Deterministic and Stochastic Wireless Network Games

Alessandro La Farciola

Università di Pisa

4 Ottobre 2022

Problema generale

- Il **Power control** sulle reti wireless è un ampio campo con importanti applicazioni che è studiato da più di venti anni.
- Un importante approccio a tale problema è quello di considerarlo come un gioco non cooperativo, in cui ogni giocatore sceglie di massimizzare la propria utilità.
- É possibile considerare due tipologie di modelli, uno in cui l'ambiente esterno è statico (caso deterministico) e uno in cui varia in maniera casuale (caso stocastico).
- Zhou Z., Bambos N., Glynn P. (2018) Deterministic and Stochastic Wireless Network Games: Equilibrium, Dynamics, and Price of Anarchy. Operations Research 66(6):1498-1516.

Problema generale

- Il **Power control** sulle reti wireless è un ampio campo con importanti applicazioni che è studiato da più di venti anni.
- Un importante approccio a tale problema è quello di considerarlo come un gioco non cooperativo, in cui ogni giocatore sceglie di massimizzare la propria utilità.
- É possibile considerare due tipologie di modelli, uno in cui l'ambiente esterno è statico (caso deterministico) e uno in cui varia in maniera casuale (caso stocastico).
- Zhou Z., Bambos N., Glynn P. (2018) Deterministic and Stochastic Wireless Network Games: Equilibrium, Dynamics, and Price of Anarchy. Operations Research 66(6):1498-1516.

Università di Pisa

Problema generale

- Il **Power control** sulle reti wireless è un ampio campo con importanti applicazioni che è studiato da più di venti anni.
- Un importante approccio a tale problema è quello di considerarlo come un gioco non cooperativo, in cui ogni giocatore sceglie di massimizzare la propria utilità.
- É possibile considerare due tipologie di modelli, uno in cui l'ambiente esterno è statico (caso deterministico) e uno in cui varia in maniera casuale (caso stocastico).
- Zhou Z., Bambos N., Glynn P. (2018) Deterministic and Stochastic Wireless Network Games: Equilibrium, Dynamics, and Price of Anarchy. Operations Research 66(6):1498-1516.

Università di Pisa

Problema generale

- Il **Power control** sulle reti wireless è un ampio campo con importanti applicazioni che è studiato da più di venti anni.
- Un importante approccio a tale problema è quello di considerarlo come un gioco non cooperativo, in cui ogni giocatore sceglie di massimizzare la propria utilità.
- É possibile considerare due tipologie di modelli, uno in cui l'ambiente esterno è statico (caso deterministico) e uno in cui varia in maniera casuale (caso stocastico).
- Zhou Z., Bambos N., Glynn P. (2018) Deterministic and Stochastic Wireless Network Games: Equilibrium, Dynamics, and Price of Anarchy. Operations Research 66(6):1498-1516.

Problema generale

Consideriamo una rete di N *link*, ciascuno composto da un trasmettitore e un ricevitore. Denotiamo con $P = (P_1, \ldots, P_N) \in \mathbb{R}_+^N$ il vettore delle potenze.

Università di Pisa

Problema generale

Consideriamo una rete di N *link*, ciascuno composto da un trasmettitore e un ricevitore. Denotiamo con $P = (P_1, \dots, P_N) \in \mathbb{R}_+^N$ il vettore delle potenze.

Definizione

Sia G_{ij} la matrice dei *channel gain* dal trasmettitore j al ricevitore i e sia η_i l'intero rumore. Dato un vettore delle potenze P, si definisce il *SINR* (Signal-to-interference-plus-noise ratio) del *link* i la quantità

$$R_i(P) := \frac{G_{ii} P_i}{\sum_{j \neq i} G_{ij} P_j + \eta_i}.$$

Università di Pisa

Problema generale

Consideriamo una rete di N *link*, ciascuno composto da un trasmettitore e un ricevitore. Denotiamo con $P = (P_1, \dots, P_N) \in \mathbb{R}_+^N$ il vettore delle potenze.

Definizione

Sia G_{ij} la matrice dei *channel gain* dal trasmettitore j al ricevitore i e sia η_i l'intero rumore. Dato un vettore delle potenze P, si definisce il *SINR* (Signal-to-interference-plus-noise ratio) del *link* i la quantità

$$R_i(P) := \frac{G_{ii} P_i}{\sum_{j \neq i} G_{ij} P_j + \eta_i}.$$

É possibile rappresentare l'ambiente di una rete wireless con la coppia (G, η), dove $G \in \mathbb{R}_+^{N \times N}$ è la matrice dei *channel gain*, con $G_{ii} > 0$ e η il vettore del rumore.

Problema generale

In un tale modello, ogni giocatore vuole minimizzare il proprio costo. Questo è composto da due parti: uno associato alla potenza e uno alla qualità del servizio (SINR).

Problema generale

In un tale modello, ogni giocatore vuole minimizzare il proprio costo. Questo è composto da due parti: uno associato alla potenza e uno alla qualità del servizio (SINR).

In particolare, chiamando $r_i(\cdot)$ il costo di potenza e f_i una sorta di funzione inversa del servizio di qualità, che mappa un determinato SINR in un costo, si definisce **costo totale** la quantità

$$C_i(P) := r_i(P) + f_i\left(\frac{G_{ii}P_i}{\sum_{j\neq i} G_{ij}P_j + \eta_i}\right).$$

Università di Pisa

Problema generale

In un tale modello, ogni giocatore vuole minimizzare il proprio costo. Questo è composto da due parti: uno associato alla potenza e uno alla qualità del servizio (SINR).

In particolare, chiamando $r_i(\cdot)$ il costo di potenza e f_i una sorta di funzione inversa del servizio di qualità, che mappa un determinato SINR in un costo, si definisce **costo totale** la quantità

$$C_i(P) := r_i(P) + f_i\left(\frac{G_{ii}P_i}{\sum_{j\neq i} G_{ij}P_j + \eta_i}\right).$$

Ipotesi

1. f_i *strettamente decrescente e strettamente convessa;*
2. $lim_{x\to+\infty} f_i(x) = 0$ *and* $lim_{x\to 0^+} f_i(x) = +\infty$.
3. f_i *derivabile con continuità.*

Problema generale

Definizione

P è un **equilibrio di Nash** se per ogni i

$$C_i(P_1, \ldots, P_{i-1}, P_i, \ldots, P_N) \leq C_i(P_1, \ldots, P_{i-1}, P_i', \ldots, P_N) \quad \forall P_i' \in \mathbb{R}_+$$

In particolare, P è un equilibrio di Nash se e solo se nessun trasmettitore i è incentivato a cambiare la propria potenza P_i.

