Cálculo Diferencial e Integral II

Aproximación polinomial

23 de abril de 2020

Como ya hemos podido apreciar las clases anteriores, el concepto del residuo es muy importante. Aún cuando hasta este momento lo hemos manejado de manera *abstracta*, nos ha permitido demostrar cosas muy interesantes. El día de hoy vamos a profundizar en este concepto y vamos a tratar de encontrar expresiones explícitas para el mismo.

Hemos mencionado previamente que contar con una expresión explícita del residuo de una función, permite analizar con mayor precisión qué tan buena es la aproximación polinomial lograda con los polinomios de Taylor.

¿A qué nos referimos con eso de *expresión explícita* para el residuo? ¿que acaso la definición $R_{n,f,a}(x) = f(x) - P_{n,f,a}(x)$ no es suficientemente explícita?

En estricto sentido, la definición del residuo sí nos da una expresión explícita, sin embargo, para medir qué tan buena es la aproximación polinomial, ésta es totalmente inútil.

Lo que queremos hacer entonces es hallar alguna expresión alternativa "más manejable" en la práctica. Ya hemos tenido un primer acercamiento a este problema, lo tuvimos cuando calculamos los polinomios de Taylor para $\arctan(x)$.

La Clase del jueves 16, logramos demostrar que

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt$$

lo que a su vez nos permitió demostrar que

$$P_{2n+1,\arctan,0}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Pero eso significa, de acuerdo a la definición del residuo, que necesariamente

$$R_{2n+1,\arctan,0}(x) = (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt$$

Es decir, tenemos una expresión muy especial del residuo del $\arctan(x)$.

Esta forma del residuo nos da la oportunidad de manipularlo con un poco más de libertad y así conseguir controlar el "error" que cometemos cuando aproximamos los valores de $\arctan(x)$ a través de sus polinomios de Taylor. Profundicemos un poco en ello.

Imaginemos que se nos da un valor fijo $x_0 \in \mathbb{R}$ para el cual no nos sea posible decir cuál es el valor exacto de $\arctan(x_0)$. Y digamos que deseamos dar una aproximación a su valor que sea correcta a tres decimales.

¿Qué significa esto último?

Significa que estamos buscando un número $a \in \mathbb{R}$ para el cual se cumpla que

$$|\arctan(x_0) - a| \leq b \times 10^{-4}$$

para algún $b \in \{1, 2 \ldots, 9\}$ (Noten que $b \times 10^{-4} = 0.000b$, de ahí que la aproximación sea correcta a tres decimales).

¿Cómo le hacemos para conseguir al número $a \in \mathbb{R}$?

Bueno, la idea es apoyarnos de los polinomios de Taylor. Sin embargo, no debemos perder de vista que la aproximación que ofrecen los polinomios de Taylor es local. En la mayoría de los casos, si nos alejamos mucho del punto en donde nuestro polinomio de Taylor está centrado, corremos el riesgo de no lograr una buena aproximación.

En nuestro ejemplo, como deseamos usar la expresión "especial" del residuo que tenemos, es necesario mantener a nuestros polinomios de Taylor centrados en 0. Eso significa que para que todo este ejercicio realmente tenga futuro, lo ideal es que x_0 no esté tan alejado del 0.

Sólo para continuar con la motivación del ejemplo, supongamos que

$$|x_0| \leq 1$$

es decir, x_0 está cerca de 0 pero no muy cerca (de manera que nuestro ejemplo seguirá siendo ilustrativo).

Bien, de lo que se trata ahora es de elegir una n lo suficientemente grande de tal forma que podamos asegurar que

$$\left|\arctan(x_0) - P_{2n+1,\arctan,0}(x_0)\right| \leq b \times 10^{-4}$$

y con ello el número $a \in \mathbb{R}$ que estamos buscando será

$$a = P_{2n+1,\arctan,0}(x_0)$$

Es aquí en donde entra nuestra expresión explícita del residuo, porque lo que estamos buscando es una n tal que

$$\left|R_{2n+1,\arctan,0}(x_0)\right| \leq b \times 10^{-4}$$

Lo cual es equivalente a

$$\left|(-1)^{n+1}\int_0^{x_0} \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}dt\right| \leq b \times 10^{-4}$$

Esto está perfecto, porque lo que tenemos que hacer ahora es ir acotando adecuadamente la integral hasta llegar a un momento en donde la elección de la n sea clara.

Veamos. Indudablemente tenemos que

$$\left|(-1)^{n+1}\int_0^{x_0} \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}dt\right| = \left|\int_0^{x_0} \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}dt\right|$$

Aquí quizá un buen paso podría ser el siguiente:

$$\left|\int_0^{x_0} \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}dt\right| \leq \int_0^{x_0} \left|\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\right| dt$$

Pero hay que tener cuidado, esto no siempre es verdadero, depende de donde esté ubicado x_0. Si $x_0 \geq 0$, la desigualdad es cierta, pero si $x_0 < 0$, entonces no lo es porque la integral de la derecha sería un número negativo.

(Recuerden que si $b < a$, entonces $\int_a^b f = -\int_b^a f$)

Así que para realizar los cálculos vamos a distinguir estos dos casos.

Supongamos primero que $x_0 \geq 0$. En este caso sí es válido decir:

$$\left|\int_0^{x_0} \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}dt\right| \leq \int_0^{x_0} \left|\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\right| dt \leq \int_0^{x_0} \left|t^{2n+2}\right| dt$$

Noten que en la última desigualdad se está usando que $0 < \frac{1}{1+t^2} \leq 1$.

Como $t^{2n+2} = \left(t^{n+1}\right)^2 \geq 0$, entonces

$$\int_0^{x_0} \left|t^{2n+2}\right| dt = \int_0^{x_0} t^{2n+2}dt = \frac{x_0^{2n+3}}{2n+3}$$

Es decir, si $x_0 \geq 0$, se cumple que

$$|R_{2n+1,\text{arctan},0}(x_0)| \leq \frac{x_0^{2n+3}}{2n+3}$$

Ahora supongamos $x_0 < 0$.

