Teorema del punto fijo

Elías López Rivera [1]

[1] Universidad Nacinal Autónoma de México
Facultad de Ciencias.
{[1]elias.lopezr}@ciencias.unam.mx

15 de junio de 2025

1. Un teorema del punto fijo

Ejercicio 1 (El espacio de las funciones continuas.)
Sea $C[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \; es \; continua\}$. En $C[a,b]$, se define una distancia así: sí $f, g \in C[a,b]$ entonces:

$$d(f,g) = sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [a,b]\}$$

Prueba que d es una distancia , i.e, prueba que:

1. $d(f,g) = d(g,f)$, *para toda* $f, g \in C[a.b]$
2. $d(f,g) \geq 0$ *para toda* $f, g \in C[a,b]$ y $d(f,g) = 0$, *si y solo si* $f = g$
3. *La desigualdad del triángulo*: $d(f,g) \leq d(f,h) + d(h,g)$, *para toda* $f, g, h \in C[a,b]$

Solución

Tomamos $f, g, h \in C[a,b]$.

1) Se tiene que $|f(x) - g(x)| = |g(x) - f(x)| \; \forall \; x \in [a,b]$ se sigue que:

$$d(f,g) = sup\{|f(x)-g(x)| : x \in [a,b]\} = sup\{|g(x)-f(x)| : x \in [a,b]\} = d(g,f)$$

2) Es claro que $0 \leq |f(x) - g(x)| \; \forall \; x \in [a,b]$, se sigue:

$$0 \leq sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [a,b]\} = d(f,g)$$

Si $f = g$ se sigue $|f(x) - g(x)| = 0 \; \forall \; x \in [a,b]$ por tanto
$0 = sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [a,b]\} = d(f,g)$

Si $0 = d(f,g) = sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [a,b]\}$, entonces sea $\epsilon > 0$ se sigue que para $x \in [a,b]$ $0 \leq |f(x) - g(x)| < \epsilon$, del hecho de que ϵ es arbitrario se sigue que $|f(x) - g(x)| = 0$, por tanto $f(x) = g(x)$, como el x es arbitrario se concluye que $f = g$

3) Por desigualdad del triángulo $|f(x) - g(x)| \leq |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)|$ $\forall\ x \in [a,b]$, aplicando la condición de supremo:

$$d(f,g) = sup\{|f(x)-g(x)| : x \in [a,b]\} \leq |f(x)-h(x)|+|h(x)-g(x)| \leq d(f,h)+d(h,g)$$

Definición 1

- *Sea $\{f_n \in C[a,b], n \geq 1\}$. Si $f : C[a,b] \to \mathbb{R}$, es una función, decimos que la sucesión f_n converge a f si*

$$\lim_{n\to\infty} d(f_n, f) = 0$$

- *Decimos que $\{f_n \in C[a,b], n \geq 1\}$es una sucesión de Cauchy si para toda $\epsilon > 0$, existe N tal que si $n, m \geq N$ entonces $d(f,g) < \epsilon$*

Ejercicio 2 *Prueba que si $\{f_n \in C[a,b], n \geq 1\}$ coverge a f, entonces $f \in C[a,b]$, i.e, f es continua.*

Solución

Tomemos $x, x_0 \in [a,b]$, sea $\frac{\epsilon}{3} > 0$, como f_n converge a f se sigue que:

$$\exists\ K \in \mathbb{N} : |f(x) - f_K(x)| < \frac{\epsilon}{3}\ \ \forall\ x \in [a,b]$$

Partícularmente se sigue que:

$$|f_K(x_0) - f(x_0)| < \frac{\epsilon}{3}$$

Como f_K es continua se sigue que para $\frac{\epsilon}{3} > 0$:

$$\exists\ \delta \in \mathbb{R}^+ : 0 < |x - x_0| < \delta \implies |f_K(x) - f_K(x_0)| < \frac{\epsilon}{3}$$

Usando la desigualdad del triángulo generalizada y reestringiendo $0 < |x - x_0| < \delta$, se tiene:

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - f_K(x) + f_K(x) - f_K(x_0) + f_K(x_0) - f(x_0)|$$

$$\leq |f(x) - f_K(x)| + |f_K(x) - f_K(x_0)| + |f_K(x_0) - f(x_0)|$$

$$< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$$

Se concluye que f es continua.

