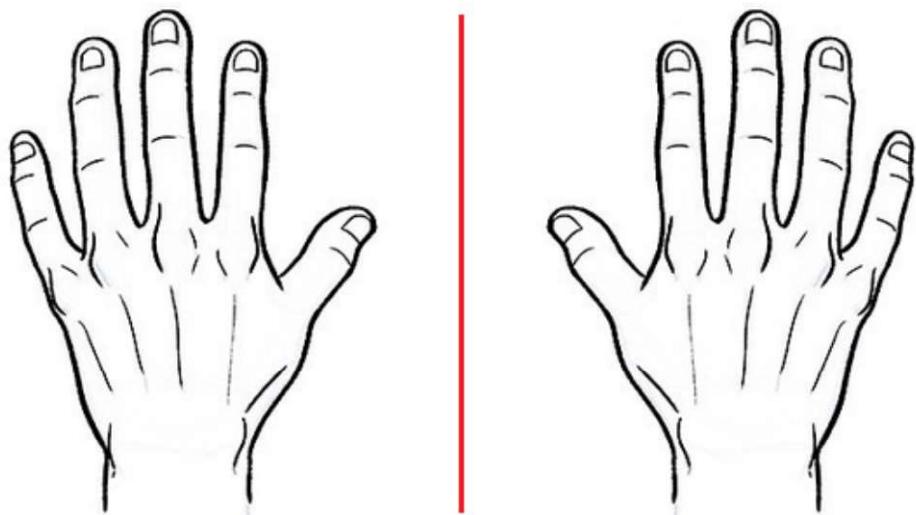
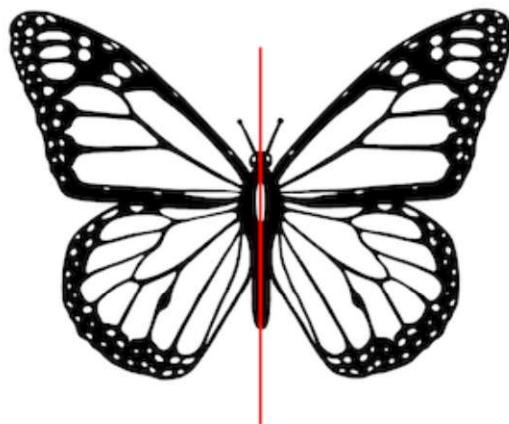


Tapettiryhmät

Aleksis Koski

Symmetria

Symmetria on yksi tärkeä peruskäsite matematiikassa (etenkin geometriassa) johon pyrimme nyt tutustumaan tarkemmin. Tutkitaan ensin, millaisia eri symmetrian muotoja on olemassa.



Peilisymmetria on tunnetuin symmetrian muoto. Se toteutuu jos kuvio ei muutu peilauksessa tietyn akselin ympäri. Puhekielessä "symmetrinen" ja "peilisymmetrinen" ovat usein sama asia.

Symmetria

Toinen tärkeä symmetrian muoto on **kiertosymmetria** (tai **rotaatiosymmetria**).



Kuviossa on **kiertosymmetria**, jos se ei muutu kiertämällä sitä tietyn pisteen ympäri jonkin verran. Yllä olevassa kuvassa esiintyy viisi- ja kuusinkertainen kiertosymmetria.

Symmetria

Matemaatikoita kiinnostaa usein myös niin sanottu **siirtosymmetria**.



Kuviossa on **siirtosymmetria**, jos kuvio pysyy samanlaisena kun sitä siirretään johonkin suuntaan tietyn verran. Ylläolevassa kuviossa esiintyy vaakasuuntainen siirtosymmetria.

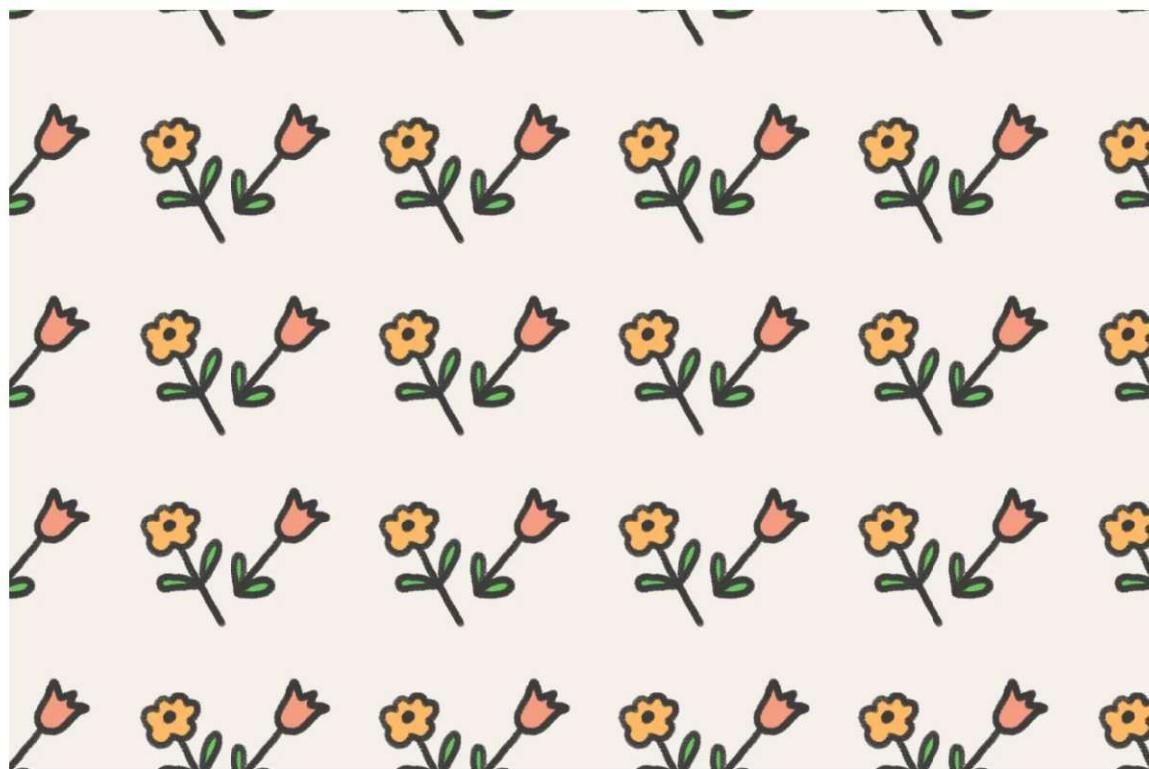
Tapettikuviot

Tässä esityksessä keskitymme tietynlaisiin symmetrisiin kuvioihin nimeltä **tapettikuviot**.



Tapettikuviot

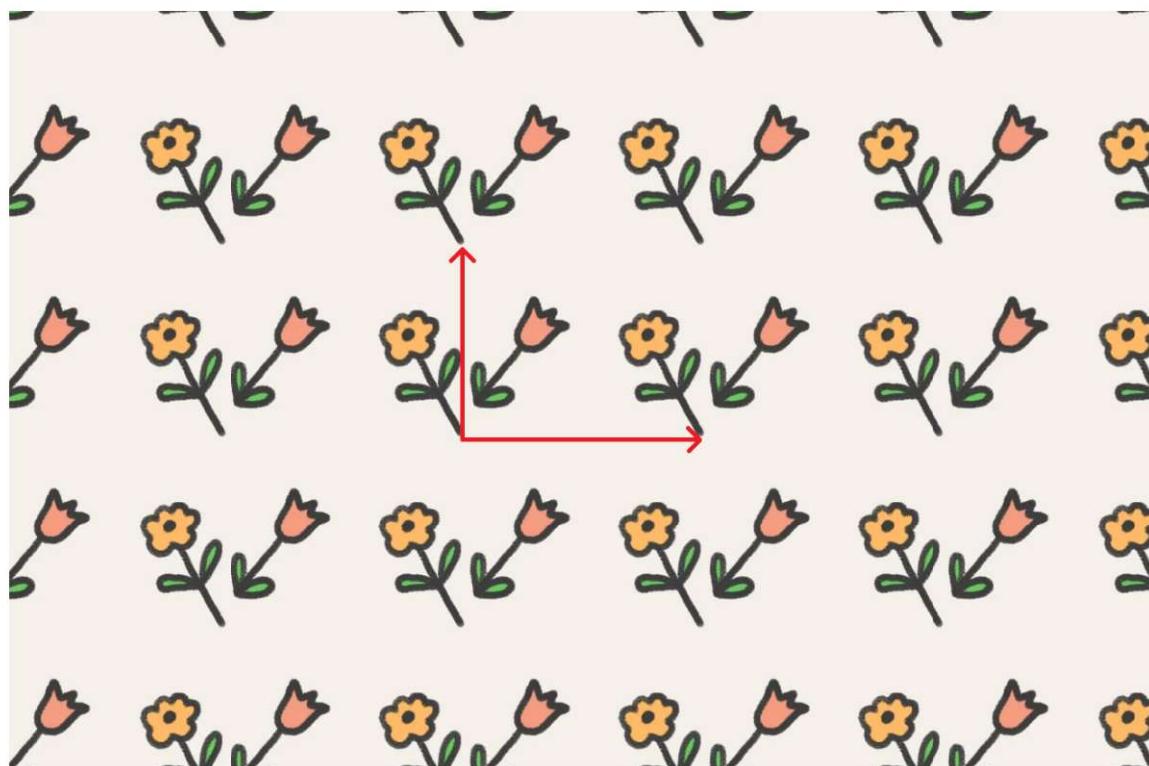
Mitä tapettikuvialla oikeastaan tarkoitetaan? Katsotaan ensin seuraavaa yksinkertaista kuviota:



Kuvitellaan, että kuvio jatkuu samanlaisena sekä vaaka- että pystysuunnassa.

