Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Álgebra superior 2
Tarea examen 4
Elías López Rivera
elias.lopezr@ciencias.unam.mx
Fecha: 27/07/2025

Problema 1

Sea A un anillo conmutativo. Demuestre

I. La conmutatividad de la suma en $A[x]$

II. La conmutatividad del producto en $A[x]$

Demostración.

I. Conmutatividad de la suma

Sean $f(x), g(x) \in A[x]$, tenemos que que $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i\, x^i$, $g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i\, x^i$, tenemos que $f(x) + g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (a_i + b_i)\, x^i$, como $a_i, b_i \in A$, para toda $i \in \mathbb{N}$, se sigue que $a_i + b_i = b_i + a_i$, para toda $i \in \mathbb{N}$ por tanto $f(x) + g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (a_i + b_i)\, x^i = \sum_{i=0}^{\infty} (b_i + a_i)\, x^i = f(x) + g(x)$, hemos demostrado que la suma en el anillo de series de potencias conmuta, ahora solo falta comporbar que en efecto $f(x) + g(x)$ es un polinomio, como $f(x) \in A[x]$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $a_i = 0$, para $i > k$, de la misma manera existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $b_i > 0$ para $i > l$, por tanto si $i > max(l, k)$, $(a_i + b_i) = 0$, es decir $f(x) + g(x) \in A[x]$

II. Conmutatividad del producto

Sean $f(x), g(x) \in A[x]$, tenemos que que $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i\, x^i$, $g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i\, x^i$, luego tenemos que $f(x) \cdot g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i\, x^i$, con $\lambda_i = \sum_{j+k=i} a_j\,(b_k)$, como $a_j, b_k \in A$, tenemos que $a_j(b_k) = b_k(a_j)$, para toda $j, k \in \mathbb{N}$, por tanto $\lambda_i = \sum_{j+k=i} a_j\,(b_k) = \sum_{j+k=i} b_k\,(a_j)$, por tanto
$f(x) \cdot g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i\, x^i = g(x) \cdot f(x)$, fianlmente solo falta comprobar que $f(x) \cdot g(x)$ es un polinomio, de nuevo existen $r, l \in \mathbb{N}$ tal que $i > r$, $a_i = 0$, $i > l$ $b_i = 0$, por tanto si $i = k + j > l + r$, tenemos que $k > l$ o $j > r$ (si $k \leq l,\ j \leq r$, entonces $i = k + l \leq l + r$), entonces $b_i = 0$ o $a_i = 0$ y por tanto $\lambda_i = \sum_{j+k=i} a_j(b_k) = 0$, por tanto $f(x) \cdot g(x)$ es un polinomio

□

Problema 2

Sea $f(x) \in K[x]$ un polinomio de grado 5 con:

$$f(x) = f_1(x)\, f_2(x)\, f_3(x)\, f_4(x)\, f_5(x)$$

Donde los grados de los polinomios $f_i(x)$ tienen grado positivo para $i = 1, 2, 3, 4$. demuestre que al menos dos de los $f_i(x)$ tienen el mismo grado

Demostración.

Procedemos por contradicción es decir $\delta\, f_1 \neq \delta\, f_2 \neq \delta\, f_3 \neq \delta\, f_4$, como $\delta\, f_i \geq 0$, para $i = 1, 2, 3, 4$, es claro que alguno de los grados tiene que ser igual a 0 de otra manera $5 = \delta\, f = \delta\, f_1 + \delta\, f_2 + \delta\, f_3 + \delta\, f_4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$, esto debido a que todos los grados deben ser diferentes, por tanto si suponemos que $\delta\, f_1 = 0$, tenemos que $\delta\, f_2 = 1$, $\delta\, f_3 = 2$, $\delta\, f_4 = 3$ ya que todos los grados deben ser diferentes de nuevo, obtenemos que $5 = \delta\, f = \delta\, f_1 + \delta\, f_2 + \delta\, f_3 + \delta\, f_4 > 0 + 1 + 2 + 3 = 6$, una contradicción, por tanto como nuestra unica suposición fue que todos los $f_i(x)$ tenian grados diferentes, deben existir al menos dos cuyos grados sean iguales ☐

Problema 3

Sean $f(x), g(x)$ y $h(x)$ polinomios en $K[x]$. Demuestre que

I. $a|f(x)$ para toda $a \in K - \{0\}$

II. Si $f(x)|g(x)$ y $g(x)|h(x)$ entonces $f(x)|h(x)$

Demostración.

I. Como K es campo entonces existe a^{-1}, luego definimos el polinomio $r(x) = a^{-1} \cdot f(x)$, ojo de nuevo estamos usando el morfismo de inclusión para decir que $t(x) = a^{-1}$ es un polinomio,luego tenemos que sea $l(x) = a$, $l(x) \cdot r(x) = l(x) \cdot (a^{-1} \cdot f(x))$, usando la asociatividad del producto en $K[x]$, se tiene que $l(x) \cdot r(x) = (a \cdot a^{-1}) \cdot f(x) = 1 \cdot f(x) = f(x)$, por tanto $a|f(x)$

II. si $f(x)|g(x)$ existe $l(x) \in K[x]$ tal que $g(x) = f(x) \cdot l(x)$, de manera analoga tenemos que existe $z(x) \in K[x]$ tal que $h(x) = g(x) \cdot z(x)$, por tanto $h(x) = (f(x) \cdot l(x)) \cdot z(x)$ usando la asociatividad del producto en $K[x]$ $h(x) = f(x) \cdot (l(x) \cdot z(x))$, luego debido a la cerradura del producto tenemos que $f(x)|h(x)$

☐

Problema 4

Sean $f(x) \in K[x]$. Demuestre que $f(x)|1$ si y solo si $f(x) = a$ con $a \in K - \{0\}$

Demostración.

$\Rightarrow$) Supongamos que $f(x)|1$, por tanto existe $l(x) \in K[x]$ tal que $1 = l(x) \cdot f(x)$, recordando la propiedad de los grados en la multiplicación de polinomios tenemos que $\delta f + \delta g = 0$, como δf, $\delta g \geq 0$, tenemos que la unica posibilidad es que $\delta g = \delta f = 0$, luego como 1 es diferente del polinomio 0, entonces $f(x), l(x) \neq 0$, por tanto $f(x) = a$, donde $a \in K - \{0\}$, recordemos que $f(x) = a$, hace referencia al polinomio constante a, esto gracias al morfismo de anilos que nos delta la inclusión de k en $K[x]$ definida en clase

$\Leftarrow$) si $f(x) = a$ con $a \in K - \{0\}$, como K es campo existe a^{-1}, de nuevo tomamndo el morfismo de anillos que nos da la inclusión mencionada anteriormente esiste $g(x) = a^{-1}$, como esta inclusión es un morfismo respeta el producto es decir $a \cdot a^{-}1 = 1 \implies f(x) \cdot g(x) =$, solo hay que tener cuidado ya que unitario representa la identidad del producto en K y otro el polinomio 1. la identidad en $K[x]$ $\square$

Problema 5

Sean $a, b \in K$. Demuestre que $(x - a)|(x - b)$ si y solo si $a = b$

Demostración.

$\Rightarrow$) Supongamos que $a = b$, por tanto $f(x) = x - a = x - b = g(x)$, pues dos polinomios son iguales si y solo si son iguales coeficiente a coeficiente, luego es claro que $g(x) = 1 \cdot f(x)$, por tanto $f(x)|g(x)$

$\Leftarrow$) Supongamos que $(x - a)|(x - b)$, por tanto existe $l(x) \in K[x]$ tal que $(x - a) \cdot l(x) = (x - b)$, sean $f(x) = x - a$ y $g(x) = x - b$, de nuevo usando la propiedad de los grados tenemos que $1 + \delta l = \delta f + \delta l = \delta g = 1$, como $\delta l \geq 0$, de tiene que necesariamente $\delta l = 0$, por tanto $l(x) = s$ con $s \in K$, luego tenemos que $s \cdot (x - a) = sx - sa = x - b$, luego como dos polinomios son iguales si y solo si son iguales coeficiente a coeficiente tenemos que $s = 1$, $sa = b$, por tanto $a = sa = b$ $\square$

Problema 6

Encuentre el cociente y el residuo al hacer la división de $a(x)$ entre $b(x)$ para los siguientes polinomios

