МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

Кафедра компьютерных технологий и систем

КСР

Аленникова Бориса Сергеевича
студента 3 курса,
специальность «Информатика»

Руководитель практики:
К.А. Чигвинцев

Минск, 2023

ПРИНЦИП СЖИМАЮЩИХ ОТОБРАЖЕНИЙ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Пусть в банаховом пространстве E действует отображение f.

Определение 1. Точка $x^* \in E$ называется *неподвижной точкой отображения* f, если

$$f(x^*) = x^*. \tag{1}$$

Таким образом, неподвижные точки f – это решения уравнения

$$x = f(x), \tag{2}$$

а поскольку к такому виду довольно часто удается преобразовать уравнение $F(x) = 0$, где F действует из банахова пространства X в банахово пространство Y, то важность определения неподвижных точек не вызывает сомнения.

Отображение f может и не иметь неподвижной точки. Например, отображение $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + a$, где $a \neq 0$.

Среди отображений $f : E \to F$ выделим класс отображений специального вида.

Определение 2. Будем говорить, что отображение f является *сжимающим (сжатием)*, если существует константа $0 < \alpha < 1$ такая, что

$$||f(x) - f(y)||_E \leqslant \alpha\|x - y\|_E, \quad \forall\, x, y \in E. \tag{3}$$

Число α в (3) называют *коэффициентом сжатия*.

Теорема 1 (принцип сжимающих отображений). *Пусть отображение f отображает замкнутое в банаховом пространстве E множество M в себя и является на M сжимающим с коэффициентом сжатия α. Тогда на множестве M отображение f имеет единственную неподвижную точку x^*, которая может быть найдена методом последовательных приближений*

$$x_n = f(x_{n-1}), n = 1, 2, \ldots, \tag{4}$$

где $(x_n) \subset M$ и $x_n \to x^*$ при $n \to \infty$. Кроме того, справедлива оценка скорости сходимости

$$\|x_n - x^*\| \leqslant \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\|x_0 - x_1\|. \tag{5}$$

Доказательство. Поскольку $f(M) \subset M$, то $(x_n) \subset M$. Покажем, что последовательность x_n фундаментальна. Предварительно оценим для любого $k \in \mathbb{N}$ норму между соседними итерациями:

$$\|x_k - x_{k+1}\| = \|f(x_{k-1}) - f(x_k)\| \leqslant \alpha\|x_{k-1} - x_k\| \leqslant \ldots \leqslant \alpha^k\|x_0 - x_1\|.$$

Пусть $m > n$, пользуясь неравенством треугольника и формулой суммы геометрической прогрессии, получим

$$\begin{aligned} \|x_m - x_n\| &\leqslant \|x_n - x_{n+1}\| + \|x_{n+1} - x_{n+2}\| + \ldots + \|x_{m-1} - x_m\| \\ &\leqslant (\alpha^n + \ldots + \alpha^{m-1}) \cdot \|x_0 - x_1\| = \frac{\alpha^n - \alpha^m}{1 - \alpha}. \end{aligned} \tag{6}$$

Учитывая, что $0 < \alpha < 1$, получаем, что последовательность (x_m) – фундаментальна. Вследствие полноты E, последовательность в E сходится к некоторому элементу $x^* \in E$. Так как M замкнуто, то $x^* \in M$.

Докажем теперь, что x^* является неподвижной точкой отображения f. Из условия сжатия вытекает непрерывность и равномерная непрерывность отображения f. Перейдем в равенстве (4) к пределу при $n \to \infty$, получим $x^* = f(x^*)$.

Докажем, что x^* – единственная неподвижная точка на M. Пусть y^* – еще одна неподвижная точка на M, тогда $y^* = f(y^*)$. Оценим норму

$$0 \leqslant \|x^* - y^*\| = \|f(x^*) - f(y^*)\| \leqslant \alpha\|x^* - y^*\|.$$

Это неравенство возможно лишь при $\|x^* - y^*\| = 0$, откуда $x^* = y^*$.

Докажем оценку скорости сходимости. Для этого в неравенстве (6) перейдем к пределу при $m \to \infty$, получим

$$\|x_n - x^*\| \leqslant \frac{\alpha^n}{1 - \alpha}\|x_0 - x_1\|.$$

$\otimes$

Условие сжатия нельзя, вообще говоря, заменить на более слабое, например: $\|f(x) - f(y)\| \leqslant \|x - y\|$ для всех $x, y \in M$.

ПРИМЕНЕНИЕ ПРИНЦИПА СЖИМАЮЩИХ ОТОБРАЖЕНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ

Одним из подходов для приближенного решения уравнений можно отнести метод последовательных приближений (последовательных итераций). Остановимся на его рассмотрении.

Пусть задано уравнение

$$x = f(x), \tag{7}$$

где $f : [a, b] \to [a, b]$. Сформулируем для него принцип сжимающих отображений.

Теорема 1. *Пусть f удовлетворяет условию Липшица с константой $L < 1$. Тогда уравнение (7) имеет единственное решение $x^* \in [a, b]$, которое может быть найдено методом последовательных приближений*

$$x_n = f(x_{n-1}),\ n = 1, 2, \ldots . \tag{8}$$

Теорема 1 вытекает из основной теоремы 1. Здесь в качестве множества A выступает отрезок $[a, b]$.

Рассмотрим применение теоремы 1 к решению уравнения, заданного в общем виде

$$g(x) = 0. \tag{9}$$

Предположим, что функция $g(x) \in C^{(1)}[a, b]$, т. е. является непрерывно дифференцируемой. Пусть выполнены на $[a, b]$ следующие ограничения

$$0 < k_1 \leqslant g'(x) \leqslant k_2 \text{ или } 0 < -k_1 \leqslant g'(x) \leqslant -k_2. \tag{10}$$

Перепишем (9) в виде

$$x = x - \lambda g(x) \text{ или } x = f(x), \tag{11}$$

где $f(x) = x - \lambda g(x)$. С помощью (10) выберем параметр λ таким образом, чтобы отображение f переводило отрезок $[a, b]$ в себя и при этом было сжимающим.

Предположим, что выполнено первое соотношение в (10). Тогда

$$1 - \lambda k_2 \leqslant f'(x) = 1 - \lambda g'(x) \leqslant 1 - \lambda k_2.$$

В качестве параметра λ можно взять точку минимума функции

$$h(\lambda) = \max\{|1 - \lambda k_1|, |1 - \lambda k_2|\},$$

т. е.

$$\lambda^* = \frac{2}{k_1 + k_2}.$$

В этом случае

$$|f'(x)| \leqslant \frac{k_2 - k_1}{k_2 + k_1} < 1. \qquad (12)$$

Так как уравнение (7) имеет решение, то $a < f(a), b > f(b)$, а это означает, что $f : [a, b] \to [a, b]$. Следовательно, к уравнению (11) применим принцип сжимающих отображений. Для вычисления коэффициента сжатия можно воспользоваться оценкой на производную.