Tapettikuviot

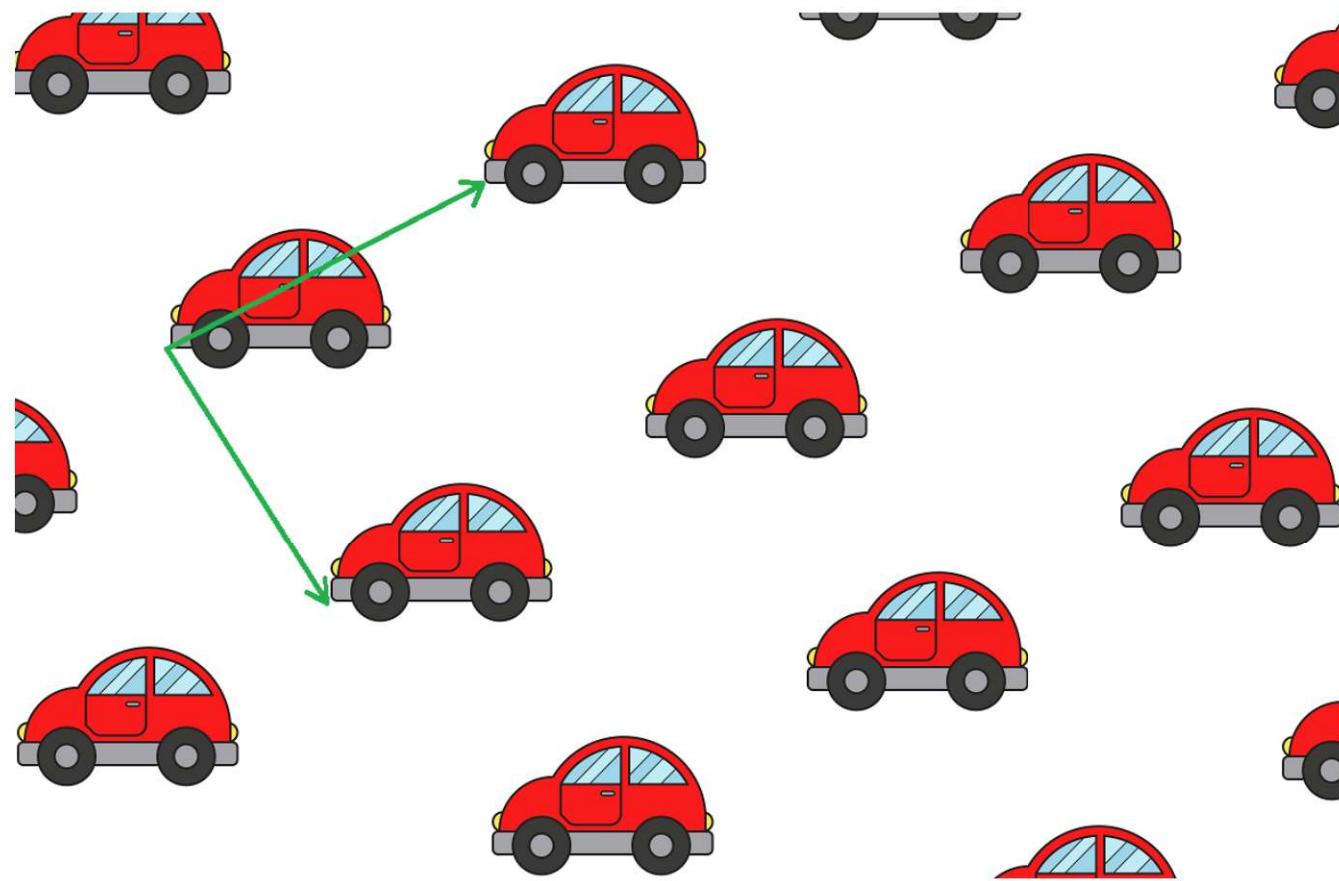
Huomaa, että kuviota voi siirtää kahteen suuntaan ilman että se muuttuu:



Tämä kuvio on siis **siirtosymmetrinen** vaaka- ja pystysuuntaisen siirron suhteen.

Tapettikuviot

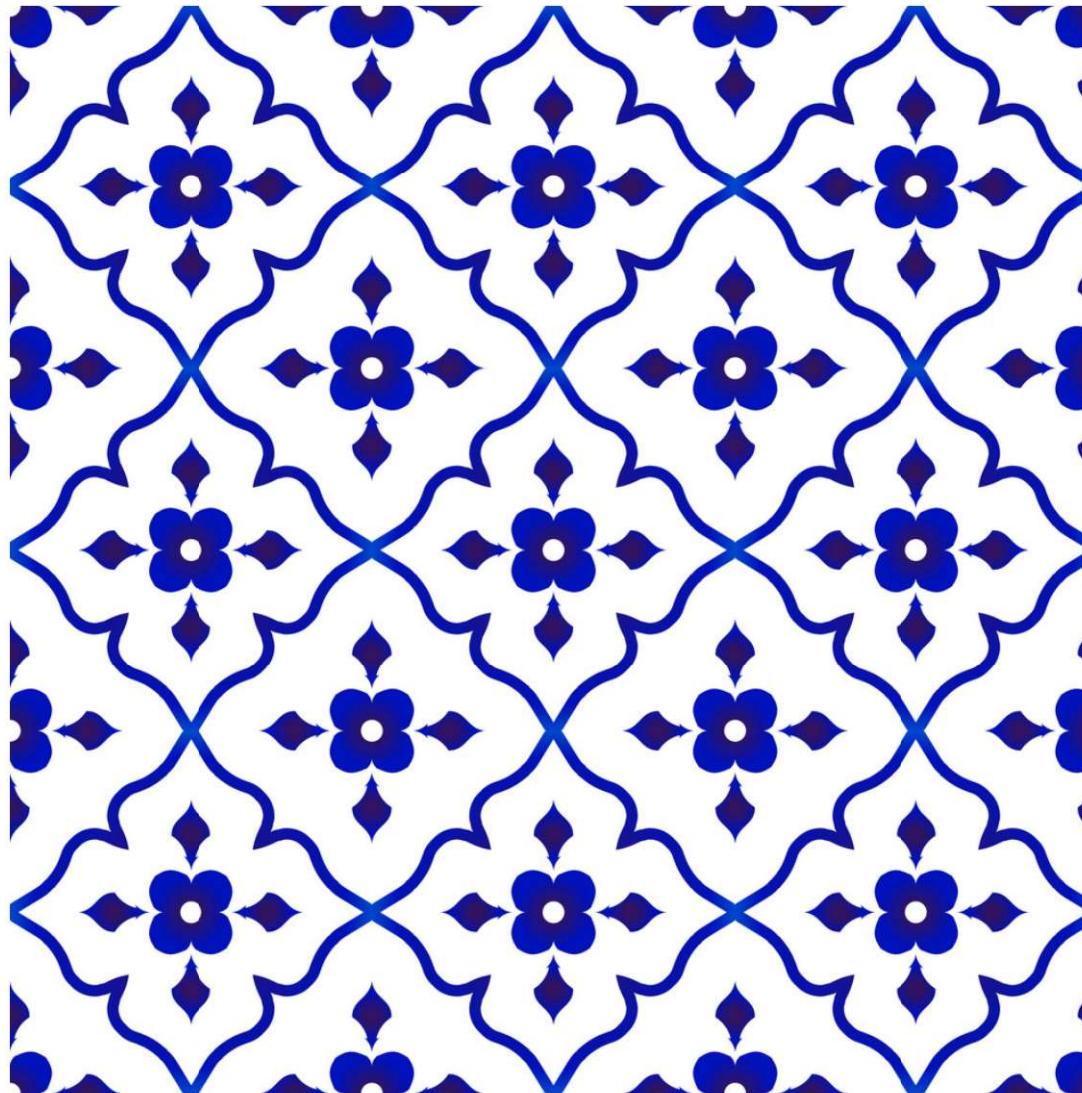
Tapettikuviot ovat kuvioita, joilla on siirtosymmetria kahteen eri suuntaan.



Suuntien ei välittämättä tarvitse olla vaaka- ja pystysuuntaisia.

Tapettikuviot

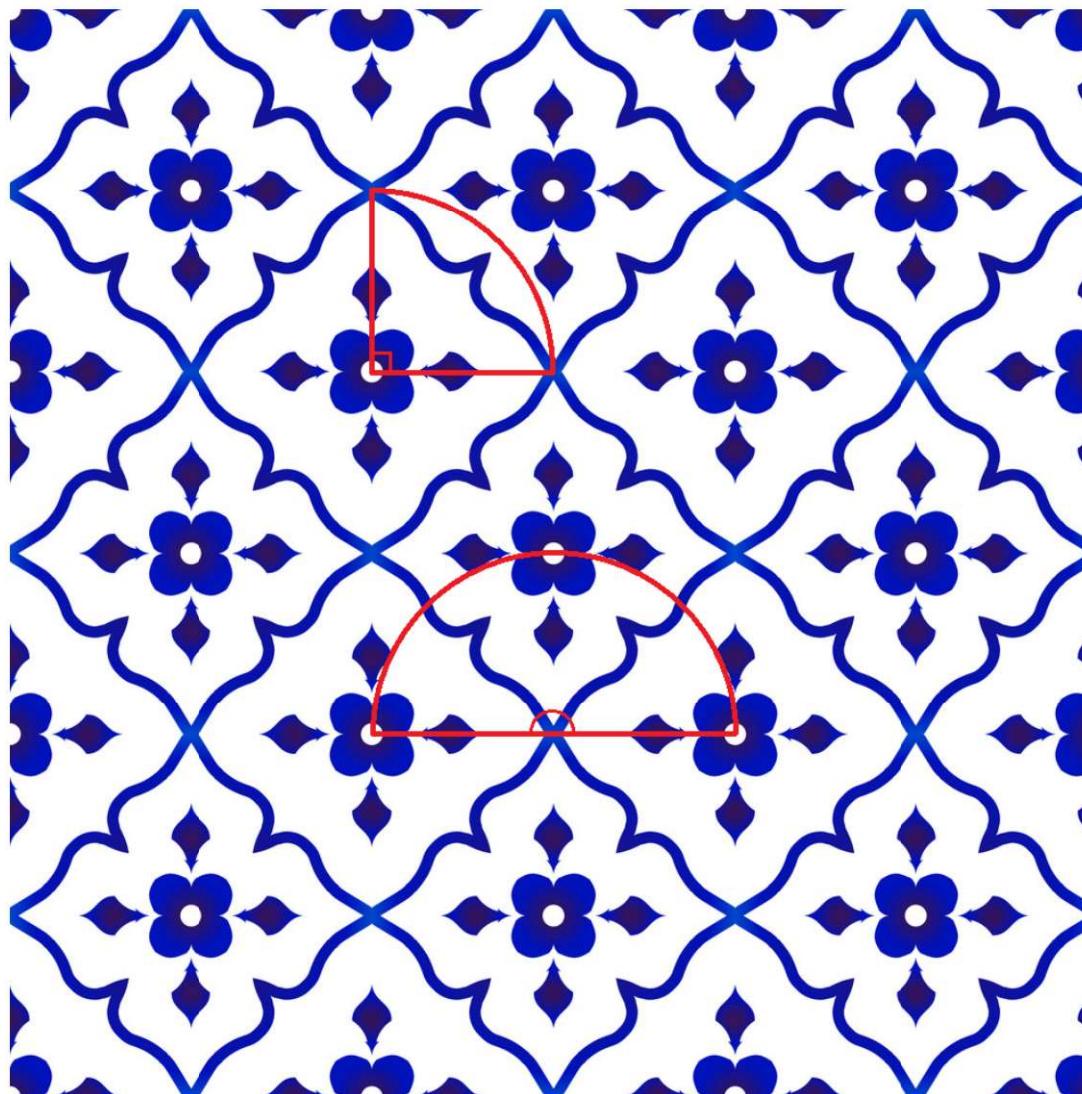
On myös tapettikuvioita joilla on enemmän symmetrioita:



