Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Álgebra superior 2
Tarea examen 1
Elías López Rivera
`elias.lopezr@ciencias.unam.mx`
Fecha: 27/10/2024

Lema 1

Sea R un anillo conmutativo con 1 se cumple que $-(ac) = a(-c) \ \ \forall \ a, c \in R$

Demostración.

Sean $a, c \in R$, notemos que por la distributividad del producto sobre la suma:

$$ac + a(-c) = a(c + (-c))$$

Como $(-c) \in R$ es inverso para c:

$$ac + a(-c) = a(c + (-c)) = a(0)$$

Como en cualquier anillo conmutativo con 1 se cumple que $a(0) = 0$, para todo $a \in R$:

$$ac + a(-c) = a(c + (-c)) = a(0) = 0$$

Como en un anillo conmutativo con 1 los inversos son únicos se tiene que necesariamente $-(ac) = a(-c)$ $\square$

Problema 1

A partir de los naturales $\mathbb{N}$ *define* $\mathbb{Z} = (\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\sim$ *donde* $(n,m) \sim (k,l)$ *si y solo si* $n + l = m + k$ *.Induce las operaciones de suma y producto en* $\mathbb{Z}$ *utilizando aquellas de* $\mathbb{N}$*, demuestra que están bien definidas (en el sentido de que no dependen de los representantes) y demuestra que el resultado es un anillo conmutativo con 1 que contiene a* $\mathbb{N}$

Definimos $\oplus : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$:

$$[(n,m)] \oplus [(r,s)] = [(n+r, m+s)]$$

Donde $+$ es la suma definida en $\mathbb{N}$.
Definimos $\odot : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$:

$$[(n,m)] \odot [(r,s)] = [(nr + ms, mr + ns)]$$

donde $+$ es la suma definida en $\mathbb{N}$ y $\cdot$ es el producto en $\mathbb{N}$

Veamos que $\oplus$ no depende de los representantes:

Demostración.

Sean $[(n,m)]$, $[(r,s)]$, $[(l,k)]$, $[(f,g)]$, tal que $[(n,m)] = [(l,k)]$ y $[(r,s)] = [(f,g)]$, tenemos entonces que:

$$(n,m) \sim (l,k) \implies n + k = m + l$$

$$(r,s) \sim (f,g) \implies r + g = s + f$$

Por tanto usando que $+$ en $\mathbb{N}$ es asociativa y conmutativa (ignorando paréntesis):

$$n + k + r + g = m + l + s + f$$

Por tanto tenemos que:

$$[(n,m)] \oplus [(r,s)] = (n+r, m+s) \sim (l+f, k+g) = [(l,k)] \oplus [(f,g)]$$

Como ambos elementos estás relacionados sus clases de equivalencias son iguales:

$$[(n,m)] \oplus [(r,s)] = [(l,k)] \oplus [(f,g)]$$

$\square$

Ahora veamos que $\odot$ no depende de los representantes:

Demostración.

Sean $[(n,m)]$, $[(r,s)]$, $[(l,k)]$, $[(f,g)]$, tal que $[(n,m)] = [(l,k)]$ y $[(r,s)] = [(f,g)]$, tenemos entonces que:

$$(n,m) \sim (l,k) \implies n+k = m+l$$

$$(r,s) \sim (f,g) \implies r+g = s+f$$

Por tanto tenemos que:

$$r(n+k) + s(m+l) + l(r+g) + k(s+f) = r(m+l) + s(n+k) + l(s+f) + k(r+g)$$

Utilizando la distributividad del producto sobre la suma de $\mathbb{N}$ asi como sus respectivas conmutatividades obtenemos:

$$rn + rk + sm + sl + lr + lg + ks + kf = mr + lr + ns + ks + sl + fl + rk + gk$$

Como las leyes de cancelación son validas para la suma en $\mathbb{N}$:

$$nr + ms + gl + kf = mr + ns + lf + kg$$

Por tanto tenemos que:

$$[(n,m)] \odot [(r,s)] = (nr + ms, mr + ns) \sim (lf + kg, gl + kf) = [(l,k)] \odot [(f,g)]$$

omo ambos elementos estás relacionados sus clases de equivalencias son iguales:

$$[(n,m)] \odot [(r,s)] = [(l,k)] \odot [(f,g)]$$

$\square$

Demostraremos que $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$ es un anillo conmutativo con 1

i) $(\mathbb{Z}, \oplus)$ es grupo abeliano:

- **a) Conmutatividad**

  $\forall\ [(n,m)], [(r,s)] \in \mathbb{Z} : ([(n,m)] \oplus [(r,s)] = [(r,s)] \oplus [(n,m)])$

Demostración.

