

# Лекция 13

## Reinforcement learning

Храбров Кузьма

11 мая 2023 г.



# План лекции

Что такое обучение с подкреплением

Многорукие бандиты

Марковский процесс принятия решений

Value iteration

Policy iteration

Q-learning

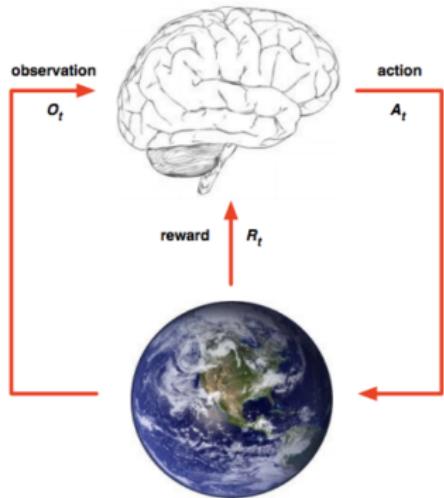
DQN

Policy gradients

Monte Carlo Tree Search

AlphaGo

# Введение



## ► Агент (Actor)

- Получает награду  $R_t$
- Получает наблюдение  $O_t$
- Совершает действие  $A_t$

## ► Среда (Environment)

- Получает действие  $A_t$
- Генерирует состояние  $O_{t+1}$
- Генерирует reward  $R_{t+1}$

# Примеры

- ▶ Настольные игры ( $R = +1$  - победа,  $R = -1$  - проигрыш )
- ▶ Управление роботом/машиной (+ за движение по траектории)
- ▶ Portfolio management
- ▶ Классические задачи с учителем

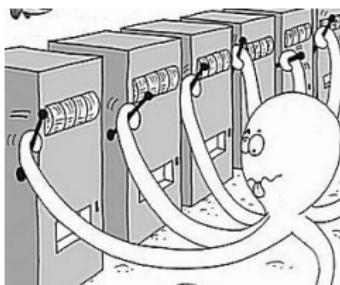
## Основные понятия. Награда

- ▶  $R_t$  - скаляр (случайная величина)
- ▶ Задача агента максимизировать среднюю сумму полученных  $R_\tau$

### Definition (Reward hypothesis)

Любая задача может быть сформулирована в виде максимизации суммы  $R_\tau$

# Многорукие бандиты



Рассмотрим задачу обучения с подкреплением, в которой состояние среды/агента от действия к действию не изменяется. Иначе говоря, у агента есть некоторый набор возможных действий, агент выбирает одно из них, получает за это некоторое вознаграждение (которое является случайной величиной), а затем снова может выбирать из тех же действий.

# Многорукие бандиты. Формальное определение

## Definition

Бернулиевской многорукий бандит это кортеж  $(\mathcal{A}, \mathcal{R})$ , где

- ▶  $\mathcal{A}$  - набор действий  $\{1, \dots, K\}$  соответствующих  $K$ -машинам с вероятностями награды  $\{\theta_1, \dots, \theta_K\}$
- ▶  $\mathcal{R}$  - функция награды. На шаге  $t$  :  
 $\mathcal{R}(a_t) = r_t \sim Bernoulli(\theta_i)$ , где  $a_t = i$

## Definition

$Q$ -функция – ожидаемая награда от действия.

$$Q(a_t) = \mathbb{E}[r|a_t]$$

При условии выбора  $i$ -й ручки  $Q(a) = \theta_i$ .

$$Q^* = \max_i \theta_i$$

## Многорукие бандиты. Жадное решение

Оценим каждую из  $\theta_i$  методом Монте-Карло и будем все время дергать за наиболее ручку с самой большой оценкой  $\hat{\theta}$ .

Пусть  $N_t(a)$  количество раз, сколько было выбрано действие  $a$ .

$$\hat{Q}_t(a) = \frac{1}{N_t(a)} \sum_{\tau=1}^t r_\tau I[a_\tau = a]$$

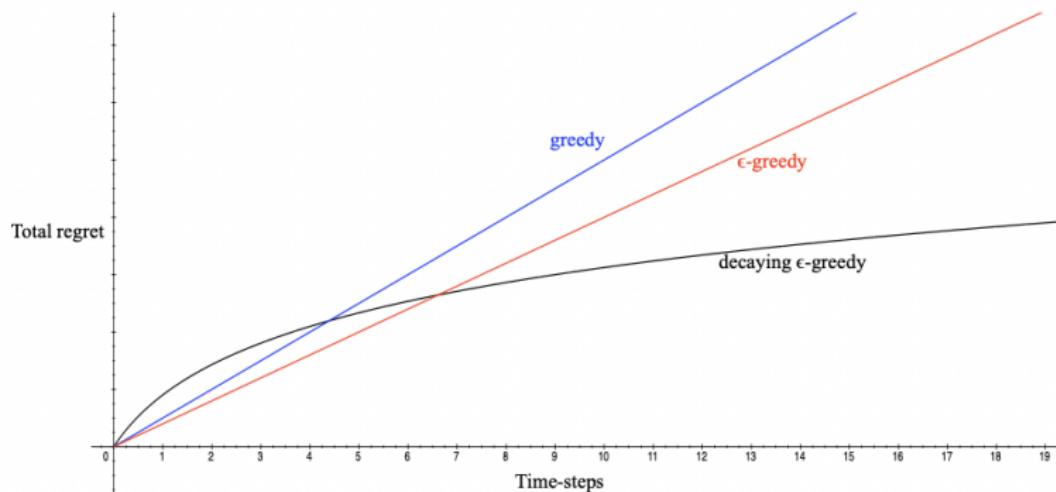
$$\hat{a}_t^* = \operatorname{argmax}_{a \in \mathcal{A}} \hat{Q}_t(a)$$

Проблема: существует ненулевая вероятность, что  $\operatorname{argmax}_{a \in \mathcal{A}} \hat{Q}_t(a) \neq \operatorname{argmax}_{a \in \mathcal{A}} Q_t(a)$ , то есть суммарная упущененная награда  $L_t$  (Regret) будет расти линейно с ростом  $t$ .

$$L_t = \mathbb{E} \sum_{\tau=1}^t [Q^* - Q(a_\tau)]$$

# Многорукие бандиты. $\epsilon$ -Жадное решение

С вероятностью  $\epsilon$  делаем случайный шаг, а с вероятностью  $1 - \epsilon$  выберем  $\text{argmax}$ .



## Многорукие бандиты. Sub-linear regret

Будем выбирать действия с максимальной оценкой успеха, но с поправкой на уверенность в этой оценке.

Алгоритм Upper Confidence Bound 1:

$$\hat{a}_t = \operatorname{argmax}_{a \in \mathcal{A}} Q(a) + \sqrt{\frac{2 \log t}{N_t(a)}}$$

## Основные понятия. Состояние среды

В процессе взаимодействия со средой агент накапливает историю  $H_t = R_1, O_1, A_1, \dots, R_t, O_t, A_t$ . Часто для принятия решения хранение всей истории крайне избыточно:

- ▶ Games:  $O_t$  - скриншот (1200x700x3)
- ▶ Markets: оборот NYSE - 474m акций в день

Мы хотим иметь такое представление истории  $S_t = f(H_t)$ , которое было бы "достаточной статистикой" для будущего.

# Марковское свойство

Мы хотим иметь такое представление истории  $S_t = f(H_t)$ , которое было бы "достаточной статистикой" для будущего.

## Definition

Пусть  $S_t$  - последовательность случайных величин (векторов). Последовательность обладает марковским свойством, если

$$Pr(S_{t+1}|S_t) = Pr(S_{t+1}|S_t, S_{t-1}, \dots, S_1)$$

Т.е.  $S_t$  достаточно для предсказания будущих состояний.

## Матрица переходов

Пусть  $S_t$  - последовательность дискретных состояний.

Поскольку последовательность задается распределением  $Pr(S_{t+1}|S_t)$  естественно упорядочить его в матрицу.

$$\mathcal{P}_{ss'} = Pr(S_{t+1} = s' | S_t = s)$$

$$\mathcal{P} = \underset{\text{from}}{\left[ \begin{array}{ccc} \mathcal{P}_{11} & \dots & \mathcal{P}_{1n} \\ \vdots & & \\ \mathcal{P}_{n1} & \dots & \mathcal{P}_{nn} \end{array} \right]} \underset{\text{to}}{}$$

Какие суммы вероятностей должны равняться единице?

# Марковский процесс

## Definition

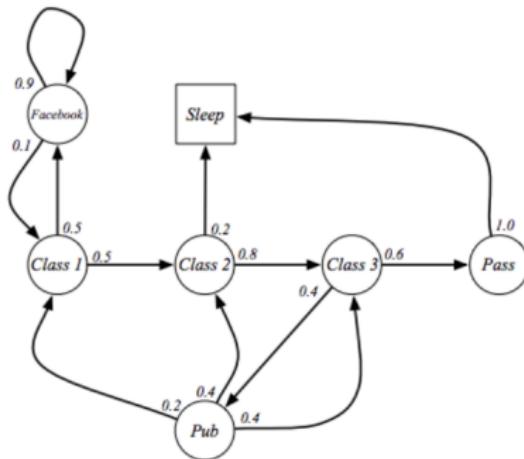
Марковский процесс (цепь) это кортеж  $(S, P)$ , где

- ▶  $S$  - состояния (дискретное пространство)
- ▶  $P$  - матрица переходов (transition matrix)

$$P_{ss'}^a = \Pr(S_{t+1} = s' | S_t = s, A_t = a)$$

Строго говоря необходимо еще распределение начальных состояний (но мы предполагаем, что оно вырождено, т.е. мы знаем где начинаем с вероятностью 1). Марковский процесс - основа для RL. Мы будем постепенно усложнять эту модель, добавляя rewards и actions.

