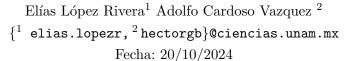


# Universidad Nacional Autónoma de México Facultad de Ciencias Geometria Moderna

Tarea examen 1





# Problema 1

Sea:

$$F = \{0, 1\}$$

con las operaciones modulo 2 definidas, es decir:

*I.* Suma: 
$$0 + 0 = 0$$
,  $0 + 1 = 1$ ,  $1 + 1 = 0$ ,  $1 + 0 = 1$ 

II. **Multiplicación**: 
$$1 \cdot 1 = 1$$
,  $0 \cdot 0 = 0$ ,  $0 \cdot 1 = 0$ ,  $1 \cdot 0 = 0$ 

- a) Verificar que la multiplicación es una operación asociativa, que posee elemento neutro 1 y cada elemento distinto de 0 posee inverso multiplicativo
- b) Confirmar la distributividad del producto sobre la suma

Concluir que F es un campo

 $\square$ 

### Problema 2

Sea:

$$F = \mathbb{Z}_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

con las operaciones modulo 2 definidas, es decir:

- *I.* Suma: 0 + 0 = 0, 0 + 1 = 1, 1 + 1 = 0, 1 + 0 = 1
- *II. Multiplicación*:  $1 \cdot 1 = 1$ ,  $0 \cdot 0 = 0$ ,  $0 \cdot 1 = 0$ ,  $1 \cdot 0 = 0$
- a) Verificar que la multiplicación es una operación asociativa, que posee elemento neutro 1 y cada elemento distinto de 0 posee inverso multiplicativo
- b) Confirmar la distributividad del producto sobre la suma

Concluir que F es un campo

Demostraci'on.

#### Problema 3

Sea:

$$F = \{ a + b\sqrt{2} \, | a, \, b \in \mathbb{Q} \}$$

con las operaciones de suma y multiplicación: a) Comprobar que F es cerrado bajo la suma y la multiplicación de  $\mathbb Q$ 

- b) Demostrar que existe un elemento neutro para la suma (el cero) y para la multiplicación
- c) Para cada elemento  $x=a+b\sqrt{2}$  con  $x\neq 0$ , encontrar o demostrar la existencia de su inverso multiplicativo en F
- d) Verificar las demas propiedades: existencia de inversos aditivos, asociatividad, conmutatividad y distributividad

Concluir que F es un campo

 $\square$ 

## Problema 4

Sea  $F = \mathbb{Z}$  con la operaciones definidas de la siguiente forma:

• Suma: Para  $a, b \in \mathbb{Z}$  se define

$$a \oplus b = a + b - 1$$
.

■ **Producto:** Para  $a, b \in \mathbb{Z}$  se define

$$a \odot b = a \cdot b - a - b - 2$$
.

- I. Demostrar que  $(F, \oplus)$  es un grupo abeliano. En particular, determinar el elemento neutro aditivo  $e_{\oplus}$  y hallar el inverso aditivo de un elemento a.
- II. Determinar el elemento neutro multiplicativo  $e_{\odot}$  en  $(F \setminus \{e_{\oplus}\}, \odot)$  y comprobar que no todo elemento  $a \in F$  con  $a \neq e_{\oplus}$  tiene inverso multiplicativo.
- III. Verificar la distributividad de  $\odot$  respecto a  $\oplus$

Concluir que  $(F, \oplus, \odot)$  no es un campo

Demostración.

### Problema 5

Sea:

$$F = \mathbb{R}^2$$

con las operaciones definidas de la siguiente forma:

- *I.*  $Suma:(a,b) \oplus (c,d) = (a+c,b+d)$
- II. Multiplicación:  $(a,b) \odot (c,d) = (ac bd, ad + bc)$
- a) Verificar que la suma y el producto estan bien definidos y son operaciones en F
- b) Demostrar que existe un elemento neutro para la suma (0,0) y para el producto (1,0)
- c) Comprobar que para cada elemento  $(a,b) \neq (0,0)$  le corresponde un inverso mutiplicativo.
- $m{d}$ ) Verificar la conmutatividad, la asociatividad y la distributividad del producto respecto a la suma

Demostraci'on.

#### Problema 6

Una función  $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$  se llama **función par** si para todo  $t \in \mathbb{R}$  se cumple que f(t) = f(-t). Demostrar que el conjunto  $P := \{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} | f \text{ es par} \}$ , con las siguientes operaciones:

$$\forall\,f,g\in P\ y\ c\in\mathbb{R}: (f+g)(s)=f(s)+g(s)\ y\ (cf)(s)=c\left(f(s)\right)$$

Es un  $\mathbb{R}$  – espacio vectorial

Demostración.