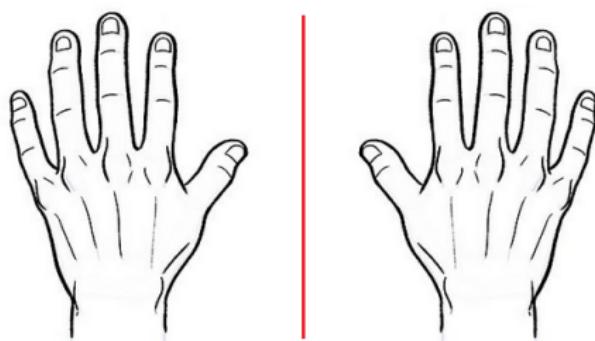
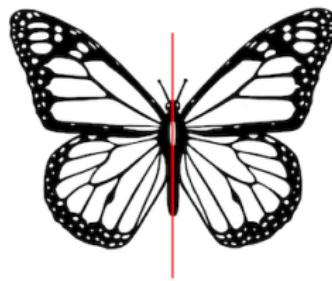


# Tapettiryhmät

Aleksis Koski

# Symmetria

**Symmetria** on yksi tärkeä peruskäsite matematiikassa (etenkin geometriassa) johon pyrimme nyt tutustumaan tarkemmin. Tutkitaan ensin, millaisia eri symmetrian muotoja on olemassa.



**Peilisymmetria** on tunnetuin symmetrian muoto. Se toteutuu jos kuvio ei muuta peilauksessa tietyn akselin ympäri. Puhekielessä "symmetrinen" ja "peilisymmetrinen" ovat usein sama asia.

# Symmetria

Toinen tärkeä symmetrian muoto on **kiertosymmetria** (tai **rotaatiosymmetria**).



Kuviossa on **kiertosymmetria**, jos se ei muutu kiertämällä sitä tietyn pisteen ympäri jonkin verran. Yllä olevassa kuvassa esiintyy viisi- ja kuusinkertainen kiertosymmetria.

# Symmetria

Matemaatikoita kiinnostaa usein myös niin sanottu **siirtosymmetria**.



Kuviossa on **siirtosymmetria**, jos kuvio pysyy samanlaisena kun sitä siirretään johonkin suuntaan tietyn verran. Ylläolevassa kuviossa esiintyy vaakasuuntainen siirtosymmetria.

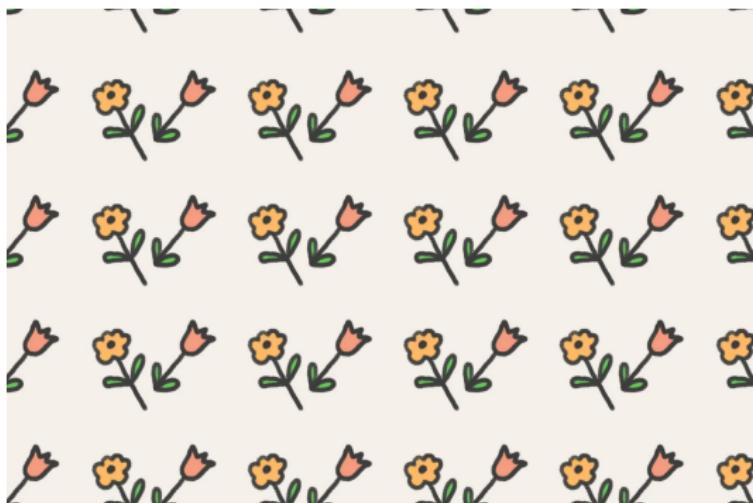
# Tapettikuviot

Tässä esityksessä keskitymme tietynlaisiin symmetrisiin kuvioihin nimeltä **tapettikuviot**.



# Tapettikuviot

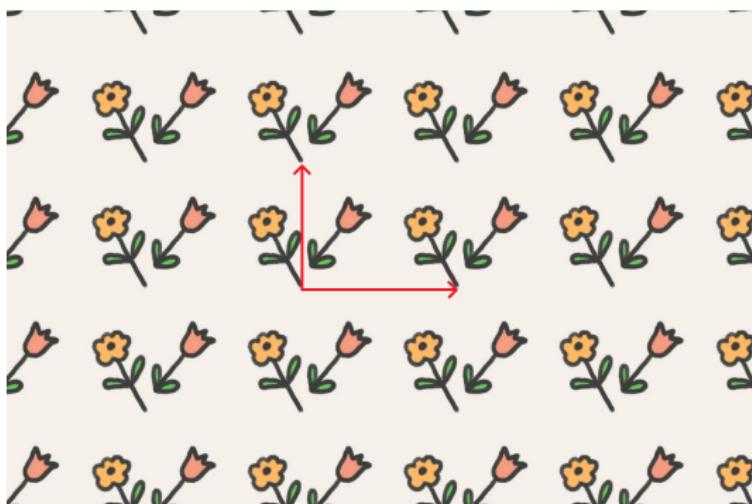
Mitä tapettikuvioilla oikeastaan tarkoitetaan? Katsotaan ensin seuraavaa yksinkertaista kuviota:



Kuvitellaan, että kuvio jatkuu samanlaisena sekä vaaka- että pystysuunnassa.

