Superposición de ondas

Fasores, modos normales y un poco más

Elías López Rivera

Escuela Superior de Física y Matemáticas, Instituto Politécnico Nacional

Reflexión en un extremo fijo

Tomemos una onda que se desplaza paralelamente a la dirección x sobre un medio, cuando este medio termine sobre un extremo que no puede moverse, la onda generará una fuerza sobre este, sin embargo, debido a la estática del extremo, por tercera ley de Newton surgirá una fuerza sobre el medio en sentido estrictamente opuesto, lo cual producirá que el pulso se invierta y viaje en dirección opuesta sobre el medio, reflejando la onda.

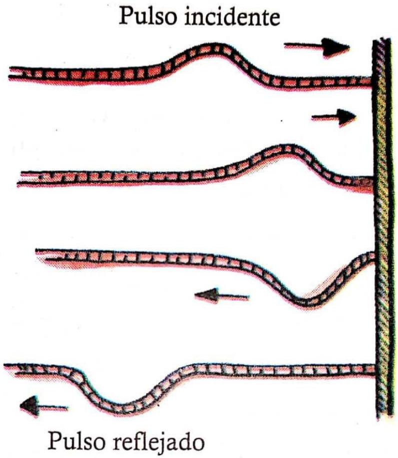

Figura 1: Reflexión en un punto fijo

Reflexión en un punto no fijo

Debido a que no hay fuerzas tranversales que intervengan en la reflexión del pulso este se reflejara sin necesidad de tener que cambiar la dirección del desplazamiento de las partículas, en palabras llanas la ausencia de fuerzas en el eje y permitirá que el pulso solo cambie la dirección hacia donde se propaga.

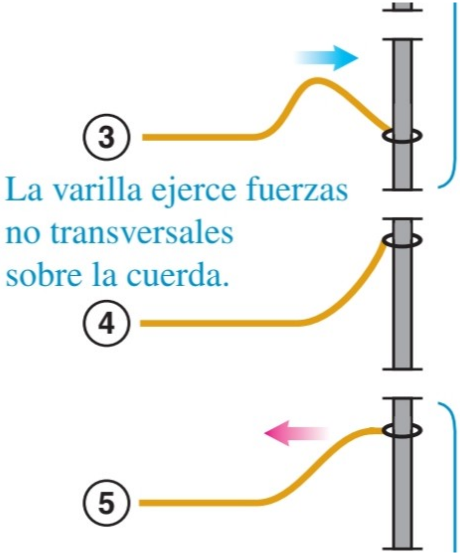

Figura 2: Reflexión en un punto libre

Identidad de Euler

De manera general recordemos la identidad de Euler:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$$

donde i es la unidad imaginaria $i = \sqrt{-1}$

algunas identidades importantes derivadas de lo anterior:

Identidades

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta \tag{1}$$

$$e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i \operatorname{sen}\theta \tag{2}$$

Fasores y ondas complejas

Recordando la función de onda definida anteriormente:

$$\Psi\left(x,t\right)=A\ \cos\left(kx\pm\omega t+\phi\right)$$

Definimos la onda compleja $\bar{\Psi}\left(x,t\right)$ como una función compleja de tal suerte que $Re\{\bar{\Psi}\left(x,t\right)\}=\Psi\left(x,t\right)$, donde $Re\{\}$ significa la parte real.

De la identidad de Euler y las propiedades de $Re\{\}$ se puede notar que la definición precisa de $\bar{\Psi}(x,t)$

Onda compleja

$$\bar{\Psi}(x,t) = Ae^{i(kx \pm \omega t + \phi)} \tag{3}$$

Para definir un fasor solo falta ajustar algunos detalles de la definición anterior, planteamos:

$$\bar{A} = Ae^{i\phi}$$

Finalmente:

Fasor de Ψ

$$\bar{\Psi}\,(x,t) = \bar{A}\,e^{i(kx \pm \omega t)}$$

Principio de superposición

Se tiene que si dos funciones cumplen la ecuación de onda, la suma de estas dos funciones también satisface la ecuación de onda, o de manera más géneral la suma de dos ondas resulta ser otra onda, de esto deriva el principio de superposición de ondas, si dos ondas viajan sobrepuestas sobre el mismo medio la onda resultante sera la suma de estas dos:

Principio de superposición

$$\Psi_{tot}\left(x,t\right)=\Psi_1\left(x,t\right)+\Psi_2\left(x,t\right) \tag{4}$$

Es posible notar que gracias a que la parte real de un número complejo separa la suma, el principio de superposición se respeta para fasores:

Principio de superposición (fasores)

$$Re\{\bar{\Psi}_{Tot}(x,t)\} = Re\{\bar{\Psi}_1(x,t)\} + Re\{\bar{\Psi}_2(x,t)\} = \Psi_{tot}(x,t) \quad (5)$$

