Principios de inducción

Cálculo I

Elías López Rivera[1]

Jonathan Sayid Mercado Martínez[2]

[1]Facultad de Ciencias (UNAM)

[2] Escuela superior de Física y Matemáticas (IPN)

[1]elias.lopezr@ciencias.unam.mx

[2]jmercadom2000@alumno.ipn.mx

Equivalencia entre el principio de inducción y el del buen orden

Ejercicio 1

En clase ya se ha demostrado que el principio del buen orden implica el pirncipio de inducción, ahora demuestra que el principio de inducción implica el del buen orden para completar la demostración de que ambos son equivalentes

Demostración.

Tomemos $U \subseteq \mathbb{N}$, de tal manera que $U \neq \emptyset$, procedemos por contradiccaón, es decir U no tiene elemento mínimo, llamemos $S \subseteq \mathbb{N}$, al conjunto de todas las cotas inferiores de U.

Demostraremos que $S = \mathbb{N}$, procedemos por inducción:

Base de inducción

Es claro que $1 \in S$, pues $1 < k \; \forall \; k \in \mathbb{N}$

Hipótesis de inducción

$\exists \; k \in \mathbb{N} : k \in S$

$k \in S \implies k+1 \in S$

Por **H.I**, se tiene que $k < l \; \forall \; l \in U$, por tanto sea $R := \{1, 2, 3, \cdots k-1\}$, se tiene que $\forall \; y \in R \implies y < k$, entonces $R \subseteq S$, es decir si $k+1 \in U$, este seria el primer elemento de U, pues todos los números naturales menores a $k+1$, ya son cotas inferiores del conjunto, por tanto $k+1 \in S$

De esto se concluye que $S = \mathbb{N}$, es decir que el conjunto $U = \emptyset$, pues cualquier natural es cota inferior del conjunto, pero este no puede contener a ninguna de sus cotas inferiores, hemos encontrado una contradicción pues construimos $U \neq \emptyset$, por tanto se conlcuye que el principio del buen orden es equivalente al principio de inducción. $\square$

Equivalencia entre los principios de inducción

Ejercicio 2

Demuestra la equivalencia entre el principio de inudcción fuerte y el principio de inducción normal

Demostración.

$\Rightarrow$**)** Tomemos que el principio de inducción fuerte es cierto, ahora definimos $S \subseteq \mathbb{N}$ con las propiedades:

i) $1 \in S$

ii) Sea $k \in \mathbb{N}$, si $k \in S$ entonces $k+1 \in S$

Demostraremos que $S = \mathbb{N}$

Procedemos por inducción fuerte:

Base de inducción fuerte

Por **i)** $1 \in S$

Hipótesis de inducción fuerte

$\exists\ k \in \mathbb{N} : \forall\ r \in \mathbb{N}, r \leq k \implies r \in S$

$k \in S \implies k+1 \in S$

Por **H.I**, se tiene que en partícular $k \in S$ y por **ii)** se sigue que $k+1 \in S$

Por tanto se concluye que $S = \mathbb{N}$, es decir el pirncipio de inducción fuerte implica el principio de inducción normal.

$\Leftarrow$**)** Tomemos que el principio de inducción normal es cierto, ahora definimos $T \subseteq \mathbb{N}$ con las propiedades:

i) $1 \in T$

ii) Sea $k \in \mathbb{N}$, si $\{1, 2, 3, \cdots k\} \subseteq T$ entonces $k+1 \in T$

Demostraremos que $T = \mathbb{N}$

Procedamos por contradicción $\exists\ k \in \mathbb{N} :\ k \notin T$,

Definimos $U := \{l \in \mathbb{N} : l \notin T\}$, como $k \in U$, entonces $U \neq \emptyset$, como el principio de inducción y el del buen orden son equivalentes se sigue que $\exists\ j \in U :\ j \leq o\ \forall\ o \in U$

Demostremos que $j = 1$:

si $j > 1$ entonces $j - 1 \in \mathbb{N}$, por tanto siguiendo la negación de ii) $\exists\ \epsilon \in \mathbb{N}, \epsilon < j : \epsilon \notin T$, por tanto $\epsilon \in T$, es decir j no es el elemento mínimo.

Se concluye que $j = 1$, necesariamente, pero $j \notin T$ por consturcción esto contradice **i)**, por tanto $k \in \mathbb{N} \implies k \in T$

Se concluye que $T = \mathbb{N}$, es dceir que el principio de inducción implica el principio de inducción fuerte. $\square$

Principio de inducción modificado

Ejercicio 3

Demuestre el principio de inducción modificado

Demostración.

Tomemos $A \subseteq \mathbb{N}$, $A \neq \emptyset$, y $P(a)$ una propiedad aplicada en $a \in A$, de tal manera que:

i) a_0 es elemento mínimos de A

ii) $P(a_0)$ es cierta

iii) Sea $k \in A$, si $P(k)$ es cierta, entonces $P(k + 1)$ es cierta

Probaremos que $P(r)$ es cierta $\forall\ r \in A$:

Procedemos por contradicción, es decir, $\exists\ x \in A :\ P(a)$ es falso, definimos el conjunto:

$U := \{t \in A : P(t)\, es\, falso\}$, es claro que $U \neq \emptyset$, entonces por el principio del buen orden U tiene elemneto mínimo j, de esto se sigue que $j > a_0$, pues por **ii)** a_0 es verdadera, es decir que $j \geq a_0 + 1$, por tanto $j - 1 \in A$, se sigue que $P(j - 1)$, debe ser verdadera pues j es elmento mínimo, sin emabrgo por **ii)**, esto implicaria que $P(j)$ es verdadero, una contradicción, se conlcuye que $P(r)$ es verdadero $\forall\ r \in A$

Definimos $A' := \{r \in \mathbb{N} : r \geq a_o\ y\ P(r)\ es\ cierta\}$, de tal manera que cumple **ii)** y **iii)**, se sigue que $P(r)\ \forall\ r \in A$ que es equivalente a $\forall\ r \geq a_0$ $\square$