Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Álgebra superior 2

Tarea examen 3

Elías López Rivera

elias.lopezr@ciencias.unam.mx

Fecha: 27/07/2025

1. Números reales cortaduras de Dedekind

Problema 1

Demuestre que la suma de los números reales es asociativa y conmutativa

Demostración.

I. **Conmutatividad**
Como sabemos que si $\alpha, \beta \subset \mathbb{Q}$ son cortaduras entonces $\alpha + \beta := \{r + s \in \mathbb{Q} | s \in \alpha \; r \in \beta\}$, debido ahora si $w \in \alpha + \beta$, entonces $w = s + r$ con $s \in \alpha$, $r \in \beta$, como la suma en $\mathbb{Q}$ es conmutativa tenemos que $w = s + r = r + s$, por tanto $w \in \beta + \alpha$, como w fue arbitraria $\alpha + \beta \subseteq \alpha + \beta$, de manera análoga tenemos que $\beta + \alpha \subseteq \alpha + \beta$, por tanto $\alpha + \beta = \alpha + \beta$

II. **Asociatividad**
De nuevo tenemos sean $\alpha, \beta, \epsilon \subset \mathbb{Q}$ cortaduras, entonces $\beta + \epsilon \subset \mathbb{Q}$ es cortadura y por tanto $\alpha + (\beta + \epsilon) := \{r + (s + t) \in \mathbb{Q} : r \in \alpha, \;\; (s + t) \in \beta + \epsilon\}$ también es cortadura,si $w \in \alpha + (\beta + \epsilon)$, entonces $w = r + (s + t)$ para $r \in \alpha$ y $(s + t) \in \beta + \epsilon$, luego como la suma en $\mathbb{Q}$ es asociativa entonces $w = r + (s + t) = (r + s) + t$, como $s + t \in \beta + \epsilon$, $s \in \beta$ y $t \in \epsilon$, por tanto $r + s \in \alpha + \beta$ y $t \in \epsilon$, es decir $w \in (\alpha + \beta) + \epsilon$, por tanto $\alpha + (\beta + \epsilon) \subseteq (\alpha + \beta) + \epsilon$,de manera análoga obtenemos la otra contención por tanto $\alpha + (\beta + \epsilon) = (\alpha + \beta) + \epsilon$

$\square$

Problema 2

Demuestre que si $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\alpha > \overline{0}$ entonces su inverso multiplicativo $\alpha^{-1} > \overline{0}$, donde $\overline{0}$ es la cortadura cero o $\mathbb{Q}^+$

Demostración.

Sabemos que $\alpha^{-1} := \{x \in \mathbb{Q}^+ | \exists \, t_x > 1 \; tal \; que \; xd > t_x, \;\; \forall d \in \alpha\}$ por la definición vista en clase, es claro que $\alpha^{-1} \subseteq \mathbb{Q}^+$, por tanto basta exhibir un elemento de $\mathbb{Q}^+$ que no este en α^{-1}, como $\alpha > \overline{0}$, entonces por el orden definido $\alpha \subset \mathbb{Q}^+$, por tanto $d > 0$ para toda $d \in \alpha$, tomemos $z \in \alpha$, entonces $z > 0$, por tanto $\frac{1}{z}$ existe y es mayor a 0, luego $\frac{1}{z} \notin \alpha^{-1}$, pues $\frac{1}{z}(z) = 1 < t$ para todo $t \in \mathbb{Q}$ y $t > 1$, por tanto $\frac{1}{z} \in \mathbb{Q}^+$ pero $\frac{1}{z} \notin \alpha^{-1}$, finalmente tenemos que $\alpha^{-1} \subset \mathbb{Q}^+$, por el orden establecido en $\mathbb{R}$ se concluye que $\alpha^{-1} > \overline{0}$ $\square$

Problema 3

Demuestre que si $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\alpha < 0$ demuestre que α tiene inverso multiplicativo

Demostración.
Prmero recordemos que $-\alpha := \{x \in \mathbb{Q} | \exists\, t_x \in \mathbb{Q}^+ : a + r > t_x \;\forall\, a \in \alpha\}$, luego procedemos a demostrar un lemma auxiliar:

Lemma 1.1. *Sea $\alpha \in \mathbb{R}$, se cumple que $\alpha < \overline{0} \Leftrightarrow -\alpha > \overline{0}$*