# Tapettikuviot

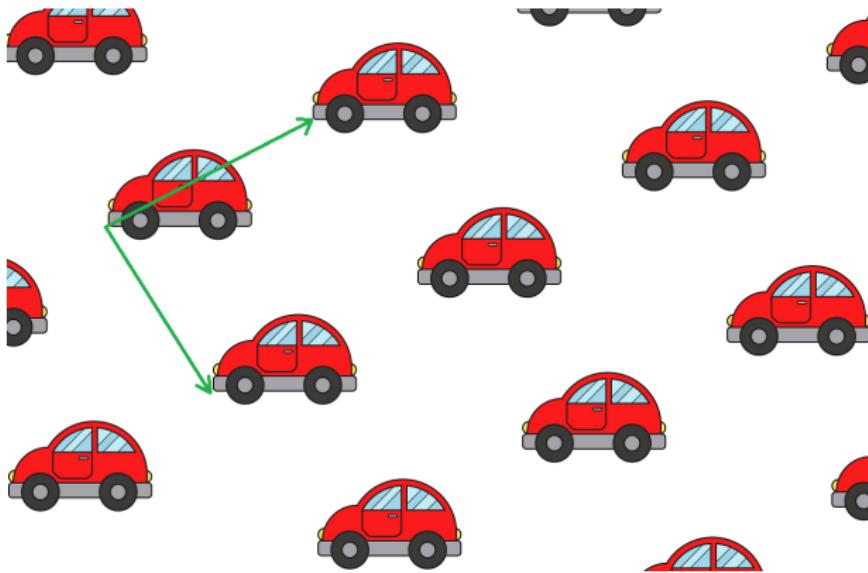
Huomaa, että kuvioita voi siirtää kahteen suuntaan ilman etä se muuttuu:



Tämä kuvio on siis **siirtosymmetrinen** vaaka- ja pystysuuntaisen siirron suhteen.

# Tapettikuviot

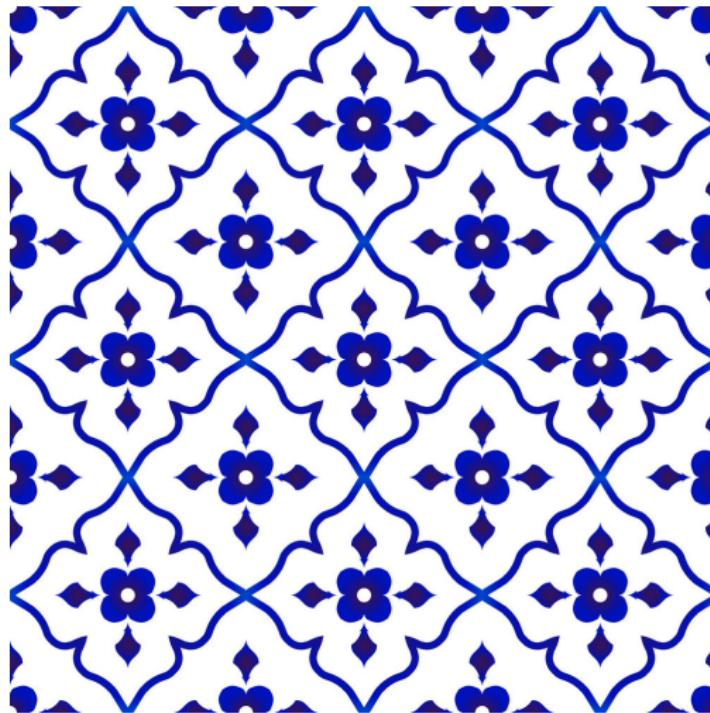
**Tapettikuviot** ovat kuvioita, joilla on siirtosymmetria kahteen eri suuntaan.



Suuntien ei välttämättä tarvitse olla vaaka- ja pystysuuntaisia.

# Tapettikuviot

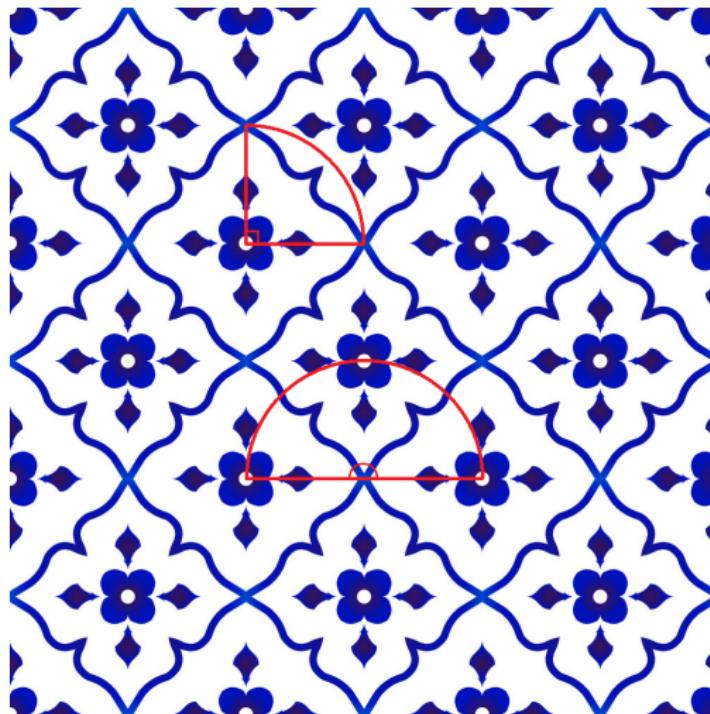
On myös tapettikuvioita joilla on enemmän symmetrioita:



Tämäkin kuvio on symmetrinen kahden siirron suhteen.

