Problema 8

Elías López Rivera [1]

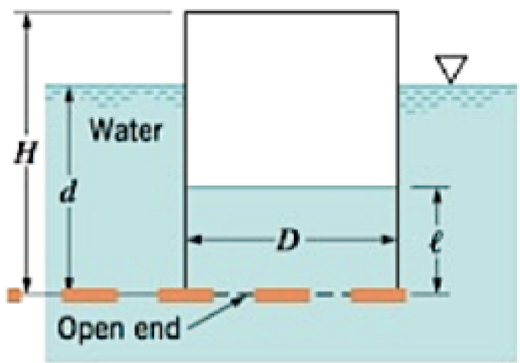
Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

11 de julio de 2025

1. Enunciado

Considere un recipiente hueco de altura H, ancho S y largo D que será sumergido en un contenedor de agua como se observa en la figura. Al ir introduciendo más profundo el recipiente el nivel denotado por l irá aumentando.



a) Calcule el aumento del nivel de agua en el interior del recipiente l como función de la profundidad d.
b)Además, realice un bosquejo de los resultado en el intervalo $0 \leq d \leq H$, en el caso donde la altura del recipiente es 1 m. Suponga que la temperatura del aire del recipiente permanece constante y se comporta como un gas ideal.

2. Solución

a) Consideremos el aire dentro del contenedor, debido a que este mantiene una temperatura constante tendremos un proceso isotérmico

$$P_0V_0 = P_1V_1$$

Antes de sumergir el recipiente este cuenta con una presión P_0 igual a la atmosférica, posteriormente encontraremos la presión del aire al estar sumergido una altura d, a través del cambio de volumen, es claro que cuando el recipiente se encuentra bajo el agua la columna de aire contenida en este es igual a H-l , tendremos:

$$P_0DHS = P_1(H-l)DS \implies P_1 = \frac{H}{H-l}P_0 \tag{1}$$

Si nos situamos a la misma altura de la overtura del recipiente, al estar el fluido en equilibrio, debera haber la misma presión en cualquier punto. Si tomamos un punto fuera del recipiente la presión será igual a $P_t = \rho gd+P_0$, si situamos un punto dentro del recipiente la presión será $P_t' = \rho gl + P_1$ con P_1 la presión del aire dentro del recipiente, igualando ambas presiones obtenemos:

$$\rho gd + P_0 = \rho gl + P_1 \tag{2}$$

De (1), (2) obtenemos:

$$\rho g(d-l) = P_0\frac{l}{H-l} \implies l^2 - l(d+H+\frac{P_0}{\rho g}) + Hd = 0 \tag{3}$$

Obtenemos una ecucación de segundo grado para l, aplicando la fórmula de Baskhara a (3):

$$l_{1,2} = \frac{\frac{P_0}{\rho g} + H + d \pm \sqrt{\frac{P_0}{\rho g}\left[\frac{P_0}{\rho g} + 2(H+d)\right] + (H-d)^2}}{2} \tag{4}$$

Es claro que si se elige el signo positivo, $l > H$ lo cual no tiene sentido físico, por lo que se restringe (4) a la solución que toma el signo negativo:

$$l_= \frac{\frac{P_0}{\rho g} + H + d - \sqrt{\frac{P_0}{\rho g}\left[\frac{P_0}{\rho g} + 2(H+d)\right] + (H-d)^2}}{2} \tag{5}$$

Notemos que (5) tiene sentido Físico ya que si $d = 0$ se obtiene que $l = 0$.

b) Valuaremos l para los valores 0,0.1,0.2,0.3,0.4,0.5,0.6,0.7,0.8,0.9,1 como se muestra en la siguiente tabla:

d[m]	l[m]
0	0
0.1	0.00874
0.2	0.01735
0.3	0.025832
0.4	0.03417
0.5	0.04238
0.6	0.050467
0.7	0.05842
0.8	0.066263
0.9	0.073980
1	0.0895