Лабораторная работа 1

Приближение функций

Задание 1.

1) Написать программу, которая для заданных в варианте функций строит интерполяционный многочлен Ньютона по равномерной сетке узлов.

2) С помощью написанной программы для каждой из функций построить интерполяционные многочлены степени

n = 2, 4, 8,16

. Вывести аналитическое

представление многочлена 2-й степени (в форме Ньютона).

3) Для каждой из функций построить 4 графика для сравнения интерполируемой функции и интерполяционного многочлена (см. пример ниже). Если построение графиков в вашем языке программирования слишком трудоемко, то можно воспользоваться сторонними программами. Например: в своей программе сделать таблицу значений аргумента и соответствующих значений функции, сохранить ее в файл, затем этот файл импортировать в программу для построения графиков (например, Excel).

Задание 2.

1) Написать программу, которая для заданных в варианте функций строит интерполяционный многочлен Ньютона по чебышевской сетке узлов.

2) С помощью написанной программы для каждой из функций построить интерполяционные многочлены степени

n = 2, 4, 8,16

. Вывести аналитическое

представление многочлена 2-й степени (в форме Ньютона).

3) Для каждой из функций построить 4 графика для сравнения интерполируемой функции и интерполяционного многочлена.

Задание 3.

1) Написать программу, которая для заданных в варианте функций строит интерполяционный кубический сплайн по равномерной сетке узлов. В качестве дополнительных условий использовать значения вторых производных на границах отрезка. Для решения СЛАУ использовать любой подходящий метод, реализованный в прошлом семестре, или реализовать подходящий метод заново.

2) С помощью написанной программы для каждой из функций построить интерполяционные кубические сплайны по n + 1 узлам:

n = 2, 4, 8,16.

3) Для каждой из функций построить 4 графика для сравнения интерполируемой функции и интерполяционного кубического сплайна.

Задание 1

Листинг программы:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt


# Заданные функции
def f1(x):
    return pow(x, 2) * np.cos(3 * x - 1)


def f2(x):
    return np.abs(x * np.abs(x) - 1)

# Вычисление разделённых разностей
def divided_diff(x, y):
    n = len(x)
    coef = np.zeros([n, n])
    coef[:, 0] = y

    for j in range(1, n):
        for i in range(n - j):
            coef[i][j] = (coef[i + 1][j - 1] - coef[i][j - 1]) / (x[i + j] -
x[i])

    return coef[0]


# Построение интерполяционного многочлена Ньютона
def newton(x, y):
    coef = divided_diff(x, y)
    n = len(x)
    t = np.linspace(min(x), max(x), 1000)
    result = np.zeros_like(t)

    for i in range(n):
        term = coef[i]
        for j in range(i):
            term *= (t - x[j])
        result += term

    return t, result


def startProgr(min, max, degree):
    valuesX = np.linspace(min, max, degree)
    valuesF1 = f1(valuesX)
    valuesF2 = f2(valuesX)
    return valuesX, valuesF1, valuesF2


def printRes(function, newton, number):
    print(function + ": ")
    print(newton.evalf(n=number))


def create_polynomial(x, y):
    coef = divided_diff(x, y)
    if len(x) == 3:
        print("\nN = 2 for func")
```

```
        print(f"{coef[0]:.3f} + {coef[1]:.3f} * (x - {x[0]:.3f}) +
{coef[2]:.3f} * (x - {x[0]:.3f}) * (x - {x[1]:.3f})")
    return lambda point: sum(coef[i] * np.prod(point - x[:i]) for i in
range(len(x)))


xmin, xmax = -2, 2
degrees = [2, 4, 8, 16]

for degree in degrees:
    print(f"Степень интерполяции n = {degree}:")