Sean $[(n,m)],[(r,s)] \in \mathbb{Z}$, tenemos que:

$$[(n,m)] \oplus [(r,s)] = [(n+r, m+s)]$$

Como $+$ es conmutativa en $\mathbb{N}$:

$$[(n,m)] \oplus [(r,s)] = [(n+r,m+s)] = [(r+n,s+m)] = [(r,s)] \oplus [(n,m)]$$

$\square$

- **b) Asociatividad**

  $\forall\ [(n,m)],[(r,s)],[(t,u)] \in \mathbb{Z} : (\ [(n,m)] \oplus (\ [(r,s) \oplus [(t,u)]]\ ) = (\ [(n,m)] \oplus [(r,s)]\ ) \oplus [(t,u)]\ )$

  Demostración.

  Sean $[(n,m)],[(r,s)],[(t,u)] \in \mathbb{Z}$, tenemos que:

  $$[(n,m)] \oplus (\ [(r,s) \oplus [(t,u)]]\ ) = [(n+(r+t), m+(s+u))]$$

  Debido a que $+$ es asociativa en $\mathbb{N}$:

  $$[(n,m)] \oplus (\ [(r,s) \oplus [(t,u)]]\ ) = [(n+(r+t), m+(s+u))]$$

  $$= [((n+r)+t, (m+s)+u)] = (\ [(n,m)] \oplus [(r,s)]\ ) \oplus [(t,u)]$$

  $\square$

- **c) Existencia de neutro**

  $\exists\ [(0,0)] \in \mathbb{Z} : (\forall\, [(n,m)] \in \mathbb{Z} : [(n,m)] \oplus [(0,0)] = [(n,m)])$

  Demostración.

  Sea $[(n,m)] \in \mathbb{Z}$, veamos que:

  $$[(n,m)] \oplus [(0,0)] = [(n+0, m+0)]$$

  Como $0 \in \mathbb{N}$ es neutro para $+$ se tiene que:

  $$[(n,m)] \oplus [(0,0)] = [(n+0,m+0)] = [(n,m)]$$

  $\square$

- **d) Existencia de inversos**

  $\forall\, [(n,m)] \in \mathbb{Z}(\exists\, [(m,n)] \in \mathbb{Z} : [(m,n)] \oplus [(n,m)] = [(0,0)])$

  Demostración.

  Sean $[(m,n)], [(n,m)] \in \mathbb{Z}$, se cumple que:

  $$[(n,m)] \oplus [(m,n)] = [(n+m, m+n)]$$

  Por la conmutatividad de $+$ en $\mathbb{N}$ y que $0 \in \mathbb{N}$ es neutro para $+$

  $$(n+m)+0 = (m+n)+0 \implies (n+m, m+n) \sim (0,0)$$

  Como ambos elementos estan relacionados bajo la relación de equivalencia $\sim$, tenemos que sus clases de equivalencia son necesariamente iguales:

  $$[(n+m, m+n)] = [(0,0)]$$

  Por tanto:

  $$[(n,m)] \oplus [(m,n)] = [(n+m, m+n)] = [(0,0)]$$

  $\square$

De **a), b), c), d)** se sigue que $(\mathbb{Z}, \oplus)$ es un grupo abeliano.

ii) Demostraremos que $(\mathbb{Z}, \odot)$ es un monoide conmutativo.

- **a) Conmutatividad**

  $\forall\ [(n,m)],\ [(r,s)] \in \mathbb{Z}\,([(n,m)] \odot [(r,s)] = [(r,s)] \odot [(n,m)])$

  Demostración.