# Tapettikuviot

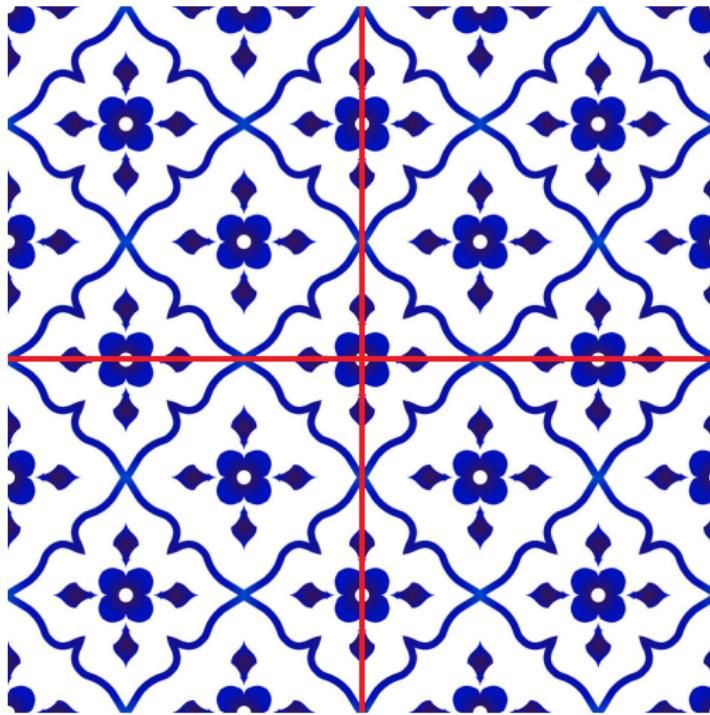
Sillä on myös ns. 90- ja 180-asteen rotaatiosymmetria:



Eli kuvio ei muutu jos sitä kiertää neljännes- tai puoliympyrän verran tiettyjen pisteiden suhtein.

# Tapettikuviot

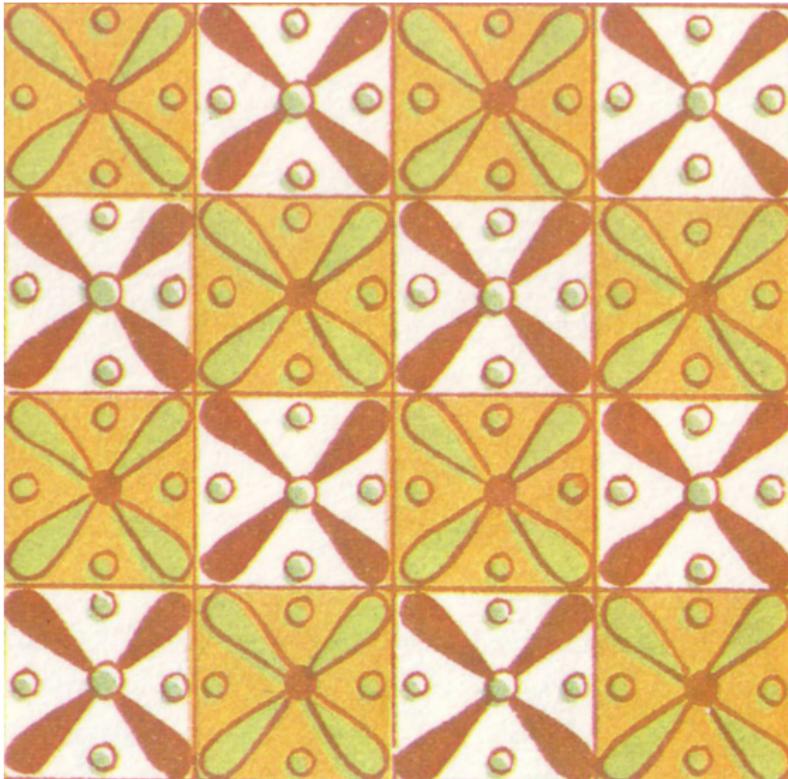
Tällä kuvolla on myös peilisymmetrioita tiettyjen suorien suhteen:



Löydätkö kuvasta lisää peilisymmetroita?

