Cálculo Diferencial e Integral II

Métodos de integración

30 de marzo de 2020

El día de hoy vamos a concluir el tema de "Métodos de integración" dando algunas aplicaciones de lo que hemos aprendido. Vamos a resolver tres problemas importantes que engloban de excelente manera todo el contenido que hemos desarrollado. Son problemas difíciles pero muy ilustrativos.

Nota: En algún punto tendremos la necesidad de apoyarnos de algunos ejercicios de las Tareas 2 y 3. Así mismo, los resultados que logremos el día de hoy son necesarios para la resolución de algunos problemas de la Tarea 3.

Hemos comentado que existen ciertas funciones continuas para las cuales no es posible dar una primitiva explícita. También hemos puntualizado que en muchas ocasiones, aunque no es posible dar una primitiva de una función, sí es posible resolver una integral definida que la involucre. Este hecho es la motivación de los problemas que vamos a resolver. Vamos a tratar de calcular las siguientes intgrales:

$$\int_0^\infty \frac{2\arctan(\pi x) - \arctan(2\pi x)}{x^2}dx \qquad \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}dx \qquad \int_0^\infty e^{-x^2}dx$$

Para ninguno de los integrandos anteriores es posible dar una primitiva explícita, pero eso no nos va a detener para calcular estas integrales.

Advertencia: Cada integral que vayamos resolviendo será más pesada que la anterior. Así que hay que estar atentos a los detalles finos y leer con mucha calma. A fin de no abrumarse, recomiendo que tras leer un problema tomen un buen descanso y luego continúen.

Problema 1 *Calcular*

$$\int_0^\infty \frac{2\arctan(\pi x) - \arctan(2\pi x)}{x^2}dx.$$

El cálculo de esta integral en realidad depende de un resultado todavía más general. Vamos a enunciar este resultado, lo demostraremos y finalmente veremos cómo es que su aplicación nos ayuda a resolver el Problema 1 (vale la pena comparar este resultado con el ejercicio 29 de la Tarea 3).

Proposición 2 *Sea $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ una función continua y tal que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = A$. Si la integral $\int_c^\infty \frac{f(x)}{x}dx$ converge para toda $c>0$, entonces para cualesquiera $0<a<b$ se cumple que*

$$\int_0^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx = A\log\left(\frac{b}{a}\right).$$

Dem. Sean $0<a<b$.

Notemos que la integral que se nos pide calcular, es impropia del "segundo tipo". Es decir, es una integral que tiene problemas en ambos límites de integración. Usualmente en estas situaciones debemos separar la integral como suma de dos integrales impropias del "primer tipo" y calcular cada una por separado:

$$\int_0^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx = \int_0^1 \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx + \int_1^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx$$

Sin embargo, por la naturaleza de nuestro problema, es posible seguir otra estrategia:

Vamos a probar que para toda $c > 0$, la integral $\int_c^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx$ converge y luego demostraremos que

$$\lim_{c\to 0^+}\int_c^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx = A\log\left(\frac{b}{a}\right)$$

y con esto ya habremos terminado.

Es importante convencerse de que este camino es correcto.

Si hemos probado que las integrales $\int_c^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx$ convergen para toda $c > 0$, en particular tendremos el dato de que la integral $\int_1^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx$ converge, y por lo tanto podremos manipularla como si fuera cualquier número.

Ahora bien, probando que

$$\lim_{c\to 0^+}\int_c^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx = A\log\left(\frac{b}{a}\right)$$

se concluye lo siguiente:

$$A\log\left(\frac{b}{a}\right) = \lim_{c\to 0^+}\int_c^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx = \lim_{c\to 0^+}\left[\int_c^1 \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx + \int_1^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx\right]$$

De donde

$$\lim_{c\to 0^+}\int_c^1 \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx = A\log\left(\frac{b}{a}\right) - \int_1^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx$$

Lo que probaría que la integral $\int_0^1 \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx$ converge y además

$$\int_0^1 \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx = A\log\left(\frac{b}{a}\right) - \int_1^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx$$

Y esto finalmente demostraría que

$$\int_0^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx = \int_0^1 \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx + \int_1^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx = A\log\left(\frac{b}{a}\right)$$

De esta forma hemos fundamentado que sí tenemos derecho a seguir nuestra estrategia.

Comencemos. Sea $c > 0$.

Vamos a aprovechar la hipótesis que nos dice que $\int_c^\infty \frac{f(x)}{x}dx$ converge para demostrar que la integral $\int_c^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx$ converge. Y para esto usaremos el Teorema de Cambio de Variable para integrales impropias:

Hacemos el cambio de variable $u = ax$. Entonces

$$dx = \tfrac{1}{a}du$$

$$x = c \Rightarrow u = ac$$

$$x \to \infty \Rightarrow u \to \infty$$

Noten que para asegurar que $u \to \infty$, se está usando que $a > 0$.

Aplicamos el cambio de variable, únicamente a la integral $\int_c^\infty \frac{f(ax)}{x}dx$, y nos queda que

$$\int_c^\infty \frac{f(ax)}{x}dx = \int_{ac}^\infty \frac{f(u)}{\frac{1}{a}u}\left(\frac{1}{a}\right)du = \int_{ac}^\infty \frac{f(u)}{u}du$$

De manera análoga pero ahora proponiendo el cambio de variable $u = bx$, obtenemos

$$\int_c^{\infty} \frac{f(bx)}{x} dx = \int_{bc}^{\infty} \frac{f(u)}{u} du$$

Lo anterior demuestra que las integrales $\int_c^{\infty} \frac{f(ax)}{x} dx$ y $\int_c^{\infty} \frac{f(bx)}{x} dx$ convergen y además

$$\int_c^{\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = \int_c^{\infty} \frac{f(ax)}{x} dx - \int_c^{\infty} \frac{f(bx)}{x} dx = \int_{ac}^{\infty} \frac{f(u)}{u} du - \int_{bc}^{\infty} \frac{f(u)}{u} du$$

La diferencia que aparece en el lado derecho puede simplificarse:

$$\int_{ac}^{\infty} \frac{f(u)}{u} du - \int_{bc}^{\infty} \frac{f(u)}{u} du = \int_{ac}^{bc} \frac{f(u)}{u} du + \int_{bc}^{\infty} \frac{f(u)}{u} du - \int_{bc}^{\infty} \frac{f(u)}{u} du = \int_{ac}^{bc} \frac{f(u)}{u} du$$

Y por lo tanto

$$\int_c^{\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = \int_{ac}^{bc} \frac{f(u)}{u} du$$

Ahora vamos a demostrar que

$$\lim_{c \to 0^+} \int_c^{\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = A \log\left(\frac{b}{a}\right).$$

De acuerdo a la información que hemos obtenido, el límite que nos interesa es equivalente a probar que

$$\lim_{c \to 0^+} \int_{ac}^{bc} \frac{f(u)}{u} du = A \log\left(\frac{b}{a}\right).$$

Observación importante: *Sería totalmente equivocado de nuestra parte decir que*

$$\lim_{c \to 0^+} \int_{ac}^{bc} \frac{f(u)}{u} du = \int_0^0 \frac{f(u)}{u} du = 0$$

La función

$$G(x) = \int_{ax}^{bx} \frac{f(u)}{u} du$$

esta vez NO representa una función continua para $x = 0$ (ni siquiera está definida ahí). Recuerden que el integrando podría no estar acotado cuando nos acercamos al 0, de manera que en el fondo seguimos trabajando con una integral impropia.