Ejercicio 3 *Prueba que si* $\{f_n \in C[a,b], n \geq 1\}$ *es una sucesión de Cauchy entonces existe* $f \in C[a,b]$ *tal que* f_n *coverge a* f

Solución

De la desigualdad $|f_m(x) - f_n(x)| \leq d(f_m, f_n)$, y del hecho de que f_n es una sucesión de Cauchy en $C[a,b]$, se sigue que $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy $\forall\ x \in [a,b]$ dentro de $\mathbb{R}$, como $\mathbb{R}$ es completo se sigue que existe $f(x)$ tal que:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \ \ \forall\ x \in [a,b]$$

Definimos F de tal manera que $F(x) = f(x)$ para toda $x \in [a,b]$, por tanto tomemos $\epsilon > 0$, se tiene que:

$$\exists\, K \in \mathbb{N} : d(f_m, f_n) < \epsilon \ \ \forall\ m,\, n \geq K$$

Si en partícular hacemos que $m \to \infty$, se sigue que la confición se reescribe:

$$\exists\ K \in \mathbb{N} : d(F, f_n) < \epsilon \ \ \forall\ n \geq K$$

De donde se sigue que f_n converge a F, del inciso anterior se sigue que $F \in C[a,b]$

Definición 2 (Contracción) *Sea* $P : C[a,b] \to C[a,b]$ *una función. Decimos que* P *es una contracción si existe un número* $\alpha < 1$ *tal que, para toda* $f, g \in C[a,b]$

$$d(P(f).P(g)) \leq \alpha\, d(f,g)$$

Ejercicio 4 *Sea* P *una contracción. Demuestra que si* f_n*, converge a* f*, entonces* $P(f_n)$ *converge* $P(f)$

Solución

Como P es contracción se cumple que:

$$0 \leq d(P(f), P(f_n)) \leq \alpha\, d(f, f_n)$$

La desigualdad se sigue para el límite:

$$\lim_{n\to\infty} 0 \leq \lim_{n\to\infty} d(P(f), P(f_n)) \leq \lim_{n\to\infty} \alpha\, d(f, f_n)$$

Como $\alpha < 1$, y f_n converge a f se sigue que:

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} d(P(f), P(f_n)) \leq 0$$

Por teorema squeeze se tiene que:

$$\lim_{n\to\infty} d(P(f), P(f_n)) = 0$$

Por tanto $P(f_n)$ converge a $P(f)$

Ejercicio 5 *Prueba el siguiente teorema de punto fijo:*

Teorema 1 *Si P es una contracción, entonces tiene un único punto fijo, i.e, existe una única $f_0 \in C[a, b]$ tal que $P(f_0) = f_0$*

Solución

Sea $f \in C[a, b]$, primero consideremos la siguiente sucesión $P^{n+1}(f) = P(P^n(f))$, como la imagen de P, es un subconjunto del dominio de P, se sigue que la sucesión esta bien definida.

Demostraremmos por inducción la siguiente desigualdad:

$$d(P^{n+1}(f), P^n(f)) < \alpha^n\, d(P(f), f) \;\; \forall\, n \in \mathbb{N}$$

i) Base de inducción:

Como P es contracción se sigue directamente que:

$$d(P^2(f), P(f)) < \alpha\, d(P(f), f)$$

ii) Hipótesis de inducción:

Para algún $k \in \mathbb{N}$ se cumple que:

$$d(P^{k+1}(f), P^k(f)) < \alpha^k\, d(P(f), f)$$

iii) $P(k) \implies P(k+1)$:,

Del hecho de que P es contracción, y utilizando ii) se sigue que:

$$d(P^{k+2}(f), P^{k+1}(f)) < \alpha\, d(P^{k+1}(f), P^k(f)) < \alpha^{k+1}\, D(P(f), f)$$