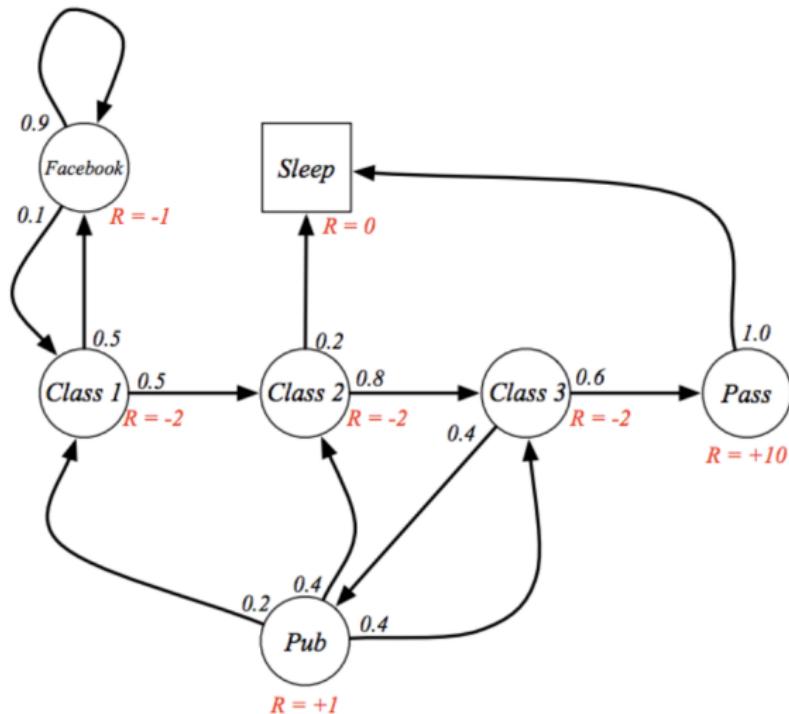
# Пример



$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} & C1 & C2 & C3 & Pass & Pub & FB \\ C1 & 0.5 & 0.8 & 0.6 & 0.4 & 0.4 & 0.9 \\ C2 & 0.2 & 0.4 & 0.4 & 0.6 & 0.4 & 0.5 \\ C3 & 0.1 & 0.2 & 0.4 & 0.8 & 0.6 & 0.2 \\ Pass & 0.2 & 0.4 & 0.4 & 0.6 & 0.4 & 0.5 \\ Pub & 0.1 & 0.2 & 0.4 & 0.8 & 0.6 & 0.4 \\ FB & 0.4 & 0.6 & 0.4 & 0.2 & 0.4 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Марковская цепь описывает блуждание по конечному (в нашем случае) пространству состояний, что не очень интересно. В нашем примере состояния не равнозначны, добавим ценность нахождения в каждом при помощи rewards.

## Пример с наградами



Основная цель: максимизировать получаемые rewards.

# Полная награда (Return)

## Definition (Return)

$$G_t = R_{t+1} + \gamma R_{t+2} + \gamma^2 R_{t+3} + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \gamma^i R_{t+1+i}$$

Под  $G_t$  мы понимаем дисконтированную сумму всех будущих rewards.

- ▶  $\gamma \in [0, 1]$  - discount factor
- ▶ Единая форма для "конечных" и "бесконечных" моделей
- ▶ Обеспечивает сходимость ряда ( $\max|R_t| < C = \text{const}$ )
- ▶ Нетерпеливость (impatience) - насколько важно получить reward сейчас, чем потом.

По определению  $G_t$  - случайная величина (не привязанная ни к чему). Покажем, как ее можно использовать.

# Value function

## Definition (Value function)

$$v(s) = \mathbb{E}[G_t | S_t = s]$$

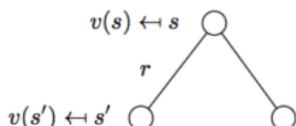
$v(s)$  - ценность состояния  $s$  (ожидаемая сумма всех полученных rewards, если стартовать из  $s$ ).

$$\begin{aligned} v(s) &= \mathbb{E}[G_t | S_t = s] \\ &= \mathbb{E}[R_{t+1} + \gamma R_{t+2} + \gamma^2 R_{t+3} + \dots | S_t = s] \\ &= \mathbb{E}[R_{t+1} + \gamma(R_{t+2} + \gamma R_{t+3} + \dots) | S_t = s] \\ &= \mathbb{E}[R_{t+1} + \gamma v(S_{t+1}) | S_t = s] \end{aligned} \tag{1}$$

# Bellman equations

Bellman equation для value-function

$$v(s) = \mathbb{E} [R_{t+1} + \gamma v(S_{t+1}) \mid S_t = s]$$

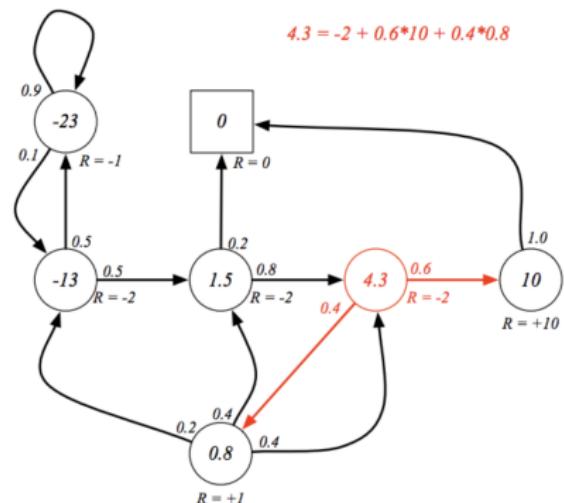


$$v(s) = \mathcal{R}_s + \gamma \sum_{s' \in \mathcal{S}} \mathcal{P}_{ss'} v(s')$$

Эти уравнения должны напоминать backprop (как минимум идеально). Из них очень легко найти value для любого состояния.

$$v = \mathcal{R} + \gamma \mathcal{P} v$$

# Пример



# Марковский процесс с наградами

## Definition

MRP это кортеж  $(S, R, P, \gamma)$ , где

- ▶  $S$  - состояния (дискретное пространство)
- ▶  $R$  - функция rewards,  $R_s = \mathbb{E}[R_{t+1}|S_t = s]$
- ▶  $P$  - матрица переходов (transition matrix)  
 $P_{ss'} = Pr(S_{t+1} = s'|S_t = s)$
- ▶  $\gamma$  - discount factor

# Марковский процесс принятия решений

## Definition

MDP это кортеж  $(S, A, R, P, \gamma)$ , где

- ▶  $S$  - состояния (дискретное пространство)
- ▶  $A$  - действия (дискретное пространство)
- ▶  $R$  - функция rewards,  $R_s^a = \mathbb{E}[R_{t+1} | S_t = s, A_t = a]$
- ▶  $P$  - матрица переходов (transition matrix)  
 $P_{ss'}^a = Pr(S_{t+1} = s' | S_t = s, A_t = a)$
- ▶  $\gamma$  - discount factor

# Стратегия(политика) и Q-функция

## Definition (Policy)

$\pi(a|s) = Pr(A_t = a|S_t = s)$  - стратегия, т.е. то как мы выбираем действия оказавшись в состоянии  $s$ .

## Definition (Value function)

$v_\pi(s) = \mathbb{E}_\pi[G_t|S_t = s]$  - ценность состояния.

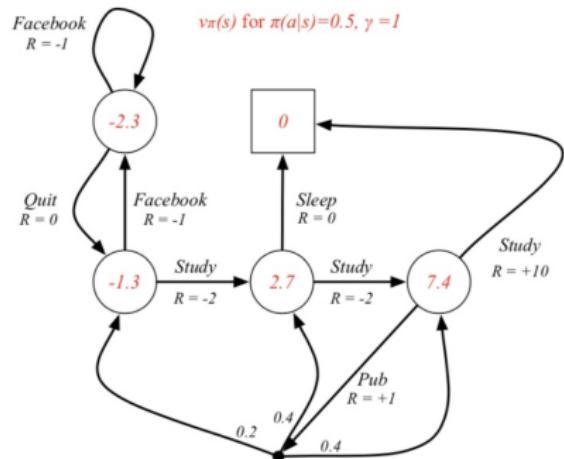
## Definition (Q-function)

$q_\pi(s, a) = \mathbb{E}_\pi[G_t|S_t = s, A_t = a]$  - ценность действия в состоянии  $s$ .

