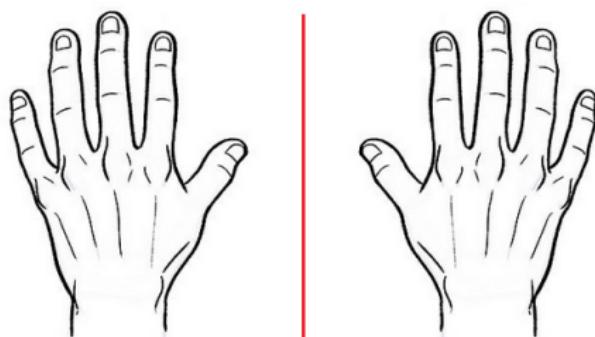
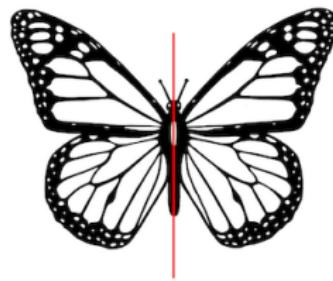


Tapettiryhmät

Aleksis Koski

Symmetria

Symmetria on yksi tärkeä peruskäsite matematiikassa (etenkin geometriassa) johon pyrimme nyt tutustumaan vähän lähemmin. Tutkitaan ensin, millaisia eri symmetrian muotoja on olemassa.



Kuviossa on **peilisymmetria**, jos kuvio ei muutu vaikka sitä peilataan tietyn akselin ympäri. Puhekielessä "symmetrinen" ja "peilisymmetrinen" ovat usein sama asia.

Symmetria

Toinen tärkeä symmetrian muoto on **kiertosymmetria** (tai **rotaatiosymmetria**).



Kuviossa on **kiertosymmetria**, jos se ei muutu kiertämällä sitä tietyn pisteen ympäri jonkin verran. Yllä olevassa kuvassa esiintyy viisi- ja kuusinkertainen kiertosymmetria.

Symmetria

Matemaatikoita kiinnostaa usein myös niin sanottu **siirtosymmetria**.



Kuviossa on **siirtosymmetria**, jos kuvio pysyy samanlaisena kun sitä siirretään johonkin suuntaan tietyn verran. Ylläolevassa kuviossa esiintyy vaakasuuntainen siirtosymmetria.

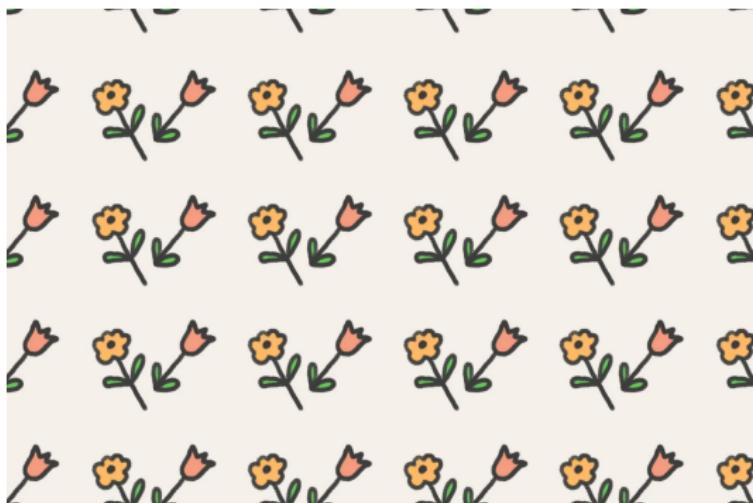
Tapettikuviot

Tässä esityksessä keskitymme tietynlaisiin symmetrisiin kuvioihin nimeltä **tapettikuviot**.



Tapettikuviot

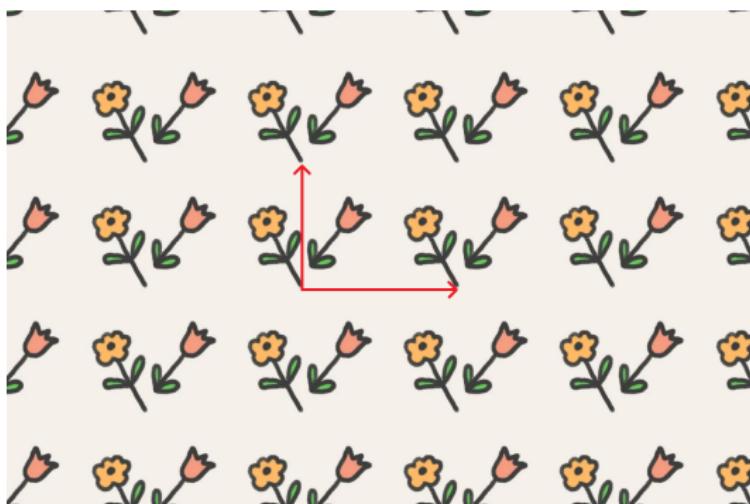
Mitä tapettikuvioilla oikeastaan tarkoitetaan? Katsotaan ensin seuraavaa yksinkertaista kuviota:



Kuvitellaan, että kuvio jatkuu samanlaisena sekä vaaka- että pystysuunnassa.