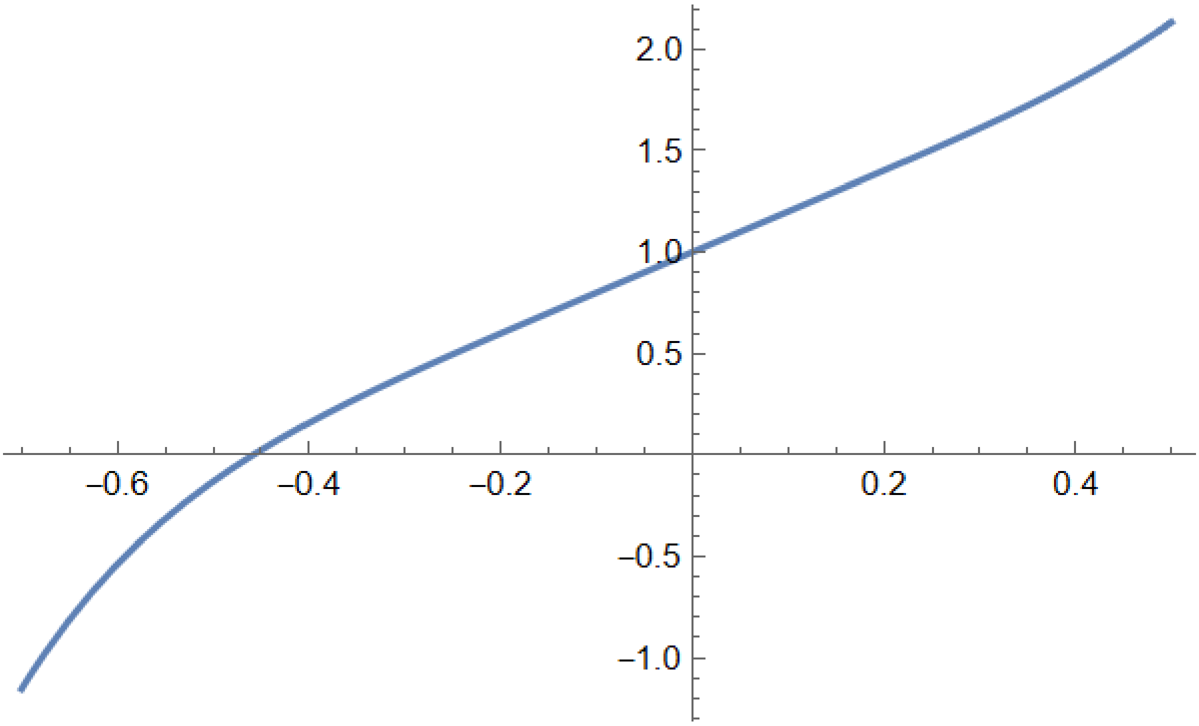
Задание 1.1 (Файл 1_1.py)

Нам задано уравнение $1.\ x^7+4x^5+2x+1=0;$

Приводя его к виду, для которого справедлив принцип сжимающих отображений, найти корни уравнения с точностью ε = 10−4 . Составить алгоритм и написать программный код, реализующий метод последовательных приближений, предусматривающий:

- построение графика $g(x)$;
- вычисление априорной оценки количества итераций;
- вывод на печать последней итерации и ее номера.

Построим график функции в Wolfram Mathematica на промежутке [-0.7 ; 0.5] :



Функция $g(x) \in C$ [-0.7, 0.5], то есть она непрерывно дифференцируема на рассматриваемом отрезке. Следовательно, возьмем производную:

$$g'(x) = 7x^6 + 20x^4 + 2$$

Оценим производную в точках -0.7 и 0.5, получим, g(-0.7)=7.63 ; g(0.5) = 3.35.

Значит мы получили значения k1 = 3.35 , k2 = 7.63 .

Получим, что $\lambda \cong 0.18215$ и $\propto \cong 0.3898$.

Также получаем формулу:

$$x_n = x_{n-1} - 0.18215(x^7 + 4x^5 + 2x + 1)$$

После программы получим:

```
apriori number of iterations: 9
aposteriori number of iterations: 11
solution: -0.4576030035163132
```

?! Ссылки на код

https://github.com/AlenniBoris/BSU-FifthTerm/tree/main/FA/KSR/pythonPr

ПРИМЕНЕНИЕ ПРИНЦИПА СЖИМАЮЩИХ ОТОБРАЖЕНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ СЛАУ

Метод сжимающих отображений широко применяется при решении СЛАУ (систем линейных алгебраических уравнений). Наиболее эффективен данный метод при решении систем большой размерности с сильно разреженной матрицей. Проблема решения таких систем возникает при решении прикладных задач, например, поиска безусловного экстремума функций многих переменных с помощью необходимых условий, при применении неявных методов интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений.

Пусть дана система линейных алгебраических уравнений вида

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mm}x_m = b_m, \end{array} \tag{15}$$

которую можно записать в матричном виде

$$AX = B. \tag{16}$$

Предположим, что определитель матрицы A $det A \neq 0$, тогда существует единственное решение системы (15). Для применения принципа сжимающих отображений перепишем уравнение (16) в виде

$$X = CX + D. \tag{17}$$

Обозначим через $F(X) = CX + D$, тогда отображение $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ задается системой линейных уравнений

$$y_i = \sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_j + d_i \ (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{18}$$

Если отображение F – сжатие, то мы можем применить метод последовательных приближений к решению уравнения $X = F(X)$.

При каких условиях отображение F будет сжатием? Ответ на этот вопрос зависит от выбора нормы в $\mathbb{R}^m$.