Para dar la prueba formal primero hagamos un pequeño truco técnico con el logaritmo. Dado $c > 0$,

$$\int_{ac}^{bc} \frac{1}{u} du = \log(bc) - \log(ac) = \log\left(\frac{bc}{ac}\right) = \log\left(\frac{b}{a}\right)$$

Esto es clave porque el límite que queremos probar es equivalente a mostrar que

$$\lim_{c \to 0^+} \left[\int_{ac}^{bc} \frac{f(u)}{u} du - A \log\left(\frac{b}{a}\right)\right] = 0$$

y este último ahora sería equivalente a

$$\lim_{c \to 0^+} \left[\int_{ac}^{bc} \frac{f(u)}{u} du - A \int_{ac}^{bc} \frac{1}{u} du\right] = 0$$

Es decir, lo que realmente queremos demostrar es:

$$\lim_{c\to 0^+}\int_{ac}^{bc}\frac{f(u)-A}{u}du=0$$

Para esta parte vamos a usar la única hipótesis que aún no usamos, $\lim_{x\to 0^+} f(x)=A$. Vamos a hacer la prueba que queremos por definición del límite.

Sea $\varepsilon>0$. Como $\lim_{x\to 0^+} f(x)=A$, entonces existe $\delta>0$ tal que si $0<x<\delta$, entonces

$$|f(x)-A|<\frac{\varepsilon}{M}$$

donde $M>0$ es una constante "por definir". Necesitamos pedir una M adecuada para que nuestras cuentas queden elegantes.

Bien, vamos a tomar $0<c<\frac{\delta}{b}$ y mostraremos que para esta c se cumple

$$\left|\int_{ac}^{bc}\frac{f(u)-A}{u}du\right|<\varepsilon$$

concluyendo así el límite que buscamos.

Si $0<c<\frac{\delta}{b}$, esto significa que $0<ac<bc<\delta$. De tal manera que para toda $u\in[ac,bc]$, se cumple que $0<u<\delta$ y con ello podemos concluir que

$$|f(u)-A|<\frac{\varepsilon}{M}$$

Dividimos la desigualdad entre u:

$$\frac{|f(u)-A|}{u}<\frac{\varepsilon}{uM}$$

La división es válida y respeta la desigualdad porque $u>0$.

El hecho de que la desigualdad se valga para toda $u\in[ca,cb]$, nos permite integrar de ambos lados y la desigualdad se mantendrá:

$$\int_{ac}^{bc}\frac{|f(u)-A|}{u}du<\int_{ac}^{bc}\frac{\varepsilon}{uM}du=\frac{\varepsilon}{M}\int_{ac}^{bc}\frac{1}{u}du=\frac{\varepsilon}{M}\log\left(\frac{b}{a}\right)$$

La expresión del lado derecho ya nos sugiere quién tiene que ser M para que las cuentas queden precisas. Definimos

$$M=\frac{1}{\log\left(\frac{b}{a}\right)}$$

Noten que esta M es positiva, ya que $1<\frac{b}{a}$ y por tanto $0<\log\left(\frac{b}{a}\right)$.

Finalmente, recordemos que en general se cumple la siguiente desigualdad:

$$\left|\int_a^b f\right|\leq\int_a^b|f|$$

Aplicándola en nuestro problema concluimos que

$$\left|\int_{ac}^{bc}\frac{f(u)-A}{u}du\right|\leq\int_{ac}^{bc}\frac{|f(u)-A|}{u}du<\frac{\varepsilon}{M}\log\left(\frac{b}{a}\right)=\varepsilon$$

Y con esto queda demostrado el límite:

$$\lim_{c\to 0^+}\int_c^{\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=A\log\left(\frac{b}{a}\right).$$

Y por lo tanto

$$\int_0^{\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = A \log\left(\frac{b}{a}\right)$$

Lo que concluye la prueba. ■

Ya con la Proposición 2 a nuestra disposición podemos resolver el Problema 1.

Queremos calcular la integral

$$\int_0^{\infty} \frac{2\arctan(\pi x) - \arctan(2\pi x)}{x^2} dx$$

Lo que tenemos que hacer es adaptar el integrando a algo que tenga la forma de la Proposición 2

$$\frac{f(ax) - f(bx)}{x}$$

De acuerdo con este cociente intuimos que en nuestro problema debemos definir $a = \pi$ y $b = 2\pi$. Además

$$f(x) = \frac{\arctan(x)}{x}$$

Para usar la Proposición 2 debemos probar dos cosas: que el $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ existe y que la integral $\int_c^{\infty} \frac{f(x)}{x} dx$ converge para toda $c > 0$.

El límite es sencillo usando L´Hopital (noten primero que el límite tiene la forma $\frac{0}{0}$):

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\arctan(x)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{1 + x^2} = 1$$

Por lo tanto, en el lenguaje de la Proposición 2, tenemos que $A = 1$.

Para probar que la integral $\int_c^{\infty} \frac{f(x)}{x} dx$ converge vamos a utilizar el ejercicio 35 de la Tarea 2:

Sean $f, g : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ funciones integrables en cada intervalo $[a, b]$. Suponga que para toda $x \geq a$ se tiene que $0 \leq f(x)$ y $0 < g(x)$. Demuestre que si $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$, con $L \neq 0$, entonces $\int_a^{\infty} g$ converge si y sólo si $\int_a^{\infty} f$ converge.

En nuestro caso proponemos $g(x) = \frac{1}{x^2}$. Entonces debemos calcular el siguiente límite

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\frac{f(x)}{x}}{g(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{\arctan(x)}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to \infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$$

Dado que $\int_c^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$ converge para $c > 0$, concluimos que $\int_c^{\infty} \frac{f(x)}{x} dx$ también converge. Y con esto ahora sí tenemos derecho a aplicar la Proposición 2.

La igualdad

$$\int_0^{\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = A \log\left(\frac{b}{a}\right)$$

según nuestros datos, se transforma en

$$\int_0^{\infty} \frac{\frac{\arctan(\pi x)}{\pi x} - \frac{\arctan(2\pi x)}{2\pi x}}{x} dx = \log\left(\frac{2\pi}{\pi}\right) = \log(2)$$

Simplificamos el integrando:

$$\frac{\frac{\arctan(\pi x)}{\pi x} - \frac{\arctan(2\pi x)}{2\pi x}}{x} = \frac{2\arctan(\pi x) - \arctan(2\pi x)}{2\pi x^2}$$

Y por lo tanto
$$\int_0^{\infty} \frac{2\arctan(\pi x) - \arctan(2\pi x)}{x^2} dx = 2\pi \log(2).$$
El ejemplo es bonito, pero por supuesto lo verdaderamente trascendente es la Proposición 2.

Vamos con el segundo problema.

Problema 3 *Calcular*
$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} dx.$$

Esta es una integral impropia que a simple vista parece ser del segundo tipo. Es decir, además de tener un intervalo no acotado, da la impresión de que la función podría tener un problema en el 0. Sin embargo, no es el caso. Sabemos que
$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1$$
Lo que nos dice que en realidad el integrando sí está acotado cuando nos acercamos al 0 y por lo tanto no tiene ningún problema en su límite inferior de integración. Esto quiere decir que la integral es impropia del primer tipo.

Sólo para reforzar el argumento anterior, consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$
La función f es continua y además
$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} dx = \int_0^{\infty} f(x)\, dx$$
Y por tanto, en efecto tenemos una integral impropia del primer tipo.

