Problema 15

Elías López Rivera [1]

[1] Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de ciencias.

7 de julio de 2025

1. Enunciado

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto. Sí $x \in \mathbb{R}$ es un punto de acumulación de A. **demuestre** que toda vecindad de x intersecta a A en una cantidad infinita de puntos.

2. Solución

Como x es punto de acumulación se sigue que
$\forall \epsilon > 0 \ \exists y \in A : 0 < |x - y| < \epsilon$ por tanto:

$$\forall \tfrac{1}{n} \ n \in \mathbb{N} \ \exists y_n \in A : 0 < |x - y_n| < \tfrac{1}{n}$$

De lo anterior se deduce que $\exists K \in \mathbb{N} : n > K \implies |x - y_n| < \epsilon$

Para ϵ arbitrario.

Tomando $V \in V(x)$, sabemos que existe $\epsilon > 0 : (x - \epsilon, x + \epsilon) \subseteq V$, retomando lo demostrado tenemos que

$$\exists K \in \mathbb{N} : n > K \implies y_n \in V, \text{ como } y_n \in A \ \forall n \in \mathbb{N} \text{ se sigue que}$$
$$\{y_n : n > K\} \subseteq A \cap V$$