Cálculo Diferencial e Integral II

Series

18 de mayo de 2020

La clase pasada dimos una buena variedad de criterios para determinar la convergencia de series cuyos términos no son negativos, pero nos hizo falta estudiar uno más. El criterio es muy interesante y vale la pena darnos el tiempo de analizarlo con calma. Este criterio es llamado: *criterio de la integral.* Y entre otras cosas ofrece un lindo puente entre las series y las integrales impropias.

Tratemos de descubrir esta relación. Supongamos que sabemos que la integral impropia

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx$$

es convergente.

Recordemos que al decir que la integral impropia converge, implícitamente estamos pidiendo que la función f sea integrable en cada intervalo $[a,b]$ contenido en $[1,\infty)$. En particular f debe ser integrable en cada intervalo de la forma $[n,n+1]$ con $n \in \mathbb{N}$, lo que nos permite hacer las siguientes descomposiciones de la integral:

$$\begin{aligned}
\int_1^{\infty} f(x)\,dx &= \int_1^{2} f(x)\,dx + \int_2^{\infty} f(x)\,dx \\
&= \int_1^{2} f(x)\,dx + \int_2^{3} f(x)\,dx + \int_3^{\infty} f(x)\,dx \\
&= \int_1^{2} f(x)\,dx + \int_2^{3} f(x)\,dx + \int_3^{4} f(x)\,dx + \int_4^{\infty} f(x)\,dx \\
&= \int_1^{2} f(x)\,dx + \int_2^{3} f(x)\,dx + \int_3^{4} f(x)\,dx + \int_4^{5} f(x)\,dx + \int_5^{\infty} f(x)\,dx
\end{aligned}$$

En general debe ser cierto que, para toda $n \in \mathbb{N}$

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} f(x)\,dx + \int_{n+1}^{\infty} f(x)\,dx \tag{1}$$

Ahora bien, por definición sabemos que

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^{t} f(x)\,dx$$

Dado que estamos suponiendo que la integal impropia es convergente, podemos escribir:

$$\lim_{t\to\infty} \left[\int_1^{\infty} f(x)\,dx - \int_1^{t} f(x)\,dx \right] = 0$$

es decir,

$$\lim_{t\to\infty} \int_t^{\infty} f(x)\,dx = 0$$

Si aprovechamos este hecho y hacemos tender $n \to \infty$ en la igualdad (1), podemos concluir que

$$\int_1^\infty f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \left[\sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} f(x)\,dx + \int_{n+1}^\infty f(x)\,dx \right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} f(x)\,dx + \lim_{n\to\infty} \int_{n+1}^\infty f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} f(x)\,dx$$

Ahora sólo por comodidad, llamemos

$$b_n = \int_n^{n+1} f(x)\,dx$$

De esta forma hemos llegado a una bonita relación:

$$\int_1^\infty f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \tag{2}$$

Es decir, ¡la integral impropia puede verse como una serie!

Escribamos más rigurosamente lo obtenido en la identidad en (2) para tenerlo bien presente.

Proposición 1 *Sea $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ integrable en cada intervalo $[a,b] \subset [1,\infty)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos*

$$b_n = \int_n^{n+1} f(x)\,dx$$

Si la integral $\int_1^\infty f(x)\,dx$ converge, entonces la serie $\sum_{n=1}^\infty b_n$ converge y además

$$\int_1^\infty f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

Lo logrado en la Proposición 1 por supuesto que nos invita a pensar en su recíproco. Es decir, parece natural conjeturar que si ahora lo que quisiéramos es determinar la convergencia de la integral $\int_1^\infty f(x)\,dx$, nos debería bastar con probar que la serie $\sum_{n=1}^\infty b_n$ es convergente.

Afirmación: *Sea $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ integrable en cada intervalo $[a,b] \subset [1,\infty)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos*

$$b_n = \int_n^{n+1} f(x)\,dx$$

Si la serie $\sum_{n=1}^\infty b_n$ converge, entonces la integral $\int_1^\infty f(x)\,dx$ converge.

Antes de avanzar tómense un momento para meditar en la Afirmación. ¿Podrían demostrarla?

Estoy seguro que tras una breve reflexión habrán notado que tristemente, la afirmación NO es cierta.

Ejemplo 2 *Sea $f(x) = \cos(\pi x)$. Entonces*

$$b_n = \int_n^{n+1} f(x)\,dx = \int_n^{n+1} \cos(\pi x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\operatorname{sen}(\pi(n+1)) - \operatorname{sen}(\pi n)\right] = 0$$

Por lo tanto la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 0$ es convergente. Sin embargo, ya sabemos que la integral

$$\int_1^{\infty} \cos(\pi x)\,dx$$

no converge porque el límite

$$\lim_{t\to\infty} \operatorname{sen}(\pi t)$$

no existe.

