**Universidad Nacional Autónoma de México**
**Facultad de Ciencias**
**Cálculo II**
Resumen del Curso
Elías López Rivera
elias.lopezr@ciencias.unam.mx
Fecha: 06/07/2025

Cálculo 2

*El siguiente documento es una recopilación de los teoremas,problemas de examenes,ejemplos y solcuiones más importantes expuestos durante el curso de Cálculo II, del profesor Javier Páez Cardeas, de la facultad de ciencias de la unam*

# Teorema de integrabilidad de Lebesgue

Antes de poder demostrar este teorema necesitamos introducir 3 conceptos importantes que se usaran durante la prueba.

## Conjuntos Nulos

Definición 1

*Decimos que un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ es nulo si dado $\epsilon > 0$, existe una coleccioń contable $\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^{\infty}$, de intervalos abiertos tales que:*

$$Z \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k) \quad y \quad \sum_{k=1}^{\infty} (b_k - a_k) \leq \epsilon$$

Partiendo de lo anterior es fácil demostrar los siguientes hechos:

Teorema 1

***Union de conjuntos nulos***

*I. Si $Z_1$, $Z_2$ son conjuntos nulos entonces $Z_1 \cup Z_2$ es un conjunto nulo*

*II. Si $Z_n$ es un conjunto nulo para toda $n \in \mathbb{N}$, demostrar que $\bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n$, es un conjunto nulo*

*Demostración.*

**1** Tenemos que como $Z_1$ y $Z_2$ son nulos, entonces para $\frac{\epsilon}{2} > 0$, existen $\{J_k^1 | \, k \in \mathbb{N}\}$ y $\{J_k^2 | \, k \in \mathbb{N}\}$, tales que $\sum_{k \in \mathbb{N}} |J_k^1| < \frac{\epsilon}{2}$ y $\sum_{k \in \mathbb{N}} |J_k^2| < \frac{\epsilon}{2}$, tenemos que $\{J_k^{1,2} | k \in \mathbb{N}\} := \{J_k^1 | k \in \mathbb{N}\} \cup \{J_k^2 | k \in \mathbb{N}\}$, es un conjunto contable de intevalos, luego tenemos que $Z_1 \cup Z_2 \subset \bigcup_{\, k \in \mathbb{N}} J_k^{1,2}$, ademas que
$\sum_{k \in \mathbb{N}} |J_k^{1,2}| \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} |J_k^1| + \sum_{k \in \mathbb{N}} |J_k^2| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$

**2** Dada $\epsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ existe $\{J_k^n | \, k \in \mathbb{N}\}$ tal que $Z_n \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} J_k^n$ y $\sum_{k\in\mathbb{N}} |J_k^n| < \frac{\epsilon}{2^n}$, definimos $\{J_k^n | n, k \in \mathbb{N}\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{J_k^n | k \in \mathbb{N}\}$, es claro que $\{J_k^n | n, k \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto contable de intervalos abiertos, ademas tenemos que $\bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n \subset \bigcup_{k,n\in\mathbb{N}} J_k^n$, luego finalmente tenemos que:
$\sum_{k,n\in\mathbb{N}} |J_k^n| \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{\epsilon}{2^n} = \epsilon$ □

**Teorema 2**

***Ejemplos de subconjuntos nulos***

*I. Si $Z \subset \mathbb{R}$ es finito, entonces $Z$ es nulo*

*II. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ es nulo*

*III. $\emptyset$ es nulo*

*Demostración.*

**1** Se sigue del hecho de que $Z$ no tiene puntos de acumulación ,por tanto para todo $z \in \mathbb{Z}$ existe una vecindad $V_x(\epsilon)$ tal que $V_x(\epsilon) \cap Z - \{x\} = \emptyset$, tome estas vecindades como intervalos y rellene su coleccion contable con $\emptyset$, se dejan los detalles de la demostración al lector

**2** La demostración puede encontrarse en el Bartle (página 267).

**3** Se sigue directamente por vacuidad □

## Oscilaciones de una función

**Definición 2**

*Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una funcion acotada. si $S \subset A \subset \mathbb{R}$, definimos la Oscilación de $f$ en $S$ como:*

$$W(f, S) := sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in S\}$$

*Si $c \in A$, la oscilación de $f$ en $c$, se define como:*

$$w(f, c) := inf\{W(f; V_r(c)) : r > 0\} = \lim_{r\to 0+} W(f; V_r(c))$$

De la definición podemos deducir el siguiente teorema:

**Teorema 3**

*Si $f : A \to \mathbb{R}$ esta acotada y $x_0 \in A$, entonces $f$ es continua en $x_0$ si y sólo si $w(f; x_0) = 0$*

*Demostración.*

Primero demostremos que:

$$w(f, x_0) = inf\{sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in V_\delta(x_0) \cap A, \delta > 0\}\}$$

Sea $\delta > 0$, definimos:

$$g(\delta) := sup\{|\,f(x) - f(y)\,| : x, y \in V_\delta(x_0) \cap A\}$$

Como $0 < g(\delta)\ \forall\, \delta > 0$, sabemos que existe $inf\{g[I]\}$, con $I := (0, \infty)$.

Sea $\epsilon > 0\ \exists\, t > 0$ tal que:

$$g(t) < inf\{g[I]\} + \epsilon$$

finalmente sea x$\in (0, t)$, como $x < t$, se tiene que $g(x) < g(t)$ concluimos que:

$$inf\{g[I]\} - \epsilon < g(x) < inf\{g[I]\} + \epsilon$$

Es decir $\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, t > 0$ tal que:

Si $x \in (0, t)$, entonces: $g(x) \in V_\epsilon(inf\{g[I]\})$ por tanto:

$$w(f, x_0) = inf\{sup\{|\,f(x) - f(y)\,| : x, y \in V_\delta(x_0) \cap A, \delta > 0\}\}$$

$\Longrightarrow$) Tomando en cuenta que $f$ es continua en $x_0$, la condición continua de Cauchy nos asegura la existencia de $\delta_1 > 0$ tal que, si $x, y \in V_{\delta_1}(x_0) \cap A$ se cumple que $|\,f(x) - f(y)\,| < \epsilon$, para algún $\epsilon > 0$
Luego tenemos, por la condición de supremo:

$$sup\{|\,f(x) - f(y)\,| : x, y \in V_{\delta_1}(x_0) \cap A\} < \epsilon$$

Finalmente, aplicamos la condición de ínfimo a lo anterior:

$$w(f, x_0) < \epsilon$$

Debido a que 0 es cota inferior del conjunto $g[I]$:

$$0 \leq w(f, x_0) < \epsilon$$

como $\epsilon$ es arbitrario, conlcuimos que:

$$w(f, x_0) = 0$$

$\Longleftarrow$) Ahora, suponiendo que $w(f, x_0) = 0$, sabemos , por la condición de ínfimo que:

Sea $\epsilon > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que:

$$sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in V_{\delta_1}(x_0) \cap A\} < w(f, x_0) + \epsilon = \epsilon$$

Luego aplicando la condicion de supremo, fijamos x=$x_0$, tomamos y $\in V_{\delta_1}(x_0) \cap A$ tal que:

$$|\, f(x_0) - f(y)\,| < \epsilon$$

Como épsilon es arbitrario, se cumple la condición de continuidad, por tanto $f$ es continua en $x_0$. ☐

**Teorema 4**

*Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ esta acotada, entonces $D := \{c \in [a, b] : w(f, c) > 0\} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} H_k$, donde $H_k = \{c \in [a, b] : w(f, c) > \frac{1}{2^k}\}$*

*Demostración.*

Como $lim_{n \to \infty} \dfrac{1}{2^n} = 0$, si tomamos $c \in D$, entonces $w(f, c) = \epsilon > 0$, por tanto existe $k \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq k$ entonces $\frac{1}{2^n} < \epsilon = w(c, f)$, por tanto $c \in H_n$ para algún $n \in \mathbb{N}$, se concluye que $c \in \bigcup_{k \in \mathbb{N}} H_k$, por tanto $D \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} H_k$, la otra contecnión es trivial, debido al teorema 3 tenemos que $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} H_k$ es el conjunto de discontinuidades de $f$ en $[a, b]$ ☐

