Problema 1

Elías López Rivera [1], Adolfo Ángel Cardoso Vásquez [2],
Jonathan Sayid Mercado Martínez [3]

[3] Instituto Politécnico Nacional
[1 2] Universidad Nacional Autónoma de México

26 de enero de 2025

1. Enunciado

Dados $V := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ y las operaciones binarias definidas para $x, y, \alpha \in \mathbb{R}$

$$x \blacklozenge y = xy$$
$$\alpha \blacktriangle x = x^{\alpha}$$

Demuestre que $(V, \blacklozenge, \blacktriangle, \mathbb{R})$, es un espacio vectorial.

2. Solución

Tomemos $(V, \blacklozenge)$:

1) Sean $x, y \in V$, como $x, y > 0$, tenemos que $xy > 0$ de donde se sigue que $x \blacklozenge y > 0$, por tanto $x \blacklozenge y \in V$, obtenemos que la opración binaria $\blacklozenge$ es cerrada bajo V:

$$\blacklozenge : V \times V \to V$$

2) Sean $x, y \in V$, al estar estos contenidos en $\mathbb{R}$, sabemos que el producto respeta la conmutatividad, es decir $xy = yx$, por tanto tenemos:

$$x \blacklozenge y = xy = yx = y \blacklozenge x \qquad \forall\, x, y \in V$$

Se sigue que $\blacklozenge : V \times V \to V$, es **conmutativa**

3) Sean $x, y, z \in V$, como ambos estan contenidos en $\mathbb{R}$, el producto cumple la asociatividad, es decir $x(yz) = (xy)z$, por tanto:

$$x \blacklozenge (y \blacklozenge z) = x(yz) = (xy)z = (x \blacklozenge y) \blacklozenge z \qquad \forall\ x, y \in V$$

Se sigue que $\blacklozenge : V \times V \to V$ es **asociativa**

4) Sea $x \in V$, por estar este en $\mathbb{R}$, existe $1 \in \mathbb{R}$ unico de tal manera que $1\,x = x$, como $1 > 0$, se tiene que $1 \in V$, por tanto:

$$\forall x \in V \quad \exists 1 \in V : 1 \blacklozenge x = x$$

Se sigue que $\blacklozenge : V \times V \to V$, tiene un **elemento neutro**

5) Sea $x \in V$, como esta contenido en $\mathbb{R}$, sabemos que existe $x^{-1} \in \mathbb{R}$ unico tal que $x\,x^{-1} = 1$, como $x > 0$, tenemos que $x^{-1} > 0$, finalmente obtenemos:

$$\forall x \in V \quad \exists\ x^{-1} \in V : x \blacklozenge x^{-1} = 1$$

Se sigue que $\blacklozenge : V \times V \to V$, tiene **elementos inversos**

***)** De **1), 2), 3), 4)** se sigue que $(V, \blacklozenge)$ es **grupo abeliano**

Tomemos $(V, \blacktriangle)$:

1') Sean $x \in V$, $y \in \mathbb{R}$, tenemos que como $x > 0$ entonces $x^y > 0$, por tanto $y \blacktriangle x \in V$, se sigue que $\blacktriangle$, es una operación cerrada bajo un escalar en $\mathbb{R}$ y un vector en V:

$$\blacktriangle : \mathbb{R} \times V \to V$$

2') Tomemos $x, z \in V$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, podemos notar que como todos estan contenidos en $\mathbb{R}$, $(xy)^\lambda = x^\lambda\, y^\lambda$, de donde se sigue que:

$$\lambda \blacktriangle (x \blacklozenge y) = (xy)^\lambda = x^\lambda\, y^\lambda = \lambda \blacktriangle x \blacklozenge \lambda \blacktriangle y \qquad \forall\ x, y \in V,\ \lambda \in \mathbb{R}$$

Derivado de lo anterior $\blacktriangle : \mathbb{R} \times V \to V$, cumple con la **distributividad escalar, respecto a la operación binaria ⧫**

3') Tomemos $\lambda, \alpha \in \mathbb{R}$, $x \in V$, como todos estan contenidos en $\mathbb{R}$, $x^{\alpha}\, x^{\lambda} = x^{\alpha+\lambda}$, de donde se sigue que:

$$(\alpha + \lambda) \blacktriangle x = x^{\alpha+\lambda} = x^{\alpha}\, x^{\lambda} = \alpha \blacktriangle x \blacklozenge \lambda \blacktriangle x \qquad \forall\ \alpha, \lambda \in \mathbb{R},\, x \in V$$

Se tiene que $\blacktriangle : \mathbb{R} \times V \to V$, cumple **distributividad vectorial respecto a la suma escalar**

4') Tomemos $y \in V$, sabemos que sea $1 \in \mathbb{R}$, se cumple que $y^1 = y$, por tanto:

$$\forall\, y \in V \quad \exists\, 1 \in \mathbb{R} :\ 1 \blacktriangle y = y$$

Se sigue que $\blacktriangle : \mathbb{R} \times V \to V$ tiene un **elemento neutro**

5') Tomemos $\lambda, \epsilon \in \mathbb{R}$, y $x \in V$, por estar todos los anteriores contenidos en $\mathbb{R}$, sabemos que se cumple que $(x^{\epsilon})^{\lambda} = x^{\lambda\,\epsilon}$, de donde se obtiene que:

$$(\lambda\, \epsilon) \blacktriangle x = x^{\lambda\,\epsilon} = (x^{\epsilon})^{\lambda} = \lambda \blacktriangle (\epsilon \blacktriangle x) \qquad \forall\ \epsilon, \lambda \in \mathbb{R},\, x \in V$$

De ***), 1'), 2'), 3'), 4'), 5')** se sigue que $(V,\, \blacklozenge,\, \blacktriangle,\, \mathbb{R})$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial.