Cálculo Diferencial e Integral II

Métodos de integración

25 de marzo de 2020

El día de hoy la clase será dedicada al estudio y cálculo de integrales de funciones racionales. Esto nos va a llevar a desarrollar la técnica de la "Descomposición en Fracciones Parciales". A nivel teórico el resultado es muy agradable, llevado a la práctica la verdad es que no tanto. El cálculo de integrales de funciones racionales es quizá la que se lleva el premio a las integrales más talachudas. Bien comprendido el método, no requerirá mucha imaginación de nuestra parte para ejecutarlo pero sí mucha paciencia para no perdernos entre tanta cuenta.

La clase pasada nos trazamos un objetivo importante (y bastante ambicioso honestamente). En palabras muy simples, buscamos demostrar que si f es una función racional, entonces la integral $\int f(x)\,dx$ puede resolverse. Ya hemos dado los primeros pasos para este objetivo.

Vamos poniendo el contexto. La clase pasada logramos el bonito resultado de demostrar que las integrales

$$\int \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}dx$$

pueden resolverse siempre que la expresión cuadrática sea irreducible, e incluso dentro de la prueba logramos diseñar una estrategia general para resolverlas. Así mismo, podemos estar de acuerdo que es muy sencillo verificar que las integrales de la forma

$$\int \frac{A}{(ax+b)^n}dx$$

también pueden resolverse (un cambio de variable $u=ax+b$ nos lleva de la mano).

Ahora, supongamos que tenemos una función racional f, es decir, $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ en donde $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios.

¿Qué sucedería si lográramos demostrar que $f(x)$ puede descomponerse en algo de la forma

$$f(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{A_k}{(a_kx+b_k)^{i_k}}+\sum_{k=1}^{m}\frac{B_kx+C_k}{(\alpha_kx^2+\beta_kx+\gamma_k)^{j_k}}$$

(en donde cada expresión cuadrática es irreducible)?

Bueno, si pudiéramos lograr esto, entonces

$$\int f(x)\,dx=\sum_{k=1}^{n}\int\frac{A_k}{(a_kx+b_k)^{i_k}}dx+\sum_{k=1}^{m}\int\frac{B_kx+C_k}{(\alpha_kx^2+\beta_kx+\gamma_k)^{j_k}}dx$$

Pero de acuerdo a lo que ya hemos probado, cada una de la integrales del lado derecho pueden resolverse de manera explícita y en consecuencia $\int f(x)\,dx$ podría resolverse también. Entonces aquí está la clave para probar lo que buscamos. ¡Sólo necesitamos que dicha descomposición exista! Lo extraordinario es que la descomposición sí existe (sólo hace falta pedir que el grado del numerador es menor que el del denominador).

Las expresiones

$$\frac{A_k}{(a_kx+b_k)^{i_k}} \text{ y } \frac{B_kx+C_k}{(\alpha_kx^2+\beta_kx+\gamma_k)^{j_k}}$$

son llamadas fracciones parciales de f. Y descomponer a f como sumas de este tipo de expresiones es precisamente llevar a cabo su **descomposición en fracciones parciales**.

Vamos a comenzar enunciando tan importante descomposición como un teorema.

Teorema 1 *Si $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ es una función racional para la cual el grado de $p(x)$ es menor que el grado de $q(x)$, entonces f puede descomponerse como una suma de la forma*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{(a_k x + b_k)^{i_k}} + \sum_{k=1}^{m} \frac{B_k x + C_k}{(\alpha_k x^2 + \beta_k x + \gamma_k)^{j_k}}$$

en donde cada expresión cuadrática es irreducible.

Ya con este teorema podemos terminar nuestro objetivo inicial.

Teorema 2 *Si $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ es una función racional, entonces $\int f(x)\,dx$ tiene solución explícita.*

Dem. En la discusión previa hemos puntualizado que si una función racional f se puede descomponer en fracciones parciales, entonces la integral $\int f(x)\,dx$ puede resolverse. Ahora, el Teorema 1 nos dice que si $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ es una función racional en donde el grado de $p(x)$ es menor que el grado de $q(x)$, entonces f tiene asociada una descomposición en fracciones parciales. Así que sólo nos faltaría discutir qué pasa si el grado de $p(x)$ es mayor o igual que el de $q(x)$.
Supongamos entonces que $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ es una función racional en donde el grado de $p(x)$ es mayor o igual que el de $q(x)$.
Lo que procede aquí es que primero hagamos la "división de polinomios". Como el grado de $p(x)$ es mayor o igual que el de $q(x)$, esto significa que deben existir dos polinomios $g(x)$ y $r(x)$ tales que

$$p(x) = g(x)\,q(x) + r(x)$$

en donde el grado de $r(x)$ es menor que el grado de $q(x)$.
Dividiendo la igualdad entre $q(x)$ obtenemos

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{g(x)\,q(x)}{q(x)} + \frac{r(x)}{q(x)} = g(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$

Y por lo tanto

$$\int f(x)\,dx = \int g(x)\,dx + \int \frac{r(x)}{q(x)}dx$$

Dado que el grado de $r(x)$ es menor que el grado de $q(x)$, entonces $\int \frac{r(x)}{q(x)}dx$ tiene solución explícita. Como naturalmente siempre podemos integrar a un polinomio, concluimos que $\int f(x)\,dx$ sí puede resolverse. ■

Así que ya tenemos la certeza de que todas las funciones racionales tienen una primitiva explícita. Ahora vamos a aprender a calcularlas.