Antes de comenzar con los cálculos, lo que vamos a hacer es probar que la integral solicitada es convergente. Sabiendo que la integral no tiene problema en 0, podemos tener certeza que la integral
$$\int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} dx$$
está bien definida. Hacemos esta observación porque ahora vamos a probar que la integral $\int_{2\pi}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} dx$ es convergente y con ello toda la integral $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} dx$ será convergente.

Estamos considerando la integral en $[2\pi, \infty)$ por razones técnicas. Para probar la convergencia es conveniente alejarnos un poco del 0, al considerar al número 2π se consigue este objetivo. La elección específica del 2π es simplemente una cuestión estética (cualquier número $c > 0$ habría funcionado).

Bien, probemos entonces que $\int_{2\pi}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} dx$ converge. Para ello usaremos integración por partes para integrales impropias.

Proponemos $f'(x) = \operatorname{sen}(x)$ y $g(x) = \frac{1}{x}$. Entonces $f(x) = -\cos(x)$ y $g'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

Aplicamos la integración por partes:
$$\int_{2\pi}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} dx = -\frac{\cos(x)}{x}\bigg|_{2\pi}^{\infty} - \int_{2\pi}^{\infty} \frac{\cos(x)}{x^2} dx$$
El simplificar la expresión $-\frac{\cos(x)}{x}\Big|_{2\pi}^{\infty}$ nos da una primer evidencia del por qué necesitábamos alejarnos un poco del 0:

$$-\left.\frac{\cos(x)}{x}\right|_{2\pi}^{\infty}=\lim_{t\to\infty}\left[-\frac{\cos(t)}{t}-\left(-\frac{\cos(2\pi)}{2\pi}\right)\right]=\frac{1}{2\pi}$$

De manera que

$$\int_{2\pi}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}dx=\frac{1}{2\pi}-\int_{2\pi}^{\infty}\frac{\cos(x)}{x^2}dx$$

De acuerdo con la integración por partes, para probar que $\int_{2\pi}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}dx$ converge, basta probar que $\int_{2\pi}^{\infty}\frac{\cos(x)}{x^2}dx$ converge. Para probar esto último nos vamos a apoyar de Ejercicio 38 de la Tarea 2:

Sea $f,g:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ *una función integrable en cada intervalo* $[a,b]$. *Demuestre que si* $\int_a^{\infty}|f|$ *converge, entonces* $\int_a^{\infty}f$ *converge.*

En nuestro caso tenemos que

$$\left|\frac{\cos(x)}{x^2}\right|\leq\frac{1}{x^2}$$

Dado que la integral $\int_{2\pi}^{\infty}\frac{1}{x^2}dx$ converge, entonces la integral $\int_{2\pi}^{\infty}\left|\frac{\cos(x)}{x^2}\right|dx$ converge y en consecuencia la integral $\int_{2\pi}^{\infty}\frac{\cos(x)}{x^2}dx$ converge. (Este argumento nos da la segunda evidencia del por qué necesitábamos alejarnos un poco del 0)

Queda demostrado entonces que $\int_{2\pi}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}dx$ sí es convergente.

Ahora vamos con los cálculos.

El procedimiento que realizaremos es una demostración que se le suele atribuir a Dirichlet. A pesar de lo truculento que se puede sentir el camino, es muy valioso ver tan ilustrativa prueba porque la herramienta utilizada no se escapa para nada de lo que hemos aprendido.

Para aligerar un poco la lectura, vamos a ir desarrollando el cálculo distinguiendo cada paso importante que demos.

Paso 1: *Para cada* $n\in\mathbb{N}$, *calcular la integral*

$$\int_0^{\pi}\frac{\operatorname{sen}\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}dx$$

Para calcular esta integral vamos a echar mano de las identidades trigonométricas del seno de una suma y del seno de una diferencia:

$$\operatorname{sen}(a+b)=\operatorname{sen}(a)\cos(b)+\operatorname{sen}(b)\cos(a)$$

$$\operatorname{sen}(a-b)=\operatorname{sen}(a)\cos(b)-\operatorname{sen}(b)\cos(a)$$

Haciendo la resta de estas dos identidades obtenemos

$$\operatorname{sen}(a+b)-\operatorname{sen}(a-b)=2\operatorname{sen}(b)\cos(a)$$

Si a estas fórmulas les aplicamos los valores particulares $a=kx$ y $b=\frac{x}{2}$, donde $k\in\mathbb{N}$, entonces

$$\operatorname{sen}\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right)-\operatorname{sen}\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)x\right)=2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\cos(kx)$$

Ahora sumemos desde $k=1$ hasta $k=n$:

$$\sum_{k=1}^{n}2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\cos(kx)=\sum_{k=1}^{n}\left[\operatorname{sen}\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right)-\operatorname{sen}\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)x\right)\right]$$

Lo fantástico de esta suma es que la expresión del lado derecho arroja una suma telescópica:

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\operatorname{sen}\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right)-\operatorname{sen}\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)x\right)\right]=\left(\operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}x\right)-\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)\right)+\left(\operatorname{sen}\left(\frac{5}{2}x\right)-\operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}x\right)\right)$$

$$+\cdots+\left(\operatorname{sen}\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)x\right)-\operatorname{sen}\left(\left(n-\frac{3}{2}\right)x\right)\right)+\left(\operatorname{sen}\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)-\operatorname{sen}\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)x\right)\right)$$

Cancelando los términos correspondientes, únicamente sobrevive lo siguiente:

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\operatorname{sen}\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right)-\operatorname{sen}\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)x\right)\right]=\operatorname{sen}\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)-\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)$$

Y en consecuencia

$$\sum_{k=1}^{n}2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(kx\right)=\operatorname{sen}\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)-\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$$

Ahora bien, en la suma del lado izquierdo el factor $2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$ no depende del índice n, es decir, es una constante que podemos sacar y despejar:

$$\sum_{k=1}^{n}\cos\left(kx\right)=\frac{\operatorname{sen}\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}-\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}=\frac{\operatorname{sen}\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}-\frac{1}{2}$$

En general la división no está definida para cualquier x, sin embargo, no está de más convencerse de que si estamos parados específicamente en el intervalo $[0,\pi]$, entonces no estamos cometiendo ninguna infracción, ¡ni siquiera para $x=0$! (¿Por qué?)

Esto está sumamente interesante porque en el lado derecho hemos hecho aparacer el integrando con el que estamos trabajando:

$$\frac{\operatorname{sen}\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}=1+2\sum_{k=1}^{n}\cos\left(kx\right)$$

Y de este modo

$$\int_0^{\pi}\frac{\operatorname{sen}\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}dx=\int_0^{\pi}\left[1+2\sum_{k=1}^{n}\cos\left(kx\right)\right]dx$$

La integral del lado derecho ya nos es totalmente accesible

$$\int_0^{\pi}\left[1+2\sum_{k=1}^{n}\cos\left(kx\right)\right]dx=\pi+2\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\pi}\cos\left(kx\right)dx$$

$$=\pi+2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}\operatorname{sen}\left(kx\right)\Big|_0^{\pi}\right)=\pi+2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}\operatorname{sen}\left(k\pi\right)-\frac{1}{k}\operatorname{sen}\left(0\right)\right)=\pi$$

Por lo tanto hemos logrado mostrar que, para toda $n\in\mathbb{N}$

$$\int_0^{\pi}\frac{\operatorname{sen}\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}dx=\pi$$

(un resultado realmente lindo, porque no depende de n)

