Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Álgebra lineal

Tarea examen 1

Elías López Rivera[1] Adolfo Angel Cardoso Vasquez[2]

Emiliano Gómez Hernández[3]

{[1] `elias.lopezr`, [2] `acardosov2400`, [3]`emiliano_gomez`}`@ciencias.unam.mx`

Fecha: 20/10/2024

Problema 1

Sea:

$$F = \{0, 1\}$$

con las operaciones modulo 2 definidas, es decir:

I. ***Suma:*** $0 + 0 = 0$, $0 + 1 = 1, 1 + 1 = 0$, $1 + 0 = 1$

II. ***Multiplicación:*** $1 \cdot 1 = 1$, $0 \cdot 0 = 0$, $0 \cdot 1 = 0$, $1 \cdot 0 = 0$

a) *Verificar que la multiplicación es una operación asociativa, que posee elemento neutro* 1 *y cada elemento distinto de* 0 *posee inverso multiplicativo*

b) *Confirmar la distributividad del producto sobre la suma*

Concluir que F *es un campo*

Demostración.

a) Veamos la siguiente tabla para la operación de multiplicación

$\cdot$	1	1
0	0	0
1	0	1

Como la tabla es simetrica respecto a la diagonal por tanto la operación es asociativa, vemos que 1 es un elemento neutro, y que este posee un iverso multiplicativo (el mismo)

b) Para comprobar la distributividad de la multiplicación sobre la suma lo comprobamos manualmente:

$$
\begin{aligned}
0(0+0) &= 0 = 0(0)+0(0)\\
0(0+1) &= 0 = 0(0)+0(1)\\
0(1+1) &= 0 = 0(1)+0(1)\\
1(0+0) &= 0 = 1(0)+1(0)\\
1(0+1) &= 1 = 1(0)+1(1)\\
1(1+0) &= 1 = 1(1)+1(0)\\
1(1+1) &= 0 = 1(1)+1(1)
\end{aligned}
$$

Por tanto la multiplicación se distribuye sobre la suma, como $(F,+)$ y $(F-\{0\},\cdot)$ son grupos abelianos se concluye que F es un campo $\square$

Problema 2

Sea:

$$F = \mathbb{Z}_6 = \{0,1,2,3,4,5\}$$

con las operaciones modulo 6 definidas, es decir:

I. ***Suma***: *Definida por:*

$$a \oplus b = a + b + 1$$

II. ***Multiplicación***: *Definido por:*

$$a \odot b = a \cdot b + a + b$$

a) *Verificar que $(F,\oplus)$ es un grupo abeliano. En particular, determinar el elemento neutro $(e_\oplus)$ y encontrar la fórmula del inverso aditivo de un elemento a.*

b) *Verificar que $(F-\{e_\oplus\},\odot)$ es un grupo abeliano. Es decir identificar el elemento neutro mutiplicativo $e_\odot$, y para cada $a\in F$ con $a\neq e_\odot$, determinar si existe un iverso multiplicativo*

c) *Comprobar la propiedad distributiva*

$$a\odot(b\oplus c) = (a\odot b)\oplus(a\odot c)$$

Demostración.

a) Veamos la siguiente tabla de $\oplus$:

$\oplus$	0	1	2	3	4	5
0	1	2	3	4	5	0
1	2	3	4	5	0	1
2	3	4	5	0	1	2
3	4	5	0	1	2	3
4	5	0	1	2	3	4
5	0	1	2	3	4	5

Como la tabla es simetrica respecto a la diagonal se sigue que $\oplus$ es asociativa y conmutativa, luego podemos notar que $e_\oplus = 5$, ahora notemos que $e_\oplus$ es su propio inverso, para $a \neq e_\oplus$, tenemos que siu inverso sera $4 - a$ pues $a \oplus (4 - a) = a + (4 - a) + 1 = 5$, por tanto $(F, \oplus)$ es grupo abeliano

b) Veamos la siguiente table de $\odot$:

$\odot$	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	3	5	1	3	5
2	2	5	2	5	2	5
3	3	1	5	3	1	5
4	4	3	2	1	0	5
5	5	5	5	5	5	5