Se dijo al inicio que probar el Teorema 2 era ambicioso, sin embargo, lo verdaderamente ambicioso es probar el teorema que lo sustenta, es decir, el Teorema 1. Tristemente la prueba de este resultado se escapa de nuestros alcances porque necesitaríamos desarrollar mucha herramienta que no le corresponde al Cálculo. De manera que tratar de ofrecer la prueba sólo nos alejaría de nuestra verdadera meta la cual es, dominar la integración (una disculpa si esto produce alguna decepción).

Aunque nos quede la espinita moral de no haber podido probar el Teorema 1, sí podemos, mediante ejemplos, ir acariciando las ideas detrás de su prueba. Y eso es lo que haremos en lo que sigue, seguir practicando integrales utilizando las fracciones parciales.

Ejemplo 3 *Calcular*

$$\int \frac{2x^2 + 5x - 1}{x^3 + x^2 - 2x}dx.$$

Llamemos $f(x) = \frac{2x^2+5x-1}{x^3+x^2-2x}$. Para resolver la integral, lo que buscamos es descomponer a f en fracciones parciales. ¿Cómo damos con la expresión que afirma el Teorema 1? Resulta que en la identidad dada en el teorema

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{(a_k x + b_k)^{i_k}} + \sum_{k=1}^{m} \frac{B_k x + C_k}{(\alpha_k x^2 + \beta_k x + \gamma_k)^{j_k}}$$

*los denominadores involucrados en cada fracción no están sacados de la nada sino que **siempre** quedan totalmente determinados por el denominador de f, en este caso por*

$$x^3 + x^2 - 2x$$

Lo que hay que hacer es factorizar al polinomio lo más que podamos:

$$x^3 + x^2 - 2x = x\left(x^2 + x - 2\right) = x\left(x-1\right)\left(x+2\right)$$

Una vez lograda la factorización, nos damos cuenta que todos los factores son lineales. Lo que significa que a f le va a corresponder una descomposición del siguiente estilo

$$f\left(x\right) = \frac{2x^2 + 5x - 1}{x^3 + x^2 - 2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2}$$

Así que nuestra siguiente tarea es encontrar las constantes A, B y C. Para eso nos vamos a parar en el lado derecho de la igualdad y vamos a realizar la suma de fracciones:

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2} = \frac{A\left(x-1\right)\left(x+2\right) + Bx\left(x+2\right) + Cx\left(x-1\right)}{x\left(x-1\right)\left(x+2\right)}$$

La expresión que acabamos de obtener debe ser igual a $f\left(x\right)$, de manera más precisa

$$\frac{A\left(x-1\right)\left(x+2\right) + Bx\left(x+2\right) + Cx\left(x-1\right)}{x\left(x-1\right)\left(x+2\right)} = \frac{2x^2 + 5x - 1}{x^3 + x^2 - 2x}$$

Dado que los denominadores de ambas fracciones son exactamente los mismos (uno es la factorización del otro), entonces los numeradores deben coincidir

$$A\left(x-1\right)\left(x+2\right) + Bx\left(x+2\right) + Cx\left(x-1\right) = 2x^2 + 5x - 1$$

Y esta igualdad es válida sin importar el valor de la x. A partir de aquí un buen camino sería asignarle valores convenientes a x para encontrar las constantes que queremos. Hemos dejado la expresión del lado izquierdo sin desarrollar porque de esta manera podemos intuir valores de x adecuados.

Si evaluamos en $x = 0$, entonces

$$A\left(-1\right)\left(2\right) + B\left(0\right)\left(2\right) + C\left(0\right)\left(-1\right) = 2\left(0\right)^2 + 5\left(0\right) - 1 \Rightarrow -2A = -1 \Rightarrow A = \frac{1}{2}$$

Si evaluamos en $x = 1$, entonces

$$A\left(0\right)\left(3\right) + B\left(1\right)\left(3\right) + C\left(1\right)\left(0\right) = 2\left(1\right)^2 + 5\left(1\right) - 1 \Rightarrow 3B = 6 \Rightarrow B = 2$$

Finalmente si evaluamos en $x = -2$, entonces

$$A\left(-3\right)\left(0\right) + B\left(-2\right)\left(0\right) + C\left(-2\right)\left(-3\right) = 2\left(-2\right)^2 + 5\left(-2\right) - 1 \Rightarrow 6C = -3 \Rightarrow B = -\frac{1}{2}$$

En resumen

$$A = \tfrac{1}{2} \qquad B = 2 \qquad C = -\tfrac{1}{2}$$

Por lo tanto se concluye que

$$\frac{2x^2 + 5x - 1}{x^3 + x^2 - 2x} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}\right) + 2\left(\frac{1}{x-1}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+2}\right)$$

Ya que logramos la descomposición en fracciones parciales, regresamos a la integración y concluimos que

$$\int \frac{2x^2 + 5x - 1}{x^3 + x^2 - 2x}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x}dx + 2\int \frac{1}{x-1}dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+2}dx$$

$$= \frac{1}{2}\log\left(x\right) + 2\log\left(x-1\right) - \frac{1}{2}\log\left(x+2\right) + C.$$