Tapettikuviot

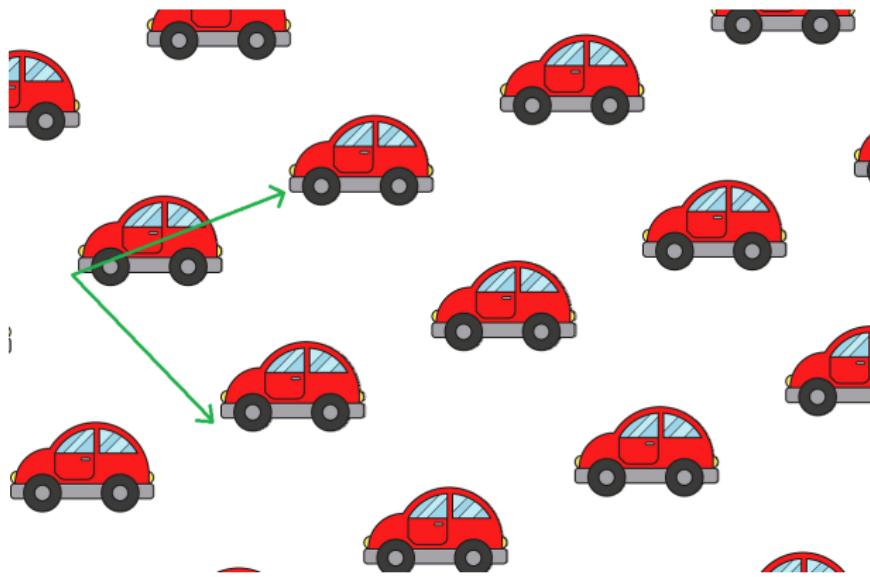
Huomaa, että kuvioita voi siirtää kahteen suuntaan ilman etä se muuttuu:



Tämä kuvio on siis **siirtosymmetrinen** vaaka- ja pystysuuntaisen siirron suhteen.

Tapettikuviot

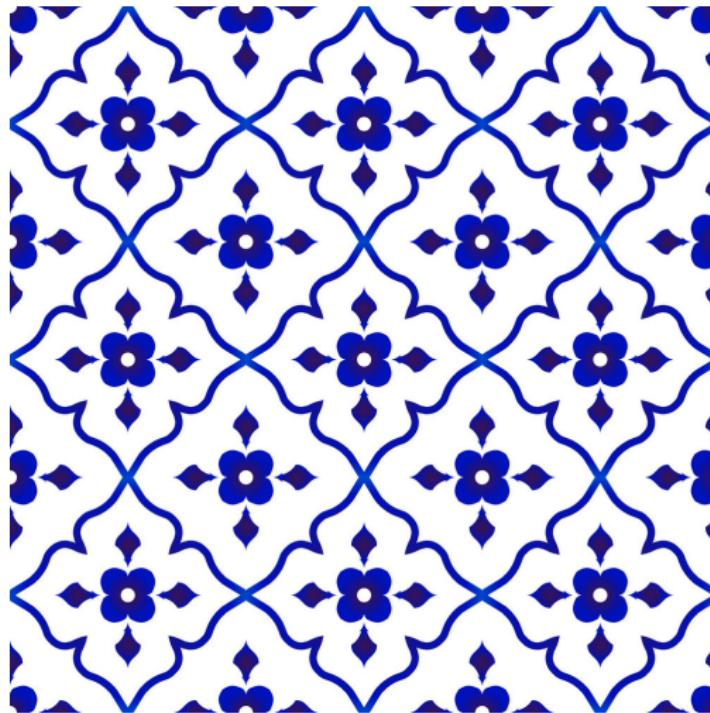
Tapettikuviot ovat kuvioita, joilla on siirtosymmetria kahteen eri suuntaan.



Suuntien ei välttämättä tarvitse olla vaaka- ja pystysuuntaisia.

Tapettikuviot

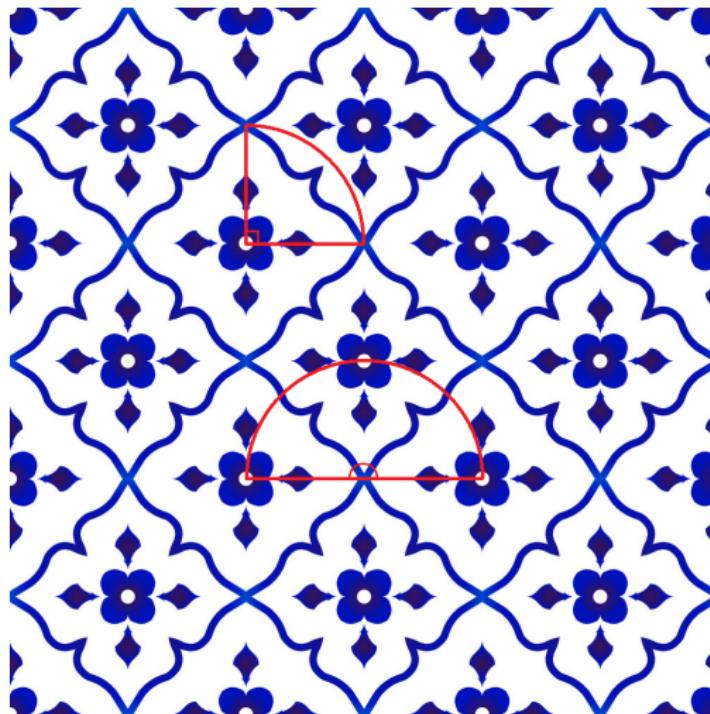
On myös tapettikuvioita joilla on enemmän symmetrioita:



Tämäkin kuvio on symmetrinen kahden siirron suhteen.

