

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Álgebra lineal

Tarea examen 1

Elías López Rivera¹ Adolfo Angel Cardoso Vasquez²

Emiliano Gómez Hernández³

{¹ elias.lopezr, ² acardosov2400, ³emiliano_gomez}@ciencias.unam.mx

Fecha: 20/10/2024



Problema 1

Sea:

$$F = \{0, 1\}$$

con las operaciones modulo 2 definidas, es decir:

I. **Suma:** $0 + 0 = 0, 0 + 1 = 1, 1 + 1 = 0, 1 + 0 = 1$

II. **Multiplicación:** $1 \cdot 1 = 1, 0 \cdot 0 = 0, 0 \cdot 1 = 0, 1 \cdot 0 = 0$

a) Verificar que la multiplicación es una operación asociativa, que posee elemento neutro 1 y cada elemento distinto de 0 posee inverso multiplicativo

b) Confirmar la distributividad del producto sobre la suma

Concluir que F es un campo

Demostración.

a) Veamos la siguiente tabla para la operación de multiplicación

·	1	1
0	0	0
1	0	1

Como la tabla es simétrica respecto a la diagonal por tanto la operación es asociativa, vemos que 1 es un elemento neutro, y que este posee un inverso multiplicativo (el mismo)

b) Para comprobar la distributividad de la multiplicación sobre la suma lo comprobamos manualmente:

$$0(0+0) = 0 = 0(0) + 0(0)$$

$$0(0+1) = 0 = 0(0) + 0(1)$$

$$0(1+1) = 0 = 0(1) + 0(1)$$

$$1(0+0) = 0 = 1(0) + 1(0)$$

$$1(0+1) = 1 = 1(0) + 1(1)$$

$$1(1+0) = 1 = 1(1) + 1(0)$$

$$1(1+1) = 0 = 1(1) + 1(1)$$

Por tanto la multiplicación se distribuye sobre la suma, como $(F, +)$ y $(F - \{0\}, \cdot)$ son grupos abelianos se concluye que F es un campo \square

Problema 2

Sea:

$$F = \mathbb{Z}_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

con las operaciones modulo 6 definidas, es decir:

I. **Suma:** Definida por:

$$a \oplus b = a + b + 1$$

II. **Multiplicación:** Definido por:

$$a \odot b = a \cdot b + a + b$$

a) Verificar que (F, \oplus) es un grupo abeliano. En particular, determinar el elemento neutro (e_{\oplus}) y encontrar la fórmula del inverso aditivo de un elemento a .

b) Verificar que $(F - \{e_{\oplus}\}, \odot)$ es un grupo abeliano. Es decir identificar el elemento neutro multiplicativo e_{\odot} , y para cada $a \in F$ con $a \neq e_{\odot}$, determinar si existe un inverso multiplicativo

c) Comprobar la propiedad distributiva

$$a \odot (b \oplus c) = (a \odot b) \oplus (a \odot c)$$

Demostración.

a) Veamos la siguiente tabla de \oplus :

\oplus	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

Como la tabla es simétrica respecto a la diagonal se sigue que \oplus es asociativa y conmutativa, luego podemos notar que $e_{\oplus} = 5$, ahora notemos que e_{\oplus} es su propio inverso, para $a \neq e_{\oplus}$, tenemos que su inverso será $4 - a$ pues $a \oplus (4 - a) = a + (4 - a) + 1 = 5$, por tanto (F, \oplus) es grupo abeliano

b) Veamos la siguiente tabla de \odot :

\odot	0	1	2	3	4	5
0	0	0	1	2	3	4
1	1	1	3	5	1	3
2	2	2	5	2	5	2
3	3	3	1	5	3	1
4	4	4	3	2	1	0
5	5	5	5	5	5	5