Demostración.
Primero veamos que si $\alpha, \lambda, \beta \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha > \beta$, entonces $\alpha + \lambda > \beta + \lambda$, como $\alpha > \beta$ entonces $\beta \subset \alpha$, luego si $x + y \in \beta + \lambda$, entonces $x \in \beta$ y por hipótesis $x \in \alpha$, luego $x + y \in \beta + \lambda$, luego $\beta + \lambda \subset \alpha + \lambda$, por tanto $\alpha + \lambda > \beta + \lambda$, ahora tenemos que si $\alpha < \overline{0}$, entonces $\alpha + (-\alpha) < \overline{0} + (-\alpha)$, debido a que $(\mathbb{R}, +, \overline{0})$ es un grupo abeliano como se demostro en clase, entonces $\overline{0} < -\alpha$, analogamente tenemos que si $-\alpha > \overline{0}$, entonces $\alpha + (-\alpha) > \overline{0} + \alpha$, lo que implica que $\alpha < \overline{0}$ □

Luego tenemos que si $\alpha < \overline{0}$, entonces $-\alpha > \overline{0}$ y por lo visto en clase existe $-\alpha^{-1}$, ademas por el ejercicio anterior tenemos que $-\alpha^{-1} > 0$, luego $\alpha^{-1} < 0$, finalmente si aplicamos la definición del producto en $\mathbb{R}$ a α y α^{-1}:

$$\alpha \cdot \alpha^{-1} = [-\alpha] \cdot [-\alpha^{-1}] = \overline{1} = \alpha_1$$

□

Problema 4

Sea $s \in \mathbb{Q}$ y β una cortadura. Demuestre que si $s \notin \beta$, entonces $\beta \subseteq \alpha_s$

Demostración.

Tenemos que $s \notin \beta$, demostraremos que $s < r \;\forall\, r \in \beta$, procedemos por contradicción si existiera $m \in \beta$ tal que $m \leq s$, si $m = s$ por defindición $s \in \beta$ lo cual contradice nuestra hipótesis, por tanto se deberia tener $m < s$, pero como β es cortadura esta es cerrada hacia arriba es decir $s \in \beta$ de nuevo una contradicción, por tanto $s < r$ para toda $r \in \beta$, luego se sigue directamente por la definición de α_s que $\beta \subseteq \alpha_s$ □

2. Los números complejos

Problema 1

Sean $z, w \in \mathcal{C}$, entonces:

I. $|zw| = |z||w|$

II. $Re(z+w) = Re(z) + Re(w)$, $Im(z+w) = Im(z) + Im(w)$

III. $Re(-z) = -Re(z)$, $Im(-z) = -Im(z)$

Demostración.

I. Sean $z = a + bi$ y $w = c + di$, tenemos que $zw = (ac - bd) + (ad + bc)i$, luego:

$$|zw| = \sqrt{(ac-bd)^2 + (ad+bc)^2} = \sqrt{a^2c^2 - 2abcd + b^2d^2 + a^2d^2 + 2abcd + b^2c^2}$$

$$= \sqrt{a^2(c^2+d^2) + b^2(c^2+d^2)} = \sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2} = |z||w|$$

II. Sean $z = a + bi$ y $w = c + di$, entonces $z + w = (a+c) + (b+d)i$, por tanto $Re(z+w) = a + c = Re(z) + Re(w)$ y $Im(z+w) = b + d = Im(z) + Im(w)$

III. Sea $z = a + bi$ entonces $-z = -a - bi$, por tanto $Re(-z) = -a = -Re(-z)$ y $Im(-z) = -b = -Im(z)$

$\square$

Problema 2

Sean $z_1, z_2, \cdots, z_n \in \mathcal{C}$, $n \geq 2$ entonces:

I. $\overline{\sum_{i=1}^n z_i} = \sum_{i=1}^n \overline{z_i}$

II. $\overline{\prod_{i=1}^n z_i} = \prod_{i=1}^n \overline{z_1}$

III. *Demuestre que para toda $m \in \mathbb{Z}$ y $z \in \mathcal{C} - \{0\}$, se cumple que* $\overline{z^m} = (\overline{z})^m$

Demostración.

I. Procedemos por inducción:

Base de Inducción
Sean $z = a + bi$ y $w = c + di$, tenemos que $z + w = (a+c) + (b+d)i$, luego

$$\overline{z+w} = (a+c) - (b+d)i = (a+c) + (-b-d)i = \overline{z} + \overline{w}$$

Hipótesis de inducción

Existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\overline{\sum_{i=1}^k z_i} = \sum_{i=1}^k \overline{z_i}$

Paso inductivo
Tenemos que:

$$\overline{\sum_{i=1}^{k+1} z_i} = \overline{\sum_{i=1}^{k} z_i + z_{k+1}} = \overline{\sum_{i=1}^{k} z_i} + \overline{z_{k+1}} = \sum_{i=1}^{k} \overline{z_i} + \overline{z_{k+1}} = \sum_{i=1}^{k+1} \overline{z_i}$$

II. Procedemos por inducción nuevamente:

Base de Inducción
Sean $z = a + bi$ y $w = c + di$, tenemos que $zw = (ac - bd) + (ad + bc)i$, luego

$$\overline{zw} = (ac - bd) - (ad + bc)i = (a - bi)(c - di) = \overline{z}\ \overline{w}$$