Tapettikuviot

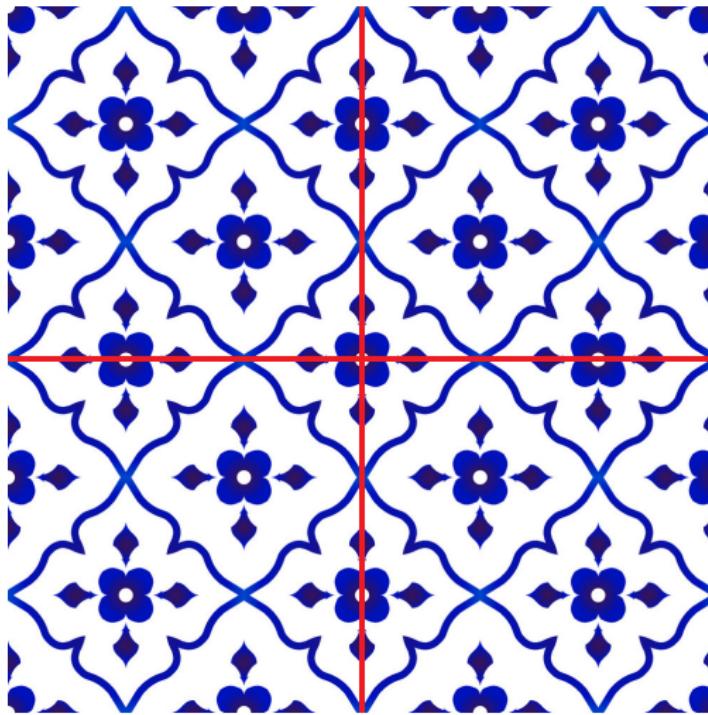
Sillä on myös ns. 90- ja 180-asteen rotaatiosymmetria:



Eli kuvio ei muutu jos sitä kiertää neljännes- tai puoliympyrän verran tiettyjen pisteiden suhtein.

Tapettikuviot

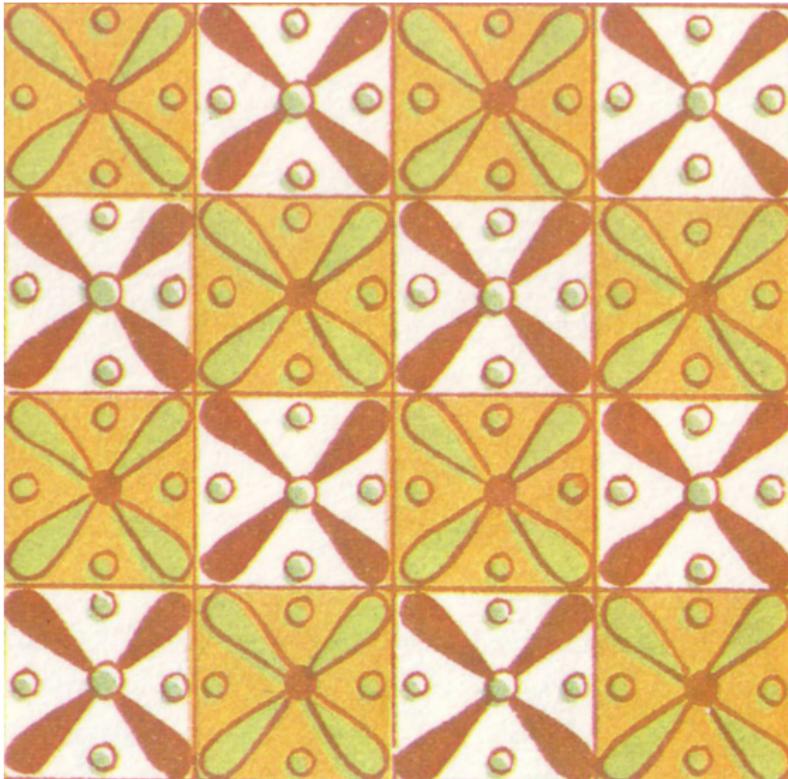
Tällä kuvolla on myös peilisymmetrioita tiettyjen suorien suhteen:



Löydätkö kuvasta lisää peilisymmetroita?