    # Узлы интерполяции
    valuesX, valuesF1, valuesF2 = startProgr(xmin, xmax, degree+1)

    # Построение интерполяционного многочлена Ньютона для f1(x)
    t_f1, newtonF1 = newton(valuesX, valuesF1)
    t_f2, newtonF2 = newton(valuesX, valuesF2)

    if degree == 2:
        print('f1 = ')
        create_polynomial(valuesX, valuesF1)
        print('f2 = ')
        create_polynomial(valuesX, valuesF2)


    # Построение графиков для многочленов каждой степени
    plt.figure(figsize=(10, 6))

    # График для f1(x)
    plt.subplot(2, 2, 1)
    plt.plot(t_f1, f1(t_f1), label='f1(x)')
    plt.plot(t_f1, newtonF1, label='Интерп. мн-н Ньютона для f1(x)')
    plt.title('f1(x)')
    plt.xlabel('x')
    plt.ylabel('y')
    plt.legend()
    plt.grid(True)

    # График для f2(x)
    plt.subplot(2, 2, 2)
    plt.plot(t_f2, f2(t_f2), label='f2(x)')
    plt.plot(t_f2, newtonF2,label='Интерп. мн-н Ньютона для f2(x)')
    plt.title('f2(x)')
    plt.xlabel('x')
    plt.ylabel('y')
    plt.legend()
    plt.grid(True)

    plt.tight_layout()
    plt.show()
```

Многочлены для n = 2:

```
f1 =

N = 2 for func
3.016 + -1.508 * (x - -2.000) + 0.519 * (x - -2.000) * (x - 0.000)
f2 =

N = 2 for func
5.000 + -2.000 * (x - -2.000) + 0.750 * (x - -2.000) * (x - 0.000)
```

Задание 2

Листинг программы:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt


# Заданные функции
def f1(x):
    return pow(x, 2) * np.cos(3 * x - 1)


def f2(x):
    return np.abs(x * np.abs(x) - 1)


def chebyshev(min, max, degree):
    nodes = np.zeros(degree)
    for i in range(degree):
        nodes[i] = 0.5 * (xmin + xmax) + 0.5 * (xmax - xmin) * np.cos((2 *
i + 1) * np.pi / (2 * degree))
    return nodes

# Вычисление разделённых разностей
def divided_diff(x, y):
    n = len(x)
    coef = np.zeros([n, n])
    coef[:, 0] = y

    for j in range(1, n):
        for i in range(n - j):
            coef[i][j] = (coef[i + 1][j - 1] - coef[i][j - 1]) / (x[i + j]
- x[i])

    return coef[0]


# Построение интерполяционного многочлена Ньютона
def newton(x, y):
    coef = divided_diff(x, y)
    n = len(x)
    t = chebyshev(min(x), max(x), 1000)
    result = np.zeros_like(t)

    for i in range(n):
```

```
        term = coef[i]
        for j in range(i):
            term *= (t - x[j])
        result += term

    return t, result


def startProgr(min, max, degree):
    valuesX = chebyshev(min, max, degree)
    valuesF1 = [f1(value) for value in valuesX]
    valuesF2 = [f2(value) for value in valuesX]
    return valuesX, valuesF1, valuesF2


def printRes(function, newton, number):
    print(function + ": ")
    print(newton.evalf(n=number))


def create_polynomial(x, y):
    coef = divided_diff(x, y)
    if len(x) == 3:
        print("\nAnalytical representation of the 2nd-degree polynomial:")
        print(f"{coef[0]:.3f} + {coef[1]:.3f} * (x - {x[0]:.3f}) +
{coef[2]:.3f} * (x - {x[0]:.3f}) * (x - {x[1]:.3f})")
    return lambda point: sum(coef[i] * np.prod(point - x[:i]) for i in
range(len(x)))



xmin, xmax = -2, 2
degrees = [2, 4, 8, 16]

for degree in degrees:
    print(f"Степень интерполяции n = {degree}:")

    # Узлы интерполяции
    valuesX, valuesF1, valuesF2 = startProgr(xmin, xmax, degree+1)

    # Построение интерполяционного многочлена Ньютона для f1(x)
    t_f1, newtonF1 = newton(valuesX, valuesF1)
    t_f2, newtonF2 = newton(valuesX, valuesF2)

    if degree == 2:
        print('f1 = ')
        create_polynomial(valuesX, valuesF1)
        print('f2 = ')
        create_polynomial(valuesX, valuesF2)

        # Построение графиков для многочленов каждой степени
    plt.figure(figsize=(10, 6))

    # График для f1(x)
    plt.subplot(2, 2, 1)
    plt.plot(t_f1, f1(t_f1), label='f1(x)')
    plt.plot(t_f1, newtonF1, label='Интерп. мн-н Ньютона для f1(x)')
    plt.title('f1(x)')
    plt.xlabel('x')
    plt.ylabel('y')
    plt.legend()
```

```
    plt.grid(True)

    # График для f2(x)
    plt.subplot(2, 2, 2)
    plt.plot(t_f2, f2(t_f2), label='f2(x)')
    plt.plot(t_f2, newtonF2,label='Интерп. мн-н Ньютона для f2(x)')
    plt.title('f2(x)')
    plt.xlabel('x')
    plt.ylabel('y')
    plt.legend()
    plt.grid(True)

    plt.tight_layout()
    plt.show()
```

