Практическое задание к Уроку 5. Предел функции. Часть 2

1. Найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}[\ln(x+3)-\ln x] = [\infty-\infty] = \lim\limits_{x\to\infty}\left[\ln\frac{x+3}{x}\right] = \lim\limits_{x\to\infty}\left[\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)\right] = \ln\left(\lim\limits_{x\to\infty}1+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x}\right) =$

$= \ln\left(1+3\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\right) = \ln(1+3\cdot 0) = \ln(1) = 0$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{\arcsin 3x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{\arcsin 3x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}[\ln(1+2x)]}{\frac{d}{dx}[\arcsin 3x]}$

a)

$u = 1+2x$

$$\frac{d}{dx}[\ln(\mathrm{u})]\ \frac{d}{dx}[1+2x] = \frac{1}{u}\frac{d}{dx}[1+2x] = \frac{1}{1+2x}\frac{d}{dx}[1+2x] = \frac{1}{1+2x}\left(\frac{d}{dx}[1]+\frac{d}{dx}[2x]\right)$$

$$= \frac{1}{1+2x}\left(0+2\frac{d}{dx}[x]\right) = \frac{2}{1+2x}$$

b)

$a = 3x$

$$\frac{d}{dx}[\arcsin 3x] = \frac{d}{dx}[\arcsin(a)]\frac{d}{dx}[3x] = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{d}{dx}[3x] = \frac{3}{\sqrt{1-(3x)^2}}\frac{d}{dx}[x] = \frac{3}{\sqrt{1-9x^2}}$$

c)

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{2}{1+2x}}{\frac{3}{\sqrt{1-9x^2}}} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sqrt{1-9x^2}}{3(1+2x)} = \frac{2}{3}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-9x^2}}{(1+2x)} = \frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{\lim\limits_{x\to 0}1-\lim\limits_{x\to 0}9x^2}}{\left(\lim\limits_{x\to 0}1+\lim\limits_{x\to 0}2x\right)} = \frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{1-9\left(\lim\limits_{x\to 0}x\right)^2}}{\left(1+2\lim\limits_{x\to 0}x\right)} = \frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{1-9\cdot 0^2}}{(1+2\cdot 0)} = \frac{2}{3}$ – первый вариант решения

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{\arcsin 3x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\frac{2x+o(2x)}{\arcsin 3x} = \lim\limits_{x\to 0}(2x+o(x))\sqrt{1-(3x)^2} = \lim\limits_{x\to 0}(2x+o(x))(1+3x) =$
$\lim\limits_{x\to 0}(2x+o(x))(3x+o(x)) = \lim\limits_{x\to 0}(6x^2+4\cdot o(x^2)+6\cdot o(x^3)) = \lim\limits_{x\to 0}(6+4+6\cdot o(x)) = 10$ – второй вариант решения

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{7^x-1}{3^x-1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}[7^x-1]}{\frac{d}{dx}[3^x-1]}$

a)

$$\frac{d}{dx}[7^x-1] = \frac{d}{dx}[7^x]+\frac{d}{dx}[-1] = 7^x\ln(7)$$

b)

$$\frac{d}{dx}[3^x-1] = \frac{d}{dx}[3^x]+\frac{d}{dx}[-1] = 3^x\ln(3)$$

c)

$$\lim_{x\to 0}\frac{7^x\ln(7)}{3^x\ln(3)}=\frac{\ln(7)}{\ln(3)}\cdot\frac{\lim\limits_{x\to 0}7^x}{\lim\limits_{x\to 0}3^x}=\frac{\ln(7)}{\ln(3)}\cdot\frac{7\lim\limits_{x\to 0}^x}{3\lim\limits_{x\to 0}^x}=\frac{\ln(7)}{\ln(3)}\cdot\frac{7^0}{3^0}=\frac{\ln(7)}{\ln(3)}=1.77124374\ldots$$

