Teoría cinética de una onda

ecuación de onda y sus aplicaciones

Elías López Rivera

Escuela Superior de Física y Matemáticas, Instituto Politécnico Nacional

Manipulando la función de onda

Anteriormente se habia propuesto una forma muy característica de la función de una onda:

$$\Psi\left(x,t\right) = A\cos\left[\omega\left(\frac{x}{v} \pm t + \phi\right)\right]$$

Tomando en cuenta que $\omega = 2\pi f$ y $v = \lambda f$:

$$\Psi\left(x,t\right) = A\cos\left(\frac{2\pi f}{\lambda f}x \pm \omega t + \phi\right) \implies \Psi\left(x.t\right) = A\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x \pm \omega t + \phi\right)$$

Finalmente:

Función de onda

$$\Psi\left(x,t\right)=A\,\cos\left(k\,x\pm\omega\,t+\phi\right) \tag{1}$$

Número de onda

$$k=\frac{2\pi}{\lambda} \tag{2}$$

Dedución de la ecuación de onda

Derivando parcialmente a (1) respecto a t:

$$\frac{\partial\,\Psi\,(x,t)}{\partial\,t} = \mp\,\omega\,A\,\sin\left(k\,x \pm \omega\,t + \phi\right)$$

$$\frac{\partial^2\,\Psi\,(x,t)}{\partial\,t^2} = -\,\omega^2\,A\,\cos\left(k\,x \pm \omega\,t + \phi\right) = -\,\omega^2\,\Psi\,(x,t)$$

Derivando parcialmente a (1) respecto a x:

$$\frac{\partial\,\Psi\,(x,t)}{\partial\,x} = -\,k\,A\,\sin\,(k\,x \pm \omega\,t + \phi)$$

$$\frac{\partial^2\,\Psi\,(x,t)}{\partial\,x^2} = -\,\omega^2\,A\,\cos\,(k\,x \pm \omega\,t + \phi) = -\,k^2\,\Psi\,(x,t)$$

De lo anterior se obtiene que:

$$\frac{\partial^2\,\Psi\,(x,t)/\partial\,t^2}{\partial^2\,\Psi\,(x,t)/\partial\,x^2} = \frac{\omega^2}{k^2} = v^2$$

Finalmente:

Ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial t^2} \tag{3}$$

Deduciendo la velocidad de propagación

Nos situamos sobre un pequeño segmento de cuerda de densidad de masa μ de longitud Δx, tendremos que la masa del segmento sera $m = \mu \Delta x$, aplicando la segunda ley de Newton sobre este pequeño segmento de cuerda, obtendremos que la sumatoria de fuerzas en el eje x debe ser igual a 0 (el movimiento de la cuerda solo es tranversal),en el extremo derecho de la cuerda tendremos una pequeña fuerza sobre el eje y, mientras que en el izquierdo obtendremos una fuerza de reacción provocada por la parte inferior cuerda.

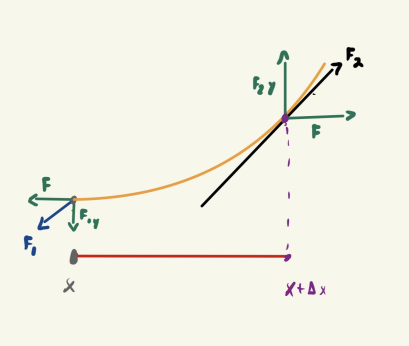

Figura 1: Análisis de fuerzas

De la figura 1 podemos notar que es posible aproximar el cociente entre los modulos de las componentes de las fuerzas en el punto $x + \Delta x$ con la recta tangente a la forma de la cuerda en el mismo punto, el mismo análisis es valido en el punto x, de donde obtenemos las siguientes relaciones:

$$\frac{F_{1y}}{F} = -\left(\frac{\partial \Psi (x,t)}{\partial x}\right)_x \qquad \frac{F_{2y}}{F} = \left(\frac{\partial \Psi (x,t)}{\partial x}\right)_{x+\Delta x}$$

Por tanto se sigue que:

$$F_y = F_{1y} + F_{2y} = F\left[\left(\frac{\partial\,\Psi\,(x,t)}{\partial\,x}\right)_{x+\Delta\,x} - \left(\frac{\partial\,\Psi\,(x,t)}{\partial\,x}\right)_{x}\right] = \mu\,\Delta\,x\,\frac{\partial^2\,\Psi\,(x,t)}{\partial\,t^2}$$

$$\frac{\left(\frac{\partial\,\Psi\,(x,t)}{\partial\,x}\right)_{x+\Delta\,x} - \left(\frac{\partial\,\Psi\,(x,t)}{\partial\,x}\right)_{x}}{\Delta\,x} = \frac{\mu}{F}\,\frac{\partial^2\,\Psi\,(x,t)}{\partial\,t^2}$$

Si tomamos $\Delta x \rightarrow 0$, la ecuación se transformara en:

$$\frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\mu}{F} \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial t^2}$$

Comparando con uno se obtiene:

Velocidad de propagación

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \tag{4}$$

Deducción de la potencia asociada a la onda

Para generar una onda, debemos aplicar una fuerza sobre el medio por el que viajara esta misma, debido a que el punto se mueve es claro que se efectua trabajo sobre todo el sistema, al propagarse la onda cada parte del medio ejerce una fuerza y realiza trabajo sobre la porción abyacente, de este modo la onda transporta energía.

