Задача 2. Имеется несколько одинаковых гирь массой a и несколько одинаковых брусков массой b. Сначала на первых весах с ошибкой измерения, распределенной по $\mathcal{N}\left(0, \frac{1}{9}\sigma^2\right)$, взвешиваю 2 гири и 1 брусок, затем 1 гирю и 1 брусок. Далее на вторых весах с ошибкой измерения, распределенной по $\mathcal{N}\left(0, 4\sigma^2\right)$, сначала взвешивают 2 бруска отдельно, а затем 2 гири и 4 бруска вместе. Итого имеется 4 измерения X_1, X_2, X_3, X_4.

а) Сведите задачу к линейной гауссовской модели;

б) Найдите оценки наименьших квадратов для a, b;

в) Найдите оптимальную оценку для σ^2.

Одна из задач представленных Михаилом Медо. семинаристом

пойдем по алгоритму:

•) $\theta = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ $\quad Z = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \end{pmatrix}$, $\varepsilon_1 \sim \varepsilon_2 \sim N\left(0, \frac{1}{9}\sigma^2\right)$

$\varepsilon_3 \sim \varepsilon_4 \sim N\left(0, 4\sigma^2\right)$

$$X = Z\theta + \varepsilon$$

•) По условию есть всё необходимое для гауссовской модели, кроме равных дисперсий

фиксим:

$Z' = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad \varepsilon' = \begin{pmatrix} \varepsilon_1' \\ \varepsilon_2' \\ \varepsilon_3' \\ \varepsilon_4' \end{pmatrix}$ $\quad \varepsilon_i' \sim N\left(0, \sigma^2\right)$

$X' = \begin{pmatrix} 3X_1 \\ 3X_2 \\ \frac{1}{2}X_3 \\ \frac{1}{2}X_4 \end{pmatrix}$ $\quad X' = Z'\theta + \varepsilon'$

3) $\hat{\theta}$: вспомним формулу: $\hat{\theta} = (Z^TZ)^{-1}Z^TX$

$$Z^TZ = \begin{pmatrix}6&3&0&1\\3&3&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6&3\\3&3\\0&1\\1&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}46&29\\29&23\end{pmatrix}$$

(- должна быть симм матрица)

$$(Z^TZ)^{-1} = \begin{vmatrix} 46\cdot 23 = 138 + 92 = 1058 & 29\cdot 29 = 261 + 58 = 841 \end{vmatrix}$$

$1058 - 841 = 217$

$$= \frac{1}{217}\begin{pmatrix}23&-29\\-29&46\end{pmatrix}$$

(тут я пользуюсь тем, что $A = \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$, $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}$)

$$(Z^TZ)^{-1}Z = \frac{1}{217}\begin{pmatrix}23&-29\\-29&46\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6&3&0&1\\3&3&1&2\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{217}\begin{pmatrix}51&-18&-29&-35\\-36&51&46&63\end{pmatrix}$$

$23\cdot 6 = 138$, $29\cdot 3 = 87$, $138 - 87 = 51$

$46\cdot 3 = 138$, $29\cdot 6 = 174$

$138 - 174 = -36$

$-87 + 138$

$92 - 29 = 63$

$$(Z^TZ)^{-1}ZX = \frac{1}{217}\begin{pmatrix}51&-18&-29&-35\\-36&51&46&63\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3X_1\\3X_2\\\frac{1}{2}X_3\\\frac{1}{2}X_4\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{217}\begin{pmatrix}153X_1 - 54X_2 - 14{,}5X_3 - 17{,}5X_4\\-108X_1 + 153X_2 + 23X_3 + 31{,}5X_4\end{pmatrix}$$

на хорошие числа в ответе можно не рассчитывать.

$\hat{\sigma}^2$: вспоминаем оценку: $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-k}\|X - Z\hat{\theta}\|^2$

$n = 4$, $k = 2$.

$$Z\hat{\theta} = \frac{1}{217}\begin{pmatrix}6 & 3\\ 3 & 3\\ 0 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}153x_1 - 54x_2 - 14,5x_3 - 17,5x_4\\ -108x_1 + 153x_2 + 23x_3 + 31,5x_4\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{217}\begin{pmatrix}594x_1\\ 297x_2\\ 23x_3\\ 45,5x_4\end{pmatrix}$$

$$X - Z\hat{\theta} = \frac{1}{217}\begin{pmatrix}217\cdot 3x_1 - 594x_1\\ 217\cdot 3x_2 - 297x_2\\ 217\cdot\frac{1}{2}x_3 - 23x_3\\ 217\cdot\frac{1}{2}x_4 - 45,5x_4\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{217}\begin{pmatrix}57x_1\\ 354x_2\\ 85,5x_3\\ 63x_4\end{pmatrix}$$

$$\|X - Z\hat{\theta}\|^2 = \frac{1}{217^2}\left(57^2x_1^2 + 354^2x_2^2 + (85,5)^2x_3^2 + 63^2x_4^2\right)$$