En este caso lo correcto es hacer la siguiente manipulación:

$$\left|\int_0^{x_0} \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}dt\right| = \left|\int_{x_0}^0 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}dt\right| \leq \int_{x_0}^0 \left|\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\right| dt \leq \int_{x_0}^0 t^{2n+2}dt = -\frac{x_0^{2n+3}}{2n+3}$$

Noten finalmente que como $x_0 < 0$ y el exponente $2n+3$ es impar, entonces

$$|x_0|^{2n+3} = (-x_0)^{2n+3} = (-1)^{2n+3}\, x_0^{2n+3} = -x_0^{2n+3}$$

Por lo tanto hemos demostrado que si $|x_0| \leq 1$, se cumple que

$$|R_{2n+1,\text{arctan},0}(x_0)| \leq \frac{|x_0|^{2n+3}}{2n+3}$$

Nota: *En realidad la desigualdad es válida para cualquier $x \in \mathbb{R}$, pero para aquellos $x \in \mathbb{R}$, tales $|x| > 1$, es una desigualdad poco útil porque*

$$\frac{|x|^{2n+3}}{2n+3} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

La nueva expresión de la derecha a la que hemos llegado se ve mucho más amigable. En efecto, si aprovechamos que $|x_0| \leq 1$, entonces

$$|R_{2n+1,\text{arctan},0}(x_0)| \leq \frac{|x_0|^{2n+3}}{2n+3} \leq \frac{1}{2n+3}$$

Por lo tanto, si queremos que

$$|R_{2n+1,\text{arctan},0}(x_0)| \leq b \times 10^{-4}$$

basta tomar una n tal que

$$\frac{1}{2n+3} \leq b \times 10^{-4}$$

Es decir,

$$\frac{\frac{1}{b}10^4 - 3}{2} \leq n$$

Si en particular quisiéramos un error menor a 10^{-4}, entonces necesitamos

$$\frac{10^4 - 3}{2} < n$$

es decir, $n = 4999$. En cuyo caso el polinomio que debemos tomar es $P_{9999,\text{arctan},0}(x)$ el cual es...

¡estratosférico!

No se desanimen por semejante barbaridad. Esto para nada demerita el proceso. Quizá lo que no debimos hacer fue aprovechar la desigualdad $|x_0| \leq 1$ de manera tan literal. Fíjense que si $|x_0| < 1$, entonces el cociente

$$\frac{|x_0|^{2n+3}}{2n+3}$$

se va a 0 muchísimo más rápido de lo que lo hace $\frac{1}{2n+3}$, lo que nos permitiría tomar una n más decente. Para $x_0 = 1$ ó $x_0 = -1$ ahí sí no hay remedio y es necesario un grado gigantesco del polinomio de Taylor para aproximar el valor del arco tangente en estos puntos. Pero esto no debería extrañarnos, porque como hemos venido insistiendo, la aproximación que da Taylor es local y tanto el 1 como el -1 no están muy cerca del

0 que digamos. En todo caso es una grata sorpresa que aún para puntos no tan cercanos del 0 sea posible lograr buenas aproximaciones para el valor de $\arctan(x)$.

El caso $x_0 = 1$ es particularmente interesante porque sabemos que $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$, o equivalentemente $\pi = 4\arctan(1)$. Por lo que habría estado fantástico haber obtenido una buena aproximación de $\arctan(1)$ y con ello una aproximación al valor de π.

(En la tarea se ofrecen algunos "trucos" para lograr aproximar el valor de π con siete decimales exactos sin necesidad de tomar polinomios de un grado muy elevado.)

El mensaje que debemos llevarnos de todo este proceso es que en efecto, conocer nuevas expresiones del residuo de una función, nos podría permitir controlar mejor las aproximaciones que damos.

La cota que obtuvimos para $R_{2n+1,\arctan,0}(x)$ es realmente importante, así que para que no se nos olvide vamos a dejarla enunciada en una proposición.

Proposición 1 *Si $|x| \leq 1$, entonces para toda $n \in \mathbb{N}$ se tiene que*

$$|R_{2n+1,\arctan,0}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}$$

Después de nuestra experiencia con el arco tangente, ahora vamos a aventurarnos a atacar el problema general.

La expresión que obtuvimos para $R_{2n+1,\arctan,0}(x)$,

$$R_{2n+1,\arctan,0}(x) = (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt$$

nos invita a pensar que para una función f en abstracto, posiblemente podamos expresar su residuo en términos de alguna integral conveniente. Vamos a ver que esto es así.

Pongamos un poco de contexto. Comencemos con una función $f : I \to \mathbb{R}$ a la que por el momento le vamos a pedir que sea de clase C^1 en I. Y tomemos $a \in I$. Lo que vamos a tratar de hacer primero es deducir una expresión para $R_{0,f,a}(x)$.

De acuerdo al TFC2, sabemos que para toda $x \in I$

$$\int_a^x f'(t)\,dt = f(x) - f(a)$$

O equivalentemente,

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt$$

Ahora bien, por definición $P_{0,f,a}(x) = f(a)$ (es decir, es un polinomio constante). Dado que

$$f(x) = P_{0,f,a}(x) + R_{0,f,a}(x) = f(a) + R_{0,f,a}(x)$$

Se deduce que

$$R_{0,f,a}(x) = f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,dt$$

Y con ello logramos ver a $R_{0,f,a}(x)$ como una integral.

Ahora aumentemos las condiciones sobre f y pidamos que f sea de clase C^2 en I. Y vamos a tratar de encontrar una expresión para $R_{1,f,a}(x)$.