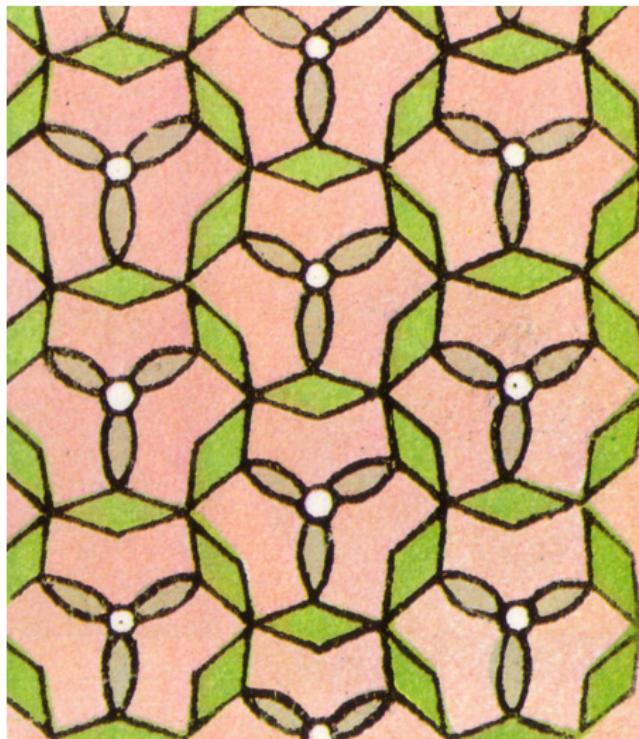
Symmetriat

Millaisia symmetrioita seuraava kuvio toteuttaa?



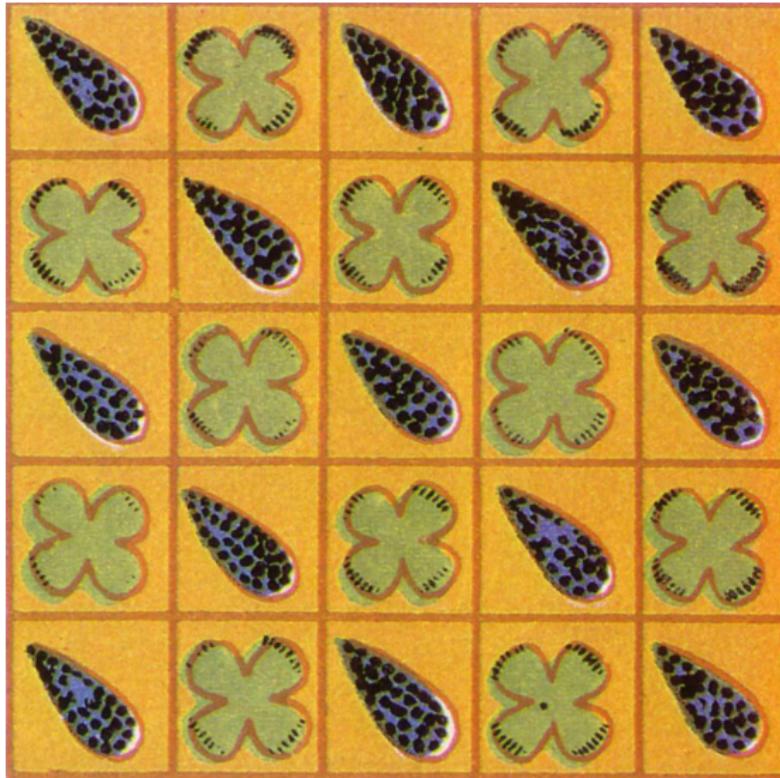
Symmetriat

Millaisia symmetrioita seuraava kuvio toteuttaa?



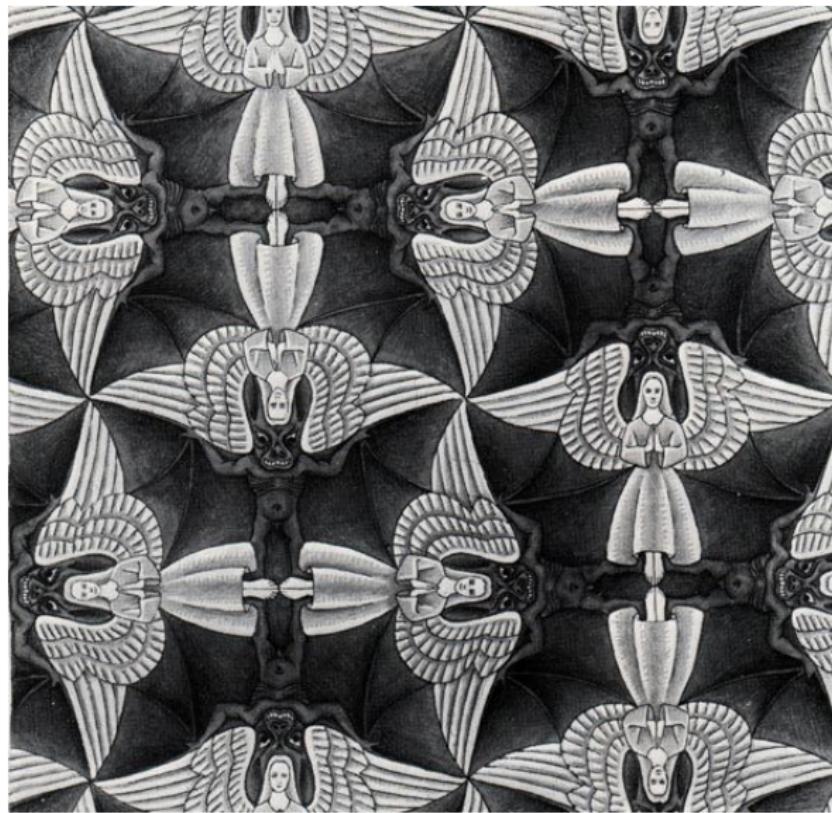
Symmetriat

Millaisia symmetrioita seuraava kuvio toteuttaa?



