Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

OMUM 2025

Examen selectivo

Elías López Rivera

`elias.lopezr@ciencias.unam.mx`

Fecha: 15/07/2025

Problema 1

Para n un número natural, consider $A_n := \{1, 2, \cdots, n\}$. Para $B \subset A_n$ se considera $S_B = a_r - a_{r-1} + a_{r-2} - \cdots + (-1)^{r-1}a_1$, si $B = \{a_r > a_{r-1} > \cdots > a_1\}$, Calcula:

$$\sum_{B\subset A_n} S_B$$

Demostración.

Tomemos $k \in A_n$, queremos ver la contribución de k en $\sum_{B\subset A_n} S_B$, para esto pensemos en la forma de un conjunto B que contiene a k:

$$B = \{\ \underbrace{a_1, ...}_{\text{valores} < k}\ , k\ ,\ \underbrace{....., a_r}_{\text{valores} > k}\ \}$$

Debido a las hipótesis del problema sabemos que la parte derecha del conjunto determinara el signo de k en S_B, si hay una cantidad par su signo sera positivo y si hay una cantidad impar tendra signo negativo, ahora particionemos A_n en dos conjuntos a partir de k, $A_< := \{n \in A_n | n \leq k\}$ y $A_> := \{n \in A_n | n > k\}$, notemos que B puede ser representado por la unión de dos subconjuntos $B_1 \subset A_<$ y $B_2 \subset A_>$, notemos que es necesario que $k \in B_1$ mientras que B_2 puede ser cualquier subconjunto, hasta el vacio, la cantidad se subconjuntos B_1 de $A_<$ que contienen a k es 2^{k-1}, mientras que para $0 \leq i \leq n-k$ la cantidad de subconjuntos con i elementos de $A_>$ es C_i^{n-k}, por tanto la cantidad de subconjuntos que cumplen ambas condiciones es $2^{k-1}\, C_i^{n-k}$, por tanto la conribución total de k en $\sum_{B\subset A_n} S_B$ es:

$$\sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i\, k 2^{k-1}\, C_i^{n-k}$$

Finalmente iteramos sobre todo A_n:

$$\sum_{B\subset A_n} S_B = \sum_{k=1}^{n} k \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i\, 2^{k-1}\, C_i^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i\, C_i^{n-k}$$

Aplicando la identidad del binomio de Newton:

$$\sum_{B\subset A_n} S_B = \sum_{k=1}^{n} k 2^{k-1}(1-1)^{n-k} = n2^{n-1}$$

$\square$

Problema 2

Sea $A := \{n \in \mathbb{N} | n$ es compuesto potencia de un primo$\}$, definamos $f(n)$ como el promedio de los divisores de $n \in A$.Demuestra que la siguiente suma converge

$$\sum_{n\in A} \frac{1}{f(n)}$$

Demostración.

Si $n \in A$ entonces $n = p^k$ con $k > 1$, $k \in \mathbb{N}$ y p un numero primo, por tanto:

$$f(n) = \frac{\sum_{i=0}^{k} p^i}{k+1} = \frac{p^{k+1}-1}{(k+1)(p-1)} \implies \frac{1}{f(n)} = \frac{(k+1)(p-1)}{p^{k+1}-1}$$

Como $p > 1 \implies p^k > 1 \implies -1 < -p^k \implies p^{k+1} - 1 < p^{k+1} - p^k \implies \frac{1}{p^{k+1}-1} < \frac{1}{p^k(p-1)}$ por tanto:

$$\frac{1}{f(n)} < \frac{(k+1)(p-1)}{p^k(p-1)} = \frac{k+1}{p^k}$$

Luego tenemos que:

$$\sum_{p \ primo} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(k+1)(p-1)}{p^{k+1}-1} < \sum_{p \ primo} \sum_{i=2}^{\infty} \frac{k+1}{p^k}$$

Tenemos que la siguiente seria converge absolutamente por criterio de la razón:

$$\sum_{i=2}^{\infty} \frac{k+1}{p^k}$$

Tenemos que cualquier ordenamiento de la serie converge al mismo límite por tanto proponemos el siguiente ordenamiento:

$$
\begin{array}{cccccccccc}
\frac{1}{p^2} & + & \frac{1}{p^3} & + & \cdots & + & \frac{1}{p^k} & + & \cdots = \frac{1}{1-\frac{1}{p}} - 1 - \frac{1}{p} \\
\frac{1}{p^2} & + & \frac{1}{p^3} & + & \cdots & + & \frac{1}{p^k} & + & \cdots = \frac{1}{1-\frac{1}{p}} - 1 - \frac{1}{p} \\
\frac{1}{p^2} & + & \frac{1}{p^3} & + & \cdots & + & \frac{1}{p^k} & + & \cdots = \frac{1}{1-\frac{1}{p}} - 1 - \frac{1}{p} \\
0 & + & \frac{1}{p^3} & + & \cdots & + & \frac{1}{p^k} & + & \cdots = \frac{1}{1-\frac{1}{p}} - 1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
0 & + & 0 & + & \cdots & + & \frac{1}{p^k} & + & \cdots = \frac{1}{1-\frac{1}{p}} - \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{p^k} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots
\end{array}
$$