Nuestro punto de partida será la identidad

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt \tag{1}$$

La idea, es tratar de calcular la integral que tenemos en el lado derecho. Pero ojo, es importante notar que quererla calcular por medio del TFC2 es redundante de acuerdo a la identidad que ya tenemos en (1) y no nos va a ofrecer nueva información. Lo que vamos hacer en cambio, aprovechando que f es de calse C^2, es aplicar integración por partes (en donde naturalmente, la función que hay que derivar es f' y la que hay que integrar es la constante 1).

De esta manera

$$\begin{aligned}\int_a^x f'(t)\,dt &= tf'(t)\Big|_a^x - \int_a^x tf''(t)\,dt\\ &= xf'(x) - af'(a) - \int_a^x tf''(t)\,dt\end{aligned}$$

Al ver la expresión anterior, nos damos cuenta que el término $xf'(x)$ estorba y lo que más estorba es $f'(x)$. Sin embargo, hay una manera ingeniosa de deshacernos de ella.

Así como obtuvimos la identidad (1), podemos aplicar TFC2 a la función f' y concluir que

$$f'(x) = f'(a) + \int_a^x f''(t)\,dt$$

De este modo se sigue que

$$\int_a^x f'(t)\,dt = xf'(x) - af'(a) - \int_a^x tf''(t)\,dt$$

$$= x\left[f'(a) + \int_a^x f''(t)\,dt\right] - af'(a) - \int_a^x tf''(t)\,dt$$

$$= f'(a)(x-a) + x\int_a^x f''(t)\,dt - \int_a^x tf''(t)\,dt$$

Ahora observen que en la expresión $x\int_a^x f''(t)\,dt$, el factor x puede meterse a la integral como una constante, puesto que no depende de la variable t. Es decir,

$$x\int_a^x f''(t)\,dt = \int_a^x xf''(t)\,dt$$

Por lo tanto

$$\int_a^x f'(t)\,dt = f'(a)(x-a) + \int_a^x xf''(t)\,dt - \int_a^x tf''(t)\,dt$$

$$= f'(a)(x-a) + \int_a^x \left[xf''(t) - tf''(t)\right]dt$$

$$= f'(a)(x-a) + \int_a^x f''(t)(x-t)\,dt$$

Si sustituimos esta identidad en (1), obtenemos finalmente

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \int_a^x f''(t)(x-t)\,dt$$

¡Ah! Esta expresión es fantástica porque del lado derecho apareció precisamente la definición de $P_{1,f,a}(x)$. Es decir,

$$f(x) = P_{1,f,a}(x) + \int_a^x f''(t)(x-t)\,dt$$

Lo que implica que

$$R_{1,f,a}(x) = f(x) - P_{1,f,a}(x) = \int_a^x f''(t)(x-t)\,dt$$

Y de este modo hemos obtenido una expresión integral para $R_{1,f,a}(x)$.

Este razonamiento que estamos llevando a cabo puede generalizarse, lo que nos llevará a la expresión buscada del residuo. Antes de lanzar una fórmula general, hagamos un paso más para descifrar el patrón que está apareciendo.

Para calcular ahora $R_{2,f,a}(x)$, de acuerdo con lo que hemos observado, es necesario pedir una derivada adicional al orden del residuo, es decir, necesitamos f tres veces derivable. Podemos intuir también que la forma integral que tendrá $R_{2,f,a}(x)$ involucrará una integral donde aparezca f''' y con ello necesitamos integrabilidad de la misma. Así que para no meternos en detalles muy técnicos, pidamos por ahora f de clase C^3.

Esta vez nuestro punto de partida es

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \int_a^x f''(t)(x-t)\,dt \tag{2}$$

Lo que vamos a hacer nuevamente es calcular la integral del lado derecho usando integración por partes. Para ello derivaremos $f''(t)$ e integraremos $(x-t)$.

Hagamos este paso con cuidado para no confundir las variables en juego. La integral que tenemos es de la forma

$$\int_a^x F'(t)\,G(t)\,dt$$

en donde

$$F'(t) = x-t \qquad \text{y} \qquad G(t) = f''(t)$$

El detalle fino está en la función $F'(t) = x-t$, porque debe comprenderse que la x involucrada juega el papel de una constante para la variable t. De tal modo que

$$F(t) = -\frac{(x-t)^2}{2} \qquad \text{y} \qquad G'(t) = f'''(t)$$

Sustituyendo estos datos en la integración por partes obtenemos:

$$\int_a^x f''(t)(x-t)\,dt = -\frac{(x-t)^2}{2}f''(t)\Big|_a^x + \int_a^x \frac{(x-t)^2}{2}f'''(t)\,dt$$

$$= -\frac{f''(x)}{2}(x-x)^2 + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \int_a^x \frac{f'''(t)}{2}(x-t)^2\,dt$$

$$= \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \int_a^x \frac{f'''(t)}{2}(x-t)^2\,dt$$

Si sustituimos esta igualdad en (2), nos queda:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \int_a^x \frac{f'''(t)}{2}(x-t)^2\,dt$$

Es decir,

$$f(x) = P_{2,f,a}(x) + \int_a^x \frac{f'''(t)}{2}(x-t)^2\,dt$$

Y por lo tanto

$$R_{2,f,a}(x) = f(x) - P_{2,f,a}(x) = \int_a^x \frac{f'''(t)}{2}(x-t)^2\,dt$$

Parece que el patrón ha sido descubierto. Todo indica que

$$R_{n,f,a}(x) = \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\,dt$$

La presencia de $n!$ se intuye de la sucesiva integración del término $(x-t)^k$

$$(x-t) \mapsto \frac{1}{2}(x-t)^2 \mapsto \frac{1}{2\cdot 3}(x-t)^3 \mapsto \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}(x-t)^4 \mapsto \cdots$$

La fórmula para $R_{n,f,a}(x)$ es correcta y es conocida como "la forma integral del residuo". Vamos a formalizar este resultado en una proposición.

