Алгебра
Определения к экзамену (1 курс)

Мищенко Александр, БПИ248

Декабрь 2024

Список определений для подготовки к теоретической части экзаменационной работы по курсу «Алгебра» (2-й модуль, 2024/2025 учебный год)

1. Дать определение фундаментальной системы решений (ФСР) однородной системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).
2. Сформулируйте критерий существования ненулевого решения однородной системы линейных уравнений с квадратной матрицей.
3. Сформулируйте теорему о структуре общего решения однородной СЛАУ.
4. Сформулируйте теорему о структуре общего решения неоднородной системы линейных алгебраических уравнений.
5. Что такое алгебраическая и тригонометрическая формы записи комплексного числа?
6. Дайте определения модуля и аргумента комплексного числа. Что такое главное значение аргумента комплексного числа?
7. Что происходит с аргументами и модулями комплексных чисел при умножении и при делении?
8. Что такое комплексное сопряжение? Как можно делить комплексные числа в алгебраической форме?
9. Выпишите формулу Муавра.
10. Как найти комплексные корни n-й степени из комплексного числа? Сделайте эскиз, на котором отметьте исходное число и все корни из него.
11. Сформулируйте основную теорему алгебры. Сформулируйте теорему Безу.
12. Выпишите формулу Эйлера. Выпишите выражения для синуса и косинуса через экспоненту.

13. Выпишите формулы Виета для многочлена третьей степени.
14. Какие многочлены называются неприводимыми?
15. Сформулируйте утверждение о разложении многочленов на неприводимые множители над полем комплексных чисел.
16. Выпишите формулу для вычисления скалярного произведения в координатах, заданных в произвольном (не обязательно ортонормированном) базисе.
17. Дайте определение векторного произведения векторов в трёхмерном пространстве.
18. Сформулируйте три алгебраических свойства векторного произведения.
19. Выпишите формулу для вычисления векторного произведения в координатах, заданных в ортонормированном базисе.
20. Сформулируйте критерий коллинеарности двух векторов с помощью векторного произведения.
21. Дайте определение смешанного произведения векторов. Как связано смешанное произведение с нахождением объёма?
22. Как вычислить объём тетраэдра с помощью смешанного произведения?
23. Выпишите формулу для вычисления смешанного произведения в координатах, заданных в ортонормированном базисе.
24. Сформулируйте критерий компланарности трёх векторов с помощью смешанного произведения.
25. Дайте определение прямоугольной декартовой системы координат.
26. Что такое уравнение поверхности и его геометрический образ?
27. Сформулируйте теорему о том, что задаёт любое линейное уравнение на координаты точки в трёхмерном пространстве.
28. Что такое нормальный вектор плоскости?
29. Выпишите уравнение плоскости в отрезках. Каков геометрический смысл входящих в него параметров?
30. Общие уравнения прямой. Векторное уравнение прямой. Параметрические и канонические уравнения прямой.
31. Сформулируйте критерий принадлежности двух прямых одной плоскости.
32. Какие бинарные операции называются ассоциативными, а какие коммутативными?

1. **Фундаментальная система решений** (ФСР) однородной системы линейных алгебраических уравнений (ОСЛАУ) $Ax = 0$ состоит из множества $n - r$ линейно независимых решений системы, где n — количество переменных, а r — ранг матрицы A. Эти решения образуют базис пространства решений ОСЛАУ.

2. **Критерий существования ненулевого решения ОСЛАУ с квадратной матрицей.**
   Пусть A - квадратная матрица ($A \in M_n(\mathbb{R})$. ОСЛАУ Ax=0 имеет ненулевые решения тогда и только тогда, когда detA=0.
   Т.е. $Ax = 0 \iff detA = 0$.

3. **Теорема о структуре общего решения ОСЛАУ.**
   Пусть $\phi_1, ..., \phi_{n-r}$ - ФСР однородной СЛАУ $Ax = 0$ (n — количество переменных, а r — ранг матрицы A). Тогда $\forall$ решение ОСЛАУ $Ax = 0$ можно представить в виде $x = c_1\phi_1 + ... + c_{n-r}\phi_{n-r}$, где $c_1, ..., c_{n-r}$ - неотрицательные числа, т.е. в виде линейно комбинации столбцов ФСР.