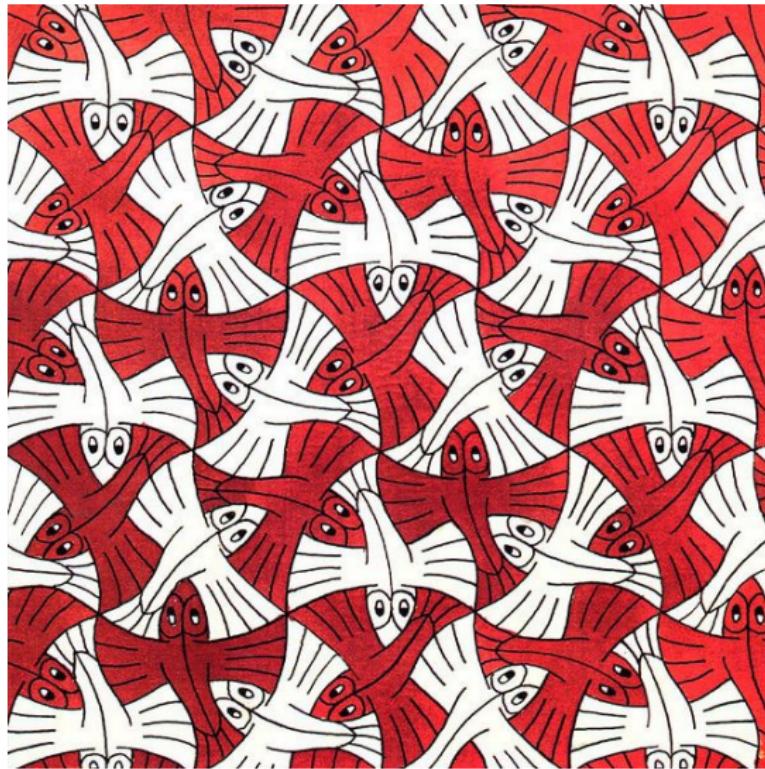
Symmetriat

Millaisia symmetrioita seuraava kuvio toteuttaa?



Symmetriat

Millaisia symmetrioita seuraava kuvio toteuttaa?



Symmetriat

Millaisia symmetrioita seuraava kuvio toteuttaa?



Symmetriat

Millaisia symmetrioita seuraava kuvio toteuttaa?



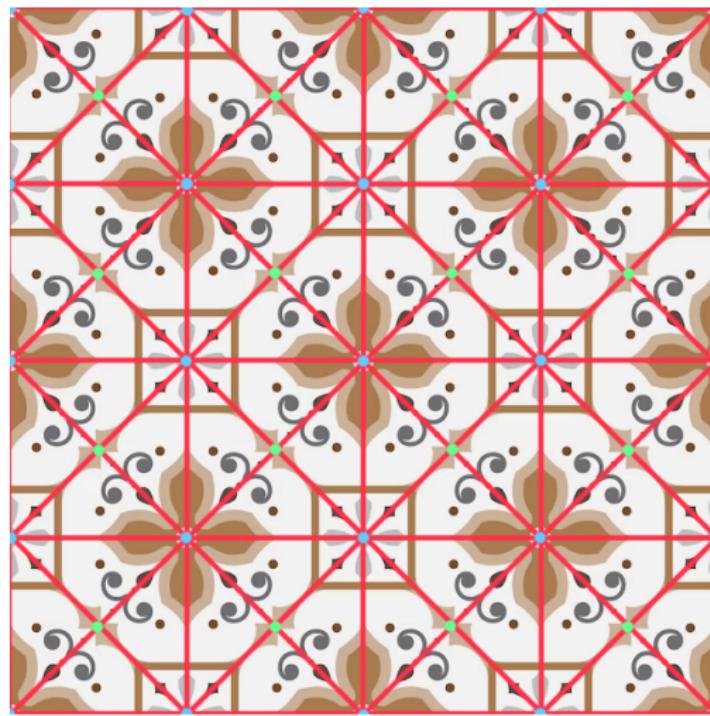
Tapettiryhmät

Kaikki tapettikuviot voidaan luokitella niiden symmetrioiden perusteella.



Tapettiryhmät

Kaikkien kuvion symmetrioiden muodostama joukko on kyseisen kuvion **tapettiryhmä**.