4) $\lim\limits_{a\to 0}\frac{(x+a)^3-x^3}{a}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{a\to 0}\frac{\frac{d}{dx}[(x+a)^3-x^3]}{\frac{d}{dx}[a]}$

a)

$$\frac{d}{dx}[(x+a)^3-x^3]=\frac{d}{dx}[(x+a)^3]+\frac{d}{dx}[-x^3]=\frac{d}{dx}[(x+a)^3]$$

$u=x+a$

$$\frac{d}{dx}[u^3]\frac{d}{dx}[x+a]=3u^2\frac{d}{dx}[x+a]=3(x+a)^2\frac{d}{dx}[x+a]=3(x+a)^2\left(\frac{d}{dx}[x]+\frac{d}{dx}[a]\right)=$$

$$3(x+a)^2(0+1)=3(x+a)^2$$

b)

$\frac{d}{dx}[a]=1$

c)

$\lim\limits_{a\to 0}\frac{3(x+a)^2}{1}=\lim\limits_{a\to 0}3(x+a)^2=3\left(\lim\limits_{a\to 0}x+\lim\limits_{a\to 0}a\right)^2=3\,(x+0)^2=3\,x^2$ – первый вариант решения

$\lim\limits_{a\to 0}\frac{(x+a)^3-x^3}{a}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{a\to 0}\frac{x^3+3x^2a+3xa^2+a^3-x^3}{a}=\lim\limits_{a\to 0}\frac{a(3x^2+3xa+a^2)}{a}=\lim\limits_{a\to 0}3x^2+3xa+a^2=$

$\lim\limits_{a\to 0}3x(x+a)+a^2=\lim\limits_{a\to 0}x+a+\frac{a^2}{3x}=x$ – второй вариант решения

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{5x^2+1}-\frac{x^2}{5x-3}\right)=\left[\frac{-\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{d}{dx}[x^3(5x-3)-x^2(5x^2+1)]}{\frac{d}{dx}[(5x-3)(5x^2+1)]}$

a)

$$\frac{d}{dx}[x^3(5x-3)-x^2(5x^2+1)]=\frac{d}{dx}[x^3(5x-3)]+\frac{d}{dx}[-x^2(5x^2+1)]$$

$$\frac{d}{dx}[x^3(5x-3)]=x^3\frac{d}{dx}(5x-3)+(5x-3)\frac{d}{dx}[x^3]=x^3\left(\frac{d}{dx}[5x]+\frac{d}{dx}[-3]\right)+(5x-3)\frac{d}{dx}[x^3]$$

$$=x^3(5\cdot 1+0)+(5x-3)3x^2=5x^3+3(5x-3)x^2$$

$$\frac{d}{dx}[-x^2(5x^2+1)]=-\left(x^2\left(\frac{d}{dx}[5x^2]+\frac{d}{dx}[1]\right)+(5x^2+1)\frac{d}{dx}[x^2]\right)=-(x^2(10x+0)+2(5x^2+1)x)$$

$$=-(10x^3+2(5x^2+1)x)$$

$$5x^3+3(5x-3)x^2-(10x^3+2(5x^2+1)x)=20x^3-9x^2-20x^3-2x=-9x^2-2x$$

b)

$$\frac{d}{dx}[(5x-3)(5x^2+1)] = (5x-3)\left(\frac{d}{dx}[5x^2]+\frac{d}{dx}[1]\right)+(5x^2+1)\left(\frac{d}{dx}[5x]+\frac{d}{dx}[-3]\right)$$
$$= (5x-3)(10x+0)+(5x^2+1)(5+0) = 50x^2+30x+25x^2+5 = 75x^2+30x+5$$

c)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-9x^2-2x}{75x^2+30x+5} = \lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{9x^2}{x^2}-\frac{2x}{x^2}}{\frac{75x^2}{x^2}+\frac{30x}{x^2}+\frac{5}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{-9-\frac{2}{x}}{75+\frac{30}{x}+\frac{5}{x^2}} = \frac{-\lim_{x\to\infty}9-\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}}{\lim_{x\to\infty}75+\lim_{x\to\infty}\frac{30}{x}+\lim_{x\to\infty}\frac{5}{x^2}} = -\frac{9}{75} = -\frac{3}{25}$$ – первый вариант решения

