How to construct bizarre objects: from *Baire Category to Convex Integration*

Master thesis

Relatore: prof. Massimo Gobbino

Alessandro La Farciola

27 Ottobre 2023

Dipartimento
di Matematica
Università di Pisa

Table of Contents

Definizione (Baire space)

Uno **spazio di Baire** è uno spazio topologico che soddisfa la seguente proprietà:

- Se $\{C_i\}$ è una famiglia numerabile di chiusi con $Int(C_i) = \emptyset$, allora $\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$ ha parte interna vuota.

Definizione (Baire space)

Uno **spazio di Baire** è uno spazio topologico che soddisfa la seguente proprietà:

- Se $\{C_i\}$ è una famiglia numerabile di chiusi con $Int(C_i) = \emptyset$, allora $\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$ ha parte interna vuota.

Definizione

Sia X uno spazio topologico. Allora $Y \subseteq X$ è detto

- **Magro** se è unione numerabile di chiusi a parte interna vuota;
- **Residuale** se $X \setminus Y$ è magro.

Definizione (Baire space)

Uno **spazio di Baire** è uno spazio topologico che soddisfa la seguente proprietà:

- Se $\{C_i\}$ è una famiglia numerabile di chiusi con $Int(C_i) = \emptyset$, allora $\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$ ha parte interna vuota.

Definizione

Sia X uno spazio topologico. Allora $Y \subseteq X$ è detto

- **Magro** se è unione numerabile di chiusi a parte interna vuota;
- **Residuale** se $X \setminus Y$ è magro.

Teorema (Baire)

Uno spazio metrico completo è uno spazio di Baire.

Proposizione

Sia V lo spazio delle funzioni limitate $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lipschitz con costante ≤ 1, con la metrica del sup. Allora l'insieme delle funzioni con costante di Lipschitz $= 1$ in ogni intervallo è residuale.

Baire category theorem

Proposizione

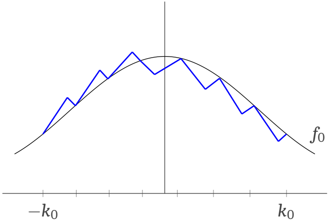
Sia V lo spazio delle funzioni limitate $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lipschitz con costante ≤ 1, con la metrica del sup. Allora l'insieme delle funzioni con costante di Lipschitz $= 1$ in ogni intervallo è residuale.

- V è uno spazio metrico completo (e quindi di Baire).
- $C_k := \{f \in V \ : \ \exists x_f \in [-k, k] \ t.c. \ |f(x) - f(y)| \leq \left(1 - \frac{1}{k}\right) |x - y| \ \forall x, y \in [x_f, x_f + \frac{1}{k}]\}$.
- C_k sono chiusi e $Int(C_k) = \emptyset$.

Proposizione

Sia V lo spazio delle funzioni limitate $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lipschitz con costante ≤ 1, con la metrica del sup. Allora l'insieme delle funzioni con costante di Lipschitz $= 1$ in ogni intervallo è residuale.

- V è uno spazio metrico completo (e quindi di Baire).
- $C_k := \left\{f \in V \ : \ \exists x_f \in [-k, k] \ t.c. \ |f(x) - f(y)| \leq \left(1 - \frac{1}{k}\right) |x - y| \ \forall x, y \in [x_f, x_f + \frac{1}{k}]\right\}$.
- C_k sono chiusi e $Int(C_k) = \emptyset$.



Baire category theorem

1 Baire category

Nello spazio delle funzioni limitate $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che siano $1/2$-Hölder in $\mathbb{R}$, quelle che non sono Lipschitz in nessun intervallo $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ sono residuali.

Nello spazio degli insiemi misurabili $E \subseteq [0, 1]$, quelli che per ogni intervallo $I \subseteq [0, 1]$ sia $E \cap I$ che $E^c \cap I$ hanno misura strettamente positiva sono residuali.