- 90 degree rotation center
 - 180 degree rotation center

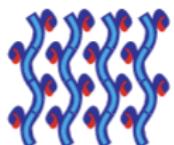
Tapettiryhmät

Osoittautuu, että on vain 17 erilaista tapettiryhmää.

p1



pg



pgg



pm



cm



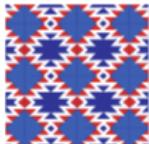
cmm



pmg



pmm



p2



p4



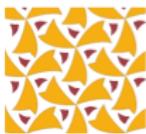
p4m



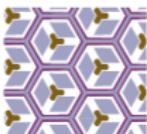
p4g



p3



p3m1



p31m



p6

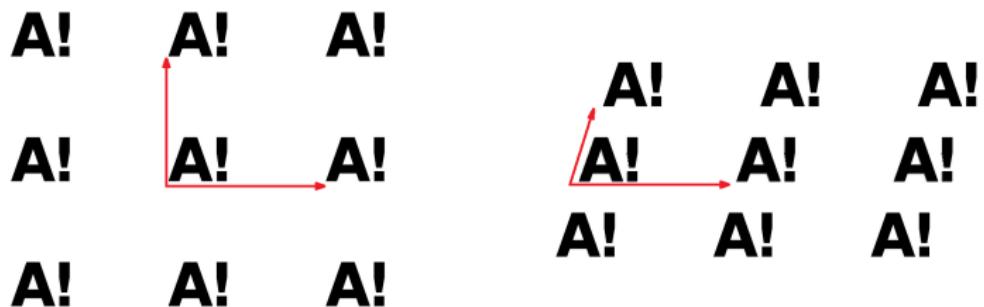


p6m



Sama vai eri?

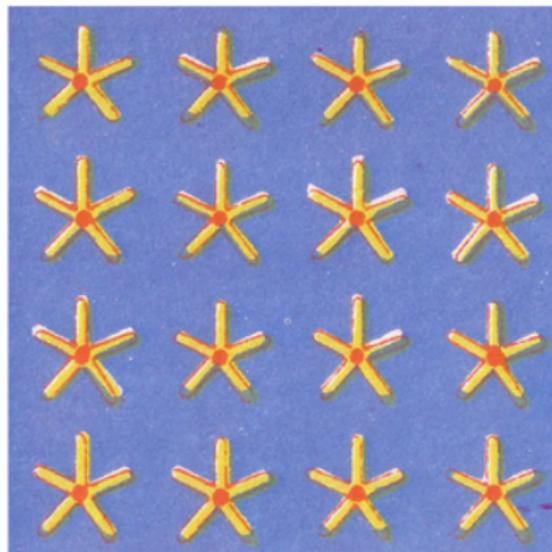
Jos halutaan selvittäää kuuluvatko kaksi kuviota samaan tapettiryhmään, pitää selvittää vastaavatko molempien kuvioiden symmetriat toisiaan.



Näiden kahden kuvion siirtosymmetrioilla on eri suunnat ja suuruudet, mutta tämä vielä sallitaan. Molemmat kuviot kuuluvat samaan tapettiryhmään $p1$ koska niissä ei ole muita symmetriointia.

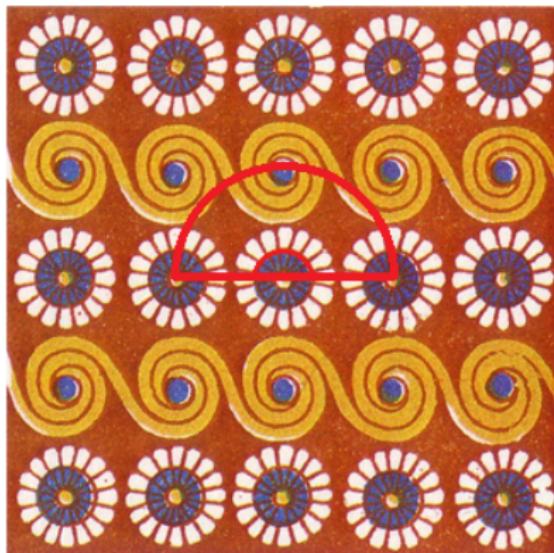
Sama vai eri?

Kuuluvatko kuviot samaan tapettiryhmään?

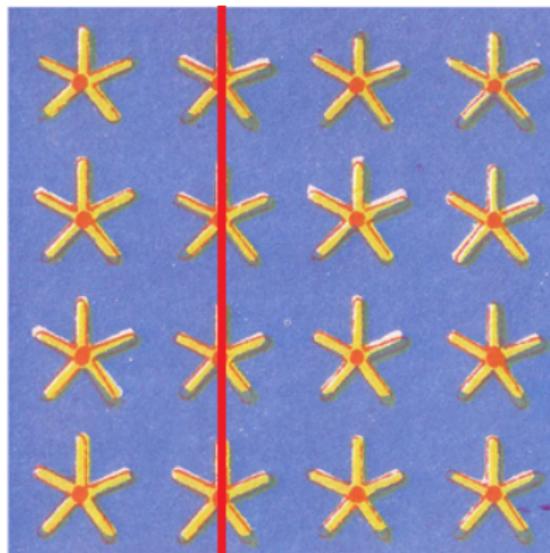


Sama vai eri?