## Совместное распределение

$$\begin{aligned} P_{ss'} &= \Pr(S_{t+1} = s' | S_t = s) \\ &= \sum_a \Pr(S_{t+1} = s', A_t = a | S_t = s) \\ &= \sum_a \Pr(A_t = a | S_t = s) \Pr(S_{t+1} = s' | S_t = s, A_t = a) \quad (2) \\ &= \sum_a \pi(a|s) P_{ss'}^a \end{aligned}$$

# Пример



# Bellman equations

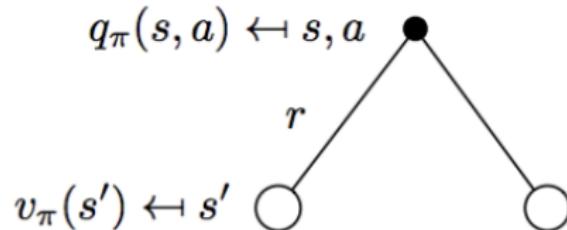
Bellman equation для value-function

$$v_{\pi}(s) = \mathbb{E}_{\pi} [R_{t+1} + \gamma v_{\pi}(S_{t+1}) \mid S_t = s]$$

Bellman equation для q-function

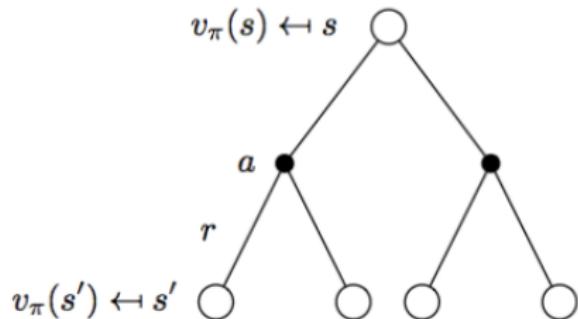
$$q_{\pi}(s, a) = \mathbb{E}_{\pi} [R_{t+1} + \gamma q_{\pi}(S_{t+1}, A_{t+1}) \mid S_t = s, A_t = a]$$

Q-функция в свою очередь зависит от value-function следующего состояния



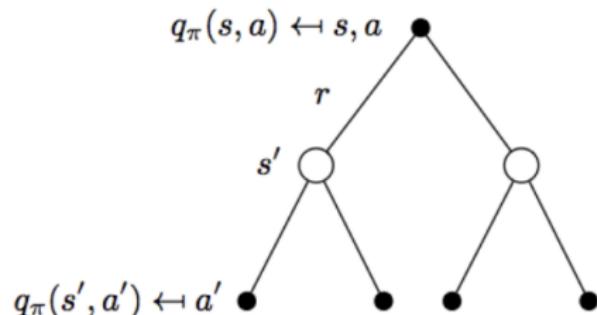
$$q_\pi(s, a) = \mathcal{R}_s^a + \gamma \sum_{s' \in S} \mathcal{P}_{ss'}^a v_\pi(s')$$

Соберем две предыдущие картинки вместе

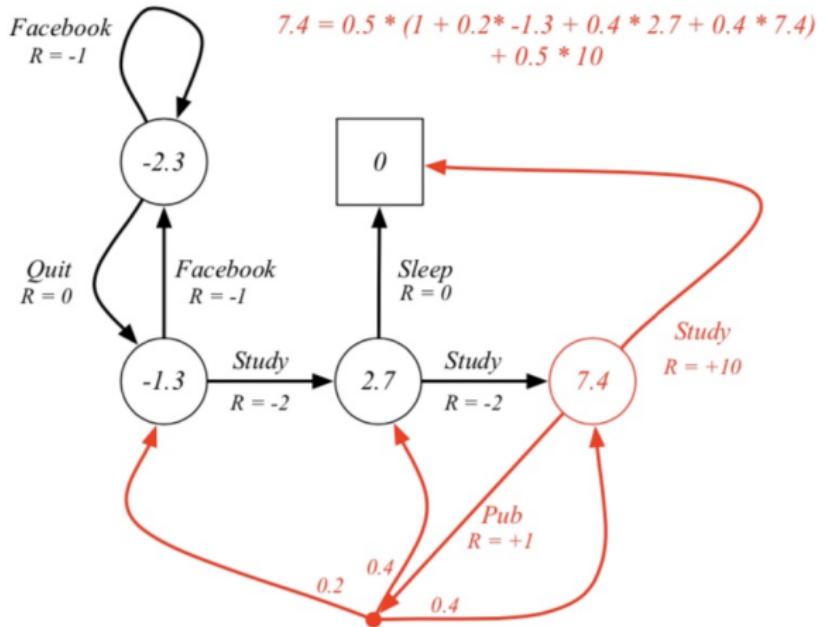


$$v_\pi(s) = \sum_{a \in \mathcal{A}} \pi(a|s) \left( \mathcal{R}_s^a + \gamma \sum_{s' \in \mathcal{S}} \mathcal{P}_{ss'}^a v_\pi(s') \right)$$

Точно так же можно вывести зависимость q-function



$$q_\pi(s, a) = \mathcal{R}_s^a + \gamma \sum_{s' \in \mathcal{S}} \mathcal{P}_{ss'}^a \sum_{a' \in \mathcal{A}} \pi(a'|s') q_\pi(s', a')$$



## Moar Bellman equations

Зафиксируем некоторую policy. Возьмем уравнение Беллмана в случае MRP

$$v = \mathcal{R} + \gamma \mathcal{P} v$$

Возьмем уравнение Беллмана в случае MDP

$$v_\pi(s) = \sum_{a \in \mathcal{A}} \pi(a|s) \left( \mathcal{R}_s^a + \gamma \sum_{s' \in \mathcal{S}} \mathcal{P}_{ss'}^a v_\pi(s') \right)$$

И сделаем замену:

$$\mathcal{P}_{s,s'}^\pi = \sum_{a \in \mathcal{A}} \pi(a|s) \mathcal{P}_{ss'}^a$$

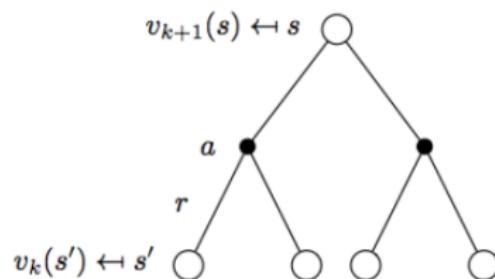
$$\mathcal{R}_s^\pi = \sum_{a \in \mathcal{A}} \pi(a|s) \mathcal{R}_s^a$$

# Алгоритм Value Evaluation

Получим следующее уравнение:

$$v_{\pi} = \mathcal{R}^{\pi} + \gamma \mathcal{P}^{\pi} v_{\pi}$$

И будем решать методом итераций:

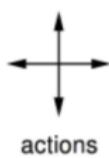


$$v_{k+1}(s) = \sum_{a \in \mathcal{A}} \pi(a|s) \left( \mathcal{R}_s^a + \gamma \sum_{s' \in \mathcal{S}} \mathcal{P}_{ss'}^a v_k(s') \right)$$
$$\mathbf{v}^{k+1} = \mathcal{R}^{\pi} + \gamma \mathcal{P}^{\pi} \mathbf{v}^k$$

## Результаты

Можно показать, что этот процесс сходится и в результате для каждого состояния мы получаем его  $v(s)$ . Теперь зададимся вопросом, а как улучшить нашу policy?

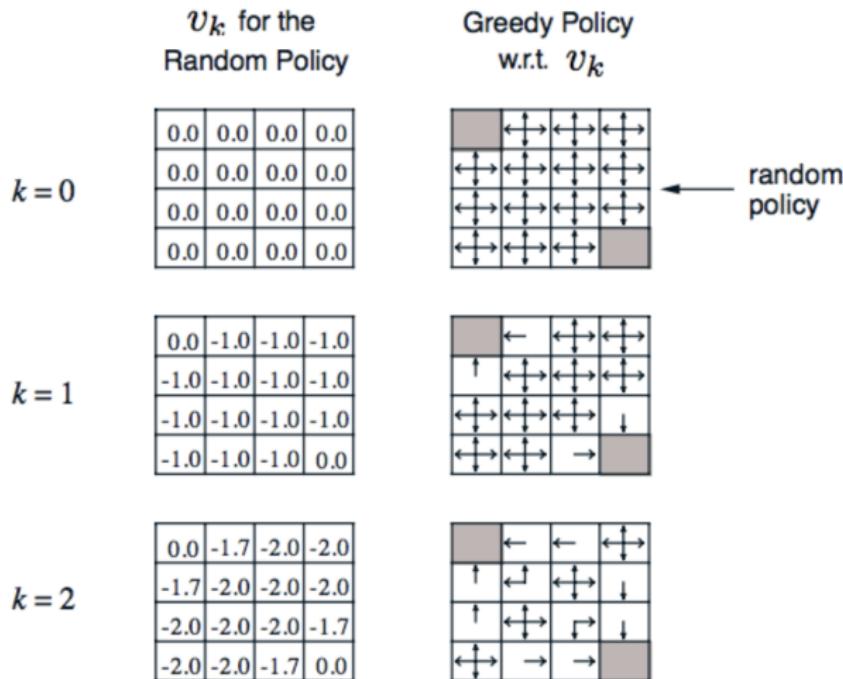
# Игра



		-	
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	

$r = -1$   
on all transitions

# Iteration 1



# Iteration 2

$k = 3$

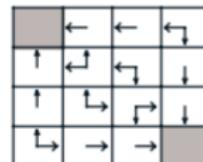
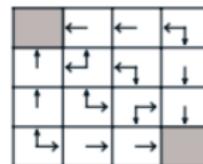
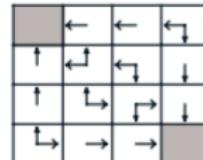
0.0	-2.4	-2.9	-3.0
-2.4	-2.9	-3.0	-2.9
-2.9	-3.0	-2.9	-2.4
-3.0	-2.9	-2.4	0.0

$k = 10$

0.0	-6.1	-8.4	-9.0
-6.1	-7.7	-8.4	-8.4
-8.4	-8.4	-7.7	-6.1
-9.0	-8.4	-6.1	0.0

$k = \infty$

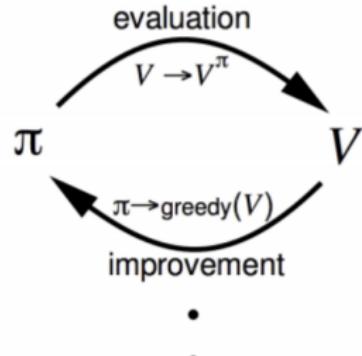
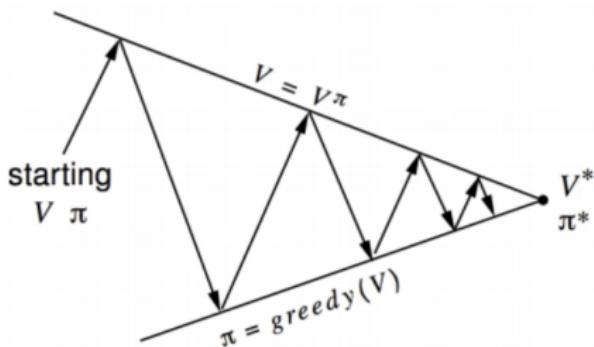
0.0	-14.	-20.	-22.
-14.	-18.	-20.	-20.
-20.	-20.	-18.	-14.
-22.	-20.	-14.	0.0



optimal  
policy

# Алгоритм Policy iteration

Для того чтобы улучшить policy надо выбирать действия, которые приводят в более выгодные состояния. Полученный алгоритм называется policy iteration.