Hipótesis de inducción

Existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\overline{\prod_{i=1}^{k} z_i} = \sum_{i=1}^{k} \overline{z_i}$

Paso inductivo
Tenemos que:

$$\overline{\prod_{i=1}^{k+1} z_i} = \overline{\prod_{i=1}^{k} z_i + z_{k+1}} = \overline{\prod_{i=1}^{k} z_i} + \overline{z_{k+1}} = \prod_{i=1}^{k} \overline{z_i} + \overline{z_{k+1}} = \prod_{i=1}^{k+1} \overline{z_i}$$

III. Si $m \in \mathbb{Z}^+$, la relación es valida por el inciso anterior si $m = 0$, entonces $z^0 = 1$ para todo $z \in \mathcal{C} - \{0\}$, por tanto $\overline{z^0} = \overline{1} = 1 = \overline{z}^0$, si $m = -1$, entonces:

$$\overline{z^{-1}} = \overline{\left(\frac{\overline{z}}{|z|^2}\right)} = \overline{\overline{z}}\ \overline{\left(\frac{1}{|z^2|}\right)} = \frac{z}{|z|^2} = (\overline{z})^{-1}$$

Luego si $m \in \mathbb{Z}^-$, entonces:

$$\overline{z^m} = \overline{(z^{-1})^{-m}}$$

Luego como $-m \in \mathbb{Z}^+$, se sigue que:

$$\overline{z^m} = \left(\overline{z^{-1}}\right)^{-m}$$

Finalmente por lo demostrado anteriormente:

$$\overline{z^m} = ((\overline{z})^{-1})^{-m} = \overline{z}^m$$

$\square$

Problema 3

Calcula las raíces cúbicas de $8+8i$.Expresa la respuesta en forma polar y cartesiana

Solución:
Primero expresamos a $w = 8 + 8i$ en su forma polar, tenemos que

$$|w| = \sqrt{8^2 + 8^2} = \sqrt{2}(8)$$

luego como $Re(w), Im(w) > 0$, este esta en el primer cuadrante por tanto:

$$arg(w) = \arctan\left(\frac{Im(w)}{Re(w)}\right) = \arctan\left(\frac{8}{8}\right) = \frac{\pi}{4}$$

Ahora recordando la formula para las raices $n - esimas$ de un número complejo obtenemos que:

$$Z_{k+1} = |w|^{1/3}\left(\cos\left(\frac{arg(w) + 2k\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{arg(w) + 2k\pi}{3}\right)\right) \quad k \in \{0, 1, 2\}$$

Sustituyendo y valuando:

$$Z_1 = (2^{\frac{7}{6}})\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{12}\right)\right) = 2{,}17 + 0{,}58i$$

$$Z_2 = (2^{\frac{7}{6}})\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = -1{,}59 + 1{,}59i$$

$$Z_3 = (2^{\frac{7}{6}})\left(\cos\left(\frac{17\pi}{12}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{17\pi}{12}\right)\right) = -0{,}58 - 2{,}17i$$