Многочлены для n = 2:

```
f1 =

Analytical representation of the 2nd-degree polynomial:
-1.481 + -0.855 * (x - 1.732) + 0.251 * (x - 1.732) * (x - 0.000)
f2 =

Analytical representation of the 2nd-degree polynomial:
2.000 + 0.577 * (x - 1.732) + 0.667 * (x - 1.732) * (x - 0.000)
```

Задание 3

Листинг программы :

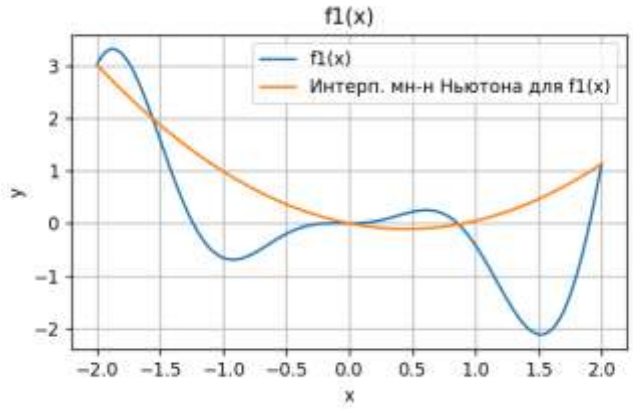
```
import numpy as np
from scipy.interpolate import CubicSpline
import matplotlib.pyplot as plt


# Заданные функции
def f1(x):
    return pow(x, 2) * np.cos(3 * x - 1)


def f2(x):
    return np.abs(x * np.abs(x) - 1)


# Функция для построения интерполяционного кубического сплайна
def cubic_spline_interpolation(x, y, d2y_start, d2y_end):
    cs = CubicSpline(x, y, bc_type=((2, d2y_start), (2, d2y_end)))
    return cs


def startProgr(min, max, degree):
    valuesX = np.linspace(min, max, degree)
    valuesF1 = [f1(value) for value in valuesX]
    valuesF2 = [f2(value) for value in valuesX]
    return valuesX, valuesF1, valuesF2
```

