Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Geometria Moderna

Tarea II

Elías López Rivera [1] Hector Santiago González Baltierra [2]
Roberto Mestre Calderón [3]

{[1] `elias.lopezr`, [2] `hectorgb`
[3] `Robertomstre`}`@ciencias.unam.mx`

Fecha: 07/10/2024

Problema 1

Demuestra que en la siguiente figura los triángulos ΔABC y ΔAED son semejantes. Usando el resultado anterior pruebe que ΔABE y ΔACD también son semejantes

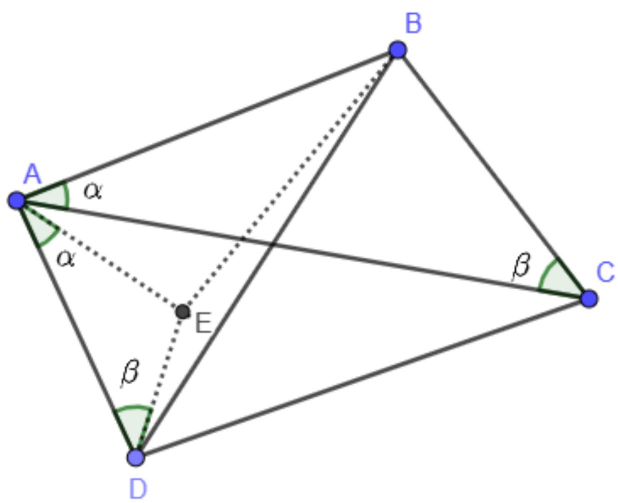

Figura 1: problema 1

Demostración.

Como $\angle EDA = \angle BCA = \beta$ y $\angle DAE = \angle CAB = \alpha$ se sigue por cirterio $A - A$ que $\Delta ABC \simeq \Delta AED$, de esto se obtienen las siguientes relaciones:

$$\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AD} \implies \frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AD}$$

□

Tenemos que $\angle EAB = \angle EAC + \angle CAB = \alpha + \angle EAC$, de la misma manera tenemos que $\angle DAC =$

$\angle DAE + \angle EAC = \alpha + \angle EAC$, por tanto $\angle EAB = \angle DAC$, por criterio $L - A - L$ se concluye que $\Delta ABE \simeq \Delta ACD$

Problema 2

Sea ABC un triángulo culaquiera; sea D un punto en el lado AB y sea E un punto en el lado AC, sea F el punto de intersección de las bisectrices de de los ángulos ABE y ACD. Demuestra que $\angle BDC + \angle BEC = 2\angle BFC$

Demostración.

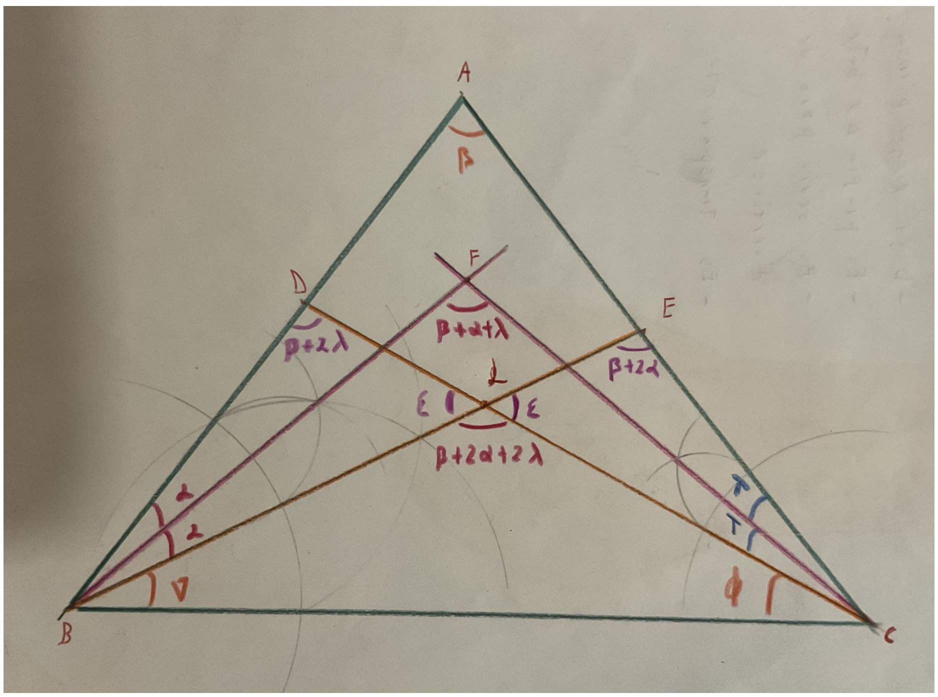

Figura 2: Construcción

Como BF es mediatríz de $\angle EBA$ se tiene que $\angle EBF = \angle FBD = \alpha$ y $\angle EBA = 2\angle EBF = 2\,\alpha$, de la misma manera CF es bisectríz de $\angle ACD$ por tanto $\angle ACF = \angle FCD = \lambda$ y $\angle ACD = 2\angle ACF = 2\,\lambda$ luego llamamos L al punto donde BE interseca a CD, tenemos que $\angle DLB = \angle CLE = \epsilon$ pues estos son opuestos por el vértice (proposición 1.15).

Nombramos $\angle BAC = \beta$, luego como $\angle BDC$ es un ángulo externo del triángulo ΔADC, se tiene que $\angle BDC = \angle BAC + \angle ACD = \beta + 2\,\lambda$, también $\angle BEC$ es ángulo externo del triángulo ΔABE, por tanto $\angle BEC = \angle BAC + \angle EBA = \beta + 2\,\alpha$, finalmente $\angle BLC$ es ángulo externo del triángulo ΔDBL por tanto $\angle BLC = \angle BDC + \angle EBA = \beta + 2\,\lambda + 2\,\alpha$ (Actividad de aprendizaje 1.6).

Nombramos $\angle CBE = \nabla$ y $\angle DCB = \phi$, notemos el triángulo ΔLBC se sigue que sus ángulos internos suman dos ángulos rectos por tanto (Actividad de aprendizaje 1.6):

$$\angle CBE + \angle DCB + \angle BLC = \nabla + \phi + \beta + 2\,\lambda + 2\,\alpha = 180 \tag{1}$$

Notemos que $\angle CBF = \angle CBE + \angle EBF = \nabla + \alpha$ y $\angle FCB = \angle DCB + \angle FCD = \phi + \lambda$, notemos los ángulos internos del triángulo $\Delta\, FBC$ su suma es igual a la de dos ángulos rectos (Actividad de aprendizaje 1.6):

$$\angle CBF + \angle FCB + \angle BFC = \nabla + \phi + \alpha + \lambda + \angle BFC = 180 \tag{2}$$

De (1) y (2) se sigue que:

$$\angle BFC = \beta + \alpha + \lambda$$

Se concluye que:

$$\angle BEC + \angle BDC = 2\,\beta + 2\,\lambda + 2\,\alpha = 2\,\angle BFC$$

$\square$

Problema 3

Dados tres segmentos a, b, c construye con regla y compás un segmento de longitud x que cumpla:

$$\frac{x}{a} = \frac{b}{c}$$

Demostración.