Tämäkin kuvio on symmetrinen kahden siirron suhteen.

Tapettikuviot

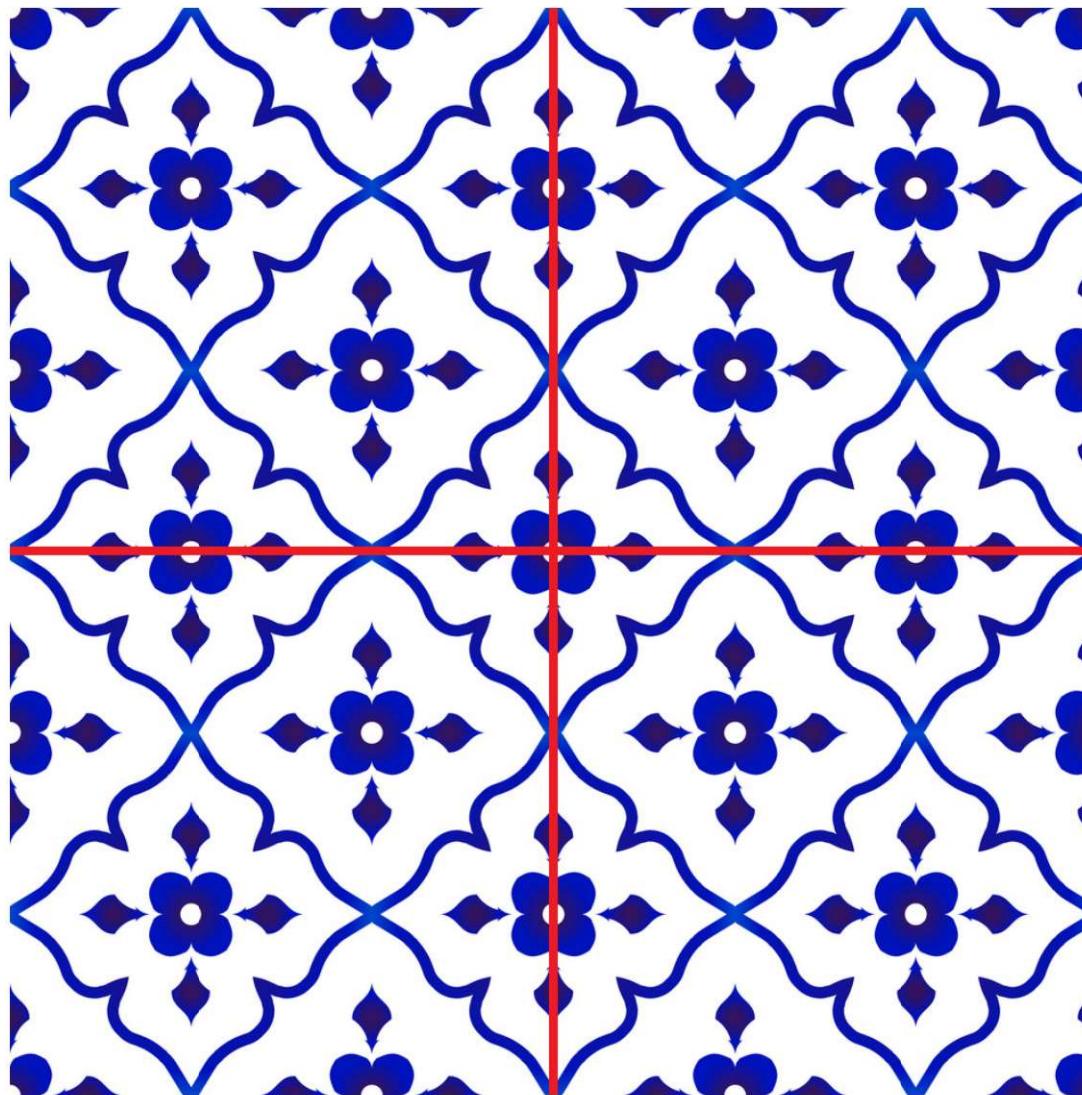
Sillä on myös ns. 90- ja 180-asteen rotaatiosymmetria:



Eli kuvio ei muutu jos sitä kiertää neljännes- tai puoliympyrän verran tiettyjen pisteiden suhteen.

Tapettikuviot

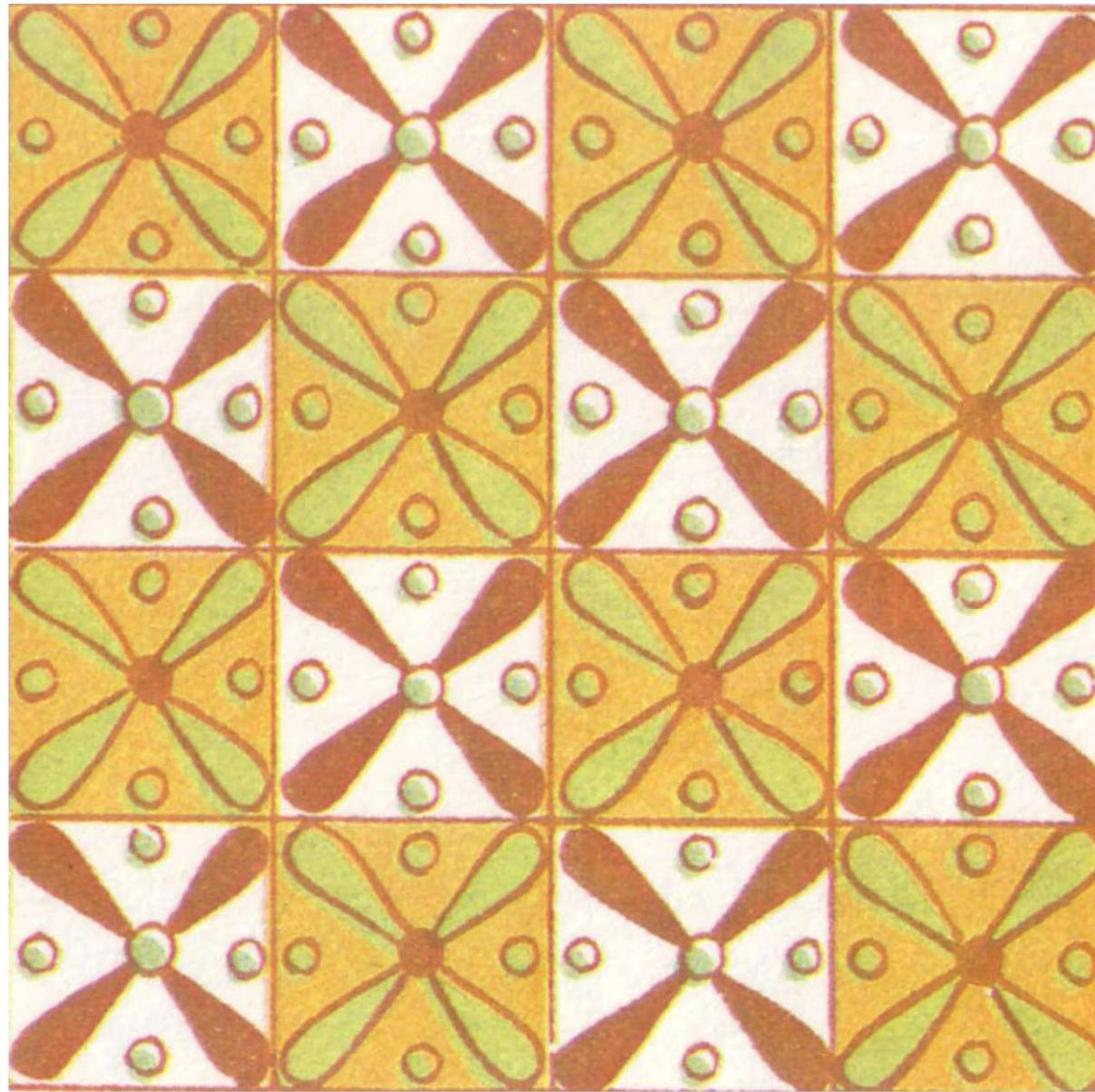
Tällä kuvolla on myös peilisymmetrioita tiettyjen suorien suhteen:



Löydätkö kuvasta lisää peilisymmetroita?