итого : $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{217^2}\left(57^2x_1^2 + 354^2x_2^2 + (85,5)^2x_3^2 + 63^2x_4^2\right)$

$$\begin{array}{r}153\\ \times\ 6\\ \hline 918\end{array} \quad \begin{array}{r}108\\ \times\ 3\\ \hline 324\end{array} \quad \begin{array}{r}918\\ -\ 324\\ \hline 600\\ -\ 6\\ \hline 594\end{array}$$

$$\begin{array}{r}54\\ \times\ 3\\ \hline 162\end{array} \quad \begin{array}{r}153\\ \times\ 3\\ \hline 459\end{array}$$

$$\begin{array}{r}459\\ -\ 162\\ \hline 307\\ -\ 10\\ \hline 297\end{array}$$

Задача 4. $X_1^{(1)}, \ldots, X_{n_1}^{(1)}$ – выборка из $N(a_1, \frac{1}{4}\sigma^2)$, $X_1^{(2)}, \ldots, X_{n_2}^{(2)}$ – выборка из $N(a_2, \sigma^2)$, $X_1^{(3)}, \ldots, X_{n_3}^{(3)}$ – выборка из $N(a_3, \sigma^2)$. Постройте F-критерий размера $\alpha \in (0,1)$ для проверки гипотезы $H_0: a_1 = 3a_2,\ a_1 - 2a_2 = a_3$.

•) приводим модель к гаус.:

$$X^{(1)} = \begin{pmatrix} X_1^1 \\ \vdots \\ X_{n_1}^1 \end{pmatrix} \quad X^{(2)} = \begin{pmatrix} X_1^2 \\ \vdots \\ X_{n_2}^2 \end{pmatrix} \quad X^{(3)} = \begin{pmatrix} X_1^3 \\ \vdots \\ X_{n_3}^3 \end{pmatrix}$$

$\varepsilon^{(1)}$ $\varepsilon^{(2)}$ $\varepsilon^{(3)}$ аналогично.

$$Z = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \vdots & & \\ & \vdots & \\ & & \vdots \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \}\, n_1 \\ \}\, n_2 \\ \}\, n_3 \end{array}$$

$$\theta = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} X^{(1)} \\ X^{(2)} \\ X^{(3)} \end{matrix} = Z\theta + \begin{matrix} \varepsilon^{(1)} \sim \frac{1}{4}\sigma^2 \\ \varepsilon^{(2)} \sim \sigma^2 \\ \varepsilon^{(3)} \sim \sigma^2 \end{matrix}$$

поэтому $X^{(1)'} = 2X^{(1)}$ $Z' = \begin{pmatrix} 2 & & \\ 2 & & \\ 2 & & \\ & \vdots & \\ & & \vdots \end{pmatrix} \begin{array}{l} \}\, n_1 \\ \}\, n_2 \\ \}\, n_3 \end{array}$

Теперь $T\theta = \tau$

имеем $\begin{matrix} a_1 = 3a_2 \\ a_1 - 2a_2 = a_3 \end{matrix}$, т.е. $T = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ $\tau = 0$

•) решаем $T\theta = \tau$

$$\begin{cases} a_1 = 3a_2 \\ a_1 - 2a_2 = a_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 3a_2 \\ a_2 = a_3 \end{cases} \Rightarrow \theta = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$\theta = v \cdot \beta \quad v = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \beta \in \mathbb{R}$

•) решаем $\min\limits_{\beta \in \mathbb{R}} \| X - Zv\beta \|^2$

$$Z \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & & \\ \vdots & & \\ 2 & & \\ & 1 & \\ & \vdots & \\ & 1 & \\ & & 1 \\ & & \vdots \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ \vdots \\ 6 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \}\, n_1 \\ \}\, n_2 \\ \}\, n_3 \end{matrix}$$

$$X - Z_V\beta = \begin{pmatrix} 2X_1^{(1)} \\ \vdots \\ 2X_{n_1}^{(1)} \\ X_1^{(2)} \\ \vdots \\ X_{n_2}^{(2)} \\ X_1^{(3)} \\ \vdots \\ X_{n_3}^{(3)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ \vdots \\ 6 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \beta$$