Notamos que el $e_\odot = 0$, ademas de que no todo elemento en F cuenta con inverso multiplicativo por tanto $(F - \{e_\oplus\}, \odot)$ no es grupo abeliano

c) Veamos que:

$$a \odot (b \oplus c) = a \oplus (b + c + 1) = a(b + c + 1) + a + b + c + 1 = (ab + a + b) + (ac + a + c) + 1 = (a \odot b) \oplus (a \odot c)$$

$\square$

Problema 3

Sea:

$$F = \{a + b\,\sqrt{2}\,|a,\, b \in \mathbb{Q}\}$$

con las operaciones de suma y multiplicación:

a) *Comprobar que F es cerrado bajo la suma y la multiplicación de $\mathbb{Q}$*

b) *Demostrar que existe un elemento neutro para la suma (el cero) y para la multiplicación (1)*

c) *Para cada elemento $x = a + b\,\sqrt{2}$ con $x \neq 0$, encontrar o demostrar la existencia de su inverso multiplicativo en F*

d) *Verificar las demas propiedades: existencia de inversos aditivos, asociatividad, conmutatividad y distributividad*

Concluir que F es un campo

Demostración.

a) Tomemos $x, y \in F$, tenemos que:

$$x + y = (a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2}) = (a + c) + (d + b)\sqrt{2}$$

Como $(a + c) \in \mathbb{Q}$ y $(b + d) \in \mathbb{Q}$, se tiene que $x + y \in F$

Ahora veamos que:

$$x(y) = (a + b\sqrt{2})(c + d\sqrt{2}) = ac + ad\sqrt{2} + cb\sqrt{2} + cd(2) = (ac + 2cd) + (cb + ad)\sqrt{2}$$

Como $(ac + 2cd) \in \mathbb{Q}$ y $(cb + ad) \in \mathbb{Q}$, tenemos que $x(y) \in F$

b) Tenemos que $0 = 0 + 0\,\sqrt{2}$, como $0 \in F$, entonces $0 \in F$, como las operaciones de suma y multiplicación son las usuales se tiene que:

$$x + 0 = a + b\,\sqrt{2} + 0 = x \;\; \forall\, x \in F$$

Por tanto $(F, +)$ tiene un elemento neutro 0.

De la misma manera tenemos que $1 = 1 + \sqrt{2}0$, es decir $1 \in F$, ademas de que:

$$1(x) = 1(a + \sqrt{2}b) = a + \sqrt{2}b = x \ \ \forall\, x \in F$$

Por tanto $(F, \cdot)$ tiene un elemento neutro 1

c) Sea $x \in F$ tal que $x \neq 0$, se tiene que $x = a + \sqrt{2}b \neq 0 \implies a \neq \sqrt{2}b$, y por tanto $a - \sqrt{2}b \neq 0$, es decir $(a + \sqrt{2}b)(a - \sqrt{2}b) = a^2 - 2b^2 \neq 0$, por tanto tenemos que:

$$x \left(\frac{a - \sqrt{2}b}{a^2 - 2b^2} \right) = (a + \sqrt{2}b) \left(\frac{a - \sqrt{2}b}{a^2 - 2b^2} \right) = \frac{a^2 - 2b^2}{a^2 - 2b^2} = 1 \ \ \forall\, x \in F$$

Por tanto $(F, \cdot)$ tiene elementos inversos

d) Sea $x = a + \sqrt{2}b$, definimos $-x = -a - b\sqrt{2} \in F$, luego tenemos que $x + (-x) = a + (-a) + \sqrt{2}(b + (-b)) = 0$, por tanto $(V, +)$, tiene inversos aditivos

Como $F \subset \mathbb{R}$ y $\mathbb{R}$ es un campo bajo las misma operaciones usuales, ademas que F es cerrado bajo estas, la conmutatividad y asociatividad de $+, \cdot$ son heredadas, a su vez que la distributividad de $\cdot$ sobre $+$, de esto se sigue que $(F, +)$ y $(F - \{0\}, \cdot)$ son grupos abelianos, y por la distributividad se sigue que $(F, \cdot, +)$ es un campo $\square$

Problema 4

Sea $F = \mathbb{Z}$ con la operaciones definidas de la siguiente forma:

- **Suma:** Para $a, b \in \mathbb{Z}$ se define

$$a \oplus b = a + b - 1.$$

- **Producto:** Para $a, b \in \mathbb{Z}$ se define

$$a \odot b = a \cdot b - a - b + 2.$$

I. Demostrar que $(F, \oplus)$ es un grupo abeliano. En particular, determinar el elemento neutro aditivo $e_\oplus$ y hallar el inverso aditivo de un elemento a.

