Cicloide

Elías López Rivera [1]

[1] Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias.
{[1]elias.lopezr}@ciencias.unam.mx

15 de junio de 2025

1. La cicloice

Definición 1 *La cicloide es la curva descrita por un punto en una circunferencia cuando ésta rueda a lo largo de una línea recta. (figura 1)*

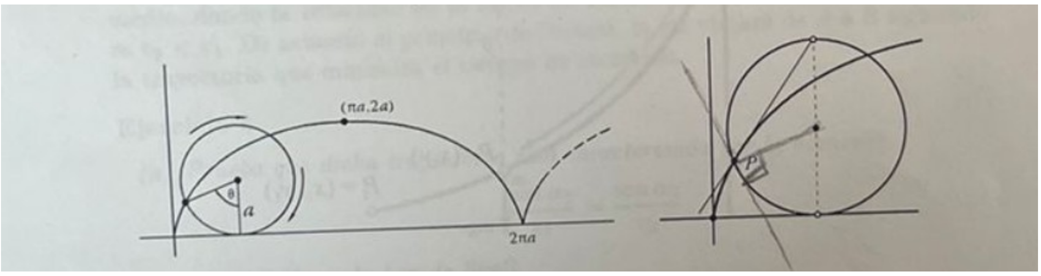

Figura 1: Cicloide

Ejercicio 1 *Muestra que si la circunferencia que define la cicloide tine radio a, entonces la cicloide puede ser parametrizada por la curva* $c : (-\infty, \infty) \to \mathbb{R}^2$

$$c(\theta) = a(\theta - \operatorname{sen}\theta, 1 - \cos\theta).$$

En los proximos tres ejercicios tendrás que calcular varias cantidades geométricas de la cicloide.

Solución Observando el siguiente dibujo del problema:

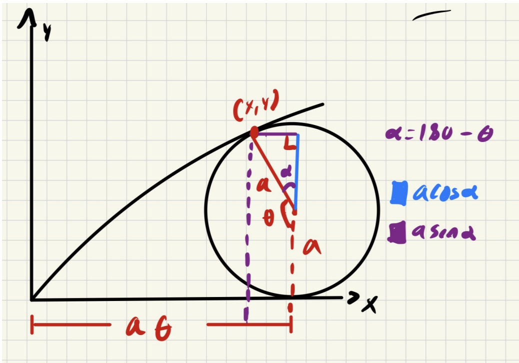

Figura 2: Esquema del problema

Se obtienen las siguientes relaciones:

$$x(\theta) = a\,\theta - a\ \text{sen}\,(180 - \theta) = a\,[\theta - sen(\theta)]$$

$$y(\theta) = a + a\cos(180 - \theta) = a\,[1 - \cos(\theta)]$$

Ejercicio 2 *Muestra que el área bajo un arco de cicloide es tres veces el área del círculo rodante*

Solución De lo anterior se obtiene que:

$$y = a\,[1 - \cos(\theta)] \qquad dx = a\,[1 - \cos(\theta)]\,d\theta$$

Recordando el área bajo una curva esta definida por:

$$\int_0^{2\,\pi} y\,dx = a^2 \int_0^{2\,\pi} [1 - \cos(\theta)]^2\,d\theta = a^2 \int_0^{2\,\pi} [1 - 2\,\cos(\theta) + \cos^2(\theta)]\,d\theta,$$

$$= a^2 \left[\int_0^{2\,\pi} d\theta - 2\int_0^{2\,\pi} \cos(\theta)\,d\theta + \int_0^{2\,\pi} \cos^2(\theta) d\theta\right] = a^2\,(2\pi + 0 + \pi) = 3\,a^2\,\pi$$

Ejercicio 3 *Prueba que la longitud de un arco de cicloide es cuatro veces el diámetro del círculo rodante*

Solución Aplicando la definición de longitud de arco:

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta = a \int_0^{2\pi} \sqrt{\operatorname{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta) + 1 - 2\cos(\theta)}\, d\theta$$

$$= 2\,a \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1-\cos(\theta)}{2}}\, d\theta = 2\,a \int_0^{2\pi} sen\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta = 4\,a\,[\cos 0 - \cos(\pi)] = 8\,a$$