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{5x^2+1}-\frac{x^2}{5x-3}\right) = \left[\frac{-\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3(5x-3)-x^2(5x^2+1)}{(5x^2+1)(5x-3)} = \lim_{x\to\infty}\frac{-3x^3-x^2}{25x^3+5x-15x^2-3}$$

$$x\longrightarrow\infty \Longrightarrow \frac{1}{x}\longrightarrow 0$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-3x^3-x^2}{25x^3+5x-15x^2-3} = \lim_{x\to0}\frac{-\frac{3}{x^3}-\frac{1}{x^2}}{\frac{25}{x^3}+\frac{5}{x}-\frac{15}{x^2}-3} = \lim_{x\to0}\frac{\frac{-3x^2-x^3}{x^5}}{\frac{25x^3+5x^5-15x^4-3x^6}{x^6}} = \lim_{x\to0}\frac{-3x^8-x^9}{25x^8+5x^{10}-15x^9-3x^{11}} =$$

$$\lim_{x\to0}\frac{x^8(-3-x)}{x^8(25+5x^2-15x-3x^3)} = \lim_{x\to0}\frac{-3-x}{25+5x^2-15x-3x^3} = \lim_{x\to0}\frac{-3-x}{25+5x^2-15x-3x^3} = -\frac{3}{25}$$ – второй вариант решения

6) $$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 4x}{2x\cdot tg2x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to0}\frac{1-\left(1-\frac{(4x)^2}{2}+o((4x)^2)\right)}{2x\cdot(2x+o(2x))} = \lim_{x\to0}\frac{8x^2-o((x)^2)}{4x^2+2x\cdot o(x)} = \lim_{x\to0}\frac{\frac{8x^2}{4x^2}-\frac{o((x)^2)}{4x^2}}{\frac{4x^2}{4x^2}+\frac{2x\cdot o(x)}{4x^2}} = \lim_{x\to0}\frac{2-\frac{o((x)^2)}{4x^2}}{1+\frac{o(x)}{2x}} = 2$$

7) $$\lim_{x\to\infty}x\cdot\sin\left(\frac{2}{x}\right) = 2\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$x\longrightarrow\infty \Longrightarrow \frac{1}{x}\longrightarrow 0$$

$$2\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = 2\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin(x)}{x} = 2$$

8) $$\lim_{x\to0}(1+tg\,x)^{ctg\,x} = \lim_{x\to0}\left(1+\frac{1}{cos^2x}\right)^{-\frac{1}{sin^2x}} = \lim_{x\to0}\left(1+\frac{1}{sin^2x}\right)^{-\frac{1}{sin^2x}}$$

$$sin^2x = (x+o(x))(x+o(x)) = \left(x^2+2\cdot x\cdot o(x)+o(x)\right) = x^2$$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to0}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to0}\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)^{-x^{-2}} = \lim_{x\to0}\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)^{x^{-2}} = 0$$

9) $$\lim_{x\to0}(\cos 2x)^{\frac{1}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to0}\left(1-\frac{(2x)^2}{2}+o((2x)^2)\right)^{(x+o(x))^{-2}} = 1$$

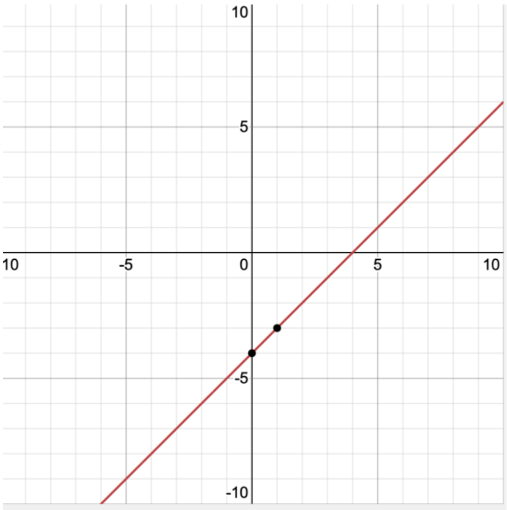
10) $$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x(x+o(x))}-1}{x^2} = \lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x^2+x\cdot o(x)}-1}{x^2} = \lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x^2+o(x^2)}-1}{x^2} = 0$$