Notamos que el $e_{\odot} = 0$, además de que no todo elemento en F cuenta con inverso multiplicativo por tanto $(F - \{e_{\oplus}\}, \odot)$ no es grupo abeliano

c) Veamos que:

$$a \odot (b \oplus c) = a \oplus (b + c + 1) = a(b + c + 1) + a + b + c + 1 = (ab + a + b) + (ac + a + c) + 1 = (a \odot b) \oplus (a \odot c)$$

□

Problema 3

Sea:

$$F = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$

con las operaciones de suma y multiplicación:

a) Comprobar que F es cerrado bajo la suma y la multiplicación de \mathbb{Q}

b) Demostrar que existe un elemento neutro para la suma (el cero) y para la multiplicación (1)

c) Para cada elemento $x = a + b\sqrt{2}$ con $x \neq 0$, encontrar o demostrar la existencia de su inverso multiplicativo en F

d) Verificar las demas propiedades: existencia de inversos aditivos, asociatividad, conmutatividad y distributividad

Concluir que F es un campo

Demostración.

a) Tomemos $x, y \in F$, tenemos que:

$$x + y = (a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2}) = (a + c) + (d + b)\sqrt{2}$$

Como $(a + c) \in \mathbb{Q}$ y $(b + d) \in \mathbb{Q}$, se tiene que $x + y \in F$

Ahora veamos que:

$$x(y) = (a + b\sqrt{2})(c + d\sqrt{2}) = ac + ad\sqrt{2} + cb\sqrt{2} + cd(2) = (ac + 2cd) + (cb + ad)\sqrt{2}$$

Como $(ac + 2cd) \in \mathbb{Q}$ y $(cb + ad) \in \mathbb{Q}$, tenemos que $x(y) \in F$

b) Tenemos que $0 = 0 + 0\sqrt{2}$, como $0 \in F$, entonces $0 \in F$, como las operaciones de suma y multiplicación son las usuales se tiene que:

$$x + 0 = a + b\sqrt{2} + 0 = x \quad \forall x \in F$$

Por tanto $(F, +)$ tiene un elemento neutro 0.

De la misma manera tenemos que $1 = 1 + \sqrt{2}0$, es decir $1 \in F$, además de que:

$$1(x) = 1(a + \sqrt{2}b) = a + \sqrt{2}b = x \quad \forall x \in F$$

Por tanto (F, \cdot) tiene un elemento neutro 1

c) Sea $x \in F$ tal que $x \neq 0$, se tiene que $x = a + \sqrt{2}b \neq 0 \implies a \neq \sqrt{2}b$, y por tanto $a - \sqrt{2}b \neq 0$, es decir $(a + \sqrt{2}b)(a - \sqrt{2}b) = a^2 - 2b^2 \neq 0$, por tanto tenemos que:

$$x \left(\frac{a - \sqrt{2}b}{a^2 - 2b^2} \right) = (a + \sqrt{2}b) \left(\frac{a - \sqrt{2}b}{a^2 - 2b^2} \right) = \frac{a^2 - 2b^2}{a^2 - 2b^2} = 1 \quad \forall x \in F$$

Por tanto (F, \cdot) tiene elementos inversos

d) Sea $x = a + \sqrt{2}b$, definimos $-x = -a - b\sqrt{2} \in F$, luego tenemos que $x + (-x) = a + (-a) + \sqrt{2}(b + (-b)) = 0$, por tanto $(F, +)$, tiene inversos aditivos

Como $F \subset \mathbb{R}$ y \mathbb{R} es un campo bajo las mismas operaciones usuales, además que F es cerrado bajo estas, la conmutatividad y asociatividad de $+$, \cdot son heredadas, a su vez que la distributividad de \cdot sobre $+$, de esto se sigue que $(F, +)$ y $(F - \{0\}, \cdot)$ son grupos abelianos, y por la distributividad se sigue que $(F, \cdot, +)$ es un campo \square

Problema 4

Sea $F = \mathbb{Z}$ con las operaciones definidas de la siguiente forma:

- **Suma:** Para $a, b \in \mathbb{Z}$ se define

$$a \oplus b = a + b - 1.$$

- **Producto:** Para $a, b \in \mathbb{Z}$ se define

$$a \odot b = a \cdot b - a - b + 2.$$

- I. Demostrar que (F, \oplus) es un grupo abeliano. En particular, determinar el elemento neutro aditivo e_{\oplus} y hallar el inverso aditivo de un elemento a .
- II. Determinar el elemento neutro multiplicativo e_{\odot} en $(F \setminus \{e_{\oplus}\}, \odot)$ y comprobar que no todo elemento $a \in F$ con $a \neq e_{\oplus}$ tiene inverso multiplicativo.
- III. Verificar la distributividad de \odot respecto a \oplus

Concluir que (F, \oplus, \odot) no es un campo

Demostración

(I)

- **Asociatividad**

Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}(a \oplus b) \oplus c &= (a + b - 1) + c - 1 \\ &= a + (b - 1 + c) - 1 \\ &= a + (b + c - 1) - 1 \\ &= a \oplus (b \oplus c).\end{aligned}$$

- **Conmutatividad**

Sean $a, b \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}a \oplus b &= a + b - 1 \\ &= b + a - 1 \\ &= b \oplus a.\end{aligned}$$

- **Neutro**

Proponemos $e_{\oplus} \in \mathbb{Z}$ como $e_{\oplus} = 1$, de este modo $\forall a \in \mathbb{Z}$

$$a \oplus e_{\oplus} = a + 1 - 1 = a,$$

en efecto e_{\oplus} es el neutro.

- **Inverso**

Sea $a \in \mathbb{Z}$ proponemos $b = -a + 2 \in \mathbb{Z}$, de modo que

$$a \oplus b = a + (-a + 2) - 1 = (a + (-a)) + (2 + (-1)) = 0 + 1 = 1 = e_{\oplus}.$$

Es decir b es el inverso de a .

$\therefore (F, \oplus)$ es un grupo abeliano.

(II)

Proponemos $e_{\odot} \in \mathbb{Z} \setminus \{e_{\oplus}\}$ como $e_{\odot} = 2$, de este modo $\forall a \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} a \odot e_{\odot} &= a \cdot 2 - a - 2 + 2 \\ &= a. \end{aligned}$$

Por tanto e_{\odot} es el neutro multiplicativo.

Supongamos que $\forall a \in \mathbb{Z} \setminus \{1\} \exists b \in \mathbb{Z} \setminus \{1\} \quad (a \odot b = e_{\odot})$, es decir

$$\begin{aligned} 2 &= a \odot b \\ 2 &= a \cdot b - a - b + 2 \\ 0 &= a \cdot b - a - b \\ 0 &= b(a - 1) - a \\ a &= b(a - 1). \end{aligned}$$

De modo que si $a = 3$ entonces b no puede ser entero, por lo que no todo elemento en $(F \setminus \{e_{\oplus}\}, \odot)$ tiene inverso multiplicativo.

(III)

Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} a \odot (b \oplus c) &= a \odot (b + c - 1) \\ &= a(b + c - 1) - a - (b + c - 1) + 2 \\ &= ab + ac - a - a - b - c + 2 \\ &= (ab - a - b + 2) + (ac - a - c + 2) - 2 \\ &= ((a \odot b) + (a \odot c) - 1) - 1 \\ &= (a \odot b) \oplus (a \odot c) - 1 \end{aligned}$$

Es decir en general las operaciones no son distributivas.

$\therefore (F, \oplus, \odot)$ no es un campo, pues no cumple con todas las propiedades de uno.

Problema 5

Sea $F = \mathbb{R}^2$ con la operaciones definidas de la siguiente forma:

■ **Suma:**

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d).$$

■ **Producto:**

$$(a, b) \otimes (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

- I. Verificar que la suma y el producto están bien definidos y son operaciones en F .
- II. Demostrar que existe un elemento neutro para la suma $((0, 0))$ y para el producto $((1, 0))$.
- III. Comprobar que a cada elemento $(a, b) \neq (0, 0)$ le corresponde un inverso multiplicativo.
- IV. Verificar la conmutatividad, la asociatividad y la distributividad del producto respecto a la suma.