Proposición 2 *(Forma integral del residuo) Sea $f: I \to \mathbb{R}$ una función $(n+1)$-veces derivable en I. Supongamos que $f^{(n+1)}$ es integrable en cualquier intervalo $[c,d] \subset I$. Para cada $a \in I$ se cumple que*

$$R_{n,f,a}(x) = \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\,dt$$

Dem. Si se analiza con cuidado la deducción que hicimos para $R_{n,f,a}(x)$, se apreciará que realmente no usamos la hipótesis de continuidad de las sucesivas derivadas de f. Lo único que necesitábamos era su integrabilidad (la integración por partes sólo necesita integrabilidad de las funciones involucradas). Le impusimos continuidad a las derivadas sólo para ahorrarnos un poco de redacción en la deducción.

Sea $a \in I$ fijo.

Como seguramente se espera, la prueba la tendremos que hacer por inducción sobre n.

Base. $n = 1$.

Esto ya fue demostrado.

H.I. Supongamos que si $f: I \to \mathbb{R}$ es una función $(n+1)$-veces derivable en I, y $f^{(n+1)}$ es integrable en cualquier intervalo $[c,d] \subset I$, entonces

$$R_{n,f,a}(x) = \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\,dt$$

Paso inductivo. Sea $f: I \to \mathbb{R}$ una función $(n+2)$-veces derivable en I y tal que $f^{(n+2)}$ es integrable en cualquier intervalo $[c,d] \subset I$.

Queremos demostrar que

$$R_{n+1,f,a}(x) = \int_a^x \frac{f^{(n+2)}(t)}{(n+1)!}(x-t)^{n+1}\,dt$$

El hecho de que f sea $(n+2)$-veces derivable en I nos indica que en particular f satisface las condiciones de la H.I.

Por lo tanto

$$R_{n,f,a}(x) = \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\,dt$$

Dado que

$$f(x) = P_{n,f,a}(x) + R_{n,f,a}(x)$$

entonces

$$f(x) = P_{n,f,a}(x) + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\,dt \tag{3}$$

El siguiente paso es calcular la integral del lado derecho mediante integración por partes.

Proponemos

$$F'(t) = \frac{1}{n!}(x-t)^n \qquad \text{y} \qquad G(t) = f^{(n+1)}(t)$$

Entonces

$$F(t) = -\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \qquad \text{y} \qquad G'(t) = f^{(n+2)}(t)$$

Aplicando la integración por partes:

$$\int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\,dt = -\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(t)\Big|_a^x + \int_a^x \frac{f^{(n+2)}(t)}{(n+1)!}(x-t)^{n+1}\,dt$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} + \int_a^x \frac{f^{(n+2)}(t)}{(n+1)!}(x-t)^{n+1}\,dt$$

Sustituimos este dato en la identidad (3) y concluimos que

$$f(x) = P_{n,f,a}(x) + \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} + \int_a^x \frac{f^{(n+2)}(t)}{(n+1)!}(x-t)^{n+1}\,dt$$

Pero ahora noten que

$$P_{n,f,a}(x) + \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} = P_{n+1,f,a}(x)$$

Por lo tanto

$$f(x) = P_{n+1,f,a}(x) + \int_a^x \frac{f^{(n+2)}(t)}{(n+1)!}(x-t)^{n+1}\,dt$$

De donde

$$R_{n+1,f,a}(x) = f(x) - P_{n+1,f,a}(x) = \int_a^x \frac{f^{(n+2)}(t)}{(n+1)!}(x-t)^{n+1}\,dt$$

Lo que concluye la inducción y la prueba. ■

En este momento conviene que hagamos una comparación con el residuo que ya conocíamos de $\arctan(x)$ y el residuo que ofrece la Proposición 2.

Sabemos que

$$R_{2n+1,\arctan,0}(x) = (-1)^{n+1}\int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}dt$$

mientras que por la Proposición 2

$$R_{2n+1,\arctan,0}(x) = \int_0^x \frac{\arctan^{(2n+2)}(t)}{(2n+1)!}(x-t)^{2n+1}\,dt$$

En apariencia estas fórmulas no se parecen en nada y sin embargo, ¡son iguales!

Es decir,

$$\int_0^x \frac{\arctan^{(2n+2)}(t)}{(2n+1)!}(x-t)^{2n+1}\,dt = (-1)^{n+1}\int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}dt$$

Pero ojo, eso NO significa que los integrandos coincidan, ni mucho menos que a partir de esta igualdad sea posible deducir una fórmula para $\arctan^{(2n+2)}(t)$.

Pero entonces, ¿qué fórmula es más conveniente en la práctica?

Recuerden que en la Clase del jueves 16, nos vimos forzados a buscar un camino alternativo para calcular $P_{2n+1,\arctan,0}(x)$, esto ocurrió ante nuestra incapacidad para calcular las sucesivas derivadas de $\arctan(x)$. De tal manera que, para el caso concreto de la $\arctan(x)$, la expresión del residuo más útil es la primera:

$$R_{2n+1,\arctan,0}(x) = (-1)^{n+1}\int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}dt$$

No hay que desalentarnos por este peculiar caso, es sólo eso, un caso muy excepcional. En la práctica, la forma integral del residuo funciona muy bien. Y más aún, para efectos teóricos definitivamente es una poderosa herramienta.

Como una muestra de la importancia que tiene la forma integral del residuo, vamos a utilizarla para deducir una nueva expresión para el residuo y probablemente la más socorrida de todas.

Para ello nos vamos a poner en el siguiente escenario: Sean $f : I \to \mathbb{R}$ una función de clase C^{n+1} en I y $a \in I$ fijo.

(Hemos fortalecido un poco las condiciones dadas en la Proposición 2 pero no es nada que realmente nos inquiete.)