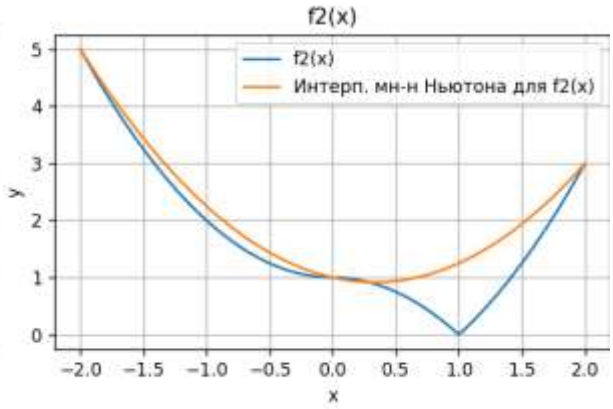
```
# Заданные узлы для интерполяции
xmin, xmax = -2, 2
degrees = [2, 4, 8, 16]

# Для каждой функции

for degree in degrees:

    valuesX, valuesF1, valuesF2 = startProgr(xmin, xmax, degree+1)
    # Значения вторых производных на границах

    d2y_f1_start = f1(valuesX[1]) - 2 * f1(valuesX[0]) + f1(valuesX[1])
    d2y_f1_end = f1(valuesX[-2]) - 2 * f1(valuesX[-1]) + f1(valuesX[-2])

    d2y_f2_start = f2(valuesX[1]) - 2 * f2(valuesX[0]) + f2(valuesX[1])
    d2y_f2_end = f2(valuesX[-2]) - 2 * f2(valuesX[-1]) + f2(valuesX[-2])

    # Построение интерполяционного кубического сплайна
    cs_f1 = cubic_spline_interpolation(valuesX, valuesF1, d2y_f1_start,
d2y_f1_end)
    cs_f2 = cubic_spline_interpolation(valuesX, valuesF2, d2y_f2_start,
d2y_f2_end)

    # Оценка значений сплайна на более широком диапазоне для построения
графика
    lineValuesX = np.linspace(xmin, xmax, 500)
    y_interp_f1 = cs_f1(lineValuesX)
    y_interp_f2 = cs_f2(lineValuesX)

    # Построение графиков
    # График для f1(x)
    plt.subplot(2, 2, 1)
    lineValuesX = np.linspace(xmin, xmax, 500)
    plt.plot(lineValuesX, [f1(x) for x in lineValuesX], label='f1(x)')
    plt.plot(lineValuesX, y_interp_f1, label='Интерп. мн-н Ньютона для
f1(x)')
    plt.title('f1(x)')
    plt.xlabel('x')
    plt.ylabel('y')
    plt.legend()
    plt.grid(True)

    # График для f2(x)
    plt.subplot(2, 2, 2)
    plt.plot(lineValuesX, [f2(x) for x in lineValuesX], label='f2(x)')
    plt.plot(lineValuesX, y_interp_f2, label='Интерп. мн-н Ньютона для
f2(x)')
    plt.title('f2(x)')
    plt.xlabel('x')
    plt.ylabel('y')
    plt.legend()
    plt.grid(True)

    plt.tight_layout()
    plt.show()
```