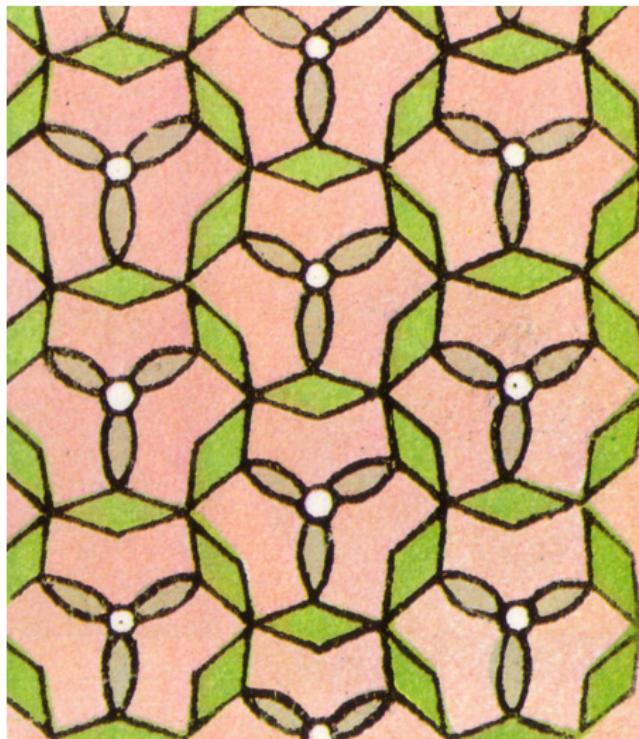
# Symmetriat

Millaisia symmetrioita seuraava kuvio toteuttaa?



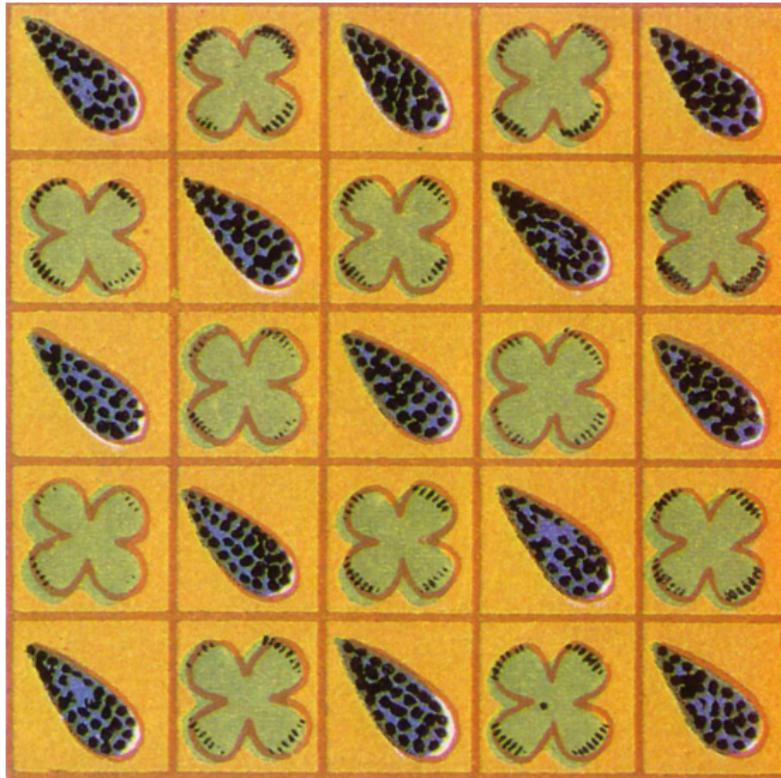
# Symmetriat

Millaisia symmetrioita seuraava kuvio toteuttaa?



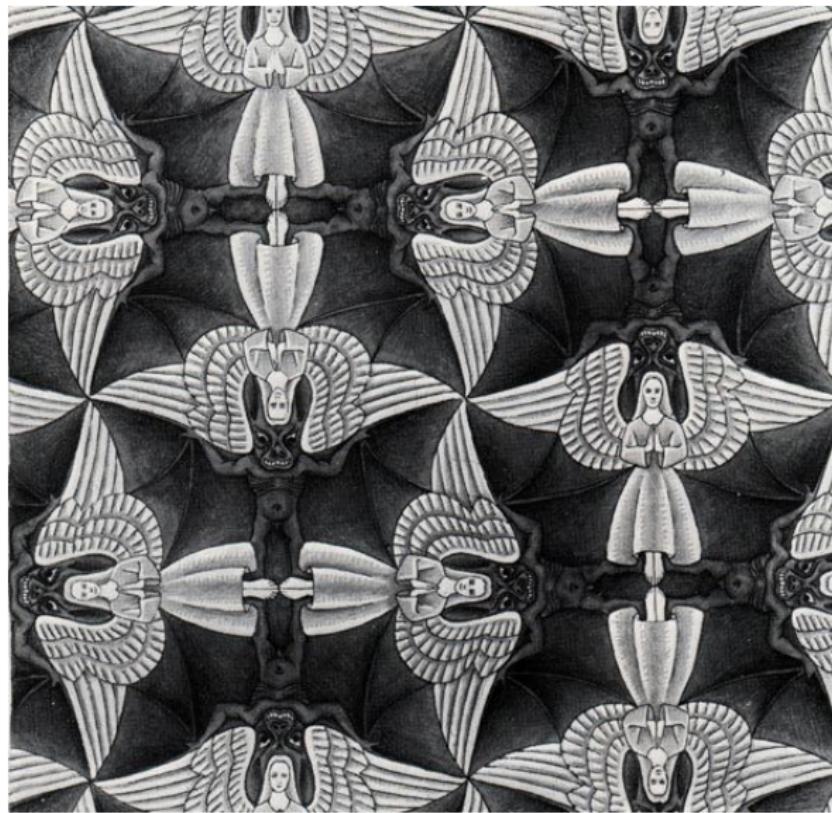
# Symmetriat

Millaisia symmetrioita seuraava kuvio toteuttaa?



