Cálculo Diferencial e Integral II

Aproximación polinomial

27 de abril de 2020

El día de hoy vamos a concluir el tema de Aproximación polinomial ofreciendo tres aplicaciones más que reflejan la importancia de los polinomios de Taylor. Las técnicas que desarrollemos aquí serán de mucha importancia (en particular para atacar algunos ejercicios de la tarea).

La clase pasada ofrecimos una primer aplicación que dejó en evidencia la importancia de contar con expresiones explícitas del residuo de una función. Entre otras cosas, logramos dar una aproximación correcta a seis decimales del número e.

De manera general, quedó claro que si queremos aproximar el valor de una función f en un punto x_0 de su domino, sólo debemos tomar un polinomio de Taylor $P_{n,f,a}$ de un orden n suficientemente grande y centrado en un punto adecuado a (cercano a x_0). Es decir,

$$f(x_0) \approx P_{n,f,a}(x_0)$$

La expresiones explícitas del resdiduo nos permiteron controlar el error cometido en estas aproximaciones, mostrándonos que dichas aproximaciones se pueden hacer con toda la precisión que quisiéramos.

La primer aplicación que vamos a analizar va de la mano de la aproximación anterior. El tema pasado nos enteramos de la existencia de funciones continuas para las cuales no es posible ofrecer una primitiva explícita. Un ejemplo de ello es

$$\int \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} dx$$

la cual no es posible resolver en términos de funciones elementales.

Aún cuando a una función f no le podamos encontrar una primitiva, sabemos que en ocasiones es posible calcular integrales definidas que las involucren

$$\int_c^d f$$

Sin embargo, cuando esto no es posible y estamos en la necesidad de al menos conocer un valor aproximado de la misma, entonces entra al rescate la aproximación polinomial.

Si sabemos que para toda $x \in [c,d]$,

$$f(x) \approx P_{n,f,a}(x)$$

entonces podemos esperar que

$$\int_c^d f(x)\,dx \approx \int_c^d P_{n,f,a}(x)\,dx$$

Dicha aproximación vendrá acompañada de un error, pero éste lo podremos controlar en la medida que podamos controlar el valor de la integral

$$\int_c^d R_{n,f,a}(x)\,dx$$

¿Por qué ocurre esto último?

El error de la aproximación a la integral se mide mediante el cálculo de:

$$\left| \int_c^d f(x)\,dx - \int_c^d P_{n,f,a}(x)\,dx \right|$$

Pero lo anterior es equivalente a

$$\left|\int_c^d f(x)\,dx - \int_c^d P_{n,f,a}(x)\,dx\right| = \left|\int_c^d [f(x)\,dx - P_{n,f,a}(x)]\,dx\right| = \left|\int_c^d R_{n,f,a}(x)\,dx\right|$$

De modo que entre mejor controlemos a la integral del residuo, más certeras serán nuestras aproximaciones.

Como se puede apreciar, el método que acabamos de describir es bastante sencillo. Ahora llevémoslo a la práctica con un par de ejemplos.

Ejemplo 1 *Sea $g(x) = \operatorname{sen}\left(x^2\right)$. Aproximar el valor de $\int_0^1 g$ con un error menor a 10^{-3}.*

Como seguramente recordarán, no es posible encontrar una primitiva explícita para g. Así que podemos echar mano de nuestra técnica de aproximación calculando los polinomios de Taylor de g.

La Clase del lunes 20 dejamos como ejercicio demostrar la siguiente conjetura:

Si $h : I \to \mathbb{R}$ es una función $2n$-veces derivable en $0 \in I$ y definimos

$$f(x) = h\left(x^2\right)$$

entonces

$$P_{2n,f,0}(x) = P_{n,h,0}\left(x^2\right).$$

Noten que en nuestro ejemplo nos encontramos en estas circunstancias. En nuestro caso podemos concluir que

$$P_{4n+2,g,0}(x) = P_{2n+1,\operatorname{sen},0}\left(x^2\right).$$

(el orden del polinomio obtenido para g será el doble del orden del polinomio tomado para $\operatorname{sen}(x)$*)*

Nos estamos apoyando directamente de $P_{2n+1,\operatorname{sen},0}$ porque todos los polinomios de Taylor para $\operatorname{sen}(x)$ *son de grado impar.*

Recordemos que

$$P_{2n+1,\operatorname{sen},0}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

De modo que

$$P_{4n+2,g,0}(x) = P_{2n+1,\operatorname{sen},0}\left(x^2\right) = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!}$$

Ahora bien, como

$$\operatorname{sen}(x) = P_{2n+1,\operatorname{sen},0}(x) + R_{2n+1,\operatorname{sen},0}(x)$$

entonces

$$g(x) = \operatorname{sen}\left(x^2\right) = P_{2n+1,\operatorname{sen},0}\left(x^2\right) + R_{2n+1,\operatorname{sen},0}\left(x^2\right) = P_{4n+2,g,0}(x) + R_{2n+1,\operatorname{sen},0}\left(x^2\right)$$

De donde podemos concluir:

$$R_{4n+2,g,0}(x) = R_{2n+1,\operatorname{sen},0}\left(x^2\right)$$

Nuestro método para aproximar el valor de $\int_0^1 g$, nos dice que debemos calcular $\int_0^1 P_{4n+2,g,0}(x)\,dx$ para una n adecuada. Así que antes de realizar el cálculo de la integral, lo primero que tenemos que hacer es determinar el valor de la n. Esto lo haremos en función del error que se nos ha pedido no rebasar.

