Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Geometria Moderna
Problema de bitácora 6
Elías López Rivera
elias.lopezr@ciencias.unam.mx
Fecha: 5/12/2024

Área máxima

Se busca construir rectángulos inscritos en un cuarto de circunferencia cuyo radio r es fijo, de tal forma que 1) un vértice del rectángulo coincida con el centro de la circunferencia, 2) los vértices adyacentes a éste se encuentren sobre los radios del sector de circunferencia y 3) el cuarto vértice se encuentre sobre el arco de circunferencia. ¿De qué manera se pueden construir dichos rectángulos? ¿De qué manera se puede expresar o representar el área de dichos rectángulos? ¿Existe un rectángulo de área máxima, en caso afirmativo, qué características tiene ese rectángulo? Construye y explora en GeoGebra un modelo que represente el problema y su solución.

S.1 Comprensión del problema y formulación de una conjetura

El problema tiene diversas condiciones espécificas que hacen que sea difícil de representar al menos en una primera estancia, sin embargo, podemos representarlo fácilmente a través de GeoGebra, para esto trazamos dos rectas perpéndiculares entre si, posterioremte tomamos su intersección y un punto arbitrario sobre cualquiera y trazamos la circunferencia con centro en la intersección y de radio igual al segmento formado por el punto de intersección y el punto arbitrario, tomamos un punto movil sobre alguno de los arcos generados por la recta y finalmente trazamos dos perpéndiculares a las rectas antes descritas que pasen por nuestro punto movil, usando la herramienta polígono trazamos un rectangulo que pase por las respectivas intersecciones de las rectas antes descritas , este sera nuestro primer simulador:

Simulador

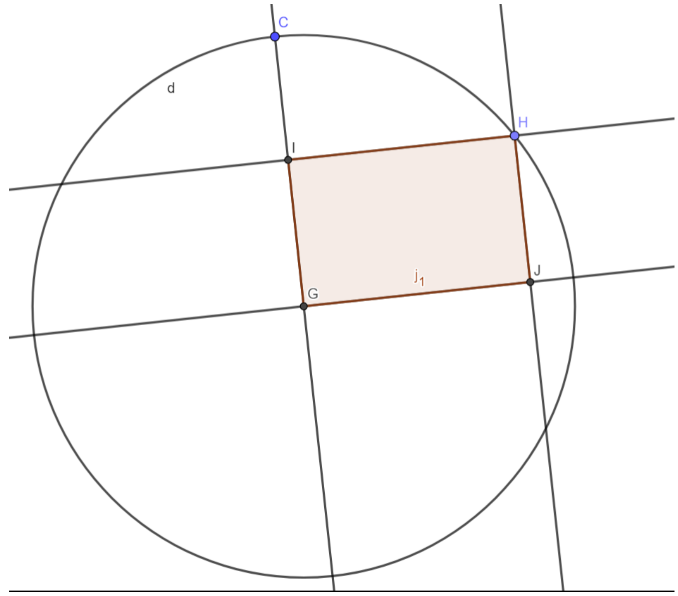

Figura 1: Simulador

Una vez hecho nuestro primer simulador, procedí a hacer un poco de exploración, usando la herramienta área sobre nuestro poligono e ir variando la posición de nuestro punto movil, finalmente notamos que el cuadrilatero de mayor área se forma cuando nuestro punto movil se encuntra sobre la bisectríz del ángulo formado por las dos rectas perpéndiculares iniciales, también notamos una especie de simetria, pues los rectaángulos formados por puntos simetricos respecto a la bisectriz tienen la misma área, finalmente noté una última curiosidad y es que el recángulo de mayor área es a su vez un cuadrado, a su vez marque el ángulo JGI con la función medir ángulo de GeoGebra.

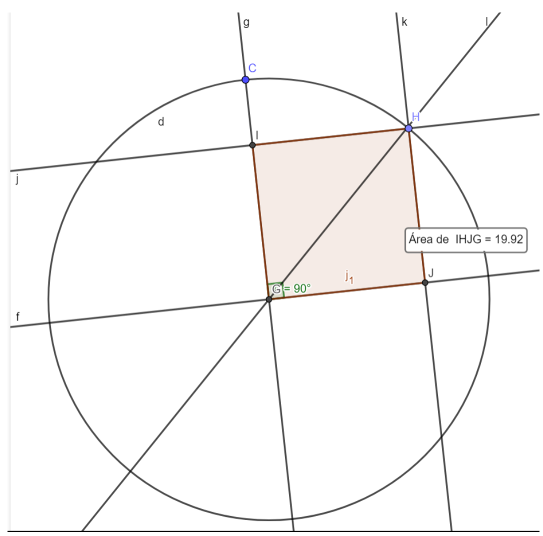

Figura 2: Exploración

S.2 Elaboración de una estrategia de resolución y justificación del problema

Conjetura

Sea un cuarto de circunferencia el rectángulo de mayor área que puede inscribirse, bajo las condiciones dadas es un cuadrado

