МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

Кафедра компьютерных технологий и систем

ЗАДАЧИ КОШИ И ГУРСА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ 2-ОГО ПОРЯДКА

Лабораторная работа №1

Аленникова Бориса Сергеевича
студента 3 курса,
специальность «Информатика»

Преподаватель:
Доцент кафедры компьютерных
технологий и систем ФПМИ,
кандидат физико-математических
наук
Козловская И.С

Минск, 2023

Решить следующую задачу Коши:

$$\begin{cases} u_{xy} + u_x + u_y + u = x^2 + y^2 \\ u(y, y) = 0 \\ u_x(y, y) = 2y^2 \end{cases}$$

В уравнении сделаем замену $v = u_y + u$. Тогда оно преобразуется к виду:

$$v_x + v = x^2 + y^2$$

Решив это уравнение, подставим полученное решение в выражение для замены, откуда будем иметь общее решение исходного уравнения. Реализовать это на Wolfram Mathematica можно следующим образом:

```
eq = Derivative[1, 1][u][x, y] + Derivative[1, 0][u][x, y] +
         Derivative[0, 1][u][x, y] + u[x, y] == x^2 + y^2;

ic = {u[y, y] == 0, Derivativep[1, 0][u][y, y] == 2*y^2};

vsol = DSolve[Derivative[1, 0][v][x, y] + v[x, y] == x^2 +
y^2,
     v, {x, y}]
```

$$\left\{\left\{v \to \text{Function}\left[\{x, y\}, 2 - 2x + x^2 + y^2 + e^{-x} c_1[y]\right]\right\}\right\}$$

Подставим полученную функцию v в уравнение относительно u:

```
usol = DSolve[Derivative[0, 1][u][x, y]
    + u[x, y] == v[x, y] /. vsol[[1]], u, {x, y}]
```

$$\left\{\left\{u \to \text{Function}\left[\{x, y\}, e^{-y} c_2[x] + e^{-y} \int_1^y e^{-x+K[1]} \left(2e^x - 2e^x x + e^x x^2 + e^x K[1]^2 + c_1[K[1]]\right) dK[1]\right]\right\}\right\}$$

Рассмотрим полученное решение. Его можно записать в следующем виде:

$$u(x,y) = e^{-y}C_2(x) + e^{-y}\int_1^y e^{-x+t}(2e^x - 2e^x x + e^x x^2 + e^x t^2 + C_1(t))dt$$

В подынтегральной функции фигурирует произвольная функция $C_1(t)$. Но при помощи надлежащих преобразований можно добиться того, что вместо этой функции под интегралом возникла некоторая другая вне интеграла:

$$u(x,y) = e^{-y}C_2(x)$$

$$+ e^{-y}[(2 - 2x + x^2)(e^y - e) + \int_1^y t^2 C_1(t)dt + e^{-x}\int_1^y e^t C_1(t)dt]$$

Здесь во втором интеграле стоит, вообще говоря, некоторая функция от t, первообразная которой может быть обозначена как новая произвольная функция. С учётом верхнего переменного предела, зависящего от y, окончательно имеем:

$$u(x,y) = e^{-y}C_2(x) + (2 - 2x + x^2)(1 - e^{1-y}) + e^{-x-y}C_1(y) + e^{-y}\int_1^y e^t t^2 dt$$

Тогда переопределим замену usol согласно всем этим выкладкам:

```
usol = u -> Function[{x,y},
    (E^(-y))*C[2][x]+(2-2*x+x^2)*(1-E^(-x-y))+(E^(-x-
    y))*C[1][y]
    +E^(-y)*Inactive[Integrate][(E^(K[1]))*((K[1])^2)
    ,{K[1],1,y}]];
```

Подставим эту функцию в условия исходной задачи. При этом используем также функцию Activate, раскрывающую так называемые неактивные интегралы:

```
newic = Activate[ic /. usol]
```

$$\{(1 - e^{-2y})(2 - 2y + y^2) + e^{-y}(-e + e^y(2 + (-2 + y)y)) + e^{-2y}C_1[y] + e^{-y}C_2[y] == 0,$$
$$(1 - e^{-2y})(-2 + 2y) + e^{-2y}(2 - 2y + y^2) - e^{-2y}C_1[y] + e^{-y}C_2'[y] == 2y^2\}$$

Таким образом, имеем следующую систему уравнений относительно

функций C_1 и C_2:

$$\begin{cases}(1-e^{-2y})(2-2y+y^2)+e^{-y}\big(-e+e^{y}(2+(y-2)y)\big)+e^{-2y}C_1(y)+e^{-y}C_2(y)=0\\ (1-e^{-2y})(-2+2y)+e^{-2y}(2-2y+y^2)-e^{-2y}C_1(y)+e^{-y}C_2'(y)=2y^2\end{cases}$$