Рассмотрим в $\mathbb{R}^m$ кубическую норму $\|x\|_k = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant m} |x_i|$. Тогда

$$\|y^{(1)} - y^{(2)}\|_k = \max_{1\leqslant i\leqslant m} |y_i^{(1)} - y_i^{(2)}| = \max_{1\leqslant i\leqslant m} \left| \sum_{j=1}^{m} c_{ij}(x_j^{(1)} - x_j^{(2)}) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant m} \sum_{j=1}^{m} |c_{ij}| \cdot |x_j^{(1)} - x_j^{(2)}| \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant m} \sum_{j=1}^{m} |c_{ij}| \cdot \max_{1\leqslant j\leqslant m} |x_j^{(1)} - x_j^{(2)}| =$$

$$= \left(\max_{1\leqslant i\leqslant m} \sum_{j=1}^{m} |c_{ij}|\right) \cdot \|x^{(1)} - x^{(2)}\|_k = \alpha \|x^{(1)} - x^{(2)}\|_k.$$

Отсюда вытекает, что условие сжимаемости имеет вид

$$\alpha = \max_{1\leqslant i\leqslant m} \sum_{j=1}^{m} |c_{ij}| < 1. \tag{19}$$

Рассмотрим в $\mathbb{R}^m$ октаэдрическую норму $\|x\|_0 = \sum\limits_{i=1}^{m} |x_i|$, тогда

$$\|y^{(1)} - y^{(2)}\|_0 = \sum_{i=1}^{m} |y_i^{(1)} - y_i^{(2)}| = \sum_{i=1}^{m} \left| \sum_{j=1}^{m} c_{ij}(x_j^{(1)} - x_j^{(2)}) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} |c_{ij}| \cdot |x_j^{(1)} - x_j^{(2)}| \leqslant \max_{1\leqslant j\leqslant m} \sum_{i=1}^{m} |c_{ij}| \cdot \sum_{j=1}^{m} |x_j^{(1)} - x_j^{(2)}| =$$

$$= \left(\max_{1\leqslant j\leqslant m} \sum_{i=1}^{m} |c_{ij}|\right) \cdot \|x^{(1)} - x^{(2)}\|_0 = \alpha \|x^{(1)} - x^{(2)}\|_0.$$

Условие сжатия имеет вид

$$\alpha = \max_{1\leqslant j\leqslant m} \sum_{i=1}^{m} |c_{ij}| < 1. \tag{20}$$

Таким образом, если выполнено хотя бы одно из условий (19), (20), то выполнены условия теоремы 1 и ее можно сформулировать в эквивалентной формулировке

Теорема 1. *Если матрица C системы (17) такова, что $0 \leqslant \alpha < 1$, где величина α определяется формулой (19) или (20), то система уравнений (17) имеет единственное решение. Это решение может быть найдена методом последовательных приближений*

$$x_i^{(n+1)} = \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_j^{(n)} + d_i, \tag{21}$$

а в качестве $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)})$ *можно взять любую точку из* $\mathbb{R}^m$. *Скорость сходимости итерационного процесса оценивается неравенством* (5).

Отметим, что условие (19) или (20) не являются необходимыми для применения метода последовательных приближений, а лишь достаточными.

Важно заметить, что если матрица $C = (c_{ij})_{i,j=1}^m$ симметрична, то по сферической норме условие сжатия имеет вид

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| < 1, \tag{22}$$

и, фактически означает, что $\|C\| < 1$. Из курса линейной алгебры известно, что $\|C\|$ совпадает с $|\lambda_1|$, где λ_1 – наибольшее по абсолютной величине собственное значение матрицы C. Тогда условие (22) не только достаточно, но и необходимо для сходимости метода последовательных приближений. Действительно, выбирая в (17) собственный вектор, отвечающий λ_1, и полагая $x_i^{(0)} = 0$, получим $x_i^{(1)} = d_i$, $x_i^{(n+1)} = (1 + \lambda_1 + \ldots + \lambda_1^n)b_i$, откуда следует, что при $n \to \infty$ последовательность $(x_i^{(n)})$ не имеет предела, если $|\lambda_1| \geqslant 1$ $(b_i \neq 0)$.

Таким образом, когда матрица C симметрична, процесс последовательных приближений для решения системы линейных уравнений сходится к решению тогда и только тогда, когда все собственные значения матрицы C меньше единицы по абсолютной величине.

Обратимся к вопросу преобразования системы (16) к виду (17).

Самый простой способ следующий. Из первого уравнения (15) выразим x_1, из второго x_2 и т. д. Тогда на главной диагонали матрицы C стоят нули, а ненулевые элементы выражаются по формулам

$$c_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_{ii}},\ d_i = \frac{b_i}{a_{ii}},\ i, j = \overline{1, m},\ i \neq j. \tag{23}$$

Обратимся ко второму способу. Пусть $A^\top$ – транспонированная к A матрица, E – единичная матрица, $\lambda(A^\top A)$ – максимальное собственное значение матрицы $A^\top A$. Тогда исходное уравнение (16) можно записать так:

$$X = \left(E - \frac{A^\top A}{\lambda(A^\top A)}\right) X + \frac{A^\top B}{\lambda(A^\top A)}, \tag{24}$$

тогда
$$C = E - \frac{A^\top A}{\lambda(A^\top A)},\; D = \frac{A^\top B}{\lambda(A^\top A)}, \tag{25}$$

Если матрица C получена таким образом, то все ее собственные числа положительны и меньше единицы.

Рассмотрим теперь бесконечную систему линейных алгебраических уравнений с бесконечным числом неизвестных

$$y_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}x_j + b_i \;(i = 1,2,\ldots). \tag{26}$$

Решением такой системы назовем бесконечную последовательность $(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots)$, которая обращает (26) тождество. Заметим, что в этом случае автоматически требуется сходимость рядов, входящих в (26). Ограничимся случаем, когда последовательность $(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots)$ ограничена, т. е. $x \in m$, $\sup\limits_i |x_i| < \infty$. Как и в первом случае приведем систему к виду

$$x_i = \sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_j + b_i \;(i = 1,2,\ldots), \tag{27}$$

где $c_{ij} = -a_{ij} + \delta_{ij}$, $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$

Определение 1. Система (27) называется *вполне регулярной*, если $\exists q:\; 0 < q < 1$ такое, что

$$\sum_{i,j=1}^{m} c_{ij} \leqslant q \;\; \forall i. \tag{28}$$

Определим отображение $F : m \to m$ и потребуем, чтобы вектор правой части $b = (b_1, b_2, \ldots, b_i, \ldots) \in m$.