Para la resolución del problema hay muchas vertientes que se pueden abordar, yo en partícular he decidio, por atacar el problema desde el cálculo diferencial, por tanto tomemos en cuenta los siguientes datos geometricos, el área de un rectángulo es $Ar = bh$, donde b representa la base y h la altura, sean A, B, C y D, trazamos el segmento AC, este es un radio de la circunferencía, pues C esta sobre esta,por tanto lo renombramos $AC = R$, luego notemos que $\Delta\, ADC$ este es rectángulo pues $\measuredangle CDA = \frac{\pi}{2}$, podemos poner el área del rectángulo $ABCD$, puede ponerse en terminos de $\measuredangle DAC = \theta$ (Marcamos este ángulo y su medida con la función medir ángulo de GeoGebra):

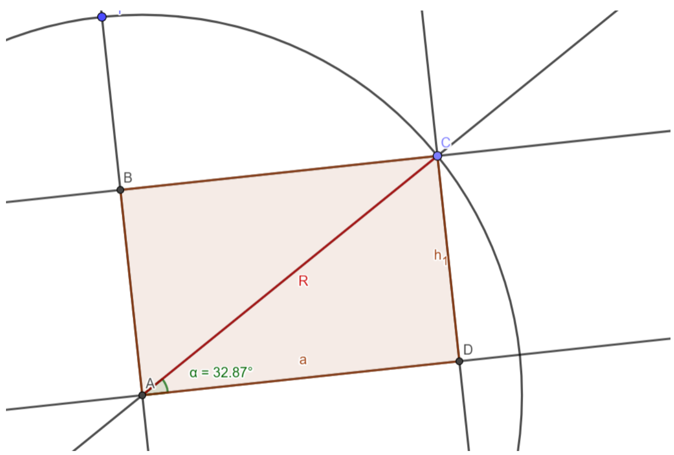

Figura 3: Construcción

Por tanto obtenermos las siguientes igualdades geométricas: $a = R\cos(\theta)$, $h = R\sin(\theta)$, por tanto definimos la función que representa el área de $ABCD$ $Ar : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$, se define sobre este intervalo debido a que son los posibles valores de θ, en función del punto movil C, de tal suerte que $Ar(\theta) = R^2 \sin(\theta)\cos(\theta)$ como Ar es una función continua y su dominio es un intervalo cerrado, sabemos que A alcanza su máximo en algún punto del dominio, es decir si existe un caso que maximiza el área total del rectángulo $ABCD$, para encontrarlo podemos hacer uso de la primera y segunda derivada ya que sabemos que en cualquier punto máximo es una raíz de la primera derivada, y si este en partícular es un máximo la segunda derivada sera negativa valuada en el punto.

S.3 Resolución del problema

Siguiendo la línea de pensmiento planteada anteriormente, procedemos a obtener la primera derivada de A:

$$Ar'('\theta) = R^2\ -\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = R^2\ \cos(2\,\theta)$$

Se sigue que $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$, es un punto crítico pues $Ar'(\theta_0) = 0$, ahora obtenemos la segunda derivada de A:

$$Ar''(\theta) = -2\,R^2\ \mathrm{sen}(2\,\theta)$$

Como $Ar''(\theta_0) = -1 < 0$, entonces el punto es un máximo

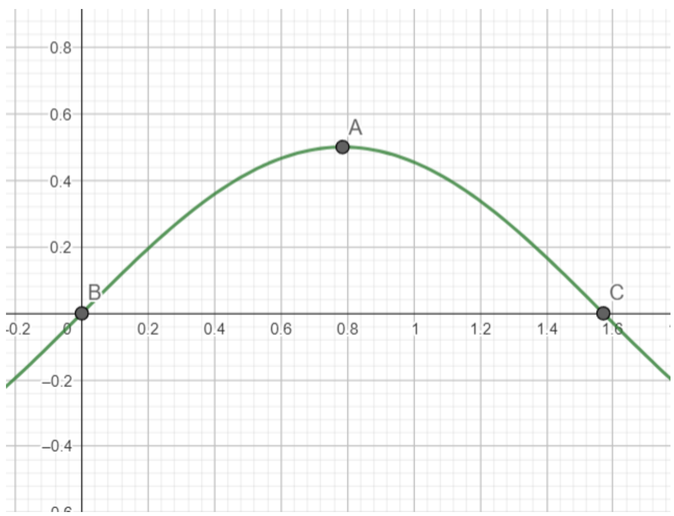

Figura 4: Gráfica de Ar, el eje de las abscisas representa los valores de θ, y el de las ordenadas los valores del área de $ABCD$