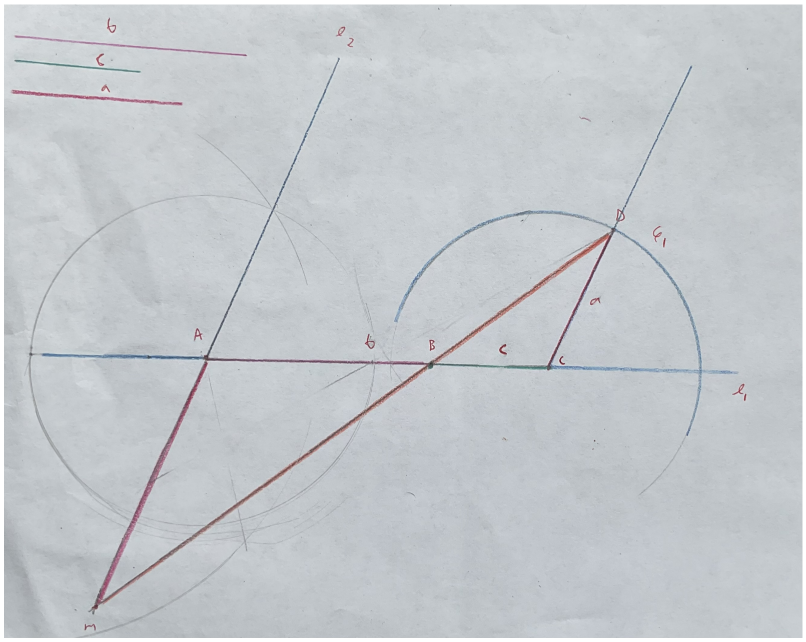

Figura 3: Construcción

Cosntrucción

1. Proyectamos sobre la recta l_1 un segmento de longitud b desde un punto de arbitraio A en la recta l_1, llamamos al otro extremo de este segmento B (Proposición 1.3)
2. Proyectamos sobre la recta l_1 a partir de B un segmento de longitud c al otro extremo de este segmento lo llamamos C (Proposición 1.3)
3. Trasladamos un segmento de longitud a al punto C, llamamos al otro extremo de este segmento D (Proposición 1.2)
4. Trazamos la recta $\overline{BD}$ y $\overline{CD}$
5. Trazamos una paralela a $\overline{CD}$ que pase por A, la llamamos l_2, llamamos m al punto donde l_2 y $\overline{BD}$ se intersecan (Tarea 1 problema 18)
6. Afirmamos que Am es el segmento buscado

Primero notemos que $\angle ABm = \angle CBD$ ya que estos son opuestos por el vertice.

Luego notemos que como $l_2 \mid \overline{CD}$, tenemos que $\angle BMA = \angle BDC$, pues estos son alternos internos (Proposición 1.24)

Por criterio $A - A$ se concluye que $\Delta\, BCD \simeq \Delta\, BAM$, de donde se sigue:

$$\frac{Am}{CD} = \frac{AB}{BC} \implies \frac{Am}{a} = \frac{b}{c}$$

$\square$

Problema 4

Si en un triángulo $\Delta\, ABC$, la mediana $m_a = \overline{AA'}$ donde A' es pie de la mediana trazada el vertice A, cumple que $m_a > \frac{1}{2}\, a$, donde a es la longitud del lado BC. Demuestra que $\angle BAC$ es agudo.

Demostración.

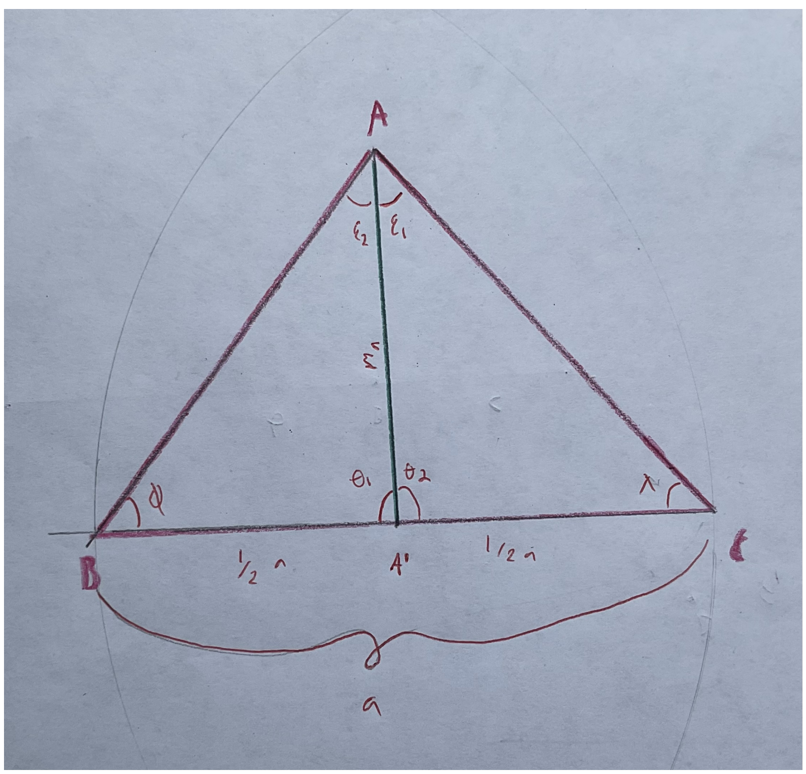

Figura 4: Construcción

De los ángulos internos del triángulo $\Delta\, ABC$ obtenemos que la suma de sus ángulos internos es igual a dos ángulos rectos (Actividad de aprendizaje 1.6):

$$\angle\, BAC + \angle\, CBA + \angle\, BCA = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \lambda + \phi = 180 \tag{3}$$

Sea el triánglulo $\Delta\, AA'C$ como $AA' = m_a > \frac{a}{2} = A'C$ la desigualdad se sigue para los ángulos $\angle\, A'CA = \lambda > \epsilon_1 = \angle\, A'AC$, usando un razonamiento análogo sobre Δ , $A'BA$ se obtiene que $\angle\, A'BA = \phi > \angle\, BAA' = \epsilon_2$ (Proposición 1.19), de ambas desigualdades se obtiene:

$$\lambda + \phi > \epsilon_1 + \epsilon_2 \tag{4}$$

Luego como $\angle\, BAC = \epsilon_1 + \epsilon_2 > 0$, podemos sumarlo a la desigualdad (4):

$$\epsilon_1 + \epsilon_2 + \lambda + \phi > 2\,(\epsilon_1 + \epsilon_2) \tag{5}$$

Aplicando la ecuación (3) sobre (5):

$$180 > 2\,(\epsilon_1 + \epsilon_2) = 2\,\angle\, BAC \tag{6}$$

Como $2 > 0 \implies 2^{-1} > 0$ podemos multiplicar (6) por 2^{-1}, finalmente se obtiene que:

$$90 > \angle\, BAC$$

Por tanto $\angle\, BAC$ es agudo $\square$

Problema 5

Construye un triángulo dada las longitudes de sus tres medianas.

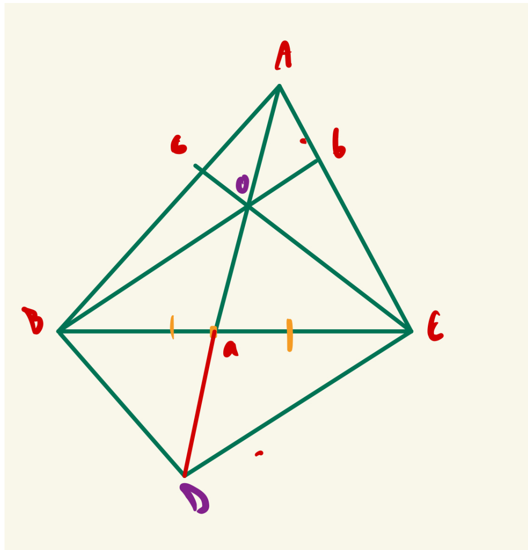

Figura 5: Construcción

Demostración.

