Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Geometria Moderna

Problema de bitácora 2 (Triángulos rectángulos)

Elías López Rivera

elias.lopezr@ciencias.unam.mx

Fecha: 15/08/2024

Triángulos rectangulos

Se tiene que un triángulo rectangulo ΔAMD con ángulo recto en M e hipotenusa z. Además se sabe que la superficie es $\frac{z^2}{4}$. ¿Qué relación se puede establecer entre las longitudes de los catetos?.

S.1 Comprensión del problema y formulación de una conjetura

La condición **Importante**, dentro de este problema es la longitud de los catetos, esto es fácil de identificar pues al ser AM, pepéndicular al segmento MB, e interseca a AB en A, tenemos que AM es la altura del triángulo respecto a MB, por tanto se tiene que el area de este es igual a $\frac{AM\,(MB)}{2}$, esta cantidad debera estar relacionada directamente con la longitud de la hipotenusa pues tenemos que por hipótesis el area del triángulo debe ser igual a $\frac{z^2}{4}$

Para atacar el problema en un primer momento, optamos por la clásica fuerza bruta, en geogebra construimos un simulador que nos permitira visualizar de mejor manera que es lo que esta pasando dentro de la figura.

Para esto trazamos dos rectas perpéndiculares g y h, sea M el punto donde ambas se intersecan, y sea B un punto sobre la recta f diferente de H, trazamos la circunferencia C_1 con centro en H y radio HB, tomamos E el punto donde C_1 y g se intersecan, y un punto A movil a través de un deslizador, finalmente trazamos el triángulo $\Delta\, AEM$, y con medimos su 'area con la herramienta de GeoGebra, a su vez medimo la longitud del segmento AE

Simulador

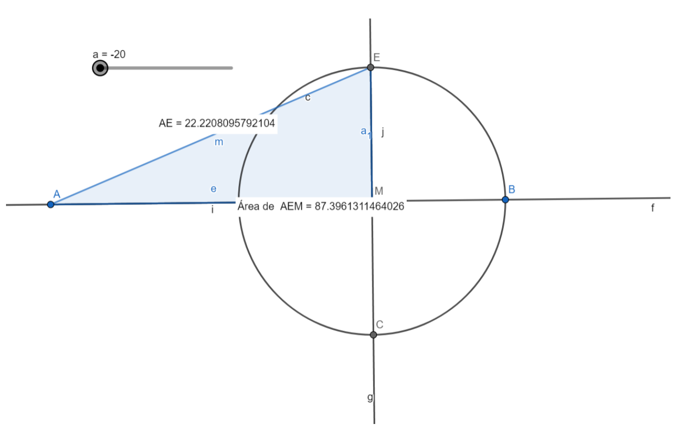

Figura 1: Simulador

Podemos notar la presencia de una circunferencia con centro en el vertice que hace el lado recto, y de radio igual al cateto que se extiende verticalmente hacia arriba, esto no es una coincidencia, pues esta circunferencia es un indicador para advertir que el triángulo rectangulo consturido es isosceles, notamos que cuando este caso se da, sorpresivamente la conjetura se cumple, y que en cambio cuando el triángulo formado no es isósceles tenemos que la propiedad no parece cumplirse una sola vez.

Esto nos lleva a plantear la siguiente conjetura que para que la hipótesis del problema se cumpla necesariamente ΔAMD debe ser isósceles.

S.2 Elaboración de una estrategia de resolución y justificación del problema

Nuestra conjetura es la siguiente, sea ΔAMD, un triángulo rectángulo con ángulo recto en M, e hipotenusa z, tal que su superficie es igual a $\frac{z^2}{4}$, entonces ΔAMD es isósceles.

La estrategia principal que tenemos para atacar el problema es usar el hecho descrito anteriormente que relaciona el área del triángulo con sus catetos $\frac{AM\,(MD)}{2} = \frac{z^2}{4}$, además podemos usar una relación fundamental de todo triángulo rectángulo, el aclaamdo teorema de pitágoras, a través de esta herramientas podemos estar casi seguros que el problema se resolverá de forma satisfactoria.