## Оптимальные value-functions

Оптимальная q/value-function - максимальное принимаемое значение

$$Q^*(s, a) = \max_{\pi} Q^{\pi}(s, a) = Q^{\pi^*}(s, a)$$

Как только мы знаем  $Q^*$  мы можем выбрать оптимальную стратегию

$$\pi^*(s) = \operatorname{argmax}_a Q^*(s, a)$$

Оптимальное значение - максимум по всем принимаемым решениям:

$$\begin{aligned} Q^*(s, a) &= r_{t+1} + \gamma \max_{a_{t+1}} r_{t+2} + \gamma^2 \max_{a_{t+2}} r_{t+3} + \dots \\ &= r_{t+1} + \gamma \max_{a_{t+1}} Q^*(s_{t+1}, a_{t+1}) \end{aligned}$$

Соответствующее уравнение Беллмана:

$$Q^*(s, a) = \mathbb{E}_{s'} \left[ r + \gamma \max_{a'} Q^*(s', a') \mid s, a \right]$$

## Q-learning

Будем решать уравнение Беллмана:

$$Q^*(s, a) = \mathbb{E}_{s'} \left[ r + \gamma \max_{a'} Q^*(s', a') \mid s, a \right]$$

методом конечных приращений, то есть будем повторять:

$$Q(s, a) \leftarrow (1 - \alpha)Q(s, a) + \alpha(r + \gamma \max_{a'} Q(s', a'))$$

где  $\alpha$  - learning rate. Обычно берут  $\alpha = 0.9$ .

Упражнение: покажите, что таким образом минимизируется квадрат разности.

# Подходы к обучению с подкреплением

## 1. Value-based RL

Оцениваем оптимальную  $Q$ -функцию  $Q^*(s, a)$ .

Максимальное значение принимаемое при любой стратегии.

## 2. Policy-based RL

Ищем оптимальную стратегию  $\pi^*$ . Стратегия обеспечивающая максимальное будущее вознаграждение.

## 3. Model-based RL

Строим и используем модель внешней среды.

# Deep Q-learning

В каждом подходе к RL можно применить нейронные сети.

Разберем подробно Value-based случай.

Будем аппроксимировать  $Q(s, a) = Q(s, a, w)$  с помощью нейронной сети с весами  $w$ . Тогда для решения соответствующего уравнения Беллмана можно минимизировать функцию потерь MSE

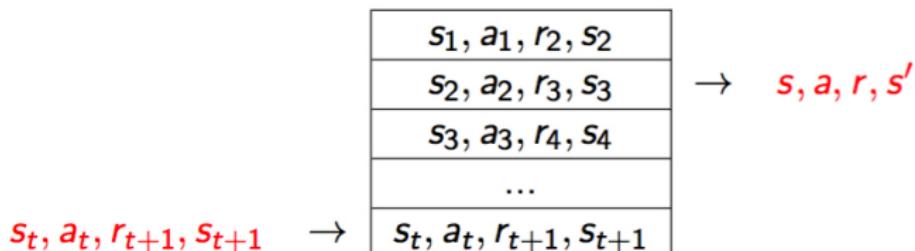
$$l = \left( r + \gamma \max_a Q(s', a', w) - Q(s, a, w) \right)^2$$

Проблемы:

1. Корреляции между входами
2. Нестационарные целевые переменные

## DQN-2

Чтобы убрать корреляции в данных: используем опыт агента (Replay memory)

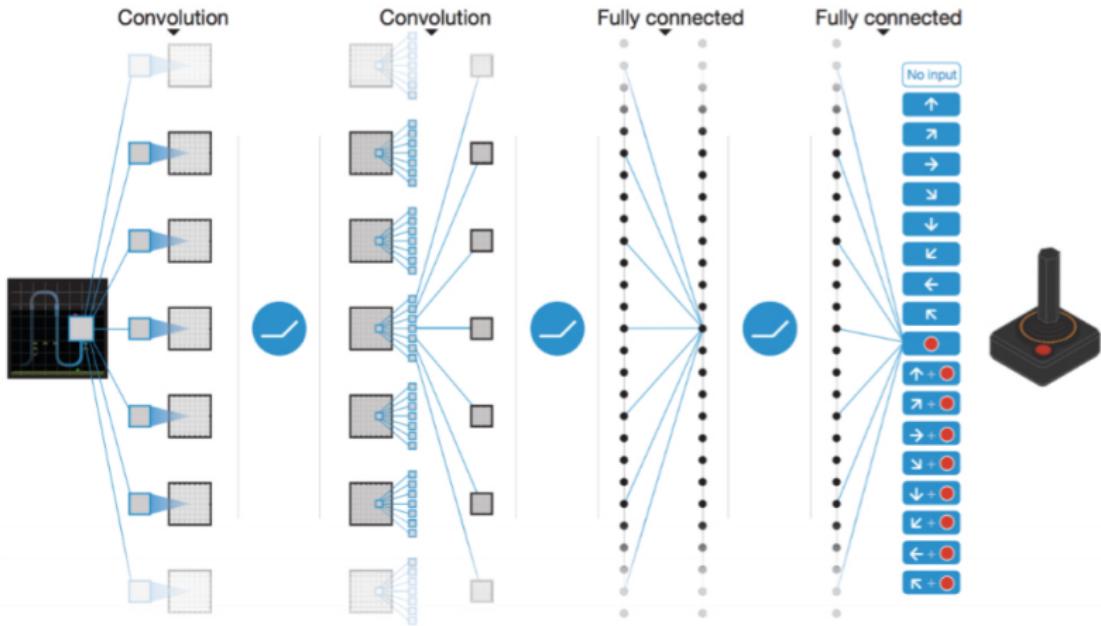


Сэмплируем опыт из данных и обновляем

$$l = \left( r + \gamma \max_a Q(s', a', w^-) - Q(s, a, w) \right)^2$$

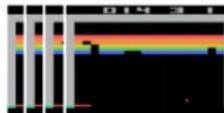
Причем  $w^-$  оставляем фиксированными, чтобы убрать нестационарность.

# ATARI



# ATARI

$Q(s, a; \theta)$  нейросеть  
с весами  $\theta$



Текущее состояние  $s_t$  : 84x84x4 стек последних четырех  
фреймов  
(RGB->grayscale конвертирование, даунсамплинг, и кроп)

---

**Algorithm 1** Deep Q-learning with Experience Replay

---

Initialize replay memory  $\mathcal{D}$  to capacity  $N$

Initialize action-value function  $Q$  with random weights

**for** episode = 1,  $M$  **do**

    Initialise sequence  $s_1 = \{x_1\}$  and preprocessed sequenced  $\phi_1 = \phi(s_1)$

**for**  $t = 1, T$  **do**

        With probability  $\epsilon$  select a random action  $a_t$

        otherwise select  $a_t = \max_a Q^*(\phi(s_t), a; \theta)$

        Execute action  $a_t$  in emulator and observe reward  $r_t$  and image  $x_{t+1}$

        Set  $s_{t+1} = s_t, a_t, x_{t+1}$  and preprocess  $\phi_{t+1} = \phi(s_{t+1})$

        Store transition  $(\phi_t, a_t, r_t, \phi_{t+1})$  in  $\mathcal{D}$

        Sample random minibatch of transitions  $(\phi_j, a_j, r_j, \phi_{j+1})$  from  $\mathcal{D}$

        Set  $y_j = \begin{cases} r_j & \text{for terminal } \phi_{j+1} \\ r_j + \gamma \max_{a'} Q(\phi_{j+1}, a'; \theta) & \text{for non-terminal } \phi_{j+1} \end{cases}$

        Perform a gradient descent step on  $(y_j - Q(\phi_j, a_j; \theta))^2$  according to equation 3

**end for**

**end for**

---

## ATARI-improvements

1. Double DQN <https://arxiv.org/abs/1509.06461>
2. Prioritised experience replay  
<https://arxiv.org/abs/1511.05952>
3. Duelling network <https://arxiv.org/abs/1511.06581>

## Policy gradients.

В чем проблема Q-learning?

Функция оценки ценности действия может быть очень сложной.

Пример: движение манипулятора робота для захвата может быть многомерной проблемой → тяжело выучить точные значения ценности для каждой пары (состояние, действие).