Una de las propiedades que posee $f(x) = \cos(\pi x)$ (y que echa abajo a la Afirmación) es que a lo largo del intervalo $[1,\infty)$, $\cos(\pi x)$ va cambiando de signo. Esto sugiere una condición que podríamos pedirle a f para que la Afirmación sea cierta: necesitamos $f \geq 0$.

Proposición 3 *Sea $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ integrable en cada intervalo $[a,b] \subset [1,\infty)$ y tal que $f \geq 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos*

$$b_n = \int_n^{n+1} f(x)\,dx$$

Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, entonces la integral $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ converge.

Dem. Por hipótesis, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es convergente. Así que por comodidad, llamemos

$$L = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

Vamos a demostrar la convergencia de la integral impropia a partir de su definición de límite. De manera concreta, demostraremos que

$$\lim_{t\to\infty} \int_1^t f(x)\,dx = L$$

Por supuesto, esta estrategia está inspirada en la igualdad que obtuvimos en (2).

Sea $\varepsilon > 0$.

Queremos demostrar que existe $M > 0$ tal que si $t > M$, entonces

$$\left| \int_1^t f(x)\,dx - L \right| < \varepsilon$$

Recordemos que una consecuencia de la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es que la sucesión $\{b_n\}$ debe converger a 0. Usemos este hecho así como la definición de convergencia de la serie para tomar $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, entonces

$$\left| \sum_{k=1}^{n} b_k - L \right| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{y} \qquad b_n < \frac{\varepsilon}{2} \tag{3}$$

(Noten que no hace falta poner a b_n en valor absoluto puesto que por hipótesis $f \geq 0$, lo que implica que $b_n \geq 0$)

Ahora veamos que esta N es la buscada. Sea $t > N$.

Como en particular se cumple que $t > 1$, entonces sabemos que debe existir $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \leq t < n+1$$

Dicha n necesariamente debe cumplir que $n \geq N$ (*¿por qué?*), y por lo tanto tenemos derecho a usar las desigualdades dadas en (3).

Ahora bien, por la desigualdad del triángulo tenemos:

$$\left| \int_1^t f(x)\, dx - L \right| \leq \left| \int_1^t f(x)\, dx - \sum_{k=1}^n b_k \right| + \left| \sum_{k=1}^n b_k - L \right|$$

De acuerdo a (3), el segundo sumando es menor que $\varepsilon/2$. De modo que

$$\left| \int_1^t f(x)\, dx - L \right| < \left| \int_1^t f(x)\, dx - \sum_{k=1}^n b_k \right| + \frac{\varepsilon}{2} \tag{4}$$

Para analizar el primer sumando sólo notemos que

$$\sum_{k=1}^n b_k = \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} f(x)\, dx = \int_1^{n+1} f(x)\, dx$$

Por lo tanto

$$\left| \int_1^t f(x)\, dx - \sum_{k=1}^n b_k \right| = \left| \int_1^t f(x)\, dx - \int_1^{n+1} f(x)\, dx \right| = \left| \int_1^{n+1} f(x)\, dx - \int_1^t f(x)\, dx \right|$$

La última igualdad fue sólo un paso técnico para poder aterrizar en lo siguiente:

$$\left| \int_1^{n+1} f(x)\, dx - \int_1^t f(x)\, dx \right| = \left| \int_1^{n+1} f(x)\, dx + \int_t^1 f(x)\, dx \right|$$

$$= \left| \int_t^{n+1} f(x)\, dx \right| = \int_t^{n+1} f(x)\, dx$$

Observen que podemos quitar el valor absoluto ya que $f \geq 0$ y $t < n+1$.

Finalmente, dado que $f \geq 0$ y el intervalo $[t, n+1]$ está contenido en el intervalo $[n, n+1]$, se cumple que

$$\int_t^{n+1} f(x)\, dx \leq \int_n^{n+1} f(x)\, dx = b_n < \frac{\varepsilon}{2}$$

Juntando este hecho con la desigualdad (4) concluimos

$$\left| \int_1^t f(x)\, dx - L \right| < \left| \int_1^t f(x)\, dx - \sum_{k=1}^n b_k \right| + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Lo que demuestra que $\int_1^\infty f(x)\, dx$ converge y además

$$\int_1^\infty f(x)\, dx = L = \sum_{n=1}^\infty b_n$$

igualdad que ya sabíamos que debía ocurrir. ■

La Proposición 3 nos da una interesante manera de transformar un problema de convergencia de integrales impropias a un problema de convergencia de series. Ahora bien, en la práctica, determinar la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^\infty \int_n^{n+1} f(x)\, dx$$

puede ponerse mucho peor de lo que la integral impropia ya exige. Sin embargo, a nivel teórico es muy valioso y en particular es la clave para dar una sencilla prueba del tan anunciado criterio de la integral.

¿De dónde surge este dichoso criterio?

Esencialmente su motivación surge de una abstracción a lo logrado en la Proposición 1.