Теорема 2. *Вполне регулярная система* (27) *имеет единственное решение* $x \in m$ *при любом* $b = (b_1, b_2, \ldots, b_i, \ldots) \in m$. *Если* $\|b\|_m \leqslant B$, *то*
$$|x_i| \leqslant \frac{B}{1-q}, \quad i = 1, 2, \ldots .$$

Задание 2.1 (Файл 2_1.py)

Нам дана система уравнений:

$$1.1.\quad \begin{cases} 3{,}2x_1 - 11{,}5x_2 + 3{,}8x_3 = 2{,}8, \\ 0{,}8x_1 + 1{,}3x_2 - 6{,}4x_3 = -6{,}5, \\ 2{,}4x_1 + 7{,}2x_2 - 1{,}2x_3 = 4{,}5. \end{cases}$$

Приведем эту систему в вид AX=B, где

A =

$$\begin{pmatrix} 3.2 & -11.5 & 3.8 \\ 0.8 & 1.3 & -6.4 \\ 2.4 & 7.2 & -1.2 \end{pmatrix}$$

B = $\begin{matrix} 2.8 \\ -6.5 \\ 4.5 \end{matrix}$

Матрица A является невырожденной, а это значит, что у системы есть единственное решение. Перепишем уравнение в виде $X = \underbrace{CX + D}_{F(X)}$.,

$$C = E - \frac{A^\top A}{\lambda(A^\top A)},\ D = \frac{A^\top B}{\lambda(A^\top A)}$$

где .

Просчитав все, получим:

```
C =
[ 0.92137127  0.08732326 -0.01965718]
[0.08732326 0.12213664 0.28663576]
[-0.01965718  0.28663576  0.73141483]
D =
[0.06880014]
[-0.0389836]
[0.22133233]
```

Вычислим можули собственных чисел матрицы С:

```
1.1102230246251565e-16 0.9320612209218762 0.8428615114106655
```

Все по модулю меньше единицы, а значит процесс приблизительных приближений для решения сходится.

Для поиска приближенного решения воспользуемся формулой :

$$X_n = F(X_{n-1}) = CX_{n-1} + D.$$

Для начального приближения возьмем $X_0 = (0,0,0)'$.

Условия остановки процесса и вычисления априорного числа будут схожи, но только вместо векторов x будут матрицы X. Коэффициент сжатия будет оценивать таким образом: $\alpha = \|C\|_2$.

Результат работы программы:

```
compression coefficient: 0.9320612209218749
apriori number of iterations:149
 aposteriori number of iterations: 134
solution:
[[1.08601208]
 [0.47078736]
 [1.24700911]]
```

ПРИМЕНЕНИЕ ПРИНЦИПА СЖИМАЮЩИХ ОТОБРАЖЕНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Интегральными уравнениями называют уравнения относительно неизвестной функции, входящей в уравнение под знаком интеграла.

Ограничимся рассмотрением уравнений вида

$$a(t)x(t) - \int_a^b \mathcal{K}\big(t,s;x(s)\big)\mathrm{d}s = y(t),\ t \in [a,b], \tag{29}$$

здесь $a(t)$, $y(t)$ – заданные функции; $\mathcal{K}\big(t,s;x(s)\big)$ – заданная функция, называемая *ядром интегрального уравнения;* $x(t)$ – неизвестная функция. Решение $x(t)$ разыскивается в различных пространствах функций в зависимости от свойств функции $\mathcal{K}(t,s;z)$ и y. Пространства выбираются так, чтобы интеграл в (29) существовал. Уравнение (29) называется уравнением Фредгольма. Если $a(t) \equiv 0$, то уравнение (29) называется уравнением Фредгольма первого рода, соответственно, при $a(t) \equiv 1$ – второго рода и уравнением третьего рода при $a(t) \neq 0$. Исследование уравнений второго и третьего рода не отличаются, поэтому мы ограничимся рассмотрением случая $a(t) = 1$.

Интегральное уравнение (29) называется *линейным*, если функция $\mathcal{K}(t,s,z)$ линейна по z. Если $y(t) = 0$, то уравнение (29) называется *однородным*, в противном случае *неоднородным*.

Решением уравнения (29) называется функция $x(t)$, при подстановке которой в уравнение выполняется равенство для всех $t \in [a,b]$ или почти всех. Линейное однородное уравнение всегда имеет решение $x(t) \equiv 0$.

Выделим класс уравнений с переменным верхним пределом вида

$$a(t)x(t) - \int_a^t \mathcal{K}\big(t,s;x(s)\big)\mathrm{d}s = y(t), \tag{30}$$

называемые *интегральными уравнениями Вольтерра*.

Уравнение Вольтерра является частным случаем уравнения Фредгольма, если переопределить ядро $\mathcal{K}\big(t,s;x(s)\big)$.

Идея применения принципа сжимающих отображений к интегральным уравнениям (29) либо (30) заключается в следующем.

Пусть имеется интегральное уравнение

$$x(t) = \int\limits_T \mathcal{K}\big(t, s; x(s)\big)\,\mathrm{d}s + y(t), \tag{31}$$

где $T = [a,b]$ либо $T = [a,t]$. Соответствие $x \to \int\limits_T \mathcal{K}\big(t, s; x(s)\big)\mathrm{d}s + y(t)$ определяет отображение множества функций, заданных на T, на себя. Тогда уравнение (31) записывается в виде $x = F(x)$, а это означает, что искомое решение является неподвижной точкой отображения F. Для того, чтобы применить принцип сжимающих отображений, нужно:

- выбрать банахово пространство функций;
- проверить, что (31) определяет сжимающее отображение.

Покажем, каким образом такая схема реализуется в пространстве $C[a,b]$ непрерывных функций на отрезке $[a,b]$ для линейного неоднородного уравнения Фредгольма

$$x(t) - \lambda \int\limits_a^b \mathcal{K}(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s = y(t). \tag{32}$$

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{K}(t,s)$ – непрерывная функция на множестве $[a,b] \times [a,b] = \Omega$ и $M = \max\limits_{(t,s)\in\Omega} |\mathcal{K}(t,s)|$, тогда для любого λ такого, что $|\lambda| < \dfrac{1}{M(b-a)}$ интегральное уравнение Фредгольма второго рода имеет единственное решение для любой правой части $y(t) \in C[a,b]$.*

Доказательство. Зафиксируем пространство $C[a,b]$. Формула

$$F(x)(t) = \lambda \int\limits_a^b \mathcal{K}(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s + y(t)$$

задает отображение банахова пространство $C[a,b]$ на $C[a,b]$. Проверим, что отображение F сжимающее. Оценим норму

$$\|F(x_1) - F(x_2)\|_{C[a,b]} = \max_{a\leqslant t\leqslant b} |\lambda| \Big| \int\limits_a^b \mathcal{K}(t,s)(x_1(s) - x_2(s))\,\mathrm{d}s \Big| \leqslant$$

$$\leqslant |\lambda| \max_{a\leqslant t\leqslant b} \int\limits_a^b |\mathcal{K}(t,s)||x_1(s)-x_2(s)|\,\mathrm{d}s \leqslant |\lambda| \max_{t,s} |\mathcal{K}(t,s)|(b-a)\times$$

$$\times \max_{a\leqslant s\leqslant b} |x_1(s)-x_2(s)| = |\lambda| M(b-a)\|x_1-x_2\| = \alpha\|x_1-x_2\|_{C[a,b]}.$$