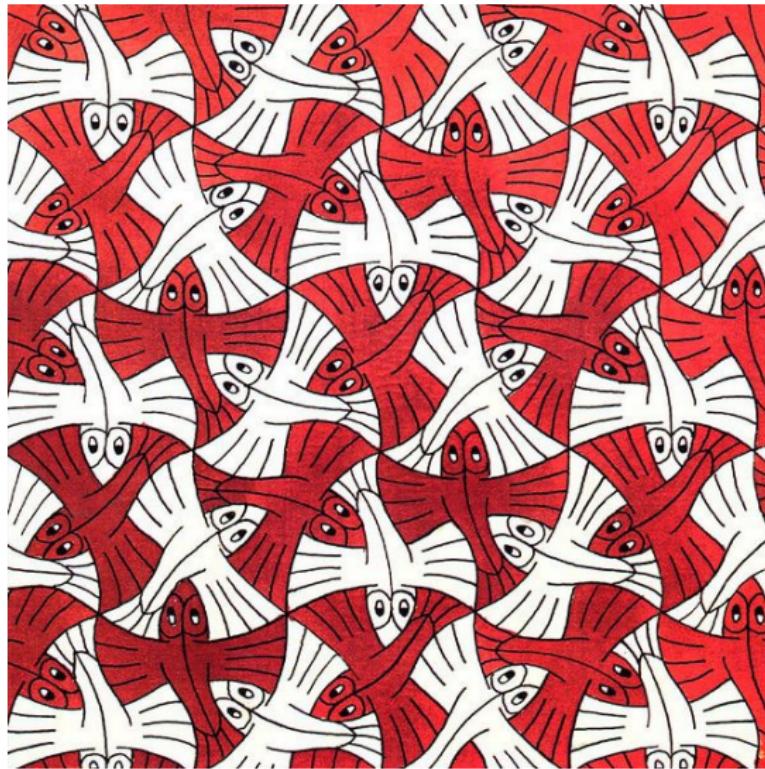
# Symmetriat

Millaisia symmetrioita seuraava kuvio toteuttaa?



# Symmetriat

Millaisia symmetrioita seuraava kuvio toteuttaa?



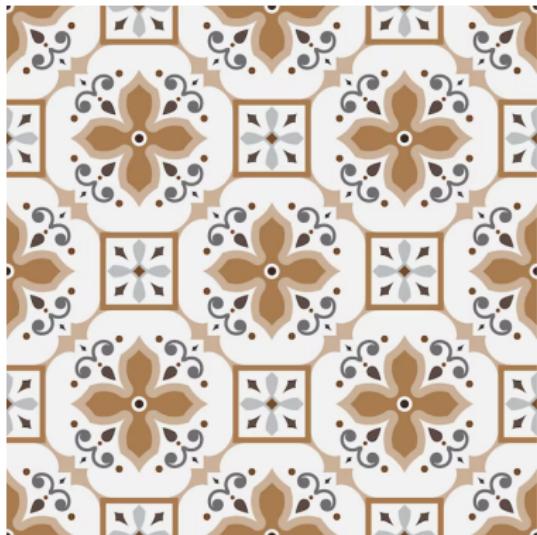
# Symmetriat

Millaisia symmetrioita seuraava kuvio toteuttaa?



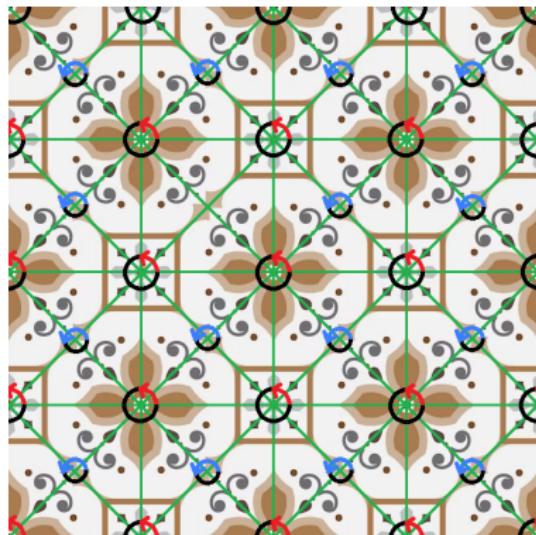
# Tapettiryhmät

Kaikki tapettikuviot voidaan luokitella niiden symmetrioiden perusteella.