Из этой системы можно заметить, что для упрощения уравнений можно прибавить к первому уравнению второе:

```
newic[[1, 1]] + newic[[2, 1]] == newic[[1, 2]]
     + newic[[2, 2]]
```

$$\left(1-e^{-2y}\right)(-2+2y)+e^{-2y}\left(2-2y+y^2\right)+\left(1-e^{-2y}\right)\left(2-2y+y^2\right)+ e^{-y}(-e+e^{y}(2+(-2+y)y))+e^{-y}c_2[y]+e^{-y}c_2{}'[y]==2y^2$$

Делаем такую замену независимой переменной, чтобы аргумент функции стал равен новой переменной:

```
% /. Solve[y == t, y]
```

$$\left\{\left(1-e^{-2t}\right)(-2+2t)+e^{-2t}\left(2-2t+t^2\right)+\left(1-e^{-2t}\right)\left(2-2t+t^2\right)+ e^{-t}\left(-e+e^{t}(2+(-2+t)t)\right)+e^{-t}c_2[t]+e^{-t}c_2{}'[t]==2t^2\right\}$$

Решаем полученное дифференциальное уравнение:

```
c2sol = DSolve[Derivative[1][C[2]][t]/E^t + C[2][t]/E^t +
     (t^2- 2*t + 2)/E^(2*t) + (1 - E^(-2*t))*(t^2 - 2*t + 2)
     + (1 - E^(-2*t))*(2*t - 2) + (E^t*((t - 2)*t + 2) -
     E)/E^t == 2*t^2,C[2],GeneratedParameters->A]
```

$$\left\{\left\{c_2\to \text{Function}\left[\{t\},\ e^{-t}\left(e^{1+t}+2e^{2t}\left(-\frac{3}{4}+\frac{t}{2}\right)-2t+t^2\right)+e^{-t}A[1]\right]\right\}\right\}$$

Подставим найденную функцию в первое уравнение системы newic:

```
newic[[1]] /. c2sol[[1]]
```

$$\left(1-e^{-2y}\right)\left(2-2y+y^2\right)+e^{-y}\left(-e+e^{y}\left(2+(-2+y)\,y\right)\right)+ e^{-y}\left(e^{-y}\left(e^{1+y}+2e^{2y}\left(-\frac{3}{4}+\frac{y}{2}\right)-2y+y^2\right)+e^{-y}A[1]\right)+e^{-2y}c_1[y]=0$$

Найдём отсюда функцию C[1]:

```
c1sol=RSolve[(1 - E^(-2*y))*(2 - 2*y + y^2) + (-E + E^y*(2 + (-2 + y)*y))/E^y +
         ((E^(1 + y) + 2*E^(2*y)*(-(3/4) + y/2) - 2*y + y^2)/E^y + A[1]/E^y)/E^y
         + C[1][y]/E^(2*y) == 0,C[1],y]
```

$$\left\{\left\{c_1\to \text{Function}\left[\{y\},\ \frac{1}{2}\left(4-5e^{2y}+6e^{2y}y-4e^{2y}y^2-2A[1]\right)\right]\right\}\right\}$$

Итак, нашли функции C[1] и C[2]. Подставим их в общее решение:

```
Activate[u[x, y] /. usol /. c1sol[[1]] /. c2sol[[1]]]
```

$$\left(1-e^{-x-y}\right)\left(2-2x+x^2\right)+e^{-y}\left(-e+e^{y}\left(2+(-2+y)\,y\right)\right)+ \frac{1}{2}e^{-x-y}\left(4-5e^{2y}+6e^{2y}y-4e^{2y}y^2-2A[1]\right)+ e^{-y}\left(e^{-x}\left(e^{1+x}+2e^{2x}\left(-\frac{3}{4}+\frac{x}{2}\right)-2x+x^2\right)+e^{-x}A[1]\right)$$

Куча всяких скобок, упростим это:

```
% // Simplify
```

```
4 + E^(x - y)*(-(3/2) + x) - 2*x + x^2 - 2*y + y^2 +
 E^(-x + y)*(-(5/2) + 3*y - 2*y^2)
```

Подставим эту функцию в исходную задачу:

```
{eq, ic} /. u -> Function[{x, y},
```

```
4 + E^(x - y)*(-(3/2) + x) - 2*x + x^2 - 2*y + y^2
+ E^(-x + y)*(-(5/2) + 3*y - 2*y^2)]
```

$$= \left\{x^2 + y^2 + e^{-x+y}\left(-\frac{5}{2} + 3\,y - 2\,y^2\right) + e^{-x+y}\left(\frac{5}{2} - 3\,y + 2\,y^2\right) == x^2 + y^2,\ \{\text{True},\ \text{True}\}\right\}$$

После упрощения убеждаемся, что найденная функция действительно является решением исходной задачи:

```
% // Simplify
```

{True, {True, True}}

Построим график этой функции:

```
Plot3D[4 + E^(x - y)*(-(3/2) + x)
	- 2*x + x^2 - 2*y + y^2
	+ E^(-x + y)*(-(5/2) + 3*y - 2*y^2)
	, {x, -2, 2}, {y, -2, 2}, PlotRange -> {-10, 50}]
```

Out[7]=