Nello spazio di funzioni $f \in L^2(a, b)$ with $|f(x)| \leq 1$ q.o., l'insieme delle funzioni $f(x) \in \{-1, 1\}$ q.o. è residuale rispetto alla metrica che induce la convergenza debole nella palla.

Nello spazio delle funzioni limitate $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che siano $1/2$-Hölder in $\mathbb{R}$, quelle che non sono Lipschitz in nessun intervallo $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ sono residuali.

Nello spazio degli insiemi misurabili $E \subseteq [0, 1]$, quelli che per ogni intervallo $I \subseteq [0, 1]$ sia $E \cap I$ che $E^c \cap I$ hanno misura strettamente positiva sono residuali.

Nello spazio di funzioni $f \in L^2(a, b)$ with $|f(x)| \leq 1$ q.o., l'insieme delle funzioni $f(x) \in \{-1, 1\}$ q.o. è residuale rispetto alla metrica che induce la convergenza debole nella palla.

Nello spazio delle funzioni limitate $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che siano $1/2$-Hölder in $\mathbb{R}$, quelle che non sono Lipschitz in nessun intervallo $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ sono residuali.

Nello spazio degli insiemi misurabili $E \subseteq [0, 1]$, quelli che per ogni intervallo $I \subseteq [0, 1]$ sia $E \cap I$ che $E^c \cap I$ hanno misura strettamente positiva sono residuali.

Nello spazio di funzioni $f \in L^2(a, b)$ with $|f(x)| \leq 1$ q.o., l'insieme delle funzioni $f(x) \in \{-1, 1\}$ q.o. è residuale rispetto alla metrica che induce la convergenza debole nella palla.

Table of Contents

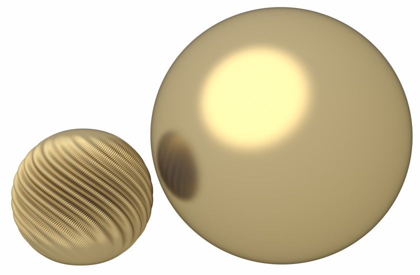
Teorema (Nash-Kuiper, 1954-1955)

Sia (M^d, g) una varietà Rimanniana d-dimensionale C^∞ chiusa. Sia $\phi : M^d \to \mathbb{R}^n$ un' immersione (o embedding) C^∞ strictly short, con $n \geq d + 1$.
Allora, per ogni $\epsilon > 0$ esiste un'immersione (o embedding) isometrica C^1, $\psi : M^d \to \mathbb{R}^n$ tale che $\|\phi - \psi\|_{C^0} \leq \epsilon$.

[1] The image can be found on the website `https://hevea-project.fr/ENIndexHevea.html`, thanks to the work of V. Borrelli et al.

Teorema (Nash-Kuiper, 1954-1955)

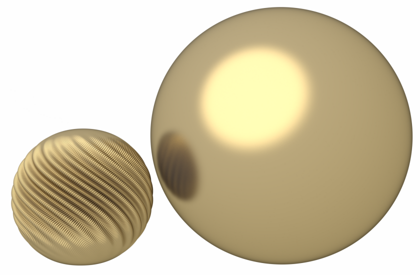
Sia (M^d, g) *una varietà Rimanniana* d*-dimensionale* C^∞ *chiusa. Sia* $\phi : M^d \to \mathbb{R}^n$ *un' immersione (o embedding)* C^∞ *strictly short, con* $n \geq d+1$.
Allora, per ogni $\epsilon > 0$ *esiste un'immersione (o embedding) isometrica* C^1, $\psi : M^d \to \mathbb{R}^n$ *tale che* $\|\phi - \psi\|_{C^0} \leq \epsilon$.


[1]

[1] The image can be found on the website `https://hevea-project.fr/ENIndexHevea.html`, thanks to the work of V. Borrelli et al.