## Medidas $\delta$ y particiones fina-$\delta$

**Definición 3**

*Sea $A \subset \mathbb{R}$ una medida $\delta$ en $A$ es una función estrictamente positiva en $A$, sea $P := \{(I_k, t_k)\}_{k \in \mathbb{N}_n}$, esta se directamente fina-$\delta$ si cumple que:*

$$t_i \in I_i \subseteq [t_i - \delta(i), t_i + \delta(i)] \quad \forall i \in \mathbb{N}_n$$

De la definición se desprende el siguiente teorema el cual no demostraremos ya que escapa del proposito del texto:

**Teorema 5**

*Si $\delta$ e suna medida definida en $[a, b] \subset \mathbb{R}$, entonces existe una partición fina-$\delta$ de $[a, b]$*

## Enunciado y demostración

**Teorema de integrabilidad de Lebesgue**

*Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada, esta es Riemann integrable si y solo si su conjunto de discontinuidades es nulo*

*Demostración.*

$\Rightarrow$) Si $f$ es continua en $[a,b]$, entonces $f$ es continua y por tanto su conjunto de discontinuidades es nulo pues $\emptyset$ es nulo por el teorema 2, por tanto sea $D$ definido en el teorema 4, el conjunto de discontinuidades de $f$ en $[a,c]$, supongamos que este es no vacio,como estamos considerando que $D = \bigcup_{l\in\mathbb{N}} H_l \neq \emptyset$ por tanto existe $K \in \mathbb{N}$ tal que $H_k \neq \emptyset$, tomemos $\frac{\epsilon}{2^k} > 0$, por el criterio de Riemann, existe una partición $P_k := \{[x_{i-1}^k, x_i^k]\}_{i=0}^{n(k)}$, tal que:

$$\sum_{i=1}^{n(k)} (M_i^k - m_i^k)\,(x_i^k - x_{i-1}^k) < \frac{\epsilon}{2^k}$$

Donde $M_i^k$ y $m_i^k$ son el respectivo infimo y supremo de la partición, como $H_k \subset P$ para toda $k \in \mathbb{N}$, existe $(x_{i-1}^k, x_i^k)$ tal que $(x_{i-1}^k, x_i^k) \cap H_k \neq \emptyset$, sea $x \in (x_{i-1}^k, x_i^k) \cap H_k$, entonces existe $r > 0$ tal que $V_r(x) \subseteq (x_{i-1}^k, x_i^k)$, se sigue que:

$$\frac{1}{2^k} \leq w(f,x) \leq W(f, V_r(x)) \leq M_i^k - m_i^k$$

Si hacemos $\sum'$ la sumatoria sobre todos los $i$ tal que $H_k \cap (x_{i-1}^k, x_i^k) \neq \emptyset$, tenemos que:

$$\frac{1}{2^k} \sum{}' (x_i^k - x_{i-1}^k) \leq \sum_{i=1}^{n(k)} (M_i^k - m_i^k)\,(x_i^k - x_{i-1}^k) < \frac{\epsilon}{2^k} \implies \sum{}' (x_i^k - x_{i-1}^k) \leq \epsilon$$

Tenemos que $H_K \neq \emptyset$ esta totalmente contenido en una subpartición $P'$ fininita tal que la longitud de sus intervalos es menor a $\epsilon$, $H_k$ es un conjunto nulo, por tanto $D = \bigcup_{l\in\mathbb{N}} H_l$ es un conjunto nulo por el teorema 1

$\Leftarrow$) Sea $|f(x)| \leq M$ para $x \in [a,b]$ y supongamos que $D$ es un conjunto nulo, entonces dado $\epsilon > 0$, existe un conjunto contable $\{J_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de intervalos abiertos con $D \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} J_k$ y $\sum_{k\in\mathbb{N}} |J_k| \leq \frac{\epsilon}{4M}$, definimos $\delta$ una medida sobre $[a,b]$ de la siguiente manera:

I. **i)** Si $t \notin D$, entonces $f$ es continua en $t$ y existe $\delta(t) > 0$ tal que si $x \in V_{\delta(t)}(t)$, entonces $|f(x) - f(t)| < \frac{\epsilon}{4(b-a)}$,de donde:

$$0 \leq M_i - m_i \leq \frac{\epsilon}{2(b-a)}$$

II. **ii)** Si $t \in D$, se elige $\delta(t) > 0$ tal que $V_{\delta(t)}(t) \subseteq J_k$ para alguna $k \in \mathbb{N}$, para estos valores se cumple que $0 \leq M_t - m_t \leq 2M$