Тогда $\alpha = |\lambda| M(b-a) < 1$, так как $|\lambda| < \dfrac{1}{M(b-a)}$. Следовательно, отображение F – сжимающее. Значит, по принципу сжимающих отображений уравнение (32) имеет единственное решение, которое может быть найдено методом последовательных приближений. Процесс последовательных приближений строится по формуле

$$x_n(t) = \lambda \int\limits_a^b \mathcal{K}(t,s)x_{n-1}(s)\,\mathrm{d}s + y(t). \tag{33}$$

$\otimes$

На практике при численной реализации метода последовательных приближений необходимо приближенно вычислять интегралы по методу квадратур, что вносит дополнительную погрешность и довольно большую при большом числе итераций. С этой целью интегрирование нужно выполнять с большей точностью, чем погрешность метода последовательных приближений.

Так, для приближенного вычисления интеграла от гладкой функции хорошо подходит метод Симпсона или метод парабол.

$$\int\limits_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \approx \frac{b-a}{m}\Big[f_0+f_m+2(f_2+f_4+\ldots+f_{m-2})+4(f_1+f_3+\ldots+f_{m-1})\Big],$$

где $f_m = f(t_m)$, $t_m = t_0 + \frac{b-a}{m}$.

Обозначим через t_i, $i = 0{,}1,\ldots,m$ узлы сетки, расположенной на отрезке a, b. Тогда соотношение (33) перепишется в виде

$$x_n(t_i) = \lambda \int\limits_a^b \mathcal{K}(t_i,s)x_{n-1}(s_i)\,\mathrm{d}s + y(t_i).$$

Если воспользоваться квадратурной формулой трапеций на равномерной сетке с шагом $h = \dfrac{b-a}{m}$, то расчетные формулы метода последовательных приближений примут вид

$$x_n(t_i) = \lambda \frac{h}{2} \Big[k_{i,0} x_{n-1,0} + 2 \big(k_{i,1} x_{n-1,1} + \ldots k_{i,m-1} x_{n-1,m-1} \big) + k_{i,m} x_{n-1,m} \Big] +$$

$$+ y(t_i), i = 0, 1, \ldots, m.$$

Здесь $k_{i,j} = \mathcal{K}(t_i, s_j)$, $x_{n,j} = x_n(s_j)$.

Отметим, что при решении линейных интегральных уравнений сходимость метода последовательных приближений не зависит от вида правой части и начального приближения, которые влияют на скорость сходимости итерационного процесса.

Перейдем к рассмотрению нелинейного уравнения

$$x(t) - \lambda \int\limits_a^b \mathcal{K}(t, s; x(s))\, \mathrm{d}s = y(t). \tag{34}$$

Выясним, можно ли применить метод последовательных приближений к построению решения уравнения (34)

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{K}(t, s; z)$ – непрерывная функция переменных t, s, z, удовлетворяющая условию Липшица по переменной z с константой $L > 0$. Если выполнено условие $L(b-a)|\lambda| < 1$, то интегральное уравнение (34) имеет единственное непрерывное решение для любой правой части $y(t) \in C[a, b]$.*

Доказательство. Рассмотрим отображение

$$F(x)(t) = \lambda \int\limits_a^b \mathcal{K}(t, s; x(s))\, \mathrm{d}s + y(t)$$

и покажем, что $F \colon C[a, b] \to C[a, b]$. Поскольку $y(t) \in C[a, b]$, то достаточно показать, что $z(t) = \int\limits_a^b \mathcal{K}(t, s, x(s)) \mathrm{d}s$ непрерывна. Действительно, при фиксированной непрерывной функции x подынтегральная функция $\mathcal{K}(t, s, x(s))$ есть непрерывная функция переменных t и s и по теореме об непрерывности интеграла, зависящего от параметра, непрерывна.

Покажем, что отображение F сжимающее. Используя условие Липшица, имеем

$$|F(x_1) - F(x_2)| \leqslant |\lambda| \int\limits_a^b |\mathcal{K}(t,s;x_1(s)) - \mathcal{K}(t,s;x_2(s))|\,\mathrm{d}s \leqslant$$

$$\leqslant |\lambda| L \int\limits_a^b |x_1(s) - x_2(s)|\,\mathrm{d}s \leqslant |\lambda| L(b-a)\|x_1 - x_2\| = \alpha\|x_1 - x_2\|_{C[a,b]},$$

где $\alpha = |\lambda| L(b-a) < 1$. $\otimes$

Таким образом, разрешимость уравнений Фредгольма зависит от условий на ядро. Покажем, что для уравнения Вольтерра условие разрешимости проще.

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение Вольтерра

$$x(t) - \lambda \int\limits_a^t \mathcal{K}(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s = y(t). \tag{35}$$

Выясним, когда можно применить метод последовательных приближений для его решения.

Теорема 3. *Пусть $\mathcal{K}(t,s)$ – непрерывная функция по переменным t и s. Тогда для любой $y(t) \in C[a,b]$ и любого λ из поля P интегральное уравнение Вольтерра второго рода имеет единственное решение.*

Доказательство. Зафиксируем пространство $C[a,b]$ и рассмотрим отображение

$$F(x) = \lambda \int\limits_a^t \mathcal{K}(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s + y(t).$$

Покажем, что некоторая степень отображения F является сжатием. Для этого рассмотрим ряд последовательных оценок.

$$|F(x_1) - F(x_2)| \leqslant |\lambda| \int\limits_a^t |\mathcal{K}(t,s)||x_1(s) - x_2(s)|\,\mathrm{d}s \leqslant |\lambda| M(t-a)\|x_1 - x_2\|,$$

где $M = \max\limits_{t,s} |\mathcal{K}(t,s)|$.

$$|F^2(x_1) - F^2(x_2)| \leqslant |\lambda|^2 \int\limits_a^t \int\limits_a^s |\mathcal{K}(t,s)||\mathcal{K}(s,\tau)||x_1(\tau) - x_2(\tau)|\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}s \leqslant$$

$$\leqslant |\lambda|^2 M^2 \frac{(t-a)^2}{2!}\|x_1 - x_2\| \leqslant |\lambda|^2 M^2 \frac{(b-a)^2}{2!}\|x_1 - x_2\|,$$

и т. д. Следовательно,

$$\|F^N(x_1) - F^N(x_2)\| \leqslant |\lambda|^N M^N \frac{(b-a)^N}{N!}\|x_1 - x_2\|.$$

Из последнего соотношения следует, что найдется такое натуральное N, что $|\lambda|^N M^N \dfrac{(b-a)^N}{N!} < 1$, тогда F^N является сжатием и, следовательно, F имеет единственную неподвижную точку. Это означает, что интегральное уравнение Вольтерра имеет единственное решение. $\otimes$

Существует класс интегральных уравнений, которые сводятся к линейным системам алгебраических уравнений. Это линейные интегральные уравнения с вырожденным ядром.