Paso 2: *Calcular el límite*

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^{\pi}\operatorname{sen}\left(\lambda x\right)\left[\frac{2}{x}-\frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}\right]dx$$

En principio el límite podría asustarnos, sin embargo, es en realidad una aplicación directa del Ejercicio 12 de la Tarea 3:

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1 en $[a, b]$. Demuestre que

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_a^b f(x) \operatorname{sen}(\lambda x)\, dx = 0$$

Para poderlo aplicar necesitamos proponer a nuestra f y ésta tendrá que ser de clase C^1 en $[0, \pi]$. De acuerdo con la expresión que tenemos en el límite que queremos, podemos proponer la siguiente función $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)} & x \neq 0 \\ \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

(Queda como ejercicio verificar que esta función es continua en su dominio)

Lo único que tenemos que mostrar es que esta función es de clase C^1. La derivabilidad de f en puntos $x \neq 0$ debería estar clara, de hecho

$$f'(x) = -\frac{2}{x^2} + \frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{2\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{x^2\cos\left(\frac{x}{2}\right) - 4\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2x^2\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

El problema ahora es $x = 0$ porque deberíamos probar dos cosas nada triviales. Primero que f es derivable en $x = 0$ y una vez que tengamos la derivada, comprobar que ésta es continua en $x = 0$. Esto suena a una talacha enorme, sin embargo, es posible aligerar la carga si nos apoyamos de un importante resultado (demostrado en Cálculo I).

Teorema *Sean $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y $a \in I$. Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función continua en I y derivable en $I \setminus \{a\}$. Si*

$$\lim_{x \to a} f'(x) = l, l \in \mathbb{R}$$

entonces f es derivable en $x = a$ y además $f'(a) = l$.

(Para el que no conozca este resutado, puede consultar su prueba en el Spivak, capítulo 11, pag. 203, Teorema 7)

Este teorema nos da las dos cosas que buscamos de un solo golpe. Si podemos calcular $\lim_{x \to 0} f'(x)$, digamos que vale l, entonces f será derivable en $x = 0$, pero además se estará cumpliendo la definición de continuidad de la derivada en $x = 0$, ya que

$$\lim_{x \to 0} f'(x) = l = f'(0)$$

Así que sólo tenemos que calcular un límite. Prepárense porque vamos a usar L'Hopital, ¡tres veces!

Queremos calcular

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2\cos\left(\frac{x}{2}\right) - 4\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2x^2\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Vamos a modificar ingeniosamente el límite para que nos simplifique un poco las cuentas:

$$\begin{aligned} \frac{x^2\cos\left(\frac{x}{2}\right) - 4\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2x^2\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)} &= \frac{4\left(\frac{x^2}{4}\cos\left(\frac{x}{2}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{8\frac{x^2}{4}\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2\cos\left(\frac{x}{2}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)^2\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)}\right) \end{aligned}$$

¿Cúal es la simplificación lograda? Bueno, si hacemos un cambio de variable en el límite, $u = \frac{x}{2}$, entonces nuestro límite se transforma en

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2\cos\left(\frac{x}{2}\right) - 4\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2x^2\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{2}\lim_{u \to 0} \frac{u^2\cos(u) - \operatorname{sen}^2(u)}{u^2\operatorname{sen}^2(u)}$$

Antes de lanzarnos a usar L'Hopital, todavía nos conviene hacer otro truco:

$$\lim_{u\to 0}\frac{u^2\cos(u)-\operatorname{sen}^2(u)}{u^2\operatorname{sen}^2(u)}=\lim_{u\to 0}\frac{u^2\cos(u)-\operatorname{sen}^2(u)}{u^2\operatorname{sen}^2(u)}\cdot\frac{u^2}{u^2}$$

$$=\lim_{u\to 0}\frac{u^2\cos(u)-\operatorname{sen}^2(u)}{u^4}\cdot\frac{u^2}{\operatorname{sen}^2(u)}=\lim_{u\to 0}\frac{u^2\cos(u)-\operatorname{sen}^2(u)}{u^4}$$

Naturalmente en la última igualdad nos hemos aprovechado del hecho de que

$$\lim_{u\to 0}\frac{u^2}{\operatorname{sen}^2(u)}=1$$

Ahora sí, con estas simplificaciones nos queda:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos\left(\frac{x}{2}\right)-4\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2x^2\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)}=\frac{1}{2}\lim_{u\to 0}\frac{u^2\cos(u)-\operatorname{sen}^2(u)}{u^4}$$

La cosa ya se ve más amigable, pero de todas maneras no nos vamos a escapar de usar L'Hopital tres veces.

Primer L'Hopital:

$$\lim_{u\to 0}\frac{u^2\cos(u)-\operatorname{sen}^2(u)}{u^4}=\lim_{u\to 0}\frac{2u\cos(u)-u^2\operatorname{sen}(u)-2\operatorname{sen}(u)\cos(u)}{4u^3}$$

$$=\lim_{u\to 0}\frac{2u\cos(u)-u^2\operatorname{sen}(x)-\operatorname{sen}(2u)}{4u^3}$$

Para la última igualdad hemos usado la identidad $\operatorname{sen}(2u)=2\operatorname{sen}(u)\cos(u)$. Noten que nos ha quedado algo de la forma $\frac{0}{0}$.

Segundo L'Hopital:

$$\lim_{u\to 0}\frac{2u\cos(u)-u^2\operatorname{sen}(u)-\operatorname{sen}(2u)}{4u^3}=\lim_{u\to 0}\frac{2\cos(u)-2u\operatorname{sen}(u)-2u\operatorname{sen}(u)-u^2\cos(u)-2\cos(2u)}{12u^2}$$

$$=\lim_{u\to 0}\frac{2\cos(u)-4u\operatorname{sen}(u)-u^2\cos(u)-2\cos(2u)}{12u^2}$$

Una vez más tenemos $\frac{0}{0}$ (y la situación no parece mejorar)

Tercer L'Hopital:

$$\lim_{u\to 0}\frac{2\cos(u)-4u\operatorname{sen}(u)-u^2\cos(u)-2\cos(2u)}{24u}$$

$$=\lim_{u\to 0}\frac{-2\operatorname{sen}(u)-4\operatorname{sen}(u)-4u\cos(u)-2u\cos(u)+u^2\operatorname{sen}(u)+4\operatorname{sen}(2u)}{24u}$$

$$=\lim_{u\to 0}\frac{-6\operatorname{sen}(u)-6u\cos(u)+u^2\operatorname{sen}(u)+4\operatorname{sen}(2u)}{24u}$$

Increíblemente aún tenemos algo de la forma $\frac{0}{0}$. Pero usar L'Hopital nuevamente ya es un exceso:

$$\lim_{u\to 0}\frac{-6\operatorname{sen}(u)-6u\cos(u)+u^2\operatorname{sen}(u)+4\operatorname{sen}(2u)}{24u}$$

$$=\frac{1}{24}\lim_{u\to 0}\left[-6\frac{\operatorname{sen}(u)}{u}-6\cos(u)+u\operatorname{sen}(u)+8\frac{\operatorname{sen}(2u)}{2u}\right]=\frac{1}{24}(-6-6+8)=-\frac{1}{6}$$

Y por fin logramos

$$\lim_{u\to 0}\frac{u^2\cos(u)-\operatorname{sen}^2(u)}{u^4}=-\frac{1}{6}$$

De donde

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos\left(\frac{x}{2}\right)-4\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2x^2\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)}=\frac{1}{2}\lim_{u\to 0}\frac{u^2\cos(u)-\operatorname{sen}^2(u)}{u^4}=-\frac{1}{12}$$

