Алгебра.
Вопросы к экзамену (1 курс)

Мищенко Александр, БПИ248

Декабрь 2024

Список вопросов для подготовки к экзаменационной работе по курсу «Алгебра» (2-й модуль, 2024/2025 учебный год)

1. Сформулируйте и докажите критерий существования ненулевых решений однородной квадратной СЛАУ (как следствие теоремы о существовании ФСР).

2. Сформулируйте теорему о структуре общего решения неоднородной системы линейных алгебраических уравнений и докажите её (теорема о структуре общего решения однородной системы линейных алгебраических уравнений предполагается известной).

3. Выпишите формулу Муавра и докажите её.

4. Выпишите формулу для вычисления скалярного произведения векторов, заданных своими координатами в произвольном базисе трёхмерного пространства, и приведите её вывод.

5. Выпишите формулу для вычисления векторного произведения в правом ортонормированном базисе трёхмерного пространства и приведите её вывод.

6. Сформулируйте и докажите утверждение о связи смешанного произведения и объёма.

7. Докажите теорему о том, что любое линейное уравнение на координаты точки в трёхмерном пространстве задаёт плоскость и что любая плоскость определяется линейным уравнением.

Вопрос №1

Сформулируйте и докажите критерий существования ненулевых решений однородной квадратной СЛАУ (как следствие теоремы о существовании ФСР).

Критерий существования ненулевого решения.

Для существования ненулевого решения у однородной квадратной СЛАУ необходимо и достаточно, чтобы её матрица была вырожденной, то есть её определитель равен нулю.

Доказательство:
Пусть A – квадратная матрица ($A \in M_n(\mathbb{R})$).
ОСЛАУ $Ax = 0$ имеет ненулевое решение $\iff$ $\det A = 0$.

- ($\Rightarrow$) **"Необходимость"**

  Предположим противное.
  Пусть $\det A \neq 0$ тогда $\exists!$ (существует единственное) решение – ненулевое. Его можно найти, например, по формулам Крамера или как $x = A^{-1} \cdot 0 \Rightarrow \perp$ (ненулевых решений нет).

- ($\Leftarrow$) **"Достаточность"**

  $\det A = 0 \Rightarrow \operatorname{Rg} A < n$. Пусть $\operatorname{Rg} A = r$, тогда по теореме о существовании ФСР найдется $n - r > 0$ линейно независимых решений $\Rightarrow$ они ненулевые ($\forall$ система, содержащая нулевой столбец – линейно зависима).

Вопрос №2

Сформулируйте теорему о структуре общего решения неоднородной системы линейных алгебраических уравнений и докажите её.
(Теорема о структуре общего решения однородной системы линейных алгебраических уравнений предполагается известной).

Теорема. (О структуре общего решения НСЛАУ)
Пусть $\tilde{x}$ - частичное решение неоднородной СЛАУ $Ax = b$.
Тогда $\forall$:x=x+c$_1\Phi_1 + ... + c_{n-r}\Phi_{n-r}$, где $\Phi_1, ..., \Phi_{n-r}$ - ФСР соответствующих ОСЛАУ $Ax = 0$, $c_1, ..., c_{n-r}$ - некоторые числа, и n - число первичных, r = RgA

Доказательство:
Пусть x^0 - частичное решение неоднородной СЛАУ $Ax = b$.
Тогда $x^0 - \tilde{x}$ по свойству (3) и есть решение ОСЛАУ $Ax = 0$:

$$x^0 - \tilde{x} = c_1\Phi_1 + ... + c_{n-r}\Phi_{n-r} \text{ для некоторых чисел } c_1, ..., c_{n-r}$$
$$\Downarrow$$
$$x^0 = \tilde{x} + c_1\Phi_1 + ... + c_{n-r}\Phi_{n-r} \text{ , где}$$

$\tilde{x}$ - частичное решение НСЛАУ $Ax = b$,
$c_1\Phi_1 + ... + c_{n-r}\Phi_{n-r}$ - общее решение ОСЛАУ $Ax = 0$.

Приложение.
Свойство 3:
Пусть x^1 и x^2 - решения НСЛАУ. Тогда $x^1 - x^2$ - решение ОСЛАУ $Ax = 0$.
Доказательство:
$A(x^1 - x^2) = Ax^1 - Ax^2 = b - b = 0$

Вопрос №3

Выпишите формулу Муавра и докажите её.

