№6

$$\mathrm{cov}(x,y) = E\left[(x-E[x])(y-E[y])\right] =$$

$$= E[xy] - E[x]E[y]$$

Корр. Пирсона

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{cov}[X,Y]}{\sqrt{\sigma_x^2}\sqrt{\sigma_y^2}} = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y}}{\sqrt{\overline{x^2}-\overline{x}^2}\sqrt{\overline{y^2}-\overline{y}^2}}$$

$$T = \frac{\rho(x,y)\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-\rho(x,y)^2}} \sim T_{n-2}$$ (распред. Стьюдента)

Критерий: Отвергаем H_0 (X и Y независимы) если $T \notin \left(Q_{t_{n-2}}\left(\frac{\alpha}{2}\right), Q_{t_{n-2}}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\right)$

Корр. Спирмэна

$$\rho_s(X,Y) = 1 - \frac{6}{n^3-n}\sum_{i=1}^{n}(R_i^x - R_i^y)^2$$

R^X – вектор индексов элементов в отсорт.

R_i^X = индекс X_i элемента в $X_{(1)},\dots,X_{(n)}$

$$P(R^{X} = R_0) = \frac{1}{n!}$$

Критерий: $\rho_s \notin \left(Q_n\left(\frac{\alpha}{2}\right), Q_n\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\right)$

Корр. Кэндалла

$$\rho_\tau(X,Y) = 1 - \frac{4}{n(n-1)}\cdot D \;(=),$$ где $D = \#\{\mathrm{sign}(x_i-x_j) \neq \mathrm{sign}(y_i-y_j)\}$ c – обратное

$$(=)\; 1 - \frac{4}{n^2-n}\sum_{i<j} I(T_i > T_j), \quad T_i = R^y_{(R^x)^{-1}_{(i)}}$$

Критерий: $\rho_r \notin (Q_n(\frac{\alpha}{2}), Q_n(1-\frac{\alpha}{2}))$

Пример:

$$R^x = (6, 3, 4, 1, 2, 7, 5)$$
$$R^y = (6, 3, 1, 2, 4, 7, 5)$$

$$T = (2, 4, 3, 1, 5, 6, 7)$$

$$\rho_r = 1 - \frac{4}{n^2 - n}(1 + 2 + 1)$$