Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Cálculo I
Tarea III
Elías López Rivera
elias.lopezr@ciencias.unam.mx

Problemas sobre la convergencia de sucesiones

Ejercicio 1

Demuestre directo de la definición que:

i)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1}{n-1}} = 0$$

ii)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+5}{3n-7} = \frac{2}{3}$$

iii)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+5}{3n^2-7} = 0$$

Demostración.

i) Sea $\epsilon_0 > 0$, definimos:

$$\lambda := \frac{1}{\epsilon_0^2} + 1 > 0$$

Por propiedad arquimediana $\exists\, K_0 \in \mathbb{N}$ tal que $K_0 > \lambda$, como $\lambda > 1$ se sigue que $K_0 > 1$

Tomemos $n \in \mathbb{N}$, tal que $n \geq K_0$, de ahi obtenemos:

$$n - 1 > \frac{1}{\epsilon_0^2}$$

Como $n-1 \geq K_0 - 1 > 0$, se sigue que :

$$\frac{1}{n-1} < \epsilon_0^2 \implies \sqrt{\frac{1}{n-1}} < \epsilon$$

Sea $\epsilon > 0$ y $n \geq K_0$, obtenemos que:

$$\left|\sqrt{\frac{1}{n-1}} - 0\right| = \sqrt{\frac{1}{n-1}} < \epsilon_0$$

Por tanto hemos demostrado que:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1}{n-1}} = 0$$

ii) Sea $\epsilon_0 > 0$ definimos:

$$\lambda := \frac{1}{3}\left(\frac{10}{\epsilon_0} + 7\right) > 0$$

Por propiedad arquimediana se tiene que $\exists\ K_0 \in \mathbb{N}$ tal que $K_0 > \lambda$

Tomemos $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq K_0$ tenemos que:

$$n \geq K_0 > \frac{1}{3}\left(\frac{10}{\epsilon_0} + 7\right) > \frac{7}{3} > 2$$

De esta desigualdad se sigue que $n \geq K_0 > 2$, como estos son naturales se tiene que necesariamente $n \geq K_0 \geq 3$, por tanto $3n - 7 \geq 3K_0 - 7 \geq 2 > 0$ de donde $|3n-7| = 3n - 7 \cdots$ **a)**

Por otro lado se sigue que:

$$3n - 7 \geq 3K_0 - 7 > \frac{10}{\epsilon_0} \implies \frac{10}{3n-7} \leq \frac{10}{3K_0 - 7} < \epsilon_0 \tag{1}$$

Ahora tomemos $\epsilon_0 > 0$ y $n \geq K_0$ se tiene que:

$$\left|\frac{2n+5}{3n-7} - \frac{2}{3}\right| = \left|\frac{29}{3\,(3n-7)}\right| < \frac{10}{|3n-7|} \tag{2}$$

Por **a)** y **(1)** aplicadas sobre (2) se tiene que:

$$\left|\frac{2n+5}{3n-7}-\frac{2}{3}\right| = \left|\frac{29}{3\,(3n-7)}\right| < \frac{10}{|3n-7|} = \frac{10}{3n-7} \leq \frac{10}{3\,K_0-7} < \epsilon_0 \tag{3}$$

Del hecho de que $\epsilon_0 > 0$ es arbitraria y por lo anterior se tiene que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+5}{3n-7} = \frac{2}{3}$$

iii) Sea $\epsilon_0 > 0$ definimos:

$$\lambda := \sqrt{\frac{2\,(5)}{\epsilon_0}} > 0 \quad \alpha := \frac{2\,(2)}{\epsilon_0} > 0$$

Por propiedad arquimediana se tiene que $\exists\ K_0, K_1 \in \mathbb{N}$ tal que $K_0 > \lambda$ y $K_1 > \alpha$

Tomemos $l = max\{2, K_0, K_1\}$, sea $n \geq l$, se sigue que:

$$n > 2 \implies n^2 > 4 \implies \frac{7}{n^2} < \frac{7}{4} \implies 3 - \frac{7}{n^2} > 3 - \frac{7}{4} = \frac{5}{4} > 1 > 0$$

De lo anterior se sigue que $|3 - \frac{7}{n^2}| = 3 - \frac{7}{n^2}$, luego:

$$\frac{1}{|3-\frac{7}{n^2}|} < \frac{4}{5} < 1 \tag{4}$$

También $n \geq K_0$, de donde se obtiene que:

$$n \geq K_0 > \sqrt{\frac{2\,(5)}{\epsilon_0}} \implies \frac{n^2}{5} > \frac{2}{\epsilon_0} \implies \left|\frac{5}{n^2}\right| = \frac{5}{n^2} < \frac{\epsilon_0}{2} \tag{5}$$