Problema generale

Definizione

P è un **equilibrio di Nash** se per ogni i

$$C_i(P_1, \dots, P_{i-1}, P_i, \dots, P_N) \leq C_i(P_1, \dots, P_{i-1}, P_i', \dots, P_N) \quad \forall P_i' \in \mathbb{R}_+$$

In particolare, P è un equilibrio di Nash se e solo se nessun trasmettitore i è incentivato a cambiare la propria potenza P_i.

Definizione

La **funzione di miglior risposta** $g_i : \mathbb{R}_+^N \longrightarrow \mathbb{R}_+$ del link i è

$$g_i(P) = \arg\min_{P_i' \in \mathbb{R}_+} C_i(P_1, \dots, P_{i-1}, P_i', \dots, P_N) \tag{1.1}$$

In più, consideriamo $g : \mathbb{R}_+^N \longrightarrow \mathbb{R}_+^N$ definita come $g(P) := (g_1(P), \dots, g_N(P))$ e P è un equilibrio di Nash se e solo se P è un punto fisso di g, cioè $g(P) = P$.

Problema generale

Poiché C_i è strettamente convessa, dato un certo P, esiste ed è unico un punto di minimo P^* tale che $P_i^* = g_i(P)$ e che verifica

$$-f_i' \left(\frac{G_{ii} P_i^*}{\sum_{j \neq i} G_{ij} P_j + \eta_i} \right) \left(\frac{G_{ii}}{\sum_{j \neq i} G_{ij} P_j + \eta_i} \right) = r_i'(P_i^*).$$

Università di Pisa

Problema generale

Poiché C_i è strettamente convessa, dato un certo P, esiste ed è unico un punto di minimo P^* tale che $P_i^* = g_i(P)$ e che verifica

$$-f_i'\left(\frac{G_{ii}P_i^*}{\sum_{j\neq i} G_{ij}P_j + \eta_i}\right)\left(\frac{G_{ii}}{\sum_{j\neq i} G_{ij}P_j + \eta_i}\right) = r_i'(P_i^*).$$

Nel nostro caso, a differenza di precedenti lavori, noi non restringiamo il dominio in cui vive il vettore delle potenze ad essere limitato. Infatti, nel caso in cui tale spazio è compatto, l'esistenza dell'equilibrio di Nash è garantita dai teoremi del punto fisso, come **Brouwer** o, più in generale, **Kakutani**.

Problema generale

Poiché C_i è strettamente convessa, dato un certo P, esiste ed è unico un punto di minimo P^* tale che $P_i^* = g_i(P)$ e che verifica

$$-f_i' \left(\frac{G_{ii} P_i^*}{\sum_{j \neq i} G_{ij} P_j + \eta_i} \right) \left(\frac{G_{ii}}{\sum_{j \neq i} G_{ij} P_j + \eta_i} \right) = r_i'(P_i^*).$$

Nel nostro caso, a differenza di precedenti lavori, noi non restringiamo il dominio in cui vive il vettore delle potenze ad essere limitato. Infatti, nel caso in cui tale spazio è compatto, l'esistenza dell'equilibrio di Nash è garantita dai teoremi del punto fisso, come **Brouwer** o, più in generale, **Kakutani**.

In questo lavoro, invece, dobbiamo enunciare una **nuova versione** del teorema del punto fisso che opera in assenza di limitazioni esterne.

UNIVERSITÀ DI PISA

Problema generale

Lemma

Supponiamo che per ogni $i = 1, \dots, N$ la mappa $y \mapsto f_i'(y)y$ è crescente in $y \geq 0$. Allora

1. $\forall P, \hat{P} \in \mathbb{R}^N_+, \quad P \leq \hat{P} \Rightarrow g(P) \leq g(\hat{P})$.
2. *Per ogni P e per ogni $\alpha > 1$, $\alpha g(P) > g(\alpha P)$.*
3. *Per ogni $P \in \mathbb{R}^N_+$ con tutte le componenti > 0, esiste $\alpha_0 > 0$ tale che $\alpha P > g(\alpha P)$ $\forall \alpha \geq \alpha_0$.*

Università di Pisa

Caratterizzazione dell'equilibrio di Nash

Definizione

Sia $(P, \leq)$ un insieme parzialmente ordinato e $G : P \to P$ una mappa.

1. Un sottoinsieme $S \subset P$ è detto una **catena** se S è totalmente ordinato secondo $\leq$.
2. G è detta una **poset-mapping continous map** se, per ogni catena numerabile $\{c_i\}$ dotata di sup, $G(\sup\{c_i\}) = \sup\{G\{c_i\}\}$.

UNIVERSITÀ DI PISA

Caratterizzazione dell'equilibrio di Nash

Definizione

Sia $(P, \leq)$ un insieme parzialmente ordinato e $G : P \to P$ una mappa.

1. Un sottoinsieme $S \subset P$ è detto una **catena** se S è totalmente ordinato secondo $\leq$.
2. G è detta una **poset-mapping continous map** se, per ogni catena numerabile $\{c_i\}$ dotata di sup, $G(\sup\{c_i\}) = \sup\{G\{c_i\}\}$.

Se P è anche uno spazio metrico, come $\mathbb{R}_+^N$, una mappa continua e una *poset-mapping continous map* non sono la stessa cosa. Infatti, quest'ultima è necessariamente monotona: preso $x \leq y \in P$, allora $y = \sup\{x, y\}$; quindi, $G(y) = \sup\{G(x), G(y)\}$, da cui $G(x) \leq G(y)$.

Caratterizzazione dell'equilibrio di Nash

Definizione

Sia $(P, \leq)$ un insieme parzialmente ordinato e $G : P \rightarrow P$ una mappa.

1. Un sottoinsieme $S \subset P$ è detto una **catena** se S è totalmente ordinato secondo $\leq$.
2. G è detta una **poset-mapping continous map** se, per ogni catena numerabile $\{c_i\}$ dotata di sup, $G(\sup\{c_i\}) = \sup\{G\{c_i\}\}$.

Se P è anche uno spazio metrico, come $\mathbb{R}_+^N$, una mappa continua e una *poset-mapping continous map* non sono la stessa cosa. Infatti, quest'ultima è necessariamente monotona: preso $x \leq y \in P$, allora $y = \sup\{x, y\}$; quindi, $G(y) = \sup\{G(x), G(y)\}$, da cui $G(x) \leq G(y)$.

D'altro canto, una funzione continua e monotona è una *poset-mapping continous map*.

UNIVERSITÀ DI PISA

Enunciamo, prima, il teorema del punto fisso di Tarski-Kantorovitch in versione classica.