4. **Теорема о структуре общего решения неоднородной СЛАУ.**
   Пусть $\tilde{x}$ - частичное решение неоднородной СЛАУ $Ax = b$.
   Тогда $\forall$ решение этой СЛАУ можно представить в виде:

   $$x = \tilde{x} + c_1\Phi_1 + ... + c_{n-r}\Phi_{n-r} \text{ , где}$$

   $\Phi_1, ..., \Phi_{n-r}$ - ФСР соответствующих ОСЛАУ $Ax = 0$,
   $c_1, ..., c_{n-r}$ - некоторые числа, и n - число первичных, r = RgA.

5. **Формы записи комплексного числа:**
   Алгебраическая: $z = x + iy, \quad$ где $x, y \in \mathbb{R}$,
   x - вещественная часть комплексного числа,
   y - мнимая часть комплексного числа, i - мнимая единица.
   Тригонометрическая: $z = cos\phi + isin\phi, \quad$ где $cos\phi = \frac{x}{r}, sin\phi = \frac{y}{r}$

6. **Модуль и аргумент комплексного числа.**
   Что такое главное значение аргумента комплексного числа.
   r - модуль комплексного числа z.
   $r = |z| = |\sqrt{x^2 + y^2}|$
   ϕ - аргумент комплексного числа z, угол между положительным направлением вещественной оси Re(z) и числом.
   $\phi = Arg(z) = \{arg(z) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}\}$, где $arg(z)$ - главное значение аргумента, которое выбирается на полученном интервале длиной 2π, обычно так:

   $$\begin{cases} \text{arg(z)} \in [0, 2\pi), \\ \text{arg(z)} \in [-\pi, \pi), \end{cases}$$

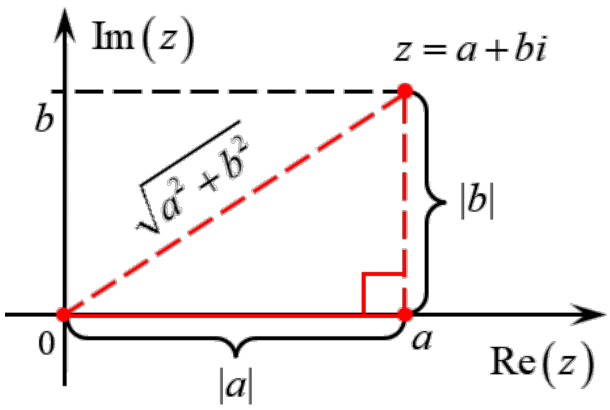


Рис. 1: Модуль комплексного числа

7. **Что происходит с аргументами и модулями комплексных чисел при умножении и делении?**
Произведение:
Модуль произведения комплексных чисел равен произведению их модулей, а аргумент - сумме их аргументов:

$$z_1 \times z_2 = r_1 \times r_2(cos(\phi_1 + \phi_2) + isin(\phi_1 + \phi_2))$$

Частное:
Модуль частного комплексных чисел равен частному их модулей, а аргумент - разности их аргументов ($\phi = \phi_1 - \phi_2$):

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(cos(\phi_1 - \phi_2) + isin(\phi_1 - \phi_2))$$

8. **Комплексное сопряжение. Деление комплексных чисел в алгебраической форме.**
Комплексным сопряжением числа $z = a + ix$ называется смена знака мнимой части, т.е. сопряженным к z будет такое число $\overline{z}$, что $\overline{z} = a - ix$.
Причем $z * \overline{z} = r^2$, т.е. мнимая часть пропадает.
Деление комплексных чисел в алгебраической форме:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{r_2^2} = \frac{r_{z_1 \cdot \overline{z_2}}}{r_2^2} \cdot \frac{i_{z_1 \cdot \overline{z_2}}}{r_2^2}$$

1) Сначала делимое и делитель умножают на число, комплексно сопряженное делителю, после чего делитель становится действительным числом;
2) В числителе умножают два комплексных числа;
3) Полученную дробь почленно делят.