Sea $\Delta\, ABC$, con medianas aA, bB y cC y O el centroide, trazamos una paralela a OC, desde B la llamamos l_1, trazamos una paralela l_2 a OB desde C, llamamos D al punto donde l_1 y l_2 se intersecan, tenemos que $BOCD$ es un paralelogramo se sigue que $BO = DC$ y $OC = BD$ (Actividad de aprendizaje 1.10), luego tenemos que BC es una de sus diagonales, como Ob pasa por uno de los vertices del paralelogramos y por el punto medio de una de sus diagonales, tenemos que a esta sobre la diagonas DO, y a su vez la biseca, como O triseca a cualquier mediana (Lema 2.1) obtenemos las siguientes igualdades:

1. DC=BO=$\frac{2\,Bb}{3} = \frac{2\,m_B}{3}$
2. OC=BD=$\frac{2\,Cc}{3} = \frac{2\,m_C}{3}$
3. 2Oa=OD=$\frac{2\,aA}{3} = \frac{2\,m_A}{3}$

Aplicando la ley del paralelogramo sobre $BOCD$, se tiene que:

$$(BC)^2 + \frac{4}{9}m_A = 2\left(\frac{4}{9}m_C + \frac{4}{9}m_B\right)$$

Despejando BC:

$$BC = \frac{2\sqrt{2}}{9}\sqrt{m_C^2 + m_B^2 - m_A^2}$$

Podemos aplicar un proceso análogo para obtener los lados AC y AB, una vez obtenida la longitud de estos lados en función de la longitud de sus medianas, ya podemos construir el triángulo $\Delta\, ABC$ $\square$

Problema 6

Dados tres puntos no colineales A, B y P, construye un triángulo que tenga de lado un segmento de longitud igual a del segmento AB y donde P sea el circuncentro.

Demostración.

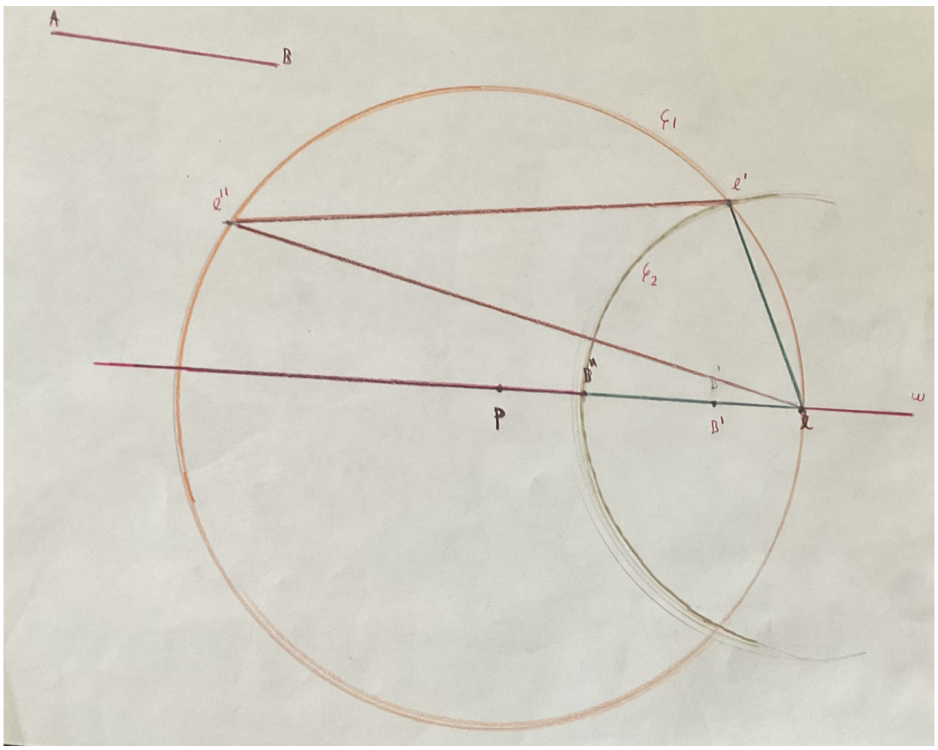

Figura 6: Caption

Construcción

1. Trazamos una recta ω que pase por P
2. Proyectamos el segmento AB desde P sobre la recta ω, llamamos B' a su extremo (Proposición 1.3)
3. Tomamos l un punto sobre ω tal que este este delante de B'
4. Trazamos la circunferencia C_1 con centro en P y radio Pl (Postulado 3)
5. Proyectamos AB desde l sobre ω y llamamos al extremo de este segmento B'' (Proposición 1.3)
6. Trazamos C_2 con centro l y radio lB'' (Postulado 3)
7. Llamamos l' al punto donde se intersecan C_1 y C_2

8. Tomamos un punto sobre C_1 diferente de l y l' lo llamamos l''
9. Trazamos $\Delta\, ll'l''$, aseguramos que este es el triángulo buscado

El paso 3 nos asegura que $Pl > PB' = AB = lB''$ por tanto se confirma la existencia del punto donde se intersecan C_1 y C_2 pues estos son sus radios, luego tenemos que como l, l' y l'' son puntos de C_1 estos equidistan de P por tanto P es circuncetro de $\Delta\, ll'l''$

Luego como l' es punto de C_2 tenemos que $ll' = lB'' = AB$ por construcción.

□

Problema 7

Sea $\Delta\, ABC$ un triángulo. Sean H, G y O el ortocentro, el centroide, y el circuncentro de $\Delta\, ABC$ y N el circuencentro del triángulo medial. Demuestra que si cualquiera dos de los siguienetes puntos H, G, O o N son iguales, entonces $\Delta\, ABC$ es equilátero

Demostración.

i) $H = G$

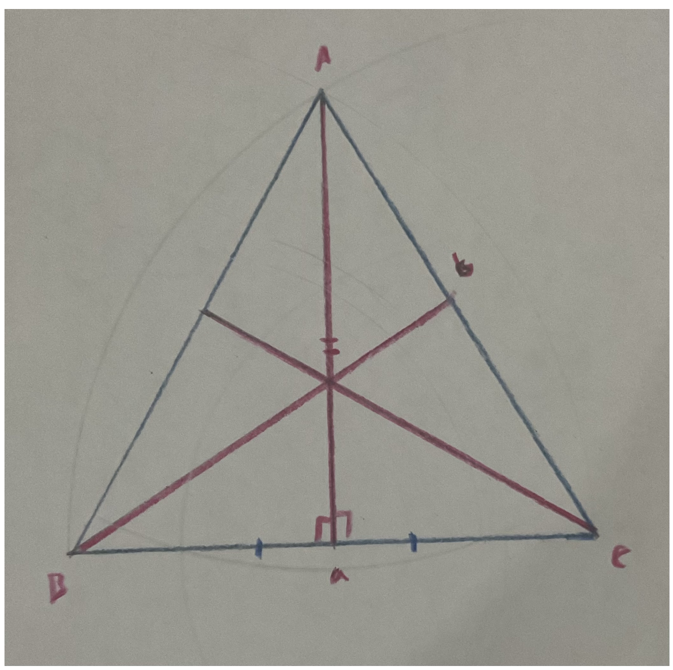

Figura 7: construcción

Como las medianas pasan por el centroide G y por un vertice del triángulo $\Delta\, ABC$, tenemos que como $G = H$, necesariamente todas las medianas son alturas, pues dados dos puntos existe una unica recta que pasa por ambos, ademas de que las alturas también deben de pasar por un vertice y H.