Con esto f es en efecto de clase C^1 en $[0,\pi]$. Y con ello concluimos finalmente que

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^\pi \operatorname{sen}(\lambda x)\left[\frac{2}{x}-\frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}\right]dx=\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^\pi f(x)\operatorname{sen}(\lambda x)\,dx=0$$

Paso 3: *¿De qué nos sirve el Paso 2?*

Saber que

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^\pi \operatorname{sen}(\lambda x)\left[\frac{2}{x}-\frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}\right]dx=0$$

nos dice en particular que el límite existe. Aunque parece que estamos diciendo una trivialidad, lo importante de saber que el límite existe es que nos da la oportunidad de movernos hacia ∞ de la manera que más nos convenga, concretamente podemos hacer lo siguiente:

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^\pi \operatorname{sen}(\lambda x)\left[\frac{2}{x}-\frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}\right]dx=\lim_{n\to\infty}\int_0^\pi \operatorname{sen}\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)\left[\frac{2}{x}-\frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}\right]dx$$

Y con ello concluir que

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\pi \operatorname{sen}\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)\left[\frac{2}{x}-\frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}\right]dx=0$$

Ahora bien, en el Paso 1 logramos mostrar que sin importar la $n\in\mathbb{N}$, se cumple

$$\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}dx=\pi$$

De modo que podemos tomar límite de ambos lados:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}dx=\pi$$

Conocer que el límite anterior existe nos permite hacer un despeje en la igualdad

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\pi \operatorname{sen}\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)\left[\frac{2}{x}-\frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}\right]dx=0$$

y concluir que

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\pi \frac{2\operatorname{sen}\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{x}dx=\lim_{n\to\infty}\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}dx=\pi$$

O equivalentemente

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{x}dx=\frac{\pi}{2}$$

Paso 4: *Concluir.*

Con lo logrado en el Paso 3, vamos a pararnos en la integral $\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{x}dx$ y realizaremos el cambio de variable

$$u=\left(n+\frac{1}{2}\right)x$$

Con este cambio generamos las siguientes relaciones:

$$x = \frac{1}{n+\frac{1}{2}} u \wedge dx = \frac{1}{n+\frac{1}{2}} du$$

$$x = 0 \Rightarrow u = 0$$

$$x = \pi \Rightarrow u = \left(n + \tfrac{1}{2}\right) \pi$$

Haciendo el cambio de variable:

$$\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen}\left(\left(n+\frac{1}{2}\right) x\right)}{x} dx = \int_0^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi} \frac{\operatorname{sen}(u)}{\frac{1}{n+\frac{1}{2}} u} \left(\frac{1}{n+\frac{1}{2}}\right) du = \int_0^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi} \frac{\operatorname{sen}(u)}{u} du$$

De acuerdo al Paso 3 tenemos entonces que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi} \frac{\operatorname{sen}(u)}{u} du = \frac{\pi}{2}$$

Recordemos que lo primero que hicimos en este ejercicio fue demostrar que la integral $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} dx$ es convergente. Es decir, existe el límite

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^{t} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} dx$$

Y por lo tanto, así como lo hicimos en el Paso 3, podemos acercanos a ∞ como queramos. Por lo que

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} dx = \lim_{t\to\infty} \int_0^{t} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

Y así hemos conseguido probar que

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

Un resultado verdaderamente excepcional.

Como dato cultural podemos comentar que existen otros caminos para obtener este resultado. Caminos más rápidos pero que utilizan herramienta muy elevada para nosotros. Es posible calcularla usando "transformadas de Laplace", es posible calcularla aplicando el famoso "Teorema de Fubini" (se estudia en Cálculo IV) y también es posible calcularla usando técnicas de Variable Compleja. Lo que es muy agradable es que, aunque se puede resolver utilizando verdaderos cañones de la matemática, de todas maneras nuestra humilde herramienta de Cálculo II nos fue suficiente.

Por último vamos al tercer problema.

Problema 4 *Calcular*

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

Si la solución del segundo problema fue truculenta, la de este tercer problema, simplemente no tiene precedentes. En el camino descubriremos algunos resultados muy interesantes por sí mismos.

El tema pasado probamos en clase que la integral $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$ es convergente. Así que tiene total sentido querer averiguar su valor.

A grandes rasgos lo que vamos a hacer es atrapar a la integral $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$ entre dos sucesiones que converjan al mismo límite. Es decir, encontraremos dos sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ tales que

$$a_n \leq \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \leq b_n$$

y que además satisfagan que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$$

Por supuesto, encontraremos el valor explícito de este límite y con ello el valor de la integral deseada.

Así como lo hicimos en el segundo problema, será adecuado ir numerando los pasos importantes que demos.

Allá vamos:

Paso 1. *Demostrar que para toda $n \in \mathbb{N}$, se cumple la desigualdad*

$$\sqrt{n}\int_0^1 \left(1-x^2\right)^n dx \leq \int_0^\infty e^{-x^2} dx$$

Lo primero que vamos a demostrar es que para toda $x \in \mathbb{R}$, se cumple

$$1 - x^2 \leq e^{-x^2}$$

Veamos. Sabemos que para $t \geq 0$ se cumple

$$1 \leq e^t$$

o equivalentemente

$$e^{-t} \leq 1$$

Si integramos en el intervalo $[0, y]$, entonces

$$\int_0^y e^{-t} dt \leq \int_0^y 1 dt$$

Calculando las integrales:

$$1 - e^{-y} = \int_0^y e^{-t} dt \leq \int_0^y 1 dt = y$$

Es decir, para $y \geq 0$ se cumple que

$$1 - y \leq e^{-y}$$

Dado que $x^2 \geq 0$ para toda $x \in \mathbb{R}$, entonces podemos sustituir y por x^2 y obtener así

$$1 - x^2 \leq e^{-x^2}$$

Ahora bien, si nos restringimos al intervalo $[0, 1]$, entonces $1 - x^2 \geq 0$. De modo que si en la desigualdad $1 - x^2 \leq e^{-x^2}$ elevamos a la n de ambos lados, la desigualdad se respeta:

$$\left(1 - x^2\right)^n \leq e^{-nx^2}$$

Como lo anterior es válido para toda $x \in [0, 1]$, se antoja integrar en ese intervalo:

$$\int_0^1 \left(1-x^2\right)^n dx \leq \int_0^1 e^{-nx^2} dx$$

La desigualdad ya va tomando forma respecto a lo que se nos pide. La integral del lado derecho es en la que nos debemos concentrar. Vamos a transformarla utilizando un cambio de variable,

$$u = \sqrt{n}x$$

Con este cambio tenemos las siguientes relaciones

$$u^2 = nx^2 \wedge dx = \frac{1}{\sqrt{n}} du$$

$$x = 0 \Rightarrow u = 0$$

$$x = 1 \Rightarrow u = \sqrt{n}$$

Realizando las sustituciones en la integral:

$$\int_0^1 e^{-nx^2} dx = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\sqrt{n}} e^{-u^2} du$$

Con esta última igualdad podemos concluir que

$$\int_0^1 \left(1 - x^2\right)^n dx \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\sqrt{n}} e^{-u^2} du$$

o equivalentemente

$$\sqrt{n} \int_0^1 \left(1 - x^2\right)^n dx \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-u^2} du$$

Ya casi lo logramos. Lo último que hay que apreciar es que gracias a que el integrando e^{-u^2} es positivo, entonces necesariamente ocurre que

$$\int_0^{\infty} e^{-u^2} du = \int_0^{\sqrt{n}} e^{-u^2} du + \int_{\sqrt{n}}^{\infty} e^{-u^2} du \geq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-u^2} du$$

ya que $\int_{\sqrt{n}}^{\infty} e^{-u^2} du \geq 0$.