Ejercicio 4 *Muestra que la tangente a la cicloide en un punto $P = (\theta_1)$ pasa por el polo norte del círculo que define a P*

Solución Tenemos que la derivada al punto P de la curva es:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\operatorname{sen}(\theta_1)}{1-\cos(\theta_1)}$$

Aplicando punto pendiente:

$$y - a[1-\cos(\theta_1)] = \frac{\operatorname{sen}(\theta_1)}{1-\cos(\theta_1)}\,[x - a\,\theta_1 + a\operatorname{sen}(\theta_1)]$$

Encontrando la coordenada y para $x = a\,\theta_1$

$$y\,[1-\cos(\theta_1)] - a[1-\cos(\theta_1)]^2 = a\ \operatorname{sen}^2(\theta_1)$$

$$y\,[1-\cos(\theta_1)] = a\,[sen^2(\theta_1) + \cos^2(\theta_1)] + a - 2\,a\ \cos(\theta_1)$$

$$y = 2a$$

Por tanto la recta pasa por el punto $(a\,\theta_1, 2a)$, las coordenadas del polo norte del círculo.

2. La baquistócrona

En 1696, Johann Bernoulli propuso y resolvió el problema de la baquistócrona.
El problema fue publicado sin solución en Acta Eruditorium como un reto para otros matemáticos de la época. El problema es este: dados dos puntos en un plano vertical, P_0 y P_1, tales que P_1 esta más bajo que P_0, pero no exactamente abajo de él (*i.e, tienen distinta coordenada* x), se debe encontrar la curva que minimize el tiempo de recorrido de una pelota que se desliza a lo largo de la curva desde el punto P_0 al punto P_1, la solución, si existe, se llama curva baquistócrona.

La pelota tiene masa m y rueda sin fricción, únicamente sujeta a la fuerza de gravedad. L aceleración de la gravedad se denota por g.

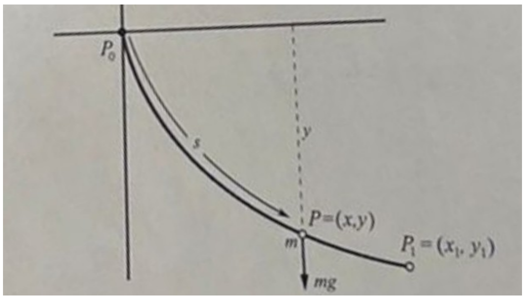

Figura 3: El problema de la baquistócrona

Supón que $P_0 = (0,0)$, $P_1 = (x_1, y_1)$, con $x_1 > 0$, $y_1 < 0$. El problema de Bernoulli puede enunciarse así: La pelota está en reposo en el punto P_0, así que su velocidad y energía cinética son cero. El trabajo hecho por la fuerza de gravedad al jalar la pelota hacia abajo, desde el origen a un punto $P = (x, y)$ es mgy $(y < 0)$.Esta cantidad debe coincidir con el aumento en la energía cinética de la pelota,al tiempo que resbala por la curva hacia P, luego:

$$mgy = \frac{1}{2} m v^2$$

Y por tanto:

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{2gy}$$

Ejercicio 5 *Prueba que:*

$$dt = \frac{\sqrt{1 + (dy/dx)^2}}{\sqrt{2gy}}\, dx$$

Solución Basta notar la siguiente relación entre ds, dx, dy:

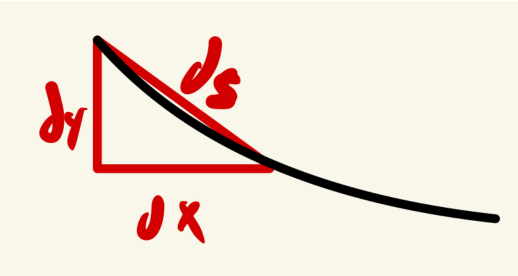

Figura 4: Diferencial de arco

Por el teorema de Pitagoras se sigue:

$$ds = \sqrt{1 + (dy/dx)^2}\, dx$$

Despejando se tiene que:

$$dt = \frac{\sqrt{1 + (dy/dx)^2}}{\sqrt{2gy}}\, dx$$

Ejercicio 6 *El tiempo total T_1 que la pelota tarda en ir de P_0 a P_1 dependerá de la forma de la curva, que se representa como la gráfica de $y = f(x)$. Prueba que:*

$$T_1 = \int_0^{x_1} \sqrt{\frac{1 + (y')^2}{2gy}}\, dx$$

Ahora, el problema de la braquistócrona se reduce a encontrar la curva $y = f(x)$ que pasa por los punto P_0 y P_1, y que minimiza esta integral.

