Linear hyperbolic equations with time-dependent propagation speed

Alessandro La Farciola

Università di Pisa

18 Dicembre 2020

Presentazione del problema

Consideriamo un'equazione differenziale lineare del secondo ordine con un coefficiente dipendente dal tempo $c(t)$. In particolare, prendiamo uno spazio di Hilbert H e un operatore di moltiplicazione A e consideriamo l'equazione

$$\ddot{u}(t) + c(t)Au = 0$$

con condizioni iniziali

$$u(0) = u_0, \qquad \dot{u}(0) = u_1.$$

Presentazione del problema

Consideriamo un'equazione differenziale lineare del secondo ordine con un coefficiente dipendente dal tempo $c(t)$. In particolare, prendiamo uno spazio di Hilbert H e un operatore di moltiplicazione A e consideriamo l'equazione

$$\ddot{u}(t) + c(t)Au = 0$$

con condizioni iniziali

$$u(0) = u_0, \qquad \dot{u}(0) = u_1.$$

Abbiamo studiato la regolarità delle soluzioni $u(t)$ in base alla regolarità spaziale dei dati iniziali e quella temporale della velocità di propagazione $c(t)$.

Presentazione del problema

Consideriamo un'equazione differenziale lineare del secondo ordine con un coefficiente dipendente dal tempo $c(t)$. In particolare, prendiamo uno spazio di Hilbert H e un operatore di moltiplicazione A e consideriamo l'equazione

$$\ddot{u}(t) + c(t)Au = 0$$

con condizioni iniziali

$$u(0) = u_0, \qquad \dot{u}(0) = u_1.$$

Abbiamo studiato la regolarità delle soluzioni $u(t)$ in base alla regolarità spaziale dei dati iniziali e quella temporale della velocità di propagazione $c(t)$.

Si dimostra che una peggiore regolarità temporale di $c(t)$ è compensata da una maggiore regolarità spaziale dei dati iniziali.

UNIVERSITÀ DI PISA

Presentazione del problema

I principali risultati affrontati sono stati presentati per la prima volta nello studio *"Sur les équations hyperboliques avec des coefficients qui ne dépendent que du temps"* pubblicato da Ennio De Giorgi, Ferruccio Colombini and Sergio Spagnolo nel 1979 in *Annali Scuola Normale Superiore di Pisa*.

Struttura della tesi

1. Definizioni di spazi funzionali
2. Stime delle energie
3. Teoremi di buona positura
4. Effetto altalena: costruzione dei controesempi

Prime definizioni

Definizione

Sia H uno spazio di Hilbert. Un operatore $A : D(A) \longrightarrow H$ è detto un operatore di moltiplicazione se esiste una base di Hilbert $\{e_k\}$ e una successione $\{\lambda_k\} \subseteq \mathbb{R}$ tale che per ogni $u = \sum_{k\in\mathbb{N}} u_k e_k \ \in D(A)$

$$Au = \sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda_k u_k e_k \quad e \quad D(A) = \{u \in H \ : \ \sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda_k^2 u_k^2 < +\infty\}.$$

UNIVERSITÀ DI PISA

Prime definizioni

Definizione

Sia H uno spazio di Hilbert. Un operatore $A : D(A) \longrightarrow H$ è detto un operatore di moltiplicazione se esiste una base di Hilbert $\{e_k\}$ e una successione $\{\lambda_k\} \subseteq \mathbb{R}$ tale che per ogni $u = \sum_{k\in\mathbb{N}} u_k e_k \in D(A)$

$$Au = \sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda_k u_k e_k \quad e \quad D(A) = \{u \in H \ : \ \sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda_k^2 u_k^2 < +\infty\}.$$

Consideriamo, ora, uno spazio di Hilbert H separabile con $\{e_k\}$ una sua base e sia A un operatore di moltiplicazione con $\{\lambda_k^2\}$ la successione di autovalori di A tale che $\lambda_k \geq 1$.

Università di Pisa

Spazi funzionali

Allora, sappiamo che $u \in H \Leftrightarrow \sum_{k\in\mathbb{N}} u_k^2 < \infty$.

Più in generale, consideriamo

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} w_k u_k^2 \qquad \mathit{con} \quad \{w_k\} \subseteq \mathbb{R}^+.$$

Spazi funzionali

Allora, sappiamo che $u \in H \Leftrightarrow \sum_{k\in\mathbb{N}} u_k^2 < \infty$.