De este modo hemos demostrado que

$$\sqrt{n} \int_0^1 \left(1 - x^2\right)^n dx \leq \int_0^{\infty} e^{-u^2} du$$

Aquí podríamos poner una objeción en el lenguaje. En la desigualdad que se nos pedía aparece $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$ y no $\int_0^{\infty} e^{-u^2} du$. Sin embargo, no deberíamos tener problema en convencernos de que estas dos integrales son exactamente la misma. Recuerden, las integrales definidas son números. Así que como números que son, por supuesto que son iguales

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^{\infty} e^{-u^2} du$$

De esta manera podemos escribir nuestra conclusión como

$$\sqrt{n} \int_0^1 \left(1 - x^2\right)^n dx \leq \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$$

y esto era lo que queríamos demostrar.

Paso 2. *Demostrar que para toda $n \in \mathbb{N}$, se cumple la desigualdad*

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \leq \sqrt{n} \int_0^{\infty} \frac{1}{\left(1 + x^2\right)^n} dx$$

Esta desigualdad sigue las mismas líneas que el Paso 1. Primero demostraremos que para toda $x \in \mathbb{R}$, se cumple

$$e^{-x^2} \leq \frac{1}{1 + x^2}$$

Usando nuevamente que para $t \geq 0$ se cumple

$$1 \leq e^t$$

podemos integrar en el intervalo $[0, y]$. Entonces

$$\int_0^y 1 dt \leq \int_0^y e^t dt$$

Calculando las integrales:

$$y = \int_0^y 1dt \leq \int_0^y e^t dt = e^y - 1$$

Es decir, para $y \geq 0$ se cumple que

$$1 + y \leq e^y$$

Y por lo tanto

$$e^{-y} \leq \frac{1}{1+y}$$

Dado que $x^2 \geq 0$ para toda $x \in \mathbb{R}$, entonces podemos sustituir y por x^2 y obtener así

$$e^{-x^2} \leq \frac{1}{1+x^2}$$

Elevamos a la n de ambos lados:

$$e^{-nx^2} \leq \frac{1}{(1+x^2)^n}$$

Ahora integramos en el intervalo $[0, \infty)$

$$\int_0^\infty e^{-nx^2} dx \leq \int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)^n} dx$$

Nuevamente ya casi llegamos a la desigualdad deseada. Ahora debemos manipular la integral del lado izquierdo. Vamos a utilizar el mismo cambio de variable que en el Paso 1,

$$u = \sqrt{n}x$$

Con este cambio tenemos las siguientes relaciones

$$u^2 = nx^2 \wedge dx = \tfrac{1}{\sqrt{n}} du$$

$$x = 0 \Rightarrow u = 0$$

$$x \to \infty \Rightarrow u \to \infty$$

Realizando las sustituciones nos queda

$$\int_0^\infty e^{-nx^2} dx = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^\infty e^{-u^2} du$$

Y en consecuencia

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^\infty e^{-u^2} du \leq \int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)^n} dx$$

es decir,

$$\int_0^\infty e^{-u^2} du \leq \sqrt{n} \int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)^n} dx$$

Tenemos el mismo fenómeno de lenguaje que en el Paso 1, así que simplemente podemos escribir

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx \leq \sqrt{n} \int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)^n} dx.$$

Paso 3: *Resumen de lo logrado al momento.*

Juntando la información que nos dan los Pasos 1 y 2, hemos logrado probar que para toda $n \in \mathbb{N}$

$$\sqrt{n} \int_0^1 \left(1 - x^2\right)^n dx \leq \int_0^\infty e^{-x^2} dx \leq \sqrt{n} \int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)^n} dx$$

De acuerdo con la estrategia general que describimos al inicio, las sucesiones

$$a_n = \sqrt{n}\int_0^1 \left(1-x^2\right)^n dx \qquad \text{y} \qquad b_n = \sqrt{n}\int_0^\infty \frac{1}{\left(1+x^2\right)^n} dx$$

son las buscadas. De manera que nuestra siguiente tarea es hallar la forma de calcular los límites de ambas sucesiones y verificar que coinciden.

La idea de encontrar

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\int_0^1 \left(1-x^2\right)^n dx$$

quizá es intimidante, sin embargo, es bastante más lindo de lo que parece (opinión personal).

Paso 4. *Hallar una fórmula de reducción para la integral*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^n(x)\, dx.$$

En la clase del lunes 23 probamos una fórmula de reducción para la integral indefinida de las potencias del seno:

$$\int \operatorname{sen}^n(x)\, dx = -\frac{1}{n}\operatorname{sen}^{n-1}(x)\cos(x) + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2}(x)\, dx$$

Si la aprovechamos para calcular ahora la integral definida obtenemos:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^n(x)\, dx = -\frac{1}{n}\operatorname{sen}^{n-1}(x)\cos(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{n-2}(x)\, dx$$

En donde

$$-\frac{1}{n}\operatorname{sen}^{n-1}(x)\cos(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(-\frac{1}{n}\operatorname{sen}^{n-1}\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) - \left(-\frac{1}{n}\operatorname{sen}^{n-1}(0)\cos(0)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) = 0$$

Y en conclusión hemos probado que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^n(x)\, dx = \frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{n-2}(x)\, dx$$

Paso 5. *Calcular, para cada $n \in \mathbb{N}$,*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n+1}(x)\, dx$$

La estrategia para calcular lo que se nos pide, es una aplicación sucesiva de la fórmula que hemos obtenido en el Paso 4. Hagamos una deducción del valor al que queremos llegar realizando unas cuantas aplicaciones de la fórmula de reducción:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n+1}(x)\, dx = \frac{(2n+1)-1}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{(2n+1)-2}(x)\, dx = \frac{2n}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n-1}(x)\, dx$$

Ahora aplicamos la fórmula a la integral del lado derecho

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n-1}(x)\, dx = \frac{(2n-1)-1}{2n-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{(2n-1)-2}(x)\, dx = \frac{2n-2}{2n-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n-3}(x)\, dx$$

Y por lo tanto

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n+1}(x)\, dx = \frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n-3}(x)\, dx$$

Esto ya deja ver un patrón, pero para reforzarlo hagamos un paso más con la nueva integral del lado derecho

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n-3}(x)\,dx = \frac{(2n-3)-1}{2n-3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{(2n-3)-2}(x)\,dx = \frac{2n-4}{2n-3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n-5}(x)\,dx$$

De donde

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n+1}(x)\,dx = \frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n-4}{2n-3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n-5}(x)\,dx$$

Bien, todo indica que en cada paso que demos, aparecerá un nuevo cociente junto con una reducción en dos grados a la potencia del seno. Ahora, los productos que se van formando tienen una forma muy concreta, todos los numeradores son números pares que van bajando de dos en dos y todos los denominadores son impares que también van bajando de dos en dos.