Por tanto sea a el pide de la altura desde A, llamada m_A, tenemos que a necesariamente biseca a BC, pues esta también es mediana, luego $Ba = aC$, a su vez $\angle Aab = \angle CaA = 90$, aplicando el criterio L-A-L, tenemos que $\Delta AaB \cong AaC$, y por tanto $AB = AC$, aplicando un proceso análogo sobre b pie de la altura desde B llamdad m_B obtenemos que $BC = AB$ y por razones comunes $AC = AB = BC$, por tanto ΔABC es equilatero

ii) $H = O$

Tomemos BC, lado de ΔABC, sea O un punto tenemos que existe una unica recta l pepéndicular a BC que pase por O, como O es circuncentro tenemos que l necesariamente es la mediatríz de BC, pero debido a que O también es hortocentro se concluye que l también contiene a la altura respecto a A, es decir la mediatríz de BC contiene a la altura desde el vertice A, tenemos entonces que l pasa por el punto medio de BC, pues es mediatríz, y l pasa por A pues contiene a la altura respecto a ese vertice, de esto se sigue que l tambíen contiene a la mediana desde A, haciendo un razonamiento análogo para los demás lados de ΔABC, se concluye que $H = O$ también es centroide del triángulo ΔABC, usando el inciso anterior se tiene que ΔABC es equilatero

iii) $G = O$

Tomemos a l como meditríz de BC, como l pasa por el punto medio y por $G = O$ tenemos que necesariamente l contiene a la mediana desde A,pues dados dos puntos existe una unica recta que pasa por ambos, de esto se sigue que l pasa por A, como l es perpéndicular a BC tenemos que l también contiene a la altura desde A, haciendo un proceso análogo tenemos que las mediatrices respecto de los otros lados de ΔABC también contienen a las respectivas alturas, como el punto en el que se intercetan dos rectas es unico se sigue que $G = O = H$, por el inciso anterior se sigue que ΔABC es equilatero

iv) $G = N$

Como G también es el gravicentro del triángulo medial de ΔABC, tenemos que por el inciso anterior el triángulo medial es equilatero, luego como este es semejante a ΔABC (Teorema 0.1) notas 6 comparten los mismos ángulos, por tanto ΔABC también es equilatero

v) $H = N$

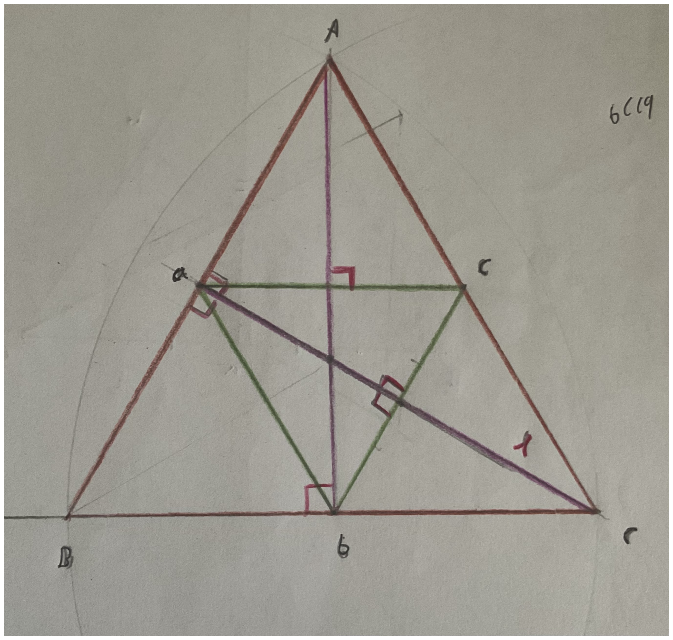

Figura 8: construcción

Tomemos que a es el punto medio de AB , b el de BC y c el de AC, sea l la bisectríz de cb, como la recta $\overline{cb}$ es paralela a $\overline{AB}$ (Teorema 0.1 notas 6) se sigue que l es necesariamente perpéndicular al segmento AB, de la hipótesis se sigue que l pasa por C, pues esta contiene a la altura desde C de $\Delta\, ABC$, aplicando el segundo teorema de tales sobre $\overline{AC}$, $\bar{l}$, $\overline{BC}$ y las paralelas $\overline{cb}$ y $\overline{AB}$, se tiene que l necesariamente pasa por el punto medio de AB es decir a, por tanto la altura respecto a C de $\Delta\, ABC$ también es mediana, aplicando un proceso análogo sobre los otros lados de $\Delta\, ABC$, tenemos que sus respectivas alturas también son medianas, por tanto H también es centroide, por **i)** se sigue que $\Delta\, ABC$ es equilatero

vi) $O = N$ $\square$

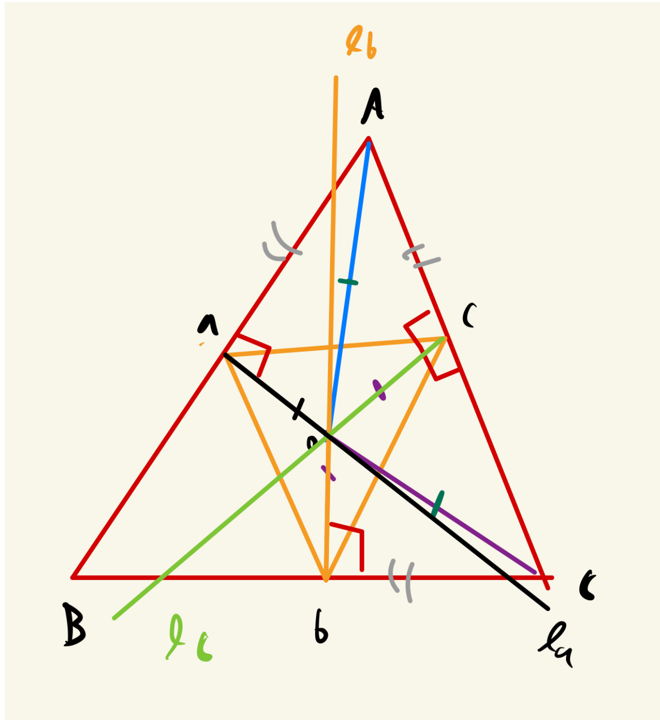

Figura 9: construcción

Sea a, b y c los puntos medios de AB, BC y AC, trazamos la mediatríz desde b, l_b, luego trazamos las mediatrices desde a y c, l_a, l_c, tenemos que estas pasan necesariamente por O, luego trazamos los segmentos cO, aO y bO, como O es circuncentro del triángulo $\Delta\, ABC$, se sigue que $cO = aO = bO$, luego trazamos AO y OC como O también es circuncentro de $\Delta\, ABC$, se sigue que $AO = OC$, tenemos que $\angle CbO = \angle AcO = \angle OaA = 90$, afirmamos que $\Delta\, ObC \cong OcA$, pues estos dos triángulos rectangulos tienen las hipótenusas iguales $OC = OA$, y un cateto igual $Ob = Oc$ (Tarea 1 problema 3), por tanto $bC = Ac$, como b y c son puntos medios de BC y AC respectivamente se sigue que $Bb = bC = Ac = cC$, por tanto $AC = BC$, por un proceso análogo tenemos que $\Delta\, ObC \cong \Delta\, OaA$, de donde se sigue que $AB = AC$, por nociones comunes se concluye que $AB = AC = BC$, es decir $\Delta\, ABC$ es equilatero.

Problema 8

Demuestra que el vértice del ángulo obtuso de un triángulo obtusángulo es el incentro de su triángulo pedal órtico.