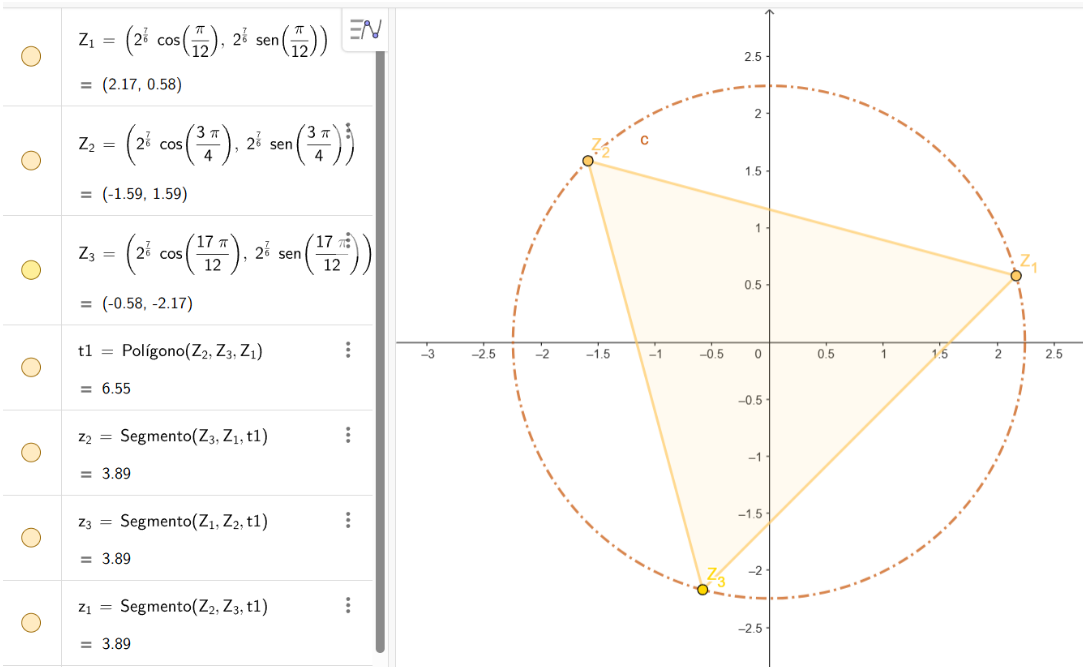

Figura 1: Raices cúbicas de $w = 8 + 8i$

Problema 4

Calcula las raíces cúbicas de $-27 + 27i$.Expresa la respuesta en forma polar y cartesiana

Solución:
Primero expresamos a $w = -27 + 27i$ en su forma polar, tenemos que

$$|w| = \sqrt{27^2 + 27^2} = \sqrt{2}(27)$$

luego como $Im(w) > 0$ y $Re(w) < 0$, este esta en el segundo cuadrante por tanto:

$$arg(w) = \pi - \arctan\left(\frac{|Im(w)|}{|Re(w)|}\right) = \pi - \arctan\left(\frac{27}{27}\right) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

Ahora recordando la formula para las raices $n - esimas$ de un número complejo obtenemos que:

$$Z_{k+1} = |w|^{1/3}\left(\cos\left(\frac{arg(w) + 2k\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{arg(w) + 2k\pi}{3}\right)\right) \quad k \in \{0, 1, 2\}$$

Sustituyendo y valuando:

$$Z_1 = 3(2^{\frac{1}{6}})\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 2{,}38 + 2{,}38i$$

$$Z_2 = 3(2^{\frac{1}{6}})\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = -3{,}25 + 0{,}87i$$

$$Z_3 = 3(2^{\frac{1}{6}})\left(\cos\left(\frac{19\pi}{12}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{19\pi}{12}\right)\right) = 0{,}87 - 3{,}25i$$

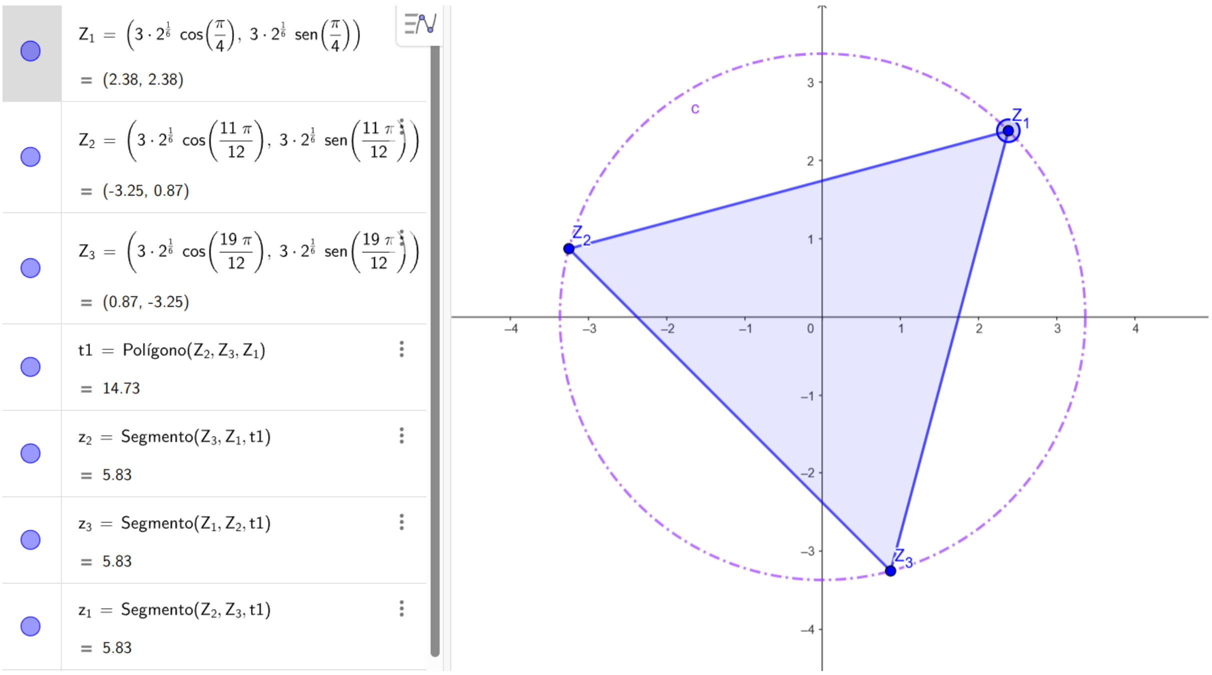

Figura 2: Raices cúbicas de $w = -27 + 27i$

Problema 5

Calcula las raíces cuartas de $32 + 32i$

Solución:
Primero expresamos a $w = 32 + 32i$ en su forma polar, tenemos que

$$|w| = \sqrt{32^2 + 32^2} = \sqrt{2}(32)$$

luego como $Re(w), Im(w) > 0$, este esta en el primer cuadrante por tanto:

$$arg(w) = \arctan\left(\frac{Im(w)}{Re(w)}\right) = \arctan\left(\frac{32}{32}\right) = \frac{\pi}{4}$$