Bien, la forma integral del residuo nos dice que para toda $x \in I$

$$R_{n,f,a}(x) = \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n \, dt$$

Ahora vamos a tomar una $x \in I$ fija y nos vamos a concentrar en la expresión del integrando:

$$(x-t)^n$$

Aquí desde luego, estamos pensando que la t se mueve en el intervalo $[a, x]$ si $a \leq x$, o en el intervalo $[x, a]$ en caso de que $x < a$. En cualquiera de los dos casos, lo que quiero que noten es que el signo de $(x-t)^n$ no cambia a lo largo de dichos intervalos.

- Para n par, $(x-t)^n$ siempre es no negativa, es decir $(x-t)^n \geq 0$.

- Suponiendo n impar. En caso de que $a \leq x$, entonces para toda $t \in [a, x]$, se tiene que $x - t \geq 0$ y por lo tanto $(x-t)^n \geq 0$. En cambio si $x < a$, entonces para toda $t \in [x, a]$, se tiene que $x - t \leq 0$ y por la imparidad de n se sigue que $(x-t)^n \leq 0$.

¿De qué nos sirve la información anterior?

Bueno, que la expresión $(x-t)^n$ no cambie de signo y el que por hipótesis sepamos que la función $f^{(n+1)}(t)$ es continua, nos da todas las condiciones para aplicar el Teorema del Valor Promedio a la forma integral del residuo.

Lo que quiere decir que existe un punto c, que "vive entre x y a", tal que

$$\int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n \, dt = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} \int_a^x (x-t)^n \, dt$$

Esto está fantástico porque ahora la integral de la derecha ya es totalmente calculable:

$$\int_a^x (x-t)^n \, dt = -\left.\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}\right|_a^x = \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$$

Y de este modo hemos aterrizado en una nueva expresión para el residuo:

$$R_{n,f,a}(x) = \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n \, dt = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} \int_a^x (x-t)^n \, dt = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$$

Es decir,

$$R_{n,f,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$$

Esta nueva forma del residuo es conocida como "la forma de Lagrange del residuo". En su deducción hemos usado la continuidad de $f^{(n+1)}$, sin embargo, es posible demostrar la fórmula sin siquiera suponer integrabilidad de la misma, lo que supone una mejora a las condiciones dadas en la Proposición 2. Vamos a formalizar este resultado y por el puro placer teórico vamos a enunciarlo sin pedirle condiciones adicionales a $f^{(n+1)}$ más que su sola existencia.

Notación importante: *Para ahorrarnos un poco de redacción vamos a introducir la siguiente notación para intervalos abiertos:*

$$\langle a,b\rangle = \begin{cases} (a,b) & \text{si } a<b \\ \\ (b,a) & \text{si } b<a \end{cases}$$

De esta manera la expresión $x\in\langle a,b\rangle$ se lee simplemente como "x entre a y b", sin necesidad de especificar si estamos en el caso de $a<x<b$ ó $b<x<a$.

Una observación importante que vale la pena hacer (y que vamos a usar) es que si $x\in\langle a,b\rangle$, entonces $\langle a,x\rangle\subset\langle a,b\rangle$. (Su demostración es muy simple y se deja de ejercicio)

Para el siguiente resultado vamos a necesitar el Teorema del valor medio de Cauchy. Para tenerlo presente, a continuación lo ponemos como un recordatorio:

Recordatorio: *(Teorema del valor medio de Cauchy) Sean $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ funciones continuas en $[a,b]$ y derivables en (a,b). Entonces existe $c\in(a,b)$ tal que*

$$\left(f\left(b\right)-f\left(a\right)\right)g'\left(c\right)=\left(g\left(b\right)-g\left(a\right)\right)f'\left(c\right)$$

El Teorema del valor medio de Cauchy suele demostrarse en Cálculo I y es la herramienta clave para demostrar la regla de L'Hopital. Para quien no lo haya visto antes, puede consultar Spivak, capítulo 11,Teorema 8.

Vamos a comenzar con lo que podríamos llamar un caso particular de la forma de Lagrange del residuo.

Lema 3 *Sea $f:I\to\mathbb{R}$ una función $(n+1)$-veces derivable en el intervalo I. Si $a\in I$ es tal que, para toda $k=0,1\ldots,n$,*

$$f^{(k)}\left(a\right)=0$$

entonces para toda $x\in I$, con $x\neq a$, existe $c\in\langle a,x\rangle$ tal que

$$f\left(x\right)=\frac{f^{(n+1)}\left(c\right)}{(n+1)!}\left(x-a\right)^{n+1}$$

Dem. La demostración debe hacerse por inducción sobre n. Esta vez, para hacer más ilustrativo el resultado, vamos a comenzar la inducción en $n=0$ y no en $n=1$ como tradicionalmente lo hemos hecho.

Base. $n=0$.

Supongamos que $f:I\to\mathbb{R}$ es una función derivable en I y sea $a\in I$ tal que $f\left(a\right)=0$.

Sea $x\in I$ con $x\neq a$. Lo que queremos demostrar es que existe $c\in\langle a,x\rangle$ tal que

$$f\left(x\right)=f'\left(c\right)\left(x-a\right)$$

Como f es derivable en I, podemos aplicar el Teorema del valor medio y concluir que existe $c\in\langle a,x\rangle$ tal que

$$f\left(x\right)-f\left(a\right)=f'\left(c\right)\left(x-a\right)$$

Pero $f\left(a\right)=0$, así que

$$f\left(x\right)=f'\left(c\right)\left(x-a\right)$$

H.I. Supongamos que para cada función $h:I\to\mathbb{R}$, $(n+1)$-veces derivable en el intervalo I se cumple que si $a\in I$ es tal que, para toda $k=0,1\ldots,n$,

$$h^{(k)}\left(a\right)=0$$

entonces para toda $x\in I$, con $x\neq a$, existe $c\in\langle a,x\rangle$ tal que