Графики

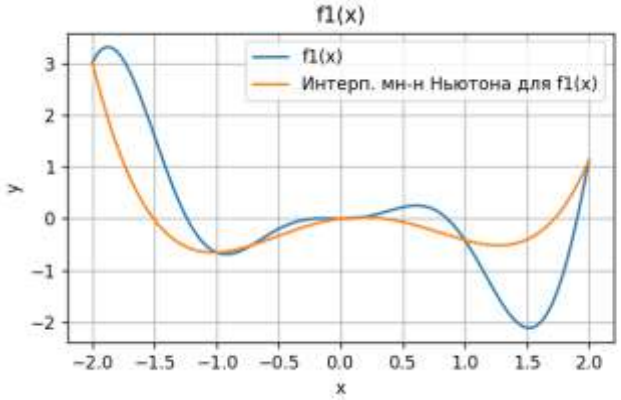
Задание 1

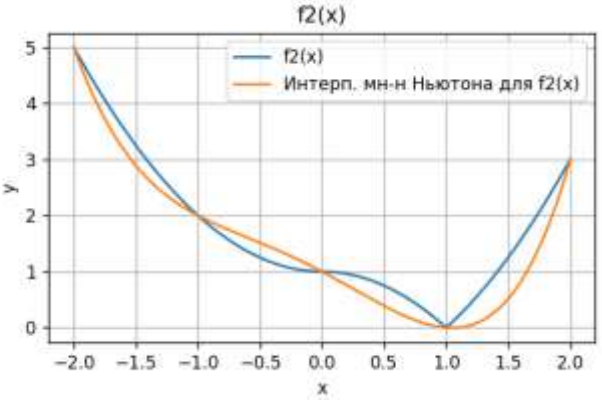
N = 2



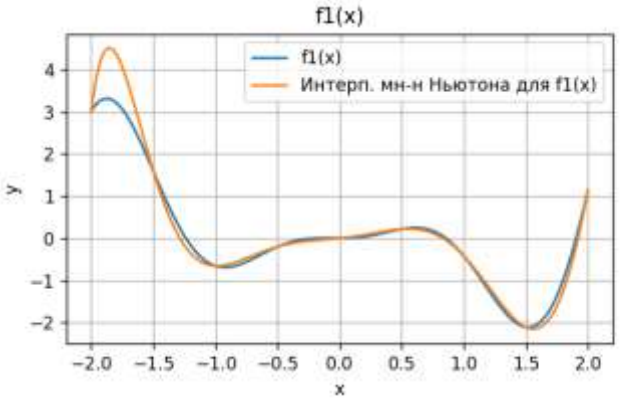


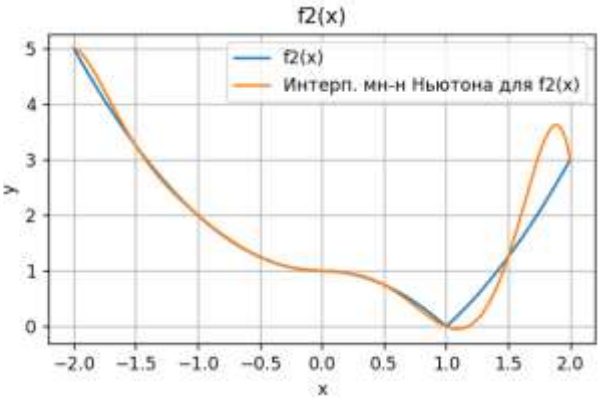
N=4



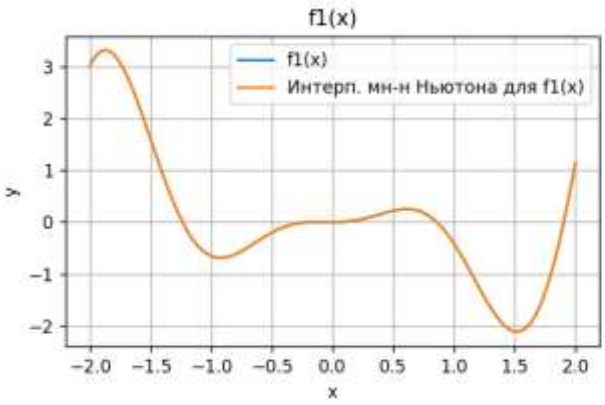


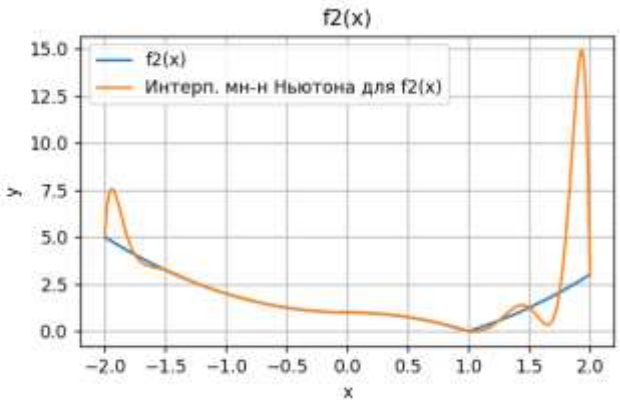
N=8