Più in generale, consideriamo

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} w_k u_k^2 \qquad con \quad \{w_k\} \subseteq \mathbb{R}^+.$$

- Spazi di Sobolev, $D(A^\alpha)$: $w_k = \lambda_k^{4\alpha}$
- Distribuzioni, $D(A^{-\alpha})$: $w_k = \lambda_k^{-4\alpha}$
- Spazi di Gevrey, $\mathcal{G}_{\varphi,r,\alpha}(A)$: $w_k = \lambda_k^{4\alpha} \exp\left(2r\varphi(\lambda_k)\right)$
- Ultradistribuzioni di Gevrey, $\mathcal{G}_{-\psi,R,\alpha}(A)$: $w_k = \lambda_k^{4\alpha} \exp\left(-2R\psi(\lambda_k)\right)$

Spazi funzionali

Allora, sappiamo che $u \in H \Leftrightarrow \sum_{k\in\mathbb{N}} u_k^2 < \infty$.

Più in generale, consideriamo

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} w_k u_k^2 \qquad con \ \ \{w_k\} \subseteq \mathbb{R}^+.$$

- Spazi di Sobolev, $D(A^\alpha)$: $w_k = \lambda_k^{4\alpha}$
- Distribuzioni, $D(A^{-\alpha})$: $w_k = \lambda_k^{-4\alpha}$
- Spazi di Gevrey, $\mathcal{G}_{\varphi,r,\alpha}(A)$: $w_k = \lambda_k^{4\alpha} \exp\left(2r\varphi(\lambda_k)\right)$
- Ultradistribuzioni di Gevrey, $\mathcal{G}_{-\psi,R,\alpha}(A)$: $w_k = \lambda_k^{4\alpha} \exp\left(-2R\psi(\lambda_k)\right)$

Inoltre valgono i seguenti contenimenti

$$\mathcal{G}_{\varphi,r,\alpha}(A) \subseteq D(A^\alpha) \subseteq H \subseteq D(A^{-\alpha}) \subseteq \mathcal{G}_{-\psi,R,\alpha}(A).$$

Compatibilità con le definizioni classiche

Consideriamo lo spazio di Hilbert separabile $L^2((0,\pi))$. Sia $\{e_k\} = \left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(kx)\right\}$ una sua base. Sia A l'operatore tale che $Au = -\ddot{u}$, allora la base precedente è composta da autovettori con $\lambda_k^2 = k^2$ come autovalori.

Compatibilità con le definizioni classiche

Consideriamo lo spazio di Hilbert separabile $L^2((0,\pi))$. Sia $\{e_k\} = \left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(kx)\right\}$ una sua base. Sia A l'operatore tale che $Au = -\ddot{u}$, allora la base precedente è composta da autovettori con $\lambda_k^2 = k^2$ come autovalori.

- se $w_k = \lambda_k^{4\alpha}$ l'usuale spazio di Sobolev $H^{2\alpha}$ con le opportune condizioni al bordo,
- se $w_k = \exp(2rk)$ si ha l'equivalenza con lo spazio delle funzioni analitiche di raggio r,
- se $w_k = \exp\left(2rk^{1/s}\right)$ con $s > 1$ si ottiene lo spazio di Gevrey standard.

Università di Pisa

Compatibilità con le definizioni classiche

Consideriamo lo spazio di Hilbert separabile $L^2((0,\pi))$. Sia $\{e_k\} = \left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(kx) \right\}$ una sua base. Sia A l'operatore tale che $Au = -\ddot{u}$, allora la base precedente è composta da autovettori con $\lambda_k^2 = k^2$ come autovalori.

- se $w_k = \lambda_k^{4\alpha}$ l'usuale spazio di Sobolev $H^{2\alpha}$ con le opportune condizioni al bordo,
- se $w_k = \exp(2rk)$ si ha l'equivalenza con lo spazio delle funzioni analitiche di raggio r,
- se $w_k = \exp\left(2rk^{1/s}\right)$ con $s > 1$ si ottiene lo spazio di Gevrey standard.

UNIVERSITÀ DI PISA

Compatibilità con le definizioni classiche

Consideriamo lo spazio di Hilbert separabile $L^2((0,\pi))$. Sia $\{e_k\} = \left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(kx) \right\}$ una sua base. Sia A l'operatore tale che $Au = -\ddot{u}$, allora la base precedente è composta da autovettori con $\lambda_k^2 = k^2$ come autovalori.