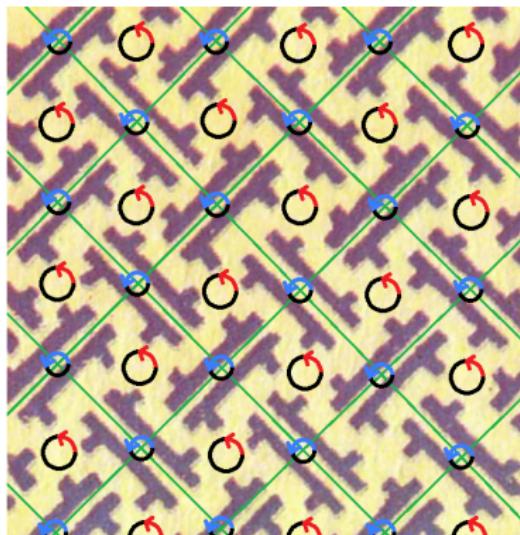
# Tapettiryhmät

Kaikkien kuvion symmetrioiden muodostama joukko on kyseisen kuvion **tapettiryhmä**.



○ 90 asteen kiertosymmetria

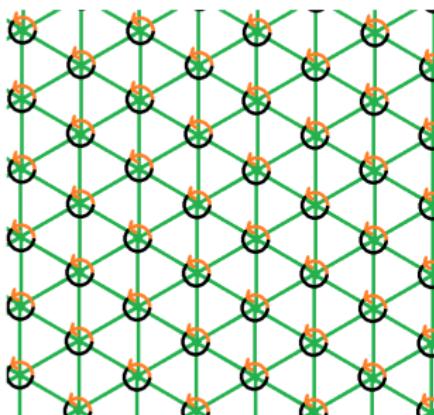
○ 180 asteen kiertosymmetria



Peilisymmetria

# Tapettiryhmät

Joskus kaksi erilaista kuviota vastaa samaa tapettiryhmää.



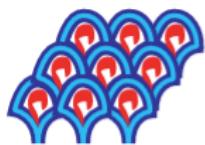
○ 120 asteen kiertosymmetria

Peilisymmetria

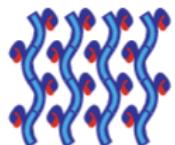
# Tapettiryhmät

Osoittautuu, että on vain 17 erilaista tapettiryhmää.

*p1*



*pg*



*pgg*



*pm*



*cm*



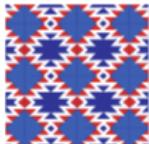
*cmm*



*pmg*



*pmm*



*p2*



*p4*



*p4m*



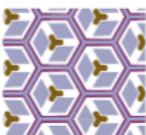
*p4g*



*p3*



*p3m1*



*p31m*



*p6*

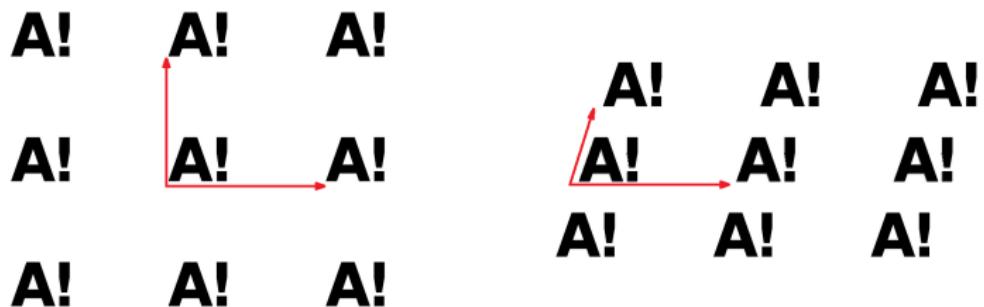


*p6m*



## Sama vai eri?

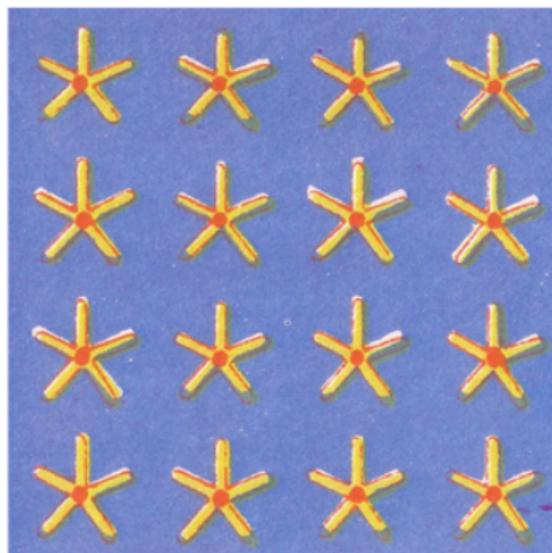
Jos halutaan selvittäää kuuluvatko kaksi kuviota samaan tapettiryhmään, pitää selvittää vastaavatko molempien kuvioiden symmetriat toisiaan.



Näiden kahden kuvion siirtosymmetrioilla on eri suunnat ja suuruudet, mutta tämä vielä sallitaan. Molemmat kuviot kuuluvat samaan tapettiryhmään  $p1$  koska niissä ei ole muita symmetriointia.