Solución Bastara integrar la expresión del ejercicio anterior:

$$\int_0^{T_1} ds = T_1 = \int_0^{x_1} \sqrt{\frac{1+(y')^2}{2gy}}\, dx$$

Ejercicio 7 *Calcula el tiempo* T_1 *para el segmento recto que conecta* $P_0 = (0,0)$ *con* P_1

Solución Tenemos que la ecuación de una recta que pasa por el origen y el punto P_1:

$$y = \frac{y_1}{x_1}\, x$$

De donde se obtiene que:

$$y' = \frac{y_1}{x_1}$$

Reemplazando:

$$T_1 = \sqrt{\frac{x_1^2 + y_1^2}{2\, y_1\, x_1\, g}} \int_0^{x_1} \frac{1}{x}\, dx = \sqrt{\frac{2\,(x_1^2 + y_1^2)}{g\, y_1}}$$

3. La ley de Snell

La figura 5 (izq.) representa la trayectoria de un rayo de luz al pasar de un medio, donde la velocidad de la luz es v_1, a otro más denso donde la velocidad es $v_2 < v_1$. De acuerdo al principio de Fermat, la luz viajara de A a B siguiendo la trayectoria que minimiza el tiempo de recorrido.

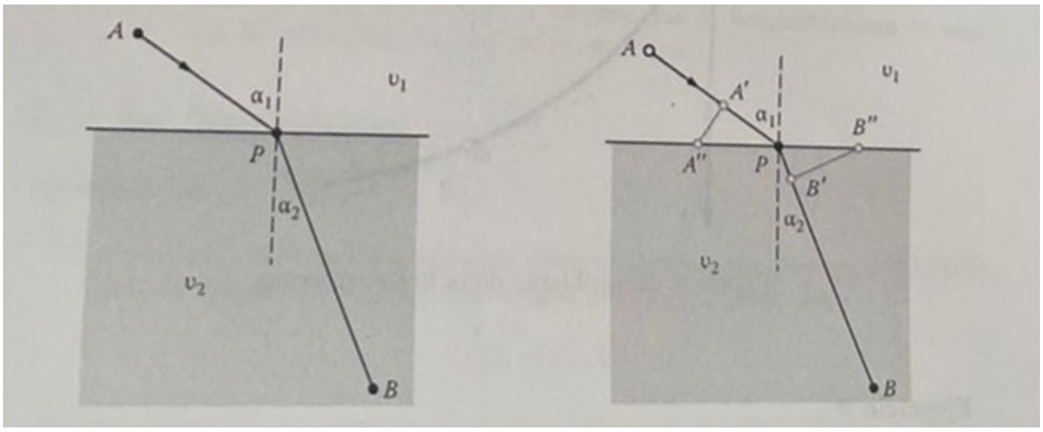

Figura 5: Ley de Snell

Ejercicio 8

a) Prueba que dicha trayectoria esta caracterizada por la ecuación:

$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha_1)}{v_1} = \frac{\operatorname{sen}(\alpha_2)}{v_2}$$

Esto se le llama la ley de Snell

b) Prueba que la ley de Snell puede refrasearse de la siguiente manera . Considera una línea perpéndicular al rayo de luz que se mueve a la velocidad de la luz (esto es un frente de onda).En la figura 5 (der.) se dibujan frentes de onda para los medios $A'A''$ Y $B'B''$. Entonces el punto de intersección del frente de onda con la recta que separa ambos medios se mueve a velocidad constante;en la figura A" y B" se mueven a la misma velocidad a lo largo de la recta horizontal.

c) Enuncie la ley de Snell para un rayo que cruza n capas, cada una de densidad constante.

d) El principio de Fermat sigue siendo válido para un rayo que cruza un medio de densidad variable, a través del cual el rayo se mueve ahora siguiendo una curva en lugar de una poligonal.

