Cicloide

Elías López Rivera [1]

[1] Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas.
{[1]elopezr2300}@alumno.ipn.mx.

28 de junio de 2024

1. Enunciado

Un punto P está fijo sobre la orilla de una rueda de radio R, la rueda se desliza sin resbalar sobre una superficie horizontal como se muestra en la figura.La trayectoria que describe el punto P se conoce como cicloide.

a) Demuestra que las coordenadas del punto P están dadas por las expresiones:

$$x\,(t) = R\,[\theta\,(t) - \operatorname{sen}\,(\theta\,(t))]$$

$$y\,(t) = R\,[1 - \cos\,(\theta\,(t))]$$

Donde $\theta\,(t)$, varia según $\theta\,(t) = \omega\,t$ y es descrito en la siguiente figura:

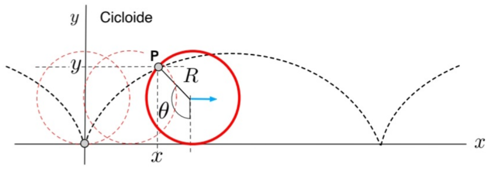

Figura 1: Cicloide

b) Determine las componentes de velocidad y de aceleración de la partícular en función del tiempo.

c)Determine en que instantes la partícula esta instantaneamente en reposo, las coordenadas en ese instante, así como la magnitud y dirección de la aceleración

2. Solución

a) Observando el siguiente dibujo del problema:

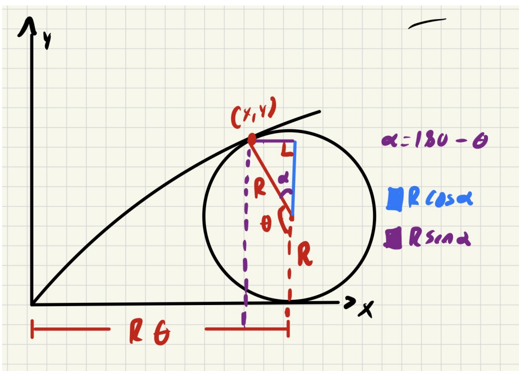

Figura 2: Esquema del problema

Se obtienen las siguientes relaciones:

$$x(\theta) = R\,\theta - R\text{ sen}\,(180 - \theta) = R\,[\theta - sen(\theta)]$$

$$y(\theta) = R + R\cos\,(180 - \theta) = R\,[1 - \cos\theta]$$

b) Reemplazando $\theta\,(t)$:

$$x\,(t) = R[\omega\,t - \text{sen}\,(\omega\,t)]$$

$$y\,(t) = R[1 - \cos\omega\,t]$$

Obteniendo velocidades:

$$V_x = \frac{d}{dt}\, x\,(t) = R\,\omega[1 - \cos\,(\omega\, t)]$$

$$V_y = \frac{d}{dt}\, y\,(t) = R\,\omega\; \mathrm{sen}\,(\omega\, t)$$

Obteniendo aceleraciones:

$$a_x = \frac{d^2}{dt^2}\, x\,(t) = R\,\omega^2\; \mathrm{sen}\,(\omega\, t)$$

$$a_y = \frac{d^2}{dt^2}\, y\,(t) = R\,\omega^2\; \cos\,(\omega\, t)$$

c) Si la partícula esta en reposo

$$\begin{gathered} 1 = R\,\omega = R\,\omega\; \cos\,(\omega\, t) \\ R\,\omega\; \mathrm{sen}\,\omega\, t = 0 \implies \mathrm{sen}\,\omega\, t = 0 \end{gathered}$$

Como $0 \leq \theta \leq 2\pi$ se sigue que $\omega\, t = 2\pi \implies t = 2\pi/\omega$ o que $t = 0$, hallando las coordenadas de reposo:

$$x\left(\frac{2\,\pi}{\omega}\right) = \frac{2\,\pi}{\omega}\, R\,\omega = 2\,\pi\, R$$

$$y\left(\frac{2\pi}{\omega}\right) = R - R = 0$$

Finalmente encontrando aceleraciones:

$$a_y\left(\frac{2\pi}{\omega}\right) = R\,\omega^2\,\cos{(2\pi)} = R\,\omega^2$$

$$a_x\left(\frac{2\pi}{\omega}\right) = R\,\omega^2\,\operatorname{sen}{(2\pi)} = 0$$