Teorema (Teorema del punto fisso di Tarski-Kantorovitch)

Sia $(P, \leq)$ un insieme parzialmente ordinato e $G : P \to P$ una poset-mapping continous map. Supponiamo che:

1. $\exists p_1 \in P$ *t.c.* $p_1 \leq G(p_1)$.
2. *ogni catena numerabile contenuta in* $\{x \in P \mid x \geq p_1\}$ *ammette un* sup.

Allora G ammette un punto fisso.

Caratterizzazione dell'equilibrio di Nash

La seconda ipotesi del precedente teorema non è verificata in un dominio illimitato. É necessario, quindi, considerare la seguente versione.

Teorema

Sia $(P, \leq)$ *un insieme parzialmente ordinato e* $G : P \to P$ *una poset-mapping continous map. Supponiamo che:*

1. $\exists p_1 \in P$ *t.c.* $p_1 \leq G(p_1)$.
2. *ogni catena numerabile limitata contenuta in* $\{x \in P \mid x \geq p_1\}$ *ammette un* sup.
3. $\exists p_2 > p_1 \in P,$ *t.c.* $p_2 \geq G(p_2)$.

Allora G *ammette un punto fisso.*

Università di Pisa

Caratterizzazione dell'equilibrio di Nash

La seconda ipotesi del precedente teorema non è verificata in un dominio illimitato. É necessario, quindi, considerare la seguente versione.

Teorema

Sia $(P, \leq)$ *un insieme parzialmente ordinato e* $G : P \to P$ *una poset-mapping continous map. Supponiamo che:*

1. $\exists p_1 \in P$ *t.c.* $p_1 \leq G(p_1)$.
2. *ogni catena numerabile limitata contenuta in* $\{x \in P \mid x \geq p_1\}$ *ammette un* sup.
3. $\exists p_2 > p_1 \in P,$ *t.c.* $p_2 \geq G(p_2)$.

Allora G *ammette un punto fisso.*

Anche se questa versione del teorema del punto fisso funziona in un contesto illimitato, abbiamo bisogno della terza ipotesi che garantisce l'esistenza di p_2 come una sorta di *upper bound* per evitare che le iterazioni divergano.

Università di Pisa

Caratterizzazione dell'equilibrio di Nash

Applicando direttamente il precedente teorema del punto fisso alla funzione di miglior risposta, è possibile dimostrare il seguente teorema.

Teorema

Esiste un unico equilibrio di Nash.

Caratterizzazione dell'equilibrio di Nash

Applicando direttamente il precedente teorema del punto fisso alla funzione di miglior risposta, è possibile dimostrare il seguente teorema.

Teorema

Esiste un unico equilibrio di Nash.

L'analisi attraverso la funzione di miglior risposta ci suggerisce un metodo naturale per raggiungere l'equilibrio di Nash. A tale scopo possiamo vedere due algoritmi:

1. Synchronous Best Response Dynamics

Caratterizzazione dell'equilibrio di Nash

Applicando direttamente il precedente teorema del punto fisso alla funzione di miglior risposta, è possibile dimostrare il seguente teorema.

Teorema

Esiste un unico equilibrio di Nash.

L'analisi attraverso la funzione di miglior risposta ci suggerisce un metodo naturale per raggiungere l'equilibrio di Nash. A tale scopo possiamo vedere due algoritmi:

1. Synchronous Best Response Dynamics
2. Asynchronous Best Response Dynamics

Algoritmi di convergenza

Algorithm: Synchronous Best Response Dynamics for Power Update

Ogni link i sceglie arbitrariamente una potenza iniziale $P_i^0 \in \mathbb{R}_+$

for $k = 0, 1, 2, \ldots$ **do**
  for $i = 1, \ldots, N$ **do**
    $P_i^{k+1} = g_i(P^k)$;

Università di Pisa

Algoritmi di convergenza

Algorithm: Synchronous Best Response Dynamics for Power Update

Ogni link i sceglie arbitrariamente una potenza iniziale $P_i^0 \in \mathbb{R}_+$

for $k = 0, 1, 2, \ldots$ **do**
  for $i = 1, \ldots, N$ **do**
    $P_i^{k+1} = g_i(P^k)$;

Algorithm: Asynchronous Best Response Dynamics for Power Update

Ogni link i sceglie arbitrariamente una potenza iniziale $P_i^0 \in \mathbb{R}_+$

for $k = 0, 1, 2, \ldots$ **do**
  Sia $\mathcal{N}^k \subset \{1, 2, \ldots, N\}$ un insieme (potrebbe essere vuoto) di link da aggiornare al passo k
  for $i \in \mathcal{N}^k$ **do**
    $P_i^{k+1} = g_i(P^k)$;

Algoritmi di convergenza

Teorema

Seguendo l'Algoritmo sincrono, per ogni vettore delle potenze iniziale P^0, P^k *converge all'unico equilibrio di Nash.*

Algoritmi di convergenza

Teorema

Seguendo l'Algoritmo sincrono, per ogni vettore delle potenze iniziale P^0, P^k converge all'unico equilibrio di Nash.

Sia $\mathcal{N} \subset \{1, 2, \ldots, N\}$, si definisce la **funzione di miglior risposta parziale** $g^{\mathcal{N}} : \mathbb{R}_+^N \longrightarrow \mathbb{R}_+^N$ come

$$g_i^{\mathcal{N}}(P) := \begin{cases} g_i(P) & i \in \mathcal{N} \\ P_i & i \notin \mathcal{N} \end{cases}$$

Sia, ora, $\{\mathcal{N}^k\}_{k=1}^{\infty}$ una successione di insiemi contenuti in $\{1, 2, \ldots, N\}$ $\forall k$.

Teorema

Seguendo l'Algoritmo asincrono, se per ogni link i $|\{k : i \in \mathcal{N}^k\}| = \infty$, allora P^k converge all'unico equilibrio di Nash per ogni vettore delle potenze iniziale P^0.

Price of Anarchy

In teoria dei giochi, per misurare una sorta di efficienza dell'equilibrio di Nash, spesso si utilizza il concetto di **Price of Anarchy** (PoA). In generale, è definito come il **rapporto** tra il costo realizzato dall'**equilibrio di Nash** e il costo realizzato dalla **soluzione ottima**, dove il costo della soluzione ottima è tipicamente rappresentato dalla somma di tutti i costi individuali.

Price of Anarchy

In teoria dei giochi, per misurare una sorta di efficienza dell'equilibrio di Nash, spesso si utilizza il concetto di **Price of Anarchy** (PoA). In generale, è definito come il **rapporto** tra il costo realizzato dall'**equilibrio di Nash** e il costo realizzato dalla **soluzione ottima**, dove il costo della soluzione ottima è tipicamente rappresentato dalla somma di tutti i costi individuali.

