Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Cálculo I
Tarea II
Elías López Rivera
elias.lopezr@ciencias.unam.mx

Problemas sobre infimos y supremos

Ejercicio 1

Sea S un conjunto no vacio acotado en $\mathbb{R}$

i) *Sea $a > 0$ y sea $aS := \{as : s \in S\}$. Demostrar que:*

$$inf(aS) = a\,inf(S) \qquad sup(aS) = a\,sup(S)$$

ii) Sea $b < 0$ y sea $bS := \{bs : s \in S\}$. Demostrar que :

$$inf(bS) = b\,sup(S) \quad sup(bS) = b\,inf(S)$$

Demostración.

i) Tomemos $s \in S$, tenemos que como $sup(S)$, es cota superior de S, se sigue que $as \leq asup(S)$, pues $a > 0$ luego $asup(S)$, es cota superior de aS, por tanto $sup(aS) \leq asup(S)$, pues $sup(aS)$, es la mínima cota superior de $aS \cdots$ a)

Luego tomamos $as \in aS$, como $sup(aS)$ es cota superior se tiene que $as \leq sup(aS)$, como $a > 0 \implies \frac{1}{a} > 0$, por tanto $s \leq \frac{sup(aS)}{a}$, por tanto $\frac{sup(aS)}{a}$, es cota superior de S, luego $sup(A) \leq \frac{sup(aS)}{a}$, de nuevo usando que $a > 0$ se tiene que $asup(A) \leq sup(aS) \cdots$ b)

De a) y b, junto con la ley de tricotomia se sigue que $sup(aS) = asup(S)$

Tomamos $s \in S$, tenemos que como $inf(S)$, es cota inferior de S, se sigue que $ainf(S) \leq as$, pues $a > 0$ luego $ainf(S)$, es cota inferior de aS, por tanto $ainf(S) \leq inf(aS)$, pues $inf(aS)$, es la máxima cota inferior de $aS \cdots$ c)

Tomamos $as \in aS$, como $inf(aS)$ es cota inferior se tiene que $inf(aS) \leq as$, como $a > 0 \implies \frac{1}{a} > 0$, entonces $\frac{inf(aS)}{a} \leq s$, luego $\frac{inf(aS)}{a} \leq inf(S)$, por tanto $inf(aS) \leq ainf(S) \cdots$ d)

De c) y d) se tiene que necesariamente $inf(aS) = ainf(S)$

ii) Tomemos $s \in S$, se sigue que $s \leq sup(S)$, luego como $b < 0$, $bs \geq bsup(S)$, por tanto $bsup(S) \leq inf(bS) \cdots$ a)

Luego sea $bs \in bS$, tenemos que $inf(bS) \leq bs$, como $b < 0 \implies \frac{1}{b} < 0$, entonces $\frac{inf(bS)}{b} \geq s$, por tanto $sup(S) \leq \frac{inf(bS)}{b}$, se concluye que $inf(bS) \leq bsup(S)$, pues $b < 0 \cdots$ b)

De a) y b), se sigue que $inf(bS) = bsup(S)$

Tomemos $s \in S$ se sique que $inf(S) \geq s$, luego como $b < 0$, $binf(S) \geq bs$, entonces $sup(bS) \leq binf(S) \cdots$ c)

Luego sea $bs \in bS$, entonces $bs \leq sup(bS)$, luego como $b < 0 \implies \frac{1}{b} < 0$, $s \geq \frac{sup(bS)}{b}$, por tanto $inf(S) \geq \frac{sup(bS)}{b}$, finalmente $binf(S) \leq sup(bS) \cdots$ d)

De c) y d) se sigue que $binf(S) = sup(bS)$

$\square$

Ejercicio 2

Determine si el súpremo y el ínfimo de los siguientes conjuntos existen y de ser así encontralos:

$$A := \left\{1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$$

$$B := \left\{\frac{1}{n} - \frac{1}{m} : n, m \in \mathbb{N}\right\}$$

Demostración.

Tomemos $a = 1 - \frac{1}{1}$, como $1 \in \mathbb{N}$, se tiene que $a \in A$, como $A \neq \emptyset$, luego tenemos que $0 < 1 \leq n \ \forall \ n \in \mathbb{N}$, se sigue que $1 > \frac{1}{n} > 0$, por tanto $0 < 1 - \frac{1}{n} < 1 \ \forall \ n \in \mathbb{N}$, por tanto A es acotado, por axioma del súpremo $\exists \ inf(A), \ sup(A) \in \mathbb{R}$.