- se $w_k = \lambda_k^{4\alpha}$ l'usuale spazio di Sobolev $H^{2\alpha}$ con le opportune condizioni al bordo,
- se $w_k = \exp(2rk)$ si ha l'equivalenza con lo spazio delle funzioni analitiche di raggio r,
- se $w_k = \exp\left(2rk^{1/s}\right)$ con $s > 1$ si ottiene lo spazio di Gevrey standard.

Università di Pisa

Problema generale

Tornando al problema originario, sia H uno spazio di Hilbert separabile con $\{e_k\}$ una sua base e sia A un operatore di moltiplicazione. Consideriamo l'equazione lineare

$$\ddot{u}(t) + c(t)Au = 0.$$

Problema generale

Tornando al problema originario, sia H uno spazio di Hilbert separabile con $\{e_k\}$ una sua base e sia A un operatore di moltiplicazione. Consideriamo l'equazione lineare

$$\ddot{u}(t) + c(t)Au = 0.$$

Grazie alle ipotesi assunte su A l'equazione è equivalente ad un sistema di ODEs del tipo

$$\ddot{u}_k(t) + \lambda_k^2 c(t) u_k(t) = 0.$$

UNIVERSITÀ DI PISA

Problema generale

Ci concentriamo, pertanto, sulla seguente famiglia di equazioni differenziali ordinarie

$$\ddot{u}_\lambda(t) + \delta(t)\dot{u}_\lambda(t) + \lambda^2 c(t) u_\lambda(t) = 0.$$

Problema generale

Ci concentriamo, pertanto, sulla seguente famiglia di equazioni differenziali ordinarie

$$\ddot{u}_\lambda(t) + \delta(t)\dot{u}_\lambda(t) + \lambda^2 c(t) u_\lambda(t) = 0.$$

dove:

- $\delta(t) \geq 0$,
- λ è un parametro reale,
- $c : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ è una funzione che chiamiamo velocità di propagazione a causa del suo significato fisico.

Università di Pisa

Problema generale

Ci concentriamo, pertanto, sulla seguente famiglia di equazioni differenziali ordinarie

$$\ddot{u}_\lambda(t) + \delta(t)\dot{u}_\lambda(t) + \lambda^2 c(t) u_\lambda(t) = 0.$$

dove:

- $\delta(t) \geq 0$,
- λ è un parametro reale,
- $c : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ è una funzione che chiamiamo velocità di propagazione a causa del suo significato fisico.

Problema generale

Ci concentriamo, pertanto, sulla seguente famiglia di equazioni differenziali ordinarie

$$\ddot{u}_\lambda(t) + \delta(t)\dot{u}_\lambda(t) + \lambda^2 c(t) u_\lambda(t) = 0.$$

dove:

- $\delta(t) \geq 0$,
- λ è un parametro reale,
- $c : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ è una funzione che chiamiamo velocità di propagazione a causa del suo significato fisico.

UNIVERSITÀ DI PISA

Problema generale

Ci concentriamo, pertanto, sulla seguente famiglia di equazioni differenziali ordinarie

$$\ddot{u}_\lambda(t) + \delta(t)\dot{u}_\lambda(t) + \lambda^2 c(t) u_\lambda(t) = 0.$$

dove:

- $\delta(t) \geq 0$,
- λ è un parametro reale,
- $c : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ è una funzione che chiamiamo velocità di propagazione a causa del suo significato fisico.

Problema generale

Ci concentriamo, pertanto, sulla seguente famiglia di equazioni differenziali ordinarie

$$\ddot{u}_\lambda(t) + \delta(t)\dot{u}_\lambda(t) + \lambda^2 c(t) u_\lambda(t) = 0.$$

dove:

- $\delta(t) \geq 0$,
- λ è un parametro reale,
- $c : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ è una funzione che chiamiamo velocità di propagazione a causa del suo significato fisico.

Il nostro obiettivo è quello di studiare la crescita della soluzione $u_\lambda(t)$ quando $\lambda \to +\infty$.