$PoA \geq 1$ e più è piccolo, più l'equilibrio di Nash è efficiente.

Price of Anarchy

In teoria dei giochi, per misurare una sorta di efficienza dell'equilibrio di Nash, spesso si utilizza il concetto di **Price of Anarchy** (PoA). In generale, è definito come il **rapporto** tra il costo realizzato dall'**equilibrio di Nash** e il costo realizzato dalla **soluzione ottima**, dove il costo della soluzione ottima è tipicamente rappresentato dalla somma di tutti i costi individuali.

$PoA \geq 1$ e più è piccolo, più l'equilibrio di Nash è efficiente.

É interessante verificare se esiste un *upper bound* per il PoA. Tuttavia, questo potrebbe non esistere. Consideriamo il seguente caso di due link.

In teoria dei giochi, per misurare una sorta di efficienza dell'equilibrio di Nash, spesso si utilizza il concetto di **Price of Anarchy** (PoA). In generale, è definito come il **rapporto** tra il costo realizzato dall'**equilibrio di Nash** e il costo realizzato dalla **soluzione ottima**, dove il costo della soluzione ottima è tipicamente rappresentato dalla somma di tutti i costi individuali.

$PoA \geq 1$ e più è piccolo, più l'equilibrio di Nash è efficiente.

É interessante verificare se esiste un *upper bound* per il PoA. Tuttavia, questo potrebbe non esistere. Consideriamo il seguente caso di due link. Siano

$$f_i(x) = \frac{1}{x} \qquad i = 1, 2 \qquad\qquad r_1(x) = cx \quad \textit{with } 0 < c < 1,$$

$$r_2(x) = x.$$

Price of Anarchy

Poniamo $\eta_1 = \eta_2 = 0$ e consideriamo la matrice dei *channel gain* $\begin{bmatrix} G & G' \\ G' & G \end{bmatrix}$, where $G > G'$. In questo caso,

$$C_1(P) = \frac{G' P_2}{G P_1} + c P_1 \qquad C_2(P) = \frac{G' P_1}{G P_2} + P_2.$$

UNIVERSITÀ DI PISA

Price of Anarchy

Poniamo $\eta_1 = \eta_2 = 0$ e consideriamo la matrice dei *channel gain* $\begin{bmatrix} G & G' \\ G' & G \end{bmatrix}$, where $G > G'$. In questo caso,

$$C_1(P) = \frac{G' P_2}{G P_1} + c P_1 \qquad C_2(P) = \frac{G' P_1}{G P_2} + P_2.$$

Imponendo ora la condizione di equilibrio si trova che

$$\frac{\left(P_2^{Nash}\right)^3}{\left(P_1^{Nash}\right)^3} = c, \qquad P_2^{Nash} = \frac{G'}{G c^{\frac{1}{3}}}.$$

Università di Pisa

Price of Anarchy

Poniamo $\eta_1 = \eta_2 = 0$ e consideriamo la matrice dei *channel gain* $\begin{bmatrix} G & G' \\ G' & G \end{bmatrix}$, where $G > G'$. In questo caso,

$$C_1(P) = \frac{G' P_2}{G P_1} + c P_1 \qquad C_2(P) = \frac{G' P_1}{G P_2} + P_2.$$

Imponendo ora la condizione di equilibrio si trova che

$$\frac{\left(P_2^{Nash}\right)^3}{\left(P_1^{Nash}\right)^3} = c, \qquad P_2^{Nash} = \frac{G'}{G c^{\frac{1}{3}}}.$$

Valutando il costo dell'equilibrio di Nash P^{Nash}, si ottiene che

$$\begin{aligned} C(P^{Nash}) &= C_1(P^{Nash}) + C_2(P^{Nash}) \\ &> C_2(P^{Nash}) = 2\frac{G'}{G c^{\frac{1}{3}}}. \end{aligned}$$

Price of Anarchy

Inoltre, chiamando P^* la soluzione ottima, poiché $c < 1$,

$$\begin{aligned} C(P^*) \leq C((1,1)) &= \frac{G'}{G} + c + \frac{G'}{G} + 1 \\ &< 2\left(\frac{G'}{G} + 1\right). \end{aligned}$$

Università di Pisa

Price of Anarchy

Inoltre, chiamando P^* la soluzione ottima, poiché $c < 1$,

$$\begin{aligned} C(P^*) \leq C((1,1)) &= \frac{G'}{G} + c + \frac{G'}{G} + 1 \\ &< 2\left(\frac{G'}{G} + 1\right). \end{aligned}$$

Quindi, poiché $G > G'$, il PoA è uguale a

$$\frac{C(P^{Nash})}{C(P^*)} = \frac{2\frac{G'}{Gc^{\frac{1}{3}}}}{2\left(\frac{G'}{G}+1\right)} > \frac{1}{c^{\frac{1}{3}}\left(1+\frac{G}{G'}\right)} > \frac{1}{2\frac{G}{G'}c^{\frac{1}{3}}}.$$

Allora, è possibile prendere una successione di triple (G, G', c) tale che l'ultimo termine $\frac{1}{2\frac{G}{G'}c^{\frac{1}{3}}} \longrightarrow \infty$.

Università di Pisa

Price of Anarchy

Teorema

Consideriamo un gioco totalmente omogeneo in cui ogni giocatore possiede $f_i(x) = \frac{1}{x}$, $r_i(x) = cx$ *e una rete wireless totalmente simmetrica, cioè* $G_{ii} = G,\ G_{ij} = G_{ji} = G' \ \forall i \neq j$ *e* $\eta_i = \eta \ \forall i$. *Allora il PoA è al massimo 2 indipendentemente dal numero di giocatori, dall'ambiente e dal costo unitario. Ovvero,* $\forall N \geq 1,\ \forall c,\ \forall \eta,\ \forall G > 0,\ \forall G' \geq 0$, *segue che*

$$\frac{C(P^{Nash})}{C(P^*)} \leq 2.$$

Università di Pisa

Price of Anarchy

Teorema

Consideriamo un gioco totalmente omogeneo in cui ogni giocatore possiede $f_i(x) = \frac{1}{x}$*,* $r_i(x) = cx$ *e una rete wireless totalmente simmetrica, cioè* $G_{ii} = G,\ G_{ij} = G_{ji} = G' \ \forall i \neq j$ *e* $\eta_i = \eta \ \forall i$*. Allora il PoA è al massimo 2 indipendentemente dal numero di giocatori, dall'ambiente e dal costo unitario. Ovvero,* $\forall N \geq 1,\ \forall c,\ \forall \eta,\ \forall G > 0,\ \forall G' \geq 0$*, segue che*

$$\frac{C(P^{Nash})}{C(P^*)} \leq 2.$$

Proof.