$$h\left(x\right)=\frac{h^{(n+1)}\left(c\right)}{(n+1)!}\left(x-a\right)^{n+1}$$

Paso inductivo. Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función $(n+2)$-veces derivable en el intervalo I y sea $a \in I$ tal que, para toda $k = 0, 1 \ldots, n+1$,

$$f^{(k)}(a) = 0$$

Sea $x \in I$ con $x \neq a$. Lo que queremos demostrar es que existe $c \in \langle a, x\rangle$ tal que

$$f(x) = \frac{f^{(n+2)}(c)}{(n+2)!}(x-a)^{n+2}$$

En este paso es donde vamos a echar mano del Teorema del valor medio de Cauchy. Para ello nos vamos a auxiliar de la función

$$g(t) = (t-a)^{n+2}$$

Entonces podemos decir que existe $y \in \langle a, x\rangle$ tal que

$$(f(x) - f(a))\, g'(y) = (g(x) - g(a))\, f'(y)$$

Notemos que $g(a) = 0$, mientras que $g'(y) = (n+2)(y-a)^{n+1}$. Además, por hipótesis $f(a) = 0$.

Sustituyendo estos datos obtenemos:

$$f(x)(n+2)(y-a)^{n+1} = (x-a)^{n+2} f'(y)$$

Equivalentemente

$$f(x) = \frac{f'(y)}{(n+2)(y-a)^{n+1}}(x-a)^{n+2}$$

Noten que el cociente está bien definido porque $y \in \langle a, x\rangle$.

Ahora nos paramos en la función f' y notamos que ésta satisface todas las condiciones de la H.I.

Como $y \neq a$, entonces por H.I existe $c \in \langle a, y\rangle \subset \langle a, x\rangle$ tal que

$$f'(y) = \frac{(f')^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(y-a)^{n+1} = \frac{f^{(n+2)}(c)}{(n+1)!}(y-a)^{n+1}$$

De donde

$$f(x) = \frac{f'(y)}{(n+2)(y-a)^{n+1}}(x-a)^{n+2} = \frac{\frac{f^{(n+2)}(c)}{(n+1)!}(y-a)^{n+1}}{(n+2)(y-a)^{n+1}}(x-a)^{n+2}$$

$$= \frac{f^{(n+2)}(c)}{(n+2)(n+1)!}(x-a)^{n+2}$$

Por lo tanto hemos probado que existe $c \in \langle a, x\rangle$ tal que

$$f(x) = \frac{f^{(n+2)}(c)}{(n+2)!}(x-a)^{n+2}$$

Lo que concluye la inducción. $\blacksquare$

Antes de probar la versión general de la forma de Lagrange del residuo, vale la pena notar por qué el Lema 3 es un caso particular de la misma.

Bajo las hipótesis del Lema 3 se cumple que

$$P_{n,f,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = 0$$

Esto significa que

$$f(x) = P_{n,f,a}(x) + R_{n,f,a}(x) = R_{n,f,a}(x)$$

De modo que por el Lema 3 concluimos que existe $c \in \langle a, x \rangle$ tal que

$$R_{n,f,a}(x) = f(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Es decir, tenemos la forma de Lagrange del residuo. Lo particular del caso son las condiciones que le hemos impuesto a las derivadas sucesivas de f en a.

Ya estamos listos para el caso general.

Teorema 4 *(Forma de Lagrange del residuo) Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función $(n+1)$-veces derivable en el intervalo I y sea $a \in I$ fijo. Entonces para toda $x \in I$, con $x \neq a$, existe $c \in \langle a, x \rangle$ tal que*

$$R_{n,f,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Dem. La idea por supuesto es adaptar las condiciones del teorema para poder aplicar el Lema 3. La igualdad a la que queremos llegar es toda la clave. Simplemente hay que verificar que la función $R_{n,f,a}$ satisface todas las hipótesis del Lema 3.

Recordemos que por definición

$$R_{n,f,a}(x) = f(x) - P_{n,f,a}(x)$$

Una propiedad que resaltamos mucho al inicio del tema es que el polinomio de Taylor $P_{n,f,a}$ satisface que, para toda $k = 0, 1 \ldots, n$,

$$f^{(k)}(a) = P^{(k)}_{n,f,a}(a)$$

De tal modo que, para toda $k = 0, 1 \ldots, n$,

$$R^{(k)}_{n,f,a}(a) = f^{(k)}(a) - P^{(k)}_{n,f,a}(a) = 0$$

De esta manera, tenemos derecho a aplicar el Lema 3 y concluir que, dado $x \in I$, con $x \neq a$, existe $c \in \langle a, x \rangle$ tal que

$$R_{n,f,a}(x) = \frac{R^{(n+1)}_{n,f,a}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Ahora bien,

$$R^{(n+1)}_{n,f,a}(c) = f^{(n+1)}(c) - P^{(n+1)}_{n,f,a}(c)$$

Y aquí viene un paso muy agradable. Como $P_{n,f,a}(x)$ es un polinomio de grado a lo más n, entonces

$$P^{(n+1)}_{n,f,a}(x) \equiv 0$$

Y por lo tanto

$$R^{(n+1)}_{n,f,a}(c) = f^{(n+1)}(c) - P^{(n+1)}_{n,f,a}(c) = f^{(n+1)}(c)$$

De donde

$$R_{n,f,a}(x) = \frac{R^{(n+1)}_{n,f,a}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

como se quería. ■

Como ya lo dijimos, las condiciones dadas en el Teorema 4 son más ligeras que las que pedimos en la Proposición 2, porque en la forma de Lagrange sólo necesitamos la existencia de la derivada $f^{(n+1)}$, en cambio en la forma de la integral necesitamos que $f^{(n+1)}$ además sea integrable. Está diferencia sútil entre ambas hipótesis tiene mérito únicamente a nivel teórico, a nivel práctico difícilmente es significativo. Tan es así que, es frecuente encontrar en muchos textos que la forma de Lagrange se enuncia bajo la hipótesis de "f de clase C^{n+1}".