Ядро $\mathcal{K}(t,s)$ называется *вырожденным*, если оно имеет вид

$$\mathcal{K}(t,s) = \sum_{i=1}^{m} a_i(t) b_i(s), \tag{36}$$

где $a_i(t)$, $b_i(s)$ – равномерно непрерывные, линейно независимые функции, хотя независимость функций не существенна. Предположим, что уравнение (32) является уравнением с вырожденным ядром.

Пусть $x(t)$ — решение уравнения (32), тогда

$$x(t) = \lambda \int\limits_a^b \sum_{k=1}^{m} a_i(t) b_i(s) x(s)\,\mathrm{d}s + y(t),$$

или

$$x(t) = \lambda \sum_{k=1}^{m} a_i(t) \int\limits_a^b b_i(s) x(s)\,\mathrm{d}s + y(t).$$

Положим $c_i = \int\limits_a^b b_i(s)x(s)\,\mathrm{d}s$, тогда

$$x(t) = \lambda \sum_{i=1}^{m} a_i(t)c_i + y(t). \tag{37}$$

Таким образом, если решение уравнения (32) существует, то оно имеет вид (36). Подставим (36) в уравнение, введем обозначения

$$a_{ij} = \lambda \int\limits_a^b b_i(s)a_j(s)\,\mathrm{d}s, \quad y_i = \int\limits_a^b b_i(s)y(s\,\mathrm{d}s,$$

получим

$$c_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}c_j + y_i. \tag{38}$$

Итак, всякое решение интегрального уравнения (32) с ядром (35) однозначно определяется набором $(c_1, \ldots, c_m)$. Этот набор единственнен в силу линейной независимости $a_i(t)$. Таким образом, задача свелась к исследованию СЛАУ.

Задание 3.1 (Файл 3_1.py)

Нам дано уравнение Фредгольма:

$$1.1.\ a = 0,\ b = 1,\ x(t) - \lambda \int\limits_0^1 (1+t)s^2 x(s)\,\mathrm{d}s = t^2;$$

Вот условие задания:

Задание 1. Выяснить, при каких значениях параметра $\lambda \neq 0$ к интегральному уравнению Фредгольма второго рода применим принцип сжимающих отображений в пространстве $C[a,b]$ и в пространстве

33

$L_2[a,b]$. При $\lambda = \lambda_0$ найти приближенное решение уравнения с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$ и сравнить его с точным решением. Составить алгоритм и написать программный код, реализующий метод последовательных приближений, предусматривающий:

- приведение интегрального уравнения к специальному виду для применения метода последовательных приближений;
- вычисление коэффициента сжатия;
- вычисление априорной оценки количества итераций;
- выбор начального приближения;
- составление итерационного процесса в каждой фиксированной точке t_i, $i = 1, \ldots, n$ по правилу

$$x_n(t_i) = \lambda_0 \int\limits_a^b \mathcal{K}(t_i, s) x_{n-1}(s)\,\mathrm{d}s + y(t_i)$$

  с приближенным вычислением интеграла по формуле Симсона с шагом 0,05;
- вывода на печать номера последней итерации, апостериорной погрешности, графика точного и приближенного решения.

Наши пространства C[0,1] , $L_2[0,1]$.

Найдем точное решение нашего уравнения:

11) $x(t) - \lambda\int_0^1 (1+t)\, s^2 x(s)\, ds = t^2.$

$$x(t) = t^2 + \lambda(1+t)\int_0^1 s^2 x(s)\, ds.$$

$$C = \int_0^1 s^2 x(s)\, ds \;\Rightarrow\; x(t) = t^2 + \lambda(1+t)\cdot C.$$

$$C = \int_0^1 s^2\cdot(s^2 + \lambda(1+s)C)\, ds$$

$$C = \frac{1}{5} + \frac{7}{12} C\cdot\lambda$$

$$C = \frac{12}{60-35\lambda}, \quad \lambda \neq \frac{12}{7}$$

Точное решение: $x(t) = t^2 + \dfrac{\lambda(1+t)\cdot 12}{60-35\lambda}, \; \lambda \neq \dfrac{12}{7}$

Теперь приведем исходное уравнение к виду, пригодному для использования принципа сжимающих отображений и рассмотрим наше уравнения в обоих пространствах.

$$x = F(x) = t^2 + \lambda\int_0^1 (1+t)\, s^2 x(s)\, ds$$

Пространство C[0,1] :

Найдем оценку числа лямбда, альфа, априорное число итераций.

$$\|F(x)-F(y)\|_{C[0,1]} \le L \cdot \|x-y\|_{C[0,1]}$$

$$\max_{0\le t\le 1}\left|\lambda\int_0^1 s^2(1+t)x(s)ds-\lambda\int_0^1 s^2(1+t)y(s)ds\right| =$$

$$=\max_{0\le t\le 1}\left|\lambda(1+t)\int_0^1 (x(s)-y(s))s^2ds\right| \le$$

$$\le \max_{0\le t\le 1}\left(2\lambda\,|x(s)-y(s)|\int_0^1|s^2|ds\right) \le$$

$$\le \frac{2}{3}|\lambda|\max_{0\le t\le 1}|x(s)-y(s)| = \frac{2}{3}|\lambda|\,\|x-y\|_{C[0,1]}$$

$$L=\frac{2}{3}|\lambda|<1 \Rightarrow |\lambda|<\frac{3}{2}=1{,}5$$

$$N_{апр}=\left[\log_\alpha\frac{\varepsilon(1-\alpha)}{\|x_0-x_1\|}\right]+1$$

$\alpha=\frac{2}{3}|\lambda|$. Пусть $\lambda=0{,}5 \Rightarrow \alpha=0{,}3333$,