Por tanto por el teorema 5 existe $P := \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^{n}$ partición fina-$\delta$, separamos los indices $i$ en los siguientes dos conjuntos disjuntos:

$$S_c := \{i : t \notin D\} \quad S_d := \{i : t_i \in D\}$$

Como $P$ es fina-$\delta$ se tiene que $[x_{i-1}, x_i] \subseteq V_{\delta(t_i)}(t_i)$, luego tenemos que $M_i - m_i \leq M_{t_i} - m_{t_i}$, por tanto si $i \in S_c$ entonces $M_i - m_i \leq \epsilon$, en tanto que si $i \in S_d$, se tiene que $M_i - m_i \leq 2M$, luego tenemos que la collección de intervalos $[x_{i-1}, x_i]$ con $i \in S_d$ esta contenida en la union arbitraria de $\{J_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ cuya longitud es menor a $\frac{\epsilon}{4M}$, finalmente se sigue que:

$$\sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i\in S_c}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i\in S_d}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1})$$

$$\leq \sum_{i\in S_c}\frac{\epsilon}{2(b-a)}(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i\in S_d}2M(x_i - x_{i-1}) \leq \frac{\epsilon(b-a)}{2(b-a)} + \frac{2M\epsilon}{4M} = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Como $\epsilon > 0$ fue arbitrario se concluye que $f \in R[a, b]$ □

# Problemas de los examenes

## Parcial 1

**Parcial 1**

*Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable,tal que $f(x) \leq 0 \ \forall\, x \in [a, b]$, definimos*
*$A := \{c \in [a, b] : f \text{ es continua en } c\}$* demuestre que $\int_a^b f(t)\,dt = 0$ si y solo si $f(a) = 0 \ \forall\, a \in A$

*Demostración.*

$\Rightarrow$) Supongamos que $\int_a^b f(x)\,dx = 0$, y supongamos que existe $x_0 \in A$ tal que $f(x_0) < 0$, tenemos que como $f(x)$ es integrable en $[a, b]$ entonces $-f(x)$ es integrable en $[a, b]$ y como $-f(x_0) > 0$ y $x_0 \in A$ se tiene que $\int_a^b -f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx > 0 \implies \int_a^b f(x)\,dx < 0$, una contradicción, como nuestra unica suposición fue la existencia de $x_0$, concluimos que $f(a) = 0 \ \forall\, a \in A$

$\Leftarrow$) Supongamos que $f(a) = 0 \ \forall\, a \in A$, como los puntos de continuidad son densos, si tomamos cualquier particion $P$ de $[a, b]$ para todo $(x_{i-1}, x_i) \in P$, existe $l \in (x_{i-1}, x_i)$ tal que $f(l) = 0$, como $f(x) \leq 0$ $\forall\, x \in [a, b]$, tenemos que $M_i = 0$, por tanto $\overline{S}(P, f) := 0$, para cualquier partición $P$ de $[a, b]$ como:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \inf\{\overline{S}(P, f) | P \text{ es particion de } [a, b]\} = 0$$

□

## Parcial 2

**Parcial 2**

*Sea $f : \left[0, \frac{1}{2}\right] \to \mathbb{R}$ una función dos veces diferenciable (con $f''$ integrable en $\left[0, \frac{1}{2}\right]$), tal que $f(0) = 0$, $f'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{4}$ y $f\left(\frac{1}{2}\right) > 0$, demuestre que existe $x_0 \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ tal que tal que:*

$$f''(x_0) \leq 6\, x_0 - \frac{1}{(1-x_0)^2}$$

*Hint: ¡$e < 2^8$!*

*Demostración.*

Procedemos por contradicción es decir $\forall\, t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, con $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, se tiene que:

$$6t - \frac{1}{(1-t)^2} < f''(t) \implies \int_x^{1/2} \left(6t - \frac{1}{(1-t)^2}\right) dt < \int_x^{\frac{1}{2}} f''(t)\, dt$$