Se nos ha pedido que el error no exceda 10^{-3}. Lo que significa que debemos encontrar una n para la cual podamos asegurar que

$$\left|\int_0^1 R_{4n+2,g,0}(x)\,dx\right| < 10^{-3}$$

La clase pasada, mediante la forma de Lagrange para el residuo, logramos acotar al residuo de $\operatorname{sen}(x)$*:*

$$|R_{2n+1,\mathrm{sen},0}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

De manera que

$$|R_{4n+2,g,0}(x)| = \left|R_{2n+1,\mathrm{sen},0}\left(x^2\right)\right| \leq \frac{|x|^{4n+4}}{(2n+2)!} = \frac{x^{4n+4}}{(2n+2)!}$$

Por lo tanto, podemos acotar la integral del residuo de g como sigue:

$$\left|\int_0^1 R_{4n+2,g,0}(x)\,dx\right| \leq \int_0^1 |R_{4n+2,g,0}(x)|\,dx \leq \int_0^1 \frac{x^{4n+4}}{(2n+2)!}dx = \frac{1}{(4n+5)(2n+2)!}$$

Así que si queremos que

$$\left|\int_0^1 R_{4n+2,g,0}(x)\,dx\right| < 10^{-3}$$

entonces basta tomar una n para la cual ocurra que

$$\frac{1}{(4n+5)(2n+2)!} < 10^{-3}$$

o equivalentemente

$$10^3 < (4n+5)(2n+2)!$$

Si sustituimos $n = 1$, notamos que

$$(4n+5)(2n+2)! = 9(4!) = 216 < 10^3$$

En cambio, para $n = 2$

$$(4n+5)(2n+2)! = 13(6!) = 9360 > 10^3$$

Por lo tanto la n buscada es $n = 2$. Ojo, esto quiere decir que vamos apoyarnos del polinomio

$$P_{4(2)+2,g,0}(x) = P_{10,g,0}(x)$$

Ahora sí nos lanzamos a calcular la integral para el valor $n = 2$:

$$\int_0^1 \operatorname{sen}\left(x^2\right)dx \approx \int_0^1 P_{10,g,0}(x)\,dx$$

$$= \int_0^1 \left[x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!}\right]dx = \frac{1}{3} - \frac{1}{7(3!)} + \frac{1}{11(5!)} = \frac{1}{3} - \frac{1}{42} + \frac{1}{1320}$$

Es decir,

$$\int_0^1 \operatorname{sen}\left(x^2\right)dx \approx \frac{1}{3} - \frac{1}{42} + \frac{1}{1320} \approx 0.3102813853$$

Y el error cometido en esta aproximación satisface que

$$\left|\int_0^1 R_{10,g,0}(x)\,dx\right| \leq \frac{1}{9360} < 10^{-3}$$

como se quería.

Vale la pena comentar un detalle al que no le prestamos mucha atención en el Ejemplo 1:

¿Por qué elegimos al polinomio de Taylor para g centrado en 0? ¿Por qué no usamos el polinomio centrado en 1 o en 1/2?

La respuesta es muy simple. Nos apoyamos de $P_{4n+2,g,0}(x)$ únicamente porque conocemos muy bien tanto a sus polinomios como el comportamiento de los correspondientes residuos. Esto ahunado al hecho de que estamos trabajando "cerca" del 0 (pues la integral solicitada estaba definida en el intervalo $[0,1]$) hace que nuestra elección de centrar a los polinomios en el 0 fuera acertada.

Nada nos habría impedido usar $P_{4n+2,g,1}(x)$ por ejemplo, sin embargo, habríamos tenido la necesidad de encontrar una expresión explícita para los nuevos residuos y a partir de ahí lograr cotas adecuadas para controlar el error.

Ejemplo 2 *Sea*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} & x \neq 0 \\ \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

Aproximar el valor de la integral $\int_0^1 f$ *con un error menor a* 10^{-5}.

Para este ejemplo nos topamos con un problema mayúsculo. Ya dijimos que no es posible encontrar una primitiva explícita para f*, pero en este caso no está para nada claro que tengamos derecho de hablar del polinomio de Taylor de* f *centrado en* 0. *Y es que, si bien es cierto que* f *es derivable en todo su dominio, no es tan simple determinar hasta qué orden es derivable en el* 0 *(al menos a puro ojo no se intuye nada). Debe quedar claro que ponernos a derivar a* f *hasta el cansancio es un proceso por demás inútil.*

Entonces, ¿valdrá la pena considerar polinomios de Taylor que no estén centrados en 0*?*

Así como no vale la pena ponernos a derivar a f *en el* 0 *tanto como podamos, mucho menos vale la pena derivar a* f *en algún punto distinto de* 0. *Esto es porque las derivadas sucesivas de* f *no irán generando un patrón que nos permita determinar* $f^{(n)}(x)$ *de manera óptima y por el contrario, sólo irán creciendo en dificultad.*

¿Qué procede ahora?