$x_0(t)=0 \Rightarrow x_1(t)=F(x_0)=t^2 \Rightarrow$

$\|x_0-x_1\|=1 \Rightarrow$

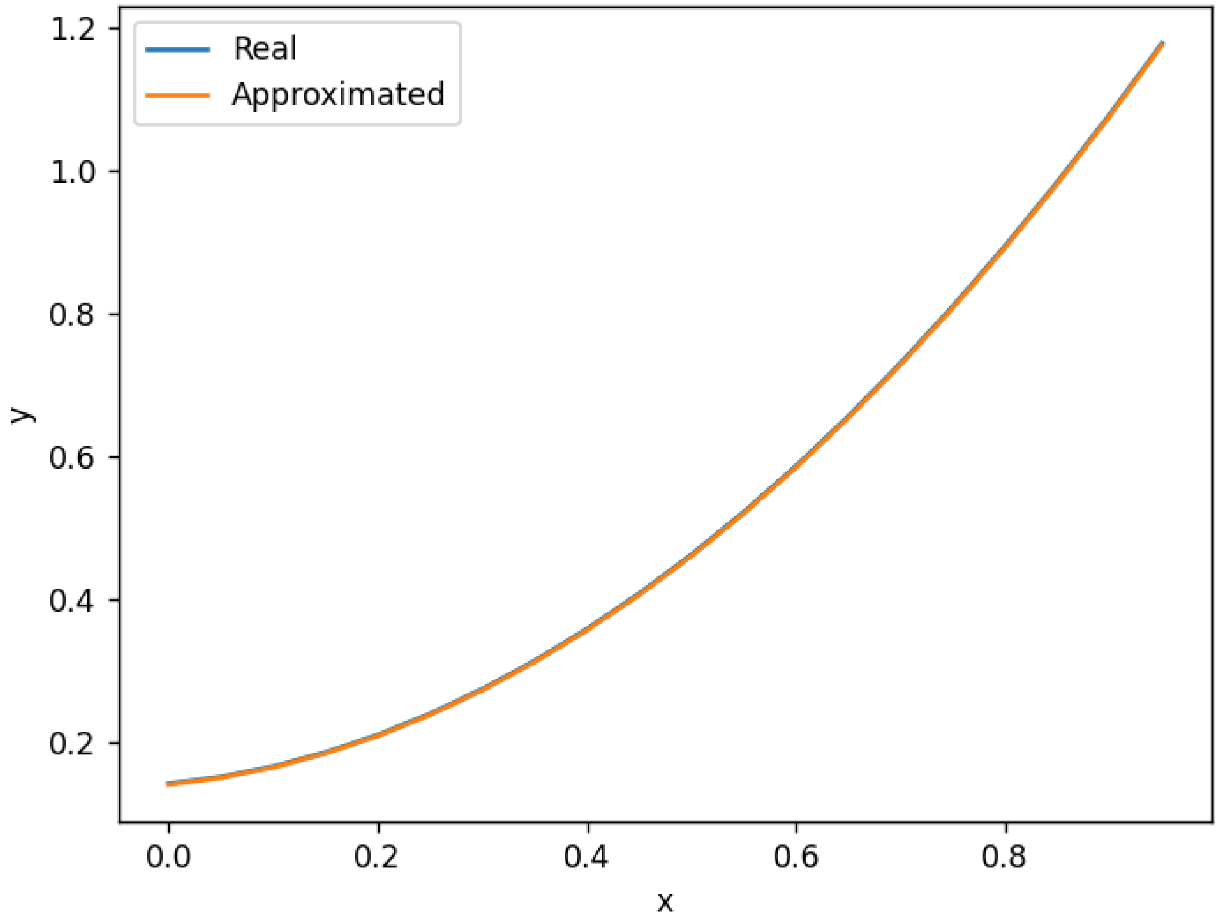
$N_{апр}\approx 7$

Составим итерац. процесс с приближ-ым вычисл-ем инт-ла по ф-ле Симпсона с шагом

$$\frac{b-a}{m}=0{,}05 \;\Big|\Rightarrow m=\frac{1-0}{0{,}05}=20.$$

Далее мы реализуем итерационный процесс, выходя из него, исходя из апостериорной оценкой точности.

Вот график, полученный после работы программы :



Пространство $L_2[0,1]$:

$$\|F(x) - F(y)\|_{L_2[0,1]} \leq L \cdot \|x - y\|_{L_2[0,1]}$$

$$\left(\int_0^1 \left| \lambda(1+t) \int_0^1 s^2 (x(s) - y(s))\, ds \right|^2 dt \right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \left(\int_0^1 \lambda^2 (1+t)^2 \cdot \left(\int_0^1 |s^2| \cdot |x - y|\, ds \right)^2 dt \right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \left(\int_0^1 \frac{1}{9} \lambda^2 (1+t)^2 \left(\int_0^1 |x - y|^2 ds \right) dt \right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \frac{1}{3} |\lambda| \cdot \frac{7}{3} \cdot \|x - y\|_{L_2[0,1]}$$

$$L_* = \frac{7}{9} |\lambda| < 1 \Rightarrow |\lambda| < \frac{9}{7}$$

пусть $\lambda = 0,5 \Rightarrow \alpha = \frac{7}{9} \lambda = 0,3888$.

$N_{апр} \approx 8$

Получаем, что априорное число итераций почти не отличается, реальное число итераций также, а это значит, что можно перенести результаты с первого пространства на это.

ПРИМЕНЕНИЕ ПРИНЦИПА СЖИМАЮЩИХ ОТОБРАЖЕНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Интегральными уравнениями называют уравнения относительно неизвестной функции, входящей в уравнение под знаком интеграла.

Ограничимся рассмотрением уравнений вида

$$a(t)x(t) - \int_a^b \mathcal{K}\big(t,s;x(s)\big)\mathrm{d}s = y(t),\ t \in [a,b], \tag{29}$$

здесь $a(t)$, $y(t)$ – заданные функции; $\mathcal{K}\big(t,s;x(s)\big)$ – заданная функция, называемая *ядром интегрального уравнения;* $x(t)$ – неизвестная функция. Решение $x(t)$ разыскивается в различных пространствах функций в зависимости от свойств функции $\mathcal{K}(t,s;z)$ и y. Пространства выбираются так, чтобы интеграл в (29) существовал. Уравнение (29) называется уравнением Фредгольма. Если $a(t) \equiv 0$, то уравнение (29) называется уравнением Фредгольма первого рода, соответственно, при $a(t) \equiv 1$ – второго рода и уравнением третьего рода при $a(t) \neq 0$. Исследование уравнений второго и третьего рода не отличаются, поэтому мы ограничимся рассмотрением случая $a(t) = 1$.

