Problema 3

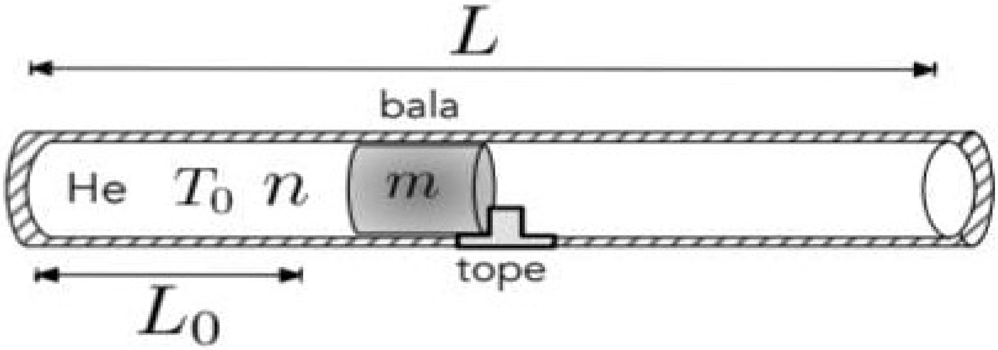
Elías López Rivera [1]

[1] Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas.
{[1]elopezr2300}@alumno.ipn.mx.

14 de abril de 2024

1. Enunciado

Una pistola de gas consiste en un tubo cilíndrico de longitud L hecho de material asilante. Una pequeña bala de masa m se ajusta dentro del tubo de manera que se evita en lo posible la fricción con el tubo. Dentro de la cámara de la pistola se colocan n moles de Helio gaseoso, la cámara de gas tiene longitud inicial L_0. La bala no permite la salida de gas y se mantiene sujeta mediante un tope. Si el gas está a temperatura T_0 y se remueve el tope súbitamente, (a) calcula la velocidad v con la cual sale disparada la bala de la pistola, (b) determina la velocidad máxima que puede tener la bala. Desprecia la presión atmosférica y considera que el gas de Helio se comporta como un gas ideal, usa los valores: $n = 1\,mol$, $T_0 = 100°$, $m = 10\,g$, $L = 50\,cm$, $L_0 = 10\,cm$, $R = 8{,}31\,\frac{J}{K\,mol}$, es la constante del gas ideal.



2. Solución

a) Como el cilindro es de material aislante, se tendrá un proceso adiabático, $Q = 0$ durante todo el proceso, obtenemos la temperatura final :

$$T_0\, V_0^{\gamma-1} = T_f\, V_f^{\gamma-1} \implies T_f = T_0 \left(\frac{L_0}{L}\right)^{\gamma-1} \tag{1}$$

Debido al proceso termodinámico habrá un trabajo realizado por la expansión del gas, y por tanto un cambio en la velocidad de la bala (teorema trabajo energía, $v_0 = 0$).

$$W = \Delta K = \frac{1}{2} m v_f^2 \tag{2}$$

Además por la primera ley de la termodinámica:

$$\Delta U = -W + Q = -W \tag{3}$$

también sabemos que el cambio de energía interna en cualquier proceso es :

$$\Delta U = n c_v \Delta T \tag{4}$$

donde c_v es la capacidad calorífica a volumen constante.
de (1),(2),(3) y (4):

$$n\, c_v\, T_0 \left[1 - \left(\frac{L_0}{L}\right)^{\gamma-1}\right] = \frac{1}{2} m v_f^2 \tag{5}$$

Obteniendo c_v

$$c_v = c_p - R \implies \frac{c_v}{c_v} = \frac{c_p}{c_v} - \frac{R}{c_v} \implies 1 = \gamma - \frac{R}{c_v} \implies c_v = \frac{R}{\gamma - 1} \tag{6}$$

De (5) y (6):

$$v_f = \sqrt{\frac{2}{m}\left\{\frac{n\, R\, T_0}{\gamma - 1}\left[1 - \left(\frac{L_0}{L}\right)^{\gamma-1}\right]\right\}} \tag{7}$$

Valuando (consideramos al Helio un gas diatómico):

$$v_f = \sqrt{\frac{2}{10(10^{-3})}\left\{\frac{8{,}31\,(373)}{\frac{5}{3}-1}\left[1-\left(\frac{10}{50}\right)^{\frac{5}{3}-1}\right]\right\}}\,\frac{m}{s} = 782{,}22\,\frac{m}{s} \tag{8}$$

b)Encontrar la velocidad máxima es equivalente a calcular el límite:

$$v_{max} = \lim_{L_0 \to 0}\sqrt{\frac{2}{m}\left\{\frac{n\,R\,T_0}{\gamma-1}\left[1-\left(\frac{L_0}{L}\right)^{\gamma-1}\right]\right\}} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(\frac{n\,R\,T_0}{\gamma-1}\right)} \tag{9}$$

Evaluando:

$$v_{max} = \sqrt{\frac{2}{10(10^{-3})}\left(\frac{8,31\,(373)}{\frac{5}{3}-1}\right)}\,\frac{m}{s} = 964{,}307\;\frac{m}{s} \tag{10}$$