



Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Geometría Moderna

Tarea examen 1

Elías López Rivera¹ Adolfo Cardoso Vazquez²
{¹ elias.lopezr, ² hectorgb}@ciencias.unam.mx

Fecha: 20/10/2024



Problema 1

Sea:

$$F = \{0, 1\}$$

con las operaciones modulo 2 definidas, es decir:

I. **Suma:** $0 + 0 = 0, 0 + 1 = 1, 1 + 1 = 0, 1 + 0 = 1$

II. **Multiplicación:** $1 \cdot 1 = 1, 0 \cdot 0 = 0, 0 \cdot 1 = 0, 1 \cdot 0 = 0$

a) Verificar que la multiplicación es una operación asociativa, que posee elemento neutro 1 y cada elemento distinto de 0 posee inverso multiplicativo

b) Confirmar la distributividad del producto sobre la suma

Concluir que F es un campo

Demostración.



Problema 2

Sea:

$$F = \mathbb{Z}_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

con las operaciones modulo 2 definidas, es decir:

I. Suma: $0 + 0 = 0, 0 + 1 = 1, 1 + 1 = 0, 1 + 0 = 1$

II. Multiplicación: $1 \cdot 1 = 1, 0 \cdot 0 = 0, 0 \cdot 1 = 0, 1 \cdot 0 = 0$

a) Verificar que la multiplicación es una operación asociativa, que posee elemento neutro 1 y cada elemento distinto de 0 posee inverso multiplicativo

b) Confirmar la distributividad del producto sobre la suma

Concluir que F es un campo

Demostración.

□

Problema 3

Sea:

$$F = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$

con las operaciones de suma y multiplicación: **a)** Comprobar que F es cerrado bajo la suma y la multiplicación de \mathbb{Q}

b) Demostrar que existe un elemento neutro para la suma (el cero) y para la multiplicación

c) Para cada elemento $x = a + b\sqrt{2}$ con $x \neq 0$, encontrar o demostrar la existencia de su inverso multiplicativo en F

d) Verificar las demás propiedades: existencia de inversos aditivos, asociatividad, conmutatividad y distributividad

Concluir que F es un campo

Demostración.

□

Problema 4

Sea $F = \mathbb{Z}$ con las operaciones definidas de la siguiente forma:

- **Suma:** Para $a, b \in \mathbb{Z}$ se define

$$a \oplus b = a + b - 1.$$

- **Producto:** Para $a, b \in \mathbb{Z}$ se define

$$a \odot b = a \cdot b - a - b - 2.$$

- I. Demostrar que (F, \oplus) es un grupo abeliano. En particular, determinar el elemento neutro aditivo e_{\oplus} y hallar el inverso aditivo de un elemento a .
- II. Determinar el elemento neutro multiplicativo e_{\odot} en $(F \setminus \{e_{\oplus}\}, \odot)$ y comprobar que no todo elemento $a \in F$ con $a \neq e_{\oplus}$ tiene inverso multiplicativo.
- III. Verificar la distributividad de \odot respecto a \oplus

Concluir que (F, \oplus, \odot) no es un campo

Demostración.

(I)

- **Asociatividad**

Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}(a \oplus b) \oplus c &= (a + b - 1) + c - 1 \\ &= a + (b - 1 + c) - 1 \\ &= a + (b + c - 1) - 1 \\ &= a \oplus (b \oplus c).\end{aligned}$$

- **Conmutatividad**

Sean $a, b \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}a \oplus b &= a + b - 1 \\ &= b + a - 1 \\ &= b \oplus a.\end{aligned}$$

- **Neutro**

Proponemos $e_{\oplus} \in \mathbb{Z}$ como $e_{\oplus} = 1$, de modo que $\forall a \in \mathbb{Z}$

$$a \oplus e_{\oplus} = a + 1 - 1 = a,$$

en efecto e_{\oplus} es el neutro.

■ **Inverso**

Sea $a \in \mathbb{Z}$ proponemos $b = -a + 2 \in \mathbb{Z}$, de modo que

$$a \oplus b = a + (-a + 2) - 1 = (a + (-a)) + (2 + (-1)) = 0 + 1 = 1 = e_{\oplus}.$$

Es decir b es el inverso de a .