II. Determinar el elemento neutro multiplicativo $e_\odot$ en $(F \setminus \{e_\oplus\}, \odot)$ y comprobar que no todo elemento $a \in F$ con $a \neq e_\oplus$ tiene inverso multiplicativo.

III. Verificar la distributividad de $\odot$ respecto a $\oplus$

Concluir que $(F, \oplus, \odot)$ no es un campo

Demostración

(I)

- **Asociatividad**
  Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}(a \oplus b) \oplus c &= (a + b - 1) + c - 1 \\ &= a + (b - 1 + c) - 1 \\ &= a + (b + c - 1) - 1 \\ &= a \oplus (b \oplus c).\end{aligned}$$

- **Conmutatividad**
  Sean $a, b \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}a \oplus b &= a + b - 1 \\ &= b + a - 1 \\ &= b \oplus a.\end{aligned}$$

- **Neutro**
  Proponemos $e_\oplus \in \mathbb{Z}$ como $e_\oplus = 1$, de este modo $\forall a \in \mathbb{Z}$

$$a \oplus e_\oplus = a + 1 - 1 = a,$$

  en efecto $e_\oplus$ es el neutro.

- **Inverso**
  Sea $a \in \mathbb{Z}$ proponemos $b = -a + 2 \in \mathbb{Z}$, de modo que

$$a \oplus b = a + (-a + 2) - 1 = (a + (-a)) + (2 + (-1)) = 0 + 1 = 1 = e_\oplus.$$

  Es decir b es el inverso de a.

$\therefore$ $(F, \oplus)$ es un grupo abeliano.

(II)
Proponemos $e_{\odot} \in \mathbb{Z} \setminus \{e_{\oplus}\}$ como $e_{\odot} = 2$, de este modo $\forall a \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} a \odot e_{\odot} &= a \cdot 2 - a - 2 + 2 \\ &= a. \end{aligned}$$

Por tanto $e_{\odot}$ es el neutro multiplicativo.
Supongamos que $\forall a \in \mathbb{Z} \setminus \{1\} \, \exists b \in \mathbb{Z} \setminus \{1\} \quad (a \odot b = e_{\odot})$, es decir

$$\begin{aligned} 2 &= a \odot b \\ 2 &= a \cdot b - a - b + 2 \\ 0 &= a \cdot b - a - b \\ 0 &= b(a-1) - a \\ a &= b(a-1). \end{aligned}$$

De modo que si $a = 3$ entonces b no puede ser entero, por lo que no todo elemento en $(F \setminus \{e_{\oplus}\}, \odot)$ tiene inverso multiplicativo.

(III)
Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} a \odot (b \oplus c) &= a \odot (b + c - 1) \\ &= a(b + c - 1) - a - (b + c - 1) + 2 \\ &= ab + ac - a - a - b - c + 2 \\ &= (ab - a - b + 2) + (ac - a - c + 2) - 2 \\ &= ((a \odot b) + (a \odot c) - 1) - 1 \\ &= (a \odot b) \oplus (a \odot c) - 1 \end{aligned}$$

Es decir en general las operaciones no son distributivas.

$\therefore$ $(F, \oplus, \odot)$ no es un campo, pues no cumple con todas las propiedades de uno.