Ahora recordando la formula para las raices $n - esimas$ de un número complejo obtenemos que:

$$Z_{k+1} = |w|^{1/4}\left(\cos\left(\frac{arg(w)+2k\pi}{4}\right)+i\,\text{sen}\left(\frac{arg(w)+2k\pi}{4}\right)\right) \quad k\in\{0,1,2,3\}$$

Sustituyendo y valuando:

$$Z_1 = 2^{\frac{1}{8}}(32^{\frac{1}{4}})\left(\cos\left(\frac{\pi}{16}\right)+i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{16}\right)\right) = 2{,}54+0{,}51i$$

$$Z_2 = 2^{\frac{1}{8}}(32^{\frac{1}{4}})\left(\cos\left(\frac{9\pi}{16}\right)+i\,\text{sen}\left(\frac{9\pi}{16}\right)\right) = -0{,}51+2{,}54i$$

$$Z_3 = 2^{\frac{1}{8}}(32^{\frac{1}{4}})\left(\cos\left(\frac{17\pi}{16}\right)+i\,\text{sen}\left(\frac{17\pi}{16}\right)\right) = -2{,}54-0{,}51i$$

$$Z_4 = 2^{\frac{1}{8}}(32^{\frac{1}{4}})\left(\cos\left(\frac{25\pi}{16}\right)+i\,\text{sen}\left(\frac{25\pi}{16}\right)\right) = 0{,}51-2{,}54i$$

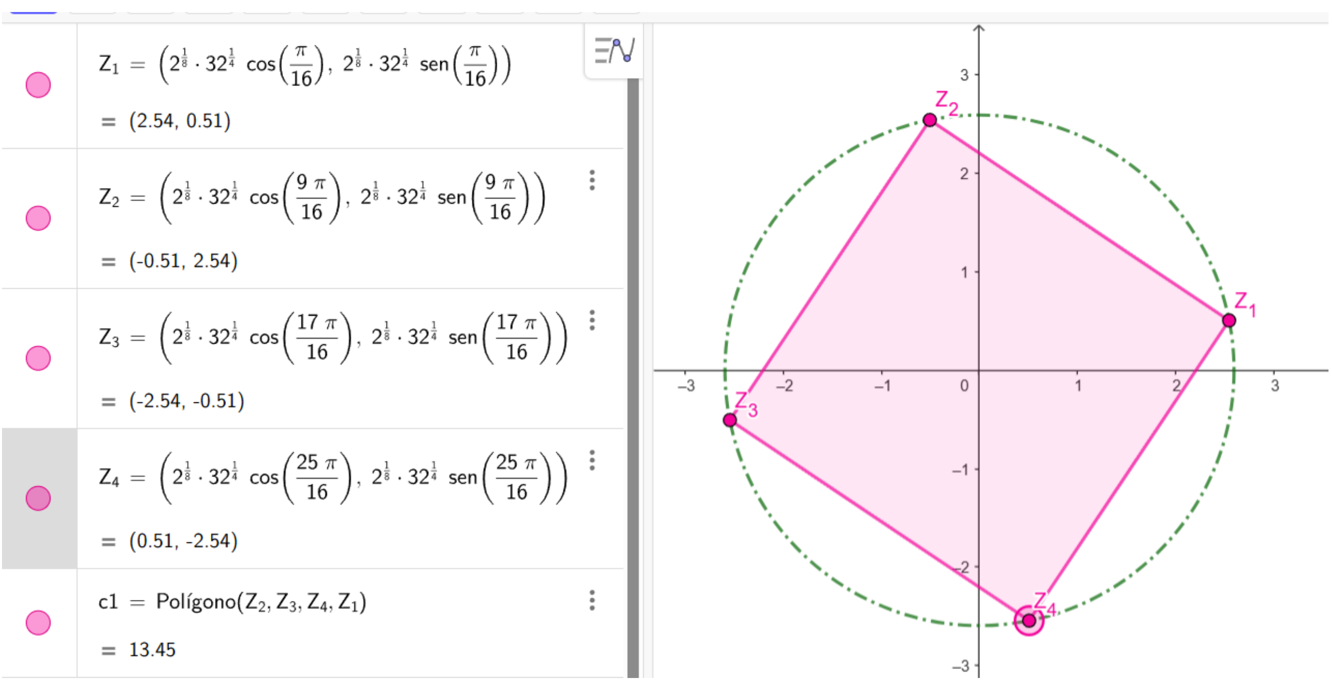

Figura 3: Raices cuartas de $w = 27+27i$

Problema 6

Calcula las raíces quintas de $-1+i$. Escribe los resultados en terminos de su argumento y su modulo