De donde se sigue que:

$$-\frac{5}{4} - 3x^2 + \frac{1}{1-x} = \int_x^{1/2} \left(6t - \frac{1}{(1-t)^2}\right) dt < \int_x^{\frac{1}{2}} f''(t)\, dt \overset{\textbf{T.F.C}}{=} f'\left(\frac{1}{2}\right) - f'(x) = -\frac{5}{4} - f'(x)$$

Finalmente

$$f'(x) < 3x^2 - \frac{1}{1-x} \implies \int_0^{\frac{1}{2}} f'(x)\, dx < \int_0^{\frac{1}{2}} \left(3x^2 - \frac{1}{1-x}\right) dx$$

Obtenemos que:

$$\frac{1}{8} - \ln(2) = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(3x^2 - \frac{1}{1-x}\right) dx > \int_0^{\frac{1}{2}} f'(x)\, dx \overset{\textbf{T.F.C}}{=} f\left(\frac{1}{2}\right) - f(0) = f\left(\frac{1}{2}\right)$$

Usando el hint $e < 2^8 \implies \frac{1}{8} - ln(2) < 0$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) < \frac{1}{8} - ln(2) < 0$$

Una contradicción pues $f\left(\frac{1}{2}\right) > 0$, como nuestra unica suposición fue la no existencia de $x_0$, concluimos la tesis del problema. $\square$

## Parcial 3

Parcial 3

*Sea $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ una función integrable,entonces:*

$$\int_{-a}^{a} \frac{(f(x) + f(-x))e^{-f(x)}}{e^{-f(x)} + e^{-f(-x)}}\, dx = \int_{-a}^{a} f(x)\, dx$$

*Demostración.*

**Lemma 0.1.**

*Sean $h, g$ funciones integrables en $[-a, a] \subset \mathbb{R}$, tal que $h$ es par y $g$ es impar, entonces:*

$$\int_{-a}^{a} \frac{h(x)}{1 + e^{g(x)}}\, dx = \int_{0}^{a} h(x)\, dx$$

*Demostración.*

Primero tenemos que:

$$\int_{-a}^{a} \frac{h(x)}{1 + e^{g(x)}}\, dx = \int_{0}^{a} \frac{h(x)}{1 + e^{g(x)}}\, dx + \int_{-a}^{0} \frac{h(x)}{1 + e^{g(x)}}\, dx$$

Luego sea $u = -x \implies -du = dx$:

$$\int_{-a}^{0} \frac{h(x)}{1 + e^{g(x)}}\, dx = -\int_{a}^{0} \frac{h(-u)}{1 + e^{g(-u)}}\, du = \int_{0}^{a} \frac{h(u)}{1 + e^{-g(u)}}\, du = \int_{0}^{a} \frac{e^{g(u)}\, h(u)}{1 + e^{g(u)}}\, du$$

por tanto:

$$\int_{-a}^{a} \frac{h(x)}{1 + e^{g(x)}}\, dx = \int_{0}^{a} \frac{h(x)}{1 + e^{g(x)}}\, dx + \int_{0}^{a} \frac{e^{g(x)}\, h(x)}{1 + e^{g(x)}}\, dx = \int_{0}^{a} \frac{1 + e^{g(x)}}{1 + e^{g(x)}}\, h(x)\, dx = \int_{0}^{1} h(x)\, dx$$

$\square$

Reescribimos:

$$\int_{-a}^{a} \frac{(f(x) + f(-x))\, e^{-f(x)}}{e^{-f(x)} + e^{-f(-x)}}\, dx = \int_{-a}^{a} \frac{f(x) + f(-x)}{1 + e^{f(x) - f(-x)}}\, dx$$

Como $h(x) = f(x) + f(-x)$ es una función par y $l(x) = f(x) - f(-x)$ es impar podemos aplicar el lemma:

$$\int_{-a}^{a} \frac{f(x) + f(-x)}{1 + e^{f(x) - f(-x)}}\, dx = \int_{0}^{a} (f(x) + f(-x))\, dx$$

Luego tenemos que sea $u = -x$ entonces $-du = dx$:

$$\int_{0}^{a} f(-x)\, dx = -\int_{0}^{-a} f(u)\, du = \int_{-a}^{0} f(u)\, du$$

Finalmente tenemos que:

$$\int_{-a}^{a} \frac{(f(x) + f(-x))\, e^{-f(x)}}{e^{-f(x)} + e^{-f(-x)}}\, dx = \int_{0}^{a} f(x)\, dx + \int_{-a}^{0} f(x)\, dx = \int_{-a}^{a} f(x)\, dx$$

