Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Cálculo II
Decimas extra
Elías López Rivera
elias.lopezr@ciencias.unam.mx
Fecha: 17/05/2025

Problema

Sea $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ una sucesión tal que $a_n > 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Suponga que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log\left(\frac{1}{a_n}\right)}{\log(n)} = c \neq 1$$

Demuestre que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge si y solo sí $c > 1$

Demostración.

$\Rightarrow$) Tenemos que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, sea $\epsilon > 0$, tenemos que $\exists\, K \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\forall n \geq K \quad \left| \frac{\log\left(\frac{1}{a_n}\right)}{\log(n)} - c \right| < \epsilon$$

Desarrollando el valor absoluto:

$$c - \epsilon < -\frac{\log(a_n)}{\log(n)} < c + \epsilon$$

$$-(c+\epsilon)\log(n) < \log(a_n) \implies \log(n^{-(c+\epsilon)}) < log(a_n)$$

Finalmente usando que la función e^x es creciente, obtenemos que:

$$\frac{1}{n^{\epsilon+c}} < a_n \ \forall n \geq K$$

Como $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge tenemos que $\sum_{n=K}^{\infty} a_n$ tambien lo hace y por criterio de comparación tenemos que $\sum_{n=K}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\epsilon}}$ converge y por tanto $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\epsilon}}$ converge, por el criterio de las series $n'p$ tenemos que $c + \epsilon > 1$ del hecho de que ϵ fue arbitrario tenemos que $c \geq 1$ pero como $c \neq 1$ se concluye que $c > 1$

$\Leftarrow$) Supongamos que $c > 1$, por tanto $c - 1 > 0$, luego tomemos $0 < \epsilon < c - 1$, de nuevo, $\exists\, K \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\forall n \geq K \quad \left| \frac{\log\left(\frac{1}{a_n}\right)}{\log(n)} - c \right| < \epsilon$$

Desarrollando el valor absoluto:

$$c - \epsilon < -\frac{\log(a_n)}{\log(n)} < c + \epsilon$$

Luego tenemos que:

$$\log(a_n) < -(c - \epsilon)\log(n) \implies \log(a_n) < \log(n^{-(c-\epsilon)})$$

Por tanto

$$a_n < \frac{1}{n^{c-\epsilon}} \ \ \forall n \geq K$$

Luego como $c - \epsilon > 1$ tenemos que $\sum_{n=K}^{\infty} \frac{1}{n^{c-\epsilon}}$ converge, por criterio de comparación tenemos que $\sum_{n=K}^{\infty} a_n$ converge y por tanto $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge $\square$

Problema

Sea $x \in \mathbb{R}$ con $|x| < 1$. Pruebe que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2^n}}{1 - x^{2^{n+1}}} = \frac{x}{1 - x}$$

Demostración.
Primero demostremos lo siguiente, sea $a \in \mathbb{R}$ entonces:

$$\frac{a}{1 - a^2} = \frac{a + 1 - 1}{1 - a^2} = \frac{1 + a - 1}{(1 - a)(1 + a)} = \frac{1}{1 - a} - \frac{1}{1 - a^2}$$

$\square$

Por tanto tenemos que:

$$\frac{x^{2^n}}{1-(x^{2^n})^2} = \frac{1}{1-x^{2^n}} - \frac{1}{1-x^{2^{n+1}}}$$

Si definimos

$$b_n = \frac{1}{1-x^{2^n}}$$

Obtenemos que:

$$\sum_{n=0}^{k} \frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}} = b_1 - b_2 + b_2 - b_3 + \cdots - b_{k+1} = b_1 - b_{k+1} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^{2^{k+1}}}$$

Una suma telescopica, ahora como $|x| < 1$, se tiene que:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{1-x^{2^k+1}} = 1$$

Se concluye que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}} = \frac{1}{1-x} - 1 = \frac{1-1+x}{1-x} = \frac{x}{1-x}$$