Imaginemos que partimos de una serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

y lo que queremos es determinar su convergencia. La idea entonces es tratar de asociarle alguna integral impropia cuya convergencia determine la convergencia de esta serie.

Quizá la forma más inocente de hacer esto es pensar que podemos conseguir a una función $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$ para la cual se satisfaga que

$$f(n) = a_n$$

y de este modo la pregunta sería:

$$\text{¿Si } \int_1^{\infty} f(x)\,dx \text{ converge, entonces } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge?}$$

Con tan pocas condiciones sobre f, no es de extrañar que la respuesta sea negativa.

Ejemplo 4 *Consideremos a la serie armónica:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

la cual sabemos que diverge.

Ahora tomemos $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & x = n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

La función f satisface que $f(n) = \frac{1}{n}$ y la serie asociada

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

es divergente.

Ahora veamos que la integral impropia sí converge.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, la función f sólo tiene dos discontinuidades en el intervalo $[n, n+1]$, $x = n$ y $x = n+1$.

Dado que en el resto del intervalo la función vale 0, se sigue que

$$\int_n^{n+1} f(x)\,dx = 0$$

De donde

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} f(x)\,dx = 0$$

De acuerdo a la Proposición 3, podemos concluir que $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ converge y además

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx = 0$$

¿Qué es lo que falla en el Ejemplo 4?

La respuesta no es tan simple. Noten que la función $f \geq 0$, así que esta vez no podemos achacarle el fracaso a un posible cambio de signo de la función. Quizá podríamos pensar que el problema está en que f presenta muchas discontinuidades y que si exigimos continuidad a la función, entonces todo se arregla, sin embargo, ¡esto no es así! Aún con continuidad de la función, la convergencia de $\int_1^\infty f(x)\,dx$ NO implica la convergencia de $\sum_{n=1}^\infty f(n)$.

Como ejercicio verifiquen que la función $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) = \begin{cases} 2(x-n) + \frac{1}{n} & \text{si } x \in \left[n - \frac{1}{2n}, n\right] \text{ para alguna } n \in \mathbb{N} \\ -2(x-n) + \frac{1}{n} & \text{si } x \in \left[n, n + \frac{1}{2n}\right] \text{ para alguna } n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

satisface que $\int_1^\infty f(x)\,dx$ *converge pero* $\sum_{n=1}^\infty f(n)$ *diverge, a pesar de que ahora* f *sí es continua.* (*Un dibujito puede ayudar mucho*)

Este ejercicio es muy ilustrativo porque f no sólo es continua, naturalmente también cumple que $f \geq 0$, pero además se puede ver que

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$$

Incluso una ligera modificación podría generarnos un ejemplo en donde f sea derivable en todos sus puntos. De modo que el problema no va en esta dirección.

Entonces, ¿dónde está el punto fino?

Todo el punto se esconde detrás de lo que queremos que signifique que la convergencia de $\int_1^\infty f(x)\,dx$ implique la convergencia de $\sum_{n=1}^\infty f(n)$.

Si sabemos que para $f \geq 0$, la convergencia de $\int_1^\infty f(x)\,dx$ es equivalente a la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^\infty \int_n^{n+1} f(x)\,dx$$

entonces para determinar la convergencia de $\sum_{n=1}^\infty f(n)$ quizá lo que necesitamos hacer es comparar a las series

$$\sum_{n=1}^\infty f(n) \qquad \text{y} \qquad \sum_{n=1}^\infty \int_n^{n+1} f(x)\,dx$$

¿compararlas cómo?

Pues mediante nuestro glorioso *criterio de comparación*.

De acuerdo a este criterio, si supiéramos que

$$f(n) \leq \int_n^{n+1} f(x)\,dx \tag{5}$$

entonces la convergencia de $\sum_{n=1}^\infty \int_n^{n+1} f(x)\,dx$ sí implicaría la convergencia de $\sum_{n=1}^\infty f(n)$. Y esta es toda la clave y la esencia del criterio de la integral.

Noten que tanto en el Ejemplo 4 como en el ejercicio que dejamos de tarea, la correspondiente función f *no satisface la desigualdad en (5).*

No es tan sencillo lograr que se satisfaga la condición en (5), sin embargo, hay una propiedad muy agradable que le podemos pedir a f que al menos nos da condiciones suficientes para lograrlo y además nos da un pequeño regalo adicional.

Sin más preámbulos, vamos a lanzarnos a demostrar el ansiado criterio.

Teorema 5 ***(Criterio de la integral)*** *Sea $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ integrable en cada intervalo $[a, b] \subset [1, \infty)$. Supongamos que $f \geq 0$ y que f es* ***decreciente****. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos*

$$a_n = f(n)$$

Entonces $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ converge si y sólo si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

Dem. La hipótesis clave, sin lugar a dudas, es que f es decreciente. La maravilla de esta condición hace que no sólo la convergencia de $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ implique que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, sino que ¡el recíproco también es cierto!

