# Решение задачи о составлении расписаний

Ярыгин Сергий, Савинов Алексей

21 сентября 2023 г.

Представлена модель смешанно-целочисленного линейного программирования (MILP) для планирования периодических химических процессов.

## 1 Постановка задачи

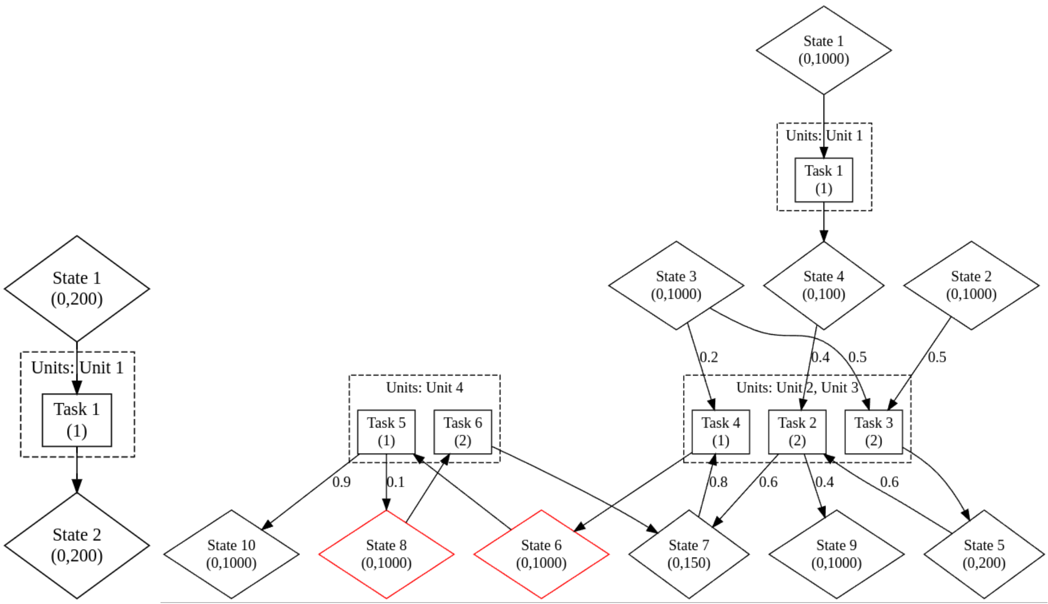
Задача о составлении расписаний имеет множество различных постановок, в некоторых из них для нее известны эффективные (полиномиальные) алгоритмы решения. Мы же рассмотрим одну из наиболее популярных постановок - о непрерывном производстве:

Один из показательных прикладных примеров - химический завод, производящий химикаты, необходимые в малых объемах, но обладающие большой надбавочной стоимостью. Для каждого из таких химикатов невыгодно строить отдельный завод и налаживать масштабное производство, выгоднее же переиспользовать части завода для производства различных химикатов.

Рассмотрим упрощенное устройство такого завода. Он состоит из реакторов (Units), резервуаров (States) и сети трубопроводов (Arcs), доступных для передачи материала между резервуарами и производственными установками. В целом производственные подразделения позволяют выпускать различную продукцию в зависимости от конкретной задачи химической переработки (Tasks). Весь химический процесс состоит из сети задач пакетной обработки, связанных расходящимися, сходящимися, а также циклическими материальными потоками. Также имеется два списка - поставки и внешний спрос в каждый момент времени для каждого химиката. Задача состоит в том, чтобы найти минимальное время, требуемое для удовлетворения внешнего спроса на все химикаты.

## 1.1 Визуальное представление хим. завода

Задачу можно визуализировать в виде ориентированного графа, вершинами которого будут задачи химической переработки и резервуары, а ребра будут соединять резервуар и задачу, если данный химикат требуется на вход задачи (State->Task) или будет получен на выходе (Task->State), на ребрах напишем веса, отвечающие отношению данного химиката к остальным, требуемым (получаемым) в данной задаче химической переработки. На вершинах также напишем минимальный и максимальный объемы резервуаров и время, затрачиваемое на каждую задачу. Примеры графов для двух фабрик (красными помечены состояния, в которых вещество не может долго оставаться стабильным, т.е. которые должны быть мгновенно переданы в следующий Task):




## 1.2 Сведение к задаче MILP

**Индексы, наборы индексов**

$i \in I_u$ задачи, которые может выполнить химический реактор $u$

$i \in I_j^{in}$ задачи, использующие продукт $j$ в качестве входных данных

$i \in I_j^{out}$ задачи, производящие продукт $j$

$j \in J^s, J^{ns}$ хранимые и нехранимые продукты соответственно

$t = 1 \ldots H$ периоды

$u \in U$ Units

$u \in U'$ химический реактор, производящих продукцию с внешним спросом
$u \in U_i$ химический реактор, способные выполнить задачу $I$