¿Alguna vez se han preguntado si la derivada de una función podría no ser integrable? (se los dejo a la reflexión)

La forma de Lagrange para el residuo es particularmente fácil de recordar. Si nos apoyamos del hecho de que

$$f(x) = P_{n,f,a}(x) + R_{n,f,a}(x)$$

y escribimos la definición de $P_{n,f,a}(x)$ así como la forma de Lagrange para $R_{n,f,a}(x)$, entonces

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \tag{4}$$

Como se puede apreciar, la identidad (4) es "casi" la definición de $P_{n+1,f,a}(x)$, con la excepción de que $f^{(n+1)}$ no está evaluada en a si no en un punto $c \in \langle a, x\rangle$.

Aprovechemos esta identidad para ver algunos casos particulares de su aplicación.

Ejemplo 5 *Sabemos que el* $(2n+1)$*-ésimo polinomio de Taylor para* $\operatorname{sen}(x)$ *está dado por:*

$$P_{2n+1,\operatorname{sen},0}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Utilizando la identidad (4), para algún $c \in \langle 0, x\rangle$ *se tiene que*

$$\operatorname{sen}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \frac{\operatorname{sen}^{(2n+2)}(c)}{(2n+2)!}x^{2n+2}$$

Ejemplo 6 *Sabemos que el* $2n$*-ésimo polinomio de Taylor para* $\cos(x)$ *está dado por:*

$$P_{2n,\cos,0}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Utilizando nuevamente la identidad (4), para algún $c \in \langle 0, x\rangle$ *se tiene que*

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \frac{\cos^{(2n+1)}(c)}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

La expresión tan cómoda que tienen los residuos de $\operatorname{sen}(x)$ y $\cos(x)$ permiten ofrecer cotas muy manejables para los mismos, así como lo hicimos para el residuo de $\arctan(x)$.

En el caso de $\operatorname{sen}(x)$ tenemos que

$$|R_{2n+1,\operatorname{sen},0}(x)| = \left|\frac{\operatorname{sen}^{(2n+2)}(c)}{(2n+2)!}x^{2n+2}\right| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

Mientras que para $\cos(x)$ tenemos

$$|R_{2n+1,\cos,0}(x)| = \left|\frac{\cos^{(2n+1)}(c)}{(2n+2)!}x^{2n+2}\right| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

En ambos casos hemos utilizado respectivamente que

$$\left|\operatorname{sen}^{(2n+2)}(c)\right| = |\operatorname{sen}(c)| \leq 1$$

y

$$\left|\cos^{(2n+1)}(c)\right| = |\operatorname{sen}(c)| \leq 1$$

Para poner un ejemplo de cómo las cotas del residuo nos ayudan a controlar el error, imagínense ahora que estuviéramos interesados en conocer un valor aproximado para $\operatorname{sen}(1)$ y quisiéramos que esa aproximación tuviera un error no mayor a 10^{-4}.

Como

$$|R_{2n+1,\mathrm{sen},0}(1)| \leq \frac{1}{(2n+2)!}$$

Lo que hay que hacer es elegir una n lo suficientemente grande para que

$$\frac{1}{(2n+2)!} \leq 10^{-4}$$

o equivalentemente

$$10^4 \leq (2n+2)!$$

Como $7! = 5040$ y $8! = 40320$, se tiene que $2n+2 = 8$ es el número buscado, es decir, $n = 3$.

Por lo tanto

$$\operatorname{sen}(1) \approx P_{7,\mathrm{sen},0}(1) = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} \approx 0.841468254$$

Y el error cometido en dicha aproximación satisface

$$|R_{7,\mathrm{sen},0}(1)| \leq \frac{1}{8!} < 10^{-4}$$

(Pongan en su calculadora $\operatorname{sen}(1)$ y comparen su respuesta)

Ejemplo 7 *Para la función exponencial $f(x) = e^x$, sabemos que su n-ésimo polinomio de Taylor es*

$$P_{n,f,0}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

Si aplicamos la identidad (4) a f obtenemos:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

para alguna $c \in \langle 0, x \rangle$.

Como en este caso sabemos que $f^{(n+1)}(c) = e^c$, entonces

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}$$

Acotar el residuo de e^x, aunque es sencillo, no es tan claro qué tan buena es la información que nos ofrece, sobre todo para $x > 0$.

Tomemos $x > 0$ y notemos que

$$|R_{n,f,0}(x)| = \left|\frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}\right| = \frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}$$

para alguna $0 < c < x$.

Ahora, como la función exponencial es creciente, podemos concluir que $e^c < e^x$. De modo que

$$0 < R_{n,f,0}(x) < \frac{e^x}{(n+1)!}x^{n+1}$$

Es decir, el residuo de e^x quedó acotado por una expresión, ¡donde aparece e^x!

Parte del problema es que hasta este momento no conocemos del todo al número e. La Clase del lunes 13 se comentó que

$$e \approx 2.7182815256$$

y que ésta era una aproximación correcta a seis decimales, lo cual muy probablemente ya era por todos conocido. Pero, ¿por qué?

Ya tenemos claro que usar polinomios de Taylor nos va a ofrecer dicha aproximación. La cuestión es, ¿cómo medimos qué tan buena es dicha aproximación si no es claro cómo controlar el error que cometimos?

Una manera de solucionar esto es ofrecer una primer cota "burda" del número e y a partir de ahí mejorar la cota que dimos para el residuo de e^x.

Recuerden que el número e se definió a partir de la ecuación:

$$1 = \log(e) = \int_1^e \frac{1}{t} dt$$

Entonces, una manera ingeniosa de dar una aproximación del número e es mediante el cálculo de sumas superiores e inferiores para la función $g(t) = \frac{1}{t}$ en intervalos adecuados.