Demostración

(I)

Sean $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d) \in \mathbb{R}^2$$

$$(a, b) \otimes (c, d) = (ac - bd, ad + bc) \in \mathbb{R}^2.$$

Pues $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ y las operaciones suma y producto están bien definidas en \mathbb{R} .
 \therefore la suma y el producto están bien definidos y son operaciones en F .

(II)

■ **Neutro suma**

Sea $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}(0, 0) \oplus (a, b) &= (0 + a, 0 + b) \\ &= (a, b).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a, b) \oplus (0, 0) &= (a + 0, b + 0) \\ &= (a, b).\end{aligned}$$

■ **Neutro producto**

Sea $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}(1, 0) \otimes (a, b) &= (1 \cdot a - 0 \cdot b, 1 \cdot b + 0 \cdot a) \\ &= (a, b).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a, b) \otimes (1, 0) &= (a \cdot 1 - b \cdot 0, a \cdot 0 + b \cdot 1) \\ &= (a, b).\end{aligned}$$

(III)

Sea $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, tomamos $(c, d) \in \mathbb{R}^2$ como $(c, d) = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$, de modo que

$$\begin{aligned}(a, b) \otimes (c, d) &= (a \cdot c - b \cdot d, a \cdot d + b \cdot c) \\ &= \left(a \cdot \frac{a}{a^2+b^2} - b \cdot \frac{-b}{a^2+b^2}, a \cdot \frac{-b}{a^2+b^2} + b \cdot \frac{a}{a^2+b^2}\right) \\ &= \left(\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}, \frac{-ab+ab}{a^2+b^2}\right) \\ &= (1, 0).\end{aligned}$$

Es decir para cada $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ existe un inverso multiplicativo.

(IV)

■ **Conmutatividad**

Sean $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}(a, b) \odot (c, d) &= (a \cdot c - b \cdot d, a \cdot d + b \cdot c) \\ &= (c \cdot a - d \cdot b, c \cdot d + d \cdot b) \\ &= (c, d) \odot (a, b).\end{aligned}$$

■ **Asociatividad**

Sean $(a, b), (c, d), (e, f) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}((a, b) \odot (c, d)) \odot (e, f) &= (ac - bd, ad + bc) \odot (e, f) \\ &= ((ac - bd)e - (ad + bc)f, (ad + bc)e + (ac - bd)f) \\ &= (ace - bde - adf - bcf, ade + bce + acf - bdf) \\ &= (a(ce - df) - b(de + cf), a(de + cf) + b(ce - df)) \\ &= (a, b) \odot (ce - df, de + cf) \\ &= (a, b) \odot ((c, d) \odot (e, f)).\end{aligned}$$

■ **Distributividad**

Sean $(a, b), (c, d), (e, f) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}(a, b) \otimes ((c, d) \oplus (e, f)) &= (a, b) \otimes (c + e, d + f) \\ &= (a(c + e) - b(d + f), a(d + f) + b(c + e)) \\ &= (ac + ae - bd - bf, ad + af + bc + be) \\ &= (ac - bd + ae - bf, ad + bc + af + be) \\ &= (ac - bd, ad + bc) + \otimes(ae - bf, af + be) \\ &= (a, b) \otimes (c, d) + (a, b) \otimes (e, f).\end{aligned}$$

Problema 6

Una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se llama **función par** si para todo $t \in \mathbb{R}$ se cumple que $f(t) = f(-t)$. Demostrar que el conjunto $P := \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es par}\}$, con las siguientes operaciones:

$$\forall f, g \in P \text{ y } c \in \mathbb{R} : (f + g)(s) = f(s) + g(s) \text{ y } (cf)(s) = c(f(s))$$

Es un \mathbb{R} – espacio vectorial

Demostración.

