^2\cos(2\varphi) \implies \varphi = \frac{\arccos\left(\frac{\rho^2}{2a^2}\right)}{2}$$

И снова, переход справедлив в силу симметрии (рассматриваем только первую четверть). Максимум радиуса $\rho_{\max} = a\sqrt{2}$ достигается при $\varphi = 0$. Таким образом

$$D_+ = \left\{ (\rho,\varphi) \;\middle|\; 0 \le \rho \le a\sqrt{2},\, 0 \le \varphi \le \frac{\arccos\left(\frac{\rho^2}{2a^2}\right)}{2} \right\}.$$

То есть

$$M_l = 4\int\limits_0^{a\sqrt{2}} d\rho \int\limits_0^{\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{\rho^2}{2a^2}\right)} \rho\,\cos\left(2\varphi\right)\,d\varphi = \boxed{\frac{\pi a^2}{2}}$$

На то, чтобы взять последний интеграл, вы потратите вторую половину жизни.

Правило

При замене переменной необходимо

(a) Выполнить замену в подынтегральной функции;

(b) Пересчитать пределы;

(c) Домножить подынтегральную функцию на якобиан.

Не забывайте про эти три шага!