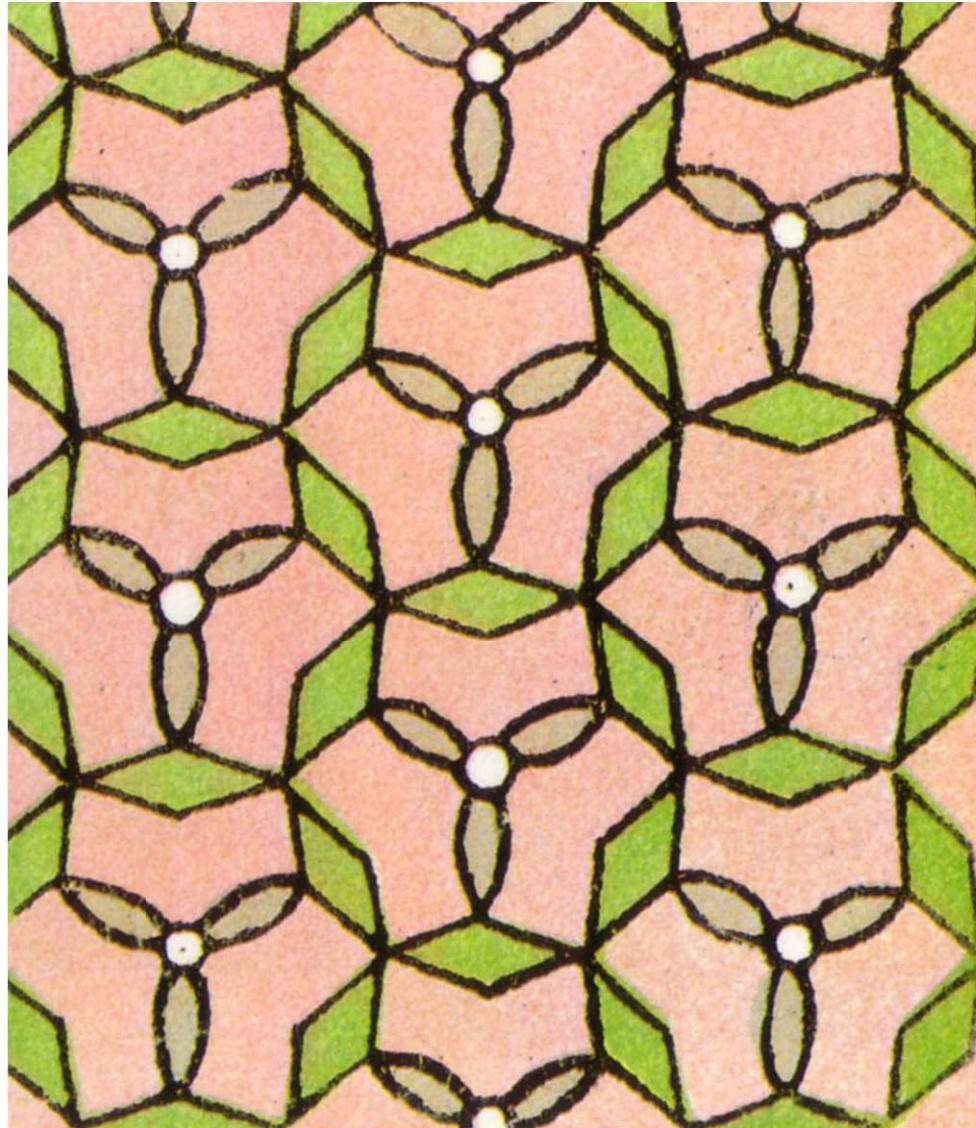
Symmetriat

Millaisia symmetrioita seuraava kuvio toteuttaa?



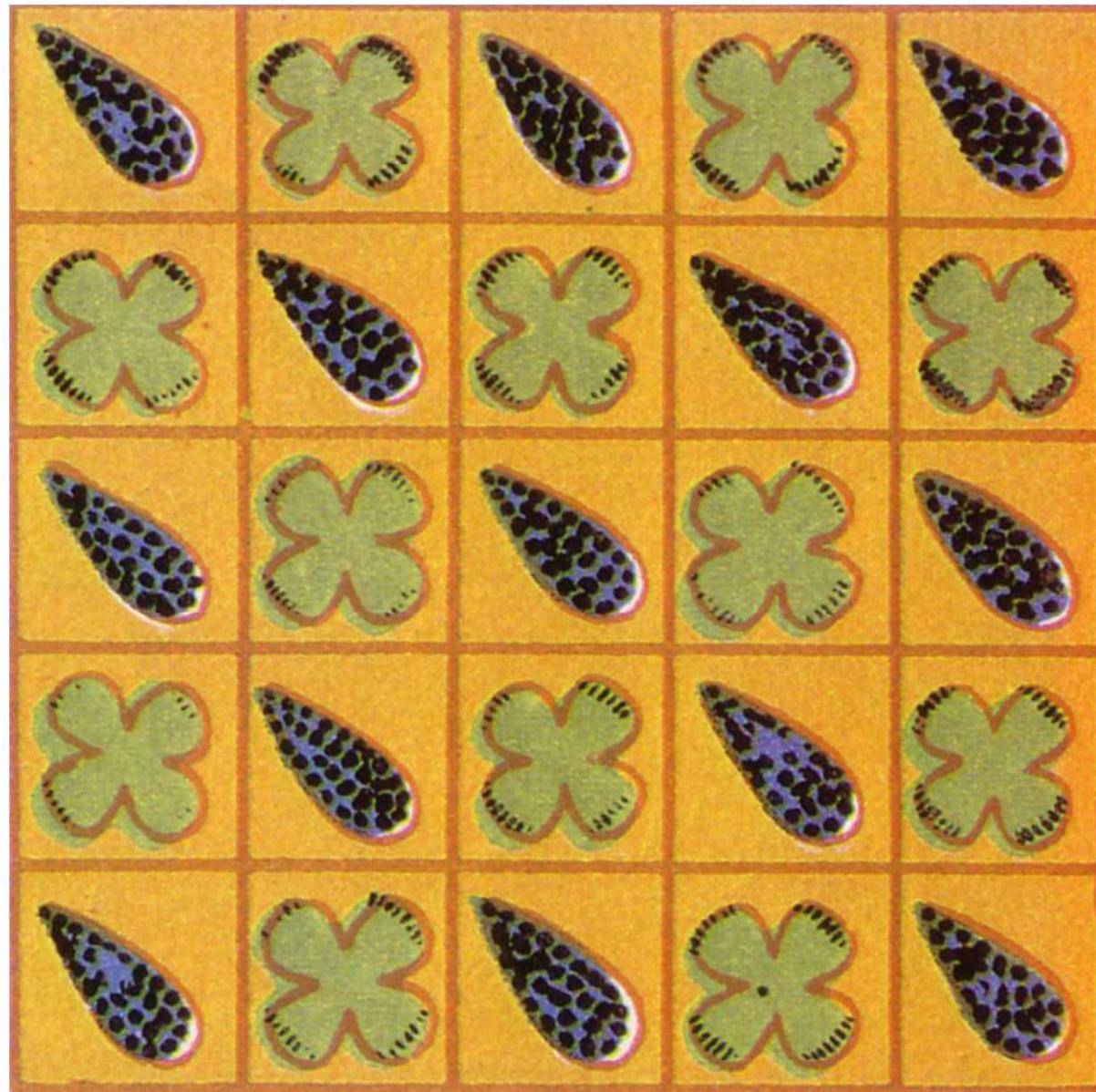
Symmetriat

Millaisia symmetrijoita seuraava kuvio toteuttaa?



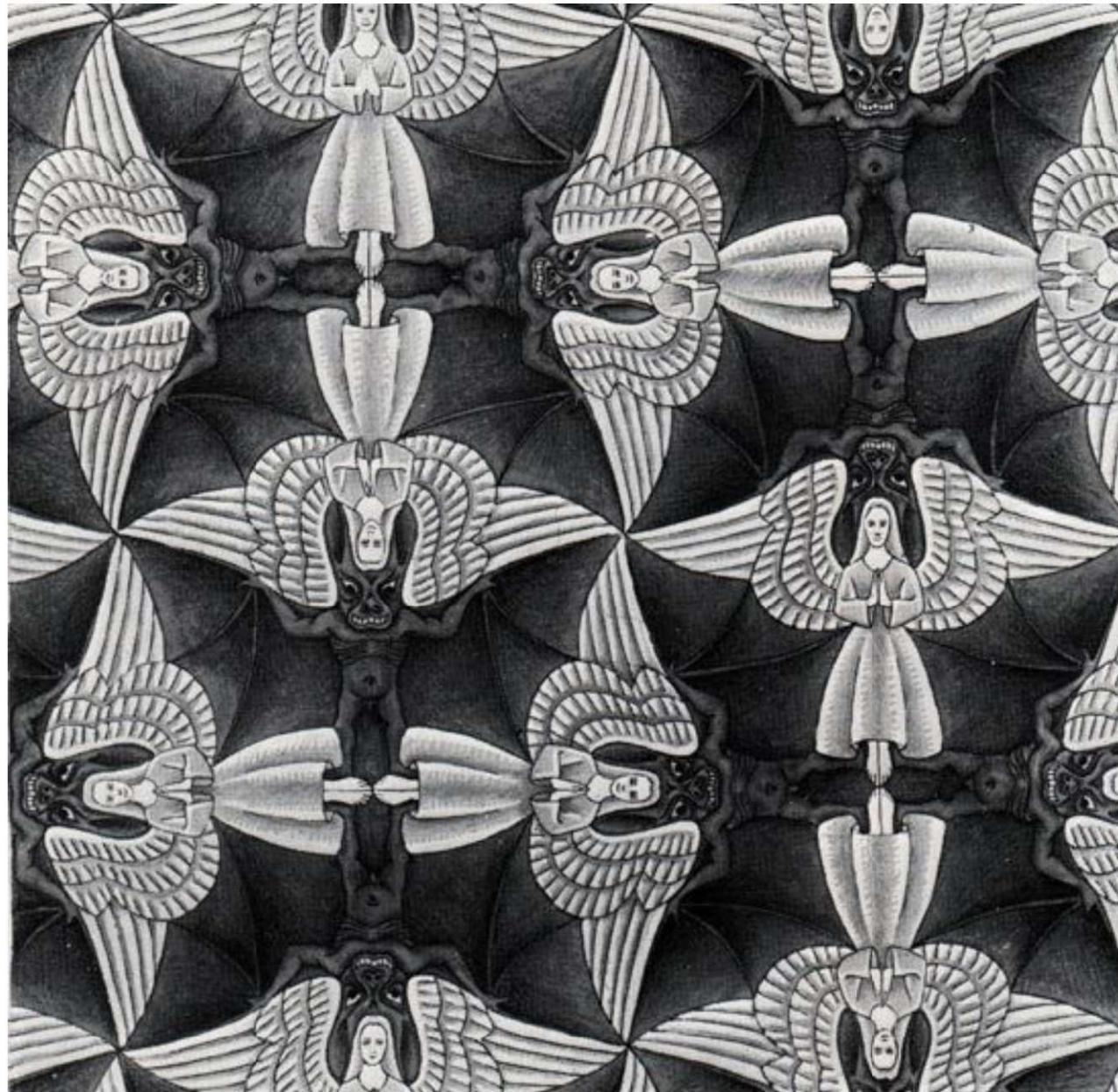
Symmetriat

Millaisia symmetriota seuraava kuvio toteuttaa?