2. Установить характер разрыва функции в точке x_0:

а) $f(x) = \frac{x^2-16}{x+4}, x_0 = -4$

$$\lim_{x\to 0} = \frac{x^2-16}{x+4} = \frac{x^2-(4)^2}{x+4} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{(x+4)(x-4)}{x+4} = x - 4 = 0$$

Графиком $f(x) = \frac{x^2-16}{x+4}$ является:



Горизонтальные и вертикальные асимптоты отсутствуют.

Наклонная асимптота: $y = x - 4$.

При $x_0 = -4$ данная функция $f(x)$ не определена.

$x_0 = -4$ является точкой устранимого разрыва $f(x)$.

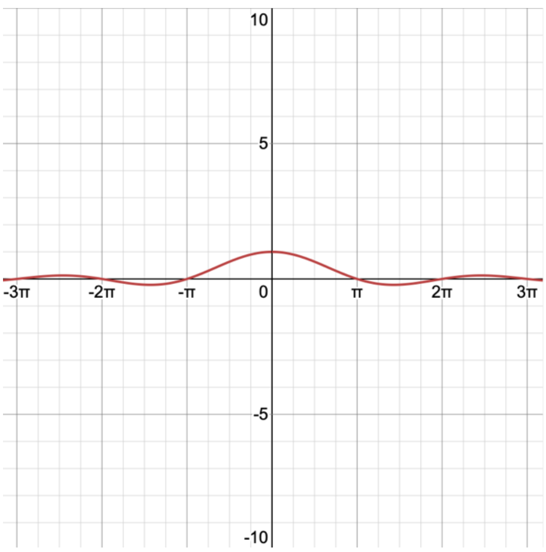
б) $f(x) = \frac{\sin x}{x}, x_0 = 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Из свойств функций, непрерывных в точке, и непрерывности элементарных функций следует, что также непрерывны в каждой точке своих областей определения все функции, полученные из простейших с помощью конечного числа арифметических операций и операций композиций.

Таким образом, данная функция $f(x)$ является непрерывной в точке x_0.

Графиком $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ является:



Данная функция не имеет асимптот. $x_0 = 0$ является точкой устранимого разрыва $f(x)$.

3. Исследовать на непрерывность функцию $f(x)$ в точке x_0:

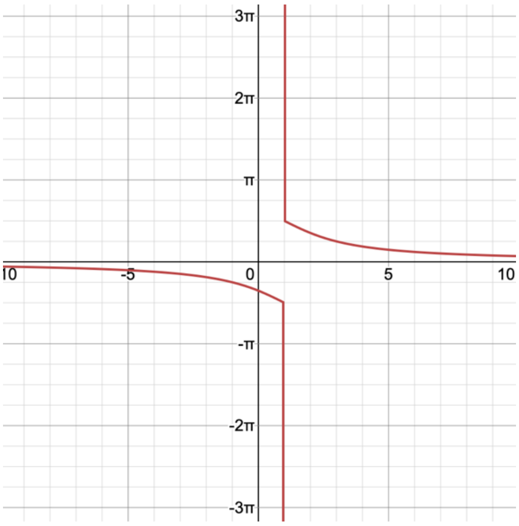
1) $f(x) = arctg\frac{2}{x-1}, x_0 = 1$

$$arctg\frac{2}{x-1} = arccos\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{2}{x-1}\right)^2}}, \text{при } x > 0$$

Функция $y = arctg\frac{2}{x-1}$ непрерывна на всей числовой прямой, поскольку получена из простейших с помощью конечного числа арифметических операций и операций композиций.