Problema 5

Sea $F = \mathbb{R}^2$ con la operaciones definidas de la siguiente forma:

- **Suma:**

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d).$$

- **Producto:**

$$(a, b) \otimes (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

I. Verificar que la suma y el producto están bien definidos y son operacioones en F.

II. Demostrar que existe un elemento neutro para la suma $((0, 0))$ y para el producto $((1, 0))$.

III. Comprobar que a cada elemento $(a, b) \neq (0, 0)$ le corresponde un inverso multiplicativo.

IV. Verificar la conmutatividad, la asociatividad y la distributividad del producto respecto a la suma.

Demostración

(I)
Sean $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d) \in \mathbb{R}^2$$
$$(a, b) \otimes (c, d) = (ac - bd, ad + bc) \in \mathbb{R}^2.$$

Pues $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ y las operaciones suma y producto están bien definidas en $\mathbb{R}$.
$\therefore$ la suma y el producto están bien definidos y son operaciones en F.

(II)

- **Neutro suma**
  Sea $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}(0,0) \oplus (a,b) &= (0+a, 0+b)\\ &= (a,b).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a,b) \oplus (0,0) &= (a+0, b+0)\\ &= (a,b).\end{aligned}$$

- **Neutro producto**
  Sea $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}(1,0) \otimes (a,b) &= (1 \cdot a - 0 \cdot b, 1 \cdot b + 0 \cdot a)\\ &= (a,b).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a,b) \otimes (1,0) &= (a \cdot 1 - b \cdot 0, a \cdot 0 + b \cdot 1)\\ &= (a,b).\end{aligned}$$

(III)

Sea $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, tomamos $(c,d) \in \mathbb{R}^2$ como $(c,d) = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$, de modo que

$$\begin{aligned}(a,b) \otimes (c,d) &= (a \cdot c - b \cdot d, a \cdot d + b \cdot c)\\ &= (a \cdot \frac{a}{a^2+b^2} - b \cdot \frac{-b}{a^2+b^2}, a \cdot \frac{-b}{a^2+b^2} + b \cdot \frac{a}{a^2+b^2})\\ &= (\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}, \frac{-ab+ab}{a^2+b^2})\\ &= (1,0).\end{aligned}$$

Es decir para cada $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ existe un inverso multiplicativo.

(IV)

- **Conmutatividad**
  Sean $(a,b),(c,d) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}(a,b) \odot (c,d) &= (a \cdot c - b \cdot d, a \cdot d + b \cdot c)\\ &= (c \cdot a - d \cdot b, c \cdot d + d \cdot b)\\ &= (c,d) \odot (a,b).\end{aligned}$$

- **Asociatividad**
  Sean $(a,b),(c,d),(e,f) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}((a,b) \odot (c,d)) \odot (e,f) &= (ac - bd, ad + bc) \odot (e,f)\\ &= ((ac-bd)e - (ad+bc)f, (ad+bc)e + (ac-bd)f)\\ &= (ace - bde - adf - bcf, ade + bce + acf - bdf)\\ &= (a(ce-df) - b(de+cf), a(de+cf) + b(ce-df))\\ &= (a,b) \odot (ce - df, de + cf)\\ &= (a,b) \odot ((c,d) \odot (e,f)).\end{aligned}$$

- **Distributividad**
  Sean $(a,b),(c,d),(e,f) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}(a,b) \otimes ((c,d) \oplus (e,f)) &= (a,b) \otimes (c+e, d+f)\\ &= (a(c+e) - b(d+f), a(d+f) + b(c+e))\\ &= (ac + ae - bd - bf, ad + af + bc + be)\\ &= (ac - bd + ae - bf, ad + bc + af + be)\\ &= (ac - bd, ad + bc) + \otimes(ae - bf, af + be)\\ &= (a,b) \otimes (c,d) + (a,b) \otimes (e,f).\end{aligned}$$

Problema 6

Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *se llama* ***función par*** *si para todo* $t \in \mathbb{R}$ *se cumple que* $f(t) = f(-t)$. *Demostrar que el conjunto* $P := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,|\, f \text{ es par}\}$, *con las siguientes operaciones:*

$$\forall\, f, g \in P \quad y \quad c \in \mathbb{R} : (f+g)(s) = f(s) + g(s) \quad y \quad (cf)(s) = c\,(f(s))$$

Es un $\mathbb{R} - \mathit{espacio\,vectorial}$

Demostración.