Stime delle energie

Definizione

Definiamo, ora, tre energie:

- chiamiamo Simple energy la quantità

$$S_\lambda(t) := \dot{u}_\lambda^2(t) + u_\lambda^2(t),$$

- chiamiamo Kovaleskian energy la quantità

$$E_\lambda(t) := \dot{u}_\lambda^2(t) + \lambda^2 u_\lambda^2(t),$$

- data $\gamma(t)$ una funzione non negativa di classe C^1, chiamiamo Hyperbolic energy la quantità

$$F_\lambda(t) := \dot{u}_\lambda^2(t) + \lambda^2 \gamma(t) u_\lambda^2(t).$$

Stime delle energie

Definizione

Definiamo, ora, tre energie:

- chiamiamo Simple energy la quantità

$$S_\lambda(t) := \dot{u}_\lambda^2(t) + u_\lambda^2(t),$$

- chiamiamo Kovaleskian energy la quantità

$$E_\lambda(t) := \dot{u}_\lambda^2(t) + \lambda^2 u_\lambda^2(t),$$

- data $\gamma(t)$ una funzione non negativa di classe C^1, chiamiamo Hyperbolic energy la quantità

$$F_\lambda(t) := \dot{u}_\lambda^2(t) + \lambda^2 \gamma(t) u_\lambda^2(t).$$

Stime delle energie

Definizione

Definiamo, ora, tre energie:

- chiamiamo Simple energy la quantità

$$S_\lambda(t) := \dot{u}_\lambda^2(t) + u_\lambda^2(t),$$

- chiamiamo Kovaleskian energy la quantità

$$E_\lambda(t) := \dot{u}_\lambda^2(t) + \lambda^2 u_\lambda^2(t),$$

- data $\gamma(t)$ una funzione non negativa di classe C^1, chiamiamo Hyperbolic energy la quantità

$$F_\lambda(t) := \dot{u}_\lambda^2(t) + \lambda^2 \gamma(t) u_\lambda^2(t).$$

Stime delle energie

E' possibile dimostrare alcuni teoremi che mostrano diverse stime sulla Kovaleskian energy dipendenti dalla regolarità assunta sulla velocità di propagazione $c(t)$.

Teorema (Caso $c(t) \in L^1$)

Sia T una costante positiva. Assumiamo che la velocità di propagazione $c(t) \in L^1((0,T))$. Allora, la soluzione $u(t)$ soddisfa la seguente disuguaglianza

$$\dot{u}_\lambda^2(t) + \lambda^2 u_\lambda^2(t) \ \leq \ K \exp\left(\lambda t + \lambda \int_0^t |c(s)| ds\right)$$

dove K è una costante che dipende dalle condizioni iniziali.

UNIVERSITÀ DI PISA

Stime delle energie

Nel caso precedente abbiamo visto che l'energia ha una crescita del tipo $\exp(\lambda t)$. Una stima migliore si ottiene se si assume la condizione di stretta iperbolicità su $c(t)$, ovvero esistono due costanti μ_1 e μ_2 tali che $0 < \mu_1 \leq c(t) \leq \mu_2$.

Università di Pisa

Stime delle energie

Nel caso precedente abbiamo visto che l'energia ha una crescita del tipo $\exp(\lambda t)$. Una stima migliore si ottiene se si assume la condizione di stretta iperbolicità su $c(t)$, ovvero esistono due costanti μ_1 e μ_2 tali che $0 < \mu_1 \leq c(t) \leq \mu_2$.

Teorema (Caso $c(t) \in L^1$ e strettamente iperbolica)

Sia T una costante positiva. Assumiamo che $c(t) \in L^1((0, T))$ soddisfi la condizione di stretta iperbolicità. Allora, per ogni $\epsilon > 0$ esiste una costante N_ϵ tale che la soluzione $u_\lambda(t)$ soddisfa la seguente disuguaglianza

$$\dot{u}_\lambda^2(t) + \lambda^2 u_\lambda^2(t) \leq K \exp\left\{\frac{\lambda\epsilon}{\mu_1} + N_\epsilon t\right\}.$$

Stime delle energie

Nel caso precedente abbiamo visto che l'energia ha una crescita del tipo $\exp(\lambda t)$. Una stima migliore si ottiene se si assume la condizione di stretta iperbolicità su $c(t)$, ovvero esistono due costanti μ_1 e μ_2 tali che $0 < \mu_1 \leq c(t) \leq \mu_2$.