El Ejemplo 3 nos brinda algunos detalles importantes en los que podemos ahondar. Hemos dicho en el ejemplo que al buscar la descomposición en fracciones parciales de una función racional $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, nuestro primer paso es encontrar los posibles denominadores que estarán involucrados y éstos siempre quedarán determinados por $q(x)$ al realizar su factorización. Pero, ¿acaso siempre es posible factorizar a $q(x)$ (aunque nosotros no sepamos cómo)? La respuesta es ¡sí!, siempre es posible factorizar a $q(x)$ y expresarlo como producto de factores lineales así como de algunos factores cuadráticos irreducibles. Este importante resultado es consecuencia del Teorema Fundamental del Álgebra así como de herramienta que involucra a los números complejos.

Teorema 4 *Si $q(x) = x^k + c_{k-1}x^{k-1} + \cdots + c_1 x + c_0$ es una función polinómica, entonces $q(x)$ puede factorizarse como*

$$q(x) = (x - a_1)^{r_1} \cdots (x - a_n)^{r_n} \left(x^2 + \beta_1 x + \gamma_1\right)^{s_1} \cdots \left(x^2 + \beta_m x + \gamma_m\right)^{s_m}$$

en donde todos los factores son distintos entre sí y cada expresión cuadrática es irreducible.

Este teorema es crucial en la demostración del Teorema 1, sin embargo, como lo acabamos de anunciar, se necesitan cosas muy lejanas de nuestro curso para demostralo (y esta sólo es una de las razones por las que no le dimos prueba al Teorema 1).

Observación importante: Debe quedar claro que la factorización así formulada en el Teorema 4 sólo nos da una directriz de cómo se ve en general la factorización. Es decir, en realidad al factorizar un polinomio $q(x)$ pueden ocurrir tres escenarios:

1. En la factorización de $q(x)$ sólo hay factores lineales. Por ejemplo: $q(x) = x(x-1)^2(x+2)^3$
2. En la factorización de $q(x)$ sólo hay factores irreducibles. Por ejemplo: $q(x) = \left(x^2+1\right)\left(x^2+x+1\right)^2$
3. En la factorización de $q(x)$ aparecen tanto factores lineales como irreducibles. Por ejemplo: $q(x) = x(x-1)^3\left(x^2+1\right)^5$

Recordatorio: Una manera rápida de determinar si una expresión cuadrática ax^2+bx+c es irreducible, es checar el signo de su discriminante:

$$ax^2 + bx + c \text{ es irreducible si y sólo si } b^2 - 4ac < 0.$$

Gracias al Teorema 4 ahora ya sabemos que siempre podremos factorizar a nuestros denominadores y comenzar a plantear la descomposición en fracciones parciales. Por supuesto, factorizar puede tener un alto grado de dificultad, sobre todo cuando los grados de los polinomios son grandes. La teoría dice que los podemos factorizar, el problema es que no nos dice cómo.

El siguiente punto para comentar del Ejemplo 3 tiene que ver con el método que usamos para descubrir las constantes A, B y C. Retomémoslo a detalle. Teníamos planteada la identidad

$$A(x-1)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x-1) = 2x^2 + 5x - 1$$

y la estrategia fue evaluar en tres valores distintos de x para encontrar la solución buscada. Convenientemente tomamos $x = 0, 1, -2$ pero, ¿qué hubiera pasado si elegíamos por ejemplo $x = -1, 2, 3$? Bueno, en este caso lo que habríamos generado es un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas:

$$-2A - B + 2C = -4$$

$$4A + 8B + 2C = 17$$

$$10A + 15B + 6C = 32$$

Al resolver este sistema se debe llegar exactamente a la misma solución que logramos en el ejemplo. En general no importa qué valores se elijan para la x, la solución no va a cambiar. Lo que sí va a cambiar es la dificultad del respectivo sistema de ecuaciones que generen. Así que lo mejor será examinar siempre con cuidado la expresión con la esperanza de identificar algunos valores sencillos.

Ojo: El número de valores que deben tomarse para x **siempre** debe ser igual al número de constantes que se quieren descubrir (por eso en nuestro ejemplo fueron tres).

Ahora bien, este no es el único método disponible para deducir los valores de las constantes. El método más socorrido, sobretodo cuando se trabajan con grados muy altos en los polinomios, es expander la expresión del lado izquierdo y asociar términos semejantes:

$$A\left(x-1\right)\left(x+2\right)+Bx\left(x+2\right)+Cx\left(x-1\right)=A\left(x^2+x-2\right)+B\left(x^2+2x\right)+C\left(x^2-x\right)$$

$$=\left(A+B+C\right)x^2+\left(A+2B-C\right)x-2A$$

Una vez hecho esto, igualamos con el polinomio que teníamos originalmente

$$\left(A+B+C\right)x^2+\left(A+2B-C\right)x-2A=2x^2+5x-1$$

Y finalmente hay que usar el conocido hecho de que dos polinomios son iguales si y sólo si los coeficientes de cada término coinciden. ¿Qué quiere decir esto? Significa que deben ocurrir las siguientes igualdades

$$A+B+C=2$$

$$A+2B-C=5$$

$$-2A=-1$$

Nuevamente se llega a un sistema de ecuaciones. Una vez resuelto, tendremos a nuestras constantes buscadas. (*Como un ejercicio rápido, verifiquen que los valores* $A=\frac{1}{2}$, $B=2$ *y* $C=-\frac{1}{2}$ *satisfacen los dos sistemas de ecuaciones que hemos generado*).