Lemma 0.1. *Las alturas sobre cualquiera de los vertices que no forman el ángulo obtuso en un triángulo obtusángulo estan sobre las prolongaciones desde el vertice del ángulo obtuso del lado opuesto a este vertice.*

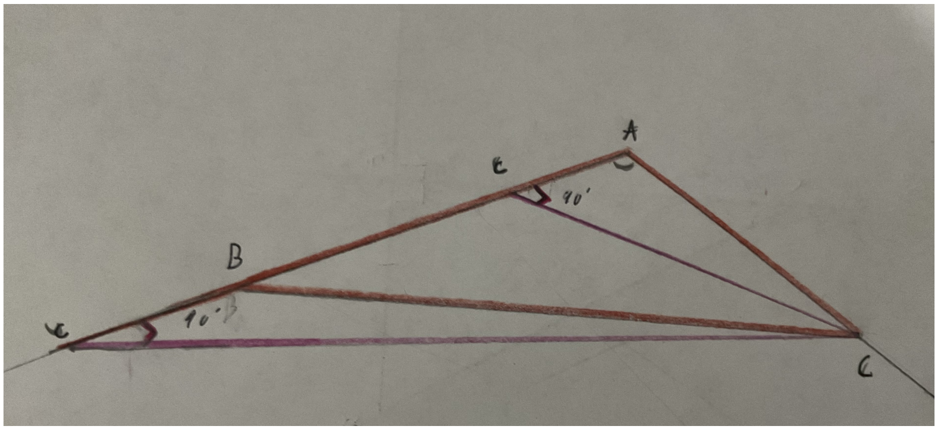

Figura 10: construcción

Demostración.

Procedemos por contradicción es decir, sea $\Delta\, ABC$ obtusángulo con $\angle\, BAC > 90$, tomemos sin perdida de generalidad que la altura respecto al vertice C tiene pie en un punto c sobre AB, fijemos nuestra atención sobre el triángulo $\Delta\, AcC$, tenemos que $\angle\, CcA = 90$, por tanto se sigue que $\angle\, CcA + \angle\, BAC > 90 + 90 = 180$, lo cual es una contradicción pues ambos son ángulos internos de $\Delta\, AcC$ por tanto su suma debe ser estrictamente menor a 180 (Proposición 1.17), ahora si c estuviera sobre la prolongación de AB desde B formamos nuevamente el triángulo $\Delta\, AcC$ y encontramos la misma contradicción, como nuestra unica suposición es la ubicación del punto c, se concluye que la tesís es cierta □

Colorario *Si el triángulo $\Delta\, ABC$ es obtusángulo entonces sea H su ortcentro, este es un punto externo de $\Delta\, ABC$*

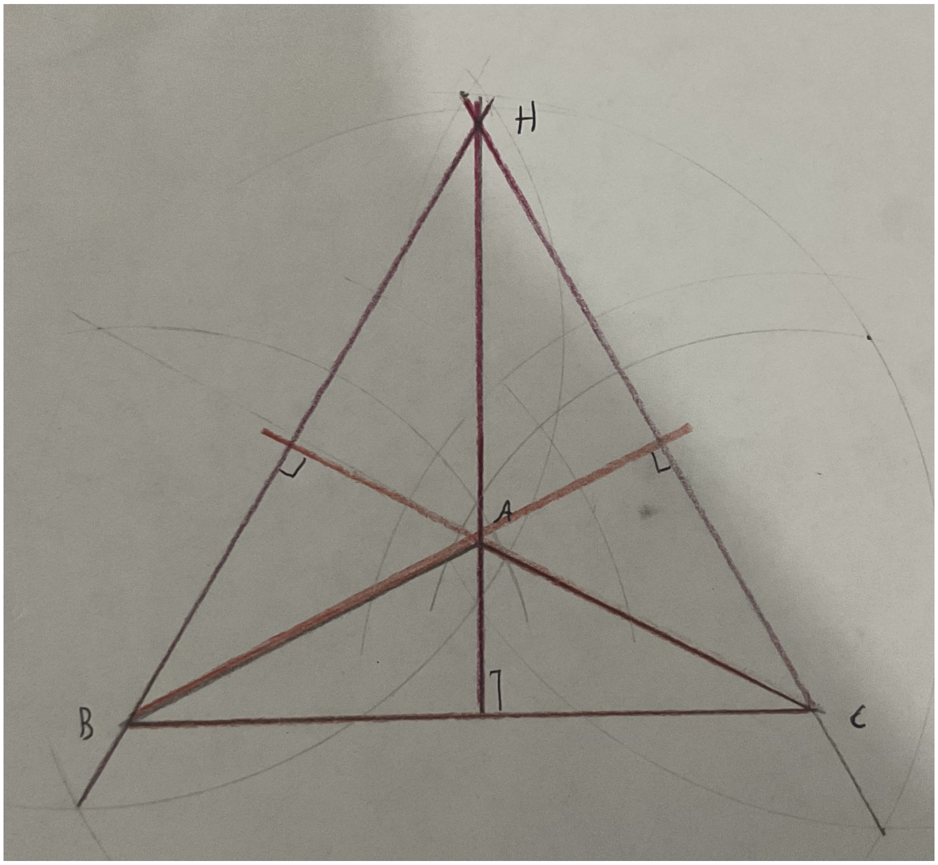

Figura 11: construcción

Lemma 0.2. *Sea $\Delta\, ABC$ obtusángulo con $\angle BAC > 90$, entonces A es ortocentro de $\Delta\, BHC$ con H ortocentro de $\Delta\, ABC$*

Demostración.

Sea b el pie de la altura m_B desde B de $\Delta\, ABC$ se sigue que bC es la altura desde C de $\Delta\, BHC$, pues b es un punto de la recta $\overline{BH}$ debido a que H pasa sobre m_B, ademas que esta recta es perpéndicular a bC, de la misma manera obtenemos que sea c el pie de la altura m_C desde C de $\Delta\, ABC$, cB es altura desde B de $\Delta\, BHC$, como c esta sobre la prolongación desde A de BA y b esta sobre la prolongación de AC desde A por el lemma 0.1, tenemos que A es un punto común a las dos alturas de $\Delta\, BHC$, de la unicidad del ortocentro se concluye que A es el ortocentro de $\Delta\, BHC$ $\square$

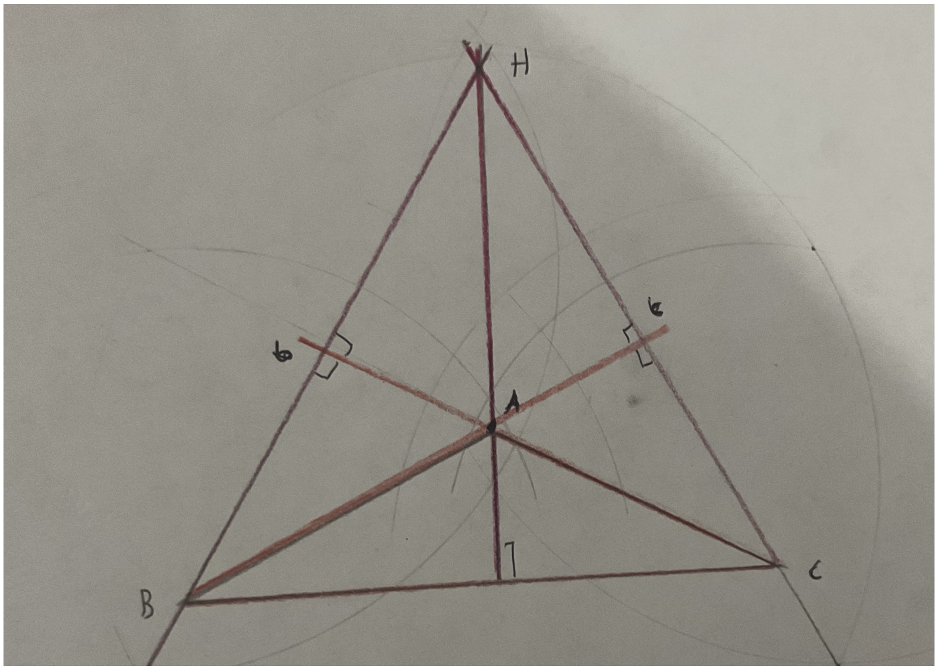

Figura 12: construcción

Lemma 0.3. *Sea $\Delta\, ABC$ un triángulo obtusángulo, con $\angle\, BAC > 90$, el triángulo pedal ortico de $\Delta\, ABC$, es el mismo que el del $\Delta\, BHC$, donde H es el ortocentro de $\Delta\, ABC$*

Demostración.