La dimostrazione di questo risultato si articola in tre passi:

- La soluzione ottima P^* è della forma $P^* = (p, p, \ldots, p)$.

Price of Anarchy

Teorema

Consideriamo un gioco totalmente omogeneo in cui ogni giocatore possiede $f_i(x) = \frac{1}{x}$, $r_i(x) = cx$ *e una rete wireless totalmente simmetrica, cioè* $G_{ii} = G,\ G_{ij} = G_{ji} = G' \ \forall i \neq j$ *e* $\eta_i = \eta \ \forall i$. *Allora il PoA è al massimo 2 indipendentemente dal numero di giocatori, dall'ambiente e dal costo unitario. Ovvero,* $\forall N \geq 1,\ \forall c,\ \forall \eta,\ \forall G > 0,\ \forall G' \geq 0$, *segue che*

$$\frac{C(P^{Nash})}{C(P^*)} \leq 2.$$

Proof.

La dimostrazione di questo risultato si articola in tre passi:

- La soluzione ottima P^* è della forma $P^* = (p, p, \ldots, p)$.
- L'equilibrio di Nash è della forma $P^{Nash} = (p^{Nash}, p^{Nash}, \ldots, p^{Nash})$.

Price of Anarchy

Teorema

Consideriamo un gioco totalmente omogeneo in cui ogni giocatore possiede $f_i(x) = \frac{1}{x}$, $r_i(x) = cx$ *e una rete wireless totalmente simmetrica, cioè* $G_{ii} = G$, $G_{ij} = G_{ji} = G' \ \forall i \neq j$ *e* $\eta_i = \eta \ \forall i$. *Allora il PoA è al massimo 2 indipendentemente dal numero di giocatori, dall'ambiente e dal costo unitario. Ovvero,* $\forall N \geq 1$, $\forall c$, $\forall \eta$, $\forall G > 0$, $\forall G' \geq 0$, *segue che*

$$\frac{C(P^{Nash})}{C(P^*)} \leq 2.$$

Proof.

La dimostrazione di questo risultato si articola in tre passi:

- La soluzione ottima P^* è della forma $P^* = (p, p, \ldots, p)$.
- L'equilibrio di Nash è della forma $P^{Nash} = (p^{Nash}, p^{Nash}, \ldots, p^{Nash})$.
- Si dimostra che $PoA = \frac{C(P^{Nash})}{C(P^*)} \leq 2$.

□

Consideriamo, ora, il setting in cui l'ambiente può variare in maniera casuale.

Definizione

Denotiamo l'**ambiente** per il link i con $\theta_i = \left(\{G_{ij}\}_{j=1}^{N}, \eta_i\right)$, in cui si tiene conto delle interferenze e del rumore. In più, possiamo rappresentare tutti gli ambienti nella matrice $\theta = (G, \eta) \in \mathbb{R}_+^{N\times(N+1)}$. Infine, chiamiamo $\theta^k = (G^k, \eta^k) \in \mathbb{R}_+^{N\times(N+1)}$ l'intero ambiente nella k-esima iterazione seguendo l'algoritmo sincrono.

Stochastic Wireless Networks

Consideriamo, ora, il setting in cui l'ambiente può variare in maniera casuale.

Definizione

Denotiamo l'**ambiente** per il link i con $\theta_i = \left(\{G_{ij}\}_{j=1}^{N}, \eta_i\right)$, in cui si tiene conto delle interferenze e del rumore. In più, possiamo rappresentare tutti gli ambienti nella matrice $\theta = (G, \eta) \in \mathbb{R}_+^{N\times(N+1)}$. Infine, chiamiamo $\theta^k = (G^k, \eta^k) \in \mathbb{R}_+^{N\times(N+1)}$ l'intero ambiente nella k-esima iterazione seguendo l'algoritmo sincrono.

É possibile definire un ordine parziale sull'insieme di tutti gli ambienti. Ovvero, un ambiente più "amichevole" permette al link i di trasmettere utilizzando una potenza minore, ma ottenendo la stessa qualità del servizio (SINR).

UNIVERSITÀ DI PISA

Definizione

Siano $\theta_i = \left(\{G_{ij}\}_{j=1}^N, \eta_i\right)$, $\tilde{\theta}_i = \left(\{\tilde{G}_{ij}\}_{j=1}^N, \tilde{\eta}_i\right) \in \mathbb{R}_+^{N+1}$. Definiamo l'ordine parziale $\leq$ su $\mathbb{R}_+^{N+1}$ come

$$\theta_i \leq \tilde{\theta}_i \;\Leftrightarrow G_{ii} \geq \tilde{G}_{ii},\; G_{ij} \leq \tilde{G}_{ij}\; \forall j \neq i,\; \eta_i \leq \tilde{\eta}_i.$$

Inoltre, siano $\theta, \tilde{\theta} \in \mathbb{R}_+^{N\times(N+1)}$ le matrici degli ambienti. Diciamo che $\theta \leq \tilde{\theta}$ se e solo se $\theta_i \leq \tilde{\theta}_i$ per ogni i.

Università di Pisa

Definizione

Siano $\theta_i = \left(\{G_{ij}\}_{j=1}^N, \eta_i\right)$, $\tilde{\theta}_i = \left(\{\tilde{G}_{ij}\}_{j=1}^N, \tilde{\eta}_i\right) \in \mathbb{R}_+^{N+1}$. Definiamo l'ordine parziale $\leq$ su $\mathbb{R}_+^{N+1}$ come

$$\theta_i \leq \tilde{\theta}_i \;\Leftrightarrow G_{ii} \geq \tilde{G}_{ii},\; G_{ij} \leq \tilde{G}_{ij}\; \forall j \neq i,\; \eta_i \leq \tilde{\eta}_i.$$

Inoltre, siano $\theta, \tilde{\theta} \in \mathbb{R}_+^{N\times(N+1)}$ le matrici degli ambienti. Diciamo che $\theta \leq \tilde{\theta}$ se e solo se $\theta_i \leq \tilde{\theta}_i$ per ogni i.

Quindi, si può considerare la funzione di miglior risposta come una funzione che dipende da due variabili $g(P, \theta)$. Le proprietà già viste sulla prima variabile continuano ad essere valide.