I. $a(x) = x^5 + 2$ *y* $b(x) = 2x^3 - 3x^2 + x - 2$

II. $a(x) = x^3 - 3x^2 - x - 1$ *y* $b(x) = 3x^2 - 2x + 1$

Demostración.

i)

$$
\begin{array}{r|rrrrrr}
 & & & & \frac{1}{2}x^2 & + \frac{3}{4}x & + \frac{7}{8} \\
\hline
2x^3 - 3x^2 + x - 2 & x^5 & & & & & + 2 \\
 & - x^5 & + \frac{3}{2}x^4 & - \frac{1}{2}x^3 & + x^2 & & \\
\cline{2-5}
 & & \frac{3}{2}x^4 & - \frac{1}{2}x^3 & + x^2 & & \\
 & & - \frac{3}{2}x^4 & + \frac{9}{4}x^3 & - \frac{3}{4}x^2 & + \frac{3}{2}x & \\
\cline{3-6}
 & & & \frac{7}{4}x^3 & + \frac{1}{4}x^2 & + \frac{3}{2}x & + 2 \\
 & & & - \frac{7}{4}x^3 & + \frac{21}{8}x^2 & - \frac{7}{8}x & + \frac{7}{4} \\
\cline{4-7}
 & & & & \frac{23}{8}x^2 & + \frac{5}{8}x & + \frac{15}{4}
\end{array}
$$

Por tanto $x^5 + 2 = \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{7}{8}\right)(2x^3 - 3x^2 + x - 2) + \frac{23}{8}x^2 + \frac{5}{8}x + \frac{15}{4}$

ii)

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & & & \frac{1}{3}x & - \frac{7}{9} \\
\hline
3x^2 - 2x + 1 & x^3 & - 3x^2 & - x & - 1 \\
 & - x^3 & + \frac{2}{3}x^2 & - \frac{1}{3}x & \\
\cline{2-4}
 & & - \frac{7}{3}x^2 & - \frac{4}{3}x & - 1 \\
 & & \frac{7}{3}x^2 & - \frac{14}{9}x & + \frac{7}{9} \\
\cline{3-5}
 & & & - \frac{26}{9}x & - \frac{2}{9}
\end{array}
$$

Por tanto $x^3 - 3x^2 - x - 1 = \left(\frac{1}{3}x - \frac{7}{9}\right)(3x^2 - 2x + 1) - \frac{26}{9}x - \frac{2}{9}$ $\square$

Problema 7

Encuentre el máximo común divisor en $\mathbb{Q}$ de las siguientes parejas de poinomios $f(x)$ y $g(x)$, escribalos como combinación líneal de la pareja de polinomios

I. $f(x) = -x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 12x$ y $g(x) = x^3 - 4x^2 + 4x - 3$

II. $f(x) = x^4 + 5x^3 - 4x^2 + 12x$ y $g(x) = -3x^4 - x^3 + 4x^2$

Demostración.
i) Proponemos usar el algoritmo de Euclides

$$
\begin{array}{r|l}
 & -x-1 \\ \cline{2-2}
x^3-4x^2+4x-3 & -x^4+3x^3-4x^2+12x \\
 & x^4-4x^3+4x^2-3x \\ \cline{2-2}
 & -x^3+9x \\
 & x^3-4x^2+4x-3 \\ \cline{2-2}
 & -4x^2+13x-3
\end{array}
$$

Por tanto sea $l(x) = -4x^2 + 13x - 3$ entonces $0 < \delta\, l < \delta\, g$, por tanto podemos seguir con el algoritmo de Euclides:

$$
\begin{array}{r|l}
 & -\frac{1}{4}x+\frac{3}{16} \\ \cline{2-2}
-4x^2+13x-3 & x^3-4x^2+4x-3 \\
 & -x^3+\frac{13}{4}x^2-\frac{3}{4}x \\ \cline{2-2}
 & -\frac{3}{4}x^2+\frac{13}{4}x-3 \\
 & \frac{3}{4}x^2-\frac{39}{16}x+\frac{9}{16} \\ \cline{2-2}
 & \frac{13}{16}x-\frac{39}{16}
\end{array}
$$