Luego $n \geq K_1$, de donde se sigue que:

$$n \geq K_1 > \frac{2\,(2)}{\epsilon_0} \implies \frac{n}{2} > \frac{2}{\epsilon_0} \implies \left|\frac{2}{n}\right| = \frac{2}{n} < \frac{\epsilon_0}{2} \tag{6}$$

Tomemos $\epsilon_0 > 0$ y $n \geq l$, se sigue:

$$\left|\frac{2n+5}{3n^2-7}\right| = \left|\frac{2n+5}{3n^2-7}\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}}\right| = \left|\frac{1}{3-\frac{7}{n^2}}\right|\left|\frac{2}{n}+\frac{5}{n^2}\right| \leq \left|\frac{1}{3-\frac{7}{n^2}}\right|\left(\left|\frac{2}{n}\right|+\left|\frac{5}{n^2}\right|\right) \tag{7}$$

Aplicando (4) (5) y (6) sobre (7), se obtiene que:

$$\left|\frac{2n+5}{3n^2-7}\right| \leq \left|\frac{1}{3-\frac{7}{n^2}}\right|\left(\left|\frac{2}{n}\right|+\left|\frac{5}{n^2}\right|\right) < \left|\frac{2}{n}\right|+\left|\frac{5}{n^2}\right| < \frac{\epsilon_0}{2}+\frac{\epsilon_0}{2} = \epsilon_0$$

Por tanto hemos demostrado que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+5}{3n^2-7} = 0$$

$\square$

Ejercicio 2

Muestre que sea $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales positivos, si esta converge a $g \in \mathbb{R}$, entonces la sucesión definida como $(\sqrt{a_n})_{n=1}^{\infty}$ converge a $\sqrt{g}$

Demostración.

Como $a_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, se sigue que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g \geq 0$
por tanto $\sqrt{g}$ esta bien definido tomemos dos casos:

i) $g = 0$

Basta con tomar $\epsilon_0^2 > 0$, como $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a 0, entonces existe $K_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq K_0$ entonces:

$$a_n = |a_n - 0| < \epsilon_0^2 \implies \sqrt{a_n} = |\sqrt{a_n} - 0| < \epsilon_0$$

Como $\epsilon_0 > 0$ es arbitraria se sigue que:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = 0$$

ii) $g > 0$

Tomemos:

$$|\sqrt{a_n} - \sqrt{g}| = \frac{|\sqrt{a_n} - \sqrt{g}|\,|\sqrt{a_n} + \sqrt{g}|}{|\sqrt{a_n} + \sqrt{g}|} = \frac{|a_n - g|}{\sqrt{a_n} + \sqrt{g}}$$

Como tanto $\sqrt{a_n} > 0$ y $\sqrt{g} > 0$, se sigue que necesariamente $\sqrt{a_n} + \sqrt{g} > \sqrt{g}$ por tanto:

$$|\sqrt{a_n} - \sqrt{g}| = \frac{|a_n - g|}{\sqrt{a_n} + \sqrt{g}} < \frac{|a_n - g|}{\sqrt{g}}$$

Como $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a g tomemos $\lambda := \sqrt{g}\,\epsilon_0 > 0$, con $\epsilon_0 > 0$, se sigue que existe $K_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq K_0$ entonces:

$$|a_n - g| < \lambda = \sqrt{g}\,\epsilon_0$$

Por tanto:

$$|\sqrt{a_n} - \sqrt{g}| = \frac{|a_n - g|}{\sqrt{a_n} + \sqrt{g}} < \frac{|a_n - g|}{\sqrt{g}} < \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g}}\,\epsilon_0 = \epsilon_0$$

Como $\epsilon_0 > 0$ es arbitraria se concluye que:

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{g}$$

$\square$

Ejercicio 3

Encuentre:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+2n+5}-n$$

Demostración.