Политика может быть более простой: возьми объект недалеко от себя.

Можно ли выучить политику напрямую, т.е. выбирать лучшую политику из набора политик?

## Policy gradients. Идея

- ▶ Функция потерь для обучения с учителем:

$$\sum_i \log p(y_i|x_i)$$

- ▶ Для обучения с подкреплением мы:
  - ▶ не имеем правильных меток только псевдометки - действия.
  - ▶ моделируем лосс как  $\sum_i A_i \log p(y_i|x_i)$ , где  $A$  – функция выгоды. Например,  $A = 1$  для выигранных партий и  $-1$  для проигранных.
- ▶ Мы максимизируем вероятность тех действий, которые ведут к выигрышу.

# Policy gradients

Используем gradient accent для оптимизации стратегии.

Более строго хотим максимизировать функцию:

$$J(\theta) = \mathbb{E}_{\tau \sim p_\theta(\tau)}[R_\tau], \text{ где } \tau - \text{ траектория длины } T, \text{ а}$$
$$R_\tau = \sum_{\tau} R(s_t, a_t)$$

*Policy* :  $\pi_\theta$

*Objective function* :  $J(\theta)$

*Gradient* :  $\nabla_\theta J(\theta)$

*Update* :  $\theta \leftarrow \theta + \alpha \nabla_\theta J(\theta)$

$$\theta^* = \underset{\theta}{\operatorname{argmax}} \mathbb{E}_{\pi_\theta} \left[ \underbrace{\sum_t R(s_t, a_t)}_{J(\theta)} \right]$$

# Policy gradients

Как посчитать производную?

Вероятность  $\tau$ :  $p_\theta(\tau) = p_\theta(s_1, a_1, \dots, s_T, a_T) = p(s_1) \prod_{t=1}^T \pi_\theta(a_t | s_t) p(s_{t+1} | s_t, a_t)$

log-derivative trick:  $p_\theta(\tau) \nabla_\theta \log p_\theta(\tau) = p_\theta(\tau) \frac{\nabla_\theta p_\theta(\tau)}{p_\theta(\tau)} = \nabla_\theta p_\theta(\tau)$

$$\log p_\theta(\tau) = \log(p(s_1) \prod_{t=1}^T \pi_\theta(a_t | s_t) p(s_{t+1} | s_t, a_t)) = \log p(s_1) + \sum_{t=1}^T (\log \pi_\theta(a_t | s_t) + \log p(s_{t+1} | s_t, a_t))$$

$$\nabla_\theta \log p_\theta(\tau) = \underbrace{\nabla_\theta \log p(s_1)}_{=0} + \sum_{t=1}^T \left( \nabla_\theta \log \pi_\theta(a_t | s_t) + \underbrace{\nabla_\theta \log p(s_{t+1} | s_t, a_t)}_{=0} \right) = \sum_{t=1}^T \nabla_\theta \log \pi_\theta(a_t | s_t)$$

$$\nabla_\theta J(\theta) = E_\pi [\nabla_\theta (\underbrace{\log \pi(\tau | \theta)}_{\text{Policy function}}) \underbrace{R(\tau)}_{\text{Score function}}]$$

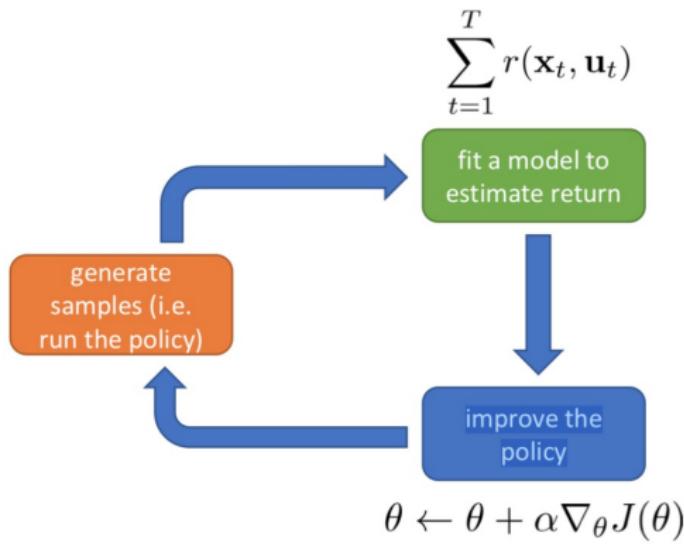
# Policy gradients

$$\text{Policy gradient} : E_{\pi} \left[ \frac{\nabla_{\theta}(\log \pi(s, a, \theta))}{\text{Policy function}} \frac{R(\tau)}{\text{Score function}} \right]$$

$$\text{Update rule} : \Delta \theta = \alpha * \nabla_{\theta}(\log \pi(s, a, \theta)) R(\tau)$$

Change in parameters      Learning rate

# Reinforce



## Reinforce. Проблемы

- ▶ Функция выгоды обладает большой дисперсией.
- ▶ Один из способов уменьшения – сдвиг значений функции к нулевому среднему и единичной дисперсии
- ▶ Нужно знать распределение функции, что не всегда достигается

## Baseline

Заметим, что если к функции  $R(t)$  добавить константу, то матожидание не изменится, зато можно уменьшить дисперсию. Будем использовать для каждого состояния будущий выигрыш вместо полного выигрыша.

$$\nabla_{\theta} J(\theta) \approx \sum_{t \geq 0} \left( \sum_{t' \geq t} \gamma^{t'-t} r_{t'} - b(s_t) \right) \nabla_{\theta} \log \pi_{\theta}(a_t | s_t)$$

## Алгоритм Actor-Critic

$$A^{\pi_\theta}(s_t, a_t) = Q^{\pi_\theta}(s_t, a_t) - V^{\pi_\theta}(s_t) \text{ - функция выгоды}$$

- Как ее найти? Используем Q-learning для оценки  $Q^{\pi_\theta}(s_t, a_t)$  и  $V^{\pi_\theta}(s_t)$  - критик. Актер – Policy Gradients для оценки политики.
  - Актер решает какое действие выбрать, а критик говорит насколько хорошим это действие было и как его стоит подправить
  - Работа критика облегчается, поскольку оцениваются пары действие-состояние генерируемых политикой
  - Можно добавить “experience replay”

## Алгоритм Actor-Critic

```
Initialize policy parameters  $\theta$ , critic parameters  $\phi$ 
For iteration=1, 2 ... do
    Sample m trajectories under the current policy
     $\Delta\theta \leftarrow 0$ 
    For i=1, ..., m do
        For t=1, ..., T do
             $A_t = \sum_{t' \geq t} \gamma^{t'-t} r_t^i - V_\phi(s_t^i)$ 
             $\Delta\theta \leftarrow \Delta\theta + A_t \nabla_\theta \log(a_t^i | s_t^i)$ 
             $\Delta\phi \leftarrow \sum_i \sum_t \nabla_\phi ||A_t^i||^2$ 
             $\theta \leftarrow \alpha \Delta\theta$ 
             $\phi \leftarrow \beta \Delta\phi$ 
    End for
```

## Recurrent Attention Model (RAM)

**Цель:** Классификация изображения

Принимая последовательность патчей (“glimpses”) выборочно фокусироваться на регионе изображения для предсказания класса

Наблюдения за тем, как исследует изображение человек

Экономим вычислительные ресурсы

Способность игнорировать нерелевантные части изображения

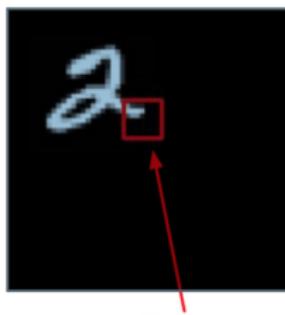
**Состояния:** Патчи (glimpses)

**Действия:** ( $x, y$ ) координаты (центра патча) откуда получить следующую картинку изображения

**Награда:** 1 если добрались до корректной классификации картинки на финальном шаге, 0 если нет

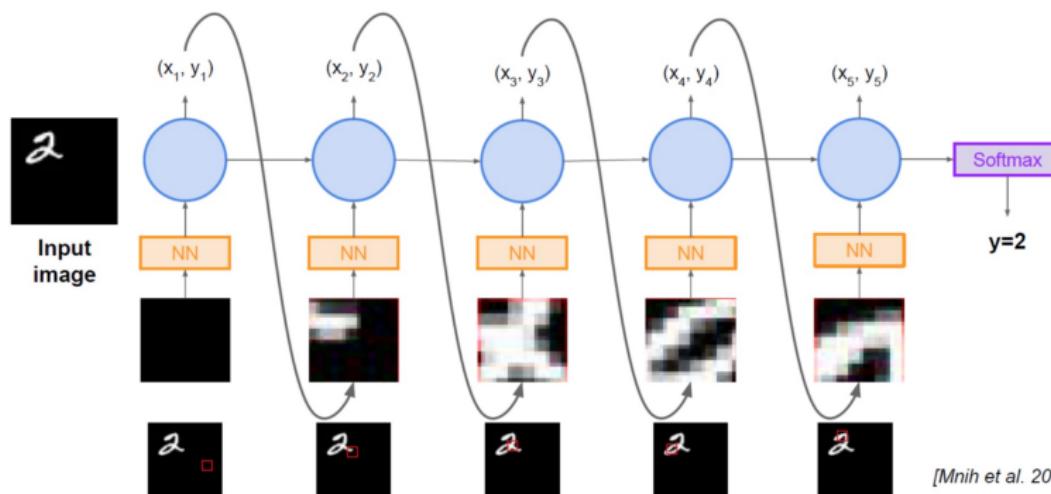
Патчи операция не дифференцируемая => обучаем политику как семплировать патчи, используя Policy Gradients (REINFORCE)

Для задания состояния отбираемых патчей используем RNN для моделирования состояния и предсказания следующего действия.