Tomemos $\delta \in \mathbb{R}$, tal que $0 < \delta < 1$, se sigue que $0 < 1 - \delta < 1$, aplicando propiedad arquimediana tenemos que $\exists \ n_\delta \in \mathbb{N}$ tal que $n_\delta(1 - \delta) > 1$, usando las propiedades de orden en $\mathbb{R}$, tenemos que $1 - \delta > \frac{1}{n_\delta} \implies \delta < 1 - \frac{1}{n_\delta} = a_\delta \in A$, por tanto $\forall \ \delta \in \mathbb{R}$, tal que $0 < \delta < 1$, se sigue que $\exists \, a_\delta \in A$, que cumple que $\delta < a_\delta$, esto implica que ningún número entre 0 y 1 puede ser cota superior de A, por tanto la mínima cota superior es de A debe ser 1, es decir $sup(A) = 1$.(Los números menores a 0 se descartan automáticamente pues 0 es cota inferior del conjunto).

De la misma manera tenemos que 0 es cota inferior de A, como $1 \in \mathbb{N}$, se tiene que $0 = 1 - \frac{1}{1} \in A$, luego sea $\epsilon > 0$, tenemos que $\exists \ a_\epsilon \in A$, tal que $a_\epsilon < 0 + \epsilon = \epsilon$, en este caso $a_\epsilon = 0$, por tanto $inf(A) = 0$.

Tomemos $n, m \in \mathbb{N}$, tal que $n > m$, por propiedades de orden en $\mathbb{R}$, se sigue que $\frac{1}{m} > \frac{1}{n}$, luego $1 > 0 > \frac{1}{n} - \frac{1}{m} > -\frac{1}{m}$, pues $\frac{1}{n} > 0$, luego como $m \geq 1$, entonces $\frac{1}{m} < 1$, multiplicando por menos $\frac{-1}{m} > -1$, por tanto $1 > \frac{1}{n} - \frac{1}{m} > -1$

Ahora tomemos el caso $n, m \in \mathbb{N}$, tal que $m < n$, por propiedades del orden de $\mathbb{R}$, se sigue que $\frac{1}{n} > \frac{1}{m}$, se sigue que $\frac{1}{n} - \frac{1}{m} > 0 > -1$, a su vez $\frac{1}{n} - \frac{1}{m} < \frac{1}{n}$, pues $\frac{1}{m} > 0$, como $n \geq 1$, por tanto $\frac{1}{n} < 1$, finalmente se concluye que $-1 < \frac{1}{n} - \frac{1}{m} < 1$

Tenemos que $\forall\, b \in B$ entonces $-1 < b < 1$, por tanto B es acotado, luego tomemos $0 = \frac{1}{1} - \frac{1}{1}$, como $1 \in \mathbb{N}$, entonces $0 \in B$, se sigue que $B \neq \emptyset$, por axioma del supremo se sigue que $\exists\ inf(B),\ sup(B) \in \mathbb{R}$

Tenemos que $sup(B) \geq 0$, pues $0 \in B$, tomemos $\delta \in \mathbb{R}$, tal que $0 < \delta < 1$, tomemos el n_δ definido anteriormente entonces se tiene que necesariamente $\delta < 1 - \frac{1}{n_\delta} \in B$, por tanto cualquier número menor a 1 y mayor a 0, no puede ser cota superior, se concluye que $sup(B) = 1$, pues es la cota superior más pequeña posible.

De la misma manera tenemos que $inf(B) \leq 0$, pues $0 \in B$, tomemos $\delta \in \mathbb{R}$, tal que $0 < \delta < 1$, tomemos de nuevo n_δ entonces se sigue que $\delta < 1 - \frac{1}{n_\delta}$, usando propiedades del orden de $\mathbb{R}$, si multiplicamos obtenemos $-1 < -\delta < 0$ y $-\delta > \frac{1}{n_\delta} - 1 \in B$, por tanto $-\delta > -1$, no puede ser cota inferior, se sigue que $inf(B) = -1$, pues es la cota inferior máxima posible.

$\square$

Ejercicio 3

Si un connjunto $S \subset \mathbb{R}$, contiene una de sus cotas superiores, demostrar que esta cota es el supremo de S.

Demostración.