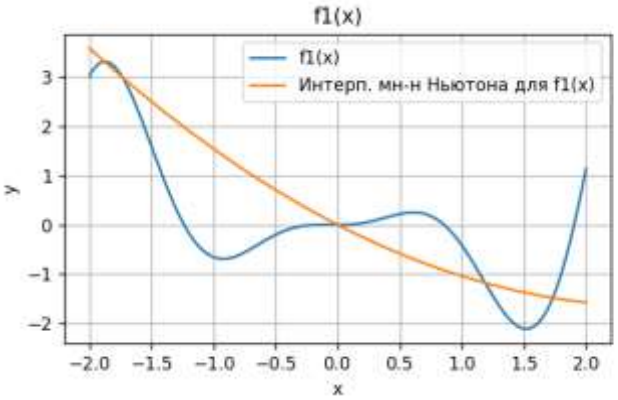
N=16

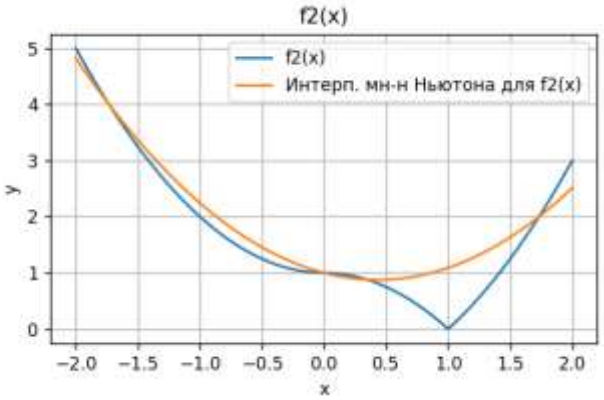




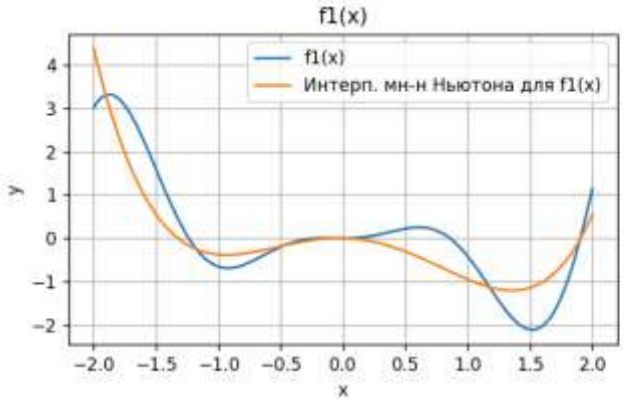
Задание 2

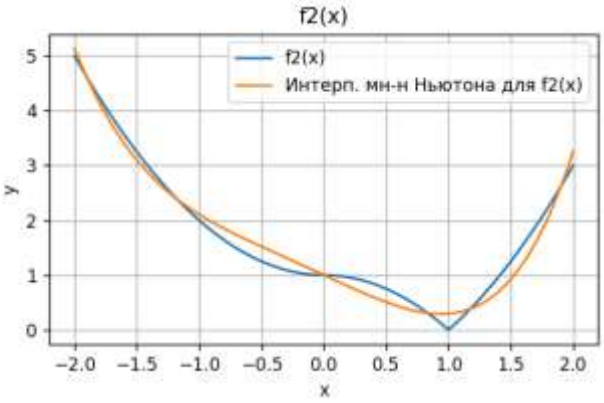
N = 2



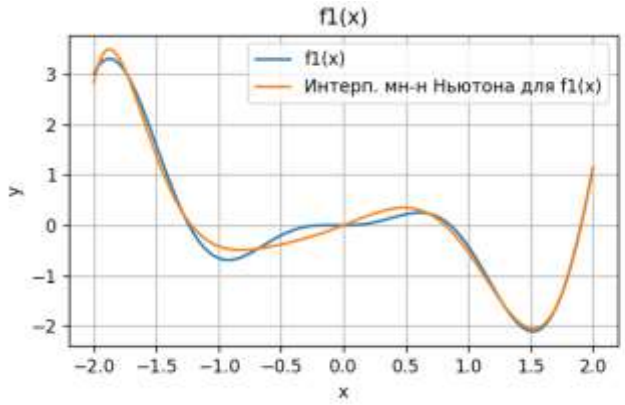


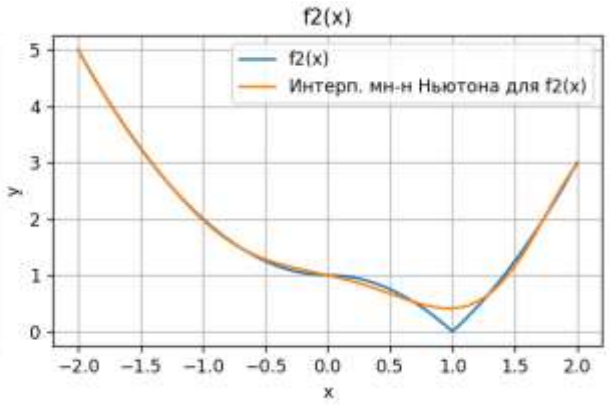
N = 4



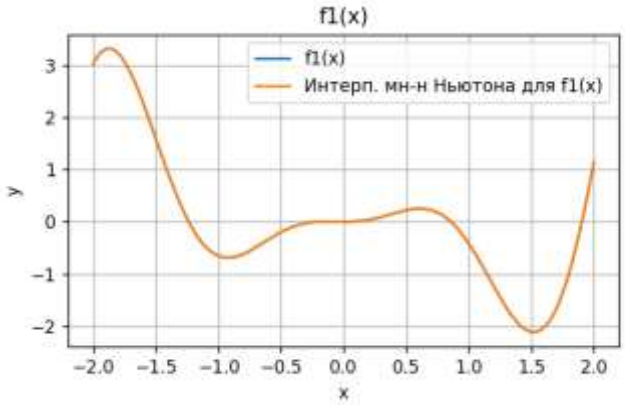