Por ejemplo, tomemos $P = \{1, 2\}$. P es la partición trivial del intervalo $[1, 2]$. Si calculamos la suma superior de g respecto a P, obtenemos

$$\overline{S}(g, P) = 1 \cdot (2 - 1) = 1$$

(el supremo de g en $[1, 2]$ es 1 porque g es decreciente).

De este modo logramos

$$\int_1^2 \frac{1}{t} dt \leq \overline{S}(g, P) = 1 = \int_1^e \frac{1}{t} dt$$

Es decir, $\log(2) \leq \log(e)$ y por tanto $2 \leq e$.

Ahora tomemos $Q = \{1, 2, 4\}$. Q es una partición del intervalo $[1, 4]$. Si calculamos la suma inferior de g respecto a Q, obtenemos

$$\underline{S}(g, Q) = \frac{1}{2} \cdot (2 - 1) + \frac{1}{4}(4 - 2) = 1$$

(los ínfimos de g en $[1, 2]$ y $[2, 4]$ son $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{4}$ respectivamente porque g es decreciente).

De este modo conseguimos que

$$\int_1^e \frac{1}{t} dt = 1 = \underline{S}(g, Q) \leq \int_1^4 \frac{1}{t} dt$$

Es decir, $\log(e) \leq \log(4)$ y por tanto $e \leq 4$.

De esta manera hemos probado que

$$2 \leq e \leq 4$$

Una aproximación burda pero suficientemente útil.

Si retomamos la cota del residuo que habíamos logrado

$$0 < R_{n,f,0}(x) < \frac{e^x}{(n+1)!} x^{n+1}$$

ahora podemos usar que $e^x \leq 4^x$ porque $x > 0$, y concluir que

$$0 < R_{n,f,0}(x) < \frac{4^x}{(n+1)!} x^{n+1}$$

La cota sigue sin ser del todo satisfactoria para una $x > 0$ arbitraria, pero para $x = 1$ ya nos permite dar el valor aproximado de e que habíamos anunciado.

Lo que hay que hacer es usar

$$0 < R_{n,f,0}(1) < \frac{4}{(n+1)!}$$

Si tomáramos por ejemplo $n = 9$ (como lo hicimos la Clase del lunes 13), tenemos que

$$e \approx P_{9,f,0}(1) \approx 2.7182815256$$

Y el error cometido en esta aproximación es tal que

$$0 < R_{9,f,0}(1) < \frac{4}{(10)!} \approx 10^{-6}$$

Esto asegura con certeza que la aproximación que dimos es correcta a cinco decimales.

Lo que en particular demuestra que

$$e < 3$$

y con ello podemos volver a refinar nuestra cota del residuo para e^x:

$$0 < R_{n,f,0}(x) < \frac{3^x}{(n+1)!}x^{n+1}$$

Con lo cual podemos concluir que el error cometido en la aproximación $e \approx P_{9,f,0}(1)$ en realidad es tal que

$$R_{9,f,0}(1) < \frac{3}{(10)!} \approx 8 \times 10^{-7}$$

Lo que ahora asegura que la aproximación que dimos del número e es correcta a seis decimales como lo anunciamos la Clase del lunes 13.

Sólo por no dejar, para $x < 0$, es posible dar una cota más sencilla de $R_{n,f,0}(x)$.

Como

$$|R_{n,f,0}(x)| = \left|\frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}\right| = \frac{e^c}{(n+1)!}|x|^{n+1}$$

para alguna $x < c < 0$, entonces podemos usar que $e^c < e^0 = 1$.

Por lo tanto, para $x < 0$:

$$|R_{n,f,0}(x)| < \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Con el fin de no dejar volando esta información, dejémosla plasmada en una proposición.

Proposición 8 *Sea $f(x) = e^x$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple que*

1) Si $x > 0$, entonces

$$0 < R_{n,f,0}(x) < \frac{3^x}{(n+1)!}x^{n+1}$$

2) Si $x < 0$, entonces

$$|R_{n,f,0}(x)| < \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Existe una última forma del residuo que en la comunidad matématica se considera como "exótica". Y es que si bien es una fórmula para el residuo hecha y derecha, sus aplicaciones son prácticamente nulas (o sumamente rebuscadas). Vamos a enunciarla y demostrarla únicamente como dato cultural y con eso cerraremos la clase del día de hoy.

Proposición 9 *(Forma de Cauchy del residuo) Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función de clase C^{n+1} en I y $a \in I$ fijo. Para cada $x \in I$, con $x \neq a$, existe $c \in [a, x]$ (o $c \in [x, a]$ si $x < a$) tal que*

$$R_{n,f,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n (x-a)$$

Dem. La demostración está inspirada en la deducción que hicimos de la forma de Lagrange del residuo a partir de la forma integral del residuo.

Sea $x \in I$ fija, con $x \neq a$.

Por la Proposición 2, sabemos que

$$R_{n,f,a}(x) = \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n \, dt$$

Como la $x \in I$ está fija, podemos considerar a la función $g : I \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(t) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n$$

Debido a que f es de clase C^{n+1}, la función g es continua.

De manera que por el Teorema del Valor Promedio, existe $c \in [a, x]$ (o $x \in [x, a]$ según sea el caso) tal que

$$R_{n,f,a}(x) = \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n \, dt = \int_a^x g(t)\, dt = g(c)(x-a)$$

Es decir,

$$R_{n,f,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n (x-a)$$

Lo que concluye la prueba. ■

La forma de Cauchy para el residuo puede demostrarse sin necesidad de suponer la continuidad de la función $f^{(n+1)}$, incluso puede demostrarse que el punto c puede elegirse en $\langle a, x \rangle$ (es decir, $c \in (a, x)$ ó $x \in (x, a)$) pero dado que lo estamos dejando como cultura general, no nos vamos a ocupar de demostrarlo.