$\square$

## Parcial 4

Parcial 4

*Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f^{28}(0)$ existe y tal que*

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - 4(x^2+1)^2 + \frac{f^{28}(0)}{28!}\, x^{28} + 3x^3 + f(2x)}{x^4\, sen(x^{22})} = 0$$

*Calcule $f^k(0)$ para $k = 1, 2, 3, 4$*

*Demostración.*

Tenemos que como $|sen(x)| \leq 1 \implies 1 \leq \frac{1}{|sen(x)|}\ \forall x \in \mathbb{R}$, por tanto:

$$\lim_{x \to 0} \left| \frac{f(x) - 4(x^2+1)^2 + \frac{f^{28}(0)}{28!}\, x^{28} + 3x^3 + f(2x)}{x^4} \right| \leq \lim_{x \to 0} \left| \frac{f(x) - 4(x^2+1)^2 + \frac{f^{28}(0)}{28!}\, x^{28} + 3x^3 + f(2x)}{x^4, sen(x^{22})} \right| = 0$$

Por tanto tenemos que:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - 4(x^2+1)^2 + \frac{f^{28}(0)}{28!}\, x^{28} + 3x^3 + f(2x)}{x^4} = 0$$

Luego como $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f^{28}(0)\, x^{28}}{x^4} = 0$, se sigue que:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) + f(2x) - (4(x^4 + 2x^2 + 1) - 3x^3)}{x^4} = 0$$

Finalmente tenemos que $l(x) = f(x) + f(2x)$ tenemos que:

$$\lim_{x \to 0} \frac{l(x) - (4x^4 - 3x^3 + 8x^2 + 4)}{x^4} = 0$$

Por la unicidad del polinomio de Taylor tenemos que:

$$P_{l,4,0} = 4 + 8x^2 - 3x^3 + 4x^4 = 2\, f(0) + \frac{3f'(0)}{1}\, x + \frac{5f''(0)}{2}\, x^2 + \frac{9f^3(0)}{6}\, x^3 + \frac{17f^4(0)}{24} x^4$$

Por tanto tenemos que:

$$2f(0) = 4 \quad f'(0) = 0 \quad \frac{5f''(0)}{2} = 8 \quad \frac{9f^3(0)}{6} = -3 \quad \frac{17f^4(0)}{24} = 4$$

□

## Parcial 5

**Parcial 5**

*Sea $f$ una función tal que $f(0) = 0$ y $f'(0) > 0$, ademas se $a_n$ una sucesión cuyo limite es 0 y $a_n \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, pruebe que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente si y solo si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f(|a_n|)$ converge*

*Demostración.*

$\Rightarrow$) Supongamos que $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ converge absolutamente, como $f'(0) = l > 0$ tenemos que:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = l$$

Como $\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|$ converge entonces $\lim_{n \to \infty} |a_n| = 0$, por tanto:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(|a_n|)}{|a_n} = l$$

Luego sea $\epsilon = 2l > 0$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq k$, entonces:

$$\left| \frac{f(|a_n|)}{|a_n|} - l \right| \leq l \implies \frac{f(|a_n|)}{|a_n|} \leq 3l \implies f(|a_n|) \leq 3l\,|a_n|$$

De esto se sigue que $\sum_{n=k}^{\infty} f(|a_n|)$, converge por tanto $\sum_{n \in \mathbb{N}} f(|a_n|)$ converge

$\Leftarrow$) Supongamos que $\sum_{n\in\mathbb{N}} f(|a_n|)$ converge, como el limite de $a_n$ es cero, sigue siendo valido que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(|a_n|)}{|a_n|} = l$$

Por tanto sea $\epsilon := \frac{l}{2}$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que si $n \leq k$ entonces:

$$\left|\frac{f(|a_n|)}{|a_n|}\right| < \frac{l}{2} \implies \frac{l}{2} \leq \frac{f(|a_n|)}{|a_n|} \implies |a_n| \leq \frac{2}{l}\, f(|a_n|)$$

De nuevo $\sum_{n=k}^{\infty} |a_n|$ converge por tanto $\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$ converge

$\square$