Ahora Tomemos $m, n \in \mathbb{N}$, suponemos sin perdida de generalidad que $m > n$, aplicando las propiedades de d y la desigualdad anterior podemos obterner:

$$d(P^m(f), P^n(f)) = d(P^n(f), P^m(f)) \leq d(P^n(f), P^{n+1}(f))$$

$$+d(P^{n+1}(f), P^{n+2}(f)) + ... + d(P^{m-1}(f), P^m(f))$$

$$\leq \; d(P(f), f) \, [\alpha^n + \alpha^{n+1} + ... + \alpha^{n+m-n-1}]$$

$$= d(P(f), f) \, \alpha^n \, [1 + \alpha + \alpha^2 + ... + \alpha^{m-n-1}]$$

Podemos acotar con la convergencia de la serie geométrica ya que $\alpha < 1$:

$$d(P^n(f), P^m(f)) \leq \left[\frac{1}{1-\alpha}\right] \alpha^n \, d(P(f), f)$$

Tomemos el límite cuando $n \to \infty$, como $\alpha < 1$, se obtiene que $\lim_{n\to\infty} \alpha^n = 0$ de donde se obtiene que:

$$\forall \, \epsilon > 0 \; \exists \, K \in \mathbb{N} : n \geq K \implies |\alpha^n| = \alpha^n < \epsilon$$

Definimos:

$$\lambda := \frac{(1-\alpha)}{d(P(f), f)} \, \epsilon > 0$$

Con $\epsilon > 0$ arbitrario. Por lo anterior sabemos que:

$$\exists \, K \in \mathbb{N} : m, n \geq K \implies d(P^n(f), P^m(f)) \leq \left[\frac{1}{1-\alpha}\right] \alpha^n \, d(P(f), f) < \frac{\lambda \, d(P(f), f)}{1-\alpha} \, \epsilon = \epsilon$$

Por tanto la sucesión $(P^n(f))_{n\in\mathbb{N}}$, es una sucesión de cauchy y converge a $f_0 \in C[a, b]$

De lo anterior se sigue que:

$$P(f_0) = P(\lim_{n\to\infty} P^n(f)) = \lim_{n\to\infty} P^{n+1}(f) = f_0$$

Para probar la unicidad bastara suponer la existencia de dos puntos fijos diferentes f_0, f_1, debido a que P es contracción se sigue que:

$$0 < d(f_0, f_1) = d(P(f_0), P(f_1)) < \alpha \, d(f_0, f_1)$$

Lo cual es una contradicción ya que $\alpha < 1$, por tanto f_0, es unico

Conclusión *Este resultado te dice que si P es una contracción, la ecuación $P(f) = f$ siempre tiene una única solución; además te da un método (iterativo) para aproximar la solución*

Ejercicio 6 *Piensa cuidadosamente que propiedades de $C[a, b]$ usaste para demostrar el Teorema 1 y enuncia un teorema de punto fijo para otros espacios.*

Solución

Sea $P : X \to X$ **una contracción** sobre un espacio métrico **completo (***ie* **toda sucesión de Cauchy en el espacio converge a un punto del espacio)** (X, d), se tiene que existe un unico punto $z \in X$ tal que
$P(z) = z$

Ejercicio 7 *Dar un ejemplo de una $P : C[a, b] \to C[a, b]$ tal que:*

$$d(P(f), P(g)) < d(f, g)$$

para toda $f \neq g$, pero que no tiene un punto fijo, esto muestra la necesidad de la hipótesis $\alpha < 1$ en (1)

Solución

Definimos $P(f) = \lambda f$, es claro que $P(f) \in C[a, b]$, tomemos $f, g \in C[a, b]$, $f \neq g$, se sigue que:

$$|P(f)(x) - P(g)(x)| = |\lambda||f(x) - g(x)|$$

Si reestringimos $0 < \lambda < 1$, entonces se obtiene que:

$$|P(f)(x) - P(g)(x)| = |\lambda||f(x) - g(x)| < |f(x) - g(x)|$$

Además sabemos que un punto fijo f^* de P, es equivalente a $\lambda f^* = f^*$, lo cual solo es posible si $\lambda = 1$, así que nuestra P carece de puntos fijos ya que $\lambda \neq 1$

