Teorema fundamental del álgebra

Elías López Rivera [1]

[1] Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias

24 de julio de 2024

Ejercicio 1 *Prueba que todo polinomio de grado impar $P(x)$ con coeficientes reales tiene al menos una raź real.*

Solución Demostraremos el siguiente lema:

Sea $P(x) \in \Re[x]$, tal que $a_n \neq 0$, entonces existe $\delta \in \mathbb{R}^+$, tal que si $|t| > \delta$, con $t \in \mathbb{R}$ entonces:

$$sgn[P(t)] = sgn[a_n\, t^n\,]$$

Donde a_n es el coeficiente del termino de mayor grado en el polinomio.

Demostración

Tomemos $P(x) \in \Re[x]$:

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i\, x^i = a_n\, x^n \left[1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{a_{n-i}}{a_n} \left(\frac{1}{x}\right)^i\right]$$

definimos el polinomio $g(x)$ de tal suerte que:

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_{n-i}}{a_n}\, x^i$$

De la continuidad de $g(x)$, obtenemos que sea $0 < \epsilon < 1$, existira $\delta \in \mathbb{R}^+$, tal que si $|\frac{1}{t}| < \delta$ ($i.e$ $|t| > \frac{1}{\delta}$), con $t \in \mathbb{R}$, entonces $\left| g\left(\frac{1}{t}\right)\right| \leq \epsilon$.

Eligiendo t con las caracteristicas anteriores se tiene que:

$$\left| g\left(\frac{1}{t}\right) \right| \leq \epsilon \implies -\epsilon \leq g\left(\frac{1}{t}\right) \implies 0 < 1 - \epsilon \leq 1 + g\left(\frac{1}{t}\right) \implies sgn\left[1 + g\left(\frac{1}{t}\right)\right] = 1$$

y por tanto:

$$sgn[P(t)] = sgn[a_n\, t^n\,]\, sgn\left[1 + g\left(\frac{1}{t}\right)\right] = sgn[a_n\, t^n\,]$$

Ahora tomemos que $a_n > 0$, para $g(x)$ de grado impar, donde a_n es el coeficiente del termino con mayor grado:

Si tomamos $t_1 \in \mathbb{R}^-$ suficientemente grande ($|t_1| > \frac{1}{\delta}$), se sigue que:

$$sgn\,[g(t_1)] = sgn[a_n\, t_1^{2k+1}\,] = -1$$

De la misma manera tomemos $t_2 \in \mathbb{R}^+$, sufucientemente grande ($|t| > \frac{1}{\delta}$), se sique que:

$$sgn\,[g(t_2)] = sgn[a_n\, t_2^{2k+1}\,] = 1$$

Al haber un cambio de signo, se puede segurar que existe una raíz en el intervalo $[t_1, t_2]$, el caso $a_n < 0$ es análogo.

Ejercicio 2 *Sea* $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, z^k$, $a_n \neq 0$, *un polinomio con coeficientes complejos. Muestra que* $|P(z)| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, *alcanza su mínimo, i.e, existe* $z_0 \in \mathbb{C}$ *tal que:*

$$|P(z_0)| \leq |P(z)| \qquad \forall\, z \in \mathbb{C}$$

Solución

Demostraremos el siguiente lema (lema del crecimiento):

Sea $P(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i\, z^i$ un polinomio de grado $n \geq 1$, con coeficientes complejos, existe un número real $R > 0$ tal que si $|z| \geq R$ se tiene que:

$$\frac{1}{2}\,|a_n|\,|z^n| \leq |P(z)| \leq 2\,|a_n|\,|z^n|$$

Demostración

Definimos $k(z) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i\, z^i$ aplicando desigualdad del triángulo se sigue:

$$|a_n||z|^n - r(z) \leq |P(z)| \leq |a_n||z|^n + r(z)$$

Si $|z| \geq 1$ y elegimos $i < n$, podemos notar que $|z|^i \leq |z|^{n-1}$, se donde se obtiene que $r(z) \leq M\,|z|^{n-1}$, con $M = \sum_{i=0}^{n-1} a_i$.
Tomando $R := max\,[1, 2M\,|a_n|^{-1}]$, para $|z| \geq R$ se sigue que:

$$|P(z)| \leq |a_n||z|^n + r(z) \leq |z|^{n-1}\,[|a_n||z| + M] \leq 2|a_n||z|^n$$

De la misma manera se tiene que:

$$\begin{aligned} |P(z)| &\geq |a_n||z|^n - r(z) \geq |a_n||z|^n - M|z|^{n-1} \\ &\geq |a_n||z|^n - \frac{1}{2}|a_n||z|^n = \frac{1}{2}|a_n||z|^n \end{aligned}$$