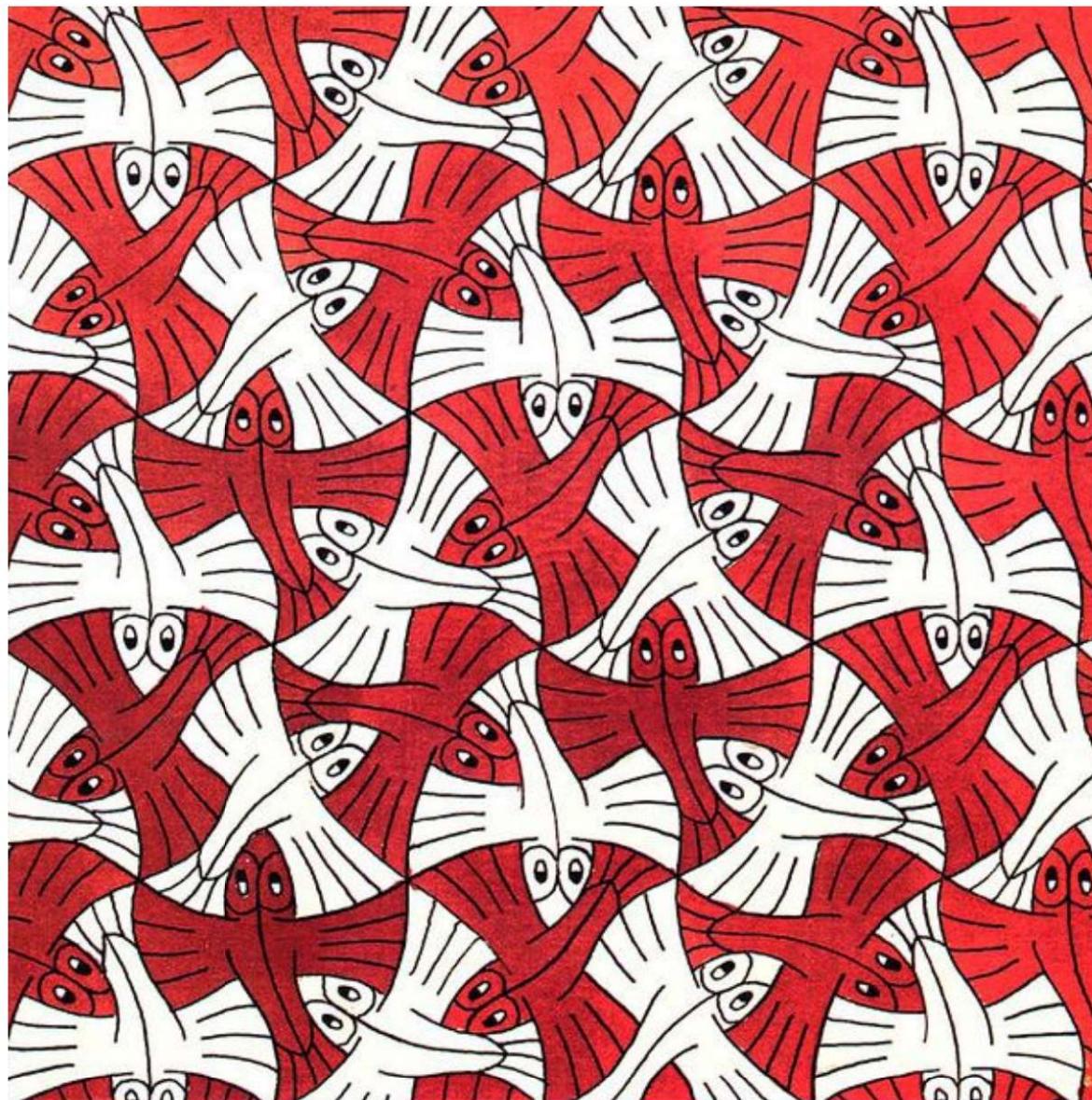
Symmetriat

Millaisia symmetrioita seuraava kuvio toteuttaa?



Symmetriat

Millaisia symmetrioita seuraava kuvio toteuttaa?



Symmetriat

Millaisia symmetrioita seuraava kuvio toteuttaa?



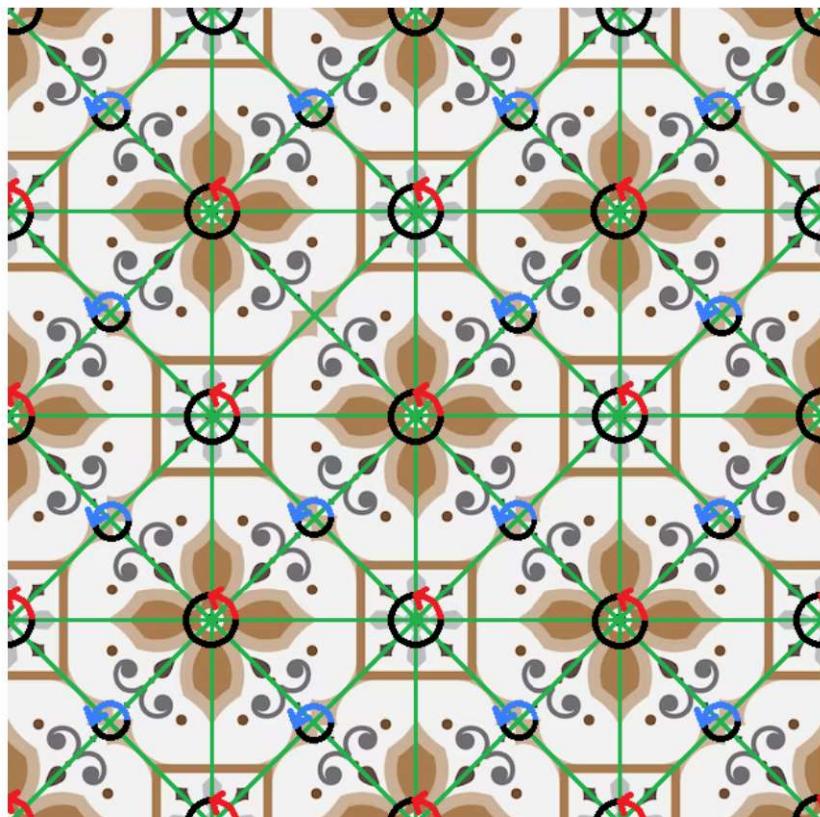
Tapettiryhmät

Kaikki tapettikuviot voidaan luokitella niiden symmetrioiden perusteella.



Tapettiryhmät

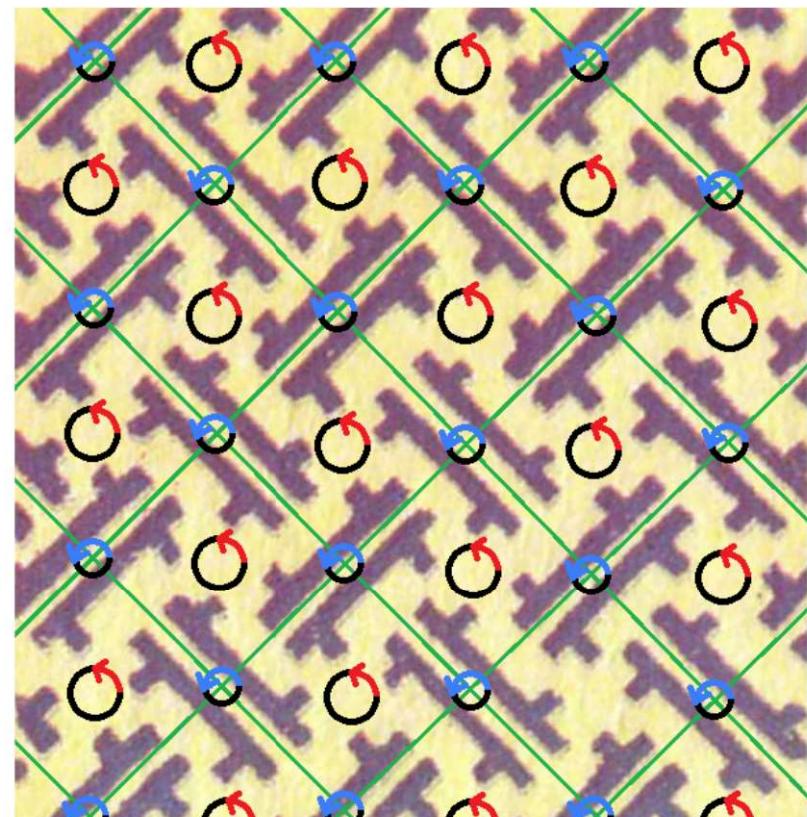
Kaikkien kuvion symmetrioiden muodostama joukko on kyseisen kuvion **tapettiryhmä**.