Интегральное уравнение (29) называется *линейным*, если функция $\mathcal{K}(t,s,z)$ линейна по z. Если $y(t) = 0$, то уравнение (29) называется *однородным*, в противном случае *неоднородным*.

Решением уравнения (29) называется функция $x(t)$, при подстановке которой в уравнение выполняется равенство для всех $t \in [a,b]$ или почти всех. Линейное однородное уравнение всегда имеет решение $x(t) \equiv 0$.

Выделим класс уравнений с переменным верхним пределом вида

$$a(t)x(t) - \int_a^t \mathcal{K}\big(t,s;x(s)\big)\mathrm{d}s = y(t), \tag{30}$$

называемые *интегральными уравнениями Вольтерра.*

Уравнение Вольтерра является частным случаем уравнения Фредгольма, если переопределить ядро $\mathcal{K}\big(t,s;x(s)\big)$.

Идея применения принципа сжимающих отображений к интегральным уравнениям (29) либо (30) заключается в следующем.

Пусть имеется интегральное уравнение

$$x(t) = \int\limits_T \mathcal{K}\big(t, s; x(s)\big)\,\mathrm{d}s + y(t), \tag{31}$$

где $T = [a,b]$ либо $T = [a,t]$. Соответствие $x \to \int\limits_T \mathcal{K}\big(t,s;x(s)\big)\mathrm{d}s + y(t)$ определяет отображение множества функций, заданных на T, на себя. Тогда уравнение (31) записывается в виде $x = F(x)$, а это означает, что искомое решение является неподвижной точкой отображения F. Для того, чтобы применить принцип сжимающих отображений, нужно:

- выбрать банахово пространство функций;
- проверить, что (31) определяет сжимающее отображение.

Покажем, каким образом такая схема реализуется в пространстве $C[a,b]$ непрерывных функций на отрезке $[a,b]$ для линейного неоднородного уравнения Фредгольма

$$x(t) - \lambda \int\limits_a^b \mathcal{K}(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s = y(t). \tag{32}$$

Теорема 1. *Пусть* $\mathcal{K}(t,s)$ *– непрерывная функция на множестве* $[a,b] \times [a,b] = \Omega$ *и* $M = \max\limits_{(t,s)\in\Omega} |\mathcal{K}(t,s)|$, *тогда для любого* λ *такого, что* $|\lambda| < \dfrac{1}{M(b-a)}$ *интегральное уравнение Фредгольма второго рода имеет единственное решение для любой правой части* $y(t) \in C[a,b]$.

Теорема 2. *Пусть* $\mathcal{K}(t,s;z)$ *– непрерывная функция переменных* t, s, z, *удовлетворяющая условию Липшица по переменной* z *с константой* $L > 0$. *Если выполнено условие* $L(b-a)|\lambda| < 1$, *то интегральное уравнение (34) имеет единственное непрерывное решение для любой правой части* $y(t) \in C[a,b]$.

Теорема 3. *Пусть* $\mathcal{K}(t,s)$ *– непрерывная функция по переменным* t *и* s. *Тогда для любой* $y(t) \in C[a,b]$ *и любого* λ *из поля* P *интегральное уравнение Вольтерра второго рода имеет единственное решение.*

интегральное уравнение Вольтерра имеет единственное решение. ◇

Существует класс интегральных уравнений, которые сводятся к линейным системам алгебраических уравнений. Это линейные интегральные уравнения с вырожденным ядром.

Ядро $K(t,s)$ называется вырожденным, если оно имеет вид

$$K(t,s)=\sum_{i=1}^{m} a_i(t)b_i(s), \qquad [36]$$

где $a_i(t)$, $b_i(s)$ – равномерно непрерывные, линейно независимые функции, хотя независимость функций не существенна. Предположим, что уравнение [32] является уравнением с вырожденным ядром.

Пусть $x(t)$ — решение уравнения [32], тогда

$$x(t)=\lambda\int_a^b \sum_{k=1}^{m} a_i(t)b_i(s)x(s)\,\mathrm{d}s+y(t),$$

или

$$x(t)=\lambda\sum_{k=1}^{m} a_i(t)\int_a^b b_i(s)x(s)\,\mathrm{d}s+y(t).$$

Положим $c_i=\int_a^b b_i(s)x(s)\,\mathrm{d}s$, тогда

$$x(t)=\lambda\sum_{i=1}^{m} a_i(t)c_i+y(t). \qquad [37]$$

Таким образом, если решение уравнения [32] существует, то оно имеет вид [36]. Подставим [36] в уравнение, введем обозначения

$$a_{ij}=\lambda\int_a^b b_i(s)a_j(s)\,\mathrm{d}s,\quad y_i=\int_a^b b_i(s)y(s\,\mathrm{d}s,$$

получим

$$c_i=\sum_{j=1}^{m} a_{ij}c_j+y_i. \qquad [38]$$

Итак, всякое решение интегрального уравнения [32] с ядром [35] однозначно определяется набором $(c_1,\dots,c_m)$. Этот набор единственен в силу линейной независимости $a_i(t)$. Таким образом, задача свелась к исследованию СЛАУ.

Задание 4.1

Дано уравнение Фредгольма. Нужно решить методом приближенных вычислений.

$A: C[-1;1] \to L_2[0;1]$

$$x(t) - \int_0^t (t-s)x(s)\,ds = t$$

$K(t,s) = t-s$ – непрерывна по t, s => решение единственно. Приведем ур-ие к виду $x = F(x)$

$$x(t) = t + \int_0^t (t-s)\,x(s)\,ds.$$

Нач-ое приближение: $x_0(t) = 0$.

$$x_n(t) = t + \int_0^t (t-s)\,x_{n-1}(s)\,ds.$$

$x_1(t) = t$

$x_2(t) = t + \frac{t^3}{6}$

$x_3(t) = t + \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{120}$

$x_4(t) = t + \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{120} + \frac{t^7}{5040}$

$$x_4(t) = t + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \frac{t^7}{7!}$$

$$x_5(t) = t + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \frac{t^7}{7!} + \frac{t^9}{9!}$$

. . . .

Получим, что:

$$x_n(t) = t + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \dots + \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$x_n(t) = \sum_{i=0}^{n} \frac{t^{2i+1}}{(2i+1)!}$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n(t) = \sinh(t)$$

Т.е. это есть решение исх-го уравнения согл-но методу приближ-х вычисл-й.