# Actor critic

## Recurrent Attention Model (RAM)



[Mnih et al. 2014]

## Actor critic. Модификации

- ▶ Хотим использовать модификации из DQN. Off-Policy Policy Gradients: используем дополнительные "замороженные" стратегии, чтобы использовать Experience replay (<https://arxiv.org/abs/2002.04014>)
- ▶ A3C, A2C: Asynchronous Advantage Actor-Critic, вместо одного агента -  $N$  агентов обучаю параметры стратегии и функции полезности.  
(<https://arxiv.org/pdf/1602.01783.pdf>)
- ▶ Deterministic policy gradient (DPG) / Deep Deterministic policy gradient DDPG: строим детерминированную функцию  $a = \mu(s)$ .  
(<http://proceedings.mlr.press/v32/silver14.pdf>,  
<https://arxiv.org/abs/1509.02971>)

## Actor critic. Модификации

- ▶ TRPO: Trust region policy optimization. Не даем сильно менять стратегию (регуляризация с помощью KL-дивергенции). (<https://arxiv.org/abs/1502.05477>)
- ▶ SAC: Soft Actor-Critic. Дополнительно максимизируем энтропию стратегии.  
(<https://arxiv.org/abs/1801.01290>)

# Proximal Policy Optimization(PPO)

$$r_t(\theta) = \frac{\pi_\theta(a_t | s_t)}{\pi_{\theta_{\text{old}}}(a_t | s_t)}$$

---

**Algorithm 5** PPO with Clipped Objective

---

Input: initial policy parameters  $\theta_0$ , clipping threshold  $\epsilon$

**for**  $k = 0, 1, 2, \dots$  **do**

    Collect set of partial trajectories  $\mathcal{D}_k$  on policy  $\pi_k = \pi(\theta_k)$

    Estimate advantages  $\hat{A}_t^{\pi_k}$  using any advantage estimation algorithm

    Compute policy update

$$\theta_{k+1} = \arg \max_{\theta} \mathcal{L}_{\theta_k}^{\text{CLIP}}(\theta)$$

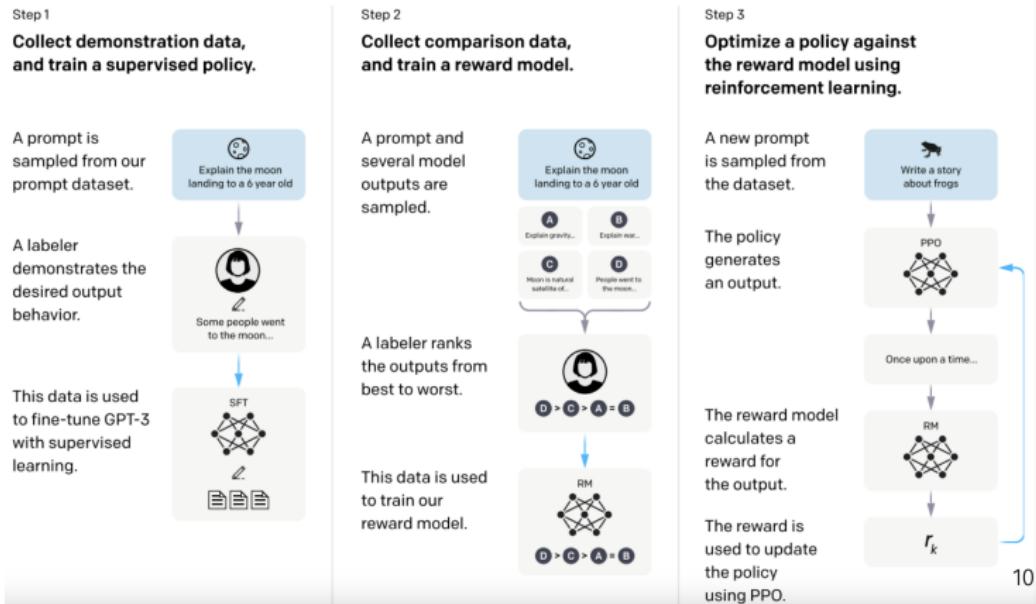
    by taking  $K$  steps of minibatch SGD (via Adam), where

$$\mathcal{L}_{\theta_k}^{\text{CLIP}}(\theta) = \mathbb{E}_{\tau \sim \pi_k} \left[ \sum_{t=0}^T \left[ \min(r_t(\theta) \hat{A}_t^{\pi_k}, \text{clip}(r_t(\theta), 1 - \epsilon, 1 + \epsilon) \hat{A}_t^{\pi_k}) \right] \right]$$

**end for**

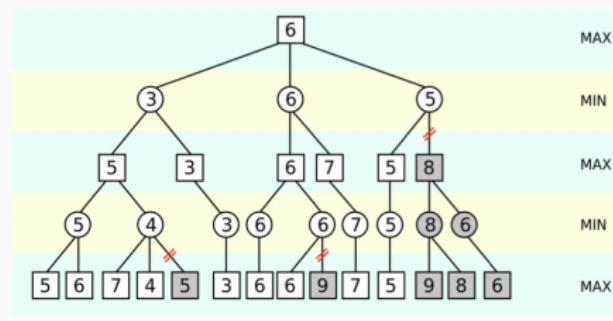
---

# ChatGPT



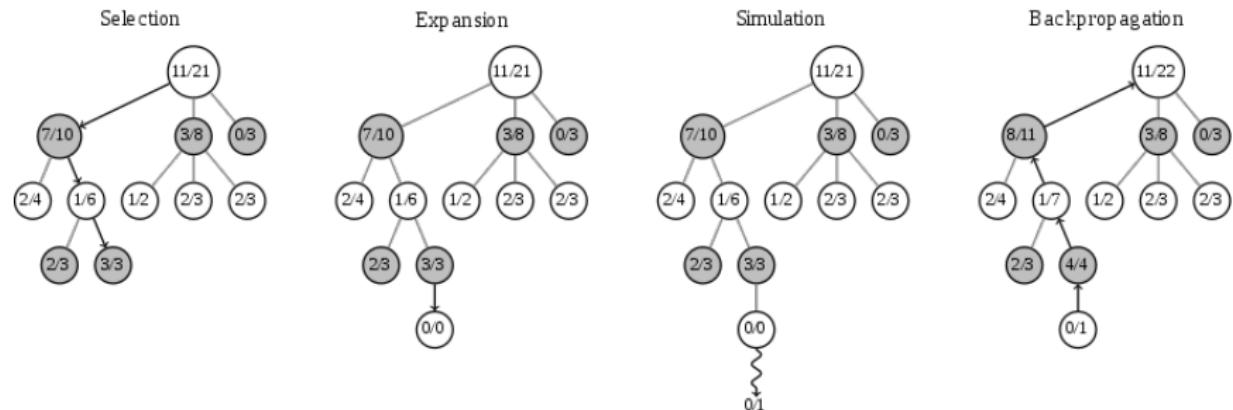
# Min-Max strategy

Alpha-beta search: строим минимакс-дерево ходов, выкидываем ходы, которые заведомо хуже других, ищем в глубину.



- ▶ Шахматы 30-40 возможных ходов + эффективные эвристики для отсечки плохих ходов
- ▶ В игре Го 250 возможных ходов + в среднем 100 относительно хороших ходов

# Monte Carlo Tree Search (MCTS)



# Monte Carlo Tree Search (MCTS)

## 1. Selection (Выбор)

Начиная с корня дерева выбираем двигаемся по ветвям, выбирая путь согласно ( $UCB1$ ) пока не доберемся до листа  $L$ .

## 2. Expansion (Расширение)

Если  $L$  - не терминальное состояние, делаем еще одно действие добавляя узел  $C$ .

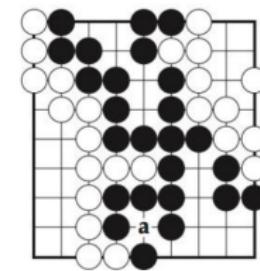
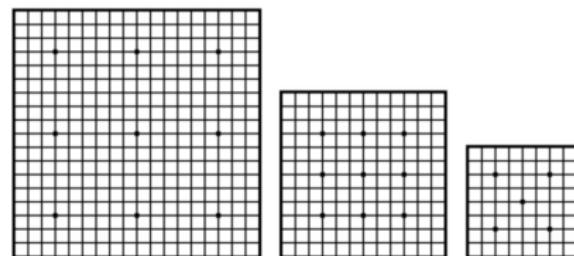
## 3. Simulation (Симуляция)

Запускаем симуляцию из  $C$  до окончания игры.

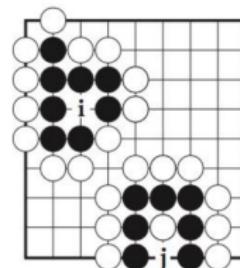
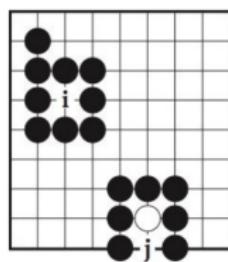
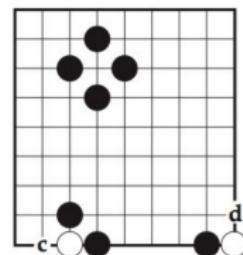
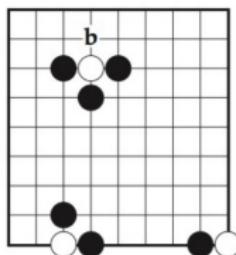
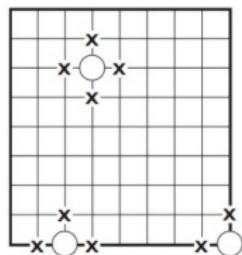
## 4. Backpropagation

Обновляем информацию во всех узлах дерева.