Teorema (Caso $c(t) \in L^1$ e strettamente iperbolica)

Sia T una costante positiva. Assumiamo che $c(t) \in L^1((0,T))$ soddisfi la condizione di stretta iperbolicità. Allora, per ogni $\epsilon > 0$ esiste una costante N_ϵ tale che la soluzione $u_\lambda(t)$ soddisfa la seguente disuguaglianza

$$\dot{u}_\lambda^2(t) + \lambda^2 u_\lambda^2(t) \leq K \exp\left\{ \frac{\lambda\epsilon}{\mu_1} + N_\epsilon t \right\}.$$

In questo caso la costante N_ϵ non dipende da λ.

UNIVERSITÀ DI PISA

Teorema (Caso $c(t)$ strettamente iperbolica e ω-continua)

Sia $c(t)$ una velocità di propagazione che soddisfa la condizione di iperbolicità. Assumiamo inoltre che $c(t)$ è ω-continua. Allora, esiste una costante $N > 0$ tale che la soluzione $u(t)$ soddisfa la seguente disuguaglianza

$$\dot{u}_\lambda^2(t) + \lambda^2 u_\lambda^2(t) \leq K \exp\left\{ N\lambda\omega\left(\frac{1}{\lambda}\right) t \right\}.$$

Università di Pisa

Teorema (Caso $c(t)$ strettamente iperbolica e ω-continua)

Sia $c(t)$ una velocità di propagazione che soddisfa la condizione di iperbolicità. Assumiamo inoltre che $c(t)$ è ω-continua. Allora, esiste una costante $N > 0$ tale che la soluzione $u(t)$ soddisfa la seguente disuguaglianza

$$\dot{u}_\lambda^2(t) + \lambda^2 u_\lambda^2(t) \leq K \exp\left\{ N\lambda\omega\left(\frac{1}{\lambda}\right) t \right\}.$$

Dal caso precedente seguono alcuni corollari che dipendono dal modulo di continuità scelto.

Lipschitz

Se $c(t)$ è Lipschitziana, cioè $\omega(x) = L|x|$, allora

$$\dot{u}_\lambda^2(t) + \lambda^2 u_\lambda^2(t) \leq K \exp(\tilde{N}t)$$

Stime delle energie

Lipschitz

Se $c(t)$ è Lipschitziana, cioè $\omega(x) = L|x|$, allora

$$\dot{u}_\lambda^2(t) + \lambda^2 u_\lambda^2(t) \leq K \exp(\tilde{N}t)$$

Hölder

Se $c(t)$ è α-*Hölderiana*, cioè $\omega(x) = H|x|^\alpha$ con $\alpha \in (0,1)$, allora

$$\dot{u}_\lambda^2(t) + \lambda^2 u_\lambda^2(t) \leq K \exp\left(N\lambda^{1-\alpha}t\right)$$

Stime delle energie

Lipschitz

Se $c(t)$ è Lipschitziana, cioè $\omega(x) = L|x|$, allora

$$\dot{u}_\lambda^2(t) + \lambda^2 u_\lambda^2(t) \leq K \exp(\tilde{N} t)$$

log-Lipschitz

Se $c(t)$ è log-Lipschitz continua, cioè $\omega(x) = L|x||\log x|$, allora

$$\dot{u}_\lambda^2(t) + \lambda^2 u_\lambda^2(t) \leq K \lambda^{\tilde{N} t}$$

Hölder

Se $c(t)$ è α-*Hölderiana*, cioè $\omega(x) = H|x|^\alpha$ con $\alpha \in (0,1)$, allora

$$\dot{u}_\lambda^2(t) + \lambda^2 u_\lambda^2(t) \leq K \exp\left(N \lambda^{1-\alpha} t\right)$$

Teoremi di buona positura

Definizione

Dato un problema matematico, diciamo che è ben posto se verifica le seguenti proprietà:

- Esiste una soluzione
- La soluzione è unica
- Il comportamento della soluzione cambia in modo continuo rispetto alle condizioni iniziali

Università di Pisa

Teoremi di buona positura

Teoremi

1. se $c(t) \in L^1((0, T))$ per ogni $T > 0$, si ha buona positura in ultradistribuzioni analitiche
2. se $c(t)$ soddisfa la stretta iperbolicità ed è ω-continua allora:
   - se i dati iniziali appartengono ad ultradistribuzioni si ha buona positura in

$$C^0\left([0, T], \mathcal{G}_{-\psi, R_0+Rt, 1/2}(A)\right) \cap C^1\left([0, T], \mathcal{G}_{-\psi, R_0+Rt, 0}(A)\right)$$