  Sean $[(n,m)],\ [(r,s)] \in \mathbb{Z}$ tenemos que:

  $$[(n,m)] \odot [(r,s)] = [(nr+ms, mr+ns)]$$

  Como el producto de $\mathbb{N}$ y la suma de $\mathbb{N}$ es conmutativo:

$$[(n,m)] \odot [(r,s)] = [(nr+ms, mr+ns)] = ([rn+sm, sn+rm]) = [(r,s)] \odot [(n,m)]$$

$\square$

- **b) Asociatividad**

  $\forall\ [(n,m)], [(r,s)], [(t,u)] \in \mathbb{Z} : (\ [(n,m)] \odot (\ [(r,s) \odot [(t,u)]]\ ) = (\ [(n,m)] \odot [(r,s)]\ ) \odot [(t,u)]\ )$

  Demostración.

  $$[(n,m)] \odot (\ [(r,s) \odot [(t,u)]]\ ) = [(n,m)] \odot [(rt+su, st+ru)] = [(n(rt+su)+m(st+ru), m(rt+su)+n(st+ru))]$$

  Aplicando la distributividad del producto sobre la suma $\mathbb{N}$:

  $$[(n,m)] \odot (\ [(r,s) \odot [(t,u)]]\ ) = [(n(rt)+n(su)+m(st)+m(ru), m(rt)+m(su)+n(st)+n(ru))]$$

  Aplicando la asociatividad del procuto de $\mathbb{N}$

  $$[(n,m)] \odot (\ [(r,s) \odot [(t,u)]]\ ) = [((nr)t+(ns)u+(ms)t+(mr)u, (mr)t+(ms)u+(ns)t)+(nr)u)]$$

  Aplicando de nuevo la distributividad del producto sobre la suma de $\mathbb{N}$

  $$\begin{aligned} [(n,m)] \odot (\ [(r,s) \odot [(t,u)]]\ ) &= [(t(nr+ms)+u(ns+mr), t(mr+ns)+u(ms+nr)u+)] \\ &= [(nr+ms, ns+mr)] \odot [(t,u)] \\ &= (\ [(n,m)] \odot [(r,s)]\ ) \odot [(t,u)]\ ) \end{aligned}$$

  $\square$

- **c) Existencia de neutro**

  $\exists\ [1,0] \in \mathbb{Z}(\forall\ [(n,m)] \in \mathbb{Z} : [(n,m)] \odot [(0,1)] = [(n,m)])$

  Demostración.

  Tomemos $[(n,m)] \in \mathbb{Z}$, tenemos que:

  $$[(n,m)] \odot [(0,1)] = [(n0+m1, m0+n1)]$$

  Como el producto en $\mathbb{N}$ cumple que $n0 = 0\ \ \forall\, n \in \mathbb{N}$ y 1 es neutro para el producto tenemos que:

  $$[(n,m)] \odot [(0,1)] = [(n0+m1, m0+n1)] = [(0+m, 0+n)]$$

Como 0 es neutro para + en $\mathbb{N}$ finalmente:

$$[(n,m)] \odot [(0,1)] = [(n,m)]$$

$\square$

De **a), b), c)** tenemos que $(\mathbb{Z}, \odot)$ es un monoide conmutativo

iii) Demostraremos la distributividad de $\odot$ sobre $\oplus$ en $\mathbb{Z}$ (solo lo haremos por la derecha pues tanto $\odot$ como $\oplus$ son conmutativas)

$\forall\, [(n,m)],\ [(r,s)],\ [(l,t)] \in \mathbb{Z} : (\, [(n,m)] \odot\ ([(r,s)] \oplus [(l,t)]) = (\, [(n,m)] \odot [(r,s)]\,) \oplus (\, [(n,m)] \odot [(l,t)]\,)\,)$

Demostración.

Sean $[(n,m)]$, $[(r,s)]$, $[(l,t)] \in \mathbb{Z}$ se sigue que:

$$[(n,m)] \odot\ ([(r,s)] \oplus [(l,t)]) = [(n,m)] \odot [(r+l, s+t)] = [(n(r+l) + m(s+t), m(r+l) + n(s+t))]$$

Como el producto de $\mathbb{N}$ se distribuye sobre su suma:

$$[(n,m)] \odot\ ([(r,s)] \oplus [(l,t)]) = [(nr + nl + ms + mt, mr + ml + ns + nt)]$$

