Problema 27

Elías López Rivera [1]

[1] Universidad Nacional Autónoma de México
Facultade de Ciencias

11 de julio de 2025

1. Enunciado

Demuestre lo siguiente:

(i) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, para todo $a > 0$ en $\mathbb{R}$

(ii) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + 2^{\mu(n)}} = 1$ donde $\mu(n)$ es la función de Mobius

(iii) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + 2^{a_n}} = 1$, para toda sucesión acotada $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de enteros positivos.

(iv) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + 2^{a_n}} = 1$ para toda sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de enteros positivos que cumple $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{n} = 0$

2. Solución

i) Tomemos $a > 1$ en $\mathbb{N}$, sea $z := \frac{a-1}{n}$ con $n \in \mathbb{N}$, es claro que $z > 0$, aplicando la desigualdad de Bernoulli tenemos que:

$$(1+z)^n \geq (1+nz) \implies (1+z)^n \geq a \implies (1+z) \geq \sqrt[n]{a}$$

También tenemos que $a > 1 \implies \sqrt[n]{a} > 1$, por tanto

$$1 < \sqrt[n]{a} \leq (1+z) \implies \lim_{n\to\infty} 1 < \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} \leq \lim_{n\to\infty} (1+z)$$

$$1 < \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} \leq 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{a-1}{n}$$

$$1 < \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} \leq 1 + 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$$

Ahora tomemos $a < 1$ en $\mathbb{R}$, se tiene que:

$$\frac{1}{a} > 1 \implies \frac{1}{a} = 1 + \lambda \;\; \lambda > 0$$

$$a = \frac{1}{1+\lambda}$$

Por tanto:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{1+\lambda}}$$

Aplicando el teorema de algebra de límites:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{1+\lambda}} = 1$$

ii) Como sabemos $\mu(n) \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por tanto se sigue que $2^{\mu(n)} \leq 2$, a su vez es claro que $2^x \geq 0$ para todo x en $\mathbb{R}$, se sigue que $1 \leq 1 + 2^{\mu(n)}$, luego:

$$1 \leq 1 + 2^{\mu(n)} \leq 3$$

$$1 \leq \sqrt[n]{1 + 2^{\mu(n)}} \leq \sqrt[n]{3}$$

$$\lim_{n \to \infty} 1 \leq \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{1 + 2^{\mu(n)}} \leq \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{3}$$

$$1 \leq \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{1 + 2^{\mu(n)}} \leq 1$$

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{1 + 2^{\mu(n)}} = 1$$

iii) Como $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, es acotada, se sigue que $a_n \leq k$, para cualquier n en $\mathbb{N}$, se tiene $2^{a_n} \leq 2^k$, por tanto:

$$1 \leq 1 + 2^{a_n} \leq 1 + 2^k$$

$$1 \leq \sqrt[n]{1 + 2^{a_n}} \leq \sqrt[n]{1 + 2^k}$$

$$\lim_{n \to \infty} 1 \leq \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{1 + 2^{a_n}} \leq \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{1 + 2^k}$$

$$1 \leq \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{1 + 2^{a_n}} \leq 1$$

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{1 + 2^{a_n}} = 1$$

iv) Como $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{n}$, por tanto $\exists\, k \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq k$ $\left|\frac{a_n}{n}\right| < 1$, se sigue que:

$$1 < 1 + 2^{a_n} < 2\left(2^{a_n}\right) \implies 1^{\frac{1}{n}} < \left(1 + 2^{a_n}\right)^{\frac{1}{n}} < 2^{\frac{1}{n}}\left(1+1\right)^{\frac{a_n}{n}}$$

Aplicando la desigualdad de Bernoulli, debido a que $0 < \frac{a_n}{n} < 1$ tenemos que:

$$1 < \left(1 + 2^{a_n}\right)^{\frac{1}{n}} < 2^{\frac{1}{n}}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

Finalmenete tenemos que:

$$1 = \lim_{n\to\infty} 1 < \lim_{n\to\infty} \left(1 + 2^{a_n}\right)^{\frac{1}{n}} < \lim_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{n}}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$$