Si siguiéramos este proceso hasta agotar el exponente del seno, deberíamos llegar al siguiente resultado:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n+1}(x)\,dx = \frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n-4}{2n-3}\cdot\dots\cdot\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}(x)\,dx$$

Y como

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}(x)\,dx = -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos(0) = 1$$

entonces podemos conjeturar con mucha seguridad que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n+1}(x)\,dx = \frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n-4}{2n-3}\cdot\dots\cdot\frac{2}{3}$$

Escribamos esto en orden creciente para mayor elegancia:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n+1}(x)\,dx = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\dots\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}$$

El resultado es correcto, sin embargo, una prueba formal requiere inducción. Vamos a dejar este paso como ejercicio para no cargar más el ya de por sí largo camino que llevamos.

Paso 6. *Calcular, para cada $n \in \mathbb{N}$,*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n}(x)\,dx$$

Este paso es análogo al Paso 5, pero naturalmente, el resultado final es distinto. Esta vez a la hora de realizar las sucesivas aplicaciones de la fórmula de reducción y agotar el exponente $2n$, llegaremos a la integral final de

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{0}(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1dx = \frac{\pi}{2}$$

Hagamos unos pasos para deducir el resultado.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n}(x)\,dx = \frac{2n-1}{2n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n-2}(x)\,dx$$

Seguimos con la nueva integral:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n-2}(x)\,dx = \frac{(2n-2)-1}{2n-2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{(2n-2)-2}(x)\,dx = \frac{2n-3}{2n-2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n-4}(x)\,dx$$

Y entonces

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n}(x)\,dx = \frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n-4}(x)\,dx$$

Un paso más:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n-4}(x)\,dx = \frac{(2n-4)-1}{2n-4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{(2n-4)-2}(x)\,dx = \frac{2n-5}{2n-4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n-6}(x)\,dx$$

Por lo tanto

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n}(x)\,dx = \frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdot\frac{2n-5}{2n-4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n-6}(x)\,dx$$

Con estos datos podemos lanzar la conjetura

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n}(x)\,dx = \frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdot\frac{2n-5}{2n-4}\cdot\dots\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{0}(x)\,dx$$

Es decir,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n}(x)\,dx = \frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdot\frac{2n-5}{2n-4}\cdot\dots\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

Escrito de manera creciente en los factores:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n}(x)\,dx = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\dots\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdot\frac{2n-1}{2n}$$

Nuevamente una prueba formal de este resultado es por inducción, misma que también dejaremos como ejercicio.

Paso 7. *Resumen al momento.*

Los Pasos 4 y 5 nos han arrojado dos fórmulas interesantísimas

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n+1}(x)\,dx = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\dots\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n}(x)\,dx = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\dots\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdot\frac{2n-1}{2n}$$

Algo igualmente interesante se genera cuando realizamos el cociente de estas identidades:

$$\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n}(x)\,dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n+1}(x)\,dx} = \frac{\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\dots\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdot\frac{2n-1}{2n}}{\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\dots\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}}$$

Simplificando adecuadamente el lado derecho obtenemos

$$\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n}(x)\,dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n+1}(x)\,dx} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\dots\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdot\frac{2n-1}{2n}\right)\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{6}\cdot\dots\cdot\frac{2n-1}{2n-2}\cdot\frac{2n+1}{2n}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{3^2\cdot 5^2\cdot 7^2\cdot\dots\cdot(2n-3)^2\cdot(2n-1)^2}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot\dots\cdot(2n-2)^2\cdot(2n)^2}\cdot(2n+1)$$

Por comodidad llamemos

$$S_n = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n}(x)\,dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n+1}(x)\,dx}$$

Entonces tenemos la igualdad

$$S_n = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{3^2\cdot 5^2\cdot 7^2\cdot\dots\cdot(2n-3)^2\cdot(2n-1)^2}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot\dots\cdot(2n-2)^2\cdot(2n)^2}\cdot(2n+1)$$

Si despejamos $\frac{\pi}{2}$ obtenemos la curiosa fórmula

$$\frac{\pi}{2} = \frac{S_n}{2n+1} \cdot \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot \dots \cdot (2n-2)^2 \cdot (2n)^2}{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot \dots \cdot (2n-3)^2 \cdot (2n-1)^2}$$

Aligeremos todavía más la notación y definamos

$$P_n = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n-2) \cdot (2n)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n-3) \cdot (2n-1)}$$

Ahora notemos que con esta notación nos queda

$$\frac{\pi}{2} = S_n P_n^2$$

y la igualdad es válida para toda $n \in \mathbb{N}$.

Para nuestros propósitos, estamos interesados en calcular de manera explícita los límites de las sucesiones $\{S_n\}$ y $\{P_n\}$. Esto lo haremos en los siguientes pasos.

Paso 8. *Calcular*

$$\lim_{n\to\infty} S_n.$$

Recordemos que definimos

$$S_n = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n}(x)\,dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n+1}(x)\,dx}$$

Vamos a aplicar la Ley del Sandwich para calcular el límite de S_n.

Para $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ sabemos que $0 \le \operatorname{sen}(x) \le 1$. Lo que nos permite desprender las siguientes desigualdades

$$\operatorname{sen}^{2n+1}(x) \le \operatorname{sen}^{2n}(x) \le \operatorname{sen}^{2n-1}(x)$$

Si integramos en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, tenemos

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n+1}(x)\,dx \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n}(x)\,dx \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n+1}(x)\,dx$$

Dado que estas integrales son estrictamente positivas, entonces

$$1 \le \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n}(x)\,dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n+1}(x)\,dx} \le \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n-1}(x)\,dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n+1}(x)\,dx}$$

Es decir,

$$1 \le S_n \le \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n-1}(x)\,dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n+1}(x)\,dx}$$

Ahora bien, por el Paso 4, sabemos que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n+1}(x)\,dx = \frac{2n}{2n-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n-1}(x)\,dx$$

De donde

$$\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n-1}(x)\,dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n+1}(x)\,dx} = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n-1}(x)\,dx}{\frac{2n}{2n-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n-1}(x)\,dx} = \frac{2n-1}{2n}$$

Por lo tanto hemos probado que
$$1 \leq S_n \leq \frac{2n-1}{2n}$$
Si tomamos límite en la desigualdad, se genera el Sandwich buscado:
$$1 \leq \lim_{n\to\infty} S_n \leq \lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{2n} = 1$$
Y en consecuencia
$$\lim_{n\to\infty} S_n = 1.$$

Paso 9. *Calcular*
$$\lim_{n\to\infty} P_n$$

Este límite es más sencillo. Simplemente nos tenemos que aprovechar de la identidad lograda en el Paso 7.
$$\frac{\pi}{2} = S_n P_n^2$$
Despejando P_n y tomando límite se sigue que
$$P_n = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{S_n}}$$
y además
$$\lim_{n\to\infty} P_n = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{S_n}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}$$
Por lo tanto
$$\lim_{n\to\infty} P_n = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}.$$
Como dato cultural, la igualdad
$$\lim_{n\to\infty} P_n = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}$$
es equivalente a
$$\lim_{n\to\infty} P_n^2 = \frac{\pi}{2}$$
y este límite muchas veces es escrito en forma de un "producto infinito" sustituyendo el valor explícito de P_n
$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \dots \cdot \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} \cdot \dots$$
Esta fórmula es conocida como "El producto de Wallis" en honor a su descubridor John Wallis (1655).