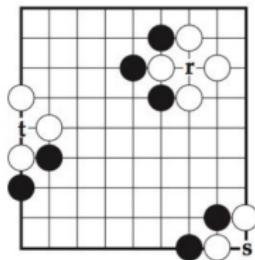
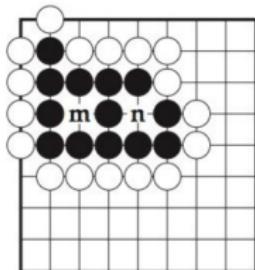
# Игра ГО



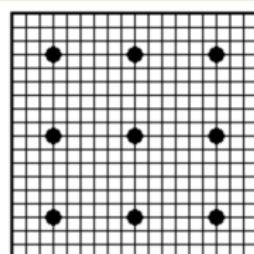
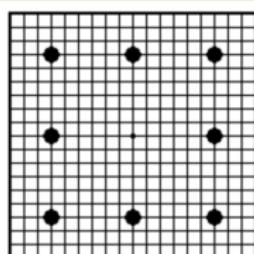
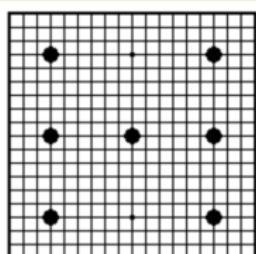
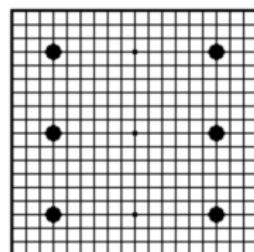
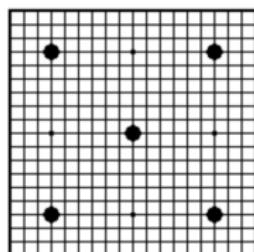
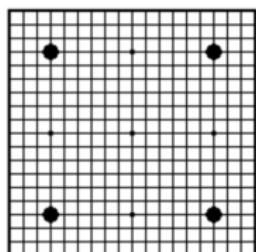
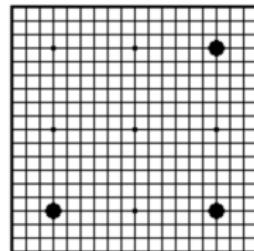
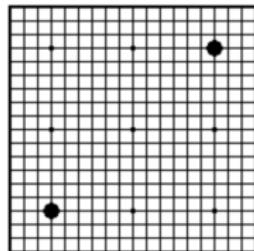
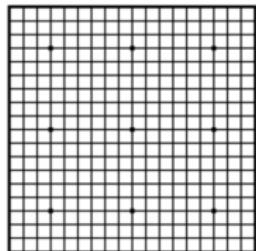
# Игра ГО



# Игра ГО

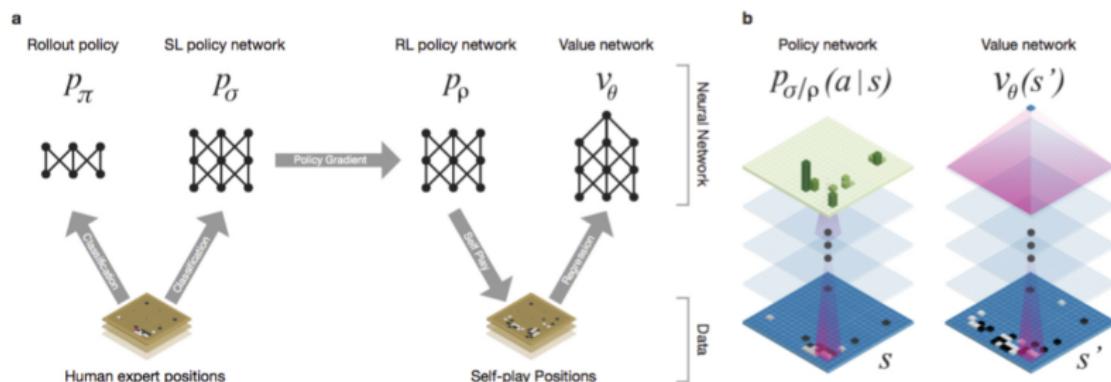


# Игра ГО



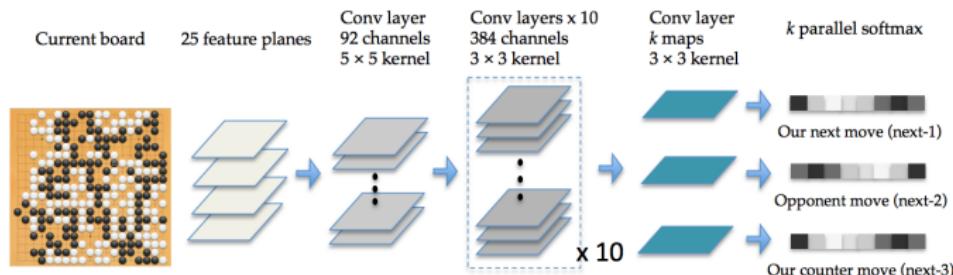
# AlphaGo

Ключевая идея алгоритма: будем приближать value-function и policy с помощью двух различных нейросетей, а играть и получать новую информацию с помощью MCTS. Плюс обучим классификаторы шагов на известных партиях экспертов.



# AlphaGo. SL

Большая сеть  $p_\sigma$  обучена на позициях из KGS data set (29.4 миллиона позиций из 160000 игр сыгранных игроками от бго до 9го дана). Состояние системы - положение камней на доске, действие - ход игрока. Вход в сеть - onehot-encoding состояния. Маленькие сети  $p_\pi$  и  $p_\tau$  (Rollout Policy и Tree Policy) - линейный классификатор, обученный на локальных состояниях ( $3 \times 3$ ) игровой доски вокруг следующего и предыдущего действий + множества других признаков.



# AlphaGo. SL

Feature	# of planes	Description
Stone colour	3	Player stone / opponent stone / empty
Ones	1	A constant plane filled with 1
Turns since	8	How many turns since a move was played
Liberties	8	Number of liberties (empty adjacent points)
Capture size	8	How many opponent stones would be captured
Self-atari size	8	How many of own stones would be captured
Liberties after move	8	Number of liberties after this move is played
Ladder capture	1	Whether a move at this point is a successful ladder capture
Ladder escape	1	Whether a move at this point is a successful ladder escape
Sensibleness	1	Whether a move is legal and does not fill its own eyes
Zeros	1	A constant plane filled with 0
Player color	1	Whether current player is black

Extended Data Table 2: **Input features for neural networks.** Feature planes used by the policy network (all but last feature) and value netwrk (all features).

Feature	# of patterns	Description
Response	1	Whether move matches one or more response features
Save atari	1	Move saves stone(s) from capture
Neighbour	8	Move is 8-connected to previous move
Nakade	8192	Move matches a <i>nakade</i> pattern at captured stone
Response pattern	32207	Move matches 12-point diamond pattern near previous move
Non-response pattern	69338	Move matches 3 × 3 pattern around move
Self-atari	1	Move allows stones to be captured
Last move distance	34	Manhattan distance to previous two moves
Non-response pattern	32207	Move matches 12-point diamond pattern centred around move

Extended Data Table 4: **Input features for rollout and tree policy.** Features used by the rollout policy (first set) and tree policy (first and second set). Patterns are based on stone colour (black/white/empty) and liberties (1, 2, ≥ 3) at each intersection of the pattern.

# AlphaGo. RL Policy and Value Networks

1. Тренируем сеть  $p_\rho$  аппроксимировать оптимальную policy, инициализировав веса с помощью  $p_\sigma$ .

Каждый батч обучения:  $n$  игр со старыми версиями policy  $p_{p\_}$ .

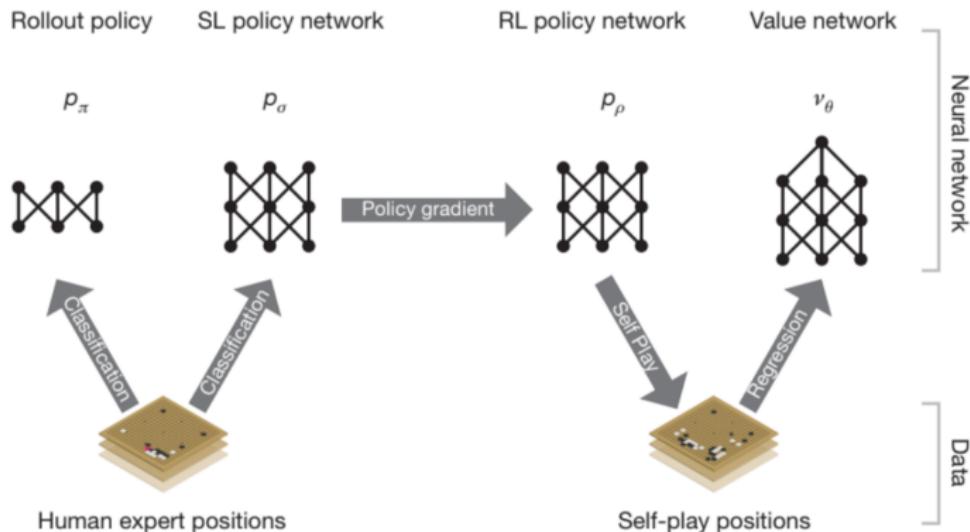
$$\Delta \rho = \frac{\alpha}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^{T^i} \frac{\partial \log p_\rho(a_t^i | s_t^i)}{\partial \rho} (z_t^i - v(s_t^i))$$

2. Тренируем сеть  $v_\theta(s)$  аппроксимировать value-function.