Para efectos prácticos, está bien que elijan el método de su preferencia.

Como pueden ver, poco a poco se siente que la integración de funciones racionales va a ser una verdadera faena.

Continuemos con los ejemplos.

Ejemplo 5 *Calcular*

$$\int\frac{x^2+2x+3}{x^3+x^2-x-1}dx.$$

Ya sabemos cómo comenzar. Tomamos el denominador y lo factorizamos:

$$x^3+x^2-x-1=x^2\left(x+1\right)-\left(x+1\right)=\left(x^2-1\right)\left(x+1\right)$$

$$=\left(x-1\right)\left(x+1\right)\left(x+1\right)=\left(x-1\right)\left(x+1\right)^2$$

Una vez más la factorización arrojó sólo factores lineales, sin embargo, a diferencia del ejemplo previo aquí aparece un factor al cuadrado. Sabiendo que los posibles denominadores de nuestra descomposición están determinados por la factorización $\left(x-1\right)\left(x+1\right)^2$*, es importante ver de qué forma repercute la presencia de ese cuadrado.*

Podríamos estar tentados a pensar que la descomposición se verá como

$$\frac{x^2+2x+3}{x^3+x^2-x-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{C}{\left(x+1\right)^2}$$

pero, asumir esto podría llevarnos a un camino equivocado.

No perdamos de vista que cuando estamos realizando la descomposición en fracciones parciales de un cociente

*$\frac{p(x)}{q(x)}$, lo que estamos haciendo es **cazar** a las fracciones involucradas cuya suma nos devuelve $\frac{p(x)}{q(x)}$. Esto lo hemos expresado en abstracto como*

$$\frac{p(x)}{q(x)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{A_k}{(a_kx+b_k)^{i_k}}+\sum_{k=1}^{m}\frac{B_kx+C_k}{(\alpha_kx^2+\beta_kx+\gamma_k)^{j_k}}$$

La cuestión es que nada nos asegura que los términos a_kx+b_k sean distintos entre sí (o al menos nunca se dijo) y lo mismo puede ocurrir con los términos $\alpha_kx^2+\beta_kx+\gamma_k$.
*El hecho de no saber cuántas fracciones están involucradas en la descomposición (porque las estamos cazando) hace que, ante la presencia de un factor $(x+b)^n$ en la factorización de $q(x)$, debamos considerar la **posible** presencia de los sumandos*

$$\frac{B_1}{x+b},\frac{B_2}{(x+b)^2},\ldots,\frac{B_n}{(x+b)^n}$$

en la descomposición. Ya que terminemos la cacería se descubrirá si sí aparecen todos estos sumandos o sólo algunos.

Regresando a nuestro ejemplo, la descomposición en fracciones parciales debe ser planteada entonces de la siguiente manera:

$$\frac{x^2+2x+3}{x^3+x^2-x-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}$$

Ahora procedemos a hacer la suma del lado derecho:

$$\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}=\frac{A(x+1)^2+B(x-1)(x+1)+C(x-1)}{(x-1)(x+1)^2}$$

Noten que para ahorrar un poco de cuentas al hacer la suma, hemos utilizado que el producto $(x-1)(x+1)^2$ es el "mínimo común múltiplo" de los tres denominadores en juego.

Igualamos con nuestra fracción original

$$\frac{A(x+1)^2+B(x-1)(x+1)+C(x-1)}{(x-1)(x+1)^2}=\frac{x^2+2x+3}{x^3+x^2-x-1}$$

y concluimos que

$$A(x+1)^2+B(x-1)(x+1)+C(x-1)=x^2+2x+3$$

Para hallar las constantes A, B y C una vez más vamos a optar por sustituir x por algunos valores convenientes. A primera vista se aprecian únicamente dos valores que podrían ayudar $x=1,-1$.

Si $x=1$, entonces

$$A(2)^2+B(0)(2)+C(0)=(1)^2+2(1)+3\Rightarrow 4A=6\Rightarrow A=\frac{3}{2}$$

Si $x=-1$, entonces

$$A(0)^2+B(-2)(0)+C(-2)=(-1)^2+2(-1)+3\Rightarrow -2C=2\Rightarrow C=-1$$

Para obtener el valor de B utilizamos cualquier otra x y aprovechamos que ya conocemos tanto a A como a C.
Si $x=0$, entonces

$$A(1)^2+B(-1)(1)+C(-1)=(0)^2+2(0)+3\Rightarrow A-B-C=3$$

Sustituimos A y C:

$$\frac{3}{2}-B+1=3\Rightarrow B=-\frac{1}{2}$$

En resumen
$$A=\tfrac{3}{2}\qquad B=-\tfrac{1}{2}\qquad C=-1$$
y en consecuencia
$$\frac{x^2+2x+3}{x^3+x^2-x-1}=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{x-1}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}\right)-\frac{1}{(x+1)^2}$$
El hecho de que en la descomposición final sí haya aparecido el sumando $-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}\right)$*, deja en evidencia lo importante de considerar al "potencial" sumando* $\frac{B}{x+1}$ *en nuestro planteamiento.*

Finalmente hacemos la integración:
$$\int\frac{x^2+2x+3}{x^3+x^2-x-1}dx=\frac{3}{2}\int\frac{1}{x-1}dx-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x+1}dx-\int\frac{1}{(x+1)^2}dx$$
$$=\frac{3}{2}\log(x-1)-\frac{1}{2}\log(x+1)+\frac{1}{x+1}+C.$$

Hagamos un ejemplo adicional con un poco más de agilidad.