Usando c) y tomando un límite, deriva la ley de Snell para un medio de densidad variable:

$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{v} = c$$

donde α es el ángulo entre la curva y la vertical , y donde v es la velocidad de la luz en ese punto.

Solución

a) La siguiente figura muestra la trayectoria de un rayo de luz al pasar de un medio a otro:

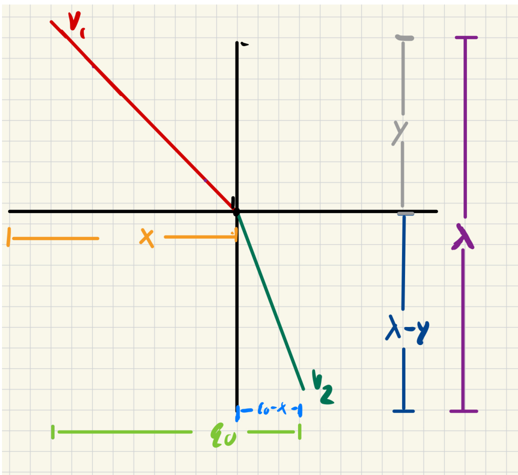

Figura 6: Trayectoria de un rayo de luz

De lo anterior podemos concluir que, el tiempo total, en función de la coordenada x, que tarda el rayo en recorrer las distancias anteriores es:

$$T(x) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(\epsilon - x)^2 + (\lambda - y)^2}}{v_2}$$

Aplicando teoría de máximos y mínimos, encontramos $T'(x)$ e igualamos a cero:

$$T'(x) = \frac{x}{v_1 \sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{(\epsilon - x)}{v_2 \sqrt{(\epsilon - x)^2 + (\lambda - y)^2}} = 0$$

Utilizando las relaciones geométricas tenemos que la condición que minimiza el tiempo es:

$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha_1)}{v_1} = \frac{\operatorname{sen}(\alpha_2)}{v_2}$$

b) Tomando la distancia sobre el eje x que viaja el rayo de luz en ambos casos obtenemos los siguientes triángulos rectangulos:

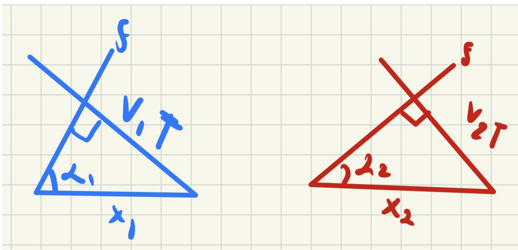

Figura 7: Relaciones geométricas

Se sigue:

$$\operatorname{sen}(\alpha_1) = \frac{v_1 T}{x_1} \qquad \operatorname{sen}(\alpha_1) = \frac{v_2 T}{x_2}$$

De la igualdad entre velocidades se sigue que:

$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha_1)}{v_1} = v' = \frac{\operatorname{sen}(\alpha_1)}{v_2}$$

c) Siguiendo lo anterior para n capas diferentes se tiene que:

$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha_1)}{v_1} = \frac{\operatorname{sen}(\alpha_2)}{v_2} = ... = \frac{\operatorname{sen}(\alpha_n)}{v_n}$$

La siguiente figura demuestra un ejemplo visual del fenómeno:

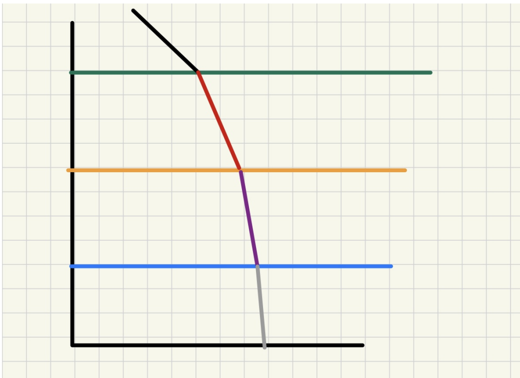

Figura 8: Trayectoria de un rayo de luz a través de n capas

d) Si hacemos que el rayo recorra cada vez más capas, es decir $n \to \infty$, tendremos que la condición de snell se transforma en:

$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{v} = c$$

4. La solución de Johan Bernoulli

Volviendo al problema de la baquistócrona considera un sistema coordenado que tenga a P_0 en el origen y P_1 en el cuarto cuadrante. La posición de la pelota tiene coordenadas x, y, $x \geq 0$, $y(x) \leq 0$

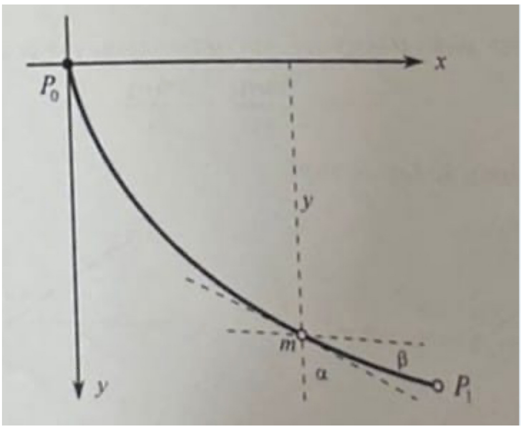

Figura 9: Trayectoria de un rayo de luz

Ejercicio 9

a) El argumento del ejercicio 8 d) dice que la baquitócrona satisface la ecuación:

$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{v} = c$$

También sabemos que $v = \sqrt{2gy}$. *Prueba que:*

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1 + (y')^2}}$$

b) Muestra usando la ecuación obtenida de la óptica, mecánica y cálculo, que la baquistt́ocrona satisface la ecuación diferencial:

$$y\,[1 + (y')^2] = c$$

para alguna constante $c > 0$

c) Resuelve la ecuación diferencial :

- *Separando variables, muestra que:*

$$x = \int \sqrt{\frac{y}{c-y}}\, dy$$

- *Calcula la integral usando la sustitución* $\tan^2(\phi) = \frac{y}{c-y}$. *Muestra que:*

$$x = \frac{c}{2}\left[2\phi - \operatorname{sen}(2\phi)\right]$$

- *Prueba que:*

$$y = \frac{c}{2}\left[1 - \cos(2\phi)\right]$$

- *Pon* $a = \frac{c}{2}$ *y* $\theta = 2\phi$ *y observa que la baquistócrona es una cicloide invertida con cúspide en el origen.*

Solución

a) Recordando las relaciones geométricas expuestas anteriormente:

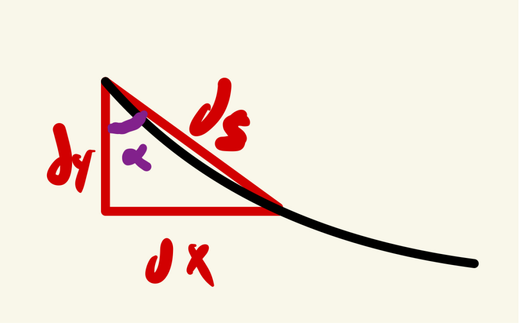

Figura 10: Ángulo hecho con la vertical

De donde se sigue:

$$\mathrm{sen}\,(\alpha) = \frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}}$$

b) De la condición de Snell y la conservación de la energia se sigue:

$$\frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}}\,\frac{1}{\sqrt{2gy}} = c$$

Elevando al cuadrado y despejando:

$$y\,[1+(y')^2] = c$$

c) Despejando la ecuación diferencial:

$$(y')^2 = \frac{c-y}{y} \implies \frac{1}{(y')^2} = \frac{c-y}{y} \implies \frac{1}{y'} = \sqrt{\frac{y}{c-y}}$$

Separando variables:

$$x = \int \sqrt{\frac{y}{c-y}}\,dy$$

Resolviendo la integral a través de la sutitución:

$$\tan^2(\phi) = \frac{y}{c-y} \implies 2\,c\tan(\phi)\sec^2(\phi)\,d\phi = \left[\frac{c}{c-y}\right]^2 dy$$

Utilizando el triángulo asociado al cambio de variable:

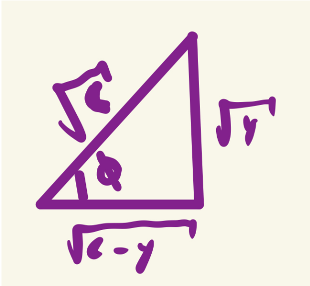

Figura 11: Triángulo asociado al cambio de variable

Se sigue que:

$$2\,c\tan(\phi)\,\sec^2(\phi)\,d\phi = \sec^4(\phi)\,dy \implies 2\,c\,\frac{\tan(\phi)}{\sec^2(\phi)}\,d\phi = dy$$

Reemplazando en la integral:

$$x = 2\,c\int \frac{\tan^2(\phi)}{\sec^2(\phi)}\,d\phi = 2\,c\int \operatorname{sen}^2(\phi)\,d\phi = c\int [1-\cos(2\phi)]\,d\phi$$

Resolviendo se tiene que:

$$x = \frac{c}{2}\,[2\phi - \operatorname{sen}(2\phi)] + q$$

Del hecho de que la curva pasa por $(0,0)$, se sigue que necesariamente $q = 0$. Despejando y:

$$\tan^2(\phi) = \frac{y}{c-y} \implies c\tan^2(\phi) = y[1+\tan^2(\phi)] \implies y = c\,\operatorname{sen}^2(\phi)$$

$$y = \frac{c}{2}\,[1-\cos(2\phi)]$$

Usando $a = \frac{c}{2}$ y $\theta = 2\phi$ se sigue:

$$x = a[\theta - \operatorname{sen}(\theta)]$$
$$y = a[1-\cos(\theta)]$$

5. La Tautócrona

Ejercicio 10

a) Calcula T_1, el tiempo transcurrido desde el origen hasta el punto $(x(\theta), y(\theta))$, para la braquistócrona. Prueba que:

$$T_1 = \theta_1 \sqrt{\frac{a}{g}}$$

b) El tiempo que la pelota tarda en alcanzar el mínimo de la cicloide $T_1 = \pi \sqrt{\frac{a}{g}}$. Compáralo con el tiempo obtenido para el segmento recto y verifica que es más pequeño.

c) Supón ahora que la pelota comienza a deslizarse desde un punto más bajo $P_0' = (x_0', y_0')$, sobre la baquistócrona esto es, $x_1 = a\,\pi > x_0' > x_0 = 0$, $y_1 = -2a < y_0' < y_0 = 0$, en la cicloide.

Prueba que el tiempo total que transcurrira desde que la pelota sale P_0' hasta que llega a P_1, esta dado por:

$$T = \sqrt{\frac{a}{g}} \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{\operatorname{sen}(\frac{\theta}{2})}{\sqrt{\cos^2(\frac{\theta_0}{2}) - \cos^2(\frac{\theta}{2})}}\, d\theta$$

d) Haz el cambio de variable $u = \frac{\cos(\frac{\theta}{2})}{\frac{\theta_0}{2}}$ para probar que $T = T_1 = \pi \sqrt{\frac{a}{g}}$

Esto es la propiedad tautócrona de la baquistocrona.

Solución

a) Recordando la formula del tiempo deducida anteriormente:

$$T_1 = \int_0^{x_1} \sqrt{\frac{1 + (y')^2}{2gy}}\, dx$$

Usando las relaciones calculadas anteriormente:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{\operatorname{sen}^2(\theta)}{[1-\cos(\theta)]^2} = \frac{1+\cos(\theta)}{1-\cos(\theta)}$$

$$dx = a\,[1-\cos(\theta)]\,d\theta$$

Por tanto el tiempo total es:

$$T_1 = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{\theta_1} \sqrt{\frac{1-cos(\theta)+1+\cos(\theta)}{a\,[1-\cos(\theta)]^2}}\, a\,[1-\cos(\theta)]\,d\theta = \sqrt{\frac{a}{g}} \int_0^{\theta_1} d\theta = \sqrt{\frac{a}{g}}\,\theta_1$$

b) Cuando se alcanza el mínimo global de la cicloide se tiene que $\theta = \pi$, por tanto se integrara hasta π, se sigue:

$$T_1 = \sqrt{\frac{a}{g}}\,\pi$$

Sabemos que las coordenadas x, y del minimo son $x = a\,\pi$, $y = 2a$, por tanto el tiempo T_2 que tarda una pelota en recorrer el segmento recto es:

$$T_2 = \sqrt{\frac{a^2(4+\pi^2)}{a\,g}} = \sqrt{\pi^2+a^2}\,\sqrt{\frac{a}{g}} > \pi\,\sqrt{\frac{a}{g}} = T_1$$

c) El unico cambio pertinente es que ahora $y_0 = a\,[1-\cos(\theta_0)]$, y que ahora la función $y(\theta)$ de altura sera $y = a\,[\cos(\theta_0)-\cos(\theta)]$, reemplazando en la formula del tiempo:

$$T_1 = \sqrt{\frac{a}{g}} \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{\sqrt{1-\cos(\theta)}}{\sqrt{\cos(\theta_0)-\cos(\theta)}}\,d\theta = \sqrt{\frac{a}{g}} \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{\sqrt{2\,\frac{1-\cos(\theta)}{2}}}{\sqrt{2\,[\frac{1+\cos(\theta_0)-1-\cos(\theta)}{2}]}}\,d\theta$$

Reescribiendo usando identidades trigonómetricas:

$$T_1 = \sqrt{\frac{a}{g}} \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{\operatorname{sen}(\frac{\theta}{2})}{\sqrt{\cos^2(\frac{\theta_0}{2})-\cos^2(\frac{\theta}{2})}}\,d\theta$$

d) Aplicando el cambio de variable $u = \frac{2\cos(\frac{\theta}{2})}{\theta_0}$, para resolver la integral:

$$du = \frac{-\operatorname{sen}(\frac{\theta}{2})}{\theta_0} \qquad r = \frac{2}{\theta_0}\cos\left(\frac{\theta_0}{2}\right)$$

$$T_1 = 2\sqrt{\frac{a}{g}}\int_0^r \frac{\theta_0}{\theta_0\sqrt{r^2-u^2}}\,du$$

Aplicando sustitución trigonometrica $u = r\ \operatorname{sen}(\lambda)$:

$$du = r\ \cos(\lambda)\,d\lambda$$

$$T_1 = 2\sqrt{\frac{a}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(\lambda)}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2(\lambda)}}\,d\lambda = 2\sqrt{\frac{a}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\lambda = \pi\sqrt{\frac{a}{g}}$$

Ejercicio 11 *Huygens utilizó la propiedad tautócrona de la baquistócrona para construir el péndulo de un reloj que se moviera describiendo una cicloide y, por tanto, cuyo periodo no cambiase si el péndulo perdía velocidad (el periodo de un péndulo normal depende de su amplitud).La idea es la siguiente: suspende un péndulo flexible cuya longitud sea igual a la longitud de un semi-arco de cicloide, justo de la intersección de dos semi-arcos de cicloide invertidos. Entonces la cabeza del péndulo describira otra cicloide.*

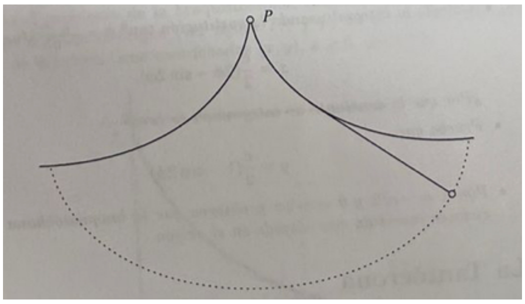

Figura 12: Péndulo de Huygens

Solución

Debido a que se trata de un pendulo la velocidad instantanea siempre sera perpéndicular al vector posición, el cual debido a la tensión necesariamente sera tangente al semiarco de cilcoide, como la velocidad instantanea es tangente a la curva que describe la trayectoria del pendulo, por tanto la tangente en un punto a la curva de la trayectoria del pendulo es ortogonal a la tangete a la cicloide en otro punto, se sigue que la trayectoria seguida es la evoluta de un medio arco de cicloide.

