Problema. 1:

Demostrar que T es una transformación lineal y encontrar bases para $N(T)$ y $R(T)$. Calcular la nulidad y el rango de T. Emplear los teoremas adecuados para determinar si T es inyectiva o suprayectiva, donde $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ definida por $T(f(x)) = xf(x) + f'(x)$.

Demostración.

Sean $f, g \in P_2(\mathbb{R})$ $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned} T(f(x) + \lambda g(x)) &= x(f(x) + \lambda g(x)) + (f'(x) + \lambda g'(x)) \\ &= xf(x) + f'(x) + \lambda(xg(x) + g'(x)) \\ &= T(f(x)) + \lambda T(g(x)). \end{aligned}$$

Como f, g y λ son arbitrarios, se concluye que T es lineal.
Para encontrar una base de $N(T)$, se resuelve la ecuación $T(f(x)) = 0$:

$$\begin{aligned} xf(x) + f'(x) = 0 \\ \Rightarrow f'(x) = -xf(x) \\ \Rightarrow 2ax + b = -x(ax^2 + bx + c) \\ \Rightarrow 2ax + b = -ax^3 - bx^2 - cx \\ \Rightarrow 0 = -ax^3 - bx^2 - (c + 2a)x - b \\ \Rightarrow a = 0, b = 0, c + 2a = 0 \\ \Rightarrow c = 0 \end{aligned}$$

Es decir que $f(x) = 0$. Por lo tanto, $N(T) = \{0\}$, de donde se concluye que T es inyectiva.
Por el teorema de la dimensión, se tiene que $\dim(N(T)) + \dim(R(T)) = \dim(P_2(\mathbb{R})) = 3$. Es decir, $\dim(R(T)) = 3$. Por tanto T no es suprayectiva.
Como T es inyectiva, manda conjuntos li en conjuntos li. De modo que, para encontrar una base de $R(T)$, se evalúa T en la base canónica de $P_2(\mathbb{R})$:

$$T(1) = x(1) + 0 = x \tag{0.1}$$

$$T(x) = x(x) + 1 = x^2 + 1 \tag{0.2}$$

$$T(x^2) = x(x^2) + 2x = x^3 + 2x \tag{0.3}$$

$$\tag{0.4}$$

Por lo tanto, $R(T) = \{x, x^2 + 1, x^3 + 2x\}$.

$\square$

Problema. 2:

Sean V y W espacios vectoriales y sea $T : V \to W$ una transformación lineal inyectiva. Supóngase que S es un subconjunto de V. Entonces S es linealmente independiente si y sólo si $T(S)$ es linealmente independiente.

Demostración.

$\Leftarrow$) Primero supongamos que $T(S) \subset W$ es L.I, sea $U \subset S$ finito, tenemos que $T : U \to T(U)$, es una biyección pues T es inyectiva, por tanto $T(U) \subset T(S)$ es finito, por tanto si tomamos:

$$\sum_{\overline{x} \in U} \alpha_i \, \overline{x}_i = \overline{0}$$

Una combinación lineal arbitraria finita de elementos en S igualada a $\overline{0}$, debido a que T es transformación lineal:

$$T\left(\sum_{\overline{x} \in U} \alpha_i \, \overline{x}_i\right) = \sum_{T(\overline{x}) \in T(U)} \alpha_i \, T(\overline{x}_i) = \overline{0}$$

Como obtenemos una combinación lineal arbitraria y finita igualada a $\overline{0}$ de un subconjunto finito de un conjunto L.I, se sique que $\alpha_i = 0$ para toda i, como $U \subset S$, fue arbitrario, tenemos que en cualquier subconjuntos finito de S se cumple que cualquier combinación lineal arbitraria y finita de vectores igualada a $\overline{0}$ debe tener todos sus escalares igualados a 0, por tanto S es L.I

$\Rightarrow$) Ahora suponemos que S es L.I, tomamos $L \subset T(S)$, finito, como T es iyyectiva tenemos que $T^{-1}(L) \subset S$ es finito de la misma manera, luego podemos seguir un camino similar al anterior definimos una combinación lineal finita de elementos en L arbitraria igualada al vector $\overline{0}$

$$\sum_{T(\overline{x_i}) \in L} \alpha_i \, T(\overline{x_i}) = \overline{0}$$

De nuevo aplicando las propiedades de una transformación lineal

$$\sum_{T(\overline{x_i}) \in L} \alpha_i \, T(\overline{x_i}) = T\left(\sum_{\overline{x_i} \in T^{-1}(L)} \alpha_i \, \overline{x}_i\right) = \overline{0}$$

Luego tenemos que esta combinación lineal esta contenida en el nucleo de T, peor como esta es inyectiva se concluye que

$$\sum_{\overline{x_i} \in T^{-1}(L)} \alpha_i \, \overline{x}_i = \overline{0}$$

Luego como S es L.I y $T^{-1}(L) \subset S$ finito, se concluye que $\alpha_i = 0$ para toda i, finalmente de manera analoga al caso anterior se concluye que $T(S)$ es L.I $\square$

Problema. 3:

Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(a_1, a_2) = (a_1 - a_2, a_1, 2a_1 + a_2)$. Sean β la base canónica para R^2 y $\gamma = \{(1,1,0), (0,1,1), (2,2,3)\}$. Calcular $[T]_\gamma^\beta$.

Demostración.

Evaluemos T en la base canónica de $\mathbb{R}^2$:

$$T(1,0) = (1,1,2) = e_1 + e_2 + 2e_3$$
$$T(0,1) = (-1,0,1) = -e_1 + e_3$$

Es decir

$$[T]_\beta^E = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Notemos que

$$\begin{aligned}(1,1,0) &= e_1 + e_2 \\ (0,1,1) &= e_2 + e_3 \\ (2,2,3) &= 2e_1 + 2e_2 + 3e_3\end{aligned}$$

Es decir la matriz de cambio de base es:

$$[\gamma]_E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Por tanto

$$\begin{aligned}[T]_\beta^\gamma &= [\gamma]_E[T]_\beta^E \\ &= \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

□

Problema. 4:

Sean V y W espacios vectoriales tales que $\dim(V) = \dim(W)$, y sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Demostrar que existen bases ordenadas β y γ para V y W, respectivamente, tales que $[T]_\gamma^\beta$ es una matriz diagonal.

Demostración.

Sean $\beta' \xhookrightarrow{\text{Base}} \ker(T)$. Luego $\beta' \xrightarrow{\text{se extiende}} \beta \xhookrightarrow{\text{Base}}_F V$. Como $T[\beta'] = \{0\}$, entonces

$$R(T) = \mathcal{L}(T[\beta]) = \mathcal{L}(T[\beta \setminus \beta'])$$

Veamos que $T[\beta \setminus \beta']$ es linealmente independiente. Sean $\{x_1, \cdots, x_n\} \subseteq \beta \setminus \beta'$ y $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{F}$ tales que

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i T(x_i) &= 0 \\ \Rightarrow T(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i) &= 0 \\ \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i &\in \ker(T)\end{aligned}$$

Por lo tanto $\exists \{x_{n+1}, \cdots, x_k\} \subseteq \beta'$ $\lambda_{n+1}, \cdots, \lambda_k \in \mathbb{F}$ tal que

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i &= \sum_{i=n+1}^{k} \lambda_i x_i \\ \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i &= 0\end{aligned}$$

Como β es una base, entonces $\lambda_i = 0$.
Por lo tanto, $T[\beta \setminus \beta']$ es linealmente independiente.

$$\begin{array}{ccc} \therefore\ T[\beta \setminus \beta'] & \xhookrightarrow{\text{Base}} & R(T) \\ \downarrow & & \\ \alpha & \xhookrightarrow{\text{Base}} & {}_F W \end{array}$$

$$\therefore T(b) = \begin{cases} T(b) & \forall b \in \beta \setminus \beta' \\ 0 & \forall b \in \beta' \end{cases}$$

$\therefore\ [T]_\beta^\alpha$ es diagonal. □

Problema. 5:

Sean V un espacio vectorial de dimensión finita y $T : V \to V$ una transformación lineal. Si $r(T) = r(T^2)$, demostrar que $R(T) \cap N(T) = \{\overline{0}\}$. También ver que $V = \mathrm{Im}(T) \oplus \mathrm{Nuc}(T)$.

Demostración.

Por el teorema de la dimensión tenemos que $Dim(N(T)) = Dim(N(T^2))$, luego tenemos que si $\overline{x} \in N(T)$ entonces $T(\overline{x}) = \overline{0}$, por tanto $T^2(\overline{x}) = \overline{0}$, es decir $\overline{x} \in N(T^2)$, luego $N(T) \subseteq N(T^2)$, como tanto $N(T)$ como $N(T^2)$ son de dimensión finita, tienen la misma dimensión, y ademas se tiene que uno esta contenido dentro del otro (a nivel de conjuntos), se tiene que $N(T) = N(T^2)$, de la misma manera si $\overline{y} \in R(T^2)$, entonces existe $\overline{z} \in V$ tal que $T^2(\overline{z}) = \overline{y}$ en particular como $T(\overline{z}) \in V$ se sigue que $\overline{y} \in R(T)$, pues $T(T(\overline{z})) = \overline{y}$, finalmente por un argumento analogo al mostrado $R(T) = R(T^2)$

Tomemos $\overline{x} \in R(T) \cap N(T)$, entonces tenemos que $T(\overline{x}) = \overline{0}$ y que existe $\overline{y} \in V$ tal que $T(\overline{y}) = \overline{x}$, como se tiene que $T^2(\overline{y}) = \overline{0}$, se tiene que $\overline{y} \in N(T^2)$, por tanto $\overline{y} \in N(T)$, es decir $\overline{x} = T(\overline{y}) = \overline{0}$, por tanto $R(T) \cap N(T) = \{\overline{0}\}$

Finalmente para demostrar que $V = \mathrm{R}(T) \oplus \mathrm{N}(T)$, tenemos que demostrar que
$\forall\ \overline{v} \in V\ \exists \overline{u_1} \in N(t),\ \overline{u_2} \in R(T) :\ \overline{v} = \overline{u_1} + \overline{u_2}$ sea $\overline{v}$, es claro que $T(\overline{v}) \in r(T)$, luego tenemos que como $R(T) = R(T^2)$, existe $\overline{w} \in V$ tal que $T^2(\overline{w}) = T(\overline{v})$ luego sea $\overline{u_2} = T(\overline{w}) \in R(t)$ y $u_1 = \overline{v} - T(\overline{w})$, tenemos que $\overline{v} = \overline{u_1} + \overline{u_2}$, luego $T(\overline{u_1}) = T(\overline{v}) - T^2(\overline{w}) = \overline{0}$, por tanto $\overline{u_1} \in N(T)$ □

Problema. 6:

Demostrar que T es una transformación lineal y encontrar bases para $N(T)$ y $R(T)$. Calcular la nulidad y el rango de T. Emplear los teoremas adecuados para determinar si T es inyectiva o suprayectiva, donde $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ está definida por $T(a_1, a_2, a_3) = (a_1 - a_2, 2a_3)$.

Demostración.

Sean $x, y \in \mathbb{R}^3$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned} T(x + \lambda y) &= T(x_1 + \lambda y_1, x_2 + \lambda y_2, x_3 + \lambda y_3) \\ &= (x_1 + \lambda y_1 - x_2 - \lambda y_2, 2x_3 + 2\lambda y_3) \\ &= (x_1 - x_2, 2x_3) + (\lambda y_1 - \lambda y_2, 2\lambda y_3) \\ &= T(x) + \lambda T(y). \end{aligned}$$

Por lo tanto, T es lineal.

Para encontrar una base de $N(T)$, se resuelve la ecuación $T(x) = 0$; $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} (x_1 - x_2, 2x_3) &= (0,0) \\ \Rightarrow x_1 - x_2 = 0;\ x_3 &= 0 \\ \Rightarrow x_1 &= x_2 \end{aligned}$$

Es decir $x \in \{a(1,1,0) \mid a \in \mathbb{R}\}$. Ahora si $x \in \{a(1,1,0) \mid a \in \mathbb{R}\}$, es inmediato que $T(x) = 0$. Por lo tanto, $N(T) = \{a(1,1,0) \mid a \in \mathbb{R}\}$ y tiene como base a $\{(1,1,0)\}$.
De donde se concluye que $\dim(N(T)) = 1$. Por tanto T no es inyectiva.
Por el teorema de la dimensión, se tiene que $\dim(N(T)) + \dim(R(T)) = \dim(\mathbb{R}^3) = 3$.
Es decir, $\dim(R(T)) = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$. Por tanto T es suprayectiva.
De modo que, una base de $R(T)$ es $\{(1,0),(0,1)\}$.

□

Problema. 7:

Sean V y W espacios vectoriales, y sea $T : V \to W$ lineal. Entonces T es inyectiva si y sólo si T lleva subconjuntos linealmente independientes de V a subconjuntos linealmente independientes de W.

Demostración.

La ida se abordo en el **Problema 2**, para la vuelta demostraremos que si T no es inyectiva entonces existe un subconjunto S L.I de V tal que $T[S]$ no es L.I (contrapuesta), tenemos que si T no es inyectiva existen $\overline{v}, \overline{z} \in V$ tal que $\overline{v} \neq \overline{z}$ y $T(\overline{v}) = T(\overline{z})$, luego por la primera condición el conjunto $\{\overline{v} - \overline{z}\} \subset V$ es L.I, sin embargo su imagen bajo T consta de el vector $T(\overline{v} - \overline{z}) = T(\overline{v}) - T(\overline{z}) = \overline{0}$, es decir la imagen de $\{\overline{v} - \overline{z}\}$ bajo T es L.D, por tanto se concluye que si T no es inyectiva, existe un subconjunto $S \subset V$ tal que su imagen bajo T no es L.I. □

Problema. 8:

Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(a_1, a_2) = (a_1 - 2a_2, a_2, 3a_1 + 4a_2)$. Sean β la base canónica para $\mathbb{R}^2$ y $\gamma = \{(1,1,0),(0,1,1),(2,2,3)\}$. Calcular $[T]_\gamma^\beta$.