Analicemos lo anterior para el caso especifico de una onda tranversal que recorre una cuerda de izquierda a derecha, tomemos un punto a sobre esta cuerda, al tener solo un punto , consideraremos solamente la fuerza ejercida por la cuerda a la izquierda del punto sobre la cuerda a la derecha del mismo.

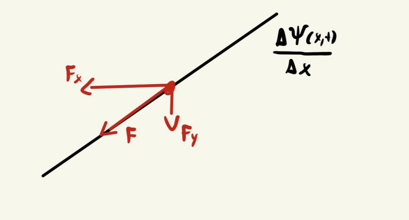

Figura 2: Fuerza ejercida

De la figura anterior podemos deducir que en la componente x no se realiza trabajo debido al equilibrio del sistema,ademas de:

$$F_y\left(x,t\right) = -F\,\frac{\partial\,\Psi\left(x,t\right)}{\partial\,x}$$

Recordando $p = F.v$, por tanto:

$$P(x,t) = F_y(x,t)\,v_y\left(x,t\right) = -F\,\frac{\partial\,\Psi\left(x,t\right)}{\partial\,x}\,\frac{\partial\,\Psi\left(x,t\right)}{\partial\,t} = F\,k\,\omega\,A^2\,\sin^2\left(kx-\omega t\right)$$

Reescribiendo lo anterior:

$$P(x,t) = \sqrt{\mu F}\,\omega^2 A^2 \,\sin^2\left(kx - \omega t\right)$$

Por tanto la potencia máxima:

Potencia máxima

$$P_{max} = \sqrt{\mu F}\,\omega^2 A^2 \tag{5}$$

Debido a que el valor medio de la funcón $\sin^2$ es $1/2$, se tiene que:

Potencia media

$$P_{max} = \frac{1}{2}\sqrt{\mu F}\,\omega^2 A^2 \tag{6}$$

Ley del cuadrado ineverso

Consideremos una onda que viaja en todas las direcciones, definimos la intensidad de esta como la rapidez media con que la onda transporta energía, por unidad de area, a través de una siperficie perpéndicular a la dirección de propagación, por lo regular este se mide en watss por metro cuadrado (W/m^2).
Si las ondas se propagan igualmente en todas las direcciones desde la fuente, la intensidad a una distancia r_1 de la fuente , obedece la ley:

$$I_1 = \frac{P}{4\pi r_1^2}$$

Analogamente si medimos la intensidad a una distancia r_2 esta seguira la ley:

$$I_1 = \frac{P}{4\pi r_2^2}$$

De donde se deduce:

Ley del cuadrado inverso

$$\frac{r_1^2}{r_2^2} = \frac{I_2}{I_1} \tag{7}$$

15.12 •• CALC Rapidez de propagación contra rapidez de las partículas. *a*) Demuestre que la ecuación (15.3) puede escribirse como

$$y(x, t) = A \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)\right]$$

b) Utilice $y(x, t)$ para obtener una expresión para la velocidad transversal v_y de una partícula de la cuerda en la que viaja la onda. *c*) Calcule la rapidez máxima de una partícula de la cuerda. ¿En qué circunstancias esta rapidez es igual a la rapidez de propagación v? ¿Menor que v? ¿Y mayor que v?

15.17 •• El extremo superior de un alambre de acero de 3.80 m de longitud está sujeto al techo, y del extremo inferior se suspende un objeto de 54.0 kg. Usted observa que a un pulso transversal le toma 0.0492 s viajar de la parte inferior a la parte superior del alambre. ¿Cuál es la masa del alambre?

15.56 •• Hormiga en ingravidez. Una hormiga con masa m está parada tranquilamente sobre una cuerda horizontal con masa por unidad de longitud μ y estirada mediante una tensión F. Repentinamente, su primo Morton comienza a propagar por la cuerda una onda sinusoidal transversal con longitud de onda λ. El movimiento de la cuerda es en un plano vertical. ¿Qué amplitud mínima de la onda hará que la hormiga sienta momentáneamente que no pesa nada? Suponga que m es tan pequeña que la presencia de la hormiga no afecta la propagación de la onda.

15.60 ••• **PA** Imagine que está explorando un planeta descubierto recientemente. El radio del planeta es de 7.20×10^7 m. Usted sostiene una pesa de plomo del extremo inferior de una cuerda ligera de 4.00 m de longitud y masa de 0.0280 kg. Luego determina que a un pulso transversal le toma 0.0600 s viajar del extremo inferior al extremo superior de la cuerda. En la tierra, para la misma cuerda y la misma pesa, a un pulso transversal le toma 0.0390 s recorrer la longitud de la cuerda. El peso de la cuerda es tan pequeño que se puede ignorar su efecto sobre la tensión de la cuerda. Suponiendo que la masa del planeta tiene simetría esférica, ¿cuál es su masa?