Ejemplo 6 *Calcular*
$$\int\frac{x^2-2x+2}{(x-1)(x-2)^2}dx.$$
Para aligerar las cuentas aquí ofrecemos un ejemplo con el denominador ya factorizado. Nos encontramos en una situación análoga a la del Ejemplo 5, de manera que ya sabemos cuál debe ser nuestro plantemiento:
$$\frac{x^2-2x+2}{(x-1)(x-2)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{(x-2)^2}$$
Hacemos la suma de fracciones
$$\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{(x-2)^2}=\frac{A(x-2)^2+B(x-1)(x-2)+C(x-1)}{(x-1)(x-2)^2}$$
e igualamos
$$\frac{A(x-2)^2+B(x-1)(x-2)+C(x-1)}{(x-1)(x-2)^2}=\frac{x^2-2x+2}{(x-1)(x-2)^2}$$
De donde
$$A(x-2)^2+B(x-1)(x-2)+C(x-1)=x^2-2x+2$$
Sustituimos los valores $x=1,2$.

Si $x=1$, *entonces* $A=1$.

Si $x=2$, *entonces* $C=2$

Elegimos un tercer valor arbitrario para x *y usamos los valores de* A *y* B:

Si $x=0$, *entonces* $4A+2B-C=2$. *De donde* $2+2B=2$ *y por tanto* $B=0$.

En resumen
$$A=1\qquad B=0\qquad C=2$$
y en consecuencia
$$\frac{x^2-2x+2}{(x-1)(x-2)^2}=\frac{1}{x-1}+\frac{2}{(x-2)^2}$$

Finalmente integramos

$$\int \frac{x^2-2x+2}{(x-1)(x-2)^2}dx = \int \frac{1}{x-1}dx + \int \frac{2}{(x-2)^2}dx$$
$$= \log(x-1) - \frac{2}{x-2} + C$$

Hemos puesto de manera continua los Ejemplos 5 y 6 para poder enfatizar el cómo se debe plantear la búsqueda de las fracciones parciales. En ambos casos la factorización del dominio tuvo una forma en abstracto del tipo

$$(x-a)(x-b)^2$$

Entonces, lo que hay que recalcar es que ante esta situación, el planteamiento de las fracciones parciales debe ser

$$\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{(x-b)^2}$$

es decir, no hay que olvidar considerar el posible sumando $\frac{B}{x-b}$. ¿Por qué le llamamos "posible" sumando? Porque cabe la posibilidad de que en la descomposición final no aparezca ese término (es decir, que tras encontrar el valor de todas las constantes, nos quede $B=0$). Esto es precisamente lo que reflejan los Ejemplos 5 y 6. En el primer caso resulta que en la descomposición final sí aparece el término $\frac{B}{x-b}$ mientras que en el segundo no. Sin embargo, siempre debemos permitir que sea nuestra "cacería" de las fracciones la que detecte su presencia.

Recalcando: De manera general, dada una función racional $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, si en la factorización de $q(x)$ aparece un factor de la forma $(x-b)^n$, entonces en nuestro planteamiento debemos proponer una descomposición en donde aparezca la suma:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{B_k}{(x-b)^k}$$

Así mismo, si en la factorización de $q(x)$ aparece un factor de la forma $\left(x^2+\beta x+\gamma\right)^m$, entonces en nuestro planteamiento debemos proponer

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{B_k x + C_k}{(x^2+\beta x+\gamma)^k}$$

Con el fin de ayudar a no olvidar este detalle, muchos autores (incluido Spivak) enuncian el Teorema 1 de manera un poco más explícita:

Teorema 1 Sea $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ una función racional para la cual el grado de $p(x)$ es menor que el grado de $q(x)$. Si

$$q(x) = (x-a_1)^{r_1} \cdots (x-a_n)^{r_n} \left(x^2+\beta_1 x+\gamma_1\right)^{s_1} \cdots \left(x^2+\beta_m x+\gamma_m\right)^{s_m}$$