**Параметры**
$B_u^{\min}, B_u^{\max}$ минимальный и максимальный размер партии в единице $u$ соответственно
$d_{jt}$ внешний спрос на продукт $j \in J^s$ в конце периода $t$
$e_{jt}$ предложение продукта $j \in J^s$ в начале периода $t$
$P_j^{\max}$ емкость хранения продукта $j \in J^s$
$\alpha_{ij}^{in}, \alpha_{ij}^{out}$ фиксированная пропорция ввода и вывода продукта $j$ в задаче $i$ соответственно
$\tau_{ui}$ время обработки пакета задач $i$ в единице $u$

**Переменные**
$MS$ период действия
$Q_{out}$ количество материала, проходящего обработку задачи $i$ на химическом реакторк $u$ в начале периода $t$ (размер партии)
$p_{jt}$ запас продукта $j \in J^s$ на конец периода $t (p_{j0} = 0)$
$x_{out} = 1$, если химический реактор $u$ начинает обработку задачи $i$ в начале периода $t$(0, иначе)
**MS** Период обработки, который необходимо минимизировать, соответствует последнему времени завершения любой из задач обработки. Это можно выразить как

$$MS \geq t \cdot x_{uit} + \tau_{ui} - 1 \ for \ u \in U', \quad i \in I_u, \quad t = 1 \ldots H.$$

**Ограничения на размер пакета**
Например, ограничения на размер партии накладываются технологическими ограничениями и мощностью производственных подразделений. Следующее ограничение также обнуляет размеры пакетов, если соответствующая задача обработки не запущена (т. е. $x_{uit} = 0$ ).

$$B_u^{\min} \cdot x_{uit} \leq Q_{uit} \leq B_u^{\max} \cdot x_{uit} \ for \ u \in U, \quad i \in I_u, \ t = 1 \ldots H.$$

**Остаток на складе**
Остатки запасов выражаются следующими ограничениями, при которых исходный запас $p_{j0}$ предполагается известным. Чистое изменение запасов определяется количеством произведенного материала и количеством, которое используется в качестве входных данных для различных задач обработки. Кроме того, учитываются внешние потребности и поставки.

Благодаря ограничениям неотрицательности переменных решения $p_{jt}$ гарантируется, что желаемое количество конечной продукции будет удовлетворено.

$$p_{jt} = p_{j,t-1} + \sum_{i \in I_j^{out}} \alpha_{ij}^{out} \sum_{u \in U_j | t-\tau_{out} \geq 1} Q_{ui,t-\tau_{uit}} - \sum_{i \in I_j^{ju}} \alpha_{ij}^{in} \sum_{u \in U_i} Q_{uit} - d_{jt} + e_{jt}$$

$$for\ j \in J^s, t = 1 \dots H.$$

**Лимиты запасов**

При этом объем хранимого материала не должен превышать доступную емкость хранилища.

$$p_{jt} \leq P_j^{\max} \quad for \quad j \in J^s, \quad t = 1 \dots H.$$

**Производство товаров, не подлежащих хранению**

Для продуктов, не подлежащих хранению, количество материала, произведенного за период, равно количеству материала, использованного для различных задач обработки.

$$\sum_{i \in I_j^{ow}} \alpha_{ij}^{out} \sum_{u \in U_i | t-\tau_{uij} \geq 1} Q_{uit-\tau_{wi}} = \sum_{i \in I_j^{in}} \alpha_{ij}^{in} \sum_{u \in U_i} Q_{uit}\ for\ j \in J^{ns}, \quad t = 1 \dots H.$$

**Распределение партий по производственным подразделениям**

В любой момент времени производственная единица может начать не более одной операции. Затем устройство блокируется на несколько последовательных периодов, в зависимости от продолжительности конкретной операции пакетной обработки. Это приводит к следующему ограничению.

$$\sum_{i \in I_u} \sum_{t'=t-\tau_{ui}}^{t | t \geq \tau_{ui}} x_{uit} \leq 1 \quad for \quad u \in U, \quad t = 1 \dots H.$$

**Ограничения на переменные**

Наконец, области определения переменных решения определяются следующим образом.

$$Q_{uit} \geq 0\ for\ u \in U, \quad i \in I_u, t = 1 \dots H$$

$$p_{jt} \geq 0\ for\ j \in J^s, \quad t = 1 \dots H$$

$$x_{uit} \in \{0,1\}\ for\ u \in U, \quad i \in I_u, t = 1 \dots H$$

**Целевая функция**

Целевая функция - минимизировать время действия завода ($MS$) - т.е. максимизировать переменную $-MS$