Teorema (Nash-Kuiper, 1954-1955)

Sia (M^d, g) una varietà Rimanniana d-dimensionale C^∞ chiusa. Sia $\phi : M^d \to \mathbb{R}^n$ un' immersione (o embedding) C^∞ strictly short, con $n \geq d+1$.
Allora, per ogni $\epsilon > 0$ esiste un'immersione (o embedding) isometrica C^1, $\psi : M^d \to \mathbb{R}^n$ tale che $\|\phi - \psi\|_{C^0} \leq \epsilon$.

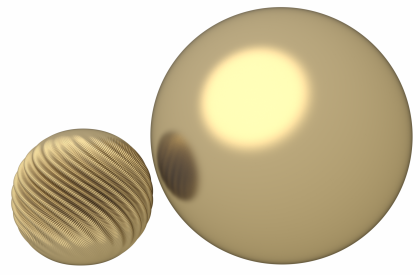

[1]

- In coordinate locali, la condizione di isometria diventa $\partial_i u \cdot \partial_j u = g_{ij}$, un sistema di $\frac{1}{2}d(d+1)$ equazioni in n incognite.

[1] The image can be found on the website `https://hevea-project.fr/ENIndexHevea.html`, thanks to the work of V. Borrelli et al.

Teorema (Nash-Kuiper, 1954-1955)

Sia (M^d, g) una varietà Rimanniana d-dimensionale C^∞ chiusa. Sia $\phi : M^d \to \mathbb{R}^n$ un' immersione (o embedding) C^∞ strictly short, con $n \geq d+1$.
Allora, per ogni $\epsilon > 0$ esiste un'immersione (o embedding) isometrica C^1, $\psi : M^d \to \mathbb{R}^n$ tale che $\|\phi - \psi\|_{C^0} \leq \epsilon$.


[1]

- In coordinate locali, la condizione di isometria diventa $\partial_i u \cdot \partial_j u = g_{ij}$, un sistema di $\frac{1}{2}d(d+1)$ equazioni in n incognite.
- Il nome **convex integration** è dovuto a Gromov (1986), che in seguito ha formalizzato una teoria più generale estendendo il risultato di Nash-Kuiper.

[1] The image can be found on the website `https://hevea-project.fr/ENIndexHevea.html`, thanks to the work of V. Borrelli et al.

Incompressible Euler equations

$$\begin{cases} \partial_t v + (v \cdot \nabla) v + \nabla p = 0 \\ div\, v = 0 \end{cases}$$

Energia totale

$$e(t) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}^3} |v(x,t)|^2 \, dx$$

Incompressible Euler equations

$$\begin{cases} \partial_t v + (v \cdot \nabla) v + \nabla p = 0 \\ div\, v = 0 \end{cases}$$

Energia totale

$$e(t) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}^3} |v(x,t)|^2 \, dx$$

Congettura (Onsager, 1949)

Consideriamo le soluzioni deboli delle equazioni di Eulero 3-dimensionali periodiche, dove la velocità v è Hölderiana con esponente θ.

1. *Se $\theta > \frac{1}{3}$, allora l'energia totale di v è costante.*
2. *Per ogni $\theta < \frac{1}{3}$ esistono soluzioni v per cui l'energia totale non è costante.*

Incompressible Euler equations

$$\begin{cases} \partial_t v + (v \cdot \nabla) v + \nabla p = 0 \\ div\ v = 0 \end{cases}$$

Energia totale

$$e(t) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}^3} |v(x,t)|^2 \, dx$$

Congettura (Onsager, 1949)

Consideriamo le soluzioni deboli delle equazioni di Eulero 3-dimensionali periodiche, dove la velocità v è Hölderiana con esponente θ.

1. *Se $\theta > \frac{1}{3}$, allora l'energia totale di v è costante.*
2. *Per ogni $\theta < \frac{1}{3}$ esistono soluzioni v per cui l'energia totale non è costante.*

- A partire dai lavori di C. De Lellis e L. Székelyhidi, si è potuto applicare il metodo della convex integration per costruire soluzioni deboli che dissipano l'energia.
- La procedura iterativa utilizzata per Eulero segue la stessa strategia di Nash per le immersioni isometriche.