Solución:

Primero expresamos a $w = -1 + i$ en su forma polar, tenemos que

$$|w| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

luego como $Im(w) > 0$ y $Re(w) < 0$, este esta en el segundo cuadrante por tanto:

$$arg(w) = \pi - \arctan\left(\frac{|Im(w)|}{|Re(w)|}\right) = \pi - \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

Ahora recordando la formula para las raices $n - esimas$ de un número complejo obtenemos que:

$$Z_{k+1} = |w|^{1/5}\left(\cos\left(\frac{arg(w) + 2k\pi}{5}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{arg(w) + 2k\pi}{5}\right)\right) \quad k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

Sustituyendo y valuando:

$$Z_1 = (2^{\frac{1}{10}})\left(\cos\left(\frac{3\pi}{20}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{20}\right)\right) = 0{,}95 + 0{,}49i$$

$$Z_2 = (2^{\frac{1}{10}})\left(\cos\left(\frac{11\pi}{20}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{11\pi}{20}\right)\right) = -0{,}17 + 1{,}06i$$

$$Z_3 = (2^{\frac{1}{10}})\left(\cos\left(\frac{19\pi}{20}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{19\pi}{20}\right)\right) = -1{,}06 + 0{,}17i$$

$$Z_4 = (2^{\frac{1}{10}})\left(\cos\left(\frac{27\pi}{20}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{27\pi}{20}\right)\right) = -0{,}49 - 0{,}95i$$

$$Z_5 = (2^{\frac{1}{10}})\left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right) = 0{,}76 - 0{,}76i$$

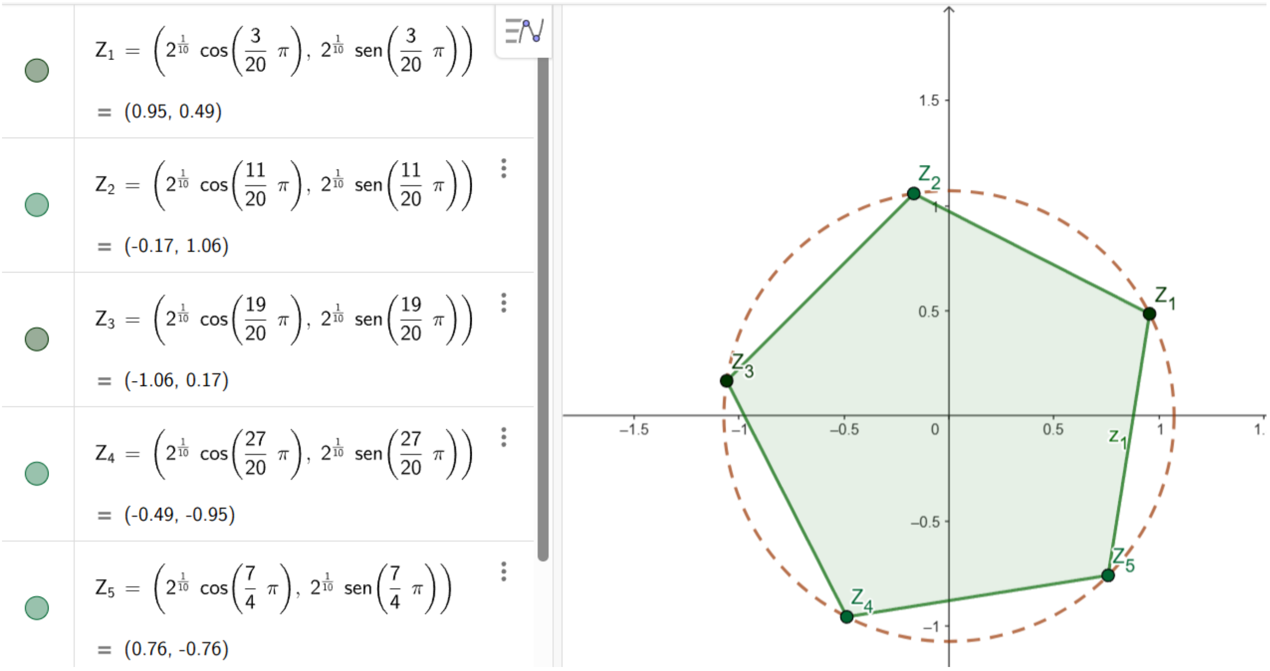

Figura 4: Raices quintas de $w = 1 - i$

Problema 7
Calcula las raíces sextas de 64

Solución:
Primero expresamos a $w = 64$ en su forma polar, tenemos que

$$|w| = \sqrt{64^2 + 0^2} = \sqrt{64^2} = 64$$

luego como $Im(w) = 0$ y $Re(w) > 0$, este esta en el segundo cuadrante por tanto:

$$arg(w) = 0$$

Ahora recordando la formula para las raices $n - esimas$ de un número complejo obtenemos que:

$$Z_{k+1} = |w|^{1/6} \left(\cos\left(\frac{arg(w) + 2k\pi}{6} \right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{arg(w) + 2k\pi}{6} \right) \right) \quad k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