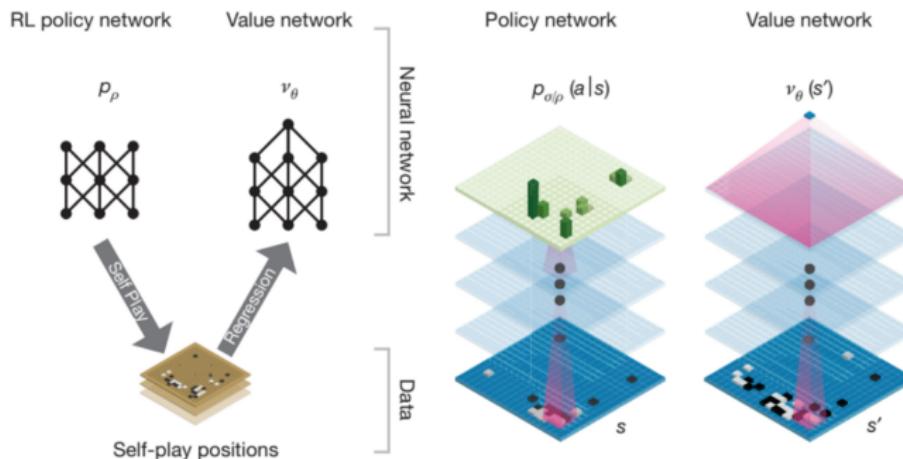
Обучающая выборка - случайный набор позиций из "игр с собой".

$$\Delta \theta = \frac{\alpha}{m} \sum_{k=1}^m (z^k - v_\theta(s^k)) \frac{\partial v_\theta(s^k)}{\partial \theta}$$

# AlphaGo. RL Policy and Value Networks



# AlphaGo. RL Policy and Value Networks



# AlphaGo. MCTS

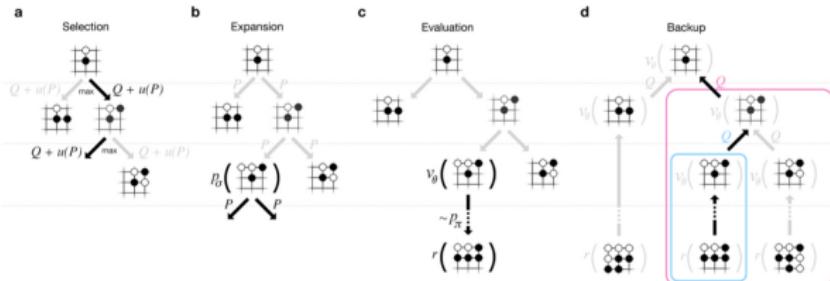


Figure 3: Monte-Carlo tree search in *AlphaGo*. **a** Each simulation traverses the tree by selecting the edge with maximum action-value  $Q$ , plus a bonus  $u(P)$  that depends on a stored prior probability  $P$  for that edge. **b** The leaf node may be expanded; the new node is processed once by the policy network  $p_\sigma$  and the output probabilities are stored as prior probabilities  $P$  for each action. **c** At the end of a simulation, the leaf node is evaluated in two ways: using the value network  $v_\theta$ ; and by running a rollout to the end of the game with the fast rollout policy  $p_\pi$ , then computing the winner with function  $r$ . **d** Action-values  $Q$  are updated to track the mean value of all evaluations  $r(\cdot)$  and  $v_\theta(\cdot)$  in the subtree below that action.

# AlphaGo. MCTS

В каждом ребре храним:

$$\{P(s, a), N_v(s, a), N_r(s, a), W_v(s, a), W_r(s, a), Q(s, a)\}$$

## 1. Selection (Выбор)

Начиная с корня дерева выбираем двигаемся по ветвям, выбирая путь  $a_t = \operatorname{argmax}_a(Q(s_t, a) + u(s_t, a))$

$$u(s, a) = c_{\text{puct}} P(s, a) \frac{\sqrt{\sum_b N_r(s, b)}}{1 + N_r(s, a)}$$

## 2. Evaluation

Добавляем лист  $L$  в очередь для вычисления  $v_\theta(s_L)$ , в случае если это значение еще не известно. Запускаем "rollout" с помощью  $p_\pi$ .

## 3. Expansion

Если  $N_r(s, a) > n_{thr}$  добавляем новый узел с помощью  $p_\tau$ .

## 4. Backpropagation

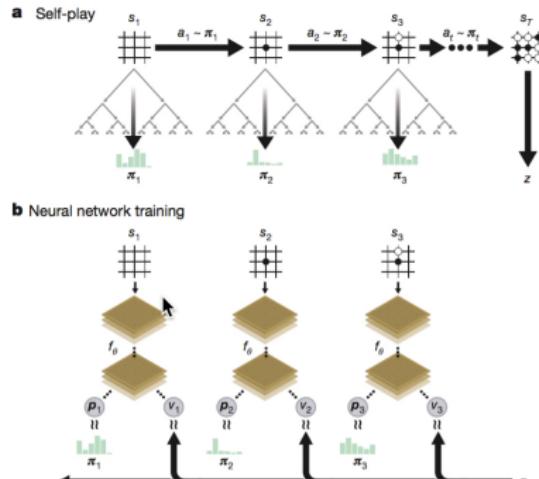
Обновляем информацию во всех узлах дерева.

$$Q(s, a) = (1 - \lambda) \frac{W_v(s, a)}{N_v(s, a)} + \lambda \frac{W_r(s, a)}{N_r(s, a)}$$

## AlphaGo. Замечания

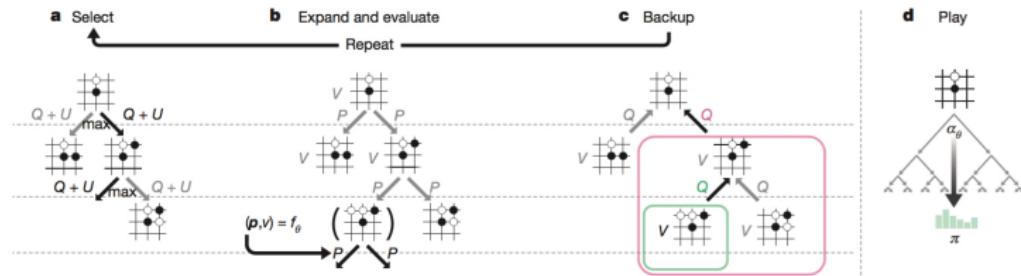
1. Можно использовать симметрии доски ( $D_4$ ) для аугментации.
2. AlphaGo сдается, если  $\max_a Q(s, a) < -0.8$  (вероятность выиграть < 10%).

# AlphaGo Zero. Without human knowledge



**Figure 1 | Self-play reinforcement learning in AlphaGo Zero.** **a**, The program plays a game  $s_1, \dots, s_T$  against itself. In each position  $s_t$ , an MCTS  $\alpha_t$  is executed (see Fig. 2) using the latest neural network  $f_\theta$ . Moves are selected according to the search probabilities computed by the MCTS,  $a_t \sim \pi_t$ . The terminal position  $s_T$  is scored according to the rules of the game to compute the game winner  $z$ . **b**, Neural network training in AlphaGo Zero. The neural network takes the raw board position  $s_t$  as its input, passes it through many convolutional layers with parameters  $\theta$ , and outputs both a vector  $p_t$ , representing a probability distribution over moves, and a scalar value  $v_t$ , representing the probability of the current player winning in position  $s_t$ . The neural network parameters  $\theta$  are updated to maximize the similarity of the policy vector  $p_t$  to the search probabilities  $\pi_t$ , and to minimize the error between the predicted winner  $v_t$  and the game winner  $z$  (see equation (1)). The new parameters are used in the next iteration of self-play as in **a**.

# AlphaGo. Without human knowledge



**Figure 2 | MCTS in AlphaGo Zero.** **a**, Each simulation traverses the tree by selecting the edge with maximum action value  $Q$ , plus an upper confidence bound  $U$  that depends on a stored prior probability  $P$  and visit count  $N$  for that edge (which is incremented once traversed). **b**, The leaf node is expanded and the associated position  $s$  is evaluated by the neural network  $(P(s, \cdot), V(s)) = f_\theta(s)$ ; the vector of  $P$  values are stored in

the outgoing edges from  $s$ . **c**, Action value  $Q$  is updated to track the mean of all evaluations  $V$  in the subtree below that action. **d**, Once the search is complete, search probabilities  $\pi$  are returned, proportional to  $N^{1/\tau}$ , where  $N$  is the visit count of each move from the root state and  $\tau$  is a parameter controlling temperature.

The background features a dynamic geometric pattern composed of several overlapping triangles. The triangles are primarily a vibrant shade of pink, with some having a darker, more saturated hue. Interspersed among them are several triangles in a deep, rich purple color. These triangles overlap in various ways, creating a sense of depth and movement across the frame.

Вопросы