Lo que vamos a hacer será apoyarnos únicamente de los polinomios de Taylor de $\operatorname{sen}(x)$. *A partir de ellos aproximaremos a* f *y luego veremos de qué forma controlaremos el error que cometamos al integrar.*

Recordemos una vez más que

$$P_{2n+1,\operatorname{sen},0}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Si consideramos al cociente

$$\frac{P_{2n+1,\operatorname{sen},0}(x)}{x}$$

podemos inferir perfectamente que debe ocurrir que

$$f(x) \approx \frac{P_{2n+1,\operatorname{sen},0}(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$$

Por supuesto el cociente debe efectuarse para $x \neq 0$*, sin embargo, a través del límite podemos darnos cuenta que la aproximación es consistente incluso en el* 0*:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{P_{2n+1,\operatorname{sen},0}(x)}{x} = 1 = f(0)$$

De esta manera, todo indica que

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx \int_0^1 \frac{P_{2n+1,\text{sen},0}(x)}{x}dx = \int_0^1 \left[1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}\right] dx$$

Este camino ya se ve más alentador. Lo único que debemos hacer es tener cuidado de que el error númerico que estamos cometiendo no se nos dispare.

Dado que

$$\operatorname{sen}(x) = P_{2n+1,\text{sen},0}(x) + R_{2n+1,\text{sen},0}(x)$$

entonces, para $x \neq 0$

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = \frac{P_{2n+1,\text{sen},0}(x)}{x} + \frac{R_{2n+1,\text{sen},0}(x)}{x}$$

Por lo tanto el error lo podremos controlar siempre que podamos controlar a la integral

$$\int_0^1 \frac{R_{2n+1,\text{sen},0}(x)}{x}dx$$

Pero esto no es tan complicado si nuevamente nos apoyamos de la cota que conocemos para el residuo de $\operatorname{sen}(x)$*:*

$$|R_{2n+1,\text{sen},0}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

Veamos:

$$\left|\int_0^1 \frac{R_{2n+1,\text{sen},0}(x)}{x}dx\right| \leq \int_0^1 \left|\frac{R_{2n+1,\text{sen},0}(x)}{x}\right| dx \leq \int_0^1 \frac{|x|^{2n+2}}{|x|\,(2n+2)!}dx = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{(2n+2)!}dx$$

Noten que en la última igualdad quitamos el valor absoluto porque estamos trabajando en el intervalo $[0,1]$*, es decir,* $x \geq 0$.

Por lo tanto

$$\left|\int_0^1 \frac{R_{2n+1,\text{sen},0}(x)}{x}dx\right| \leq \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{(2n+2)!}dx = \frac{1}{(2n+2)\,(2n+2)!}$$

Entonces, si lo que queremos es que el error no exceda 10^{-5}*, lo que necesitamos es tomar una* n *tal que*

$$\frac{1}{(2n+2)\,(2n+2)!} < 10^{-5}$$

Equivalentemente

$$10^5 < (2n+2)\,(2n+2)!$$

Si sustituimos $n = 2$,

$$(2n+2)\,(2n+2)! = 6\,(6!) = 4320 < 10^5$$

En cambio para $n = 3$,

$$(2n+2)\,(2n+2)! = 8\,(8!) = 322560 > 10^5$$

Es decir, $n = 3$ *es el buscado. Y de este modo nos tenemos que apoyar del polinomio:*

$$\frac{P_{2(3)+1,\text{sen},0}(x)}{x} = \frac{P_{7,\text{sen},0}(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!}$$

Calculando la integral:

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx \int_0^1 \frac{P_{7,\text{sen},0}(x)}{x}dx = \int_0^1 \left[1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!}\right] dx$$

$$= 1 - \frac{1}{3\,(3!)} + \frac{1}{5\,(5!)} - \frac{1}{7\,(7!)} = 1 - \frac{1}{18} + \frac{1}{600} - \frac{1}{35280}$$

Por lo tanto

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx 1 - \frac{1}{12} + \frac{1}{600} - \frac{1}{35280} \approx 0.9460827664$$

Y el error cometido en esta aproximación satisface que

$$\left|\int_0^1 \frac{R_{2n+1,\text{sen},0}(x)}{x}dx\right| \leq \frac{1}{322560} < 10^{-5}$$

como se quería.

El Ejemplo 2 deja una inquietud, ¿no será que el polinomio

$$1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$$

es en realidad el $2n$-ésimo polinomio de Taylor para f en 0?

Por comodidad llamemos $Q_{2n}(x)$ a dicho polinomio. Si de casualidad $Q_{2n}(x)$ va a ser el $2n$-ésimo polinomio de Taylor para f en 0, entonces necesariamente debe ser un polinomio que se le parezca a f hasta el orden $2n$ en el 0. Eso significa que debe ser cierto que

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - Q_{2n}(x)}{x^{2n}} = 0$$

Veamos que esto sí pasa. Según los cálculos que ya hicimos en el Ejemplo 2, tenemos que

$$f(x) - Q_{2n}(x) = \frac{R_{2n+1,\text{sen},0}(x)}{x}$$

Y por lo tanto

$$\left|\frac{f(x) - Q_{2n}(x)}{x^{2n}}\right| = \left|\frac{R_{2n+1,\text{sen},0}(x)}{x^{2n+1}}\right| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{|x|^{2n+1}(2n+2)!} = \frac{|x|}{(2n+2)!}$$

Como

$$\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{(2n+2)!} = 0$$

por la Ley del Sandwich podemos concluir que

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - Q_{2n}(x)}{x^{2n}} = 0$$

Entonces realmente está bien fundamentada la idea de que posiblemente $Q_{2n}(x) = P_{2n,f,0}(x)$.