При $x_0 = 1$ функция $y = arctg\frac{2}{1-1} = arctg\left(\frac{2}{0}\right)$ не определена.

Графиком $f(x) = arctg\frac{2}{x-1}$ является:



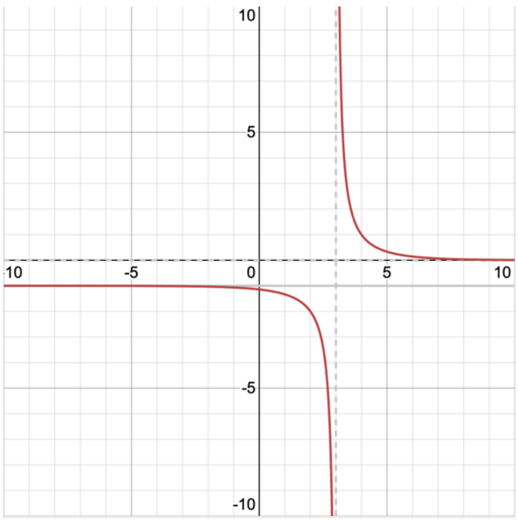
Данная функция непрерывна слева при $x < 1$. И непрерывна справа при $x > 1$.

Горизонтальные асимптоты: $y = -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$.

В точке $x_0 = 1$ разрыв 2-го рода.

2) $f(x) = \frac{1}{2^{x-3}-1}, x_0 = 3$

Графиком $f(x) = \frac{1}{2^{x-3}-1}$ является:



В точке $x_0 = 3$ (вертикальная асимптота) функция $y = \frac{1}{2^{3-3}-1} = \left(\frac{1}{0}\right)$ не определена.
Данная функция элементарная и непрерывна слева при $x < 3$ и справа при $x > 3$.

Поскольку числитель стремится к вещественному числу, а знаменатель бесконечен, дробь $\frac{1}{2^{x-3}-1}$ стремится к 0.

Горизонтальные асимптоты: $y = 0, -1$.

Наклонных асимптот нет, поскольку степень числителя меньше либо равна степени знаменателя.

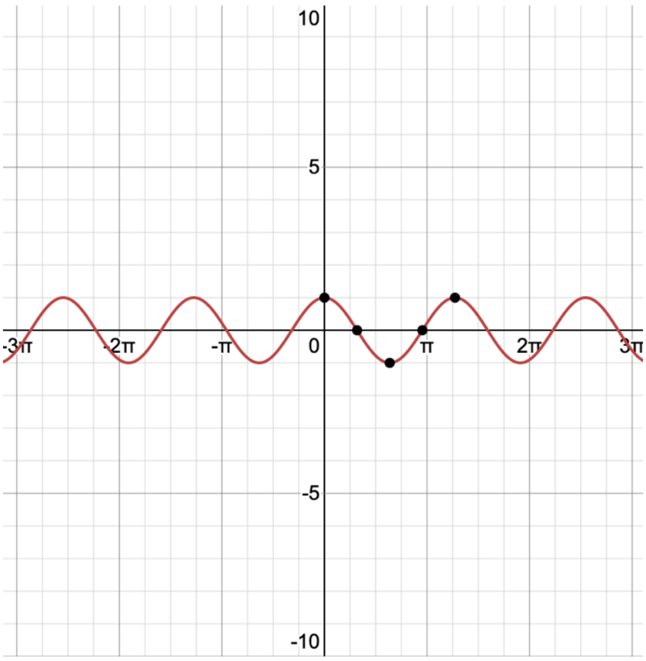
В точке $x_0 = 3$ разрыв 2-го рода.

4. (*) Исследуйте функцию на непрерывность, укажите тип точек разрыва и постройте график функции:

$$f(x) = \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right), & \text{при } |x| \leq 1, \\ |x-1| & \text{при } |x| \geq 1 \end{cases}$$

1) Все простейшие элементарные функции непрерывны в каждой точке своих областей определения. Поэтому, функция $f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ является непрерывной в каждой точке своей области определения.

