Практическое задание к Уроку 3. Множество. Последовательность. Часть 2

1. Пусть $x_n = \mathrm{n}^{(-1)^n}$. Доказать, что последовательность $\{x_n\}$:

   а) неограниченная

$$x_n = \left\{\infty; \dots;\ -\frac{1}{7}; -6;\ -\frac{1}{5}; -4; -\frac{1}{3};\ -2;\ -1;\ 1;\ 1; 2; \frac{1}{3}; 4; \frac{1}{5}; 6; \frac{1}{7}; \dots;\ \infty\right\}$$

$$x_1 < x_2;\ x_2 > x_3 \dots$$

   Последовательность не является ни монотонной, ни строго монотонной.

   б) не является бесконечно большой

   Ни один из элементов последовательности $\{x_n\}$ не равен 0. Условие для бесконечно малой последовательности $(\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0)$ не выполнено.

   Каждый нечетное значение n в результате дает элемент в виде $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$.

   Каждое четное значение n в результате дает целое число (Z).

   Таким образом, последовательность $\{x_n\}$ не является ни бесконечно малой, ни бесконечно большой.

2. Доказать, что последовательность $\{sin\ n\}$ расходится.

   Обязательным условием сходимости является $\lim\limits_{\mathrm{n}\to\infty}(x_n) = \lim\limits_{\mathrm{n}\to\infty}(\sin n) = 0.$

   Однако, предела последовательности $\{sin\ n\}$ не существует, поскольку $sin\ n$ все время меняет свое значение $[-1; 1]$.

   Это значит, что функция ограничена, но не монотонная и, соответственно, расходится.

   По Коши модуль должен стремиться к 0 при $\mathrm{n} \to \infty$. Это невозможно, поскольку равен произведению немонотонных функций sin и cos.

3. Найти пределы:

   а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{10n}{n^2+1} = \frac{\frac{10n}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}+\frac{1}{n^2}} = \frac{\frac{10}{n}}{1+\frac{1}{n^2}} = 0$ – бесконечно малая последовательность

   б) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2-n}{n-\sqrt{n}} = \frac{\frac{n^2}{n^2}-\frac{n}{n^2}}{\frac{n}{n^2}-\frac{\sqrt{n}}{n^2}} = \frac{1-\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}-\frac{\sqrt{n}}{n^2}} = 1$ – ограниченная последовательность

   в) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5*3^n}{3^n-2} = \frac{\frac{5*3^n}{3^n}}{\frac{3^n-2}{3^n}} = \frac{5}{1-\frac{2}{3^n}} = 5$ – ограниченная последовательность

4. Найти предел

$$\lim_{\mathrm{n}\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right) = \frac{(\sqrt{n^2+n}-n)(\sqrt{n^2+n}+n)}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{(\sqrt{n^2+n})^2-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{n^2+n^2-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{n^2}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{\frac{n^2}{n^2}}{\frac{\sqrt{n^2+n}}{n^2}+\frac{n}{n^2}} =$$

$$\frac{1}{\frac{\sqrt{n^2+n}}{n^2}+\frac{1}{\mathrm{n}}} = \infty$$ – бесконечно большая последовательность

5. Вычислить

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\cos n}{n+1}=\frac{\frac{\sqrt{n}\cos n}{\sqrt{n}}}{\frac{n+1}{\sqrt{n}}}=\frac{\cos n}{\frac{n+1}{\sqrt{n}}}=\frac{\frac{\cos n}{\cos n}}{\frac{\cos n(n+1)}{\sqrt{n}}}=\frac{1}{\frac{\cos n(n+1)}{\sqrt{n}}}=\infty$ – бесконечно большая последовательность