Sustituyendo y valuando:

$$Z_1 = (64^{\frac{1}{6}}) \; (\cos(0) + i \operatorname{sen}(0)) = 64^{\frac{1}{6}} = 2 + 0i$$

$$Z_2 = (64^{\frac{1}{6}})\left(\cos\left(\frac{1\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{1\pi}{3}\right)\right) = 1 + 1{,}73i$$

$$Z_3 = (64^{\frac{1}{6}})\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = -1 + 1{,}73i$$

$$Z_4 = (64^{\frac{1}{6}})\left(\cos(\pi) + i\,\mathrm{sen}(\pi)\right) = -2 + 0i$$

$$Z_5 = (64^{\frac{1}{6}})\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) = -1 - 1{,}73i$$

$$Z_6 = (64^{\frac{1}{6}})\left(\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right) = 1 - 1{,}73i$$

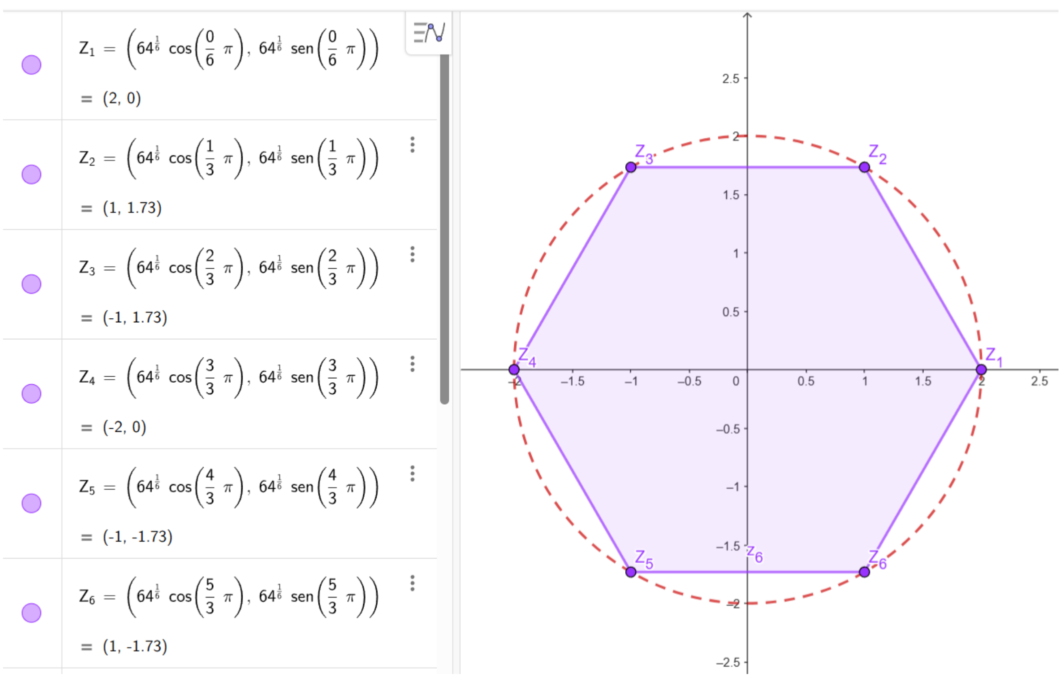

Figura 5: Raices sextas de $w = 64$

Problema 8

Describa geometricamente los siguientes conjuntos :

I. $\{z \in C|\, Im(z) > 0\}$

II. $\{z \in C|\, z = -\overline{z}\}$

III. $\{z \in C| z^{-1} = \overline{z}\}$

Demostración.