   - se i dati iniziali appartengono a spazi di Gevrey si ha buona positura in

$$C^0\left([0, T], \mathcal{G}_{\varphi, r_0-Rt, 1/2}(A)\right) \cap C^1\left([0, T], \mathcal{G}_{\varphi, r_0-Rt, 0}(A)\right).$$

Teoremi di buona positura

Teoremi

1. se $c(t) \in L^1((0, T))$ per ogni $T > 0$, si ha buona positura in ultradistribuzioni analitiche
2. se $c(t)$ soddisfa la stretta iperbolicità ed è ω-continua allora:
   - se i dati iniziali appartengono ad ultradistribuzioni si ha buona positura in

     $$C^0\left([0, T], \mathcal{G}_{-\psi, R_0+Rt, 1/2}(A)\right) \cap C^1\left([0, T], \mathcal{G}_{-\psi, R_0+Rt, 0}(A)\right)$$

   - se i dati iniziali appartengono a spazi di Gevrey si ha buona positura in

     $$C^0\left([0, T], \mathcal{G}_{\varphi, r_0-rt, 1/2}(A)\right) \cap C^1\left([0, T], \mathcal{G}_{\varphi, r_0-rt, 0}(A)\right).$$

   con le condizioni che

   $$\limsup_{x \to +\infty} \frac{x}{\psi(x)} \omega\left(\frac{1}{x}\right) < \infty \quad e \quad \limsup_{x \to +\infty} \frac{x}{\varphi(x)} \omega\left(\frac{1}{x}\right) < \infty.$$

Teoremi di buona positura

Teoremi

1. se $c(t) \in L^1((0,T))$ per ogni $T > 0$, si ha buona positura in ultradistribuzioni analitiche
2. se $c(t)$ soddisfa la stretta iperbolicità ed è ω-continua allora:
   - se i dati iniziali appartengono ad ultradistribuzioni si ha buona positura in

$$C^0\left([0,T], \mathcal{G}_{-\psi, R_0+Rt, 1/2}(A)\right) \cap C^1\left([0,T], \mathcal{G}_{-\psi, R_0+Rt, 0}(A)\right)$$

   - se i dati iniziali appartengono a spazi di Gevrey si ha buona positura in

$$C^0\left([0,T], \mathcal{G}_{\varphi, r_0-rt, 1/2}(A)\right) \cap C^1\left([0,T], \mathcal{G}_{\varphi, r_0-rt, 0}(A)\right).$$

con le condizioni che

$$\limsup_{x\to+\infty} \frac{x}{\varphi(x)}\,\omega\left(\frac{1}{x}\right) < \infty \quad e \quad \limsup_{x\to+\infty} \frac{x}{\psi(x)}\,\omega\left(\frac{1}{x}\right) < +\infty$$

Teoremi di buona positura

Teoremi

1. se $c(t) \in L^1((0,T))$ per ogni $T > 0$, si ha buona positura in ultradistribuzioni analitiche
2. se $c(t)$ soddisfa la stretta iperbolicità ed è ω-continua allora:
   - se i dati iniziali appartengono ad ultradistribuzioni si ha buona positura in
     $$C^0\left([0,T], \mathcal{G}_{-\psi, R_0+Rt, 1/2}(A)\right) \cap C^1\left([0,T], \mathcal{G}_{-\psi, R_0+Rt, 0}(A)\right)$$
   - se i dati iniziali appartengono a spazi di Gevrey si ha buona positura in
     $$C^0\left([0,T], \mathcal{G}_{\varphi, r_0-rt, 1/2}(A)\right) \cap C^1\left([0,T], \mathcal{G}_{\varphi, r_0-rt, 0}(A)\right).$$

   con le condizioni che
   $$\limsup_{x\to+\infty} \frac{x}{\psi(x)}\omega\left(\frac{1}{x}\right) < \infty \quad e \quad \limsup_{x\to+\infty} \frac{x}{\varphi(x)}\omega\left(\frac{1}{x}\right) < +\infty.$$