Table of Contents

3 Curve a velocità unitaria

Teorema

Consideriamo V l'insieme delle curve

$$V := \{u : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^d \ : \ u \in C^1, \ \|u'(t)\|_{\mathbb{R}^d} \leq 1 \ \forall t \in [0,1]\}.$$

Allora, quelle con velocità unitaria

$$W := \{u : [0,1] \to \mathbb{R}^d \ : \ u \in C^1, \ \|u'(t)\|_{\mathbb{R}^d} = 1 \ \forall t \in [0,1]\}$$

sono C^0-dense in V. Ovvero, per ogni $u \in V$ e per ogni $\epsilon > 0$, esiste una curva $u_\epsilon : [0,1] \to \mathbb{R}^d$ con

(i) $\|u_\epsilon'(t)\|_{\mathbb{R}^d} = 1, \quad \forall t \in [0,1];$

(ii) $\|u_\epsilon(t) - u(t)\|_{\mathbb{R}^d} \leq \epsilon, \quad \forall t \in [0,1].$

Table of Contents

Teorema

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un aperto limitato. Esistono infiniti $u \in L^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ tali che

$$\begin{cases} \mathit{div}\, u = 0 & \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3), \\ \|u(x)\|_{\mathbb{R}^3} = 1 & \text{per quasi ogni } x \in \Omega. \\ u(x) = 0 & \text{per quasi ogni } x \notin \Omega \end{cases}$$

- La prima condizione è equivalente a

$$\int_{\mathbb{R}^3} u \cdot \nabla\varphi = 0 \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3).$$

Table of Contents

Sia $D^2 \subset \mathbb{R}^2$ il disco unitario.

Definizione

Sia $u : D^2 \to \mathbb{R}^N$ un'immersione. Allora diciamo che u è **short** se per ogni curva $\gamma : [0, 1] \to D^2$ di classe C^1

$$\ell(u \circ \gamma) \leq \ell(\gamma),$$

dove ℓ rappresenta la lunghezza della curva. Mentre, u è **strictly short** se $\ell(u \circ \gamma) < \ell(\gamma)$. In più, diciamo che u è **isometrica** se $\ell(u \circ \gamma) = \ell(\gamma)$.

Presentazione del problema 3

Sia $D^2 \subset \mathbb{R}^2$ il disco unitario.

Definizione

Sia $u : D^2 \to \mathbb{R}^N$ un'immersione. Allora diciamo che u è **short** se per ogni curva $\gamma : [0, 1] \to D^2$ di classe C^1

$$\ell(u \circ \gamma) \leq \ell(\gamma),$$

dove ℓ rappresenta la lunghezza della curva. Mentre, u è **strictly short** se $\ell(u \circ \gamma) < \ell(\gamma)$. In più, diciamo che u è **isometrica** se $\ell(u \circ \gamma) = \ell(\gamma)$.

Teorema (Nash-Kuiper nel disco)

Sia $N \geq 3$. Sia $u : D^2 \to \mathbb{R}^N$ un'immersione C^∞ strictly short.
Allora per ogni $\epsilon > 0$ esiste un'immersione C^1 isometrica $u_\epsilon : D^2 \to \mathbb{R}^N$ tale che $\|u - u_\epsilon\|_{C^0} \leq \epsilon$.

Definizione

Consideriamo $u : D^2 \to \mathbb{R}^N$ un'immersione di classe C^1. Allora definiamo $M_u : D^2 \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ come

$$M_u(x) := Ju(x)^T Ju(x),$$

dove Ju rappresenta la matrice jacobiana.

Definizione

Consideriamo $u : D^2 \to \mathbb{R}^N$ un'immersione di classe C^1. Allora definiamo $M_u : D^2 \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ come

$$M_u(x) := Ju(x)^T Ju(x),$$

dove Ju rappresenta la matrice jacobiana.