Ahora demostraremos que como $\measuredangle\,ADC = \theta_0 = \frac{\pi}{4}$, entonces $ABCD$ es un cuadrado, en partícular tenemos que $\Delta\,ACD$ es rectángulo isósceles, pues uno de sus ángulos es igual a $\frac{\pi}{4}$ luego tenemos que $\measuredangle\,BAC + \measuredangle\,ADC = \frac{pi}{2}$, se sigue que $\measuredangle\,BAC = \pi/4$, luego $\Delta\,ACB$ también es rectángulo isósceles, luego por las igualdades $\measuredangle\,BAC = \measuredangle\,ADC$, $\measuredangle\,BCA = \measuredangle\,ACD$ y $AC = AC$, podemos aplica el criterio ángulo-lado-ángulo, tenemos que $\Delta\,ACB \cong \Delta\,ACD$, y por tanto $AD = AB = DC = BC$, por tanto $ABCD$ es un cuadrado

S.4 Extensión del problema

Si se modifica el arco de circunferencia, el problema cambia radicalmente, ya que ahora se inscribiria un paralelogramo y no un rectángulo necesariamente, recordando el área del paralelogramo tenemos $A = bh$, donde h es su altura y b su bases, para obtener $A(\theta)$, donde θ es nuevamente $\measuredangle DAC$, observemos lo siguiente:

Construccion

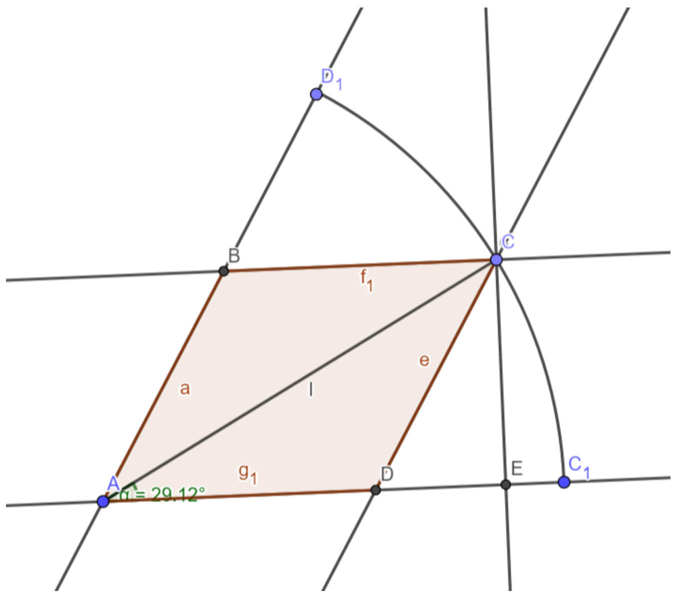

Figura 5: Construcción 2

Tenemos que E es el pie de la altura respecto al segmento AD, sea $\measuredangle EAB = \alpha$, aplicamos la tangente sobre el triángulo $\Delta\, CDE$:

$$\tan(\alpha) = \frac{R\,\sin(\theta)}{DE} \implies DE = \frac{R\,\sin(\theta)}{\tan(\alpha)}$$

y por tanto:

$$AD = R\,\cos(\theta) - \frac{R\,\sin(\theta)}{\tan(\alpha)}$$

Finalmente obtenemos $A(\theta)$:

$$Ar(\theta) = R^2\left(\cos(\theta)\,\sin(\theta) - \frac{\text{sen}^2(\theta)}{\tan(\alpha)}\right)$$

Por tanto podemos aplicar un proceso análogo al del problema anterior para encontrar el máximo de A_θ, pues restringimos su domino a un intervalo cerrado $[0, \measuredangle DAB]$, ya que estos son los posibles valores que puede tomar el ángulo dependiendo de la posición del punto movil C, debido a que $A(\theta)$ es continua pues estamos suponiendo $\measuredangle DAB \neq \frac{\pi}{2}$, entonces esta alcanza su máximo y mínimo, también notamos que estos dependeran explicitamente de $\measuredangle DAB$, debido a que la primera derivada contara con este termino y no podra eliminarse, este es solo el caso en que el sector de circunferencia es menor al cuarto originalmente planteado, en caso de que el sector sea mayor, la idea es la misma, encontrar Ar_θ, reestringir su dominio a un intervalo cerrado y encontrar su máximo.

Como extensión de problema proponemos demostrar la unicidad de nuestra proposición, es decir que si la figura inscrita en el sector de circunferencia, es un cuadrado, entonces este necesariamente es el cuadrado cuya área es máxima, el problema no es dificil de aboradar, pues simplemente debemos probar que no existe otro en el cual la figura inscrita sea un cuadrado, esto se sigue casi directamente al argumentar que $\measuredangle DAC \neq \frac{\pi}{4}$, pues esto nos dara pie a poder argumentar que el triángulo rectángulo ΔACD no es isósceles.