entonces f puede descomponerse como una suma de la forma

$$f(x) = \left[\frac{A_{1,1}}{(x-a_1)} + \frac{A_{1,2}}{(x-a_1)^2} + \cdots + \frac{A_{1,r_1}}{(x-a_1)^{r_1}}\right] + \left[\frac{A_{2,1}}{(x-a_2)} + \frac{A_{2,2}}{(x-a_2)^2} + \cdots + \frac{A_{2,r_2}}{(x-a_2)^{r_2}}\right]$$
$$+ \cdots + \left[\frac{A_{n,1}}{(x-a_n)} + \frac{A_{n,2}}{(x-a_n)^2} + \cdots + \frac{A_{n,r_n}}{(x-a_n)^{r_n}}\right]$$
$$+ \left[\frac{B_{1,1}x+C_{1,1}}{(x^2+\beta_k x+\gamma_k)} + \frac{B_{1,2}x+C_{1,2}}{(x^2+\beta_k x+\gamma_k)^2} + \cdots + \frac{B_{1,s_1}x+C_{1,s_1}}{(x^2+\beta_k x+\gamma_k)^{s_1}}\right]$$
$$+ \cdots + \left[\frac{B_{m,1}x+C_{m,1}}{(x^2+\beta_k x+\gamma_k)} + \frac{B_{m,2}x+C_{m,2}}{(x^2+\beta_k x+\gamma_k)^2} + \cdots + \frac{B_{m,s_m}x+C_{m,s_m}}{(x^2+\beta_k x+\gamma_k)^{s_m}}\right]$$

en donde cada expresión cuadrática es irreducible y todos los términos en la factorización de $q(x)$ son distintos.

No es necesario aprenderse esto como una fórmula, lo importante es guardar el mensaje que envía. Simplemente nos está dando la manera explícita de cómo plantear la búsqueda de las fracciones parciales.

Para finalizar este entrenamiento vamos a ver un ejemplo más, está vez en donde sí aparezca una expresión cuadrática irreducible. Cabe hacer la advertencia de que las cuentas se van a poner más extensas.

Ejemplo 7 *Calcular*

$$\int \frac{3x^2+2x-2}{x^4-x^3-x+1}dx.$$

Comenzamos factorizando el denominador

$$x^4-x^3-x+1 = x^3(x-1)-(x-1) = (x-1)\left(x^3-1\right)$$

$$= (x-1)(x-1)\left(x^2+x+1\right) = (x-1)^2\left(x^2+x+1\right)$$

En este caso el factor x^2+x+1 *es irreducible (Checar su discriminante). Por lo tanto nuestro planteamiento de fracciones parciales debe ser*

$$\frac{3x^2+2x-2}{x^4-x^3-x+1} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+x+1}$$

Realizamos la suma de fracciones

$$\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+x+1} = \frac{A(x-1)\left(x^2+x+1\right)+B\left(x^2+x+1\right)+(Cx+D)(x-1)^2}{(x-1)^2(x^2+x+1)}$$

Igualando las fracciones

$$\frac{A(x-1)\left(x^2+x+1\right)+B\left(x^2+x+1\right)+(Cx+D)(x-1)^2}{(x-1)^2(x^2+x+1)} = \frac{3x^2+2x-2}{x^4-x^3-x+1}$$

Y en consecuencia

$$A(x-1)\left(x^2+x+1\right)+B\left(x^2+x+1\right)+(Cx+D)(x-1)^2 = 3x^2+2x-2$$

Hemos llegado a la parte crucial. ¿Cómo hallamos el valor las constantes? La estrategia de darles valores especiales a x sigue siendo efectiva, sin embargo, ya no está tan claro cuáles tomar. Lo que sí debe estar claro es que, si vamos a usar esta estrategia debemos proponer cuatro valores para x (porque tenemos cuatro constantes a descubrir), lo cual nos llevará a un sistema de cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas.

Sólo para entrenar, esta vez vamos a cambiar de método. Recuerden que el otro camino consiste en:

1. *Expander el polinomio del lado izquierdo y asociar términos semejantes:*

$$A(x-1)\left(x^2+x+1\right)+B\left(x^2+x+1\right)+(Cx+D)(x-1)^2$$

$$= A\left(x^3-1\right)+B\left(x^2+x+1\right)+C\left(x^3-2x^2+x\right)+D\left(x^2-2x+1\right)$$

$$= (A+C)x^3+(B-2C+D)x^2+(B+C+-2D)x+(-A+B+D)$$

2. *Igualar con el polinomio original:*

$$(A+C)x^3+(B-2C+D)x^2+(B+C+-2D)x+(-A+B+D) = 3x^2+2x-2$$

3. Igualar los coeficientes de cada término:

$$A + C = 0$$

$$B - 2C + D = 3$$

$$B + C - 2D = 2$$

$$-A + B + D = -2$$

4. Resolver el sistema: Hacer esto ya depende del ingenio de cada uno. Para no entretenernos en algo que realmente sí sabemos resolver, sólo vamos a poner la solución final

$$A = \tfrac{5}{3} \qquad B = 1 \qquad C = -\tfrac{5}{3} \qquad D = -\tfrac{4}{3}$$

Con esto queda demostrado que

$$\frac{3x^2 + 2x - 2}{x^4 - x^3 - x + 1} = \frac{5}{3}\left(\frac{1}{x-1}\right) + \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{3}\left(\frac{5x+4}{x^2+x+1}\right)$$

Nuestra última tarea es el cálculo de las respectivas integrales

$$\int \frac{3x^2 + 2x - 2}{x^4 - x^3 - x + 1}dx = \frac{5}{3}\int \frac{1}{x-1}dx + \int \frac{1}{(x-1)^2}dx - \frac{1}{3}\int \frac{5x+4}{x^2+x+1}dx$$
$$= \frac{5}{3}\log(x-1) - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{3}\int \frac{5x+4}{x^2+x+1}dx$$