$$\|X - Z_V\beta\|^2 = 4\sum_{i=1}^{n_1}\left(X_i^{(1)} - 3\beta\right)^2 + \sum_{i=1}^{n_2}\left(X_i^{(2)} - \beta\right)^2 + \sum_{i=1}^{n_3}\left(X_i^{(3)} - \beta\right)^2 =$$

$$= 4\|X^{(1)}\|^2 + \|X^{(2)}\|^2 + \|X^{(3)}\|^2 +$$

$$+ (36 n_1 + n_2 + n_3)\beta^2 -$$

$$- \left(12\sum_{i=1}^{n_1} X_i^{(1)} + \sum_{i=1}^{n_2} X_i^{(2)} + \sum_{i=1}^{n_3} X_i^{(3)}\right)\beta$$

получили кв. ур-ие отн. β. (ветвями вверх)

$ax^2 + bx + c$

$c - \frac{b^2}{4a}$

– можно вывести вот такую ф-лу (очевидно как)

это значение минимума

Тогда нам минимум:

$$4\|x^{(1)}\|^2 + \|x^{(2)}\|^2 + \|x^{(3)}\|^2 - \frac{\left(12\sum x_i^{(1)} + \sum x_i^{(2)} + \sum x_i^{(3)}\right)^2}{4(36n_1 + n_2 + n_3)}$$

•) остается собрать F-критерий.

для этого нам нужно посчитать $\|X - Z\hat{\theta}\|^2$, т.е. посчитать $\hat{\theta} = (Z^TZ)^{-1}Z^TX$

т.е. буквально решить 2-ую задачу еще раз ура!!!

(Недошибины...)

$$Z = \begin{pmatrix} 2 & & \\ 2 & & \\ \vdots & & \\ 2 & & \\ & 1 & \\ & \vdots & \\ & 1 & \\ & & 1 \\ & & \vdots \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}2\\2\\\vdots\\2\end{matrix}}\right\} n_1 \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\\vdots\\1\end{matrix}}\right\} n_2 \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\\vdots\\1\end{matrix}}\right\} n_3 \end{matrix}$$

$$Z^T = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & & & & & & \\ & & & & 1 & 1 & 1 & & & \\ & & & & & & & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Z^T Z = \begin{pmatrix} 4n_1 & 0 & 0 \\ 0 & n_2 & 0 \\ 0 & 0 & n_3 \end{pmatrix}$$

$$(Z^T Z)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4n_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{n_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{n_3} \end{pmatrix}$$

$$(Z^T Z)^{-1} Z^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{4n_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{n_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{n_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \; 2 \ldots 2 & & \\ & 1 \; 1 \ldots 1 & \\ & & 1 \; 1 \; 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2n_1} & \frac{1}{2n_1} & \ldots & \frac{1}{2n_1} & 0 & \ldots & & & & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \frac{1}{n_2} & \ldots & \frac{1}{n_2} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & \frac{1}{n_3} & \ldots & \frac{1}{n_3} \end{pmatrix}$$

$$(Z^T Z)^{-1} Z^T X = -\,//\,- \begin{pmatrix} 2X^{(1)} \\ X^{(2)} \\ X^{(3)} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \overline{X}^{(1)} \\ \overline{X}^{(2)} \\ \overline{X}^{(3)} \end{pmatrix} = \hat{\theta}$$

(ммм удивительно)

$$\|X - Z\hat{\theta}\|^2$$

$$\left\| \left\| \begin{pmatrix} 2X^{(1)} \\ X^{(2)} \\ X^{(3)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2\bar{X}^{(1)} \\ \vdots \\ 2\bar{X}^{(1)} \\ \bar{X}^{(2)} \\ \vdots \\ \bar{X}^{(2)} \\ \bar{X}^{(3)} \\ \vdots \\ \bar{X}^{(3)} \end{pmatrix} \right\| \right\|^2 = D$$

$$4\sum_{i=1}^{n_1}\left(X_i^{(1)} - \frac{\sum X_i^{(1)}}{n_1}\right)^2 + \sum \dots$$

итого получаем

$$\not{R} = \left\{ \frac{4\|x^{(1)}\|^2 + \|x^{(2)}\|^2 + \|x^{(3)}\|^2 - \frac{\left(12\sum x_i^{(1)} + \sum x_i^{(2)} + \sum x_i^{(3)}\right)^2}{4(36 n_1 + n_2 + n_3)} - D}{D} \cdot \frac{n_1+n_2+n_3-2}{\cancel{3}} > f_{1-\alpha} \right\}$$