Onda estacionaria

Tomemos dos ondas en fase que viajan en sentido opuestos en el mismo medio, estas cuentan con la misma velocidad angular, la misma amplitud, y el mismo número de onda:

$$\Psi_1(x,t) = A\cos(kx + \omega t + \phi)$$

$$\Psi_2(x,t) = A\cos(kx - \omega t + \phi)$$

Obteniendo los fasores de ambas ondas:

$$\bar{\Psi}_1\,(x,t) = \bar{A}\,e^{i(kx+\omega t)}$$

$$\bar{\Psi}_2\,(x,t) = \bar{A}\,e^{i(kx-\omega t)}$$

Por tanto el fasor total es:

$$\bar{\Psi}_{Tot} = \bar{A}\,e^{ikx}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) = 2\bar{A}\cos{(\omega t)}\,e^{ikx}$$

De donde se obtiene que la función de una onda estacionaria:

Onda estacionaria 1

$$Re\{\bar{\Psi}\,(x,t)\} = 2\,\cos\left(\omega t\right)\,\cos\left(kx+\phi\right) \tag{6}$$

El caso para un pulso invertido puede demostrarse fácilmente:

Onda estacionaria 2

$$Re\{\bar{\Psi}\,(x,t)\} = 2\,\operatorname{sen}\,(\omega t)\,\operatorname{sen}\,(kx+\phi) \tag{7}$$

Modos normales

Tomemos el caso de una onda estacionaria que viaja a través de una cuerda de longitud L, llamaremos **nodo** al punto que no se desplaza a lo largo del tiempo y **antinodo** a los puntos en los que la onda alcanza una amplitud máxima, debido a que la cuerda estara atada de ambos extremos tendremos dos nodos en los puntos $x = 0$, $x = l$, recordando la función definida para una onda estacionaria con un pulso invertido tendremos que:

$$\Psi\left(0, t\right) = 2 \, \operatorname{sen}\left(\omega t\right) \, \operatorname{sen}\left(0 + \phi\right) = 0$$

De donde se deduce que $\phi = n\pi$, lo cual solo afecta el signo de la función seno.

De la misma manera:

$$\Psi\,(l,t) = \pm 2\ \text{sen}\,(\omega t)\ \text{sen}\,(kl) = 0$$

De donde se sigue que:

$$kl = n\,\pi \implies \frac{2\pi}{\lambda}\,l = n\,\pi \implies l = n\,\frac{\lambda}{2}$$

Posteriormente:

$$f = \frac{v_p}{\lambda} = n\,\frac{v_p}{2l}$$

si n=1, estaremos hablando de la **Frecuencia fundamental**

Definimos los modos normales de una onda como:

Modos normales

$$\lambda_n = \frac{2\,l}{n} \qquad (n = 1, 2, 3....) \tag{8}$$

$$f_n = n\,\frac{v_p}{2l} \qquad (n = 1, 2, 3....) \tag{9}$$

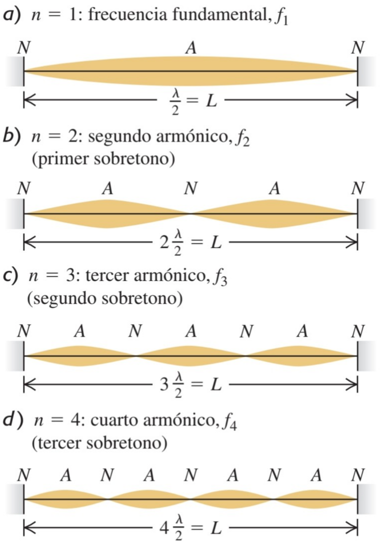

Figura 3: Modos normales de una cuerda

Los músicos suelen llamar a $f_2, f_3, ..., f_n$, como **sobretonos**, una manera intuitiva de bosquejar los sobretonos es tener en cuenta que para el n-esímo sobretono habra n puntos que son nodos diferentes de los extremos y n+1 antinodos a lo largo de la trayectoria, a su vez si se habla del n-esímo sobretono se estara hablando de f_{n+1}.

Tomemos el n-esímo sobretono, tenemos que sean x_1, x_2, dos nodos consecutivos, estos deben cumplir que:

$$x_1 = k\,\frac{\lambda}{2}$$

$$x_2 = (k+1)\,\frac{\lambda}{2}$$

$$x_2 - x_1 = \frac{\lambda}{2}$$

Si x_1 es antinodo debe cumplir:

$$\frac{2\pi}{\lambda}x_1 = \frac{\pi}{2} + n\pi \implies x_1 = \lambda\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{4}\right)$$

Por tanto la distancia entre dos antinodos concecutivos es:

$$x_2 - x_1 = \lambda\left(\frac{n+1}{2} + \frac{1}{4}\right) - \lambda\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{\lambda}{2}$$

De la misma manera si x_1 es un antinodo y x_2 un nodo, ambos consecutivos,se sigue:

$$x_1 = \lambda\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{4}\right) \qquad x_2 = (n+1)\frac{\lambda}{2}$$

Se concluye:

$$(n+1)\frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda n}{2} - \frac{\lambda}{4} = \frac{\lambda}{4}$$