Lemma

Per ogni $P \in \mathbb{R}_+^N$ fissato, $\theta \leq \tilde{\theta} \Rightarrow g(P, \theta) \leq g(P, \tilde{\theta})$.

Ipotesi

1. $\forall k,\ \forall i,\ 0 < \underline{G}_{ii} \leq G_{ii}^{k} \leq \overline{G}_{ii};$
2. $\forall k,\ \forall i \neq j,\ 0 \leq \underline{G}_{ij} \leq G_{ij}^{k} \leq \overline{G}_{ij};$
3. $\forall k,\ \forall i\ 0 < \underline{\eta}_{i} \leq \eta_{i}^{k} \leq \overline{\eta}_{i}.$

Ipotesi

1. $\forall k,\ \forall i,\ 0 < \underline{G}_{ii} \leq G_{ii}^k \leq \overline{G}_{ii};$
2. $\forall k,\ \forall i \neq j,\ 0 \leq \underline{G}_{ij} \leq G_{ij}^k \leq \overline{G}_{ij};$
3. $\forall k,\ \forall i\ 0 < \underline{\eta}_i \leq \eta_i^k \leq \overline{\eta}_i.$

In più, chiamando

$$\underline{\theta}_i = (0, \ldots, 0, \overline{G}_{ii}, 0, \ldots, 0, \underline{\eta}_i)$$

$$\overline{\theta}_i = (\overline{G}_{i1}, \ldots, \overline{G}_{ii-1}, \underline{G}_{ii}, \overline{G}_{ii+1}, \ldots, \overline{G}_{iN}, \overline{\eta}_i),$$

le precedenti ipotesi implicano che $\underline{\theta}_i \leq \theta_i^k \leq \overline{\theta}_i$, o meglio $\underline{\theta} \leq \theta^k \leq \overline{\theta}\ \forall k$.

Ipotesi

1. $\forall k,\ \forall i,\ 0 < \underline{G}_{ii} \leq G_{ii}^k \leq \overline{G}_{ii};$
2. $\forall k,\ \forall i \neq j,\ 0 \leq \underline{G}_{ij} \leq G_{ij}^k \leq \overline{G}_{ij};$
3. $\forall k,\ \forall i\ 0 < \underline{\eta}_i \leq \eta_i^k \leq \overline{\eta}_i.$

In più, chiamando

$$\underline{\theta}_i = (0, \ldots, 0, \overline{G}_{ii}, 0, \ldots, 0, \underline{\eta}_i)$$

$$\overline{\theta}_i = (\overline{G}_{i1}, \ldots, \overline{G}_{ii-1}, \underline{G}_{ii}, \overline{G}_{ii+1}, \ldots, \overline{G}_{iN}, \overline{\eta}_i),$$

le precedenti ipotesi implicano che $\underline{\theta}_i \leq \theta_i^k \leq \overline{\theta}_i$, o meglio $\underline{\theta} \leq \theta^k \leq \overline{\theta}\ \forall k$.

Infine, poniamo $\mathcal{U} = \left\{\theta \mid \underline{\theta} \leq \theta \leq \overline{\theta}\right\}$.

Stochastic Stability

Teorema

Data una matrice di costanti $\epsilon \in \mathbb{R}_+^{N\times(N+1)}$, *sia* $P^e(\epsilon)$ *il vettore delle potenze di equilibrio ottenuto seguendo l'Algoritmo sincorno, dove l'ambiente è costante:* $\theta^k = \epsilon$, *per ogni* k. *Allora, se* $\theta^k \in \mathcal{U}\ \forall k$, *per ogni vettore iniziale* $P^0 \in \mathbb{R}_+^N$, *abbiamo*

$$P^e(\underline{\theta}) \leq \liminf_{k\to\infty} P^k \leq \limsup_{k\to\infty} P^k \leq P^e(\overline{\theta}),$$

dove P_i^k *è dato dall'Algoritmo sincrono.*
Inoltre, se $P^e(\underline{\theta}) \leq P \leq P^e(\overline{\theta})$, *allora per ogni* $\theta \geq \underline{\theta}$ *si ha che*

$$P^e(\underline{\theta}) \leq g(P,\theta) \leq P^e(\overline{\theta}).$$

Università di Pisa

Stochastic Stability

Il nostro obiettivo è quello di caratterizzare il comportamento probabilistico del vettore delle potenze P^k quando gli ambienti $\{\Theta^k\}_{k=0}^{\infty}$ seguono un certo processo stocastico.

Assumiamo, in particolare, che $\{\Theta^k\}_{k=0}^{\infty}$ sono *iid* (indipendenti e identicamente distribuiti), con una certa funzione di densità continua $f(\theta)$ definita su $\mathcal{U}$.

In questo setting, le potenze $\{P^k\}_{k=0}^{\infty}$ formano una catena di Markov omogenea.

- Esiste una distribuzione stazionaria per tale catena di Markov?
- Se esiste, è unica?
- P^k converge a tale distribuzione (se esiste unica) indipendentemente dalla condizione iniziale?

Università di Pisa

Stochastic Stability

Il nostro obiettivo è quello di caratterizzare il comportamento probabilistico del vettore delle potenze P^k quando gli ambienti $\{\Theta^k\}_{k=0}^{\infty}$ seguono un certo processo stocastico.

Assumiamo, in particolare, che $\{\Theta^k\}_{k=0}^{\infty}$ sono *iid* (indipendenti e identicamente distribuiti), con una certa funzione di densità continua $f(\theta)$ definita su $\mathcal{U}$.

In questo setting, le potenze $\{P^k\}_{k=0}^{\infty}$ formano una catena di Markov omogenea.

- Esiste una distribuzione stazionaria per tale catena di Markov?
- Se esiste, è unica?
- P^k converge a tale distribuzione (se esiste unica) indipendentemente dalla condizione iniziale?

Università di Pisa

Stochastic Stability

Il nostro obiettivo è quello di caratterizzare il comportamento probabilistico del vettore delle potenze P^k quando gli ambienti $\{\Theta^k\}_{k=0}^{\infty}$ seguono un certo processo stocastico.

Assumiamo, in particolare, che $\{\Theta^k\}_{k=0}^{\infty}$ sono *iid* (indipendenti e identicamente distribuiti), con una certa funzione di densità continua $f(\theta)$ definita su $\mathcal{U}$.

In questo setting, le potenze $\{P^k\}_{k=0}^{\infty}$ formano una catena di Markov omogenea.

- Esiste una distribuzione stazionaria per tale catena di Markov?
- Se esiste, è unica?
- P^k converge a tale distribuzione (se esiste unica) indipendentemente dalla condizione iniziale?

