Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Cálculo I
Tarea I
Elías López Rivera
elias.lopezr@ciencias.unam.mx

Problema sobre conjuntos

Ejercicio 1

Dados conjuntos A y B demostrar lo siguiente:

i) $(A \cap B) \cap (A \setminus B) = \emptyset$

ii) $A = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$

iii) $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$

Demostración.

i) Procedamos por contradicción, es decir $\exists \lambda \in (A \cap B) \cap (A \setminus B)$, se sigue que $\lambda \in (A \cap B)$ y $\lambda \in (A \setminus B)$, que es lo mismo que ($\lambda \in A$ y $\lambda \in B$) y ($\lambda \in A$ y $\lambda \notin B$), por tanto $\lambda \in B$ y $\lambda \notin B$, una clara contradicción, por tanto $(A \cap B) \cap (A \setminus B) = \emptyset$.

ii) Si $y \in A$, entonces tenemos dos casos:

1) $y \in B$

2) $y \notin B$

Por tanto ($y \in A$ y $y \in B$) o ($y \in A$ y $y \notin B$), por tanto $y \in A \cap B$ o $y \in A \setminus B$, que es equivalente a $y \in (A \cap B) \cup (A \setminus B)$, se concluye que $A \subseteq (A \cap B) \cup (A \setminus B) \cdots$ **(a)**

Si $x \in (A \cap B) \cup (A \setminus B)$, entonces $x \in A \cap B$ o $x \in A \setminus B$, por tanto ($x \in A$ y $x \in B$) o ($x \in A$ y $x \notin B$), en cualquiera de los dos casos $x \in A$, concluimos que $(A \cap B) \cup (A \setminus B) \subseteq A \cdots$ **b)**

De **a)** y **b)**, se sigue que $(A \cap B) \cup (A \setminus B) = A$

iii) Tomemos $z \in A \setminus (A \setminus B)$, por tanto $z \in A$ y $z \notin A \setminus B$ por tanto $z \in A$ y ($z \notin A$ o $z \in B$), como $z \in A$ se sigue que $z \notin A$ es falsa, por tanto necesariamente $z \in A$ y $z \in B$, que es lo mismo que $z \in A \cap B$, se concluye que $A \setminus (A \setminus B) \subseteq A \cap B \cdots$ **d)**

Si tomamos $r \in A \cap B$, entonces $r \in A$ y $r \in B$, por tanto $A \cap B \subseteq A$

Finalmente si $s \in A \cap B$ entonces $s \in A$ y $s \notin A \setminus B$, ya que por el ejercicio **i)** $(A \cap B) \cap (A \setminus B) = \emptyset$, por tanto $s \in A \setminus (A \setminus B)$, lo que implica que $A \cap B \subseteq A \setminus (A \setminus B) \cdots$ **e)**

De **d)** y **e)** se sigue que $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$

□

Problemas sobre funciones

Ejercicio 2

Considere la función:

$$f : \mathbb{R} \to \{\, y \in \mathbb{R} : -1 < y < 1 \}$$
$$x \to \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

Muestre que f es una biyección

Demostración.

Tomemos A, B conjuntos no vacios, decimos que $f : A \to B$ función, es invertible, si existe $g : B \to A$ función inversa, tal que $f \circ g = I_B$ y $g \circ f = I_A$, donde I_A e I_B representan la función identidad con dominio y codominio en A y B respectivamente

Lema

Sea $f : A \to B$ función, si f es invertible entonces f es biyectiva.

Demostración.

Tomemos que $g : B \to A$ función, es la inversa de f, luego sean $x_1, x_2 \in A$, tal que $f(x_1) = f(x_2)$, como ambos elementos estan en B y g es función significa que estos deben tener la misma imagen bajo g, pues a cada elemento del domino le corresponde un unico del contradominimo por tanto, $g(f(x_1)) = g(f(x_2)))$, que es lo mismo que $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$, como $g \circ f = I_A$ y tanto x_1 como x_2 estan contenidos en A se sigue que $x_1 = I_A(x_1) = I_A(x_2) = x_2$, se concluye que f es inyectiva $\cdots$ **a)**

Tomemos $y \in B$, como g es función, existe $x \in A$ tal que $x = g(y)$, luego $y = I_B(y) = f \circ g(y) = f(x)$ por tanto f es suprayectiva $\cdots$ **b)**

De **a)** y **b)** se sigue que f es una biyección. □

Definimos la función:

$$g : \{y \in \mathbb{R} : -1 < y < 1\} \to \mathbb{R}$$
$$x \to \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

g esta bien definida pues $-1 < y < 1 \implies y^2 < 1 \implies 1 - y^2 > 0$, ademas como el codominio de g es el dominio de f, y el dominio de g es codominio de f, la composición por ambos lados es posible, demostraremos que g es la inversa de f:

2) $f \circ g = I_{\{y \in \mathbb{R} : -1 < y < 1\}}$

Dos funciones son iguales si y solo si su dominio, contradominio y regla de correspondencia coinciden, se tiene que $f \circ g : \{y \in \mathbb{R} : -1 < y < 1\} \to \{y \in \mathbb{R} : -1 < y < 1\}$, tiene el mismo dominio y contradominio que $I_{\{y \in \mathbb{R} : -1 < y < 1\}}$, luego, sea $x \in \{y \in \mathbb{R} : -1 < y < 1\}$:

$$f \circ g\,(x) = \frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1}} = x = I_{\{y \in \mathbb{R} : -1 < y < 1\}}(x)$$

2) $g \circ f = I_{\mathbb{R}}$

De la misma manera $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, por tanto esta función tiene el mismo dominio y codominio de $I_{\mathbb{R}}$, luego, sea $x \in \mathbb{R}$:

$$g \circ f(x) = \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{x^2+1}}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2-x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1}} = x = I_{\mathbb{R}}\,(x)$$

De **1)** y **2)** se sigue que f es invertible, por el lema antes decrito f es una biyección sobre el conjunto $\{y \in \mathbb{R} : -1 < y < 1\}$. $\square$

Ejercicio 3

Sea f una función tal que $f : A \to B$, endonde $E \subseteq A$ y $G \subseteq A$. Demuestra que:

1) $f(E \cup G) = f(E) \cup f(G)$.

2) $f(E \cap G) \subseteq f(E) \cap f(G)$

Demostración.

1) Sea $y \in f(E) \cup f(G)$, entonces $y \in f(E)$ o $y \in f(G)$, tomemos ambos casos:

i) $y \in f(E)$, se sigue que $\exists\ x \in E$, por tanto $x \in E \cup G$, tal que $y = f(x)$, de lo anterior se sique que $y \in f(E \cup G)$

ii) $y \in f(G)$, se sigue que $\exists\ r \in G$, por tanto $r \in E \cup G$, tal que $y = f(r)$, de lo anterior se concluye que $y \in f(E \cup G)$

En ambos casos se tiene que $y \in f(E \cup G)$, por tanto $f(E) \cup f(G) \subseteq f(E \cup G) \cdots$ **a)**

Sea $\lambda \in f(E \cup G)$, se sigue que $\exists m \in E \cup G$, por tanto $m \in E$ o $m \in G$, tal que $f(m) = \lambda$, veamos los dos casos:

iii) Si $m \in E$, se sigue que $\lambda \in f(E)$, que implica que $\lambda \in f(E) \cup f(G)$

iv) Si $m \in G$, se sigue que $\lambda \in f(G)$, que implica que $\lambda \in f(E) \cup f(G)$

Por tanto en cualquier caso $\lambda \in f(E) \cup f(G)$, se sique que $f(E \cup G) \subseteq f(E) \cup f(G) \cdots$ **b)**

Por **a)** y **b)** se sigue que $f(E \cup G) = f(E) \cup f(G)$

2) Tomemos $z \in f(E \cap G)$, esto implica que $\exists t \in E \cap G$, por tanto $t \in G$ y $t \in E$, tal que $f(t) = z$, de lo anterior se sigue que $z \in f(E)$ y $z \in f(G)$, se concluye que $z \in f(E) \cap f(G)$, finalmente $f(E \cap G) \subseteq f(E) \cap f(G)$ $\square$

Problemas sobre inducción

Ejercicio 4

Conjeture una fórmula para la suma de los primeros n números naturales :

$$1 + 3 + \cdots + (2n - 1)$$

y comprobar la conjetura por inducción matemática

Demostración.

$1 + 3 = 4$, $1 + 3 + 5 = 9$, $1 + 3 + 5 + 7 = 16, \cdots$, $\sum_{i=1}^{n} (2i - 1) = n^2$

Procedemos por inducción:

Base de Inducción

$1 = 1^2$

Hipótesis de Inducción

$\exists\, k \in \mathbb{N}$, tal que $\sum_{i=1}^{k} (2i-1) = k^2$

$P(k) \implies P(k+1)$

Aplicando **H.I**

$\sum_{i=1}^{k+1} (2i-1) = \sum_{i=1}^{k} (2i-1) + 2(k+1) - 1 = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$

Por tanto:

$$\sum_{i=1}^{n} (2i-1) = n^2 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

$\square$

Ejercicio 5

Demuestra que:

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n} \qquad \forall\, n \geq 2,\, n \in \mathbb{N}$$

Demostración.

Utilizaremos el principio de inducción modificado:

Base de Inducción

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2} > \sqrt{2}$$

Hipótesis de Inducción

$$\exists\ k \in \mathbb{N},\, k \geq 2 : \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{k}$$

$P(k) \implies P(k+1)$

Lema

$$\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k+1} \quad k \in \mathbb{N}$$

Demostración.

$$k \in \mathbb{N} \implies k > 0$$

$$\sqrt{k+1} > \sqrt{k}$$

$$\sqrt{k}\,\sqrt{k+1} > |k| = k$$

$$\sqrt{k}\,\sqrt{k+1} + 1 > k + 1$$

$$\frac{\sqrt{k}\,\sqrt{k+1} + 1}{\sqrt{k+1}} > \frac{k+1}{\sqrt{k+1}}$$

$$\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k+1}$$

□

por tanto, aplicando la hipotesis de inducción y el lema:

$$\sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{\sqrt{k}} = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k+1}$$

□