I. Es claro que este conjunto representa los cuadrantes I y II del plano

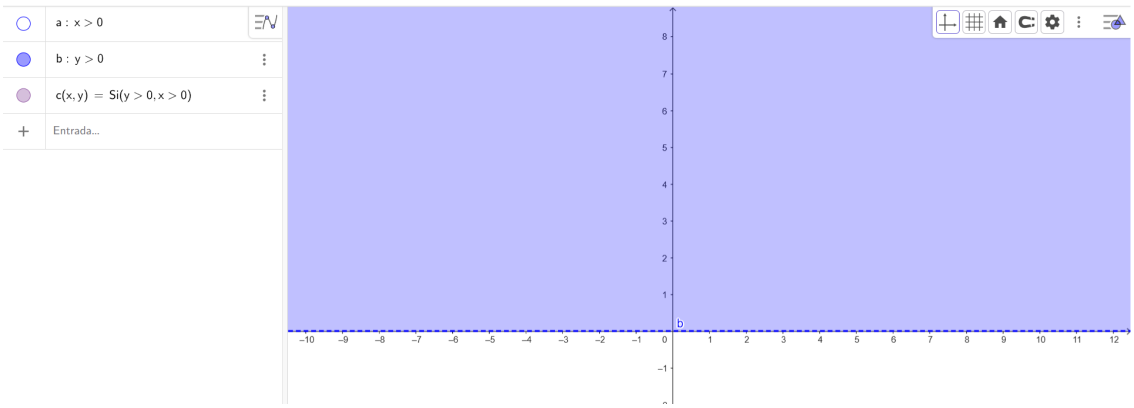

Figura 6: Conjunto $\{z \in C|\, Im(z) > 0\}$

II. si $w = a + bi \in \{z \in C|\, z = -\overline{z}\}$, entonces $w = a + bi = -(a - bi) = -a + bi = -\overline{w}$, luego tenemos que $a = -a$, por tanto $a = 0$, el conjunto representa el eje imaginario

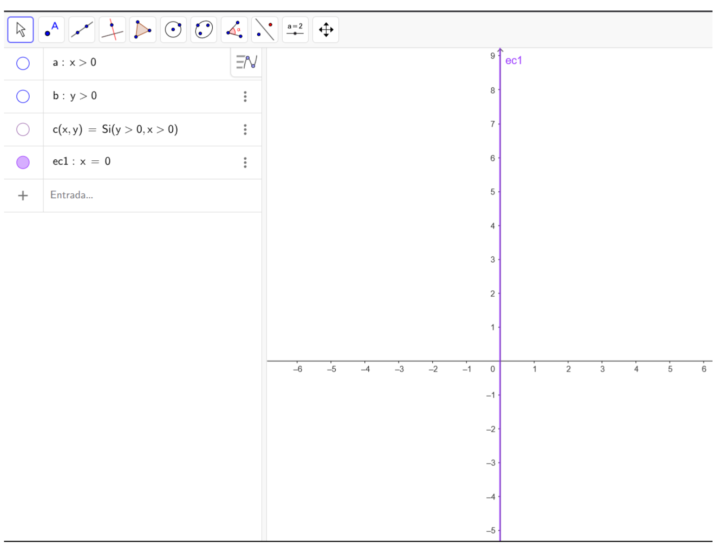

Figura 7: Conjunto $\{z \in C|\, z = -\overline{z}\}$

III. Si $w \in \{z \in C | z^{-1} = \overline{z}\}$, entonces $w^{-1} = \frac{\overline{w}}{|w|^2} = \overline{w}$, por tanto $|w| = 1$, analogamente si $|w| = 1$, es claro que $w^{-1} = \overline{w}$, por tanto el conjunto representa el circulo unitario

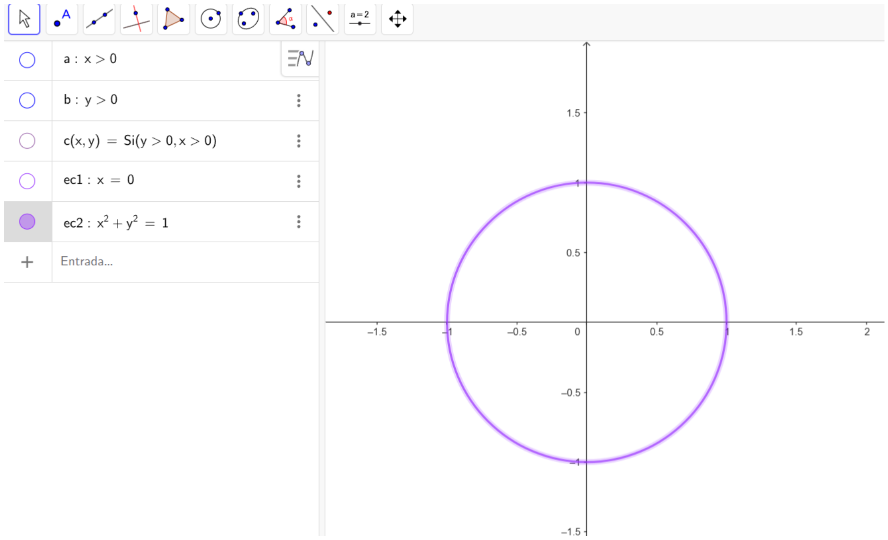

Figura 8: Conjunto $\{z \in C | \, z^{-1} = \overline{z}\}$

$\square$