Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias

Examen Huwu

Problema 5

Elías López Rivera
elias.lopezr@ciencias.unam.mx

Fecha: 15/09/2024

Problema 5

Si $a, b, c \in \mathbb{R}^{+}$, *entonces:*

$$24\sqrt{2} \leq \left[\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{c}\right)\left(c+\frac{1}{a}\right)\right]\left[\sqrt{\frac{a+b}{c}}+\sqrt{\frac{b+c}{a}}+\sqrt{\frac{c+a}{b}}\right]$$

Demostración.

i) Por la desigualdad entre la media aritmética y gemométrica se sigue que:

$$\sqrt{\frac{a}{b}} \leq \frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{b}\right) \implies 2\sqrt{\frac{a}{b}} \leq \left(a+\frac{1}{b}\right) \tag{1}$$

$$\sqrt{\frac{b}{c}} \leq \frac{1}{2}\left(b+\frac{1}{c}\right) \implies 2\sqrt{\frac{b}{c}} \leq \left(b+\frac{1}{c}\right) \tag{2}$$

$$\sqrt{\frac{c}{a}} \leq \frac{1}{2}\left(c+\frac{1}{a}\right) \implies 2\sqrt{\frac{c}{a}} \leq \left(c+\frac{1}{a}\right) \tag{3}$$

De (1), (2) y (3) se sigue que:

$$8 = 2^3 = 2^3\sqrt{\frac{abc}{cba}} \leq \left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{c}\right)\left(c+\frac{1}{a}\right)$$

ii) De nuevo aplicando la desigualdad entre la media aritmética y geométrica se obtiene que:

$$\left(\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}\right)^{\frac{1}{6}} \leq \frac{1}{3}\left[\sqrt{\frac{a+b}{c}}+\sqrt{\frac{b+c}{a}}+\sqrt{\frac{c+a}{b}}\right]$$

Tenemos lo siguiente:

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc} = \frac{a^2b+a^2c+b^2c+ac^2+ab^2+bc^2+2abc}{abc} = \frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+2 \tag{4}$$

Aplicando nuevamente la desigualdad entre las medias tenemos que:

$$\sqrt{\frac{abc}{cba}} \leq \frac{1}{3}\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}\right) \implies 3 \leq \frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a} \tag{5}$$

$$\sqrt{\frac{abc}{bca}} \leq \frac{1}{3}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right) \implies 3 \leq \frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \tag{6}$$

Aplicando (5) y (6) sobre (4), se sigue que:

$$3+3+2 = 8 \leq \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$$

Por tanto:

$$3\sqrt{2} = 3\,8^{\frac{1}{6}} \leq 3\left(\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}\right)^{\frac{1}{6}} \leq \left[\sqrt{\frac{a+b}{c}}+\sqrt{\frac{b+c}{a}}+\sqrt{\frac{c+a}{b}}\right]$$

iii) Combinando **i) y ii)** se sique que:

$$24\sqrt{2} = 8\,3\sqrt{2} \leq \left[\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{c}\right)\left(c+\frac{1}{a}\right)\right]\left[\sqrt{\frac{a+b}{c}}+\sqrt{\frac{b+c}{a}}+\sqrt{\frac{c+a}{b}}\right]$$

$\square$

Problema 6

Considere los números primos, ordenados de forma natural, es decir:

$$P_1 = 2,\ P_2 = 3\ P_3 = 5, \cdots$$

Demuestre que para cada $l \in \mathbb{N}$, $P_l < 2^{2^l}$

Demostración.

Primero probaremos que en géneral sea $n \in \mathbb{N}$ se tiene que:

$$p_{n+1} \leq p_1 p_2 \cdots p_n + 1$$

Es claro que sea $z = p_1 p_2 \cdots p_n + 1 \in \mathbb{Z}$, entonces existe p_k con $k \notin \{1, 2, \cdots, n\}$ tal que $p_k | z$, de otra manera habria un número primo p_i que divide a 1, por tanto de esto se obtiene que:

$$p_{n+1} \leq p_k \leq p_1 p_2 \cdots p_n + 1$$

Ahora demostraremos la proposición dada en el problema usando inducción fuerte:

i) Base de inducción

Es claro que $p_1 = 2 < 2^2$, por tanto el caso base es cierto.

ii) Hipótesis de inducción fuerte, tomemos que existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que para todo $i \leq k$, con $i \in \mathbb{N}$, se cumple que:

$$p_i < 2^{2^i}$$

iii)

Tomemos p_{k+1}, por la desigualdad mostrada antes se sigue que:

$$p_{k+1} \leq p_1 p_2 \cdots p_k + 1$$

Luego por **ii**) tenemos que:

$$p_{k+1} \leq p_1 p_2 \cdots p_k + 1 < 2^{2^1} 2^{2^2} \cdots 2^{2^k} + 1 = 2^{\sum_{i=1}^{k} 2^i} + 1$$

Aplicando la suma parcial de una serie geometrica:

$$p_{k+1} < 2^{2^{k+1}-2} + 1 < 2^{2^{k+1}-2} + 3(2^{2^{k+1}-2}) = 2^2(2^{2^{k+1}-2}) = 2^{2^{k+1}}$$

Poor tanto la proposición ha quedado demostrada $\square$