¿Qué es lo que nos detiene para no afirmarlo ya con certeza?

Bueno, nos frena el hecho de que aún no sabemos que f sea $2n$-veces derivable en 0. Recuerden que para tener derecho a hablar del polinomio de Taylor es obligatorio tener la suficiente derivabilidad de f en el punto en cuestión (es muy importante que esto lo tengan bien claro).

Ahora bien, resulta que f es infinitamente derivable en 0, de manera que sí es verdad que $Q_{2n}(x) = P_{2n,f,0}(x)$. Desafortunadamente esto no es algo que podamos demostrar con la herramienta que tenemos a nuestra disposición, por el momento.

Si el tiempo lo permite, en el siguiente tema veremos una manera muy ingeniosa de probar que f es infinitamente derivable en 0.

Es muy importante que aprecien que durante todo el Ejemplo 2 nunca asumimos que f tuviera asociado polinomios de Taylor alrededor del 0 y que a pesar de ello pudimos darle la vuelta al problema de aproximar el valor de la integral pedida. Con esto cerramos la primer aplicación del día.

Hemos insistido mucho en que las expresiones explícitas del residuo nos permiten controlar las aproximaciones polinomiales que damos, y todos los ejemplos que hemos ofrecido son testigos de este hecho. Esto nos podría dejar la impresión de que el uso del residuo se limita sólo a cuestiones de "cálculos y estimaciones del error" lo cual, para ser honestos, a la larga pudiera provocar algo de tedio. Sin embargo, esto no puede estar más alejado de la realidad. Los alcances teóricos que tiene el residuo en su forma explícita son destacables.

En lo que resta de la clase vamos a ver dos aplicaciones teóricas que involucran al residuo. La primera de éstas nos ofrecerá un resultado muy agradable.

Ya hemos demostrado que

$$e \approx 2.7182815256$$

sin embargo, una excelente pregunta que aún no hemos resuelto es:

¿El número e es racional o irracional?

Quizá la respuesta ya es de todos conocida. Lo importante aquí es, ¿cómo la prueban?

Es un hecho extraordinario que sea a través de los polinomios de Taylor que podamos dar una elegante y sencilla demostración de que el número e, ¡es irracional!

Proposición 3 *El número e es irracional.*

Dem. La clave de la prueba recae en la Proposición 8 que demostramos la clase pasada:

Sea $f(x) = e^x$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple que

1) Si $x > 0$, entonces

$$0 < R_{n,f,0}(x) < \frac{3^x}{(n+1)!}x^{n+1}$$

2) Si $x < 0$, entonces

$$|R_{n,f,0}(x)| < \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Para nuestros propósitos lo único que necesitamos es la información que ofrece el inciso 1).

Si usamos la desigualdad dada en 1) y la aplicamos para $x = 1$, obtenemos que

$$0 < R_{n,f,0}(1) < \frac{3}{(n+1)!}$$

Ahora bien,

$$R_{n,f,0}(1) = f(1) - P_{n,f,0}(1)$$

es decir,

$$R_{n,f,0}(1) = e - \left[2 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n!}\right]$$

(recuerden que $P_{n,f,0}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$)

Por lo tanto tenemos

$$0 < e - \left[2 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n!}\right] < \frac{3}{(n+1)!}$$

y de acuerdo a la Proposición 8, la desigualdad anterior es válida para toda $n \in \mathbb{N}$.

Esto es todo lo que necesitamos para probar la irracionalidad de e. Allá vamos.

Supongamos por el contrario que e es racional, es decir,

$$e = \frac{a}{b}$$

para algunos $a, b \in \mathbb{N}$.

Una observación general que ocurre con los números factoriales es que si tomamos $k, n \in \mathbb{N}$ tales que $n \geq k$, entonces el número $k!$ divide a $n!$, es decir,

$$\frac{n!}{k!}$$

es un número entero. Así mismo, si $k \leq n$, entonces k también divide a $n!$.

¿De qué nos sirven estas observaciones?

Bueno, si tomamos $n \in \mathbb{N}$, entonces el número

$$n!\left[2 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n!}\right] = 2(n!) + \frac{n!}{2} + \cdots + \frac{n!}{(n-1)!} + \frac{n!}{n!}$$

debe ser un entero. Y si además pedimos que $n > b$, entonces

$$n!e = \frac{n!a}{b}$$

también es un entero.

Eso significa que para cada $n \in \mathbb{N}$, con $n > b$,

$$n!e - n!\left[2 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n!}\right]$$

es un número entero tal que

$$0 < n!e - n!\left[2 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n!}\right] < \frac{3(n!)}{(n+1)!} = \frac{3}{n+1}$$

Esto ya es absurdo porque si tomamos $n \geq 3$ (y $n > b$), entonces

$$0 < n!e - n!\left[2 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n!}\right] < \frac{3}{n+1} < 1$$

Es decir, tenemos un número entero que vive estrictamente entre 0 y 1, lo que sabemos que no es posible.