La última integral requiere que la ataquemos con un poco de calma, pero recordemos que la clase pasada ya aprendimos cómo resolverlas.

$$\int \frac{5x+4}{x^2+x+1}dx = 5\int \frac{x}{x^2+x+1}dx + 4\int \frac{1}{x^2+x+1}dx$$
$$= \frac{5}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx + \left(4 - \frac{5}{2}\right)\int \frac{1}{x^2+x+1}dx$$
$$= \frac{5}{2}\log\left(x^2+x+1\right) + \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$$

*(*Para que practiquen lo que hemos aprendido las clases pasadas, queda de ejercicio demostrar la última igualdad*)*

Por lo tanto

$$\int \frac{3x^2 + 2x - 2}{x^4 - x^3 - x + 1}dx = \frac{5}{3}\log(x-1) - \frac{1}{x-1} - \frac{5}{6}\log\left(x^2+x+1\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

Ahora sí ha quedado claro por qué las integrales de funciones racionales se llevan el premio a las más talachudas. Y eso que nuestro polinomio ni siquiera tenía un grado muy grande. ¡Cómo se pondría la cosa si fuera de grado 8!

Si tienen la paciencia, intenten calcular

$$\int \frac{2x^5 + 3x^4 + 8x^3 + 8x^2 + 6x + 3}{\left(x^2+1\right)^2\left(x^2+x+1\right)^2}dx$$

Como hint, sólo damos el planteamiento:

$$\frac{2x^5+3x^4+8x^3+8x^2+6x+3}{\left(x^2+1\right)^2\left(x^2+x+1\right)^2}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{\left(x^2+1\right)^2}+\frac{Ex+F}{x^2+x+1}+\frac{Gx+H}{\left(x^2+x+1\right)^2}$$

Gracias al Teorema 2 ya sabemos que si estamos en la presencia de la integral de una función racional, entonces "deberíamos" ser capaces de resolverla. Este hecho ha sido utilizado para mostrar que algunas integrales que en apariencia se ven "imposibles", en realidad sí se pueden resolver. La técnica empleada es mostrar que dicha integral imposible se puede llevar, mediante un cambio de variable, a la integral de una función racional.

Por ejemplo, supongamos que se nos pregunta si la integral

$$\int \frac{e^{2x}}{5e^{7x}+8e^{5x}+17}dx$$

puede resolverse. En apariencia la integral no se ve nada amistosa. Sin embargo, si hacemos el cambio de variable

$$u=e^x \wedge du=e^x dx$$

entonces la integral se transforma en

$$\int \frac{e^{2x}}{5e^{7x}+8e^{5x}+17}dx=\int \frac{u}{5u^7+8u^5+17}du$$

Es decir, nos queda la integral de una función racional y por tanto puede resolverse.

Otro ejemplo popular ocurre con

$$\int \sqrt{\tan(x)}dx$$

Si aquí hacemos $u^2=\tan(x)$, entonces $x=\arctan\left(u^2\right)$ y por tanto

$$dx=\frac{2u}{1+u^4}du$$

De donde

$$\int \sqrt{\tan(x)}dx=\int \frac{2u^2}{1+u^4}du$$

Es decir, la tan apantalladora integral de $\int \sqrt{\tan(x)}dx$ sí puede resolverse. Para el que quiera intentarla, el denominador puede factorizarse como

$$1+u^4=\left(u^2+\sqrt{2}u+1\right)\left(u^2-\sqrt{2}u+1\right)$$

y ambos factores son irreducibles.

Pero bueno, probablemente la aplicación más atractiva de esta "técnica" tiene que ver con el cálculo de integrales de "funciones racionales trigonométricas". ¿Cuáles son estas? Son funciones que contienen exclusivamente a las funciones seno, coseno y constantes combinadas con la suma, producto y división de estas funciones. Por ejemplo

$$f(x)=\tfrac{\operatorname{sen}(x)}{1+\operatorname{sen}(x)+\cos(x)} \qquad g(x)=\tfrac{1}{2\operatorname{sen}(x)-\cos(x)+5} \qquad h(x)=\tfrac{\cos^2(x)\operatorname{sen}(x)}{3+2\operatorname{sen}(x)+5\cos^3(x)}$$

¿Seríamos capaces de resolver las integrales de las primeras dos funciones? Más aún, ¿podríamos intuir siquiera que éstas se pueden resolver? (ni hablar de la tercera). Pues bueno, resulta que ¡sí es posible resolverlas! Y no sólo estas tres sino que cualquier función racional trigonométrica puede integrarse de manera explícita. Esto es consecuencia de lo que Spivak llama "la sustitución más ingeniosa del mundo".