Una vez demostrado lo anterior procedamos a tomar $R_1 := max\left[R,\, \sqrt[n]{2s|a_n|^{-1}}\right]$, con $s = |P(0)| = |a_0|$, donde R es el número definido por el lema de crecimiento. Si tomamos z de tal suerte que $|z| \geq R_1$, se sigue que:

$$|P(z)| \geq \frac{1}{2}|a_n||z^n| \geq \frac{1}{2}\,|a_n||R_1^n| \geq s$$

Definimos el disco cerrado $\bar{D}\,(0, R_1)$, a su vez definimos la función $f : \bar{D} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = |P(x + iy)|$, debido a la continuidad de f y a que $\bar{D}\,(0, R_1)$ es compacto se sigue que:

$$\exists\ (x_0, y_0) \in \bar{D}\,(0, R_1) : |P(x + iy)| \geq |P(x_0 + iy_0)|\ \forall\ (x, y) \in \bar{D}\,(0, R_1)$$

Sea $z_0 = x_0 + iy_0$, de lo anterior se sigue que sea $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| \geq R_1$:

$$|P(z)| \geq |P(0)| \geq |P(z_o)|$$

Por tanto la función alcanza su minimo global.

Ejercicio 3 *Prueba que existe un polinomio Q tal que:*

$$Q(0) = P(z_0) \quad y \quad |Q(0)| \leq |Q(z)| \quad \forall\ z \in \mathbb{C}$$

Solución

Definimos el polinomio de tal que $Q(z) = P(z + z_0)$, se sigue inmediatamente que $Q(0) = P(z_0)$ además que:

$$|Q(0)| = |P(z_0)| \leq |P(z + z_0)| = |Q(z)| \quad \forall\ z \in \mathbb{C}$$

Ejercicio 4 *Escribe Q como:*

$$Q(z) = c_0 + c_j\, z^j + z^{j+1}\, R(z)$$

Donde R es un polinomio y $j := min[\,0 < k \leq n : c_k \neq 0]$

Sea $-\frac{c_0}{c_j} = r\, e^{i\theta}$ y fija $z_1 = r^{\frac{1}{j}}\, e^{\frac{i\theta}{j}}$. Calcula $Q(\epsilon\, z_1)$, donde $\epsilon > 0$.

Solución

$Q(z)$ puede escribirse como:

$Q(z) = c_n\, z^n + \ldots + c_{j+1}\, z^{j+1} + c_j\, z^j + c_0 = z^{j+1}\,[a_n\, z^{n-j-1} + \ldots + c_{j+1}] + c_j\, z^j + c_0$

Tomamos $R(z) = c_n\, z^{n-j-1} + \ldots + c_{j+1}$, tenemos que

$$Q(z) = c_0 + c_J\, z^j + z^{j+1}\, R(z)$$

Fijamos z_1 y tomamos un $\epsilon > 0$:

$$Q(\epsilon\, z_1) = c_0 + c_j\, (z_1)^j + z_1^j\, z_1\, R(\epsilon\, z_1) = c_0 - c_0\, \epsilon^j + \epsilon^{j+1}\, c_0\, \left[-\frac{z_1}{c_j}\, R(\epsilon\, z_1)\right]$$

Como z_1 es fijo podemos ver a $-\frac{z_1}{c_j}\, R(\epsilon\, z_1)$ como un polinomio para la variable ϵ, $l(\epsilon)$, por tanto:

$$Q(\epsilon\, z_1) = c_0\, [\, 1 - \epsilon^j + \epsilon^{j+1}\, l\, (\epsilon)\,]$$

Ejercicio 5 *Prueba que $c_0 = Q(0) = 0$, completanto la demostración del Teorema fundamental del álgebra.*

Solución

Sí $c_0 \neq 0$, veamos que se cumple que:

$$|Q(\epsilon\, z_1)| = |c_0|\, |1 - \epsilon^j + \epsilon^{j+1}\, l\, (\epsilon)| \leq |c_0|\, [\, |1 - \epsilon^j| + |\epsilon^j|\, |\, \epsilon\; l\, (\epsilon)|\,]$$

Definimos $m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $m(\epsilon) = \epsilon \,|\, l(\epsilon)|$, por la continuidad de m se sigue que, sea $\lambda = 1 > 0$:

$$\exists\, \delta \in \mathbb{R}^{+} : |\epsilon| < \delta \implies |\, m\,(\epsilon)| < 1$$