Para poder abordar el problema de una manera gráfica, debemos tener una construcción mucho más robusta, para esto planteamos lo siguiente:

Trazamos un cuadrado $MEAF$ de lado $\frac{z}{2}$, el área de este cuadrado será igual a $\frac{z^2}{4}$, trazamos la diagonal MA, por ser el cuadrado un paralelogramo tendremos que esta diagonal lo divide en dos triángulos congruentes,$\Delta\, MEA \cong \Delta\, MFA$ cuya área será la mitad del cuadrado incial, luego trazamos la circunferencia C_1 con centro en E y radio EA, sea D el punto donde la recta EA y C_1 se intersecan, tenemos que $\Delta\, MED \cong \Delta\, MEA$, pues $DE = EA$, estos son radios de C_1, ademas $\measuredangle\, MED = \measuredangle\, AEM = \frac{\pi}{2}$, esto derivado de la colinealidad de D, E y A, de esto se sigue que $\measuredangle\, DME = \measuredangle\, EMA$, luego como $\Delta\, MEA$ cumple ser rectángulo e isśosceles pues $ME = EA$, se sigue que necesariamente $\measuredangle\, EMA = \frac{\pi}{4}$, luego $\measuredangle\, DMA = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, ademas por la relación de congruencia tenemos que el área de $\Delta\, MED$ también sera la mitad que la del cuadrado $MEAF$, por tanto el triángulo $\Delta\, DMA$, cumple las hipótesis del problema y mucho más interesante resulta ser isósceles, pues $DM = MA$.

Construcción

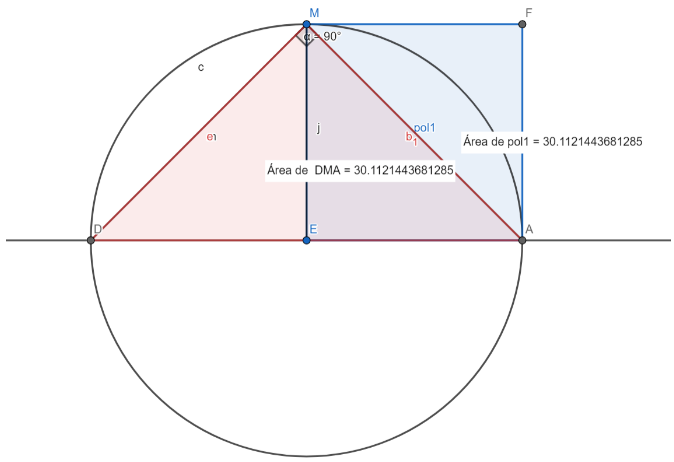

Figura 2: Construcción

S.3 Resolución del problema

Conjetura

Sea ΔAMD, un triángulo rectangulo con ángulo recto en M, e hipotenusa z, tal que su superficie es igual a $\frac{z^2}{4}$, entonces ΔAMD es isósceles.

Demostración.

Al ser AM perpéndicular al segmento MB e intersecar a AB en A, tenemos que AM es la altura del triángulo respecto a MB, por tanto se tiene que su area es igual a $\frac{AM(MD)}{2} = \frac{z^2}{4}$, despues como ΔAMD es rectángulo se tiene que cumple con el teorema de pitágoras, por tanto $z^2 = (AM)^2 + (MD)^2$, pues z es la hipotenusa, de estas dos ecuaciones obtenemos que:

$$\frac{AM(MD)}{2} = \frac{z^2}{4} \implies \frac{4}{2}(AM)(MD) = \frac{4}{4}z^2 \implies 2(AM)(MD) = z^2 = (AM)^2 + (MD)^2$$

$$\implies (AM)^2 - 2(AM)(MD) + (MD)^2 = 0 \implies (AM - MD)^2 = 0$$

Como $(AM - MD)$, es un número real la única forma en que se cumpla que $(AM - MD)^2 = 0$, es que $(AM - MD) = 0$, de donde se sigue que $AM = MB$, por tanto $\Delta\, AMD$ es isósceles. □

S.4 Extensión del problema

El triángulo rectángulo isósceles está estrechamente relacionado con el número irracional $\sqrt{2}$, pues si notamos al usar el teorema de pitágoras tendremos que $2l^2 = m^2 \implies 2 = \frac{m^2}{l^2} \implies \sqrt{2} = \frac{m}{l}$, esto nos llevaría cónjeturar que cualquier triángulo rectangulo isósceles debe tener al menos un lado cuya longitud sea un número irracional, lo cual es fácil de demostrar, pues de otra manera resultaria que $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, resultaria un número racional, lo cual es una clara contradicción