Lemma (Caratterizzazione delle immersioni short)

Sia $u : D^2 \to \mathbb{R}^N$ un'immersione. Allora,

- *u è **short** se e solo se $M_u \leq Id$, cioè esiste $R_u : D^2 \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ simmetrica e semidefinita positiva tale che $M_u + R_u = Id$.*
- *u è **strictly short** se e solo se $M_u < Id$, cioè R_u simmetrica definita positiva.*
- *u è **isometrica** se e solo se $M_u = Id$, cioè $R_u = 0$.*

Table of Contents

6 Metodo generale

	Curve a velocità unitaria	Campi a divergenza nulla	Nash-Kuiper
Goal: risolvere un'equazione	$\|u'(t)\|_{\mathbb{R}^d} = 1$	$\|u(x)\|_{\mathbb{R}^3} = 1$	$M_u = Id$

	Curve a velocità unitaria	Campi a divergenza nulla	Nash-Kuiper
Goal: risolvere un'equazione	$\|u'(t)\|_{\mathbb{R}^d} = 1$	$\|u(x)\|_{\mathbb{R}^3} = 1$	$M_u = Id$
Rilassamento: partire da *sottosoluzioni*	$\|u'(t)\|_{\mathbb{R}^d} < 1$	$\|u(x)\|_{\mathbb{R}^3} < 1$	$M_u < Id$

	Curve a velocità unitaria	Campi a divergenza nulla	Nash-Kuiper
Goal: risolvere un'equazione	$\|u'(t)\|_{\mathbb{R}^d} = 1$	$\|u(x)\|_{\mathbb{R}^3} = 1$	$M_u = Id$
Rilassamento: partire da *sottosoluzioni*	$\|u'(t)\|_{\mathbb{R}^d} < 1$	$\|u(x)\|_{\mathbb{R}^3} < 1$	$M_u < Id$
Gap: distanza dall'obiettivo, che definiamo $I(u)$	$1 - \|u'(t)\|^2_{\mathbb{R}^d}$	$\int_\Omega (1 - \|u(x)\|^2_{\mathbb{R}^3})\, dx$	$\|Id - M_u\|_{C^0}$

	Curve a velocità unitaria	Campi a divergenza nulla	Nash-Kuiper
Goal: risolvere un'equazione	$\|u'(t)\|_{\mathbb{R}^d} = 1$	$\|u(x)\|_{\mathbb{R}^3} = 1$	$M_u = Id$
Rilassamento: partire da *sottosoluzioni*	$\|u'(t)\|_{\mathbb{R}^d} < 1$	$\|u(x)\|_{\mathbb{R}^3} < 1$	$M_u < Id$
Gap: distanza dall'obiettivo, che definiamo $I(u)$	$1 - \|u'(t)\|^2_{\mathbb{R}^d}$	$\int_\Omega (1 - \|u(x)\|^2_{\mathbb{R}^3})\, dx$	$\|Id - M_u\|_{C^0}$
Metrica	C^0	Debole L^2	C^0

	Curve a velocità unitaria	Campi a divergenza nulla	Nash-Kuiper
Goal: risolvere un'equazione	$\|u'(t)\|_{\mathbb{R}^d} = 1$	$\|u(x)\|_{\mathbb{R}^3} = 1$	$M_u = Id$
Rilassamento: partire da *sottosoluzioni*	$\|u'(t)\|_{\mathbb{R}^d} < 1$	$\|u(x)\|_{\mathbb{R}^3} < 1$	$M_u < Id$
Gap: distanza dall'obiettivo, che definiamo $I(u)$	$1 - \|u'(t)\|^2_{\mathbb{R}^d}$	$\int_\Omega (1 - \|u(x)\|^2_{\mathbb{R}^3})\, dx$	$\|Id - M_u\|_{C^0}$
Metrica	C^0	Debole L^2	C^0
Claim: $\{I(u) = 0\}$ denso in	$\overline{\{\|u'(t)\|_{\mathbb{R}^d} \leq 1\}}$	$\overline{\{u \in C_0^\infty(\Omega) : div\, u = 0, \|u(x)\|_{\mathbb{R}^3} < 1\}}$	$\overline{\{\text{u short}\}}$

Supponiamo che $u : [0,1] \to \mathbb{R}^3$.