Sea $F := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,|\, f \ es\ funcion\}$, en clase se ha demostrado que F con las operaciones definidas es un espacio vectorial real por tanto basta demostrar que $P \subset F$ es un subespacio de F, para esto tomamos $f, g \in P$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, dmostraremos que $\lambda\, f + g \in P$:

$$\lambda\, f + g(-x) = \lambda\, f(-x) + g(-x) = \lambda\, f(x) + g(x) = \lambda\, f + g(x)$$

Por tanto $\lambda\, f + g \in P$, es decir P es un subespacio vectorial de F □

Problema 7

Sea $V = \{(a_1, a_2) \,|\, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$. *Para* (a_1, a_2), $(b_1, b_2) \in V$ *y* $c \in \mathbb{R}$ *definimos* $(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 b_2)$ *y* $c \cdot (a_1, a_2) = (ca_1, a_2)$. *¿Es* V *un* $\mathbb{R} - \mathit{espacio\ vectorial}$

Demostración.

Si V cumpliera ser un espacio vectorial bajo la soperaciones definidas se tendria que necesariamente $(V, +)$ es un grupo abeliano, proponemos que $(0, 1) \in V$ es un neutro para V

$$(a_1, a_2) + (0, 1) = (a_1 + 0, a_2 \cdot 1) = (a_1, a_2) \ \ \forall\ \ (a_1, a_2) \in V$$

Ahora tomemos $(b_1, 0) \in V$, demostremos que este elemento no tiene inverso en V:

$$(b_1, 0) + (a_1, a_2) = (b_1 + a_1, 0 \cdot a_2) = (b_1, 0) \neq (0, 1) \ \ \forall\ (a_1, a_2) \in V$$

Por tanto $(V, +)$ no es un grupo abeliano, y por tanto V no es un espacio vectorial con esas operaciones □

Problema 8

Sea $V = \{(a_1, a_2)\,|a_1, a_2 \in \mathbb{F}\}$, donde $\mathbb{F}$ es un campo. Definimos la suma de elementos de V coordenada a coordenada. Para $c \in \mathbb{F}$ y (a_1, a_2) definimos el producto como $c\,(a_1, a_2) = (a_1, 0)$. ¿Es V un $\mathbb{F}-$espacio vectorial con las operaciones definidas?

Demostración.

Si V fuera un espacio vectorial tendriamos que para $1 \in \mathbb{F}$, neutro para el producto de $\mathbb{F}$, deberia cumplir que:

$$1 \cdot (a_1, a_2) = (a_1, a_2) \quad \forall (a_1, a_2) \in V$$

Sin embargo tomemos (b_1, b_2), tal que $b_2 \neq 0$, donde 0 es el neutro para la suma de $\mathbb{F}$, tenemos que:

$$1 \cdot \, (b_1, b_2) = (b_1, 0) \neq (b_1, 0)$$

Por tanto V no puede ser un espacio vectorial con esa operación como producto por escalar

$\square$

Problema 9

Sea $V = \{(a_1, a_2)\,|a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$. Para (a_1, a_2), $(b_1, b_2) \in V$ y $c \in \mathbb{R}$ definimos $(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + 2b_1, a_2 + 3b_2)$ y $c\,(a_1, a_2) = (ca_1, a_2)$. ¿Es V un $\mathbb{R}-$espacio vectorial

Demostración.
Veamos que se no cumplen las propiedades para el producto escalar.

- **Distributividad escalar**
  Pues para cualesquiera $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, y para cada $(a_1, a_2) \in V$

$$\begin{aligned}(\lambda + \mu)(a_1, a_2) &= ((\lambda + \mu)a_1, (\lambda + \mu)a_2) \\ &= (\lambda a_1 + \mu a_1, \lambda a_2 + \mu a_2)\end{aligned}$$

  Mientras que

$$\begin{aligned}\lambda(a_1, a_2) + \mu(a_1, a_2) &= (\lambda a_1, \lambda a_2) + (\mu a_1, \mu a_2) \\ &= (\lambda a_1 + 2\mu a_1, \lambda a_2 + 3\mu a_2)\end{aligned}$$

Asi en general

$$(\lambda + \mu)(a_1, a_2) \neq \lambda(a_1, a_2) + \mu(a_1, a_2)$$

Por tanto no cumple con la distributividad escalar.

$\therefore$ V no es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial. $\square$