Kuuluvatko kuviot samaan tapettiryhmään?



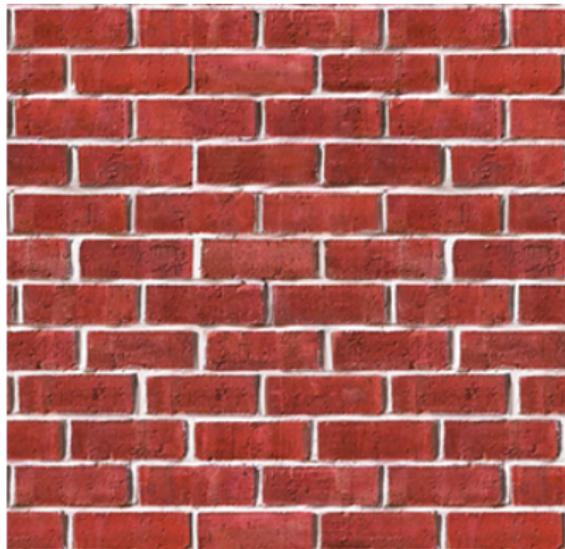
180 degree rotational symmetry



mirror symmetry

Sama vai eri?

Kuuluvatko kuviot samaan tapettiryhmään?

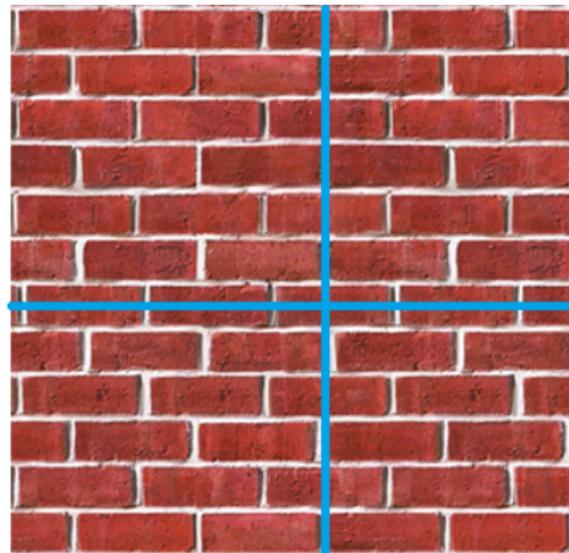


Sama vai eri?

Kuuluvatko kuviot samaan tapettiryhmään?



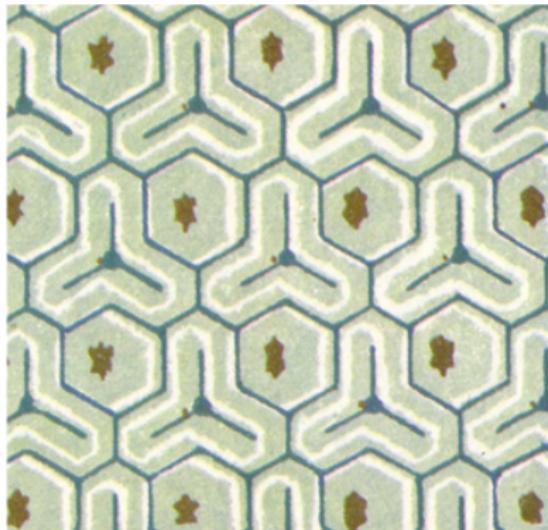
mirror symmetry along lines in one direction



mirror symmetry along lines in two directions

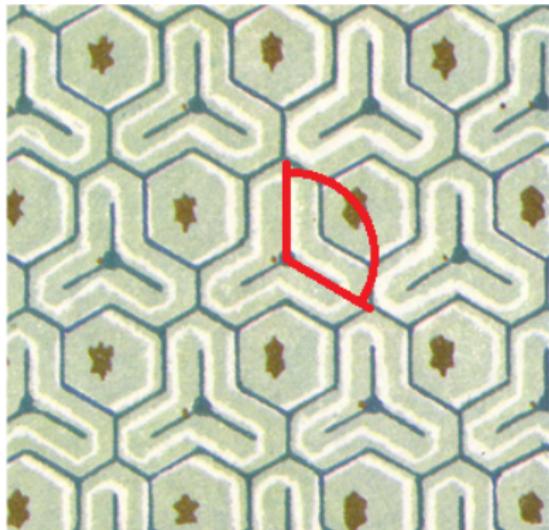
Sama vai eri?

Kuuluvatko kuviot samaan tapettiryhmään?

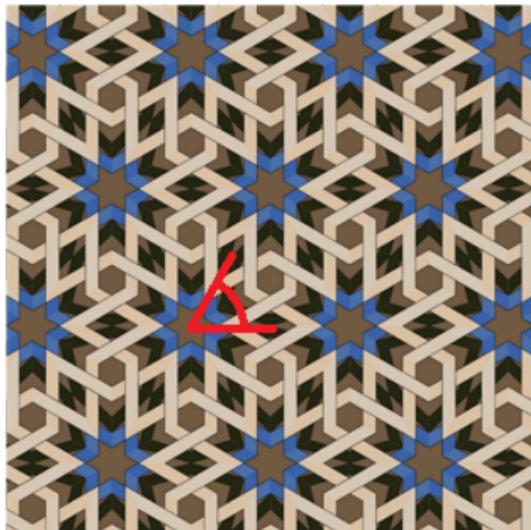


Sama vai eri?