Teoremi di buona positura

Teoremi

1. se $c(t) \in L^1((0,T))$ per ogni $T > 0$, si ha buona positura in ultradistribuzioni analitiche
2. se $c(t)$ soddisfa la stretta iperbolicità ed è ω-continua allora:
   - se i dati iniziali appartengono ad ultradistribuzioni si ha buona positura in

$$C^0\left([0,T], \mathcal{G}_{-\psi, R_0+Rt, 1/2}(A)\right) \cap C^1\left([0,T], \mathcal{G}_{-\psi, R_0+Rt, 0}(A)\right)$$

   - se i dati iniziali appartengono a spazi di Gevrey si ha buona positura in

$$C^0\left([0,T], \mathcal{G}_{\varphi, r_0-rt, 1/2}(A)\right) \cap C^1\left([0,T], \mathcal{G}_{\varphi, r_0-rt, 0}(A)\right).$$

con le condizioni che

$$\limsup_{x \to +\infty} \frac{x}{\psi(x)} \omega\left(\frac{1}{x}\right) < \infty \quad e \quad \limsup_{x \to +\infty} \frac{x}{\varphi(x)} \omega\left(\frac{1}{x}\right) < +\infty.$$

Teoremi di buona positura

Teoremi

1. se $c(t) \in L^1((0, T))$ per ogni $T > 0$, si ha buona positura in ultradistribuzioni analitiche
2. se $c(t)$ soddisfa la stretta iperbolicità ed è ω-continua allora:
   - se i dati iniziali appartengono ad ultradistribuzioni si ha buona positura in
   $$C^0\left([0, T], \mathcal{G}_{-\psi, R_0+Rt, 1/2}(A)\right) \cap C^1\left([0, T], \mathcal{G}_{-\psi, R_0+Rt, 0}(A)\right)$$
   - se i dati iniziali appartengono a spazi di Gevrey si ha buona positura in
   $$C^0\left([0, T], \mathcal{G}_{\varphi, r_0-rt, 1/2}(A)\right) \cap C^1\left([0, T], \mathcal{G}_{\varphi, r_0-rt, 0}(A)\right).$$

   con le condizioni che
   $$\limsup_{x\to+\infty} \frac{x}{\psi(x)}\omega\left(\frac{1}{x}\right) < \infty \quad e \quad \limsup_{x\to+\infty} \frac{x}{\varphi(x)}\omega\left(\frac{1}{x}\right) < +\infty.$$

Corollari

- **Hölder**: prendendo $\omega(x) = Hx^\alpha$ con $\alpha \in (0,1)$, il problema è ben posto nello spazio di Gevrey standard di ordine $s = (1-\alpha)^{-1}$.
- **log-Lipschitz**: prendendo $\omega(x) = Lx|\log x|$, allora il problema è ben posto in spazi di Sobolev con derivative loss finito.
- **beta-log-Lipschitz**: prendendo $\omega(x) = Lx|\log x|^\beta$ con $\beta \in (0,1)$, allora il problema è ben posto in spazi di Sobolev con derivative loss piccolo a piacere.
- **Lipschitz**: prendendo $\omega(x) = Lx$, allora il problema è ben posto in spazi di Sobolev senza derivative loss.

UNIVERSITÀ DI PISA

Corollari

- **Hölder**: prendendo $\omega(x) = Hx^\alpha$ con $\alpha \in (0,1)$, il problema è ben posto nello spazio di Gevrey standard di ordine $s = (1-\alpha)^{-1}$.
- **log-Lipschitz**: prendendo $\omega(x) = Lx|\log x|$, allora il problema è ben posto in spazi di Sobolev con derivative loss finito.
- **beta-log-Lipschitz**: prendendo $\omega(x) = Lx|\log x|^\beta$ con $\beta \in (0,1)$, allora il problema è ben posto in spazi di Sobolev con derivative loss piccolo a piacere.
- **Lipschitz**: prendendo $\omega(x) = Lx$, allora il problema è ben posto in spazi di Sobolev senza derivative loss.

Teoremi di buona positura

Corollari

- **Hölder**: prendendo $\omega(x) = Hx^\alpha$ con $\alpha \in (0,1)$, il problema è ben posto nello spazio di Gevrey standard di ordine $s = (1-\alpha)^{-1}$.
- **log-Lipschitz**: prendendo $\omega(x) = Lx|\log x|$, allora il problema è ben posto in spazi di Sobolev con derivative loss finito.
- **beta-log-Lipschitz**: prendendo $\omega(x) = Lx|\log x|^\beta$ con $\beta \in (0,1)$, allora il problema è ben posto in spazi di Sobolev con derivative loss piccolo a piacere.
- **Lipschitz**: prendendo $\omega(x) = Lx$, allora il problema è ben posto in spazi di Sobolev senza derivative loss.