Cabe aclarar que no vamos a lograr de manera exacta la desigualdad en (5), sino que tendremos un pequeño desfase en el índice pero que no nos afecta en lo más mínimo.

Veamos. Tomemos una $n \in \mathbb{N}$ fija.

Como f es decreciente, entonces para toda $x \in [n, n+1]$ se cumple que

$$f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$$

Si integramos, la desigualdad se respeta:

$$\int_n^{n+1} f(n+1)\,dx \leq \int_n^{n+1} f(x)\,dx \leq \int_n^{n+1} f(n)\,dx$$

Dado que $f(n)$ y $f(n+1)$ son constantes para sus respectivas integrales, concluimos que

$$f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x)\,dx \leq f(n) \tag{6}$$

Como lo anunciamos, en el lado izquierdo de la desigualdad ocurrió un desfase en el índice deseado.

Vamos a la prueba de la equivalencia pedida.

Supongamos primero que $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ converge.

Queremos demostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

De acuerdo a la Proposición 1, la hipótesis implica que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} f(x)\,dx$$

converge.

Usando el lado izquierdo de la desigualdad (6), y dado que $f \geq 0$, tenemos

$$0 \leq a_{n+1} = f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x)\,dx$$

Es decir, tenemos las condiciones para aplicar el criterio de comparación.

En consecuencia, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1}$$

converge. No tenemos exactamente la serie que queremos, pero esto no es problema ya que la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1}$ es equivalente a que la serie $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ converja. Y por lo tanto la serie completa $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

Ahora supongamos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

Queremos demostrar que la integral $\int_1^\infty f(x)\,dx$ converge.

Por la Proposición 3, basta probar que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1} f(x)\,dx$$

converge (noten que aquí también se está usando la hipótesis $f \geq 0$)

Usando la parte derecha de la desigualdad en (6) y dado que $f \geq 0$, tenemos

$$0 \leq \int_n^{n+1} f(x)\,dx \leq f(n) = a_n$$

Por el criterio de comparación y dado que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, concluimos que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1} f(x)\,dx$$

converge y con ello, la integral $\int_1^\infty f(x)\,dx$ converge. ■

El criterio de la integral es muy útil para determinar convergencia de series cuando las sucesiones que las definen se pueden identificar de manera más o menos clara como una función que podamos integrar (esto descarta por ejemplo a aquellas series en donde aparecen factoriales).

Veamos algunos ejemplos de cómo aplicar el criterio.

Ejemplo 6 *Determinar si la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^2}$$

converge.

Definimos

$$a_n = e^{-n^2}$$

La expresión que tiene a_n sugiere considerar a la función

$$f(x) = e^{-x^2}$$

Ya sabemos que esta función es decreciente en $[0,\infty)$. Además $f > 0$.

Ahora bien, en el tema de "Métodos de integración" logramos la hazaña de probar que

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Dado que

$$f(n) = e^{-n^2} = a_n$$

concluimos, por el criterio de la integral, que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^2}$ converge.

El siguiente ejemplo es probablemente el más notable dentro de las aplicaciones del criterio de la integral.

Ejemplo 7 *Para $p > 0$ fija, determinar si la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$$

converge.

Como comentario, antes de analizar el ejemplo, cabe decir que no tiene mucho sentido preguntarnos por el caso $p \leq 0$. Simplemente porque en esta situación la sucesión $\{1/n^p\}$ no converge a 0, y por lo tanto la serie es automáticamente divergente.

Llamemos

$$a_n = \frac{1}{n^p}$$

Una vez más parece claro de cual función debemos apoyarnos:

$$f(x) = \frac{1}{x^p}$$

Sabemos que $f > 0$ y además, dado que $p > 0$, se tiene que f es decreciente en $[1, \infty)$.

En clases presenciales ya habíamos logrado demostrar que

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx$$

converge si y sólo si $p > 1$.

Así que por el criterio de la integral, concluimos que

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p}$$

converge si y sólo si $p > 1$.

El Ejemplo 7 es una generalización al ejemplo que hemos trabajado

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$$

Serie que ya sabíamos que era convergente, lo que es consistente con la condición obtenida en el Ejemplo 7: $p = 2 > 1$.

Otro caso particular del Ejemplo 7 que vale la pena mencionar es la serie

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\sqrt{n}}$$

la cual tiene que ser divergente pues es de la forma $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p}$ para $p = 1/2 < 1$.

Conocer la convergencia de las series dadas en Ejemplo 7 amplía nuestro repertorio y nos permite tener más series con las cuales llevar a cabo comparaciones.

Ejemplo 8 *Determinar si la serie*

$$\sum_{n=1}^\infty \left(\frac{n^{14/3} + 6n^3 - 5n + 11}{n^{77/12} - 7n^5 + 21n^3 - 14} \right)^{6/7}$$

converge.