2. Ecuaciones de Fredholm

Definición 3 *Una ecuación de Fredholm (de segundo tipo) es una ecuación integral de la forma*

$$f(x) = \lambda \int_a^b K(x,y)\, f(y)\, dy + \phi(x)$$

que depende de las funciones (dadas) $K(x,y)$ y $\phi(x)$, de la función ***incógnita*** *f y de un parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$. K se conoce como el núcleo de la ecuación; la ecuación es homogénea si $\phi = 0$, e inhomegénea si ϕ no es identicamente cero.*

Ejercicio 8 *Supón que $K(x,y)$ y ϕ son continuas en el cuadrado $a \leq x \leq b, a \leq y \leq b$ (en particular,$|K(x,y)| \leq M$, para alguna M, en el cuadrado). Sí $f \in C\,[a,b]$, prueba que la función g definida por*

$$g(x) = \lambda \int_a^b K(x,y)\, f(y)\, dy + \phi(x)$$

Esta también en $C[a,b]$

Solución

Tomemos $x, x_o \in [a,b]$, $y \in [a,b]$ es claro que:

$$|g(x) - g(x_0)| = |\lambda \int_a^b (K(x,y) - K(x_o,y))\, f(y)\, dy \; + \; \phi(x) - \phi(x_o)|$$

Por desigualdad del triángulo, y las propiedades de la integral definida:

$$|g(x) - g(x_0)| \leq |\lambda \int_a^b (K(x,y) - K(x_o,y))\, f(y)\, dy| + |\phi(x) - \phi(x_o)|$$

$$\leq |\lambda| \int_a^b |K(x,y) - K(x_o,y)|\, |f(y)|\, dy \; + \; |\phi(x) - \phi(x_o)|$$

I) Debido a que ϕ es continua en el intervalo, se deduce que, sea $\frac{\epsilon}{2} > 0$:

$$\exists\ \delta_1 \in \mathbb{R}^+ : |x - x_0| < \delta_1 \implies |\phi(x) - \phi(x_0)| < \frac{\epsilon}{2} \qquad (1)$$

Además de la continuidad de ϕ, y la compacidad de $[a, b]$, se deduce que ϕ esta acotada; $\exists T \in \mathbb{R} : |\phi(x)| \leq T \; \forall x \in [a, b]$

II) Como el conjunto $[a, b] \times [c, d]$, es compacto y la función $K(x, y)$ es continua sobre el rectángulo, se sigue que la función es **uniformemente continua.** sobre el mismo rectángulo, por tanto definimos:

$$\psi := \frac{\epsilon}{2\,|\lambda|\,T\,(d-c)} > 0$$

Se sigue que:

$$\exists\; \delta_2 \in \mathbb{R}^+ : |x - x_0| < \delta_2,\;\; 0 = |y - y| < \delta_2 \implies |K(x, y) - K(x_o, y)| < \psi \;\; (2)$$

Sea $\delta := max\{\delta_1, \delta_2\}$, por (1) y (2), se sigue que:

$$|g(x) - g(x_0)| < |\lambda|\,\psi\,T \int_a^b dy \,+\, \frac{\epsilon}{2} \leq |\lambda|\,T\,(d-c)\,\psi \,+\, \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Ejercicio 9 *Define la función $P : C[a, b] \to C[a, b]$, dada por*

$$P(f)\,(x) = \lambda \int_a^b K(x, y)\, f(y)\, dy + \phi(x)$$

Muestre que si

$$|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$$

entonces P es una contracción. Argumenta que, en ese caso, la ecuación de Fredholm tiene una unica solución.