90 asteen kiertosymmetria



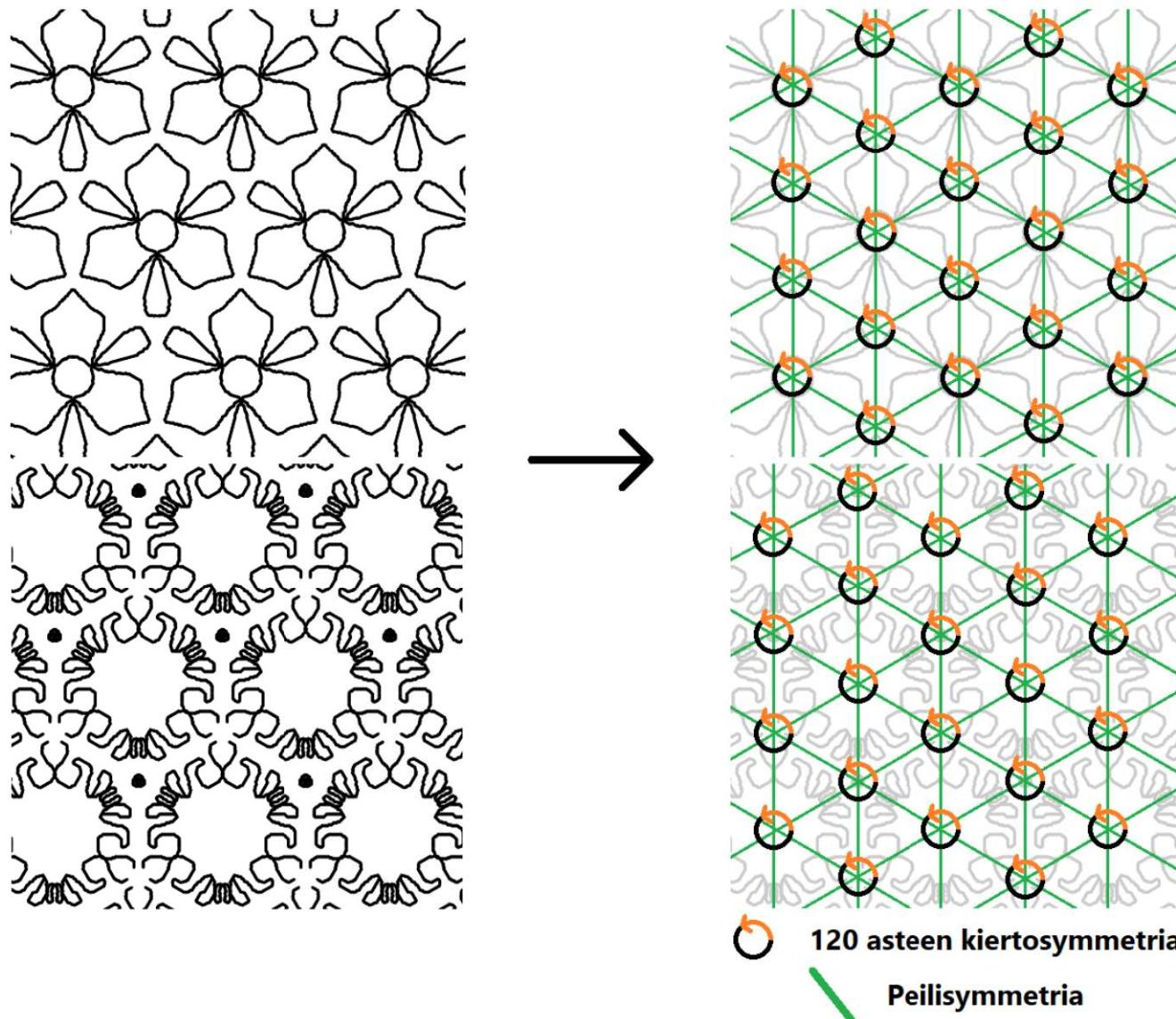
180 asteen kiertosymmetria



Peilisymmetria

Tapettiryhmät

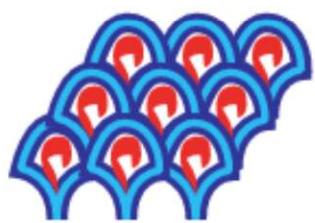
Joskus kahta erilaista kuviota vastaa sama tapettiryhmä.



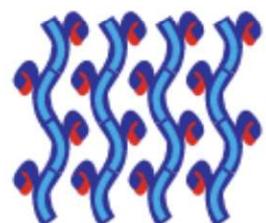
Tapettiryhmät

Osoittautuu, että on vain 17 erilaista tapettiryhmää.

p1



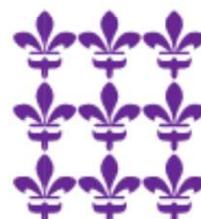
pg



pgg



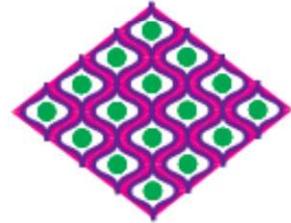
pm



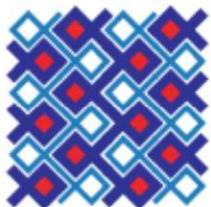
cm



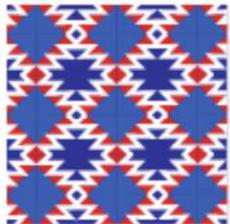
cmm



pmg



pmm



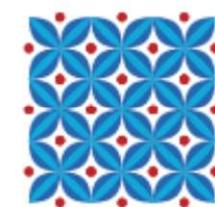
p2



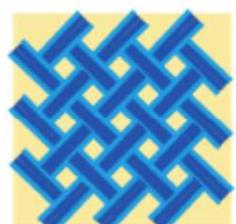
p4



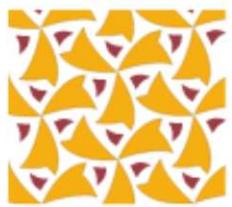
p4m



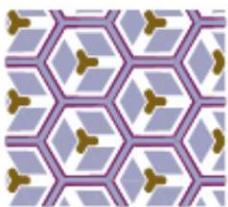
p4g



p3



p3m1



p31m



p6

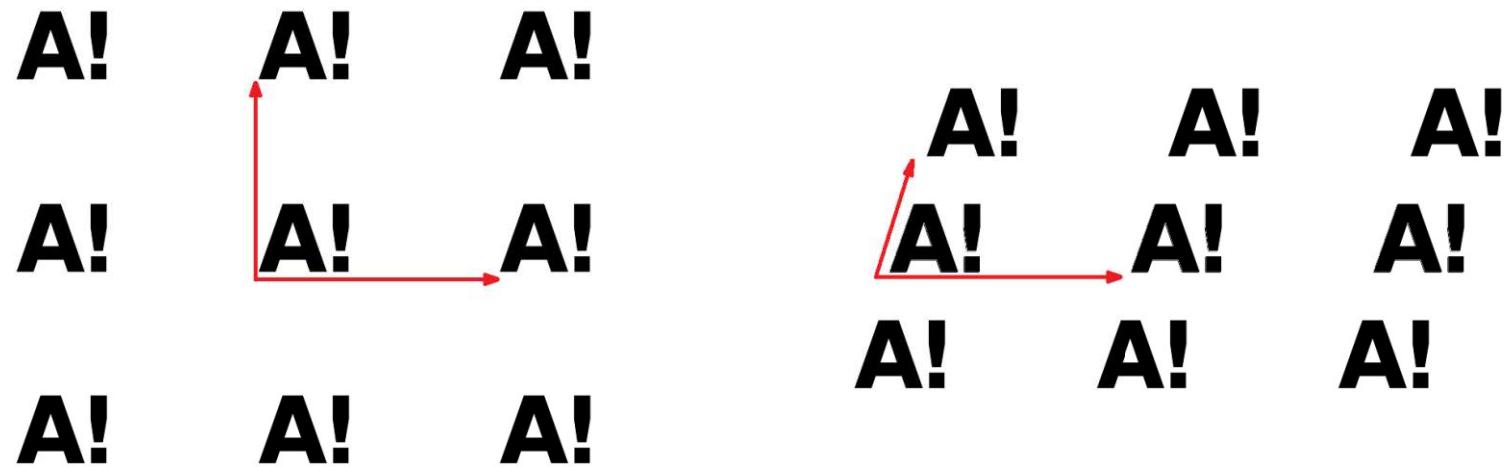


p6m



Sama vai eri?