Definamos

$$a_n = \left(\frac{n^{14/3} + 6n^3 - 5n + 11}{n^{77/12} - 7n^5 + 21n^3 - 14} \right)^{6/7}$$

La idea es aplicar lo obtenido en el Ejemplo 7. Recuerden que ante este tipo de expresiones, es buena idea analizar el comportamiento de a_n para n muy grande.

En este caso se aprecia que

$$\frac{n^{14/3}+6n^3-5n+11}{n^{77/12}-7n^5+21n^3-14} \approx \frac{n^{14/3}}{n^{77/12}}$$

ya que son los términos de mayor grado.

De tal modo que

$$a_n \approx \left(\frac{n^{14/3}}{n^{77/12}}\right)^{6/7} = \frac{n^4}{n^{11/2}} = \frac{1}{n^{3/2}}$$

Esto significa que conviene comparar a la sucesión $\{a_n\}$ con la sucesión

$$b_n = \frac{1}{n^{3/2}}$$

Aplicamos el criterio de comparación con límite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} n^{3/2} \left(\frac{n^{14/3}+6n^3-5n+11}{n^{77/12}-7n^5+21n^3-14}\right)^{6/7}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(n^{21/12}\right)^{6/7} \left(\frac{n^{14/3}+6n^3-5n+11}{n^{77/12}-7n^5+21n^3-14}\right)^{6/7}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^{21/12}\left(n^{14/3}+6n^3-5n+11\right)}{n^{77/12}-7n^5+21n^3-14}\right)^{6/7}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^{77/12}+6n^{57/12}-5n^{33/12}+11n^{22/12}}{n^{77/12}-7n^5+21n^3-14}\right)^{6/7} = 1$$

Es decir,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$$

De acuerdo al criterio de comparación con límite, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si y sólo si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge. Pero $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ tiene la forma del Ejemplo 7 para $p = 3/2 > 1$, así que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es convergente.

Por lo tanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^{14/3}+6n^3-5n+11}{n^{77/12}-7n^5+21n^3-14}\right)^{6/7}$$

converge.

Un error muy común y que hay que tratar de evitar a toda costa es creer que el criterio de la integral afirma que

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

Esto NO es cierto. Piensen por ejemplo en la función $f(x) = 1/x^2$. De esta función sabemos que

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = 1$$

pero

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Recalcando: *Bajo las condiciones del criterio de la integral, en general NO ocurre que*

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

Con esto damos por terminado los criterios de convergencia más importantes. En su tarea se encontrarán con algunos criterios "curiosos" cuya demostración ya es accesible apoyándose de todo lo que hemos desarrollado hasta aquí.

Nuestra siguiente etapa en este tema es comenzar el estudio de aquellas series cuyos términos no necesariamente mantienen el mismo signo.

Quisiera recalcar en este punto que si estuviéramos en la presencia de una serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

para la cual se cumple que $a_n \leq 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces podemos apoyarnos del hecho de que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\sum_{n=1}^{\infty} (-a_n)$$

De esta manera, la nueva serie está formada por términos no negativos $-a_n \geq 0$ y en consecuencia podemos echar mano de todos los criterios ya desarrollados para determinar su convergencia.

Así que sí parece adecuado que ahora nos concentremos en aquellas series que cambian de signo.

Vamos a comenzar con un ejemplo, quizá el más popular de todos. Vamos a analizar la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

Esta serie es conocida como la *serie armónica alternante*. A diferencia de la serie armónica tradicional, su versión *alternante* sí es convergente.

Si llamamos

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

resulta que

$$S_{2n} - S_{2n-1} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \frac{(-1)^{2n+1}}{2n} = -\frac{1}{2n}$$

Y en consecuencia

$$\lim_{n\to\infty} (S_{2n} - S_{2n-1}) = \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{2n} = 0 \tag{7}$$

De manera que para probar la convergencia de las sumas parciales $\{S_n\}$, bastaría demostar la convergencia de alguna de las subsucesiones $\{S_{2n}\}$ ó $\{S_{2n-1}\}$ (en un momento argumentamos por qué).

Nota: *Recuerden que en general una sucesión* $\{b_n\}$ *converge si y sólo si las subsucesiones* $\{b_{2n}\}$ *y* $\{b_{2n-1}\}$ *convergen al mismo límite.*

No es difícil demostrar que $\{S_{2n}\}$ es una sucesión creciente y acotada superiormente por 1, y por lo tanto es convergente (dejamos esta prueba como ejercicio).

Por el momento llamemos

$$L = \lim_{n\to\infty} S_{2n}$$

Entonces de (7) podemos concluir que:

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} (S_{2n-1} - S_{2n}) + \lim_{n\to\infty} S_{2n} = 0 + L = L$$

Y de acuerdo a la Nota, se sigue que $\{S_n\}$ será convergente y además se debe cumplir que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \lim_{n\to\infty} S_{2n} = L$$

El camino aquí trazado (y cuyo paso crucial quedó de ejercicio), nos demuestra que la serie armónica alternante es convergente (lo que no es poca cosa). Sin embargo, lo que vamos a tratar de ofrecer aquí es encontrar el valor exacto de esta serie y esto ya es más ambicioso.