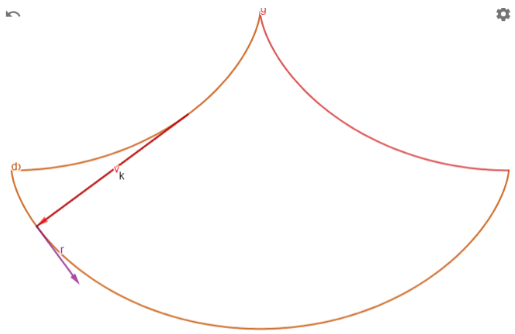

Figura 13: Relación entre la cicloide y la trayectoria del pendulo

Ahora consideremos un semiarco de cicloide con su máximo sobre el origen:

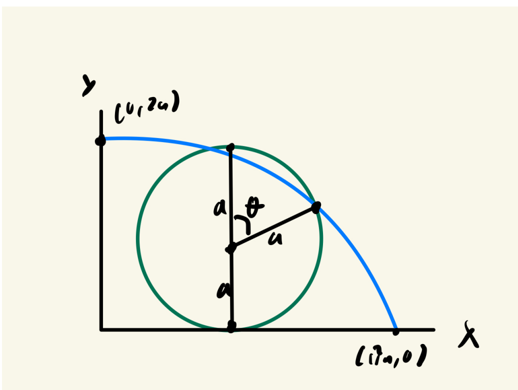

Figura 14: Medio arco de cicloide

Para encontar las ecuaciones paramétricas de la evoluta bastara con sumar el vector de posición con un vector que apunte en dirección tangente a la cicloide y cuya magnitud sea igual a la longitud de arco ”desenvuelta”hasta ese punto.

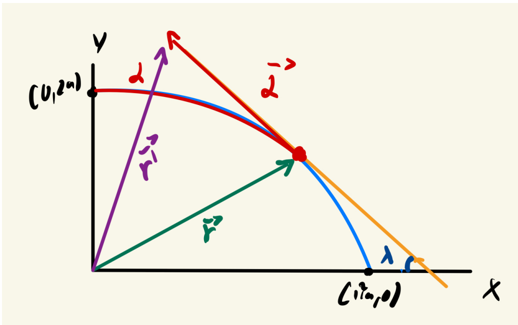

Figura 15: Vector de posición de la evoluta

La ecuaciones paramétricas del medio arco de cicloice se escriben como:

$$y = a\,[1+\cos(\theta)] \qquad x = a\,[\theta + \operatorname{sen}(\theta)]$$

Obteniendo el ángulo λ, de la recta tangente:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\operatorname{sen}(\theta)}{1+\cos(\theta)} = \frac{-2\,\operatorname{sen}(\frac{\theta}{2})\,\cos(\frac{\theta}{2})}{2\,\cos^2(\frac{\theta}{2})} = -\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \tan\left(-\frac{\theta}{2}\right)$$

Se sigue que $\lambda = -\frac{\theta}{2}$, ahora obteniendo la longitud de arco:

$$\int_0^\theta \sqrt{\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2}\, d\theta = \int_0^\theta \sqrt{2[1+\cos(\theta)]}\, d\theta = 2\int_0^\theta \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\, d\theta$$

$$= 4\,a\,\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Obteniento las coordenadas del vector asociado a la tangente a la cicloide en un punto:

$$x = 4\,a\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\,\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = 2\,a\,\mathrm{sen}(\theta)$$

$$y = -2\,a\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = -2\,a\,[1-\cos(\theta)]$$

Sumando al vector de posición las componentes anteriores obtenemos la ecuaciones parametricas de la evoluta:

$$x' = r_x - x = a\,[\theta + \mathrm{sen}(\theta)] - 2\,a\,\mathrm{sen}(\theta) = a\,[\theta - \mathrm{sen}(\theta)]$$

$$y' = r_y - y = a\,[1+\cos(\theta)] + 2\,a\,[1-\cos(\theta)] = a\,[1-\cos(\theta)] + 2\,a$$

La cuales describen claramente un semi-arco cicloide desplazado 2 unidades hacia arriba sobre el eje y e invertido, por tanto la evoluta de un semi-arco de cicloide es el mismo semi-arco de cicloide pero invertido y desplazado .