Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Álgebra superior 1

¿El 0 es natural?

Elías López Rivera

elias.lopezr@ciencias.unam.mx

Fecha: 27/10/2024

Preambulo

Durante mi tiempo tomando clases dentro de la facultad de ciencias de la UNAM, en la Escuela Superior de Física y Matemáticas del IPN y la Escuela Superior de Cómputo del IPN he sido testigo de inumerables batallas agerridas, todas ellas centradas en un solo tema ¿Es el 0 un número natural?, no pude evitar formar un tabú en torno al tema pues no me sentía lo suficientemente preparado para lograr discutir sobre este es por ello que tome ***la biblia del álgebra superior (Laveaga)*** *y empece deseoso el estudio de los sistemas de Peano, para por fin hoy día poder expresar mi postura de manera argumentada y teórica.*

Problema

Sea (N, n_0, s) *un sistema de Peano, y sea* $f : N \to N'$ *una función biyectiva, definimos* $n'_0 = f(n_0) \in N'$ *y* $s' = f \circ s \circ f^{-1}$*, demuestre que* (N', n'_0, s') *es un sistema de Peano*

Demostración.

i) Es claro que s' es una función inyectiva pues es composición de inyectivas además afirmamos que $n'_0 \notin Im(s')$, para demostrarlo procedemos por contradicción, supongamos que $n'_0 = Im(s')$, esto implica que:

$$\exists\ l \in N' :\ s'(l) = n'_0$$

Usando la definición de s' y n'_0:

$$f \circ s \circ f^{-1}(l) = f(n_0)$$

Por las propiedades del sucesor s se sigue que $s(f^{-1}(l)) \neq n_0 \in N$, y como f es inyectiva $f \circ s \circ f^{-1}(l) \neq f(n_0)$, por tanto la conclusión anterior nos da una contradicción, concluimos que $n'_0 \notin Im(s')$

ii) Pasamos al meollo del asunto definimos $T \subseteq N'$, que cumple lo siguiente:

I. $n_0' \in T$

II. Si $r \in T$, entonces $s'(r) \in T$

Sin embargo nuestra argumentación no sera en torno a este conjunto si no a un invitado insospechado: $f^{-1}[T]$, lo primero intersante es lo siguiente $f^{-1}[T] \subseteq N$, ahora notemos algo más interesante aun como $n_0' \in T$ entonces $f(n_0) \in T$, por tanto $n_0 \in f^{-1}[T]$, ahora notemos que $r \in T$ si y solo sí $f^{-1}(r) \in f^{-1}[T]$(esto por la biyectividad de f), como $s'(r) \in T$ entonces $f \circ s \circ f^{-1}(r) \in T$, y por tanto $s \circ f^{-1}(r) \in f^{-1}[T]$, es decir $f^{-1}[T]$ cumple con el axioma de inducción del sistema (N, n_0, s), luego $f^{-1}[T] = N = f^{-1}[N']$, y finalmente $T = N'$ (de nuevo esto gracias a la biyectividad de f), conlcuimos que en (N', n_0', s') se cumple el axioma de inducción $\square$

Uno en primera estancia pensaria, y... ¿Esto cómo responde la pregunta?, este pequeño pero podersoso teorema esconde un hecho extraordinario, si tenemos un sistema de Peano basta un solo isomorfismo entre conjuntos para construir otro, y a nivel conjuntos como todos los sistemas de Peano son isomorfos, podriamos afirmar que estos en esencia se comportan de forma bonita bajo cualquier biyección, en palabras llanas esto es resumido por las palabras dichas por mi profesor de álgebra líneal en ESFM: "Puedes construir a "los naturales"donde tu quieras, el costo es tu inducción", consideremos lo siguiente:

Sean $l := \{1, 2, 3, 4, 5, ..., n\}$ y $r := \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ..., n\}$, bajo la visión extremista alguno de estos dos conjuntos es "los naturales", el sistema de Peano, sin embargo definamos la función $f : r \to l$, tal que $f(n) = n + 1$, Claramente esta es una función biyectiva y por tanto si uno es un sistema de Peano, entonces no hay duda el otro debe serlo, es decir 1 es natural si y solo si 0 es natural.

El parrafo anterior claramente carece de la formalidad deseada a propósito, nos estamos burlando de esta discusión, en esencia la pregunta si 0 es natural o no parece bien fundamentada y debe ser respondida de inmediato, sin embargo esta pelea esconde un desconocimiento de los conceptos básicos en matemáticas en principio la respuesta acertada seria depende, pero ¿Por qué depende?, depende a que llames tu un número natural, si un número natural es cualquier elemento dentro de un sistema de Peano estas dando cabida a que 0 es natural, pero no solo este es el punto polemico pues cosas como -1, -6, o $\emptyset$ también lo son (si no les gustaba el 0 imagina ahora), sin embargo los números naturales sin el 0 tienen una razón de ser si uno define el conjunto de los números naturales como la intersección de todos los conjuntos inductivos de $\mathbb{R}$ uno se dara cuenta que en efecto ni 0 ni -6 ni $\emptyset$ son números naturales.

La conclusión de todo esto es que la abstracción formal de los "números naturales"va mucho más alla de estos mismos, por tanto es natural que esta pueda abarcar una infinidad de casos donde "la esencia de los naturales existe", y entonces ¿por qué nacio toda esta pelea?, simple como nace cualquier pelea, un abuso de notación, es normal que en análisis usemos a los naturales como la intersección de conjuntos inductivos de $\mathbb{R}$ para que las ideas tengan sentido, a su vez es obvio que en álgebra preferimos la de sistema de Peano, sin embargo es engorroso estar mencionando cada 5 minutos que naturales son, por tanto se empezo a llamar de la misma manera a dos enfoques, dos construcciones que están encaminadas a resolver distintos problemas, derivando en lo más esperado, una pelea muy divertida.