Usando la conmutatividad del producto y de la suma en $\mathbb{N}$:

$$[(n,m)] \odot ([(r,s)] \oplus [(l,t)]) = [(nr+ms, mr+ns)] \oplus [(nl+mt, ml+nt)] = (\, [(n,m)] \odot [(r,s)]\,) \oplus (\, [(n,m)] \odot [(l,t)])$$

$\square$

De **i), ii), iii)** tenemos que $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$ es un anillo conmutativo con 1

Ahora definimos la función $i : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, de tal manera que $i(n) = [(n,0)]$, si reestringimos i de la siguiente manera $i : \mathbb{N} \to i[\mathbb{N}] \subset \mathbb{Z}$, donde $i[\mathbb{N}]$ es la imagen de $\mathbb{N}$ bajo i obtenemos una función suprayectiva, bastaria probar que i es inyectiva para argumentar la biyección entre $\mathbb{N}$ y un subconjunto de $\mathbb{Z}$, lo que nos animaria a decir que $\mathbb{N}$ esta contenido en $\mathbb{Z}$, procedemos a demostrarlo:

Demostración.

Sean $m, n \in \mathbb{N}$ tal que $i(n) = i(m)$, se sigue que:

$$i(n) = [(n,0)] = [(m,0)] = i(m)$$

Como las clases son iguales los representantes necesariamente están relacionados:

$$(n,0) \sim (m,0) \implies n + 0 = m + 0$$

De nuevo como $0 \in \mathbb{N}$ es neutro para $+$ se sigue que:

$$n = m$$

Por tanto i es suprayectiva $\square$

Problema 2

Demuestra que para todo elemento $[(n,m)] \in \mathbb{Z}$ se satisface exactamente una de las siguientes afirmaciones:

- *Existe $c \in \mathbb{N}/\{0\}$ tal que $[(n,m)] = [(c,0)]$*
- $[(n,m)] = [(0,0)]$
- *Existe $c \in \mathbb{N}/\{0\}$ tal que $[(n,m)] = [(0,c)]$*

Demostración.

Sean $n, m \in N$ por tricotomia tenemos tres casos:

- $m < n$
- $n = m$
- $n < m$

i) Primero tomemos que $n < m$, por la definición del orden en $\mathbb{N}$ tenemos que:

$$\exists\ c \in \mathbb{N}/\{0\} :\ n = m + c$$

Usando que 0 es neutro para la suma definida en $\mathbb{N}$, tenemos que:

$$n + 0 = m + c$$

Y por la relación de equivalencia definida anteriormente:

$$n + 0 = m + c \implies (n,m) \sim (c,0)$$

Como estos dos elementos están relacionados sus clases de equivalencia son iguales necesariamente:

$$[(n,m)] = [(c,0)]$$

ii) Ahora tomemos que $n = m$, usando nuevamente que el 0 es neutro para la suma de $\mathbb{N}$:

$$n + 0 = m + 0$$

De nuevo por la relación de equivalencia definida anterioemente:

$$n + 0 = m + 0 \implies (n,m) \sim (0,0)$$

Como estos dos elementos están relacionados sus clases de equivalencia son iguales necesariamente:

$$[(n,m)] = [(0,0)]$$

iii) Finalmente tomamos el caso $m < n$, por la definición del orden en $\mathbb{N}$ tenemos que:

$$\exists\ c \in \mathbb{N}/\{0\} :\ m = n + c$$

Usando que 0 es neutro para la suma definida en $\mathbb{N}$, tenemos que:

$$n + c = m + 0$$

Y por la relación de equivalencia definida anteriormente:

$$n + c = m + 0 \implies (n,m) \sim (0,c)$$

Como estos dos elementos están relacionados sus clases de equivalencia son iguales necesariamente:

$$[(n,m)] = [(0,c)]$$

$\square$

Problema 3

Demuestra que un elemento u de un anillo conmutativo con 1 tiene a lo más un inverso multiplicativo

Demostración.