Bajo este ordenamiento tenemos que el termino $k-esimo$ de la sucesión es el siguiente:

$$
a_k = \frac{1}{1-\frac{1}{p}} - \frac{1-\frac{1}{p^{k+1}}}{(1-\frac{1}{p})} = \frac{1}{p^k(p-1)}
$$

Por tanto tenemos que:

$$
\sum_{i=2}^{\infty} \frac{k+1}{p^k} = \frac{2}{p(p-1)} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{p^k(p-1)} = \frac{2}{p(p-1)} + \frac{1}{(p-1)} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{p^k} = \frac{2}{p(p-1)} + \frac{1}{(p-1)^2}
$$

Por tanto obtenemos que:

$$
\sum_{p\ primo} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(k+1)(p-1)}{p^{k+1}-1} < \sum_{p\ primo} \sum_{i=2}^{\infty} \frac{k+1}{p^k} = \sum_{p\ primo} \frac{2}{p(p-1)} + \frac{1}{(p-1)^2}
$$

Luego como $(p-1) < p \implies (p-1)^2 < p(p-1) \implies \frac{1}{p(p-1)} < \frac{1}{(p-1)^2}$ por tanto:

$$
\sum_{p\ primo} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(k+1)(p-1)}{p^{k+1}-1} < \sum_{p\ primo} \frac{3}{(p-1)^2}
$$

Finalmente como la serie de $a_n = \frac{1}{n^2}$ es absolutamente convergente se concluye que cualquier subserie de esta converge, finalente tenemos que la serie:

$$
\sum_{n\in A} \frac{1}{f(n)}
$$

Converge absolutamente. $\square$

Problema 3

Sean $p, q \in \mathbb{R}$ tales que $x^2+px+q \neq 0$ para todo número real x, Si n es un entero positivo impar,Sea $X \in M_n(\mathbb{R})$ entonces $X^2 + pX + qI_n \neq O_n$

Demostración.

Prueba usando el determinante

De nuevo procedemos por contradicción es decir existe $X \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $X^2 + pX + qI_n = O_n$, tenemos que:

$$X^2 + pX + qI_n = O_n$$

De donde obtenemos que:

$$\left(X + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p^2}{4} - q\right) I_n$$

Analizando el determinante tenemos que:

$$Det \left| \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 \right| = \left(Det\left(X + \frac{p}{2}\right)\right)^2 = \left(\frac{p^2}{4} - q\right)^n$$

Como $p(x) = x^2 + px + q$ no tiene soluciones entonces $p^2 - 4q < 0 \implies \frac{p^2}{4} - q < 0$, por tanto como n es impar:

$$\left(Det\left(X + \frac{p}{2}\right)\right)^2 = \left(\frac{p^2}{4} - q\right)^n < 0$$

Finalmente como $\left(Det\left(X + \frac{p}{2}\right)\right) \in \mathbb{R}$ entonces $\left(Det\left(X + \frac{p}{2}\right)\right)^2 > 0$, una contradicción $\square$

Problema 5

Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[0,1]$ y diferenciable en $(0,1)$ tal que existe $a \in (0,1]$ tal que $\int_0^a f(x)dx = 0$. Demuestre que:

$$\left|\int_0^1 f(x)dx\right| \leq \frac{1-a}{2} \underset{0<x<1}{sup} |f'(x)|$$

Demostración.

Aplicando integración por partes tenemos que:

$$\int f(x)dx = xf(x) - \int xf'(x)dx$$

Luego aplicando propiedades de la integral:

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_o^a f(x)dx + \int_a^1 f(x)dx = \int_a^1 f(x)dx$$

De ambas obtenemos:

$$f(1) - \int_0^1 xf'(x)dx = f(1) - f(a) - \int_a^1 xf(x)dx$$

$$f(a) = \int_0^a xf'(x)dx + \int_a^1 xf'(x)dx - \int_a^1 xf'(x)dx = \int_0^a xf'(x)dx$$

Luego usando la hipótesis tenemos que:

$$\int_0^a f(x) = af(a) - \int_0^a xf'(x)dx = af(a) - f(a) = f(a)(a-1) = 0$$

De donde se sigue que $f(a) = 0$ o $a = 1$, si $a = 1$ la desigualdad es trivial, ahora supongamos $f(a) = 0$, sea $x \in (a, 1]$, por Teorema del Valor Medio existe $l \in (a, x)$ tal que:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{f(x)}{x - a} = f'(l) \implies f(x) = f'(l)(x - a) \implies |f(x)| = |f'(l)|(x - a)$$

Luego obtenemos la siguiente desigualdad:

$$|f(x)| \leq \underset{0<x<1}{sup} |f'(x)|(x-a) \;\; \forall\, x \in (a, 1]$$

Finalmente usando propiedades de la integral:

$$\left|\int_0^1 f(x)dx\right| \leq \int_a^1 |f(x)|dx \leq \underset{0<x<1}{sup}|f'(x)|\int_a^1 (x-a)dx = \frac{(1-a)^2}{2}\underset{0<x<1}{sup}|f'(x)|$$

Finalmente como $0 < (1-a) < 1 \implies 0 < (1-a)^2 < (1-a)$, con lo que concluimos:

$$\left|\int_0^1 f(x)dx\right| \leq \frac{(1-a)^2}{2}\underset{0<x<1}{sup}|f'(x)| \leq \frac{1-a}{2}\underset{0<x<1}{sup}|f'(x)|$$

$\square$