Por lo tanto e es irracional. ■

Sin duda una sencilla prueba, para un resultado tan importante. Y toda la clave fue la información que proporcionan los residuos para e^x.

La siguiente aplicación es de una naturaleza totalmente distinta a lo que hemos hecho hasta ahora.

Los polinomios de Taylor también pueden ser usados en el campo de las ecuaciones diferenciales. De hecho hay todo un método de resolución de ecuaciones que gira alrededor de Taylor y que se acostumbra a estudiar en el respectivo curso de Ecuaciones Diferenciales I. El objetivo aquí es dar una pequeña probadita de esta técnica mostrando un par de ejemplos.

Por comodidad, será de utilidad apoyarnos de la notación $\langle a,b\rangle$ que introdujimos la clase pasada. Aquí la recordamos.

Notación importante:

$$\langle a,b\rangle = \begin{cases} (a,b) & \text{si } a<b \\ \\ (b,a) & \text{si } b<a \end{cases}$$

De esta manera la expresión $x \in \langle a,b\rangle$ se lee simplemente como "x entre a y b", sin necesidad de especificar si estamos en el caso de $a<x<b$ ó $b<x<a$.

Para el trabajo que nos disponemos a hacer será necesario utilizar el siguiente resultado que involucra un límite de sucesiones.

Lema 4 *Para toda $a>0$, se cumple que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

El límite planteado en el Lema 4 fue demostrado por algunos de nosotros en Cálculo I. Para quienes no lo hayan visto antes, no se preocupen. Aunque por ahora lo dejaremos sin prueba, el siguiente tema ofreceremos una técnica que permitirá demostrar dicho límite sin mayor esfuerzo.

Ahora sí pasemos a nuestros ejemplos de ecuaciones diferenciales.

La función $s(x) = \operatorname{sen}(x)$ posee una propiedad muy peculiar:

$$s'(x) = \cos(x)$$

y por tanto

$$s''(x) = -\operatorname{sen}(x) = -s(x)$$

Es decir, $s(x)$ satisface la ecuación diferencial

$$s''(x) + s(x) = 0$$

a la cual le podemos agregar las "condiciones iniciales" $s(0)=0$ y $s'(0)=1$.

Una pregunta que nos podemos hacer ahora es, si f satisface la ecuación diferencial

$$f''(x) + f(x) = 0$$

$$f(0) = 0 \quad \text{y} \quad f'(0) = 1$$

entonces ¿$f(x) = \operatorname{sen}(x)$?

Vamos a ver que esto es cierto apoyándonos de los polinomios de Taylor.

Proposición 5 *Si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es una función dos veces derivable que satisface la ecuación diferencial*

$$f''(x) + f(x) = 0$$

$$f(0) = 0 \quad y \quad f'(0) = 1$$

entonces $f(x) = \operatorname{sen}(x)$.

Dem. Querer demostrar que $f(x) = \operatorname{sen}(x)$, es equivalente a demostrar que $f(x) - \operatorname{sen}(x) = 0$. Éste será nuestro camino.

Definamos $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como

$$h(x) = f(x) - \operatorname{sen}(x)$$

Notemos que ahora h satisface la misma ecuación diferencial que f pero con nuevas condiciones iniciales:

$$h''(x) = f''(x) + \operatorname{sen}(x) = -f(x) + \operatorname{sen}(x) = -h(x)$$

Además $h(0) = 0$ y $h'(0) = f'(0) - \cos(0) = 0$. Es decir, h satisface la ecuación diferencial:

$$h''(x) + h(x) = 0$$

$$h(0) = 0 \quad \text{y} \quad h'(0) = 0$$

Así que bajo estas condiciones vamos a demostrar que $h \equiv 0$.

Lo primero que debemos apreciar es que h debe ser infinitamente derivable en todo su dominio.

Dado que $h''(x) = -h(x)$, entonces

$$h'''(x) = -h'(x) \quad \text{y} \quad h^{(4)}(x) = -h''(x) = h(x)$$

Lo anterior demuestra que h no sólo es infinitamente derivable sino que además sus derivadas se repiten en ciclos de 4 (similarmente a lo que ya sabemos que ocurre con las derivadas sucesivas de $\operatorname{sen}(x)$).

Queda claro entonces que las derivadas de orden par y orden impar de h están relacionadas con h y h' de la siguiente manera:

$$h^{(2n-1)}(x) = \pm h'(x) \quad \text{y} \quad h^{(2n)}(x) = \pm h(x)$$

Lo que nos permite concluir que para toda $n \in \mathbb{N}$

$$\left| h^{(2n-1)}(x) \right| = |h'(x)| \quad \text{y} \quad \left| h^{(2n)}(x) \right| = |h(x)| \tag{1}$$

De las condiciones iniciales que cumple h, se sigue que para toda $n \in \mathbb{N}$

$$h^{(n)}(0) = 0$$

Con lo cual, para toda $n \in \mathbb{N}$

$$P_{n,h,0}(x) = h(0) + h'(0)x + \cdots + \frac{h^{(n)}(0)}{n!}x^n = 0$$

Dado que

$$h(x) = P_{n,h,0}(x) + R_{n,h,0}(x)$$

entonces

$$h(x) = R_{n,h,0}(x)$$

Tomemos $x \in \mathbb{R}$ fija. Vamos a demostrar que $h(x) = 0$.