Sea $a \in R$ tal que existe $u \in R$ con $a(u) = 1$, demostraremos que si se tiene que $a(u') = 1$, necesariamente $u' = u$:

$$a(u) = 1 = a(u')$$

Como $a(u') \in R$ tenemos que existe $-a(u') \in R$, sumando este de ambos lados:

$$a(u) + (-au') = a(u') + (-au') = 0$$

Aplicando el lema 1 tenemos que $-au' = a(-u')$ y la distributividad del producto sobre la suma:

$$a(u) + (-au') = a(u + (-u')) = 0$$

Multiplicando ambos lados por u:

$$u(a(u + (-u'))) = 0u$$

Usando el hecho de que $0u = 0$ para todo $u \in R$, y la asociatividad del producto:

$$(ua)(u + (-u')) = 0$$

Usando la conmutatividad del producto y nuestra hipótesis:

$$(ua)(u + (-u')) = (au)(u + (-u')) = 1(u + (-u')) = 0$$

Como 1 es neutro para el producto:

$$u + (-u') = 0 = u' + (-u')$$

Como las leyes de cancelación son validas para la suma en un anillo conmutativo con 1 se concluye que:

$$u = u'$$

$\square$

Problema 4

Demuestra: $\forall\ a, b \in \mathbb{Z}\,(a > 0\ \wedge\ b > 0\ a^2 > b^2 \implies a > b)$

Demostración.

Por proposición tenemos que segun la proposición 1 $\forall\ a, b, c, \in \mathbb{Z} : (a < b \implies a + c < b + c)$, sea $-b^2 \in \mathbb{Z}$ el inverso aditivo de b^2:

$$a^2 + (-b^2) > b^2 + (-b^2)$$

Por tanto:

$$a^2 - b^2 > 0$$

Luego tomemos $(a + b)(a - b)$, aplicando la distributividad del producto sobre la suma

$$(a + b)(a - b) = (a(a + b) - b(a + b)) = a^2 + ab - b(a) - b(b)$$

Aplicando la conmutatividad y el lema 1:

$$(a + b)(a - b) = a^2 + ab - ab - b^2 = a^2 + b^2$$

Ahora por hipótesis $a > 0\ \wedge\ b > 0$, por tanto $a + b > 0 + a > 0$ esto por la proposición 1, luego tenemos que $(a - b) > 0$, pues de otra manera por la proposiciń 2 $\forall\ a, b \in \mathbb{Z} : (a > 0 \wedge b < 0 \implies ab < 0)$ tendriamos que:

$$(a + b), (a - b) \in \mathbb{Z} : (a + b) > 0 \wedge (a - b) < 0 \implies a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) < 0$$

Lo que contradice nuestra hipótesis, por tanto usando nuestra proposición 1 tenemos que:

$$a - b > 0 \implies a - b + b > 0 + b \implies a > 0$$

$\square$

Problema 5

Demuestra que un dominio entero R se vale la ley de cancelación: $\forall\ a, b, c \in R\,(a \neq 0\ ab = ac \implies b = c)$

Demostración.

Tomamos $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tal que $a \neq 0$, tenemos que:

$$ab = ac$$

Como ac es un elemento del dominio entero R, entonces este tiene un único inverso $-(ac) \in R$, sumando por ambos lados tenemos que:

$$ab + (-ac) = ac + (-ac)$$

Como $-(ac)$ se definio como el inverso bajo $+$ de ac, se sigue que:

$$ab + (-ac) = 0$$

Como $ab, -(ac) \in R$, podemos aplicar el lema 1 y posteriormente la distribución del producto sobre la suma:

$$ab + (-ac) = ab + a(-c) = a(b + (-c)) = 0$$

Como R es dominio entero necesariamente $a = 0$ o $(b + (-c)) = 0$, como por hipótesis $a \neq 0$, entonces $(b + (-c)) = 0$, por tanto sumando c a ambos lados de la igualdad:

$$b + (-c) + c = 0 + c \implies b + 0 = 0 + c \implies b = c$$

$\square$

Problema 6

Demuestra que un elemento $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ *del anillo de series formales* $\mathbb{Q}\,[[x]]$ *con coeficientes en* $\mathbb{Q}$ *es una unidad en* $\mathbb{Q}[[x]]$ *si y solo si* $a_0 \neq 0$

$\Longrightarrow$) Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ es una unidad en el anillo de series formales $\mathbb{Q}\,[[x]]$ con coeficientes en $\mathbb{Q}$, entonces $a_0 \neq 0$

Demostración.

Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ una unidad en $\mathbb{Q}[[x]]$ tenemos que se cumple:

$$\exists \sum_{n=0}^{n} b_n\, x^n \in \mathbb{Q}[[x]] : \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n \odot \sum_{n=0}^{\infty} b_n\, x^n = \bar{1}$$

Donde $\odot$ es el producto definido en $\mathbb{Q}[[x]]$ y $\bar{1}$ es el neutro para este producto, por tanto aplicando la definición de este

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n \odot \sum_{n=0}^{\infty} b_n\, x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k+l=n} a_n\, b_n\, x^n$$

Expandiendo esta serie de potencias y reescribiendo a $\bar{1}$ en su forma de serie de potencia:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n \odot \sum_{n=0}^{\infty} b_n\, x^n = a_0 b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k+l=n} a_n\, b_n\, x^n = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} 0\, x^n$$

Como dos series de potencias son iguales si y solo si todos sus terminos son iguales:

$$a_0 b_0 = 1 \quad y \quad 0 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k+l=n} a_n\, b_n\, x^n$$

Por tanto a_0 es una unidad en $\mathbb{Q}$, lo que implica que es diferente de 0. $\square$

$\Leftarrow$) Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ es tal que $a_0 \neq 0$ entonces $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ es unidad en $\mathbb{Q}[[x]]$

Demostración.

Como $a_n \neq 0$ entonces a_n es una unidad en $\mathbb{Q}$, por tanto construimos $\sum_{n=0}^{\infty} b_n\, x^n$, tal que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n \odot \sum_{n=0}^{\infty} b_n\, x^n = \bar{1}$$

De donde se obtiene que:

$$a_0 b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l+k=n} a_l b_k x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 0\, x^n$$

Que es equivalente a:

$$a_0 b_0 = 1 \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \left(\sum_{l+k=n} a_l b_k = 0 \right)$$

De aqui se sigue inmediatamente que $b_0 = a_0^{-1}$ donde a_0^{-1} es el inverso multiplicativo de a_0, ahora para obtener b_{n+1} con $n \geq 1$ proponemos un proceso recursivo, supongamos que para $0 \leq r \leq n$, tenemos calculados los valores b_r, para obtener b_{n+1} proponemos lo siguiente:

$$\sum_{k+l=n+1} a_k b_l = \sum_{k=0}^{n+1} a_{n+1-k} b_k = 0$$

Esta igualdad es valida ya que el producto es conmutativo en $\mathbb{Q}$, por tanto reescribiendo:

$$a_0 b_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} a_{n+1-k} b_k = 0$$

Como $\sum_{k=0}^{n} a_{n+1-k} b_k \in \mathbb{Q}$ y este es un anillo afirmamos la existencia de $-\sum_{k=0}^{n} a_{n+1-k} b_k \in \mathbb{Q}$ por tanto como a_0^{-1} también existe proponemos que:

$$b_{n+1} = a_0^{-1} \left(-\sum_{k=0}^{n} a_{n+1-k} b_k \right)$$

Vemos que todos los terminos de esta suma son conocidas pues conocemos todos los b_r con $0 \leq r \leq n$, veamos que:

$$a_0 \left(a_0^{-1} \left(-\sum_{k=0}^{n} a_{n+1-k} b_k \right) \right) + \sum_{k=0}^{n} a_{n+1-k} b_k$$

Aplicando la asociatividad del producto y la propiedad del neutro multiplicativo en $\mathbb{Q}$:

$$(a_0\, a_0^{-1}) \left(-\sum_{k=0}^{n} a_{n+1-k} b_k \right) + \sum_{k=0}^{n} a_{n+1-k} b_k = -\sum_{k=0}^{n} a_{n+1-k} b_k + \sum_{k=0}^{n} a_{n+1-k} b_k = 0$$

Por tanto construimos la serie:

$$b_0 + a_0^{-1} \left(-\sum_{k=0}^{0} a_{1-k} b_k \right) x + a_0^{-1} \left(-\sum_{k=0}^{1} a_{2-k} b_k \right) x^2 + \cdots + a_0^{-1} \left(-\sum_{k=0}^{n} a_{n+1-k} b_k \right) x^{n+1} + \cdots$$

Que es el inverso para $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} a_n\, x^n$

$\square$