De nuevo sea $r(x) = \frac{13}{16}x - \frac{39}{16}$, $0 < \delta\, r < \delta\, l$, por tanto podemos seguir aaplicando el algoritmo de Euclides

$$
\begin{array}{r|l}
 & -\frac{64}{13}x+\frac{16}{13} \\ \cline{2-2}
\frac{13}{16}x-\frac{39}{16} & -4x^2+13x-3 \\
 & 4x^2-12x \\ \cline{2-2}
 & x-3 \\
 & -x+3 \\ \cline{2-2}
 & 0
\end{array}
$$

Como obtenemos que el residuo de esta división es 0, se sigue que $mcd(g(x), f(x)) = \frac{13}{16}x - \frac{39}{16} = \frac{16}{13}\left(\frac{13}{16}x - \frac{39}{16}\right) = x - 3$, sea $M(x) = \frac{13}{16}x - \frac{39}{16}$, procedemos a escribirlo como combinación lineal de $f(x)$ y $g(x)$:

$$g(x) = (-4x^2 + 13x - 3)\left(\frac{-1}{4}x + \frac{3}{16}\right) + M(x)$$

$$f(x) = g(x)(-x-1) + (-4x^2 + 13x - 3)$$

$$g(x) + (g(x)(-x-1) - f(x))\left(\frac{-1}{4}x + \frac{3}{16}\right) = M(x)$$

$$x - 3 = \frac{16}{13}M(x) = \frac{16}{13}\left(\frac{1}{4}x - \frac{3}{16}\right)f(x) + \frac{16}{13}\left(1 - (x+1)\left(\frac{-1}{4}x + \frac{3}{16}\right)\right)g(x)$$

$$x - 3 = \frac{16}{13}\left(\frac{1}{4}x - \frac{3}{16}\right)f(x) + \frac{16}{13}\left(\frac{13}{16} + \frac{x^2}{4} + \frac{x}{16}\right)g(x)$$

ii) Proponemos usar el algoritmo de Euclides

$$\begin{array}{r|l} & \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad -3 \\ \hline x^4 + 5x^3 - 4x^2 + 12x) & -3x^4 - x^3 + 4x^2 \\ & \;\; 3x^4 + 15x^3 - 12x^2 + 36x \\ \cline{2-2} & \quad\quad 14x^3 - 8x^2 + 36x \end{array}$$

Por tanto sea $l(x) = 14x^3 - 8x^2 + 36x$ entonces $0 < \delta\, l < \delta\, g$, por tanto podemos seguir con el algoritmo de Euclides:

$$\begin{array}{r|l} & \quad\quad\quad\quad\quad\quad \frac{1}{14}x + \frac{39}{98} \\ \hline 14x^3 - 8x^2 + 36x) & x^4 + 5x^3 - 4x^2 + 12x \\ & -x^4 + \frac{4}{7}x^3 - \frac{18}{7}x^2 \\ \cline{2-2} & \quad \frac{39}{7}x^3 - \frac{46}{7}x^2 + 12x \\ & -\frac{39}{7}x^3 + \frac{156}{49}x^2 - \frac{702}{49}x \\ \cline{2-2} & \quad\quad -\frac{166}{49}x^2 - \frac{114}{49}x \end{array}$$

De nuevo sea $r(x) = -\frac{166}{49}x^2 - \frac{114}{49}x$, $0 < \delta\, r < \delta\, l$, por tanto podemos seguir aaplicando el algoritmo de Euclides

$$
\begin{array}{r|l}
 & \frac{343}{83}x - \frac{3283}{6889} \\
\hline
-\frac{166}{49}x^2 - \frac{114}{49}x & -14x^3 \quad - 8x^2 \quad + 36x \\
 & \underline{14x^3 + \frac{798}{83}x^2} \\
 & \qquad \frac{134}{83}x^2 \quad + 36x \\
 & \qquad \underline{-\frac{134}{83}x^2 - \frac{7638}{6889}x} \\
 & \qquad\qquad \frac{240366}{6889}x
\end{array}
$$