Apliquemos la forma de Lagrange del residuo para $R_{n,h,0}(x)$. Ésta nos dice que existe $c_n \in \langle 0, x \rangle$ tal que

$$R_{n,h,0}(x) = \frac{h^{(n+1)}(c_n)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

Naturalmente hemos hecho depender al punto $c_n \in \langle 0, x \rangle$ del índice $n \in \mathbb{N}$ puesto que c_n está relacionado con el residuo de orden n.

De este modo hemos demostrado que para toda $n \in \mathbb{N}$ existe $c_n \in \langle 0, x \rangle$ tal que

$$h(x) = \frac{h^{(n+1)}(c_n)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

(por favor, no pierdan de vista que la $x \in \mathbb{R}$ está fija)

Para demostrar que $h(x) = 0$, lo que vamos a hacer es tomar el límite del lado derecho, es decir, como $x \in \mathbb{R}$ está fija se debe cumplir por un lado que:

$$h(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{h^{(n+1)}(c_n)}{(n+1)!} x^{n+1} \tag{2}$$

Y lo que haremos por otra parte será mostrar que dicho límite vale 0 y con ello se tendrá que $h(x) = 0$.

Para calcular el límite en (2) vamos a tratar de atraparlo por medio del Sandwich. Aquí entrará en juego el Lema 4 así como las identidades en (1).

Vamos con calma. En primer lugar, si restringimos a las funciones h y h' al intervalo cerrado cuyos extremos son 0 y x ($[0, x]$ si $0 < x$, o bien $[x, 0]$ si $x < 0$), entonces gracias a la continuidad de ambas funciones, tenemos que existe $M > 0$ tal que, para toda $t \in \langle 0, x\rangle$

$$|h(x)| \leq M \quad \text{y} \quad |h'(x)| \leq M$$

Ahora bien, por las identidades dadas en (1), podemos concluir que para toda $n \in \mathbb{N}$ y para toda $t \in \langle 0, x\rangle$, se cumple que

$$\left|h^{(n)}(x)\right| \leq M$$

Y con esto podemos acotar a la función involucrada en el límite en (2) como sigue:

$$0 \leq \left|\frac{h^{(n+1)}(c_n)}{(n+1)!} x^{n+1}\right| \leq M \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Finalmente, por el Lema 4 sabemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

Y por lo tanto

$$h(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{h^{(n+1)}(c_n)}{(n+1)!} x^{n+1} = 0$$

Como esto es válido para cualquier $x \in \mathbb{R}$, hemos demostrado que $h \equiv 0$. Y con ello

$$f(x) = \operatorname{sen}(x)$$

como se quería. ■

De manera análoga a lo que acabamos de hacer con la función $s(x) = \operatorname{sen}(x)$, se puede demostrar que la función $c(x) = \cos(x)$ es la única función que satisface la ecuación diferencial:

$$c''(x) + c(x) = 0$$

$$c(0) = 1 \quad \text{y} \quad c'(0) = 0$$

Esta unicidad permite definir a las funciones seno y coseno precisamente como las únicas funciones que satisfacen las ecuaciones diferenciales que hemos mencionado. Algunos textos así es como las definen y a partir de ahí logran deducir todas las propiedades que ya les conocemos.

Noten que tanto $\operatorname{sen}(x)$ como $\cos(x)$ satisfacen la misma ecuación diferencial, lo único que cambia entre ellas son las condiciones iniciales dadas. Exactamente del mismo modo que lo hicimos en la Proposición 5, se puede demostrar que la solución general de la ecuación

$$f''(x) + f(x) = 0$$

son las funciones

$$f(x) = a\cos(x) + b\operatorname{sen}(x)$$

para algunas constantes $a, b \in \mathbb{R}$, las cuales quedan únicamente determinadas si se ofrecen las condiciones iniciales $f(0) = a$ y $f'(0) = b$.

El siguiente ejemplo que veremos guarda los mismos razonamientos que la Proposición 5, sin embargo, esta vez también pasaremos por un proceso de deducción de la solución de la ecuación diferencial dada.

Ejemplo 6 *Encontrar las soluciones de la ecuación diferencial*

$$f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = 0$$

$$f(0) = 0 \quad y \quad f'(0) = 1$$

Dem. En este ejemplo tenemos un problema un poco más complicado, puesto que ahora no sabemos qué función podría ser solución de la ecuación diferencial. Lo que sí debería intuirse, al igual que en la Proposición 5, es que cuando a una ecuación diferencial se le ponen condiciones iniciales, entonces éstas determinan una única solución.

La prueba de la unicidad es algo que este ejemplo y la Proposición 5 comparten, pues la técnica es la misma.

Comencemos por probar la unicidad y luego nos encargamos de encontrar dicha solución.

Supongamos que $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son soluciones de la ecuación diferencial.

Queremos demostrar que $f = g$. Esto es equivalente a probar que $f - g \equiv 0$.