UNIVERSITÀ DI PISA

Teoremi di buona positura

Corollari

- **Hölder**: prendendo $\omega(x) = Hx^\alpha$ con $\alpha \in (0, 1)$, il problema è ben posto nello spazio di Gevrey standard di ordine $s = (1 - \alpha)^{-1}$.
- **log-Lipschitz**: prendendo $\omega(x) = Lx|\log x|$, allora il problema è ben posto in spazi di Sobolev con derivative loss finito.
- **beta-log-Lipschitz**: prendendo $\omega(x) = Lx|\log x|^\beta$ con $\beta \in (0, 1)$, allora il problema è ben posto in spazi di Sobolev con derivative loss piccolo a piacere.
- **Lipschitz**: prendendo $\omega(x) = Lx$, allora il problema è ben posto in spazi di Sobolev senza derivative loss.

Effetto altalena: costruzione dei controesempi

Partendo dall'equazione differenziale ordinaria di base

$$\ddot{u}_\lambda + \lambda^2 c(t) u_\lambda = 0,$$

dalle stime sulle energie fatte in precedenza avevamo ottenuto che

$$E(t) \leq E(0) \exp\left(M\lambda t\right).$$

UNIVERSITÀ DI PISA

Effetto altalena: costruzione dei controesempi

Partendo dall'equazione differenziale ordinaria di base

$$\ddot{u}_\lambda + \lambda^2 c(t) u_\lambda = 0,$$

dalle stime sulle energie fatte in precedenza avevamo ottenuto che

$$E(t) \leq E(0) \exp\left(M\lambda t\right).$$

Ora, il nostro obiettivo è mostrare che tale stima risulta ottimale. Per questo occorre costruire opportune soluzioni che verificano l'uguaglianza nella precedente disuguaglianza, cioè soluzioni che crescono esponenzialmente con il tempo.

Effetto altalena: costruzione dei controesempi

Se pensiamo al problema come ad un modello di oscillatore armonico abbiamo bisogno di una opportuna forza della molla $c(t)$ che permette alla soluzione di crescere esponenzialmente. L'idea è quella di utilizzare una molla più debole quando ci si muove verso l'origine e una più forte quando si va nella direzione opposta.

Effetto altalena: costruzione dei controesempi

Matematicamente, questo effetto si ottiene prendendo

$$c(t) = 1 - 4\epsilon \sin(\lambda t) \cos(\lambda t) - \epsilon^2 \sin^4(\lambda t)$$

e di conseguenza

$$u(t) = b \sin(\lambda t) \exp\left\{\frac{1}{2}\epsilon\lambda t - \frac{1}{4}\epsilon \sin(2\lambda t)\right\}.$$

Effetto altalena: costruzione dei controesempi

Per quanto riguarda il caso generale, consideriamo la solita equazione

$$\ddot{u}(t) + c(t)Au = 0.$$

Allora è possibile trovare una velocità di propagazione $c(t)$ che sia ω-continua tale per cui la soluzione è regolare al tempo $t = 0$ e irregolare quando $t > 0$.

Università di Pisa

Effetto altalena: costruzione dei controesempi

Teorema

Siano $\varphi : (0, +\infty) \longrightarrow (0, +\infty)$ *and* $\psi : (0, +\infty) \longrightarrow (0, +\infty)$ *tali che*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{\varphi(x)} \omega\left(\frac{\pi}{x}\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{\psi(x)} \omega\left(\frac{\pi}{x}\right) = +\infty.$$

Allora esiste una funzione ω*-continua* $c : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *tale che*

$$\frac{1}{2} \leq c(t) \leq \frac{3}{2} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

e una soluzione $u(t)$ *tale che*

$$(u(0), \dot{u}(0)) \in \mathcal{G}_{\varphi,r,1/2}(A) \times \mathcal{G}_{\varphi,r,0}(A) \quad \forall r > 0$$

$$(u(t), \dot{u}(t)) \notin \mathcal{G}_{-\psi,R,1/2}(A) \times \mathcal{G}_{-\psi,R,0}(A) \quad \forall R > 0, \ \forall t > 0.$$

GRAZIE PER L'ATTENZIONE