- Approssimo u con una curva affine a tratti e in ogni tratto $[t_i, t_{i+1}]$ chiamo $a_i^2 := I(u)$.
- Considero la spirale a velocità unitaria. Ovvero, presi $\xi, \eta \in \mathbb{R}^3$ di norma unitaria tale che $\xi \perp \eta \perp u'$, definisco

$$u_n := u + \frac{a_i}{2\pi n}(\xi \cos(2\pi n t) + \eta \sin(2\pi n t)).$$

- Da cui $u_n' = u' + a_i(-\xi \sin(2\pi n t) + \eta \cos(2\pi n t))$. Quindi, $\|u_n'\|^2_{\mathbb{R}^3} = \|u'\|^2_{\mathbb{R}^3} + a_i^2 = 1$.
- In più, $u_n \xrightarrow{C^0} u$.

Curve in codimensione 1 : iterazione

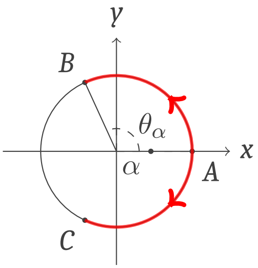
6 Metodo generale

Supponiamo che $u : [0,1] \to \mathbb{R}^2$.

Lemma

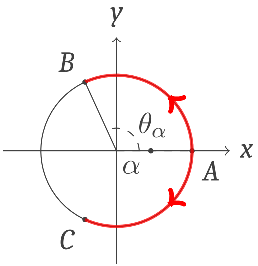
Consideriamo $v \in B(0,1) \subseteq \mathbb{R}^2$. *Allora esiste un loop* $h : [0,1] \to \mathcal{S}^1$ *tale che*

$$v = \int_0^1 h(s)ds.$$



[2] E. Bartzos, V. Borrelli, et al. . An Explicit Isometric Reduction of the Unit Sphere into an Arbitrarily Small Ball. F. of Comp. Math., 2018 , 18(4), pp.1015-1042.

Supponiamo che $u : [0,1] \to \mathbb{R}^2$.

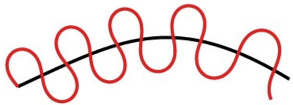


Lemma

Consideriamo $v \in B(0,1) \subseteq \mathbb{R}^2$. *Allora esiste un loop* $h : [0,1] \to \mathcal{S}^1$ *tale che*

$$v = \int_0^1 h(s)ds.$$

- Chiamo $u_n'(t)$ il loop che percorre $h(t)$ n volte.
- Definisco $u_n(t) := u(0) + \int_0^t u_n'(s)\, ds$.
- In più, $\|u_n - u\|_{C^0} \to 0$.


[2]

[2] E. Bartzos, V. Borrelli, et al. . An Explicit Isometric Reduction of the Unit Sphere into an Arbitrarily Small Ball. F. of Comp. Math., 2018 , 18(4), pp.1015-1042.

Campi a divergenza nulla: perturbation argument

- Idea: $u_n(x) := u(x) + curl\, v_n(x)$.
- Prendiamo $\xi, \eta \in \mathbb{R}^3$ tale che $\|\xi\|_{\mathbb{R}^3} = \|\eta\|_{\mathbb{R}^3} = 1$ e $\xi \perp \eta$.
- Data $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ una funzione cut-off, definiamo

$$v_n(x) := \frac{\eta}{2n}(1 - \|u(x)\|^2_{\mathbb{R}^3})\phi(x)\sin(nx \cdot \xi).$$

- Quando derivo, ottengo

$$curl\, v_n = \frac{\xi \times \eta}{2}(1 - \|u(x)\|^2_{\mathbb{R}^3})\phi(x)\cos(nx \cdot \xi) + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Codimensione 2

Supponiamo che $R_u = a^2 v v^T$ sia rank one, con a di classe C^∞ e v di norma unitaria.