De la demostración del lemma 0.2 se sigue que sean b y c los pies de las alturas m_B y m_C del triángulo $\Delta\, ABC$ estas son a su vez pies de de las alturas m'_C y m'_B del triángulo $\Delta\, BHC$, del hecho de que H, A y el pie a de m_A de $\Delta\, ABC$ son necesariamente colineales se sigue que a también es pie de la altura m'_H de $\Delta\, BHC$, por tanto el triángulo ortico de $\Delta\, ABC$ y $\Delta\, BHC$ tienen los mismos vertices, es decir son iguales. $\square$

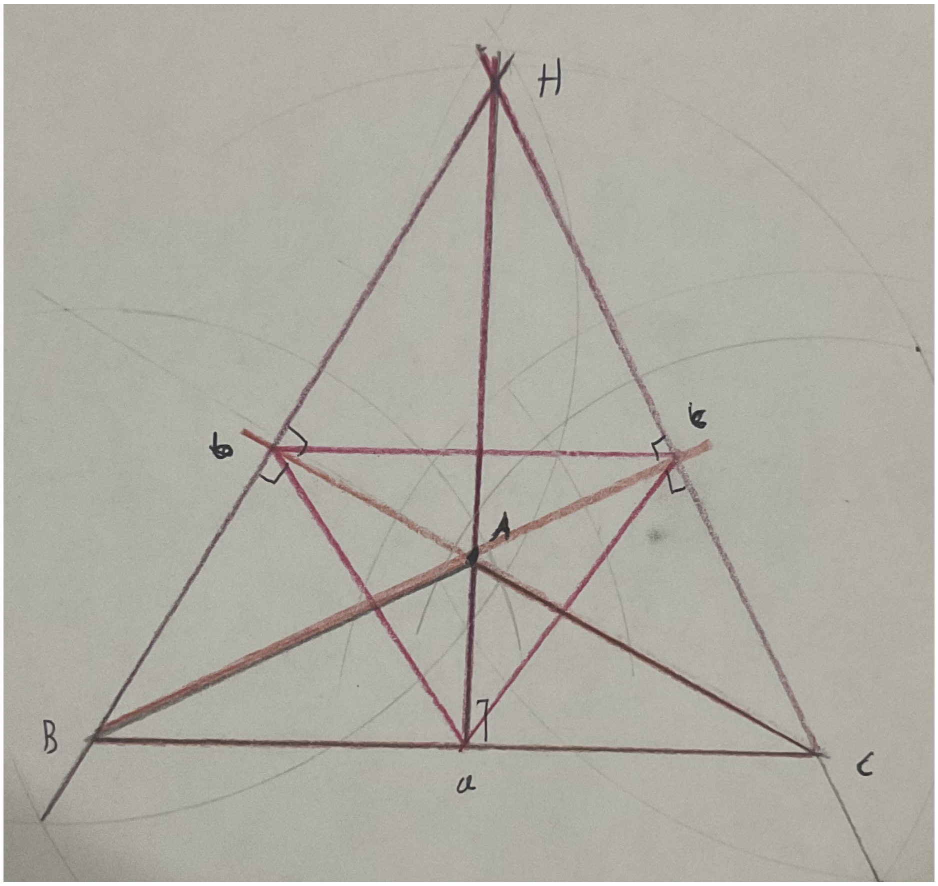

Figura 13: construcción

Lemma 0.4. *Si el triángulo $\Delta\, ABC$ es obtusángulo, con $\angle\, BAC > 90$ entonces $\Delta\, BHC$, con H ortocentro de $\Delta\, ABC$, es acutángulo*

Demostración.

Tenemos que sea a el pie de la altura desde A de $\Delta\, ABC$, este necesariamente esta sobre el lado BC, ya que $\angle\, ACB < 90$ y $\angle\, CBA < 90$, luego como el segmento aA es interno a $\Delta\, ABC$ tenemos que H ortocentro necesariamente debe estar en algún punto de la prolongación de aA por el colorario del lemma 0.1, de la misma manera tenemos que este punto necesariamente esta sobre la prolongación de aA desde A pues los pies de las otras alturas necesariamente estan sobre las prolongaciones desde A de los otros lados, de esto se sigue que A necesariamente es un punto interno de $\Delta\, BHC$ por el lemma 0.2 afirmamos que el ortocentro de $\Delta\, BHC$ es un punto interno de $\Delta\, BHC$, por el reciproco del colorario del lema 0.1 tenemos que $\Delta\, BHC$ no es obtusángulo y del hecho de que los ángulos internos de un triángulo no miden más de 180 (Proposición 1.17) se sigue que $\Delta\, BHC$ es necesasiamente acutángulo □

Lemma 0.5. *Sea $\Delta\, ABC$ un triángulo acutángulo entonces el ortocentro de $\Delta\, ABC$ llamado H es incentro del triángulo pedal ortico de $\Delta\, ABC$*

Demostración.

Tenemos que los triángulos formados por el triángulo ortico son semejantes a $\Delta\, ABC$ (Teorema 0.3 notas 6), tomemos a, b y c los pies de las alturas m_A, m_B y m_C, tenemos que $\Delta\, bcA \simeq \Delta\, BcA$, por tanto $\angle\, Bca = \angle\, bcA = \theta_3$, como $\angle\, BcC = \angle\, CcA = 90$, ademas de que $\angle\, Bcc = \angle\, Bca + \angle\, Cca = \theta_3 - \angle\, Cca$