Para lograrlo vamos a ver un lema atribuido a Euler.

Lema 9 *La sucesión*

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log(n)$$

converge a un número $\gamma \in \mathbb{R}$ conocido como la constante de Euler.

Dem. La sucesión $\{a_n\}$ es bien interesante, pues involucra a las sumas parciales de la serie armónica (la cual diverge) y también involucra al $\log(n)$, el cual se va a infinito conforme n crece. De manera que resulta notable que la diferencia de estas dos sucesiones divergentes sea convergente.

Para agregarle más sabor a la sucesión $\{a_n\}$, como dato cultural podemos agregar que aún no se sabe si el valor de su límite es un número racional o un número irracional. Y es una de las razones por las que el número γ es tan famoso.

Con esto que acabamos de decir, debe quedar claro que para demostrar que $\{a_n\}$ converge, no nos quedará de otra más que recurrir a técnicas de convergencia que esquiven el tener que encontrar su límite de manera explícita.

Allá vamos.

Dado $n \in \mathbb{N}$, como la función $f(x) = 1/x$ es decreciente, ya sabemos que se debe cumplir que

$$f(n+1) \leq \int_{n}^{n+1} f(x)\,dx \leq f(n)$$

(*Chequen el argumento que dimos en la demostración del criterio de la integral*)

Esto significa que

$$\frac{1}{n+1} \leq \int_{n}^{n+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{n}$$

es decir,

$$\frac{1}{n+1} \leq \log(n+1) - \log(n) \leq \frac{1}{n} \tag{8}$$

Ahora bien, tomemos la diferencia

$$a_n - a_{n+1} = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log(n)\right) - \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \log(n+1)\right)$$

$$= \log(n+1) - \log(n) - \frac{1}{n+1}$$

Si observamos la parte izquierda de la desigualdad (8), podemos concluir que

$$a_n - a_{n+1} = \log(n+1) - \log(n) - \frac{1}{n+1} \geq 0$$

es decir, $a_n \geq a_{n+1}$. Lo que significa que la sucesión $\{a_n\}$ es decreciente.

De este modo lo único que nos hace falta probar es que $\{a_n\}$ está acotada inferiormente.

Retomando la desigualdad (8), la cual es válida para toda $n \in \mathbb{N}$, podemos sumar desde 1 hasta $n-1$:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^{n-1} [\log(k+1) - \log(k)] \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

Ahora bien, la suma que está en el centro es telescópica, de modo que

$$\sum_{k=1}^{n-1} [\log(k+1) - \log(k)] = \log(n) - \log(1) = \log(n)$$

Por lo tanto

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \log(n) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

Si nos fijamos en la parte derecha de esta desigualdad, tenemos

$$\log(n) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

de donde

$$0 \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log(n) = a_n$$

Lo que prueba entonces que $\{a_n\}$ está acotada inferiormente por 0.

En consecuencia, $\{a_n\}$ converge.

De esta manera se define al número γ como

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} a_n$$

y como ya se dijo, este número γ es llamado la constante de Euler. ■

La constante γ aparece con frecuencia en Teoría de Números y también está muy relacionada con la función Γ que les presentamos en su Tarea 3 (de hecho esta es la razón por la que actualmente se le denota con una gamma minúscula).

Ahora saquemos provecho de esta constante γ.

Proposición 10 *La serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

converge.

Dem. Llamemos

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \qquad \text{y} \qquad T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Es decir, T_n y S_n son las correspondientes sumas parciales de la serie armónica y la serie armónica alternante. Estas sumas parciales guardan una relación entre ellas.

Vamos a descrubrirla:

$$T_2 - T_1 = \left(1 + \frac{1}{2}\right) - 1 = \frac{1}{2}$$

Por otro lado

$$S_2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Es decir,

$$T_2 - T_1 = S_2$$

Ahora,

$$T_4 - T_2 = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) - \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$$

Así mismo

$$S_4 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$$

Por lo tanto

$$T_4 - T_2 = S_4$$

No es difícil adivinar la relación que está apareciendo

$$T_{2n} - T_n = S_{2n}$$

Ésta se tiene que probar por inducción. Hagamos el esfuerzo de probarlo. Ya hemos probado el paso baso, así que vamos directamente al paso inductivo.