Stochastic Stability

Il nostro obiettivo è quello di caratterizzare il comportamento probabilistico del vettore delle potenze P^k quando gli ambienti $\{\Theta^k\}_{k=0}^{\infty}$ seguono un certo processo stocastico.

Assumiamo, in particolare, che $\{\Theta^k\}_{k=0}^{\infty}$ sono *iid* (indipendenti e identicamente distribuiti), con una certa funzione di densità continua $f(\theta)$ definita su $\mathcal{U}$.

In questo setting, le potenze $\{P^k\}_{k=0}^{\infty}$ formano una catena di Markov omogenea.

- Esiste una distribuzione stazionaria per tale catena di Markov?
- Se esiste, è unica?
- P^k converge a tale distribuzione (se esiste unica) indipendentemente dalla condizione iniziale?

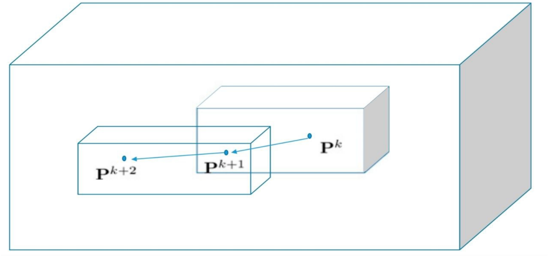
Stochastic Stability

Dopo un certo numero di iterazioni, il vettore delle potenze entra in un iper-rettangolo N-dimensionale $\mathcal{H} = \prod_{i=1}^{N}[P_i^e(\underline{\theta}), P_i^e(\overline{\theta})]$. Inoltre, una volta che si trova in $\mathcal{H}$ rimane in $\mathcal{H}$.

Stochastic Stability

Dopo un certo numero di iterazioni, il vettore delle potenze entra in un iper-rettangolo N-dimensionale $\mathcal{H} = \prod_{i=1}^{N}[P_i^e(\underline{\theta}), P_i^e(\overline{\theta})]$. Inoltre, una volta che si trova in $\mathcal{H}$ rimane in $\mathcal{H}$.

In particolare, una volta in $\mathcal{H}$, esiste un altro più piccolo iper-rettangolo contenuto in $\mathcal{H}$ che il successivo vettore delle potenze può raggiungere con probabilità positiva.



Stochastic Stability

Sia $\mathfrak{S}$ una σ-algebra di sottoinsiemi di S, sia $(S, \mathfrak{S})$ uno spazio misurabile e sia $A \in \mathfrak{S}$. Sia $\{X^n\}_{n=0}^{\infty}$ una catena di Markov a valori in $(S, \mathfrak{S})$ con la funzione di transizione $K(s, A)$.

- Una misura σ-finita π su $(S, \mathfrak{S})$ è detta una **misura invariante** se per ogni $A \in \mathfrak{S}\ \ \pi(A) = \int_S K(s, A)\pi(ds)$. Una misura invariante π che è anche una misura di probablità è detta una **misura di probabilità stazionaria**.
- $\{X^n\}_{n=0}^{\infty}$ è detta ϕ-**irriducibile** se esiste una misura non banale ϕ su $(S, \mathfrak{S})$ tale che $\phi(A) > 0 \ \Rightarrow \ P_s(\tau_A < \infty) > 0 \ \ \forall s \in S$, dove $\tau_A = \min\{n \geq 1 \mid X^n \in A\}$ è il primo tempo di ritorno e $P_s(\tau_A < \infty)$ denota la probabilità che il primo tempo di ritorno sia finito, data la condizione iniziale $X^0 = s$.
- Un insieme A è detto **Harris ricorrente** se $P_s(\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X^n \in A\}} = \infty) = 1$, per ogni $s \in S$.
- $\{X^n\}_{n=0}^{\infty}$ è detto **Harris ricorrente** se è ϕ-irriducibile e $\phi(A) > 0 \Rightarrow A$ è Harris ricorrente, per ogni $A \in \mathfrak{S}$.

UNIVERSITÀ DI PISA

Stochastic Stability

Sia $\mathfrak{S}$ una σ-algebra di sottoinsiemi di S, sia $(S, \mathfrak{S})$ uno spazio misurabile e sia $A \in \mathfrak{S}$. Sia $\{X^n\}_{n=0}^{\infty}$ una catena di Markov a valori in $(S, \mathfrak{S})$ con la funzione di transizione $K(s, A)$.

- Una misura σ-finita π su $(S, \mathfrak{S})$ è detta una **misura invariante** se per ogni $A \in \mathfrak{S}$ $\pi(A) = \int_S K(s, A)\pi(ds)$. Una misura invariante π che è anche una misura di probablità è detta una **misura di probabilità stazionaria**.
- $\{X^n\}_{n=0}^{\infty}$ è detta ϕ-**irriducibile** se esiste una misura non banale ϕ su $(S, \mathfrak{S})$ tale che $\phi(A) > 0 \;\Rightarrow\; P_s(\tau_A < \infty) > 0 \;\; \forall s \in S$, dove $\tau_A = \min\{n \geq 1 \mid X^n \in A\}$ è il primo tempo di ritorno e $P_s(\tau_A < \infty)$ denota la probabilità che il primo tempo di ritorno sia finito, data la condizione iniziale $X^0 = s$.
- Un insieme A è detto **Harris ricorrente** se $P_s(\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X^n \in A\}} = \infty) = 1$, per ogni $s \in S$.
- $\{X^n\}_{n=0}^{\infty}$ è detto **Harris ricorrente** se è ϕ-irriducibile e $\phi(A) > 0 \Rightarrow A$ è Harris ricorrente, per ogni $A \in \mathfrak{S}$.

Stochastic Stability

Sia $\mathfrak{S}$ una σ-algebra di sottoinsiemi di S, sia $(S, \mathfrak{S})$ uno spazio misurabile e sia $A \in \mathfrak{S}$. Sia $\{X^n\}_{n=0}^{\infty}$ una catena di Markov a valori in $(S, \mathfrak{S})$ con la funzione di transizione $K(s, A)$.