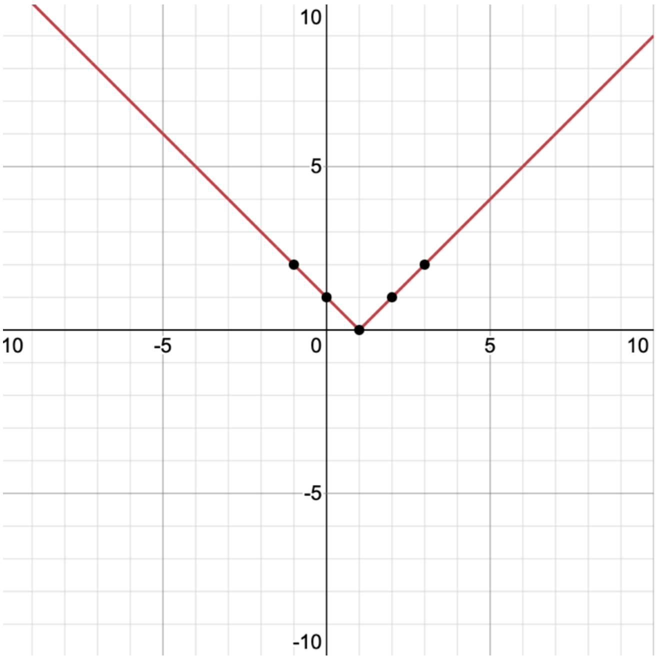
Графиком $f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ является:



Однако, при условии $|x| \leq 1$ указанная функция является непрерывной на промежутке $0 \leq x \leq 1$.

2) Функция $f(x) = |x-1|$, при $|x| \geq 1$, непрерывна справа и определена на полуинтервале $x \geq 1$.

Графиком $f(x) = |x-1|$ является:



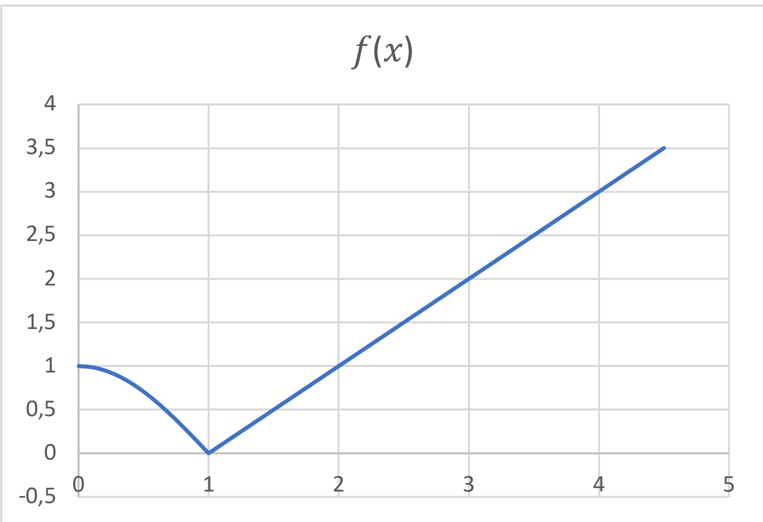
3) Таким образом, функция

$$f(x) = \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right), & \text{при } |x| \leq 1, \\ |x-1| & \text{при } |x| \geq 1 \end{cases}$$

Непрерывна справа и определена на полуинтервале $x \geq 0$.

4) Поскольку $f(x_1) = \cos\left(\frac{\pi \cdot 1}{2}\right) = 0$ и $f(x_2) = |1-1| = 0$, типом точек разрыва является устранимый разрыв.