Kuuluvatko kuviot samaan tapettiryhmään?



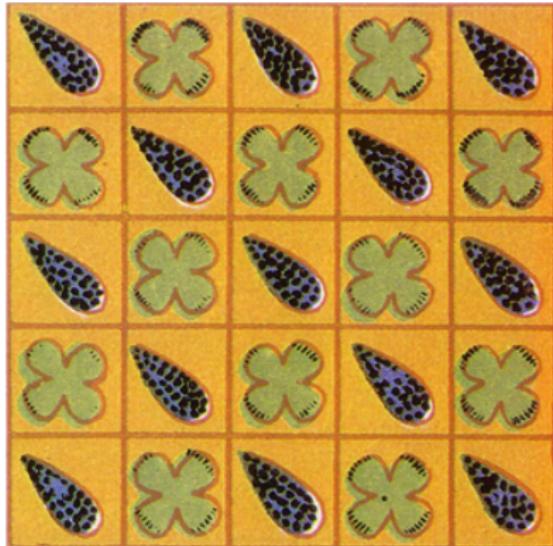
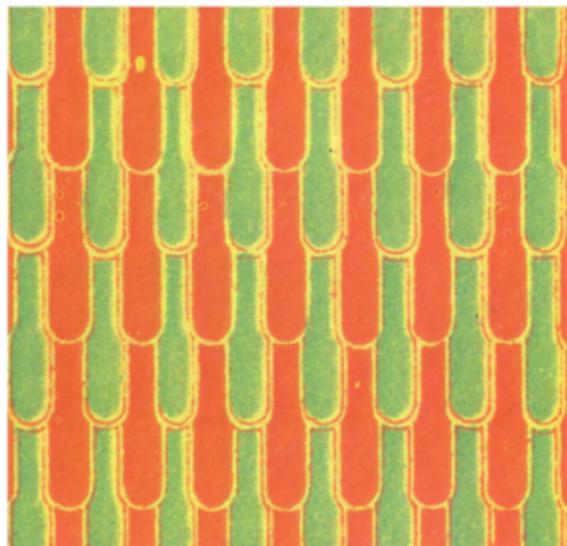
120 degree rotational symmetry



60 degree rotational symmetry

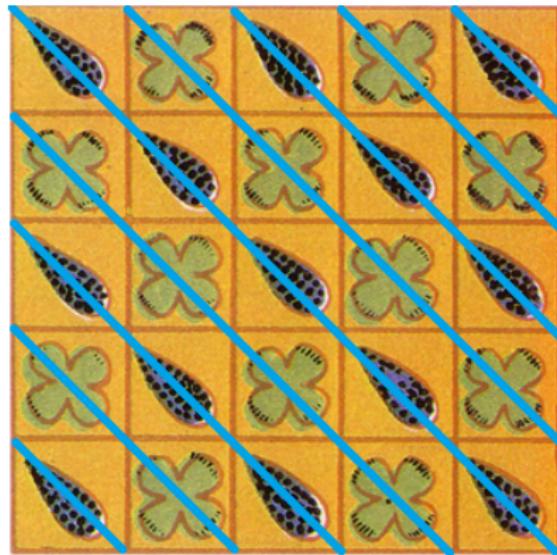
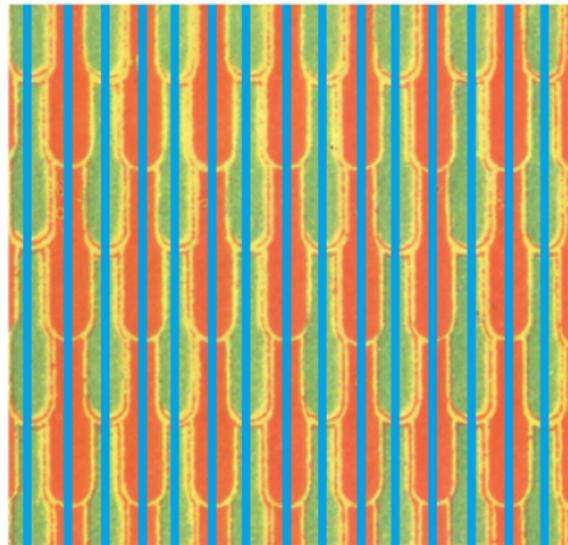
Sama vai eri?

Kuuluvatko kuviot samaan tapettiryhmään?



Sama vai eri?

Kuuluvatko kuviot samaan tapettiryhmään?



Apart from translational symmetry, both patterns are only symmetric along mirror lines (highlighted) in the same direction as the translational symmetry. Since the only difference is the size and direction of the translational symmetry, both groups are the same (pm).