Vamos a conocerla:

Supongamos que $f(x)$ representa una función racional trigonométrica y queremos calcular $\int f(x)\,dx$. Vamos a realizar el asombroso cambio de variable

$$u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

Esto implica que

$$x = 2\arctan(u)$$

Y derivando

$$dx = \frac{2}{1+u^2}du$$

Ahora bien, dado que en $f(x)$ únicamente aparecen expresiones de $\operatorname{sen}(x)$ y $\cos(x)$, necesitamos encontrar la manera de expresar estas funciones en términos de nuestro cambio de variable. La clave es la siguiente identidad

$$u^2 = \tan^2\left(\frac{x}{2}\right) = \sec^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1$$

o equivalentemente

$$\sec^2\left(\frac{x}{2}\right) = u^2 + 1$$

De esta manera (y echando mano de las identidades trigónometricas que dimos el viernes 20) logramos

$$\operatorname{sen}(x) = 2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) = 2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)\frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$= 2\tan\left(\frac{x}{2}\right)\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{\sec^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2u}{u^2+1}$$

y también

$$\cos(x) = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 = \frac{2}{\sec^2\left(\frac{x}{2}\right)} - 1$$

$$= \frac{2}{u^2+1} - 1 = \frac{1-u^2}{1+u^2}$$

En resumen, si $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, entonces

$$dx = \tfrac{2}{1+u^2}du$$

$$\operatorname{sen}(x) = \tfrac{2u}{u^2+1}$$

$$\cos(x) = \tfrac{1-u^2}{1+u^2}$$

Al sustituir estos datos en nuestra integral, lo que obtenemos es, ¡una función racional! Y por lo tanto $\int f(x)\,dx$ puede resolverse.

Vale mucho la pena ver un ejemplo de cómo aplicar este cambio de variable. Probemos con la primera de las funciones que dimos hace un momento.

Ejemplo 8 *Calcular*

$$\int \frac{\operatorname{sen}(x)}{1+\operatorname{sen}(x)+\cos(x)}dx$$

Proponemos

$$u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

De acuerdo a las relaciones que obtuvimos sabemos que

$$dx = \tfrac{2}{1+u^2}du$$

$$\operatorname{sen}(x) = \tfrac{2u}{u^2+1}$$

$$\cos(x) = \tfrac{1-u^2}{1+u^2}$$

Sustituimos y simplificamos:

$$\int \frac{\operatorname{sen}(x)}{1+\operatorname{sen}(x)+\cos(x)}dx = \int \frac{\frac{2u}{u^2+1}}{1+\frac{2u}{u^2+1}+\frac{1-u^2}{1+u^2}} \cdot \frac{2}{1+u^2}du$$

$$= \int \frac{\frac{2u}{u^2+1}}{\frac{u^2+1+2u+1-u^2}{u^2+1}} \cdot \frac{2}{1+u^2}du = \int \frac{4u}{(2+2u)(1+u^2)}du$$

Es decir,

$$\int \frac{\operatorname{sen}(x)}{1+\operatorname{sen}(x)+\cos(x)}dx = \int \frac{2u}{(1+u)(1+u^2)}du$$

Como lo habíamos comentado, hemos llegado a la integral de una función racional. Y ésta ya la podemos resolver por fracciones parciales.

$$\frac{2u}{(1+u)(1+u^2)} = \frac{A}{1+u} + \frac{Bu+C}{1+u^2}$$

Sumamos las fracciones:

$$\frac{A}{1+u} + \frac{Bu+C}{1+u^2} = \frac{A\left(1+u^2\right)+(Bu+C)(1+u)}{(1+u)(1+u^2)}$$

Y concluimos que

$$A\left(1+u^2\right)+(Bu+C)(1+u) = 2u$$

Tomando el valor particular $u=-1$ *nos queda*

$$2A=-2 \Rightarrow A=-1$$

Si ahora tomamos $u=0$*, entonces*

$$A+C=0 \Rightarrow C=-A=1$$

Finalmente tomemos $u=1$*, entonces*

$$2A+2B+2C=2 \Rightarrow B=1-A-C=1$$

En resumen

$$A=-1 \qquad B=1 \qquad C=1$$

De esta manera

$$\frac{2u}{(1+u)(1+u^2)} = -\frac{1}{1+u} + \frac{u+1}{u^2+1}$$

Integrando:

$$\int \frac{2u}{(1+u)(1+u^2)}du = -\int \frac{1}{1+u}du + \int \frac{u+1}{1+u^2}du$$

$$= -\log(1+u) + \frac{1}{2}\int \frac{2u}{1+u^2}du + \int \frac{1}{1+u^2}du$$

$$= -\log(1+u) + \frac{1}{2}\log\left(1+u^2\right) + \arctan(u) + C$$

Nuestro último paso es regresar a la variable x*. Como* $u=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$*, entonces*

$$\int \frac{\operatorname{sen}(x)}{1+\operatorname{sen}(x)+\cos(x)}dx = \frac{x}{2} - \log\left(1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) + \log\left(\sec\left(\frac{x}{2}\right)\right) + C$$

Es posible simplicar un poco más los logaritmos

$$\log\left(\sec\left(\frac{x}{2}\right)\right) - \log\left(1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \log\left(\frac{\sec\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)}\right)$$

$$= \log\left(\frac{1}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}\right) = -\log\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

Por lo tanto

$$\int \frac{\operatorname{sen}(x)}{1+\operatorname{sen}(x)+\cos(x)}dx = \frac{x}{2} - \log\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\right) + C.$$

Nota 9 *En la tarea hay por lo menos un par de integrales que utilizan esta peculiar sustitución.*

Con esto concluimos por el día de hoy y también concluimos todos los métodos de integración que teníamos que estudiar. El tema aún no termina, pero sí la práctica de integrales indefinidas.