9. **Формула Муавра:**

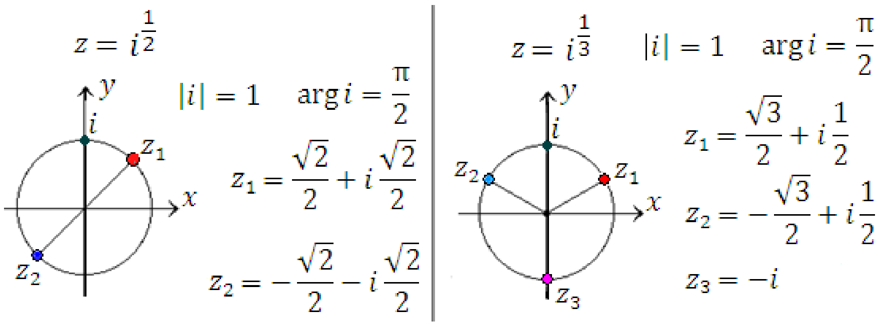
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad z^n = r^n \left(\cos(n\phi) + i\sin(n\phi)\right) \text{, где}$$

z - комплексное числа в алгебраической форме записи,
n - модуль комплексного числа z.

10. **Комплексные корни n-й степени из комплексного числа + эскиз.**
Каждое комплексное число z, такое что $z \neq 0$, имеет ровно n различных корней n-ой степени (т.е. таких комплексных чисел w, что $w^n = z \mid n \in \mathbb{N}$), которые находятся по формуле:

$$w = \sqrt[n]{r}(cos(\tfrac{\phi+2\pi k}{n} + isin(\tfrac{\phi+2\pi k}{n})), \ \ k = \overline{0, n-1}$$

Графически это можно представить таким образом:



Шаг $\frac{2\pi}{n}$ - угол между двумя соседними векторами.
Углы между веторами равны и находятся по формуле: $\psi_0 = \frac{\phi}{n}$
Т.е. при n>3 корни находятся в вершинах правильного n-угольника.

11. **Основная теорема алгебры. Теорема Безу.**

12. **Формула Эйлера. Выражения для синуса и косинуса через экспоненту.**

13. **Формулы Виета для многочлена 3-ей степени.**

14. **Неприводимые многочлены.**

15. **Утверждение о разложении многочленов на неприводимые множители над полем комплексных чисел.**

Приложение

Вопросы 7-8. Произведение и частное комплексных чисел.
Произведением двух комплексных чисел $z_1 = a_1 + ib_1$ и $z_2 = a_2 + ib_2$ называется комплексное число z, такое что $z = z_1 * z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + b_1a_2)$.
На практике комплексные числа можно перемножать как алгебраические двучлены, раскрыв скобки, учитывая, что $i^2 = -1$:

$$(a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1a_2 + a_1ib_2 + a_2ib_1 + i^2b_1b_2 = a_1a_2 + a_1ib_2 + a_2ib_1 - b_1b_2$$

Модуль произведения комплексных чисел равен произведению их модулей, а аргумент - сумме их аргументов:

$$z_1 \times z_2 = r_1 \times r_2(cos(\phi_1 + \phi_2) + isin(\phi_1 + \phi_2))$$

Частным двух комплексных чисел $z_1 = a_1 + ib_1$ и $z_2 = a_2 + ib_2$ называется комплексное число z, такое что $z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2} + \frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}i$.
На практике деление комплексных чисел проводят по следующей схеме:
1) сначала делимое и делитель умножают на число, комплексно сопряженное делителю, после чего делитель становится действительным числом;
2) в числителе умножают два комплексных числа;
3) полученную дробь почленно делят.

Пример

Задание. Найти частное $\frac{-2+i}{1-i}$

Решение. Домножим и числитель, и знаменатель заданной дроби на число, комплексно сопряженное к знаменателю $1 - i$, это будет $1 + i$, тогда имеем:

$$\frac{-2+i}{1-i} = \frac{-2+i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{(-2+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}$$

Далее перемножаем комплексные числа как алгебраические двучлены, учитывая, что $i^2 = -1$:

$$\frac{-2+i}{1-i} = \frac{(-2+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{-2-2i+i-1}{1^2-i^2} =$$

$$= \frac{-3-i}{1-(-1)} = \frac{-3-i}{2} = -\frac{3}{2} - \frac{i}{2}$$

Ответ. $\frac{-2+i}{1-i} = -\frac{3}{2} - \frac{i}{2}$

Модуль частного комплексных чисел равен частному их модулей, а аргумент

- разности их аргументов ($\phi = \phi_1 - \phi_2$):

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(cos(\phi_1 - \phi_2) + isin(\phi_1 - \phi_2))$$