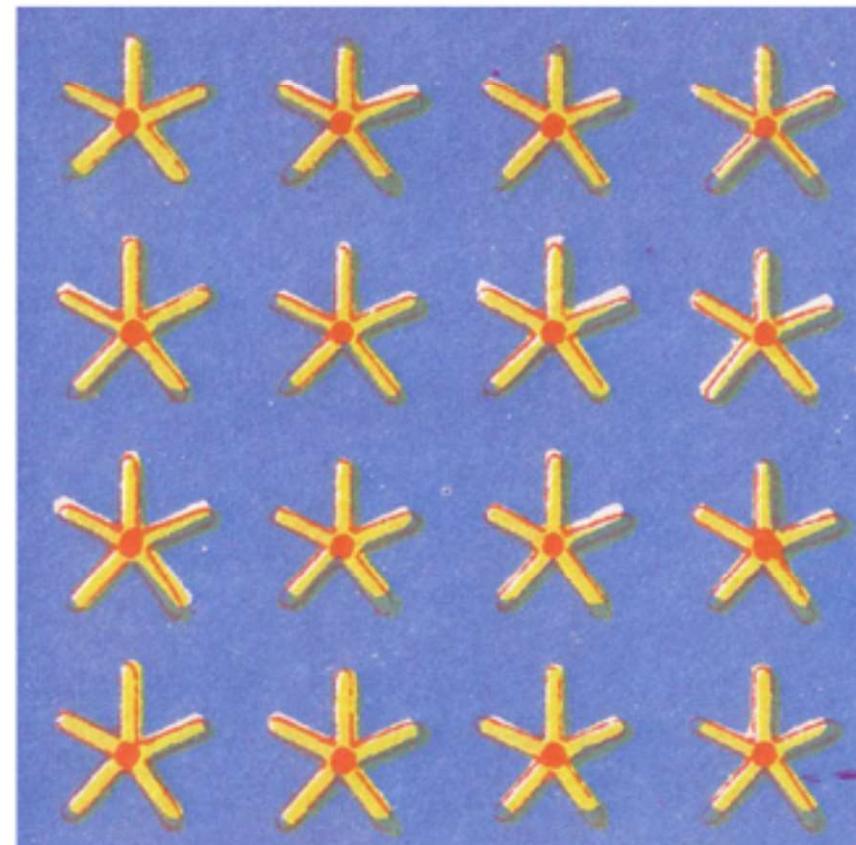
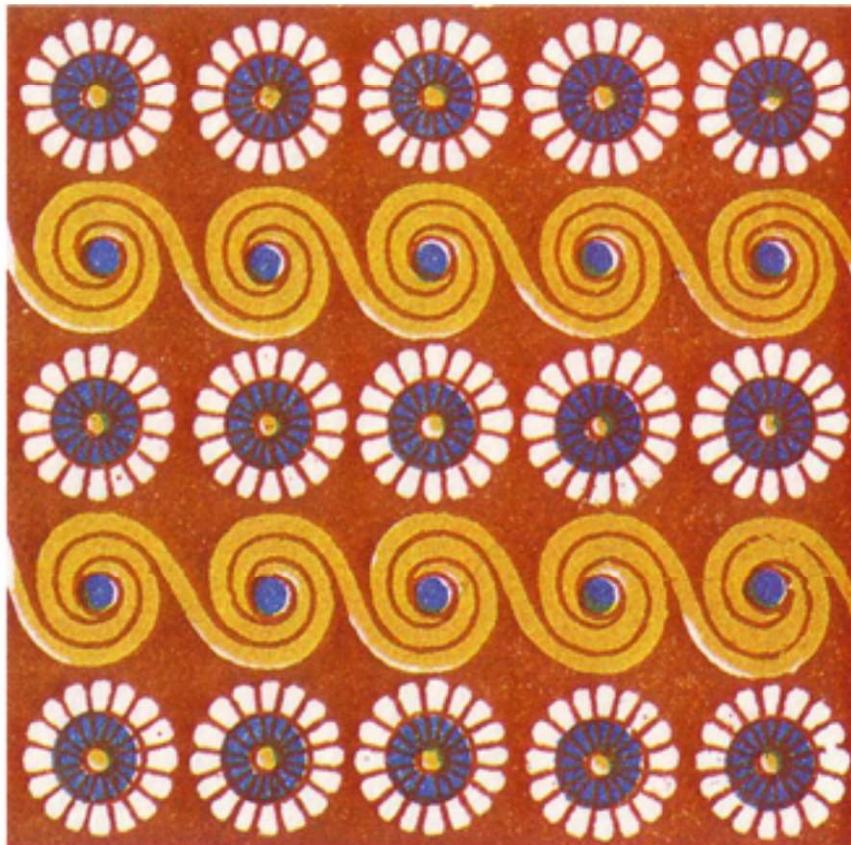
Jos halutaan selvittäää kuuluvatko kaksi kuviota samaan tapettiryhmään, pitää selvittää vastaavatko molempien kuvioiden symmetriat toisiaan.



Näiden kahden kuvion siirtosymmetrioilla on eri suunnat ja suuruudet, mutta tämä vielä sallitaan. Molemmat kuviot kuuluvat samaan tapettiryhmään $p1$ koska niissä ei ole muita symmetriolevyjä.

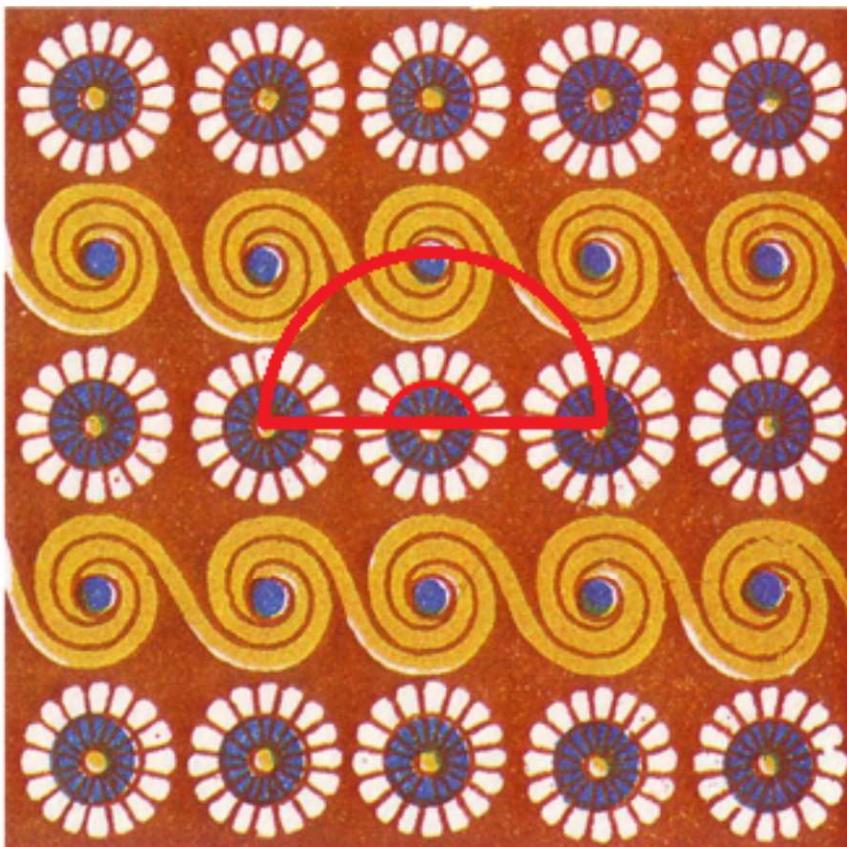
Sama vai eri?

Kuuluvatko kuviot samaan tapettiryhmään?



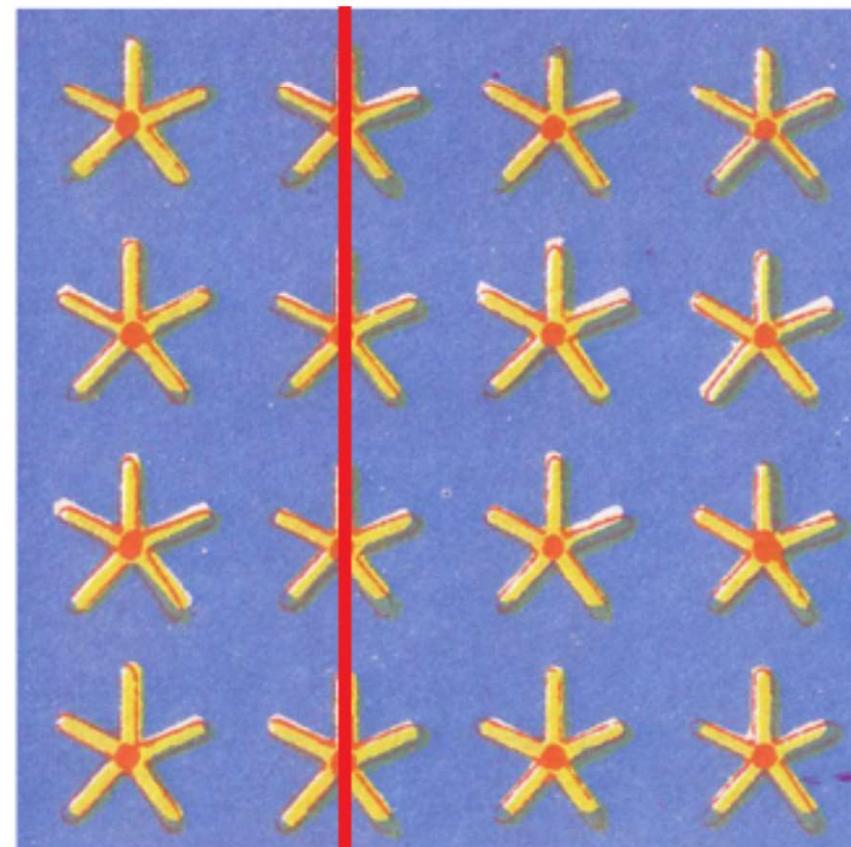
Sama vai eri?

Kuuluvatko kuviot samaan tapettiryhmään?



180 asteen kiertosymmetria

(Ryhmä: p2)

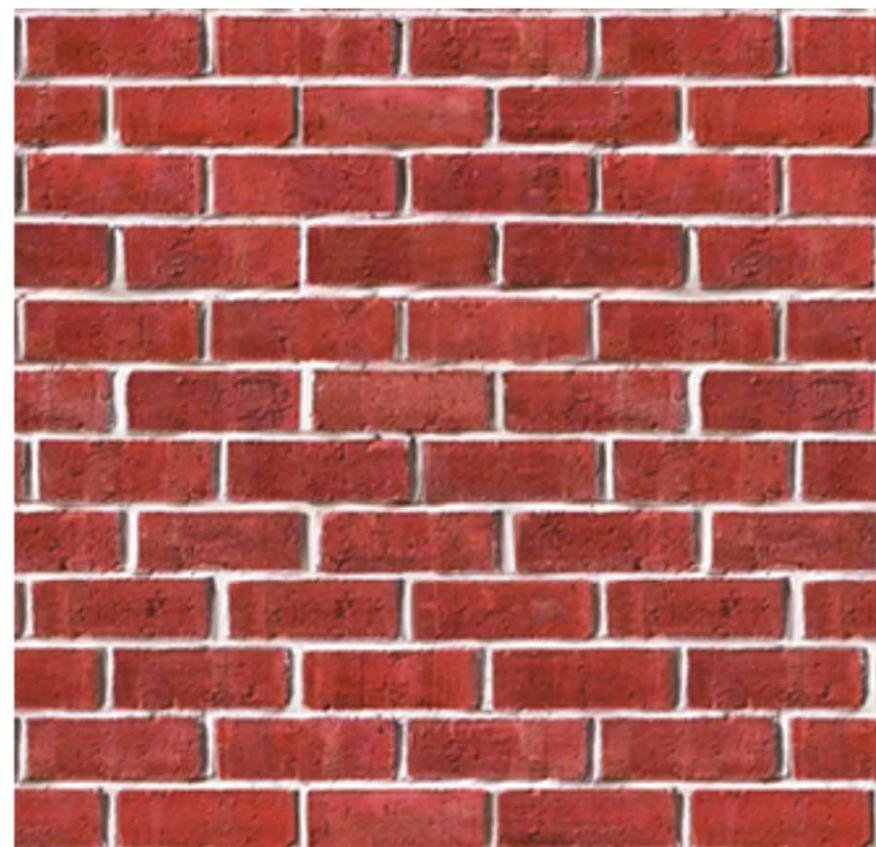


Peilisymmetria

(Ryhmä: pm)

Sama vai eri?

