Problema 13

Elías López Rivera [1]

[1] Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de ciencias

26 de enero de 2025

1. Enunciado

(i) Si la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente, **demuestre** que la sucesión $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donde:

$$s_n := \frac{1}{n}(a_1 + ... + a_n) \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

es convergente. Más aún $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} a_n$

(ii) **Dé** un ejemplo de una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergente tal que la sucesión $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente.

2. Solución

Sea $\lim_{n\to\infty} a_n = l$, se sigue que:

$$\forall\ \frac{\epsilon}{2} > 0 \ \exists\ K_1 \in \mathbb{N}:\ n < K_1 \implies |a_n - l| < \frac{\epsilon}{2}$$

Sabemos que $\lim_{n\to\infty} a_n - l = 0$, por tanto:

$$\exists\, T \in \mathbb{R}:\ |a_n - l| < T\ \ \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Ahora sea $\lambda := \frac{\epsilon}{2Tk_1}$, por propiedad arquimediana:

$$\exists\ K_2 \in \mathbb{N} : n > K_2 \implies \frac{1}{n} < \lambda = \frac{\epsilon}{2TK_1} \implies \frac{TK_1}{n} < \frac{\epsilon}{2}$$

Tomemos $n > max\{K_1, K_2\}$, tenemos:

$$\left|\frac{a_1 + ... + a_n}{n} - l\right| = \left|\frac{a_1 + ... + a_n - nl}{n}\right| = \left|\frac{a_1 - l + ... + a_n - l}{n}\right| \leq \frac{|a_1 - l|}{n} + ... + \frac{|a_n - l|}{n}$$

Como $n > K_1$ se sigue:

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_1 + ... + a_n}{n} - l\right| &\leq \frac{|a_1 - l|}{n} + ... + \frac{|a_{k_1} - l|}{n} + \frac{|a_{k_1+1} - l|}{n} + ... + \frac{|a_n - l|}{n} \\ &< \frac{T}{n} + ... + \frac{T}{n} + \frac{\epsilon}{2n} + ... + \frac{\epsilon}{2n} \\ &< \frac{TK_1}{n} + \frac{(n - K_1)\,\epsilon}{2n} \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon\end{aligned}$$

Se concluye:

$$n > max\{K_1, K_2\} \implies \left|\frac{a_1 + ... + a_n}{n} - l\right| < \epsilon$$

Como ϵ es arbitrario se tiene que $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = l = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$

(ii) Tomemos $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (-1)^n$, es claro que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es divergente sin embargo $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} = 0$, al ser una sucesión constante es convergente.