Veamos que:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+2n+5}-n = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n^2+2n+5}-n)(\sqrt{n^2+2n+5}+n)}{\sqrt{n^2+2n+5}+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+5}{n^2+2n+5}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+5}{n^2+2n+5} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+5}{\sqrt{n^2+2n+5}+n}\,\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{5}{n}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{5}{n^2}}+1}$$

Definimos $b_n = 1+\frac{2}{n}+\frac{5}{n^2}$, ahora veamos que sea $l_n = \frac{1}{n^2}$, tenemos que $0 \leq l_n \leq \frac{1}{n}$, usando teorma de la compresión junto con que la sucesión $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ converge a 0, tenemos que l_n converge a 0, luego aplicando el teorema de álgebra de límites (este se puede aplicar debido a que la sucesión b_n es suma y producto de sucesiones convergentes), tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} 1+\frac{2}{n}+\frac{5}{n^2} = \lim_{n\to\infty} 1+2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}+5\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} = 1+0+0 = 1$$

Como $b_n > 0 \ \forall\ n \in \mathbb{N}$, por el ejercicio anterior se tiene que:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{b_n} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} b_n} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} 1+\frac{2}{n}+\frac{5}{n^2}} = \sqrt{1+0+0} = 1$$

Por tanto aplicando nuevamente el teorema de algebra de límites:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{5}{n^2}}+1 = \lim_{n\to\infty} \sqrt{b_n}+1 = \lim_{n\to\infty} \sqrt{b_n}+\lim_{n\to\infty} 1 = 1+1 = 2$$

Ahora definimos $a_n = 2 + \frac{5}{n}$, aplicando de nuevo el teorema de álgebra de límites:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 2 + 5 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 2 + 0 = 2$$

Tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+2n+5} - n = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{5}{n}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{5}{n^2}}+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n+1}$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} b_n + 1 \neq 0$ y $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ converge, podemos aplicar el teorema de álgebra de límites nuevamente:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+2n+5} - n = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n + 1} = \frac{2}{2} = 1$$

$\square$

Ejercicio 4

Demuestre que $a_n = \frac{n^3+(-1)^n n^3}{n^2+1}$ *es divergente pero que no diverge a* $+\infty$

Demostración.

Tomemos la subsucesión $(a_{2n})_{n=1}^{\infty}$ de $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, notemos que:

$$a_{2n} = \frac{n^3+(-1)^{2n} n^3}{n^2+1} = \frac{2n^3}{n^2+1} = \frac{2n^3}{n^2+1}\,\frac{\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^3}} = \frac{2}{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}}$$

Definimos $b_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}\right)$ y $l_n = \frac{1}{n^3}$, tenemos que $0 \leq l_n \leq \frac{1}{n}$, de la convergencia de $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ a 0 y por el teorema de la compresión tenemos que $\lim\limits_{n\to\infty} l_n = 0$

Debido a que b_n puede expresarse como suma y producto de sucesiones convergentes podemos aplicar el teorema de álgebra de límites tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\right) = \frac{1}{2}(0) = 0$$

Por tanto como $a_{2n} = \frac{1}{b_n}$ y $b_n > 0 \; \forall\, n \in \mathbb{N}$, se tiene que necesariamente:

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = +\infty$$

Pues $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a 0, como $(a_{2n})_{n=1}^{\infty}$ diverge a $+\infty$, se tiene que $(a_{2n})_{n=1}^{\infty}$ es no acotada y por tanto $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ también es no acotada, de esto se sigue que $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ no converge.

Si $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ diverge a $+\infty$ tenemos que cualquier subsucesión de esta cuenta con una subsucesión que diverge a $+\infty$, sin embargo tomemos la siguiente subsuseción:

$$a_{2n+1} = \frac{n^3+(-1)^{2n+1} n^3}{n^2+1} = \frac{n^3-n^3}{n^2+1} = 0$$

Tenemos que la subsucesión $(a_{2n+1})_{n=1}^{\infty}$ es igual a la sucesión constante $(0)_{n=1}^{\infty}$, por tanto cualquier subsucesión de esta también sera igual a la sucesión constante $(0)_{n=1}^{\infty}$, es decir no existe ninguna subsucesión de $(a_{2n+1})_{n=1}^{\infty}$ que diverga a $+\infty$, por tanto $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ diverge pero no diverge a $+\infty$

$\square$

Problemas sobre sucesiones de Cauchy

Ejercicio 5

Determine si las siguientes sucesiones son de Cauchy y muestre que lo son, o en caso contrario que no lo son:

i)

$$a_n = \frac{n+1}{n}$$

ii)

$$a_n = n + \frac{(-1)^n}{n}$$

iii)

$$a_n = 1 + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}$$

Demostración.