Формула Муавра:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathrm{z}^n = r^n \left(\cos(n\phi) + i\sin(n\phi)\right) \text{ , где}$$

z - комплексное числа в алгебраической форме записи,
n - модуль комплексного числа z

Доказательство: (По принципу математической индукции)
База $(n = 1)$**:**

$$z^1 = z = r^1 \left(\cos(1\phi) + i\sin(1\phi)\right) = r(\cos\phi + i\sin\phi).$$

Таким образом, база индукции доказана.
Предположение:
Предположим, что формула верна для $n = k$:

$$z^k = r^k \left(\cos(k\phi) + i\sin(k\phi)\right).$$

Шаг:
Докажем, что формула верна для $n = k + 1$.

$$z^{k+1} = z^k \cdot z.$$

Подставим z^k из индуктивного предположения:

$$z^{k+1} = \left[r^k \left(\cos(k\phi) + i\sin(k\phi)\right)\right] \cdot \left[r(\cos\phi + i\sin\phi)\right].$$

Вынесем модуль r:

$$z^{k+1} = r^{k+1} \left[\left(\cos(k\phi) + i\sin(k\phi)\right) \cdot (\cos\phi + i\sin\phi)\right].$$

Раскроем произведение с учетом свойства $i^2 = -1$:

$$\cos(k\phi)\cos\phi - \sin(k\phi)\sin\phi + i\left[\cos(k\phi)\sin\phi + \sin(k\phi)\cos\phi\right].$$

Используем формулы тригонометрии:

$$\cos(k\phi + \phi) = \cos(k\phi)\cos\phi - \sin(k\phi)\sin\phi,$$

$$\sin(k\phi + \phi) = \cos(k\phi)\sin\phi + \sin(k\phi)\cos\phi.$$

Тогда:

$$z^{k+1} = r^{k+1} \left(\cos((k+1)\phi) + i\sin((k+1)\phi)\right).$$

Формула доказана для $n = k + 1$.

Вопрос №4

Выпишите формулу для вычисления скалярного произведения векторов, заданных своими координатами в произвольном базисе трёхмерного пространства, и приведите её вывод.

Формула скалярного произведения векторов в произвольном базисе:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = a_e^\tau * G * b_e$$

Рассмотрим некоторое трехмерное пространство e.
Базисные векторы пространства обозначим как $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.
Пусть $\vec{a} = a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2} + a_3\vec{e_3}$, $\vec{b} = b_1\vec{e_1} + b_2\vec{e_2} + b_3\vec{e_3}$ - разложение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ по некоторому базису e, тогда:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = a_e^\tau * G * b_e \text{ , где}$$

$(\vec{a}, \vec{b})$ – скалярное произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$,

τ – транспонирование,

G $= \begin{pmatrix} (\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1) & (\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2) & (\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3) \\ (\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1) & (\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2) & (\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3) \\ (\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1) & (\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_2) & (\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3) \end{pmatrix}$ - матрица Грама,

составленная из попарных скалярных произведений базисных векторов.

$a_e = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad b_e = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ – координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в базисе e.

Доказательство:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = (a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3) \cdot (b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3) = \textstyle\sum_{i=1}^3 a_i\vec{e_i} \sum_{j=1}^3 b_j\vec{e_j} =$$

$$= \textstyle\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_i b_j (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1) & (\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2) & (\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3) \\ (\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1) & (\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2) & (\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3) \\ (\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1) & (\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_2) & (\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Вопрос №5

Выпишите формулу для вычисления векторного произведения в правом ортонормированном базисе трёхмерного пространства и приведите её вывод.

Формула скалярного произведения векторов в правом ОНБ:

$$(\vec{a},\vec{b}) = \mathrm{a}_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Пусть три взаимно перпендикулярных единичных вектора $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ — ОНБ,

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}, \quad \vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}.$$

Тогда

$$(\vec{a},\vec{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Доказательство:
По свойству линейности скалярного произведения, выражение $(\vec{a},\vec{b})$ можно раскрыть следующим образом:

$$(\vec{a},\vec{b}) = a_x b_x(\vec{i},\vec{i}) + a_x b_y(\vec{i},\vec{j}) + a_x b_z(\vec{i},\vec{k}) + a_y b_x(\vec{j},\vec{i}) + a_y b_y(\vec{j},\vec{j}) + a_y b_z(\vec{j},\vec{k}) + \\ + \mathrm{a}_z b_x(\vec{k},\vec{i}) + a_z b_y(\vec{k},\vec{j}) + a_z b_z(\vec{k},\vec{k}).$$