Por tanto sea $w(x) = \frac{240366}{6889}x$ entonces $0 < \delta\, w < \delta\, r$, por tanto podemos seguir con el algoritmo de Euclides:

$$
\begin{array}{r|l}
 & -\frac{571787}{5888967}x - \frac{130891}{1962989} \\
\hline
\frac{240366}{6889}x & -\frac{166}{49}x^2 \quad - \frac{114}{49}x \\
 & \underline{\frac{166}{49}x^2} \\
 & \qquad -\frac{114}{49}x \\
 & \qquad \underline{\frac{114}{49}x} \\
 & \qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Como obtenemos que el residuo de esta división es 0, se sigue que
$mcd(g(x), f(x)) = \frac{240366}{6889}x = \frac{6889}{240366}\,\frac{240366}{6889}x = x$, sea $M(x) = \frac{240366}{6889}x$

□

Problema 8

Factoriza el polinomio $2x^3 + 3x^2 - 10x - 25$ en irreducibles en $\mathbb{Q}$ y en $\mathcal{C}$

Demostración.

Lemma 0.1.

Sea $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i\, x^i \in \mathbb{Z}[x]$ y sea $\frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$ una raíz de $f(x)$ con $(r, s) = 1$. Entonces $s|a_n$ y $r|a_0$

Demostración.

Como $\frac{r}{s}$ es una raiz de $f(x)$, se tiene que:

$$f\left(\frac{r}{s}\right) = \sum_{i=0}^{n} a_i \left(\frac{r}{s}\right)^i = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i \left(\frac{r}{s}\right)^i = 0$$

Luego multiplicamos por s^n

$$s^n a_0 + \sum_{i=1}^{n} r^i\, s^{n-i} = 0 \implies s^n a_0 = -r \sum_{i=1}^{n} r^{i-1}\, s^{n-i}$$

como $i - 1 \geq 0$ para todo $i \in \mathbb{N}_n$ y $n - i \geq 0$ para toda $i \in \mathbb{N}_n$, se sigue que $-\sum_{i=1}^{n} r^{i-1}\, s^{n-i} \in \mathbb{Z}$, por tanto $r|a_0\, s^n$, luego como $(r, s^n) = 1$, debido a que $(r, s) = 1$, se sigue que $r|a_0$, siguiendo un proceso análogo tenemos que:

$$r^n\, a_n = -\sum_{i=0}^{n-1} a_i\, r^i\, s^{n-i} = -s \sum_{i=0}^{n} r^i\, s^{n-1-i}$$

Como $n-1-i \geq 0$ para toda $i \in \mathbb{N}_{n-1}$, se sigue que $-\sum_{i=0}^{n} r^i\, s^{n-1-i} \in \mathbb{Z}$, por tanto $s|r^n\, a_n$, como $(s, r^n) = 1$, se concluye que $s|a_n$ $\square$

Si $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 10x - 25$ tiene una raís racional $\frac{m}{k}$, aplicando el teorema anterior $k|2$ y $m|25$, por tanto $k \in D(2) := \{-2, -1, 1, 2\}$ y $m \in D(25) := \{-25, -5, -1, 1, 5, 25\}$, luego tenemos que:

$$f\left(\frac{5}{2}\right) = 2\left(\frac{5}{2}\right)^3 + 3\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 10\left(\frac{5}{2}\right) - 25 = 0$$

Por tanto $\frac{5}{2}$ es raíz de $f(x)$, aplicando división sintética

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & 3 & -10 & -25 \\ \frac{5}{2} & & 5 & 20 & 25 \\ \hline & 2 & 8 & 10 & 0 \end{array}$$

Por tanto tenemos que $f(x) = 2\left(x - \frac{5}{2}\right)(x^2+4x+5) = (2x-5)(x^2+4x+5)$, tenemos que $g(x) = x^2+4x+5$ es irreducible en $\mathbb{Q}[x]$ pues si analizamos su disrimintante $16 - 4(5)(1) = 16 - 20 = -4 < 0$, finalmente obtenemos las raices de $g(x)$ en $\mathcal{C}[x]$:

$$\alpha_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}\, i}{2} = -2 \pm \sqrt{5}\, i$$

Por tanto la factorización en irreducibles en $\mathcal{C}[x]$ es $f(x) = (2x-5)\,(x+2-\sqrt{5}\, i)\,(x+2+\sqrt{5}\, i)$ $\square$