i) Sea $\frac{\epsilon_0}{2} > 0$, por propiedad arquimediana tenemos que $\exists\, K_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq K_0$, entonces $\frac{1}{n} < \frac{\epsilon_0}{2}$, Tomemos $n, m \in \mathbb{N}$ tal que $n, m > K_0$, se tiene que:

$$|a_n - a_m| = \left|1 + \frac{1}{n} - 1 - \frac{1}{m}\right| = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| \leq \left|\frac{1}{n}\right| + \left|\frac{1}{m}\right| = \frac{1}{n} + \frac{1}{m} < \frac{\epsilon_0}{2} + \frac{\epsilon_0}{2} = \epsilon_0$$

Como $\epsilon_0 > 0$ es arbitraria hemos exhibido que $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de cauchy.

ii) Tomemos la subsucesión $(a_{2n})_{n=1}^{\infty}$ de $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, veamos que:

$$a_{2n} = n + \frac{(-1)^{2n}}{n} = n + \frac{1}{n} = \frac{n^2+1}{n}$$

Definimos $b_n = \frac{n}{n^2+1}$, como $n^2 + 1 \geq n^2 \implies \frac{1}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2} \implies 0 < b_n = \frac{n}{n^2+1} \leq \frac{1}{n}$, de la convergencia de $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ y por el teorema de compresión se tiene que $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a 0 ademas de que , como $a_{2n} = \frac{1}{b_n}$, se concluye que necesariamente:

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = +\infty$$

Por tanto $(a_{2n})_{n=1}^{\infty}$ diverge a $+\infty$ de donde se sigue que $(a_{2n})_{n=1}^{\infty}$ es no acotada y por tanto $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ tampoco es acotada, como toda sucesión de Cauchy es acotada, se concluye que $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ no es una sucesión de cauchy.

iii) Como $\frac{1}{2} > 0$, tenemos que $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$, por tanto sea $\frac{\epsilon_0}{2} > 0$, tenemos que existe $K_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq K_0$, entonces:

$$\frac{1}{2^n} = \left|\frac{1}{2^n}\right| < \frac{\epsilon_0}{2} \implies \frac{1}{2^{n-1}} < \epsilon_0$$

Definimos $l = max\{4, K_0\}$ y tomamos $n, m \geq l$, con $n \neq m$, supongamos sin perdida de generalidad $m > n$, tenemos que:

$$|a_m - a_n| = \left|\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{i!} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!}\right| = \left|\sum_{i=n+1}^{m} \frac{1}{i!} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!}\right| = \left|\sum_{i=n+1}^{m} \frac{1}{i!}\right|$$

Como $n, m \geq l$ tenemos que $n+1, n+2, ..., m \geq 4$, aplicando el hecho de que $n! > 2^n \implies \frac{1}{n!} < \frac{1}{2^n}$ $\forall\ n \geq 4,\ n \in \mathbb{N}$, se sigue que:

$$|a_m - a_n| = \left|\sum_{i=n+1}^{m} \frac{1}{i!}\right| \leq \sum_{i=n+1}^{m} \left|\frac{1}{i!}\right| < \sum_{i=n+1}^{m} \left|\frac{1}{2^i}\right| = \left|\frac{1}{2^n}\right| \sum_{i=1}^{m-n} \left|\frac{1}{2^i}\right| < \left|\frac{1}{2^n}\right| \sum_{i=0}^{m-n} \left|\frac{1}{2^i}\right|$$

Aplicando la suma parcial de una serie geométrica y del hecho de que $2^n > n \implies \frac{1}{2^n} < \frac{1}{n} < 1$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$, ademas de que $\frac{1}{2^n} > 0\ \forall\, n \in \mathbb{N}$, se sigue que:

$$|a_m - a_n| < \frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^{m-n} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^n} \frac{1 - \left(\frac{1}{2^{n-m+1}}\right)}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{n-1}} \left(1 - \frac{1}{2^{n-m+1}}\right) < \frac{1}{2^{n-1}} < \epsilon_0$$

$m - n + 1$, es un número natural pues por hipótesis $m - n > 0 \implies n - m + 1 > 1$, luego como n se tomo mayor o igual que l esto asegura nuestra última desigualdad, es decir, la distancia entre a_m y a_n esta acotada por ϵ_0, finalmente del hecho de que $\epsilon_0 > 0$ es arbitraria se conlcuye que $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy.

Nota: El caso $n = m$ es trivial pues $|a_n - a_m| = 0 < \epsilon_0\ \forall\, \epsilon_0 > 0$ $\square$