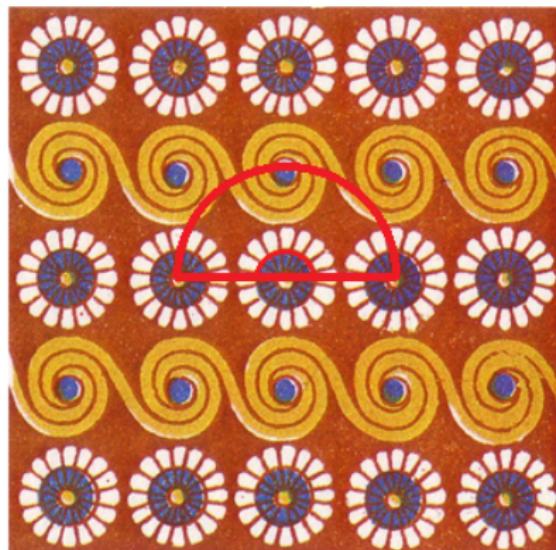
# Sama vai eri?

Kuuluvatko kuviot samaan tapettiryhmään?

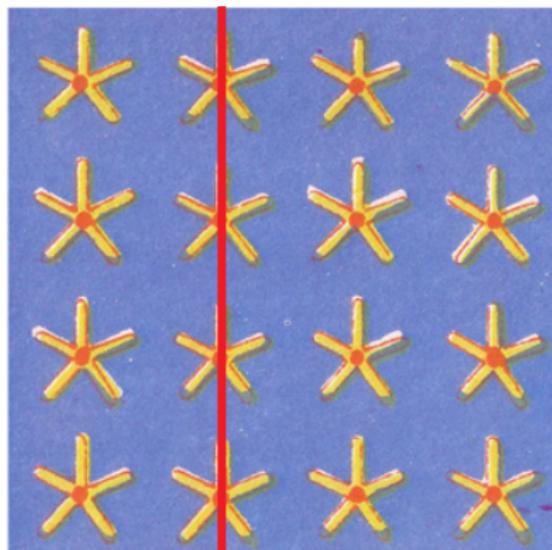


# Sama vai eri?

Kuuluvatko kuviot samaan tapettiryhmään?



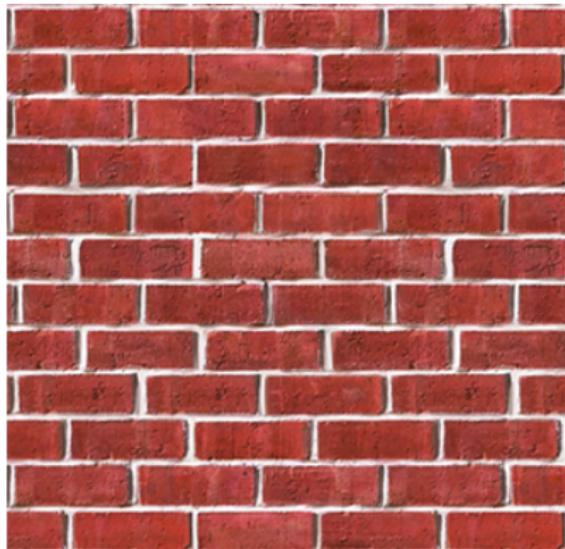
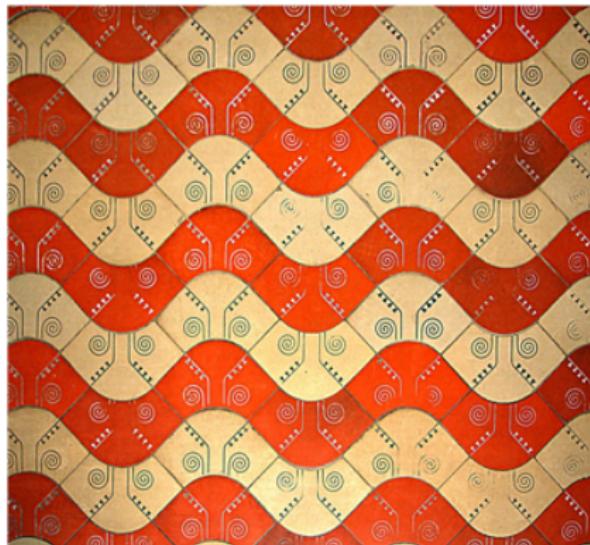
180 asteen kiertosymmetria  
(Ryhmä: p2)



Peilisymmetria  
(Ryhmä: pm)

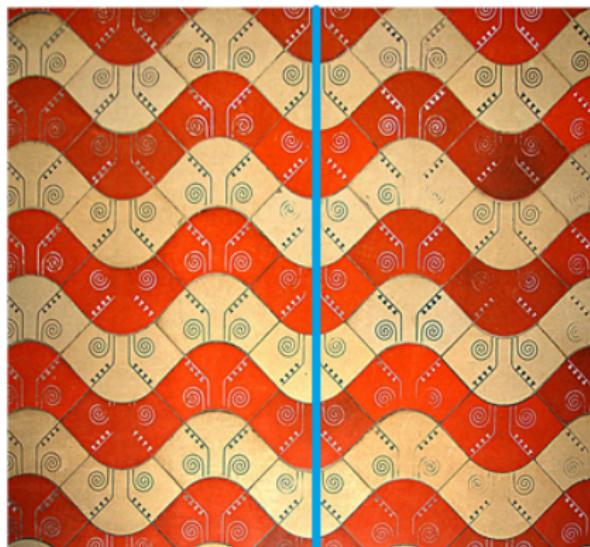
# Sama vai eri?