Заметим, что так как $\vec{i}\perp\vec{j}$, $\vec{i}\perp\vec{k}$, $\vec{j}\perp\vec{k}$,

$$(\vec{i},\vec{j}) = (\vec{i},\vec{k}) = (\vec{j},\vec{k}) = 0,$$

и так как по определению ОНБ:

$$(\vec{i},\vec{i}) = (\vec{j},\vec{j}) = (\vec{k},\vec{k}) = 1, \text{ то}$$

$$(\vec{a},\vec{b}) = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}, b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Приложение.
Базис называется ортонормированным, если:

$$(a_i, a_j) = \delta^i_j = \begin{cases} 1, & \text{при } i = j, \\ 0, & \text{при } i \neq j. \end{cases}$$

Вопрос №6

Сформулируйте и докажите утверждение о связи смешанного произведения и объёма.

Формула:

$$< \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} >= |V_{parallelepiped}|$$

Смешанным произведением векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называют число,$([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c})$.
Пусть V - объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ (они не компланарны).
Тогда:

$$< \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} >= ([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}) = \begin{cases} \text{V}, & \text{если } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} - \text{правая тройка}, \\ -V, & \text{если } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} - \text{левая тройка}. \end{cases}$$

Доказательство:
Рассмотрим вектор $\vec{a} \times \vec{b}$, равный векторному произведению $\vec{a}$ и $\vec{b}$:
$|\vec{a} \times \vec{b}| = S$, где S - площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.
Обозначим единичный ортогональный, сонаправленный с $\vec{a} \times \vec{b}$ вектор.
Тогда $[\vec{a} \times \vec{b}] = S * \vec{l}$
Подставим:

$$(a \times b, c) = (S \cdot \vec{l}, c) = S \cdot |c| \cdot |\vec{l}| \cdot \cos\phi = S \cdot |c| \cdot \cos\phi,$$

где ϕ — угол между векторами c и l.

Рассмотрим два случая:
1) Угол ϕ - острый или равен 0, если $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - правая тройка $\Rightarrow$
$\Rightarrow \cos\phi > 0 \Rightarrow |\vec{c}| * \cos\phi = h$, где h - высота параллелепипеда.
2) Угол ϕ - тупой или равен π, если $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - левая тройка $\Rightarrow$
$\Rightarrow \cos\phi < 0 \Rightarrow |\vec{c}| * \cos\phi = -h$, где h - высота параллелепипеда.

Таким образом:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{cases} S * h = V, & \text{если } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ - правая тройка} \\ S * (-h) = -V, & \text{если } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ - левая тройка} \end{cases}$$

Вопрос №7

Докажите теорему о том, что любое линейное уравнение на координаты точки в трёхмерном пространстве задаёт плоскость и что любая плоскость определяется линейным уравнением.

Теоремы:
1) $\forall$ плоскость в пространстве определяется уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$ (*), где $A, B, C, D \in \mathbb{R}$

2) $\forall$ уравнение вида $Ax + By + Cz + D = 0$, где $A^2 + B^2 + C^2 > 0$ определяет плоскость в пространстве.

Доказательство:

1) Рассмотрим плоскость π. Пусть $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \pi$.
Рассмотрим вектор $\vec{n} \perp \pi$ (вектор нормали к плоскости π)
Пусть $\vec{n} = (A, B, C)$.
Тогда:

$$M(x, y, z) \in \pi \iff (\mathbf{n}, \overrightarrow{M_0M}) = 0 \iff A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

т.е. $Ax + By + Cz + D = 0$, где $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$.
Тогда т. M принадлежит плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$.
Перевод в LaTeX:

2) Рассмотрим уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$, где $A^2 + B^2 + C^2 > 0$, чтобы оно имело хотя бы одно решение.
Обозначим за M_0 точку (x_0, y_0, z_0).
Пусть точка M (x, y, z) удовлетворяет уравнению $Ax + By + Cz + D = 0$.
Вычтем из него равенство $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \iff (\vec{n} \perp M_0\vec{M}) \iff$$

$\iff$ точка M лежит в плоскости, проходящей через M_0 и перпендикулярной вектору $\vec{n} \Rightarrow$ уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$ определяет плоскость.