Tomemos $l \in S$, de tal manera que $s \leq l\ \forall\ s \in S$, es decir l, es cota superior de S, tenemos que para que l sea súpremo también debe cumplir que $\forall \epsilon > 0\ \exists\ s_\epsilon \in S$ tal que $l - \epsilon < s_\epsilon$, en partícular sea $\epsilon > 0$, por propiedades del orden en los números reales tenemos que $l - \epsilon < l$, es decir $a_\epsilon = l$, pues $l \in S$, como tomamos $\epsilon > 0$ arbitraria se sigue que l cumple la condición y por tanto es súpremo. $\square$

Problemas sobre propiedades en $\mathbb{R}$

Ejercicio 4

Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, demuestre que:

i) $(-1)(-1) = 1$

ii) $(-1)(a+b) = -a - b$

iii) Si $a < b$ y $c < d$ demostrar que $a + c < b + d$

Demostración.

i)

$(-1) + (-1)(-1) = (-1)(1) + (-1)(-1)$ Propiedad del elemento neutro del producto

$(-1)(1) + (-1)(-1) = (-1)(1 + (-1))$ Propiedad distributiva del producto sobre la adición

(-1)(1+(-1))=(-1)(0) Propiedad del inverso aditivo

(-1)(0)=0 Todo número real multiplicado por 0 da como resultado 0

(-1)+(-1)(-1)=0=1+(-1)

Por tanto $(-1)(-1)$ es inverso aditivo de -1 al igual que 1, de la unicidad de este se deduce que $(-1)(-1) = 1$

ii)

(a+b)+(-1)(a+b)=(a+b)(1)+(-1)(a+b) Propiedad del elemneto neutro del producto

(a+b)(1)+(-1)(a+b)=(a+b)(1+(-1)) Distributividad del producto respecto a la adición

(a+b)(1+(-1))=(a+b)(0) Propiedad del inverso aditivo

(a+b)(0)=0 Todo número real multiplicado por 0 da como resultado 0

(a+b)+(-1)(a+b)=0=(a+b)+(-a-b)

Por tanto $(-1)(a+b)$ es inverso aditivo de $a+b$ al igual que $-a-b$, de la unicidad de este se deduce que $(-1)(a+b) = -a - b$

iii)

$a < b \implies b-a \in \mathbb{P}, c < d \implies d-c \in \mathbb{P}$, por tanto $b-a+d-c = (b+d)+(-a-c) \in \mathbb{P} \implies a+c < b+d$ $\square$

Ejercicio 5

Responda las siguientes preguntas, justifique a detalle:

i)*Si a es racional y b es irracional,¿Es $a+b$ necesariamente irracional?, ¿Qué pasa si ambos son irracionales, cóm es $a+b$?*

ii)*Si a es racional y b es irracional, ¿Sera ab irracional?*

Demostración.

i) Sea $a \in \mathbb{Q}$ y $b \in \mathbb{I}$ demostremos que $a+b \in \mathbb{I}$

Procedemos por contradicción, es decir $a+b=c \in \mathbb{Q}$, como $a \in \mathbb{R}$, $\exists\ -a \in \mathbb{R}$ tal que $a+(-a)=0$, por tanto sea $b=0+b=a+(-a)+b=c+(-a)$

Como $a \in \mathbb{Q}$, tenemos que $a=\frac{m}{n}$, con $m,n \in \mathbb{Z}$, por tanto $-a=\frac{-m}{n}$, se sigue que $-a \in \mathbb{Q}$

Luego como $\mathbb{Q}$ es cerrado bajo la adición se tiene que necesariamente $b=c+(-a) \in \mathbb{Q}$, lo cual es una contradicción ya que por hipótesis se tenia que $b \in \mathbb{I}$

ii) Si $a=0$, como $b \in \mathbb{R}$, se sique que $a(b)=0$, por tanto $a(b)=0 \in \mathbb{Q}$.

Tomemos entonces $a \neq 0$, con $a \in Q$, $b \in \mathbb{I}$, demostremos que $ab \in \mathbb{I}$

Procedemos por contradicción es decir $ab=c \in \mathbb{Q}$, como $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ $\exists \frac{1}{a} \in \mathbb{R}$, tal que $\frac{1}{a}(a)=1$, por tanto sea $b=b(1)=\frac{1}{a}(a)(b)=(c)\frac{1}{a}$.

Tenemos que $a=\frac{r}{s}$ con $r,s \in \mathbb{Z}$, pues $a \in \mathbb{Q}$, luego se tiene que $\frac{r}{s}\frac{s}{r}=1$, de la unicidad del neutro se tiene que $\frac{1}{a}=\frac{s}{r}$, por tanto $\frac{1}{a} \in \mathbb{Q}$

Como $\mathbb{Q}$, es cerrado bajo el producto se tiene que necesariamente $b=(c)\frac{1}{a} \in \mathbb{Q}$, una contradiccón pues $b \in \mathbb{I}$, por hipótesis, por tanto $ab \in \mathbb{I}$

$\square$