- Idea: $u_n = u + v_n$.
- Definiamo:

$$v_n(x) := \frac{a(x)}{n}(\xi(x)\cos(nx \cdot v) + \eta(x)\sin(nx \cdot v)) .$$

- I due campi $\xi, \eta : D^2 \to \mathbb{R}^4$ sono di classe C^∞ e tale che per ogni $x \in D^2$
  (i) $\|\xi(x)\|_{\mathbb{R}^4} = \|\eta(x)\|_{\mathbb{R}^4} = 1$;
  (ii) $\xi(x) \perp \eta(x) \perp \partial_{x_1} u(x) \perp \partial_{x_2} u(x)$.

Per il caso generale, possiamo sfruttare una decomposizione rank one del gap metrico: $R_u(x) = \sum_{k=1}^{K} a_k(x)^2 v_k v_k^T$, per opportune funzioni C^∞ a_k e vettori unitari v_k .

Codimensione 2

Supponiamo che $R_u = a^2 v v^T$ sia rank one, con a di classe C^∞ e v di norma unitaria.

- Idea: $u_n = u + v_n$.
- Definiamo:

$$v_n(x) := \frac{a(x)}{n}\left(\xi(x)\cos(nx \cdot v) + \eta(x)\sin(nx \cdot v)\right) .$$

- I due campi $\xi, \eta : D^2 \to \mathbb{R}^4$ sono di classe C^∞ e tale che per ogni $x \in D^2$
  - (i) $\|\xi(x)\|_{\mathbb{R}^4} = \|\eta(x)\|_{\mathbb{R}^4} = 1$;
  - (ii) $\xi(x) \perp \eta(x) \perp \partial_{x_1} u(x) \perp \partial_{x_2} u(x)$.

Per il caso generale, possiamo sfruttare una decomposizione rank one del gap metrico: $R_u(x) = \sum_{k=1}^K a_k(x)^2 v_k v_k^T$, per opportune funzioni C^∞ a_k e vettori unitari v_k .

Codimensione 1

6 Metodo generale

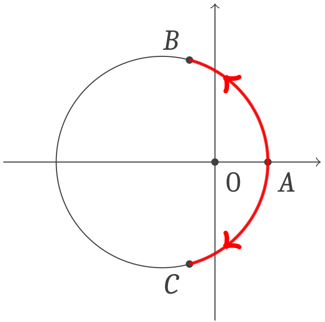
- Idea: $u_n = u + v_n$.

- Prendiamo due campi $\zeta, \eta : D^2 \to \mathbb{R}^3$ di classe C^∞ tale che per ogni $x \in D^2$
  (i) $\|\zeta(x)\|_{\mathbb{R}^3} = \|\eta(x)\|_{\mathbb{R}^3} = 1$;
  (ii) $\eta(x) \perp \partial_{x_1} u(x) \perp \partial_{x_2} u(x)$;
  (iii) $\zeta(x) \perp \eta(x) \perp \partial_{x_2} u(x)$;
  (iv) $\zeta(x) \cdot \partial_{x_1} u(x)$ sempre positivo.

- Definiamo:

$$v_n(x) := \frac{a(x)}{n}(\zeta(x)\gamma_1(x, \{nx \cdot v\}) + \eta(x)\gamma_2(x, \{nx \cdot v\})),$$

dove $\gamma_i : D^2 \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ soddisfano una relazione differenziale.



Citazione conclusiva

"Nash, like Columbus, unwillingly discovered a new land. [...] It may be hard to decide what this land is but it is easy to say what it is not:
what Nash discovered is not any part of Riemannian geometry, neither has it much (if anything at all) to do with classical PDE"

— Michail Leonidovič Gromov[3]

[3] M. Gromov; Geometric, algebraic, and analytic descendants of Nash isometric embedding theorems, *Bull. Amer. Math. Soc.(N.S.)* **54** (2017), no. 2, 173–245.

GRAZIE PER L'ATTENZIONE