Concurso Pierre Fermat 2024

Elías López Rivera [1]
Jonathan Sayid Mercado Martínez [2]
[1]**Facultad de Ciencias (UNAM)**
[2] **Escuela superior de Física y Matemáticas (IPN)**
[1]elias.lopezr@ciencias.unam.mx
[2]jmercadom2000@alumno.ipn.mx
Fecha: 19/05/2025

Problema 2

Sea $n \in \mathbb{N}$, $x_0 = 0$, $x_i > 0$ para $i \in \mathbb{N}_n$ y $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$, demuestre que:

$$1 \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sqrt{1 + x_1 + ... + x_{i-1}}\sqrt{x_i + x_{i+1} + ... + x_n}} < \frac{\pi}{2}$$

Demostración.

Definimos $y_i = \sum_{i=0}^{i} x_i$, reescribiendo obtenemos:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{y_i - y_{i-1}}{\sqrt{1 + y_{i-1}}\sqrt{1 - y_{i-1}}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i - y_{i-1}}{\sqrt{1 - (y_{i-1})^2}}$$

Ahora por la defininición de y_i, se sigue que $0 \leq y_i < 1$, para toda $i \in \mathbb{N}_n / \{n\}$ la suma esta bien definida pues $1 - (y_{i-1})^2 > 0$, ademas que $y_n = 1$

Tomemos $f : [0, 1) \Rightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, tenemos que como $f'(x) = \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \geq 0$ para todo $x \in [0, 1)$, por tanto f es crciente en todo su dominio

Consideramos la partición P de $[0, 1]$, $P := \{y_i\}_{i \in \mathbb{N}_n}$, del hecho de que f es creciente obtenemos que:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{y_i - y_{i-1}}{\sqrt{1 - (y_{i-1})^2}} = \underline{S}(P, f)$$

Finalmente obtenemos que

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{y_i - y_{i-1}}{\sqrt{1 - (y_{i-1})^2}} < \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx = \frac{\pi}{2}$$

Para la nueva desigualdad tenemos que $\sqrt{1-(y_{i-1})^2} < 1$, por tanto tenemos que:

$$1 = \sum_{i=1}^{n} y_i - y_{i-1} < \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i - y_{i-1}}{\sqrt{1-(y_{i-1})^2}}$$

□

Problema 3

Si X es un conjunto con una norma $\|.\|$ y que satisface que para todo ϵ existen $y_1, y_2, \cdots, y_n$ en X tal que $X \subset \cup_{i=1}^{n} B(y_i, \epsilon)$. Pruebe que toda sucesión en X tiene una subsucesión de Cauchy

Demostración.

□

Problema 5

Demuestre que existe una función derivable f tal que $(f(x))^5 + f(x) + x = 0 \; \forall\, x \in \mathbb{R}$ y obtenga $f'(x) \; \forall\, x \in \mathbb{R}$

Demostración.

Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = -x^5 - x$ como g es continua y estrictacmente monotona, además de invertible tenemos que g^{-1} es continua, luego como $g'(x) = -5x^4 - 1$, tenemos que $g(x) \neq 0$ en todo $\mathbb{R}$, por tanto aplicando el teorema de la función inversa tenemos que g^{-1} es derivable en $\mathbb{R}$, luego tenemos que:

$$g \circ g^{-1}(x) = -(g^{-1}(x))^5 - g^{-1}(x) = x \implies (g^{-1}(x))^5 + g^{-1}(x) + x = 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R}$$

Finalmente encontramos ${g^{-1}}'(x)$ para $x \in \mathbb{R}$:

$${g^{-1}}'(x) = \frac{1}{g' \circ g^{-1}(x)} = \frac{1}{-5(g^{-1}(x))^4 - 1}$$

□