- Una misura σ-finita π su $(S, \mathfrak{S})$ è detta una **misura invariante** se per ogni $A \in \mathfrak{S}$ $\pi(A) = \int_S K(s, A)\pi(ds)$. Una misura invariante π che è anche una misura di probablità è detta una **misura di probabilità stazionaria**.
- $\{X^n\}_{n=0}^{\infty}$ è detta ϕ-**irriducibile** se esiste una misura non banale ϕ su $(S, \mathfrak{S})$ tale che $\phi(A) > 0 \;\Rightarrow\; P_s(\tau_A < \infty) > 0 \;\; \forall s \in S$, dove $\tau_A = \min\{n \geq 1 \mid X^n \in A\}$ è il primo tempo di ritorno e $P_s(\tau_A < \infty)$ denota la probabilità che il primo tempo di ritorno sia finito, data la condizione iniziale $X^0 = s$.
- Un insieme A è detto **Harris ricorrente** se $P_s(\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X^n \in A\}} = \infty) = 1$, per ogni $s \in S$.
- $\{X^n\}_{n=0}^{\infty}$ è detto **Harris ricorrente** se è ϕ-irriducibile e $\phi(A) > 0 \Rightarrow A$ è Harris ricorrente, per ogni $A \in \mathfrak{S}$.

Stochastic Stability

Sia $\mathfrak{S}$ una σ-algebra di sottoinsiemi di S, sia $(S, \mathfrak{S})$ uno spazio misurabile e sia $A \in \mathfrak{S}$. Sia $\{X^n\}_{n=0}^{\infty}$ una catena di Markov a valori in $(S, \mathfrak{S})$ con la funzione di transizione $K(s, A)$.

- Una misura σ-finita π su $(S, \mathfrak{S})$ è detta una **misura invariante** se per ogni $A \in \mathfrak{S}$ $\;\pi(A) = \int_S K(s, A)\pi(ds)$. Una misura invariante π che è anche una misura di probablità è detta una **misura di probabilità stazionaria**.
- $\{X^n\}_{n=0}^{\infty}$ è detta ϕ-**irriducibile** se esiste una misura non banale ϕ su $(S, \mathfrak{S})$ tale che $\phi(A) > 0 \;\Rightarrow\; P_s(\tau_A < \infty) > 0 \;\; \forall s \in S$, dove $\tau_A = \min\{n \geq 1 \mid X^n \in A\}$ è il primo tempo di ritorno e $P_s(\tau_A < \infty)$ denota la probabilità che il primo tempo di ritorno sia finito, data la condizione iniziale $X^0 = s$.
- Un insieme A è detto **Harris ricorrente** se $P_s(\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X^n \in A\}} = \infty) = 1$, per ogni $s \in S$.
- $\{X^n\}_{n=0}^{\infty}$ è detto **Harris ricorrente** se è ϕ-irriducibile e $\phi(A) > 0 \Rightarrow A$ è Harris ricorrente, per ogni $A \in \mathfrak{S}$.

Università di Pisa

- $A \in \mathfrak{S}$ è dettp v_m-**piccolo** (o solo piccolo) se esiste un intero positivo m e una misura non banale v_m su $(S, \mathfrak{S})$ tale che

$$K^m(s, B) \geq v_m(B) \quad \forall s \in A \; \forall B \in \mathfrak{S}.$$

- Sia $\{X^n\}_{n=0}^{\infty}$ ϕ-irriducibile. $\{X^n\}_{n=0}^{\infty}$ è detta **fortemente aperiodica** se esiste un insieme v_1-piccolo A con $v_1(A) > 0$.
- $\{X^n\}_{n=0}^{\infty}$ è detta **positive Harris** se è Harris ricorrente ed esiste un insieme piccolo A tale che

$$\sup_{a \in A} \mathbb{E}_a[\tau_A] < \infty,$$

il che significa che il tempo di ritorno ad A è uniformemente limitata quando si parte da A.

Stochastic Stability

- $A \in \mathfrak{S}$ è dettp v_m-**piccolo** (o solo piccolo) se esiste un intero positivo m e una misura non banale v_m su $(S, \mathfrak{S})$ tale che

$$K^m(s, B) \geq v_m(B) \quad \forall s \in A \; \forall B \in \mathfrak{S}.$$

- Sia $\{X^n\}_{n=0}^{\infty}$ ϕ-irriducibile. $\{X^n\}_{n=0}^{\infty}$ è detta **fortemente aperiodica** se esiste un insieme v_1-piccolo A con $v_1(A) > 0$.
- $\{X^n\}_{n=0}^{\infty}$ è detta **positive Harris** se è Harris ricorrente ed esiste un insieme piccolo A tale che

$$\sup_{a \in A} \mathbb{E}_a[\tau_A] < \infty,$$

il che significa che il tempo di ritorno ad A è uniformemente limitata quando si parte da A.

Università di Pisa

Stochastic Stability

- $A \in \mathfrak{S}$ è dettp v_m-**piccolo** (o solo piccolo) se esiste un intero positivo m e una misura non banale v_m su $(S, \mathfrak{S})$ tale che

$$K^m(s, B) \geq v_m(B) \quad \forall s \in A \; \forall B \in \mathfrak{S}.$$

- Sia $\{X^n\}_{n=0}^{\infty}$ ϕ-irriducibile. $\{X^n\}_{n=0}^{\infty}$ è detta **fortemente aperiodica** se esiste un insieme v_1-piccolo A con $v_1(A) > 0$.
- $\{X^n\}_{n=0}^{\infty}$ è detta **positive Harris** se è Harris ricorrente ed esiste un insieme piccolo A tale che

$$\sup_{a \in A} \mathbb{E}_a[\tau_A] < \infty,$$

il che significa che il tempo di ritorno ad A è uniformemente limitata quando si parte da A.

Università di Pisa

Stochastic Stability

Lemma

La catena di Markov omogenea $\{P^k\}_{k=0}^{\infty}$*, definita su* $\mathbb{R}_+^N$ *con la* σ*-algebra di Borel, ammette le seguenti proprietà:*

1. *É* ϕ*-irriducibile per qualche (non banale)* ϕ*.*
2. *É una catena Harris-ricorrente.*
3. *É una positive Harris chain.*
4. *É fortemente aperiodica.*

Stochastic Stability

Lemma

La catena di Markov omogenea $\{P^k\}_{k=0}^{\infty}$, definita su $\mathbb{R}_+^N$ con la σ-algebra di Borel, ammette le seguenti proprietà:

1. *É ϕ-irriducibile per qualche (non banale) ϕ.*
2. *É una catena Harris-ricorrente.*
3. *É una positive Harris chain.*
4. *É fortemente aperiodica.*

Teorema

Esiste un'unica distribuzione di probabilità stazionaria $\pi(\cdot)$ per $\{P^k\}_{k=0}^{\infty}$. Inoltre, per ogni $p^0 \in \mathbb{R}_+^N$

$$\lim_{n\to\infty} \left\| P_{p^0}^n(\cdot) - \pi(\cdot) \right\|_{TV} = 0,$$

dove $P_{p^0}^n(\cdot)$ è la misura di probabilità dello stato al tempo n, partendo da p^0.

GRAZIE PER L'ATTENZIONE