Problema 11

Elías López Rivera [1]

[1] Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de ciencias

26 de enero de 2025

1. Enunciado

Sea $0 < b < 1$ en $\mathbb{N}$. **Demuestre** que:

$$\lim_{n\to\infty} nb^n = 0$$

2. Solución

Sea $0 < b < 1 \implies \frac{1}{b} > 1$, definimos $\frac{1}{b} := 1 + k_n$ para algún $k_n > 0$, se sigue $b = \frac{1}{1+k_n}$. Aplicando teorema del binomio:

$$(1+k_n)^n = 1 + \tfrac{n}{1!}\,k_n + \tfrac{n(n-1)}{2!}\,k_n^2 + ... + k_n^n$$

se sigue:

$$(1+k_n)^n > \tfrac{n(n-1)}{2!}\,k_n^2 \implies \tfrac{1}{(1+kn)^n} < \tfrac{2}{n(n-1)k_n^2}$$

Por tanto:

$$|nb^n| = nb^n = \tfrac{n}{(1+k_n)^n} < \tfrac{2}{(n-1)k_n^2} < \tfrac{2}{n-1}$$

Ahora demostremos por inducción que $n - 1 \geq \frac{n}{2}\ \forall\, n > 1$ en $\mathbb{N}$

i)Base de inducción

$$2 - 1 = \tfrac{2}{2}$$

ii) Hipótesis de inducción

$$n - 1 \geq \tfrac{n}{2} \text{ para algún } n \in \mathbb{N}$$

iii) $P(n) \implies P(n+1)$

$$n - 1 \geq \tfrac{n}{2} \implies 2n - 2 \geq n \implies 2n \geq n + 2 > n + 1 \implies n > \tfrac{n+1}{2}$$

Se concluye la tesís.

$$n > 1 : |nb^n| < \tfrac{4}{n}$$

Sea $\delta := \frac{\epsilon}{4}$, para $\epsilon > 0$:

$$\exists\, K \in \mathbb{N} : n > max\{1, K\} \implies |nb^n| < 4\delta = \epsilon$$

Como épsilon es arbitrario concluimos:

$$\lim_{n \to \infty} nb^n = 0$$