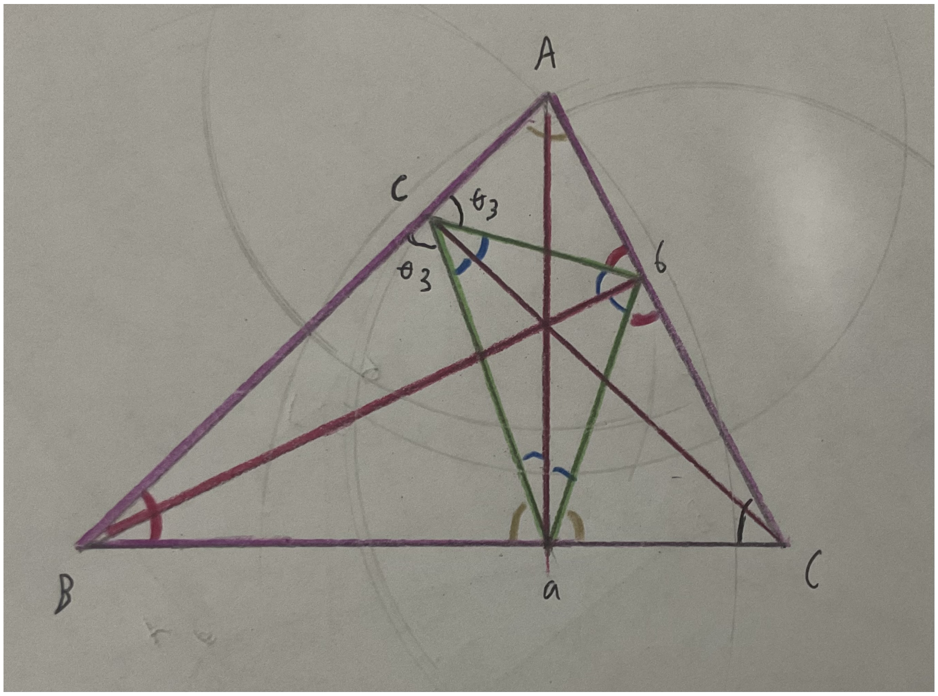

Figura 14: construcción

y $\angle CcA = \angle bcA + \angle Ccb = \theta_3 + \angle Ccb$, por tanto $\angle Ccb = 90 - \theta_3 = \angle Cca$, por un proceso análogo sobre los triángulos $\Delta\, Acb \simeq \Delta\, aCb$ y $\Delta\, Bac \simeq \Delta\, bac$ se obtiene que $\angle AbB = \angle BbC$ y $\angle caA = \angle AaB$ respectivamente, por tanto m_A, m_B y m_C son bisectrices de los ángulos internos del triángulo pedal ortico, de esto se sigue que H es el incentro del tríangulo pedal ortico $\Delta\, abc$ $\square$

Finalmente de todos los lemas anteriores se concluye que sea $\Delta\, ABC$ obtusángulo, con $\angle BAC > 90$, entonces A es el incentro del triángulo pedal ortico de $\Delta\, ABC$

Problema 9

Demuestra que en un triángulo ΔABC, si la recta de Euler es perpéndicular a BC entonces $AB = BC$

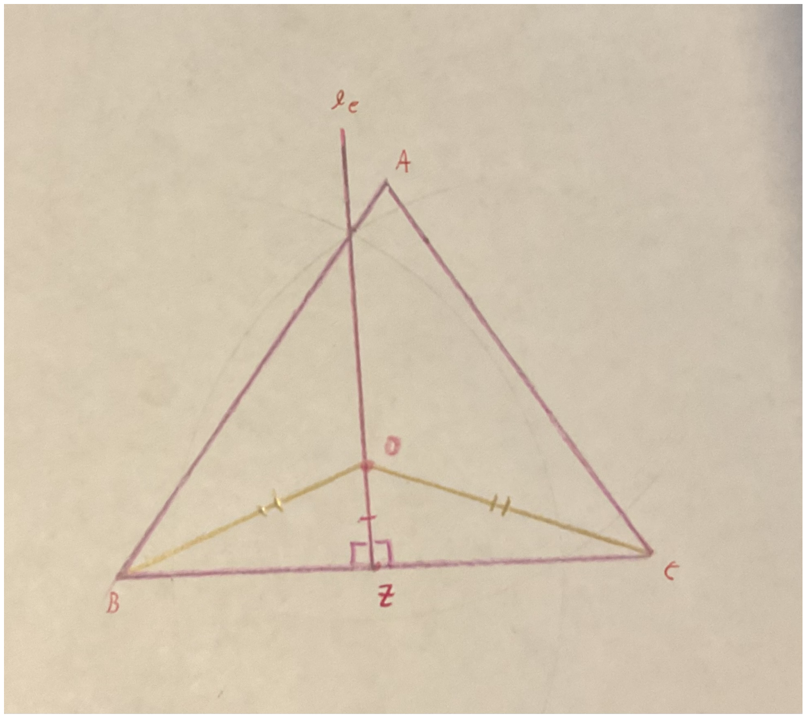

Figura 15: Construcción

Demostración.

Tenemos que l_e la recta de Euler interseca a BC en z, tomemos o circuncentro de ΔABC sobre l_e, por hipótesis tenemos que $\angle OZB = \angle CZO = 90$, tenemos que $BO = OC$ pues O es centro del circuncírculo de ΔABC y A, C son puntos sobre este, luego como $OZ = OZ$, Y $\angle OZB$, $\angle CZO$ son los ángulos mayores de ΔOZB, ΔOZC respectivamente, ademas de que BO y OC son lados opuestos a $\angle OZB$ y $\angle CZO$, por criterio L-L-Ángulo mayor se tiene que $\Delta OZB \cong \Delta OZC$, por tanto $BZ = ZC$, por tanto l_e biseca a BC

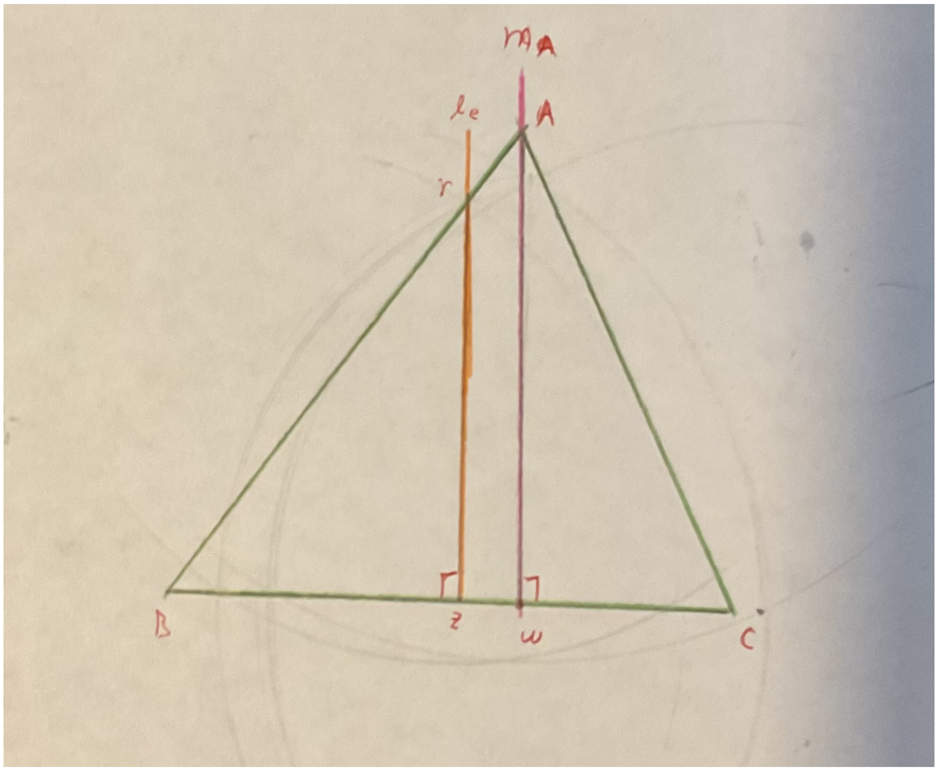

Figura 16: Construcción

Tomemos una recta m_A la altura desde BC del triángulo $\Delta\, ABC$, y l_e la recta de Euler, r es el punto donde l_e interseca al lado AB, w es el pie d ela altura m_A, como m_A es altura se tiene que $\angle CwA = 90$, luego por hipótesis $\angle rZB = 90$, por tanto si l_e y m_A son rectas diferentes se tiene que son paralelas, pues estas son perpéndiculares BC, pero como m_A es altura contiene el ortocentro, luego l_e por ser la recta de Euler contiene igualmente al ortocentro por tanto l_e y m_A tendrian un punto en común una contradicción pues estas son paralelas, por tanto $l_e = m_A$, pues nuestra unica suposición fue que estas no eran la misma recta, de desto se sigue que el vertice A es un punto de la recta de Euler l_e. Por tanto l_e biseca BC y pasa por el punto A, siguiendo la hipótesis $\angle AZB = \angle AZC = 90$, luego $BZ = ZC$, y como $ZA = ZA$, por criterio L-A-L, tenemos que $\Delta\, AZB \cong \Delta\, AZC$, por tanto $AB = AC$ $\square$

Problema 10

Demuestre que si H es el ortocentro del triángulo ΔABC y la altura A corta al lado opuesto en D y al circuncírculo en K, entonces $HD = DK$

Demostración.