Sea $F := \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es función}\}$, en clase se ha demostrado que F con las operaciones definidas es un espacio vectorial real por tanto basta demostrar que $P \subset F$ es un subespacio de F , para esto tomamos $f, g \in P$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, demostraremos que $\lambda f + g \in P$:

$$\lambda f + g(-x) = \lambda f(-x) + g(-x) = \lambda f(x) + g(x) = \lambda f + g(x)$$

Por tanto $\lambda f + g \in P$, es decir P es un subespacio vectorial de F

□

Problema 7

Sea $V = \{(a_1, a_2) \mid a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$. Para $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in V$ y $c \in \mathbb{R}$ definimos $(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 b_2)$ y $c \cdot (a_1, a_2) = (ca_1, a_2)$. ¿Es V un \mathbb{R} – espacio vectorial

Demostración.

Si V cumpliera ser un espacio vectorial bajo la operaciones definidas se tendría que necesariamente $(V, +)$ es un grupo abeliano, proponemos que $(0, 1) \in V$ es un neutro para V

$$(a_1, a_2) + (0, 1) = (a_1 + 0, a_2 \cdot 1) = (a_1, a_2) \quad \forall (a_1, a_2) \in V$$

Ahora tomemos $(b_1, 0) \in V$, demostremos que este elemento no tiene inverso en V :

$$(b_1, 0) + (a_1, a_2) = (b_1 + a_1, 0 \cdot a_2) = (b_1 + a_1, 0) \neq (0, 1) \quad \forall (a_1, a_2) \in V$$

Por tanto $(V, +)$ no es un grupo abeliano, y por tanto V no es un espacio vectorial con esas operaciones

□

Problema 8

Sea $V = \{(a_1, a_2) \mid a_1, a_2 \in \mathbb{F}\}$, donde \mathbb{F} es un campo. Definimos la suma de elementos de V coordenada a coordenada. Para $c \in \mathbb{F}$ y (a_1, a_2) definimos el producto como $c(a_1, a_2) = (a_1, 0)$. ¿Es V un \mathbb{F} -espacio vectorial con las operaciones definidas?

Demostración.

Si V fuera un espacio vectorial tendríamos que para $1 \in \mathbb{F}$, neutro para el producto de \mathbb{F} , debería cumplir que:

$$1 \cdot (a_1, a_2) = (a_1, a_2) \quad \forall (a_1, a_2) \in V$$

Sin embargo tomemos (b_1, b_2) , tal que $b_2 \neq 0$, donde 0 es el neutro para la suma de \mathbb{F} , tenemos que:

$$1 \cdot (b_1, b_2) = (b_1, 0) \neq (b_1, b_2)$$

Por tanto V no puede ser un espacio vectorial con esa operación como producto por escalar

□

Problema 9

Sea $V = \{(a_1, a_2) \mid a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$. Para $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in V$ y $c \in \mathbb{R}$ definimos $(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + 2b_1, a_2 + 3b_2)$ y $c(a_1, a_2) = (ca_1, a_2)$. ¿Es V un \mathbb{R} -espacio vectorial?

Demostración.

Veamos que se no cumplen las propiedades para el producto escalar.

■ Distributividad escalar

Pues para cualesquiera $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, y para cada $(a_1, a_2) \in V$

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu)(a_1, a_2) &= ((\lambda + \mu)a_1, (\lambda + \mu)a_2) \\ &= (\lambda a_1 + \mu a_1, \lambda a_2 + \mu a_2) \end{aligned}$$

Mientras que

$$\begin{aligned} \lambda(a_1, a_2) + \mu(a_1, a_2) &= (\lambda a_1, \lambda a_2) + (\mu a_1, \mu a_2) \\ &= (\lambda a_1 + 2\mu a_1, \lambda a_2 + 3\mu a_2) \end{aligned}$$

Así en general

$$(\lambda + \mu)(a_1, a_2) \neq \lambda(a_1, a_2) + \mu(a_1, a_2)$$

Por tanto no cumple con la distributividad escalar.

$\therefore V$ no es un \mathbb{R} -espacio vectorial.

□