Definimos $\epsilon := min\,[\frac{1}{2}, \frac{\delta}{2}\,]$, se sigue que necesarimente $0 < \epsilon < 1$ por tanto:

$$|Q(\epsilon\, z_1)| \leq |c_0|\,[\,1 - \epsilon^j + \epsilon^j\,|\,\epsilon\; l\,(\epsilon)|] = |c_0|\,[1 - \epsilon^j\,(1 - |\,\epsilon\; l\,(\epsilon)|)] < |c_0|$$

Lo cual es una contradicción ya que $|c_0|$, es el punto mínimo de $Q(z)$, por tanto se tiene que necesariamente $c_0 = 0$

Ejercicio 6 Colorario. *Todo polinomio mónico con coeficientes complejos puede descomponerse como un producto de factores de la forma $(z - \alpha)$, para algunas $\alpha \in \mathbb{C}$*

Solución

Tomemos cualquier polinomio de coeficientes complejos, $P(x)$, cuyo grado es $n \in \mathbb{N}$, por el teorema fundamental de álgebra se tiene que exite al menos un $\alpha_1 \in \mathbb{C}$ tal que $P(\alpha_1) = 0$, por tanto $P(x)$ puede verse como

$$P(x) = (x - \alpha_1)\, Q(x)$$

Donde $Q(x)$ tiene grado $n - 1$, de la misma manera $Q(x)$, por el teorema fundamental del algebra, tiene al menos una raíz α_2 compleja por tanto:

$$P(x) = (x - \alpha_1)\,(x - \alpha_2)\,T(x)$$

Donde $T(x)$ tiene grado $n - 2$, por tanto si aplicamos el proceso n veces, al ser un número finito se sigue que:

$$P(x) = (x - \alpha_1)\,(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_n)$$

Ejercicio 7 *Muestra que si p es un polinomio con coeficientes reales y α es una raíz compleja de p, entonces $\bar{\alpha}$ también es raíz de p. Usa este hecho para demostrar que p puede expresarse como el producto de polinomios de grado uno o dos, con coeficientes reales.*

Solución

Tomemos $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i\, x^i$, encontremos $p\,(\bar{\alpha})$:

$$p\,(\bar{\alpha}) = \sum_{i=0}^{n} a_i\,(\bar{\alpha})^i = \sum_{i=0}^{n} a_i\,\bar{\alpha^i} = \sum_{i=0}^{n} \overline{a_i\,\alpha^i} = \overline{\sum_{i=0}^{n} a_i\,\alpha^i}$$

Del hecho de que α es raíz de sigue:

$$p(\bar{\alpha}) = \bar{0} = 0$$

Por tanto $\bar{\alpha}$ es raíz del polinomio.

Ahora calculamos $(x-\alpha)\,(x-\bar{\alpha})$:

$$(x-\alpha)\,(x-\bar{\alpha}) = x^2 - \bar{\alpha}\,x - \alpha\,x + \alpha\,\bar{\alpha} = x^2 + bx + c$$

Donde $b, c \in \mathbb{R}$, por tanto sea un polinomio p con coeficientes reales tomemos el siguiente algoritmo:

Sea p un polinomio con coeficientes reales, de grado $n \in \mathbb{N}$, si el grado de p es impar entonces existe $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ tal que:

$$p(x) = \,(x-\alpha_1)\,l\,(x)$$

Donde el grado de l es $n-1$

Si el grado de p es par, entonces por teorema fundamental del álgebra, existe α_1 raíz compleja de p si $Im\,(\alpha_1) = 0$, se sique que $z\,(x) = (x-\alpha_1)$ es un polinomio de coeficientes reales y p puede escribirse como:

$$p(x) = \,(x-\alpha_1)\,l\,(x)$$

Donde el grado de l es $n-1$

Si $Im(\alpha_1) \neq 0$, entonces $\bar{\alpha_1}$ es raíz de p, por tanto $q(x) = (x-\alpha_1)(x-\bar{\alpha_1})$, es polinomio de coeficientes reales y que p puede escribirse como:

$$p(x) = (x-\alpha_1)(x-\bar{\alpha_1})\, l\,(x)$$

Donde el grado de $l(x)$ es $n-2$

Podemos aplicar este mismo algoritmo a $l(x)$ para factorizarlo en un polinomio de grado uno o dos de coeficientes reales por otro polinomio de grado $n-3$ o $n-4$, de la misma manera podemos aplicar el algoritmo sobre este polinomio para factorizarlo, si aplicamos este proceso suficientes veces podremos factorizar p en polinomios de grado uno o dos con coeficientes reales.