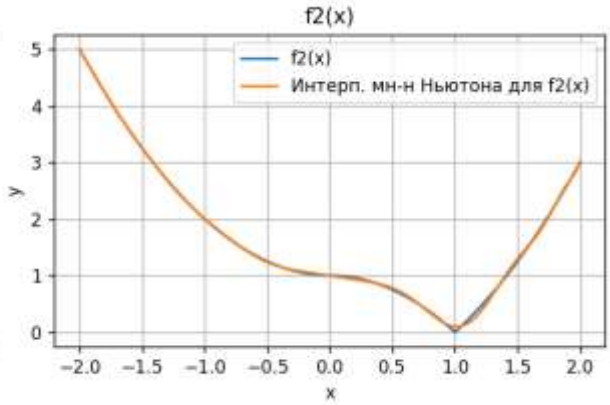
N = 8





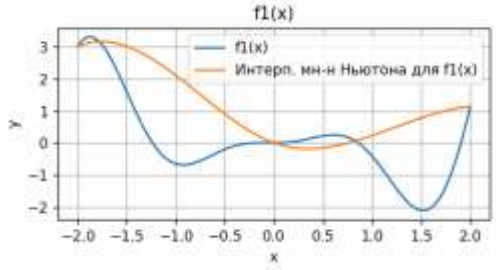
N = 16

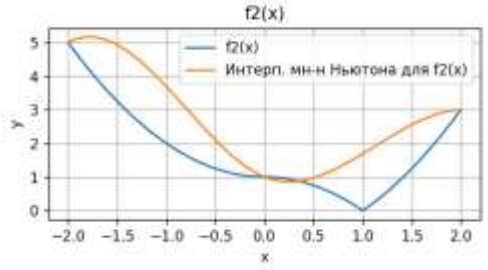




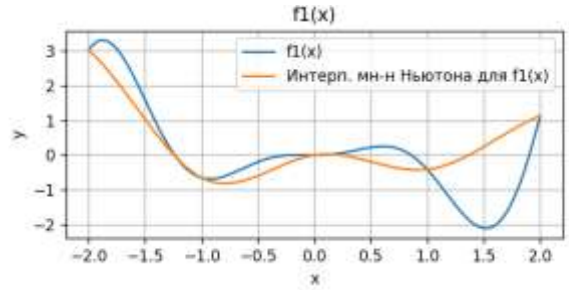
Задание 3

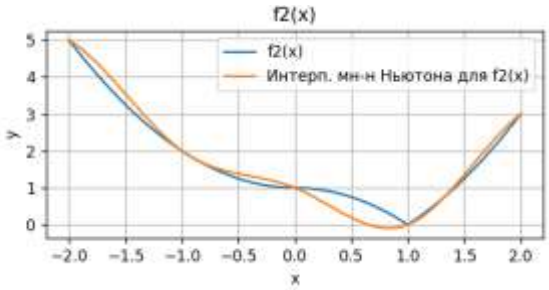
N = 2



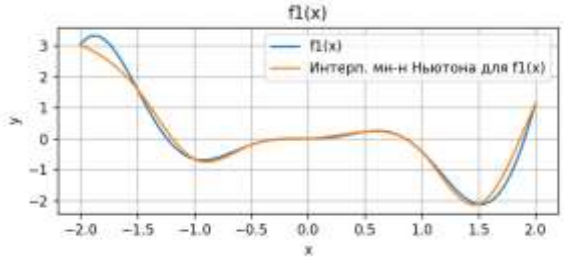


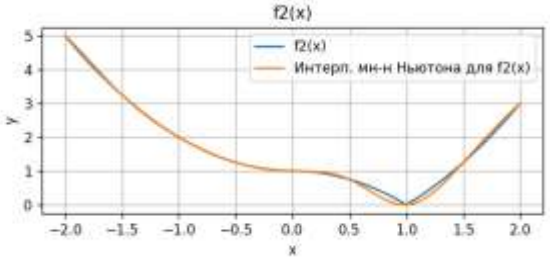