Kuuluvatko kuviot samaan tapettiryhmään?

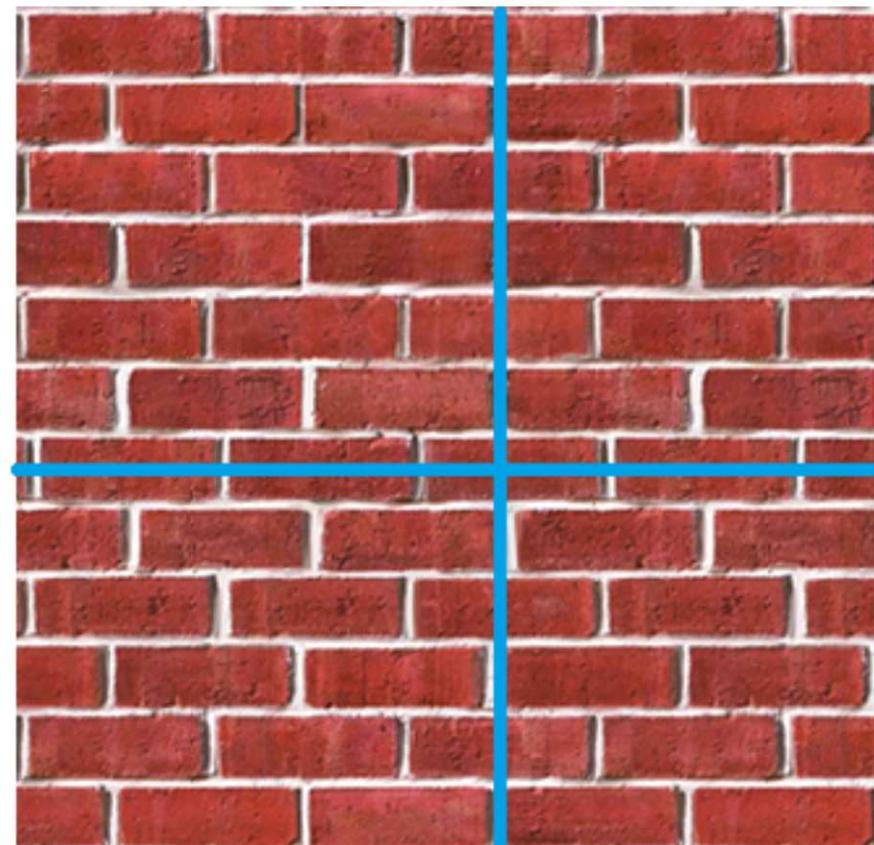


Sama vai eri?

Kuuluvatko kuviot samaan tapettiryhmään?



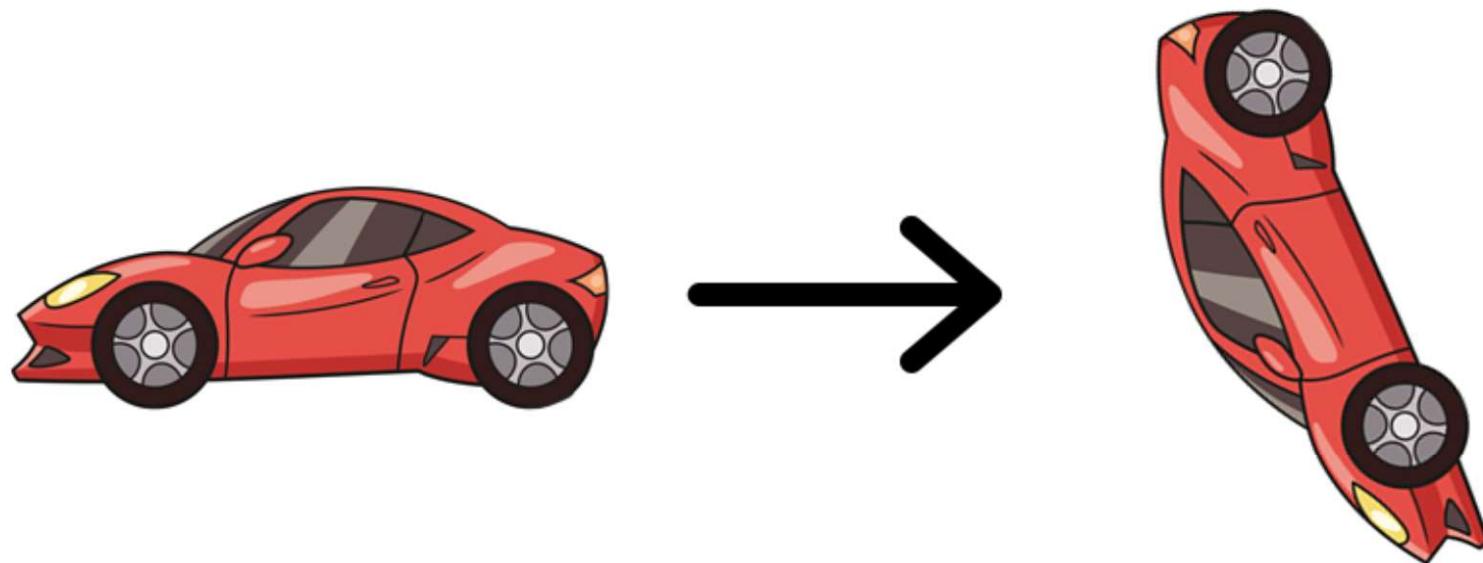
Peilisymmetria yhteen suuntaan
(Ryhmä: pmg)



Kaksisuuntainen peilisymmetria
(Ryhmä: cmm)

Isometriat

Tutkitaan nyt vähän tarkemmin mitä mahdollisia symmetrioita kuvioilla voi olla.



Sanotaan, että tason kuvaus $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ on **isometria** jos se pitää pisteiden välistet etäisyydet (ja kulmat) ennallaan.

Isometriat

Tason isometrioihin kuuluu:

Siirto



Kierto



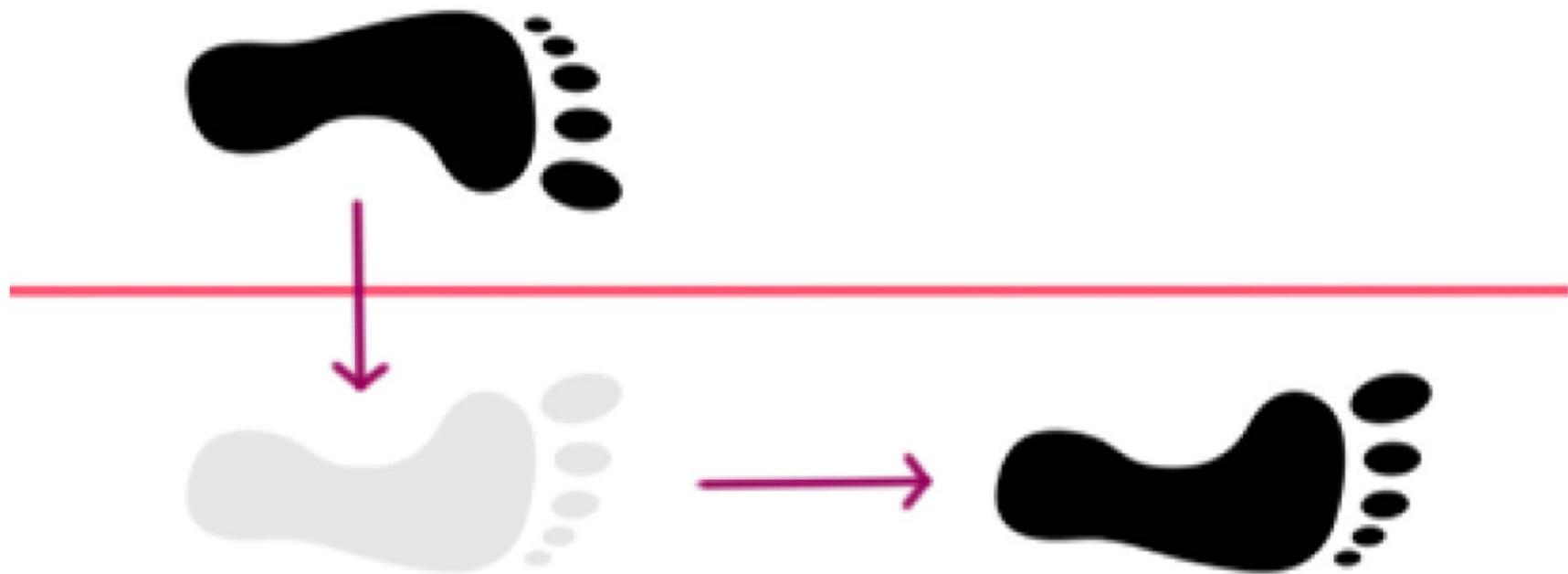
Peilaus



Itse asiassa kaikki tason isometriat voidaan esittää näiden kolmen perusisometrian yhdistelminä.

Isometriat

On hyvä erottella myös eräs tason isometria nimeltä **liukupeilaus**:



Liukupeilauksessa ensin peilataan suoran suhteen, sitten tehdään siirto saman suoran suuntaisesti.

Isometriat

Tason isometriolle saadaan nyt yksinkertainen luokittelu.

Lause. Jokainen tason isometria on joko:

- ▶ **Siirto** (sopivan suunnan ja etäisyyden suhteen)
- ▶ **Kierto** (sopivan keskipisteen ja kulman suhteen)
- ▶ **Liukupeilaus** (sopivan suoran ja etäisyyden suhteen)

Siis myös jokainen tapettikuvioissa esiintyvä symmetria tulee jostain näistä kolmesta vaihtoehdosta.

Huom! Liukupeilaus voi olla myös tavallinen peilaus.

Tapettikuvien luokittelu

Jokaisen tapettikuvion tarkan luokitukseen voi määrittää seuraamalla oheista vuokaaviota.