5) Графиком заданной функции является:



5. (*) Вычислить:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin \sin tg\, \frac{x^2}{2}}{\ln \cos 3x}$$

Функция непрерывна и не определена при $x = 0$.

$$tg\, \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2} + o\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\cos 3x = 1 - \frac{9x^2}{2} + o(9x^2) = 1 - \frac{9x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin \sin tg\,\frac{x^2}{2}}{\ln \cos 3x} = \frac{\sin \sin\left(\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)}{\ln\left(1 - \frac{9x^2}{2} + o(x^2)\right)}$$

$$\sin\left(\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = \frac{x^2}{2} + o(x^2) + o\left(\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

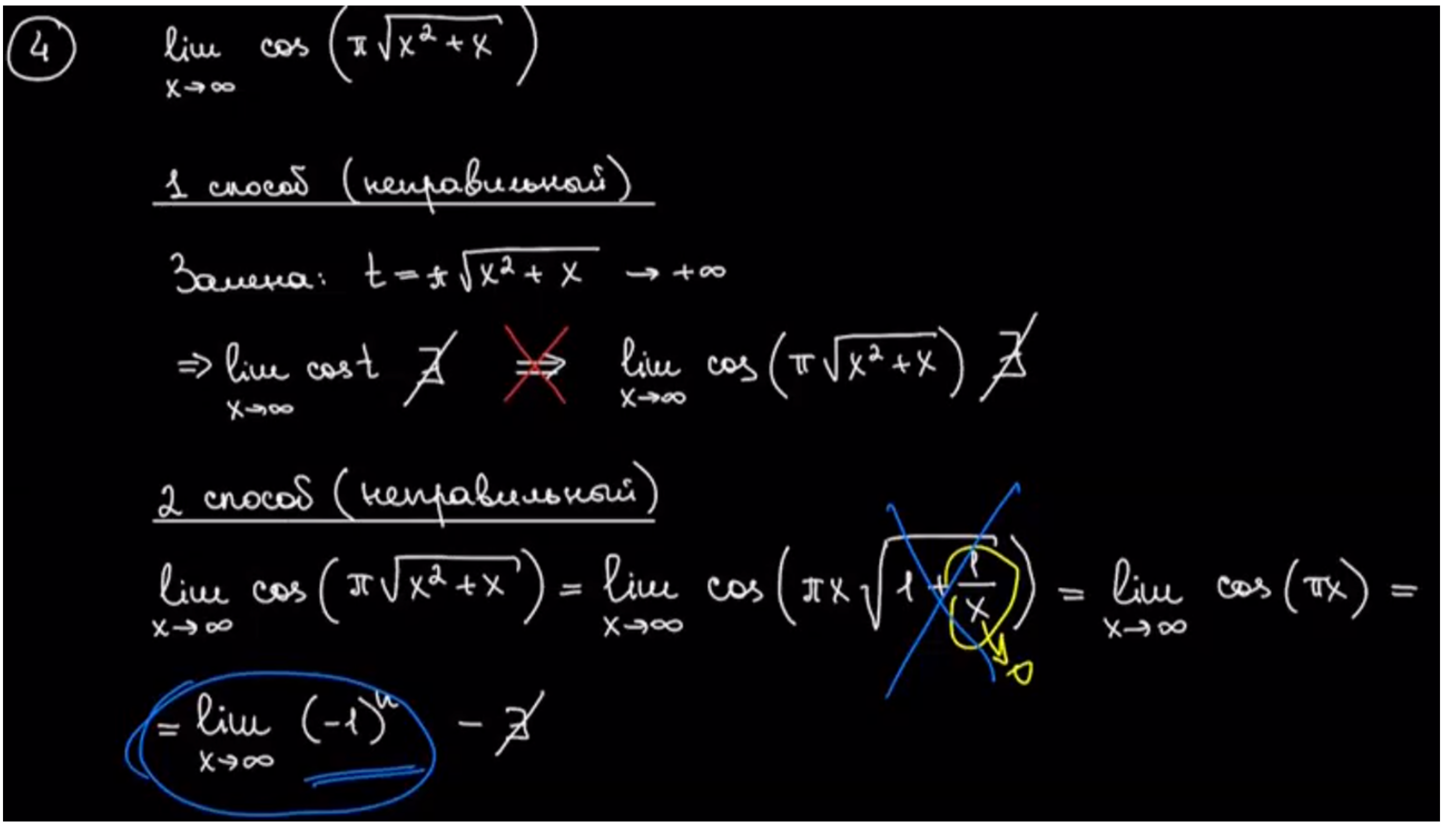
$$\ln\left(1 - \frac{9x^2}{2} + o(x^2)\right) = -\frac{9x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\frac{\sin\left(\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)}{\ln\left(1 - \frac{9x^2}{2} + o(x^2)\right)} = \frac{\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{-\frac{9x^2}{2} + o(x^2)}$$