Definimos $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como

$$h(x) = f(x) - g(x)$$

Lo que hay que notar es que h satisface la misma ecuación diferencial pero con otras condiciones iniciales:

$$h''(x) = f''(x) - g''(x) = (3f'(x) - 2f(x)) - (3g'(x) - 2g(x))$$

$$= 3(f'(x) - g'(x)) - 2(f(x) - g(x)) = 3h'(x) - 2h(x)$$

Además $h(0) = 0$ y $h'(0) = f'(0) - g'(0) = 0$.

Por lo tanto h satisface la ecuación:

$$h''(x) - 3h'(x) + 2h(x) = 0$$

$$h(0) = 0 \quad \text{y} \quad h'(0) = 0$$

Lo que vamos a demostrar a partir de aquí es que $h \equiv 0$.

Así como lo hicimos en la Proposición 5, vamos a tratar de encontrar algún patrón en las derivadas sucesivas de h.

Comencemos con la identidad

$$h''(x) = 3h'(x) - 2h(x) \tag{3}$$

Derivando:

$$h'''(x) = 3h''(x) - 2h'(x)$$

Como h satisface (3):

$$h'''(x) = 3h''(x) - 2h'(x) = 3(3h'(x) - 2h(x)) - 2h'(x)$$

$$= 7h'(x) - 6h(x)$$

Derivamos nuevamente y usamos (3):

$$h^{(4)}(x) = 7h''(x) - 6h'(x) = 7(3h'(x) - 2h(x)) - 6h'(x)$$

$$= 15h'(x) - 14h(x)$$

Aquí ya ha aparecido un patrón pero, por si todavía no es del todo claro, ofrecemos un paso más:

$$h^{(5)}(x) = 15h''(x) - 14h'(x) = 15(3h'(x) - 2h(x)) - 14h'(x)$$

$$= 31h'(x) - 30h(x)$$

Para tener un poco más de visión, hagamos una pequeña tabla con las relaciones que hemos obtenido

$$h''(x) = 3h'(x) - 2h(x)$$

$$h'''(x) = 7h'(x) - 6h(x)$$

$$h^{(4)}(x) = 15h'(x) - 14h(x)$$

$$h^{(5)}(x) = 31h'(x) - 30h(x)$$

Lo que se puede observar es que para $n \geq 2$ la derivada $h^{(n)}(x)$ es de la forma

$$h^{(n)}(x) = a_n h'(x) - b_n h(x)$$

para algunos coeficientes $a_n, b_n \in \mathbb{R}$. Sin embargo estos coeficientes llevan un comportamiento muy concreto:

$$a_n = 2^n - 1 \quad \text{y} \quad b_n = 2^n - 2$$

Es decir, para $n \geq 2$ se cumple que

$$h^{(n)}(x) = (2^n - 1)\, h'(x) - (2^n - 2)\, h(x) \tag{4}$$

(Se deja como ejercicio probar por inducción que la igualdad en (4) es cierta)

La identidad en (4) es la que estábamos buscando. Con ella y gracias a las condiciones iniciales que cumple h, se sigue que para toda $n \in \mathbb{N}$

$$h^{(n)}(0) = 0$$

Con lo cual, para toda $n \in \mathbb{N}$

$$P_{n,h,0}(x) = h(0) + h'(0)\, x + \cdots + \frac{h^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0$$

A partir de aquí, la prueba de que $h \equiv 0$, es prácticamente una calca de lo que hicimos en la Proposición 5.

Dado que

$$h(x) = P_{n,h,0}(x) + R_{n,h,0}(x)$$

entonces

$$h(x) = R_{n,h,0}(x)$$

Tomemos $x \in \mathbb{R}$ fija. Vamos a demostrar que $h(x) = 0$.

Aplicamos la forma de Lagrange del residuo para $R_{n,h,0}(x)$. Es decir, existe $c_n \in \langle 0, x \rangle$ tal que

$$R_{n,h,0}(x) = \frac{h^{(n+1)}(c_n)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

De este modo hemos demostrado que para toda $n \in \mathbb{N}$ existe $c_n \in \langle 0, x \rangle$ tal que

$$h(x) = \frac{h^{(n+1)}(c_n)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

Para demostrar que $h(x) = 0$, lo que sigue es tomar el límite del lado derecho, es decir,

$$h(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{h^{(n+1)}(c_n)}{(n+1)!} x^{n+1} \tag{5}$$

Y nuevamente vamos a atrapar al límite en (5) mediante un Sandwich.