Kuuluvatko kuviot samaan tapettiryhmään?



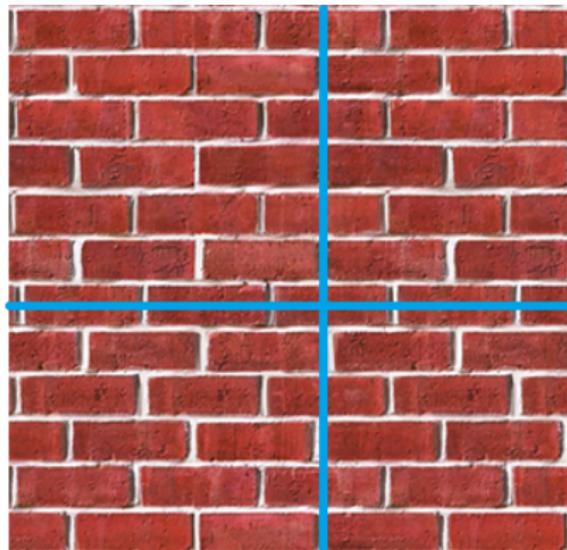
# Sama vai eri?

Kuuluvatko kuviot samaan tapettiryhmään?



**Peilisymmetria yhteen suuntaan**

(Ryhmä: pmg)



**Kaksisuuntainen peilisymmetria**

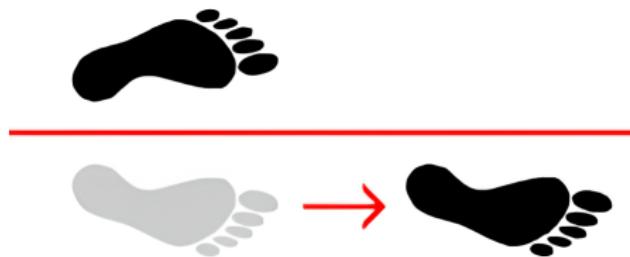
(Ryhmä: cmm)

# Symmetria

On vielä yksi tärkeää symmetrian muoto joka esiintyy tapettikuvioissa, nimeltä **liukupeilaussymmetria**.

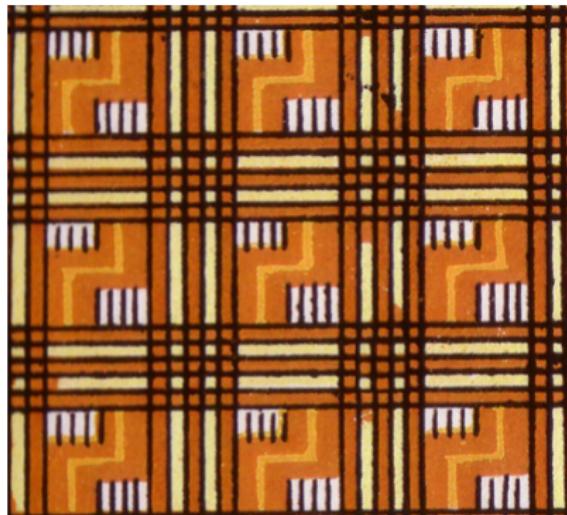


Tämä symmetria toteutuu, jos yhdistelmä peilauksesta ja siirrosta (liukupeilaus) pitää kuvion ennallaan.



# Sama vai eri?

Kuuluvatko kuviot samaan tapettiryhmään?

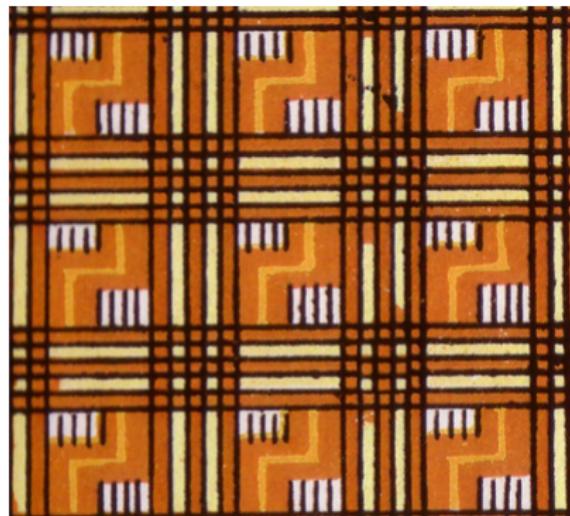


# Sama vai eri?

Kuuluvatko kuviot samaan tapettiryhmään?



Liukupeilaus löytyy  
(Ryhmä: pgg)



Ei liukupeilausta  
(Ryhmä: p2)