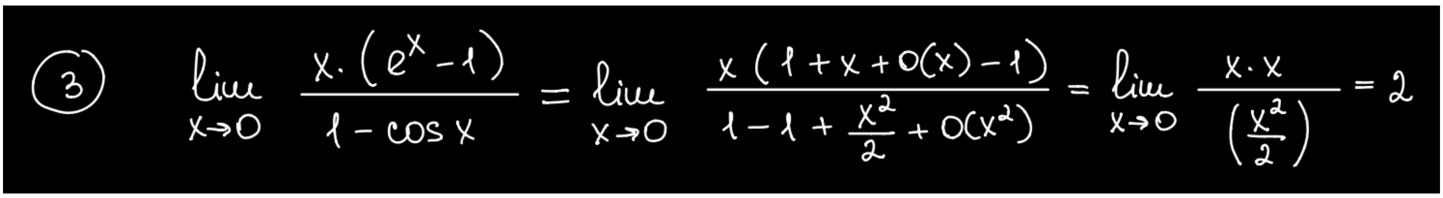
$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{-\frac{9x^2}{2} + o(x^2)} = -\frac{2}{9x^2}\cdot\frac{x^2}{2} = -\frac{1}{9}$$

Вопросы по уроку 5. Предел функции. Часть 2:

1) Как получился $\lim\limits_{x\to\infty}(-1)^n$?



2) Как получился «+» перед $o(x^2)$в знаменателе после применения таблицы эквивалентности?



$e^x = 1 + x + o(x)$ при $x \to 0$,

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ при $x \to 0$,

3) Какое здесь применено правило (как получилось -1 в степени n)?

$$= \lim_{x\to\infty} \cos\left(\pi x + \frac{\pi}{2} + o(1)\right) = \lim_{x\to\infty} \left(\underbrace{\cos\left(\pi x + \frac{\pi}{2}\right)}_{=0} \underbrace{\cos o(1)}_{\to 1} - \underbrace{\sin\left(\pi x + \frac{\pi}{2}\right)}_{(-1)^n} \underbrace{\sin o(1)}_{\to 0} \right) = 0$$

Наименьшее значение функции $\sin x = -1$ в точках:

$$x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k, \ k \in \mathbf{Z}.$$

Большая человеческая просьба-вопрос – можно ли для демонстрации в видео уроках делать полное разложение всех операций и элементов с указанием использованных формул и их названий? Поскольку на курс набирают людей с разным уровнем знаний математики и разного возраста (если раньше знал, сейчас не помнит ничего из школьной и институтской программы, например). Огромное количество времени уходит на понимание примененных в примерах сокращений и их обоснование (по формулам и правилам). Просто человеку, готовящему материал по решению примеров объективно проще и быстрее это сделать, чем студенту все забывшему из пройденных ни одно десятилетие назад программ (школа, институт).

Возможно ли отдельным файлом перед началом лекции выкладывать к ней на сайте gb.ru подробные решения примеров, как вариант? Чтобы не загромождать эфир и человеку, его слушающему, было понятно без лишних вопросов. Поскольку лишние вопросы могут раздражать других слушателей, с более глубокими знаниями в этой области.