$\therefore (F, \oplus)$ es un grupo abeliano.

(II)

Suponemos $\exists e_{\odot} \in \mathbb{Z} \setminus \{e_{\oplus}\}$ neutro multiplicativo. Esto es $\forall a \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} a &= a \odot e_{\odot} \\ &= a \cdot (e_{\odot}) - a - (e_{\odot}) - 2 \\ &= e_{\odot}(a - 1) - a - 2 \\ 2(a + 1) &= e_{\odot}(a - 1) \end{aligned}$$

Pero para $4 \in \mathbb{Z} \setminus \{e_{\oplus}\} \nexists e_{\odot} \in \mathbb{Z} \setminus \{e_{\oplus}\}$ tal que

$$\begin{aligned} 2(4 + 1) &= e_{\odot}(4 - 1) \\ 10 &= 3e_{\odot}. \end{aligned}$$

Es decir que $(F \setminus \{e_{\oplus}\}, \odot)$ no tiene neutro multiplicativo, y por tanto no existen inversos multiplicativos.

(III)

Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} a \odot (b \oplus c) &= a \odot (b + c - 1) \\ &= a(b + c - 1) - a - (b + c - 1) - 2 \\ &= ab + ac - a - a - b - c + 1 - 2 \\ &= (ab - a - b - 2) + (ac - a - c - 2) + 2 + 1 \\ &= ((a \odot b) + (a \odot c) - 1) + 4 \\ &= (a \odot b) \oplus (a \odot c) + 4 \end{aligned}$$

Es decir en general las operaciones no son distributivas. □

Problema 5

Sea:

$$F = \mathbb{R}^2$$

con las operaciones definidas de la siguiente forma:

I. **Suma:** $(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d)$

II. **Multipliación:** $(a, b) \odot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$

a) Verificar que la suma y el producto estan bien definidos y son operaciones en F

b) Demostrar que existe un elemento neutro para la suma $(0, 0)$ y para el producto $(1, 0)$

c) Comprobar que para cada elemento $(a, b) \neq (0, 0)$ le corresponde un inverso multiplicativo.

d) Verificar la conmutatividad, la asociatividad y la distributividad del producto respecto a la suma

Demostración.

a)

Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, por la cerradura de la suma en \mathbb{R} se sigue que $(a + c), (b + d) \in \mathbb{R}$, es decir

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d) \in \mathbb{R}^2.$$

Y por la cerradura del producto en \mathbb{R} , entonces $ac, bd, ad, bc \in \mathbb{R}$, así por la cerradura de la suma $ac - bd, ad + bc \in \mathbb{R}$ por tanto

$$(a, b) \odot (c, d) \in \mathbb{R}^2$$

□

Problema 6

Una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se llama **función par** si para todo $t \in \mathbb{R}$ se cumple que $f(t) = f(-t)$. Demostrar que el conjunto $P := \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es par}\}$, con las siguientes operaciones:

$$\forall f, g \in P \text{ y } c \in \mathbb{R} : (f + g)(s) = f(s) + g(s) \text{ y } (cf)(s) = c(f(s))$$

Es un \mathbb{R} – espacio vectorial

Demostración.

□

Problema 7

Sea $V = \{(a_1, a_2) \mid a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$. Para $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in V$ y $c \in \mathbb{R}$ definimos $(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 b_2)$ y $c(a_1, a_2) = (ca_1, a_2)$. ¿Es V un \mathbb{R} -espacio vectorial

Demostración.

□

Problema 8

Sea $V = \{(a_1, a_2) \mid a_1, a_2 \in \mathbb{F}\}$, donde \mathbb{F} es un campo. Definimos la suma de elementos de V coordenada a coordenada. Para $c \in \mathbb{F}$ y (a_1, a_2) definimos el producto como $c(a_1, a_2) = (a_1, 0)$. ¿Es V un \mathbb{F} -espacio vectorial con las operaciones definidas?

Demostración.

□

Problema 9

Sea $V = \{(a_1, a_2) \mid a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$. Para $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in V$ y $c \in \mathbb{R}$ definimos $(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + 2b_1, a_2 + 3b_2)$ y $c(a_1, a_2) = (ca_1, a_2)$. ¿Es V un \mathbb{R} -espacio vectorial

Demostración.

□