Solución

Tomemos $x, x_o \in [a, b]$, $y \in [a, b]$, $f, g \in C[a, b]$, se tiene que:

$$|P(f)(x) - P(g)(x)| = |\lambda| |\int_a^b K(x, y)(f(y) - g(y))\, dy|$$

$$\leq |\lambda| \int_a^b |K(x, y)|\, |f(y) - g(y)|\, dy$$

De lo anterior se tiene que:

$$d(P(f), P(g)) \leq |\lambda| \int_a^b |K(x,y)|\,|f(y) - g(y)|\,dy$$

$$\leq |\lambda|\,M \int_a^b |f(y) - g(y)|\,dy$$

$$\leq |\lambda| M (b-a)\,d(f,g)$$

Sí se tiene que :

$$|\lambda| < \frac{1}{M\,(b-a)} \implies \alpha := |\lambda|\,M\,(b-a) < 1$$

Por tanto:

$$d(P(f) - P(g)) \leq \ \alpha\,d(f,g) \quad \alpha < 1$$

Como $C[a,b]$ es completo y P es contracción, por el **Teorema del punto fijo** :

$$\exists\,!\,f^* : P(f^*) = f^*$$

3. Ecuaciones diferenciales

La siguiente lista de ejercicios prueba el siguiente teorema clásico de existencia y unicidad de soluciones para ecuaciones diferenciales ordinarias:

Teorema 2 *Sea $f : \Re \to \mathbb{R}$ una función continua, donde $\Re \subset \mathbb{R}^2$ es el cuadrado $(a, b) \times (a, b)$ que incluye al punto (x_0, y_0). Supón que f satisface la siguiente condición (Lipschitz) en y:*

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq M|y_1 - y_2|$$

para toda x. Entonces existe un intervalo $|x - x_0| \leq \delta$ en donde la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

tiene una solución

$$y = \phi(x)$$

que satisface la condición inicial

$$\phi(x_0) = y_0$$

Ejercicio 10 *Muestra que encontrar una solución a la ecuación diferencial que satisfaga una condición inicial dada, es equivalente a resolver la ecuación integral*

$$\phi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \phi(t))\, dt$$

Solución

Tomemos x_0 y valuemos $\phi(x_0)$:

$$\phi(x_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x_0} f(t, \phi(t))\, dt = y_0$$

Luego derivando y aplicando el T.F.C:

$$\frac{d\,\phi(x)}{d\,x} = \frac{d}{d\,x}\int_{x_0}^{x} f(t,\phi(t))\,dt = f(x,\phi(x)) = f(x,y)$$

Por tanto $\phi(x)$ cumple las condiciones para ser solución.

Ejercicio 11 *La continuidad de f implica que $|f(x,y)| \leq K$ en algún cuadrado más pequeño $\Re^* \subset \Re$ que incluye a (x_0, y_0). Prueba que puedes escoger $\delta > 0$ tal que*

1. $(x,y) \in \Re^*$, *siempre que* $|x - x_0| \leq \delta,\ |y - y_0| \leq K\,\delta$
2. $M\,\delta < 1$

Solución

Definimos el interior del rectangulo $\Re^*$: $\Re' := (a^*, b^*) \times (a^*, b^*)$, sea δ:

$$\delta := min\left\{|a^* - x_0|, |b^* - x_0|, \frac{|a^* - y_O|}{K}, \frac{|b^* - y_0|}{K}, \frac{1}{2\,M}\right\}$$

Es fácil notar que, sea $x, y \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\begin{aligned} |x - x_0| \leq \delta < |a^* - x_0| \\ |x - x_0| \leq \delta < |b^* - x_0| \\ |y - y_0| \leq K\,\delta < |a^* - y_0| \\ |y - y_0| \leq K\,\delta < |b^* - y_0| \end{aligned}$$

Cumplen que $(x,y) \in \Re^*$

Luego:

$$\delta < \frac{1}{2\,M} < \frac{1}{M} \implies \delta\,M < 1$$

Por tanto δ, **cumple las condiciones (1) y (2)**

Ejercicio 12 *Sea $C^* \subset C[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ el espacio de funciones $\phi(x)$ definidas en $|x - x_0| \leq \delta$, tales que $|\phi(x) - y_0| \leq K\,\delta$. Considera $P : C^* \to C^*$ definida por*

$$P(\phi)(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \phi(t))\, dt, \quad |x - x_0| \leq \delta$$

(a) Prueba que $\phi \in C^*$, implica $P(\phi) \in C^*$.

