Determinante de Vandermonde

Elías López Rivera [1]

[1] Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de ciencias

26 de enero de 2025

1. Enunciado

a) Definimos la matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$, con $n \in \mathbb{N}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Demostar que $Det(A) = \prod_{1 \leq i < k \leq n} (a_k - a_i)$, justificar para que casos la matriz A es invertible.

b) Usar lo anterior para demostrar que, sea $B \in M_n, (\mathbb{R})$,con $n \in \mathbb{N}$:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2^2 & \cdots & n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2^{n-1} & \cdots & n^{n-1} \end{pmatrix}$$

$Det(B) = 1!\,2!\cdots(n-1)!$

2. Solución

a) Procedemos por inducción sobre n:

i) Base de inducción:

Sea $A_1 \in M_2(\mathbb{R})$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix}$$

Es claro que $Det(A_1) = a_2 - a_1 = \prod\limits_{1\leq i<k\leq 2} a_k - a_i$

ii) Hipotesís de inducción:

Sea algún $n \in \mathbb{N}$, $\forall\ A_n \in M_n(\mathbb{R})$:

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Se cumple que: $Det(A_n) = \prod\limits_{1\leq i<k\leq n} a_k - a_i$

iii) P(n) $\implies$ P(n+1) :

Definimos $A_{n+1} \in M_{n+1}(\mathbb{R})$ como:

$$A_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n+1} \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_{n+1}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \cdots & a_{n+1}^n \end{pmatrix}$$

Aplicando una operación de tipo $e_{(2)}$ sobre las filas de A_{n+1}, definida para $k \in \{2, 3, ..., n+1\}$, esta no afectará el determinante:

$$A_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n+1} \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_{n+1}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \cdots & a_{n+1}^n \end{pmatrix} \xrightarrow{R_k = R_k - a_1\, R_{k-1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & \cdots & a_{n+1} - a_1 \\ 0 & a_2(a_2 - a_1) & \cdots & a_{n+1}(a_{n+1} - a_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_2^{n-1}(a_2 - a_1) & \cdots & a_{n+1}^{n-1}(a_{n+1} - a_1) \end{pmatrix}$$

Ahora sabemos que $Det(A') = Det(A'^{\,T})$, por tanto trasponemos la matriz $A' = e_{(2)} A_{n+1}$:

$$A'' = A'^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_2 - a_1 & \cdots & a_2^{n-1}(a_2 - a_1) \\ 1 & a_3 - a_1 & \cdots & a_3^{n-1}(a_3 - a_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_{n+1} - a_1 & \cdots & a_{n+1}^{n-1}(a_{n+1} - a_1) \end{pmatrix}$$

Es claro que si $m \in \{2, 3, ..., n+1\} \implies A''_{1,m} = 0$, sabiendo eso aplicamos las fórmula de cofactores para $j = 1$:

$$Det(A'') = \sum_{m=1}^{n+1} (-1)^{1+m}\, A''_{1,m}\; Det(A^{1,m})$$

Donde $A^{1,m}$ es el 1-emésimo menor de la matriz A'', reduciendo lo anterior:

$$Det(A'') = (-1)^{1+1}\, A''_{1,1}\, Det(A^{1,1}) + \sum_{m=2}^{n+1} (-1)^{1+m}\, A''_{1,m}\; Det(A^{1,m})$$

Sin embargo el segundo termino será igual a cero debido a que $m \in \{2, 3....., n+1\}$, por tanto:

$$Det(A'') = Det(A^{1,1})$$

Obetinendo el menor $A^{1,1}$:

$$A^{1,1} = \begin{pmatrix} a_2 - a_1 & \cdots & a_2^{n-1}(a_2 - a_1) \\ a_3 - a_1 & \cdots & a_3^{n-1}(a_3 - a_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n+1} - a_1 & \cdots & a_{n+1}^{n-1}(a_{n+1} - a_1) \end{pmatrix}$$

se puede notar que podemos expresar $A^{1,1}$ como:

$$A^{1,1} = \begin{pmatrix} (a_2 - a_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (a_3 - a_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (a_{n+1} - a_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a_2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ 1 & a_3 & \cdots & a_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_{n+1} & \cdots & a_{n+1}^{n-1} \end{pmatrix} = R\,L$$

Notemos que $Det(A_{n+1}) = Det(A'') = Det(R)\,Det(L)$, como R es una matriz diagonal se sigue que $Det(R) = (a_2 - a_1)(a_3 - a_2)\cdots(a_{n+1} - a_1)$, luego si notamos L es traspuesta de la matriz:

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_{n+1} \\ a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_{n+1}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2^n & a_3^n & \cdots & a_{n+1}^n \end{pmatrix}$$

Como L es traspuesta de K comparten determinante, pero si notamos por hipotesís de inducción:

$Det(L) = \displaystyle\prod_{2 \leq i < k \leq n+1} a_k - a_i$, por tanto se obtiene que :

$$Det(A_{n+1}) = (a_2 - a_1)(a_3 - a_2)\cdots(a_{n+1} - a_1) \left[\prod_{2 \leq i < k \leq n+1} a_k - a_i \right]$$

De donde se concluye:

$$Det(A_{n+1}) = \prod_{1 \leq i < k \leq n+1} a_k - a_i$$

Sabemos que la matriz A, es invertible si y solo sí $Det(A) \neq 0$, se sigue que para que A, sea invertible:

$$Det(A) = \prod_{1 \leq i < k \leq n} a_k - a_i \neq 0$$

De donde se sigue que sean $j, k \in \{1, 2, ..., n\}$ entonces la matriz A es invertible si y solo sí $j \neq k \implies a_j \neq a_k$

b) Notemos que la matriz B es un caso especial de la matriz A, donde $\forall\, k \in \{1, 2, ..., n\}$, $a_k = k$, aplicando el determinante de Vandermonde sobre B:

$$Det(B) = \prod_{1 \leq i < k \leq n} a_k - a_i = (2-1)(3-2)(3-1)(2-1)\cdots(n-1-(n-2))(n-n-1)$$

De donde se deduce que:

$$Det(A) = 1!\,2!\,\cdots(n-1)!$$