Demostración.

Veamos que T es lineal. Sean $x, y \in \mathbb{R}^2$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned} T(x + \lambda y) &= T(x_1 + \lambda y_1, x_2 + \lambda y_2) \\ &= (x_1 + \lambda y_1 - 2(x_2 + \lambda y_2), x_2 + \lambda y_2, 3(x_1 + \lambda y_1) + 4(x_2 + \lambda y_2)) \\ &= (x_1 - 2x_2, x_2, 3x_1 + 4x_2) + (\lambda(y_1 - 2y_2), \lambda y_2, \lambda(3y_1 + 4y_2)) \\ &= T(x) + \lambda T(y). \end{aligned}$$

Sea E la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Entonces, evaluando T en la base canónica de $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} T(1,0) &= (1,0,3) = e_1 + 3e_3 \\ T(0,1) &= (-2,1,4) = -2e_1 + e_2 + 4e_3 \end{aligned}$$

De modo que

$$[T]_\beta^E = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Como la base γ puede escribirse como

$$\begin{aligned} (1,1,0) &= e_1 + e_2 \\ (0,1,1) &= e_2 + e_3 \\ (2,2,3) &= 2e_1 + 2e_2 + 3e_3 \end{aligned}$$

Entonces la matriz de cambio de base es:

$$[\gamma]_E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} [T]_\beta^\gamma &= [\gamma]_E [T]_\beta^E \\ &= \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 7 & 7 \\ 9 & 13 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

Problema. 9:

Sean V, W y Z espacios vectoriales, $T : V \to W$ y $U : W \to Z$ transformaciones lineales. Demostrar que si $U \circ T$ es inyectiva, entonces T es inyectiva. ¿Debe ser U inyectiva también?

Demostración.

En partícular como T y U son funciones por un resultado de álgebra superior I tenemos que si $U \circ T$ es inyectiva entonces T es inyectiva, claramente U puede ser inyectiva pues composición de inyectivas es inyectiva, sin embargo esto no es necesario para que $U \circ T$ sea inyectiva □

Problema. 10:

Sean V un espacio vectorial de dimensión finita y $T : V \to V$ una transformación lineal. Si $T = T^2$, demostrar que $N(T) \cap R(T) = \{\overline{0}\}$. También ver que $V = \mathrm{Im}(T) \oplus \mathrm{Nuc}(T)$.

Demostración.

Primero demostraremos que $N(T) \cap R(T) = \{\overline{0}\}$, sea $\overline{x} \in N(T) \cap R(T) = \{\overline{0}\}$, tenemos que $T(\overline{x}) = \overline{0}$ y además existe $\overline{y} \in V$ tal que $T(\overline{y}) = \overline{x}$, luego por hipótesis $\overline{x} = T(\overline{y}) = T(T(\overline{y})) = T(\overline{x}) = \overline{0}$ como $\overline{x}$ fue arbitrario obtenemos que $N(T) \cap R(T) \subset \{\overline{0}\}$, luego como T es una transformación lineal se tiene que $\{\overline{0}\} \subset N(T) \cap R(T)$ por tanto $N(T) \cap R(T) = \{\overline{0}\}$, ahora para demostrar que $V = \mathrm{Im}(T) \oplus \mathrm{Nuc}(T)$ basta demostrar que $\forall\, \overline{x} \in V\, \exists\, \overline{u_1} \in N(T),\ \overline{u_2} \in R(T) : \overline{x} = \overline{u_1} + \overline{u_2}$

Sea $\overline{v} \in V$ definimos $\overline{u_1} = \overline{v} - T(\overline{v})$, y $\overline{u_2} = T(\overline{v})$, es claro que $\overline{u_2} \in R(T)$ ahora $T(\overline{u_1}) = T(\overline{v}) - T(T(\overline{v})) = T(\overline{v}) - T(\overline{v}) = \overline{0}$, por tanto $\overline{u_1} \in N(T)$, finalmente $\overline{v} = \overline{u_1} + \overline{u_2}$, concluimos que $V = \mathrm{Im}(T) \oplus \mathrm{Nuc}(T)$ □