Si restringimos a las funciones h y h' al intervalo cerrado cuyos extremos son 0 y x, entonces gracias a la continuidad de ambas funciones, tenemos que existe $M > 0$ tal que, para toda $t \in \langle 0, x\rangle$

$$|h(x)| \leq M \quad \text{y} \quad |h'(x)| \leq M$$

Ahora bien, por la identidad dada en (4), podemos concluir que para toda $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$, y para toda $t \in \langle 0, x\rangle$, se cumple que

$$\left|h^{(n)}(t)\right| \leq (2^n - 1)|h'(t)| + (2^n - 2)|h(t)|$$

$$\leq (2^n - 1)M + (2^n - 2)M = \left(2^{n+1} - 3\right)M$$

De donde, para toda $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$:

$$0 \leq \left|\frac{h^{(n+1)}(c_n)}{(n+1)!}x^{n+1}\right| \leq M\frac{\left(2^{n+1} - 3\right)|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Finalmente, por el Lema 4 sabemos que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(2^{n+1} - 3\right)|x|^{n+1}}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{|2x|^{n+1}}{(n+1)!} - 3\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

Y por lo tanto

$$h(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{h^{(n+1)}(c_n)}{(n+1)!}x^{n+1} = 0$$

Como esto es válido para cualquier $x \in \mathbb{R}$, hemos demostrado que $h \equiv 0$. Y con ello

$$f(x) = g(x)$$

Esto concluye la unicidad de las soluciones para la ecuación diferencial. Ahora debemos encontrar una solución explícita.

Supongamos que tenemos una solución $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, es decir, f cumple que

$$f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = 0$$

$$f(0) = 0 \quad \text{y} \quad f'(0) = 1$$

La idea es que a partir de la información que ofrece la ecuación diferencial, vayamos encontrando algunas propiedades de f que nos permitan cazarla. Aquí entran nuevamente los polinomios de Taylor.

Lo que vamos a hacer es, calcular los polinomios de Taylor $P_{n,f,0}(x)$ de manera explícita con la esperanza de obtener polinomios "reconocibles".

De manera análoga a lo que hicimos con h, podemos decir que las derivadas sucesivas de f satisfacen la relación

$$f^{(n)}(x) = (2^n - 1)f'(x) - (2^n - 2)f(x)$$

para $n \geq 0$. (comprueben la identidad para $n = 0$ y $n = 1$)

Si evaluamos en 0, se sigue que, para $n \geq 0$

$$f^{(n)}(0) = 2^n - 1$$

Por lo tanto, para toda $n \in \mathbb{N}$

$$P_{n,f,0}(x) = f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

$$= (2-1)x + \frac{2^2 - 1}{2}x^2 + \frac{2^3 - 1}{3!}x^3 + \frac{2^4 - 1}{4!}x^4 + \cdots + \frac{2^n - 1}{n!}x^n$$

Hemos dejado sin simplificar los numeradores para poder hacer la siguiente manipulación:

$$P_{n,f,0}(x) = \left[2x + \frac{2^2}{2}x^2 + \frac{2^3}{3!}x^3 + \frac{2^4}{4!}x^4 + \cdots + \frac{2^n}{n!}x^n\right] - \left[x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n\right]$$

Sí aún no han identificado lo que ha aparecido, hagamos un pequeño truco que nos dé más visión:

$$P_{n,f,0}(x) = \left[1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^4}{4!} + \cdots + \frac{(2x)^n}{n!}\right] - \left[1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right]$$

Ahora ya debería estar claro que, si llamamos $F(x) = e^{2x}$ y $G(x) = e^x$, entonces

$$P_{n,f,0}(x) = P_{n,F,0}(x) - P_{n,G,0}(x)$$

Esta información sugiere (y sólo sugiere) que la solución que estamos buscando es

$$f(x) = e^{2x} - e^x$$

Para ver que esta conjetura es cierta, dado que ya hemos probado la unicidad de la solución, sólo debemos verificar que f satisface la ecuación diferencial.

Derivando tenemos que

$$f'(x) = 2e^{2x} - e^x$$

y

$$f''(x) = 4e^{2x} - e^x$$

De donde,

$$3f'(x) - 2f(x) = \left(6e^{2x} - 3e^x\right) - \left(2e^{2x} - 2e^x\right) = 4e^{2x} - e^x = f''(x)$$

Es decir,

$$f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = 0$$

Ahora checamos las condiciones iniciales:

$$f(0) = e^0 - e^0 = 0$$

mientras que

$$f'(0) = 2e^0 - e^0 = 1$$

En consecuencia $f(x) = e^{2x} - e^x$ es la solución buscada. ■

Es importante que aprecien que toda la idea detrás de haber calculado los polinomios $P_{n,f,0}(x)$ en el Ejemplo 6, es permitirnos intuir cuál es la solución de la ecuación diferencial, pero sólo eso, "intuir la solución".

En otras palabras, el argumento en el que nos estamos apoyando es, que si de casualidad conocemos a **todos** los polinomios de Taylor de una función alrededor de un punto fijo, muy posiblemente logremos identificar a la función de la que estamos hablando.

Pero hay que tener cuidado, porque la afirmación anterior en realidad puede convertirse en un argumento falaz. Los polinomios de Taylor en un punto fijo, NO determinan de manera única a una función.

Si f es la función "suavizadora" y g es la función constante 0, entonces ambas satisfacen que, para toda $n \in \mathbb{N}$

$$P_{n,f,0}(x) = 0 = P_{n,g,0}(x)$$

sin embargo, las funciones f y g son drásticamente distintas.

Por eso, una vez que a través de los polinomios de Taylor se ha intuido un candidato, es necesario verificar que dicha función es en efecto una solución, así como lo hicimos en el Ejemplo 6.

Por supuesto, para que este método de deducción de soluciones sea efectivo, necesitamos un buen dominio de los polinomios de Taylor de muchas funciones.

FIN DE TEMA