H.I. Supongamos que

$$T_{2n} - T_n = S_{2n}$$

Paso inductivo. Queremos demostrar que

$$T_{2(n+1)} - T_{n+1} = S_{2(n+1)}$$

Comencemos por el lado izquierdo de la igualdad a la que queremos llegar.

$$T_{2(n+1)} = T_{2n+2} = \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}$$

Es decir,

$$T_{2(n+1)} = T_{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}$$

Así mismo

$$T_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} = T_n + \frac{1}{n+1}$$

De manera que

$$T_{2(n+1)} - T_{n+1} = (T_{2n} - T_n) + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1}$$

Simplificando sólo la resta de las dos últimas fracciones:

$$T_{2(n+1)} - T_{n+1} = (T_{2n} - T_n) + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}$$

Por otra parte:

$$S_{2(n+1)} = S_{2n+2} = \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} + \frac{(-1)^{(2n+1)+1}}{2n+1} + \frac{(-1)^{(2n+2)+1}}{2n+2}$$

$$= \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}$$

Es decir,

$$S_{2(n+1)} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = S_{2n} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}$$

Si ahora aplicamos la H.I. podemos concluir finalmente que

$$T_{2(n+1)} - T_{n+1} = (T_{2n} - T_n) + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = S_{2n} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = S_{2(n+1)}$$

Por lo tanto

$$T_{2(n+1)} - T_{n+1} = S_{2(n+1)}$$

Lo que termina la inducción y con ello ya tenemos certeza de que se cumple que

$$T_{2n} - T_n = S_{2n} \tag{9}$$

Recordemos que ya habíamos argumentado que para probar la convergencia de la serie armónica alternante (y para hallar su valor) sólo necesitamos calcular el límite:

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n}$$

La identidad en (9) es la clave para calcular este límite y es aquí donde entra en juego el resultado obtenido en el Lema 9.

De acuerdo al Lema 9 sabemos que

$$\lim_{n\to\infty} [T_n - \log(n)] = \gamma$$

Y en consecuencia:

$$\lim_{n\to\infty} [T_{2n} - \log(2n)] = \gamma$$

(El segundo límite se da porque se trata de una subsuceción de la sucesión $\{T_n - \log(n)\}$)

Si ahora restamos estos dos límites:

$$\lim_{n\to\infty} [T_{2n} - \log(2n)] - \lim_{n\to\infty} [T_n - \log(n)] = \gamma - \gamma = 0$$

Juntando los límites:

$$\lim_{n\to\infty} [T_{2n} - \log(2n) - T_n + \log(n)] = 0$$

Simplificando los logaritmos, tenemos

$$\log(n) - \log(2n) = \log\left(\frac{n}{2n}\right) = \log\left(\frac{1}{2}\right) = -\log(2)$$

De donde

$$0 = \lim_{n\to\infty} [T_{2n} - \log(2n) - T_n + \log(n)] = \lim_{n\to\infty} [T_{2n} - T_n - \log(2)]$$

y esto es equivalente a

$$\lim_{n\to\infty} [T_{2n} - T_n] = \log(2)$$

Finalmente

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = \lim_{n\to\infty} [T_{2n} - T_n] = \log(2)$$

¡Y lo hemos logrado!

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge y además

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \log(2)$$

■

Definitivamente lo logrado con la serie armónica alternante es destacado y bien valía el esfuerzo. Este ejemplo nos deja muchas cosas a la reflexión. La primera de ellas es lo que ya habíamos anunciado la clase anterior: trabajar con series cuyos términos cambian de signo no es trivial.

Como su nombre lo dice, la *serie armónica alternante*, es un ejemplo particular de lo que se conoce como *series alternantes*. Demos su definición de manera formal.

Definición 11 *Para una sucesión $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ tal que $a_n \geq 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$, definimos la serie alternante asociada a $\{a_n\}$ como*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$$

Naturalmente la característica que tienen las series alternantes es que van cambiando de signo en cada término:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots$$

Otra de las cosas importantes que nos exhibe la serie armónica alternante es que, una serie alternante puede ser convergente aún cuando la serie que la origina no lo sea:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

converge mientras que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

diverge.

Sin embargo, como veremos en un momento, si una serie de términos no negativos

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

es convergente, entonces necesariamente su serie alternante asociada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$$

también será convergente.

Este hecho es consecuencia de un resultado más general y que da origen a toda una nueva clase de series. Su demostración recae en una de las propiedades más importantes que tienen las sucesiones convergentes y que hasta este momento habíamos dejado de lado, pero ya es hora de traerlo de vuelta.

Definición 12 *Decimos que una sucesión $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ es de Cauchy si para toda $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m > N$ entonces*

$$|a_n - a_m| < \varepsilon$$

Ponemos la definición de sucesión de Cauchy únicamente como un recordatorio puesto que son objeto de estudio de Cálculo I. El resultado más importante que las involucra es el siguiente:

Teorema 13 *Una sucesión $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ converge si y sólo si es de Cauchy.*

Este importantísimo teorema da origen a un criterio de convergencia cuando lo trasladamos a la teoría de las series.

Teorema 14 ***(Criterio de Cauchy)*** *Una sucesión $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ es sumable si y sólo si su sucesión de sumas parciales $\{S_n\}$ es de Cauchy.*

Dem. La demostración es inmediata del Teorema 13 ya que $\{a_n\}$ es sumable si y sólo si $\{S_n\}$ converge si y sólo si $\{S_n\}$ es de Cauchy. ∎

El criterio de Cauchy no es nada eficiente para efectos prácticos, sin embargo, para propósitos teóricos es una joya que hay que tener bien presente.