(b) Prueba que P es una contracción

Solución

a) Tomemos $\phi \in C^*$ y δ del ejercicio anterior, por la continuidad de $f(x, y)$ tenemos que P es continua en el intervalo $[x - \delta, x + \delta]$, como $|x - x_0| \leq \delta$, $|\phi(x) - y_0|, \leq K\,\delta$, se sigue que $(x, \phi(x)) \in \Re^*$ por tanto $|f(x, \phi(x))| \leq K$, se obtiene:

$$|P(\phi)(x) - y_0| = |\int_{x_0}^{x} f(t, \phi(t))\, dt| \leq \int_{x_0}^{x} |f(t, \phi(t))|\, dt \leq K|x - x_0| \leq K\,\delta$$

Se concluye que $P(\phi) \in C^*$

b) Tomando $\phi_1, \phi_2 \in C^*$ y la δ definida anteriormente, resstringiendo $|x - x_0| \leq \delta$:

$$|P(\phi_1) - P(\phi_2)| = |\int_{x_0}^{x} (f(t, \phi_1(t)) - f(t, \phi_2(t)))\, dt|$$

$$\leq \int_{x_0}^{x} |f(t, \phi_1(t)) - f(t, \phi_2(t))|\, dt$$

Se sigue que, aplicando la condición de Lipschitz:

$$d(P(\phi_1), P(\phi_2)) \leq \int_{x_0}^{x} |f(t, \phi_1(t)) - f(t, \phi_2(t))|\, dt$$

$$\leq M \int_{x_0}^{x} |\, \phi_1(x) - \phi_2(x)|$$

$$\leq M\, |x - x_0|\, d(\phi_1, \phi_2)$$

$$\leq M\, \delta\, d(\phi_1, \phi_2)$$

Definiendo:

$$\alpha := M\, \delta < 1$$

Se concluye que:

$$d(P(\phi_1), P(\phi_2)) \leq \alpha\, d(\phi_1, \phi_2)$$

Por tanto $P(\phi)$ es una contracción.

Ejercicio 13 *Usa el teorema de punto fijo, aplicado a P, para obtener la solución (OjO: para poder invocar el teorema de punto fijo, tendrás que probar que C^* es completo: ie que toda sucesión de Cauchy en C^* converge a un punto de C^*.)*

Solución

Definimos $\{\phi_n \in C^*, n \geq 1\}$ una suceción de Cauchy, como
$C^* \subset C[x - \delta, x + \delta]$ se sigue $\{\phi_n \in C[x - \delta, x + \delta], n \geq 1\}$, como
$(C[x - \delta, x + \delta], d)$, es completo se sigue que $\exists\, \phi \in C[x - \delta, x + \delta]$ tal que:

$$\lim_{n \to \infty} d(\phi_n, \phi) = 0$$

De lo anterior se obtiene que, sea $\epsilon > 0$:

$$\exists\ N \in \mathbb{N} : |\phi(x) - \phi_N(x)| \leq \epsilon$$

En particular $\phi_N \in C^*$ de donde se sigue que:

$$|\phi_N(x) - y_0| \leq K\, \delta$$

Usando las dos consecuencias anteriores:

$$|\phi(x)-y_0| = |\phi(x)-\phi_N(x)+\phi_N(x)-y_0| \leq |\phi(x)-\phi_N(x)|+|\phi_N(x)-y_0| \leq K\,\delta+\epsilon$$

Como ϵ es arbitrario se sigue que necesariamente:

$$|\phi(x) - y_0| \leq K\,\delta$$

Y por tanto $\phi \in C^*$ *ie* (C^*, d) es completo, de esto se sigue que como P es una contracción:

$$\exists\,!\,\phi^* : P(\phi^*) = \phi^*$$

Del ejercicio 10 se sigue el **teorema de existencia y unicidad (teorema 2)**