Paso 10. *Sea*
$$B_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n-2) \cdot (2n)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n-3) \cdot (2n-1)}$$
Calcular
$$\lim_{n\to\infty} B_n$$

La sucesión B_n puede reescribirse en función de la sucesión P_n. Recordemos que la sucesión P_n está dada por
$$P_n = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n-2) \cdot (2n)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n-3) \cdot (2n-1)}$$
La segunda fracción es compartida con la sucesión B_n, de manera que si hacemos el despeje
$$\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n-2) \cdot (2n)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n-3) \cdot (2n-1)} = P_n \sqrt{2n+1}$$

podemos concluir que

$$B_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot (2n-2) \cdot (2n)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \cdots \cdot (2n-3) \cdot (2n-1)} = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot P_n \sqrt{2n+1}$$

Y por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} B_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot P_n \sqrt{2n+1} = \lim_{n\to\infty} P_n \sqrt{2 + \frac{1}{n}} = \sqrt{2}\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\pi}$$

Es decir,

$$\lim_{n\to\infty} B_n = \sqrt{\pi}$$

¿Qué tienen que ver todos estos límites que hemos calculado con nuestro problema? Aunque parece que vamos sin rumbo, en realidad ya casi acabamos. No olvidemos que lo que nos interesa es calcular

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \int_0^1 \left(1-x^2\right)^n dx \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \int_0^\infty \frac{1}{\left(1+x^2\right)^n} dx$$

La parte sorprendente es que estos límites están totalmente relacionados con lo que hemos logrado desde el Paso 5 hasta el Paso 10.

Paso 11. *Calcular*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \int_0^1 \left(1-x^2\right)^n dx$$

Lo primero que vamos a hacer es un cambio de variable en la integral. Este cambio nos va a llevar derechito al paso 5.

En la clase del lunes 23 remarcamos firmemente que en la presencia de la expresión $1-x^2$, si se puede aplicar una sustitución con la función seno, también es posible aplicar una sustitución con la función coseno. Y en ocasiones es preferible usar el coseno. Pues bueno, estamos en la presencia de un nuevo ejemplo de ello.

Hacemos

$$x = \cos(u)$$

Entonces

$$dx = -\operatorname{sen}(u)\, du$$

$$x = 0 \Rightarrow u = \arccos(0) = \tfrac{\pi}{2}$$

$$x = 1 \Rightarrow u = \arccos(1) = 0$$

De donde

$$\int_0^1 \left(1-x^2\right)^n dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \left(1-\cos^2(u)\right)^n (-\operatorname{sen}(u))\, du$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\operatorname{sen}^2(u)\right)^n \operatorname{sen}(u)\, du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n+1}(x)\, dx$$

Y la última integral es precisamente la que calculamos en el Paso 5. Así que podemos concluir que

$$\int_0^1 \left(1-x^2\right)^n dx = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \cdots \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1}$$

Ahora nos vamos a apoyar de la sucesión B_n que definimos en el Paso 10

$$B_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot (2n-2) \cdot (2n)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \cdots \cdot (2n-3) \cdot (2n-1)}$$

De la definición de B_n se desprende que

$$\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n-2) \cdot (2n)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n-3) \cdot (2n-1)} = \sqrt{n} B_n$$

y por lo tanto

$$\int_0^1 \left(1 - x^2\right)^n dx = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \dots \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} = \frac{\sqrt{n}}{2n+1} B_n$$

Y por fin podemos calcular el límite deseado usando lo obtenido en el Paso 10

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt{n} \int_0^1 \left(1 - x^2\right)^n dx = \lim_{n \to \infty} \frac{n}{2n+1} B_n = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$$

Hemos demostrado así que

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt{n} \int_0^1 \left(1 - x^2\right)^n dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Paso 12. *Calcular*

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt{n} \int_0^\infty \frac{1}{(1 + x^2)^n} dx$$

Aquí también haremos un cambio de variable. Esta vez transformaremos la integral en la que ya calculamos en el Paso 6.

Contrario a lo que nos dice la intuición de usar a la tangente, vamos a definir:

$$x = \cot(u)$$

Recuerden que para la cotangente también hay una identidad trigonométrica importante que sirve para trabajar cuando tenemos expresiones del tipo $1 + x^2$:

$$1 + \cot^2(u) = \csc^2(u)$$

Con el cambio propuesto se dan las siguientes relaciones

$$dx = -\csc^2(u)\, du$$

$$x = 0 \Rightarrow u = \operatorname{arccot}(0) = \tfrac{\pi}{2}$$

$$x \to \infty \Rightarrow u = \lim_{x \to \infty} \operatorname{arccot}(x) = 0$$

Realizando las sustituciones:

$$\int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)^n} dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{1}{\left(1 + \cot^2(u)\right)^n} \left(-\csc^2(u)\right) du$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\left(\csc^2(u)\right)^n} \csc^2(u)\, du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\csc^{2n-2}(u)} du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n-2}(u)\, du$$

En el Paso 6 logramos calcular

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n}(x)\, dx = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \frac{2n-1}{2n}$$

De manera que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n-2}(x)\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2(n-1)}(x)\, dx = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2(n-1)-3}{2(n-1)-2} \cdot \frac{2(n-1)-1}{2(n-1)}$$

Es decir,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n-2}(x)\,dx = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\dots\cdot\frac{2n-3}{2n-2}$$

y con esto

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n}dx = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\dots\cdot\frac{2n-3}{2n-2}$$

Otra vez vamos a apoyarnos de la sucesión B_n y tratar de escribir la igualdad anterior en términos de B_n.

Como

$$B_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\dots\cdot(2n-2)\cdot(2n)}{3\cdot 5\cdot 7\cdot\dots\cdot(2n-3)\cdot(2n-1)}$$

entonces

$$\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\dots\cdot(2n-2)}{3\cdot 5\cdot 7\cdot\dots\cdot(2n-3)} = \sqrt{n}\frac{2n-2}{2n}B_n$$

Tomando recíprocos en esta igualdad:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\dots\cdot\frac{2n-3}{2n-2} = \frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{2n}{2n-2}\cdot\frac{1}{B_n}$$

Sustituyendo en el valor de la integral:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n}dx = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{2n}{2n-2}\cdot\frac{1}{B_n}$$

y en consecuencia

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n}dx = \lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{2n}{2n-2}\cdot\frac{1}{B_n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2}\cdot\frac{2n}{2n-2}\cdot\frac{1}{B_n} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

y este es el mismo valor que logramos en el Paso 11.

Paso 13. *Concluir.*

Por el Paso 3 sabemos que, para toda $n \in \mathbb{N}$,

$$\sqrt{n}\int_0^1 \left(1-x^2\right)^n dx \le \int_0^{\infty} e^{-x^2}dx \le \sqrt{n}\int_0^{\infty}\frac{1}{(1+x^2)^n}dx$$

Tomando límites y usando los Pasos 11 y 12 concluimos que

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\int_0^1 \left(1-x^2\right)^n dx \le \int_0^{\infty} e^{-x^2}dx \le \lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\int_0^{\infty}\frac{1}{(1+x^2)^n}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Y por lo tanto

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

¡Lo hemos logrado!

Sin duda alguna, un triunfo extraordinario.

Ya que hemos resuelto la integral $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$, no podemos dejar pasar la oportunidad para integrar

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx$$

Esta ya es inmediata gracias a la paridad del integrando:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = 2\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}.$$

La integral $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ es conocida como la integral Gaussiana, en honor a Gauss y es de particular interés dentro de la Probabilidad. Con herramienta de Cálculo IV, es posible dar una demostración sin mucho esfuerzo del resultado que obtuvimos. Era importante presentar esta solución aquí por lo completo que es el problema. Considero que cada uno de los trece pasos que dimos fue un buen entrenamiento.

FIN DEL TEMA