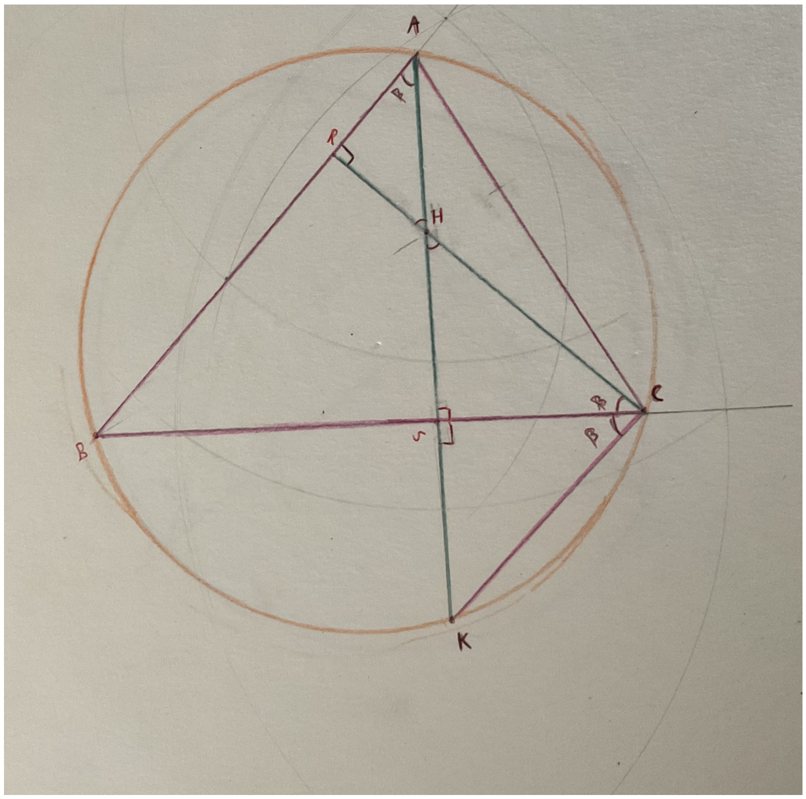

Figura 17: Construcción

Tenemos que el segmento RC es la altura desde C del triángulo ΔABC, de la misma manera el segmento AS es la altura desde A, de este hecho se sigue que $\angle CRA = \angle CDA = 90$

Luego tenemos que $\angle DHC = \angle AHR$ pues estos son opuestos por el vertice (Proposición 1.15)

Por criterio $A - A$ tenemos que $\Delta DCH \simeq \Delta RAH$, de aqui se concluye que $\angle RCB = \angle BAS = \beta$

Luego tenemos que $\angle BAD$ y $\angle BCK$ abren el arco $\widehat{BK}$, por tanto $\angle BCK = \beta$

Como Ak es penpérdicular a BC, pues este es la prolongación de AD desde D, se tiene que $\angle CDA = \angle KDC = 90$

Como CD es lado compartido de los triángulos $\Delta CDK = \Delta CDH$ por criterio $A - L - A$ tenemos que $\Delta CDK \cong \Delta CHD$, de donde se concluye que $DK = HD$ $\square$

Problema Extra

Sea el triángulo ΔABC, sean P y Q puntos cualesquiera en los lados AB y CA del triángulo respectivamente, tales que le recta PQ es paralela a BC, si se tiene que las rectas BQ y CP se cortan en O. Demuestra que AO es mediana

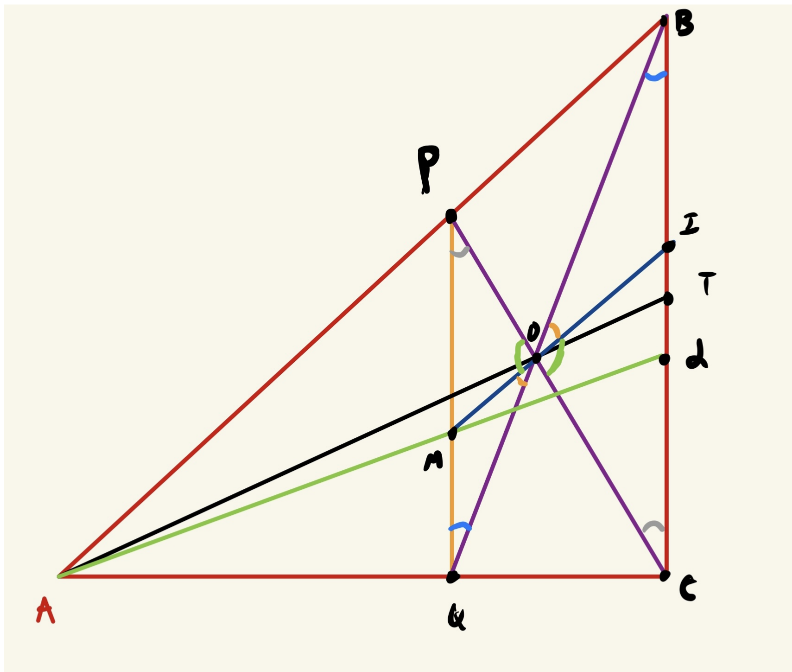

Figura 18: Construcción

Demostración.

Procedemos por contradicción, sea T el punto donde el segmento AO interseca al lado BC, supongamos que T no es punto medio de lado BC y tomemos que L es el punto medio del lado BC

La mediana AL interseca a PQ en el punto M, prolongamos el segmento MO y el punto I es donde interseca al lado BC.

Como $\angle MOQ = \angle IOB$, pues estos son opuestos por el vertice (Proposició 1.15), ademas de que $\angle QBC = \angle BQP$ pues estos son alternos internos (Proposición 1.29), se tiene que por cirterio A-A $\Delta OMQ \simeq \Delta OIB$ de donde obtenemos que:

$$\frac{BI}{MQ} = \frac{OI}{OM} \tag{7}$$

Luego tenemos que $\angle POM = \angle COI$, pues estos son opuestos por el vertice (Proposición 1.15), igualmente tenemos que $\angle BCP = \angle QPC$ pues estos son alternos internos (Proposición 1.29), se sigue que por cirterio A-A $\Delta PMO \simeq \Delta CIO$ de donde obtenemos que:

$$\frac{IC}{PM} = \frac{OI}{OM} \tag{8}$$

Luego como AL es mediana y PQ es paralela a BC se tiene que M Biseca a PQ (Proposición 0.1 notas 6), de (7) y (8) se obtiene que:

$$\frac{IC}{PM} = \frac{BI}{MQ} \implies \frac{IC}{BI} = \frac{PM}{MQ} = 1$$

Es decir I biseca a BC lo cual es una contradicción ya que por construcción L es quien biseca a BC, por tanto se concluye nuestra tesís ya que nuestra unica suposición fue que AT no era mediana

$\square$