Teorema 15 *Sea $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ una sucesión. Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.*

Dem. La demostración de este teorema es un excelente ejemplo del potencial que tiene el criterio de Cauchy. Vamos a demostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge a través de este criterio.

Sea $\varepsilon > 0$.

Llamemos

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \qquad \text{y} \qquad T_n = \sum_{k=1}^{n} |a_k|$$

Por hipótesis la sucesión $\{T_n\}$ converge y por tanto es de Cauchy. De manera que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m > N$ entonces

$$|T_n - T_m| < \varepsilon$$

Veamos que el índice N es el buscado.

Tomemos $n, m > N$. Queremos demostrar que

$$|S_n - S_m| < \varepsilon$$

Supongamos sin pérdida de generalidad que $n > m$. Esto implica que

$$|S_n - S_m| = \left| \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{m} a_k \right| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right|$$

Si aplicamos la desigualdad del triangulo:

$$|S_n - S_m| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |a_k|$$

Ahora bien,

$$|T_n - T_m| = \left| \sum_{k=1}^{n} |a_k| - \sum_{k=1}^{m} |a_k| \right| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| \right| = \sum_{k=m+1}^{n} |a_k|$$

Por lo tanto

$$|S_n - S_m| \leq |T_n - T_m| < \varepsilon$$

Lo que prueba que $\{S_n\}$ es de Cauchy y por lo tanto la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. ∎

Corolario 16 *Sea $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ una sucesión tal que $a_n \geq 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces la serie alternante*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$$

converge.

Dem. La demostración es una simple aplicación del Teorema 15.

Como
$$\left|(-1)^{n+1}a_n\right| = a_n$$
y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$$
converge. ■

El Teorema 15 es el resultado más general al que habíamos hecho referencia cuando anunciamos el Corolario 16 y es también el resultado que da origen a toda una nueva clase de series, las llamadas *series absolutamente convergentes.* Su definición debe ser totalmente natural.

Definición 17 *Sea* $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ *una sucesión. Decimos que la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es absolutamente convergente, si la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *converge.*

Con esta definición podemos reformular el Teorema 15 como sigue:

Toda serie absolutamente convergente, converge.

Ya sabemos que la serie armónica alternante provee un ejemplo de que el recíproco del Teorema 15 no es cierto. Es decir:

NO toda serie convergente es absolutamente convergente.

La existencia de series convergentes pero no absolutamente convergentes las hace acreedoras a un nombre distintivo.

Definición 18 *Sea* $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ *una sucesión. Decimos que la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es* ***condicionalmente convergente****, si la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge pero* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *diverge.*

De momento la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$
es nuestro único ejemplo de una serie condicionalmente convergente. Por supuesto, hay muchos más ejemplos.

Una comodidad práctica que tiene el querer demostrar si una serie es absolutamente convergente es, que al tratar de demostrar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge, tenemos derecho a usar **todos** los criterios que hemos desarrollado tanto la clase pasada como el día de hoy, puesto que todos sus términos son no negativos.

Aunque con un potencial limitado, podemos decir que el Teorema 15 es el primer criterio que podemos ofrecer para determinar cuándo una serie formada por términos que van cambiando de signo, es convergente.

Afirmo que el potencial es limitado ya que la cantidad de series que son *condicionalmente convergentes* es muy amplia. En particular, una buena variedad de series alternantes son condicionalmente convergentes. Este hecho hace que surja la necesidad de contar con un criterio orientado específicamente para determinar cuándo una serie alternante es convergente. Dicho criterio existe y es conocido como el *criterio de Leibniz.* Su prueba merece ser discutida con calma, de manera que la dejaremos pendiente para la próxima clase.

Para cerrar el día de hoy, vamos a demostrar una sencilla y linda propiedad que poseen las series absolutamente convergentes. Podemos llamar a esta propiedad: "l*a desigualdad del triángulo generalizada*".

Teorema 19 *Sea* $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ *una sucesión. Si la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es absolutamente convergente, entonces*
$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

Dem. Noten que la hipótesis de que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sea absolutamente convergente es necesaria para que el lado derecho de la desigualdad tenga sentido.

Por otra parte, tiene sentido hablar de la parte izquierda de la desigualdad ya que toda serie absolutamente convergente, es convergente.

Por la desigualdad del triángulo sabemos que para toda $n \in \mathbb{N}$

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_k \right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_n| \tag{10}$$

Dado que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k \qquad \text{y} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} |a_k|$$

tenemos derecho a tomar límite en (10) y concluir:

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| = \left| \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \sum_{k=1}^{n} a_k \right| \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} |a_k| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

Por lo tanto

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

■

Sin duda alguna, una agradable generalización a la tan socorrida desigualdad del triángulo.