N = 4



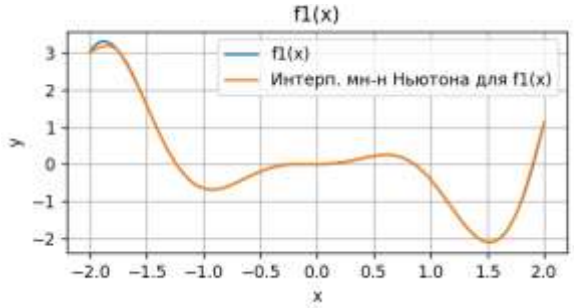


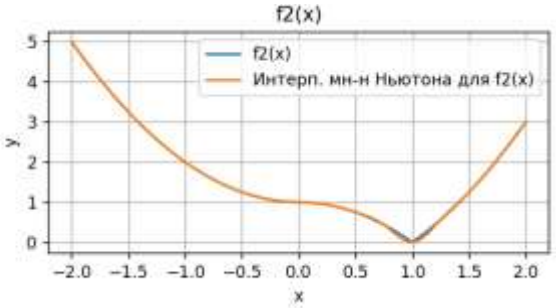
N = 8


f1(x)
f1(x)
Интерп. мн-н Ньютона для f1(x)
x
y


f2(x)
f2(x)
Интерп. мн-н Ньютона для f2(x)
x
y

N = 16


f1(x)
f1(x)
Интерп. мн-н Ньютона для f1(x)
x
y


f2(x)
f2(x)
Интерп. мн-н Ньютона для f2(x)
x
y