Problema 28

Elías López Rivera [1]

[1] Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de ciencias,

7 de julio de 2025

1. Enunciado

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$, sea x_0 un punto de acumulación de A, y sea $f\colon A \to \mathbb{R}$, una función acotada en A. Definimos la **oscilación** de f en x_0 como el límite:

$$\Omega_f(x_0) := \lim_{\delta \to 0^+} sup\{|\, f(x) - f(y)\,| : x, y \in A, |x - x_0|, |y - x_0| < \delta\}$$

(este límite existe porque, a medida que δ decrece, el supremo también decrece). **Demuestre** que f es continua en x_0 si y solo sí $\Omega_f(x_0) = 0$

2. Solución

Primero demostremos que:

$$\Omega_f(x_0) = inf\{sup\{|\, f(x) - f(y)| : x, y \in V_\delta(x_0) \cap A, \delta > 0\}\}$$

Sea $\delta > 0$, definimos:

$$g(\delta) := sup\{|\, f(x) - f(y)\,| : x, y \in V_\delta(x_0) \cap A\}$$

Como $0 < g(\delta)\ \forall\, \delta > 0$, sabemos que existe $inf\{g[I]\}$, con $I := (0, \infty)$.

Sea $\epsilon > 0\ \exists\, t > 0$ tal que:

$$g(t) < inf\{g[I]\} + \epsilon$$

finalmente sea x$\in$ $(0,t)$, como $x < t$, se tiene que $g(x) < g(t)$ concluimos que:

$$inf\{g[I]\} - \epsilon < g(x) < inf\{g[I]\} + \epsilon$$

es decir $\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, t > 0$ tal que:

Si $x \in (0,t)$, entonces: $g(x) \in V_{\epsilon}(inf\{g[I]\})$ por tanto:

$$\Omega_f(x_0) = inf\{sup\{|\, f(x) - f(y)\,| : x, y \in V_{\delta}(x_0) \cap A, \delta > 0\}\}$$

$\Longrightarrow$) Tomando en cuenta que f es continua en x_0, la condición continua de Cauchy nos asegura la existencia de $\delta_1 > 0$ tal que, si $x, y \in V_{\delta_1}(x_0) \cap A$ se cumple que $|\, f(x) - f(y)\,| < \epsilon$, para algún $\epsilon > 0$
Luego tenemos, por la condición de supremo:

$$sup\{|\, f(x) - f(y)\,| : x, y \in V_{\delta_1}(x_0) \cap A\} < \epsilon$$

Finalmente, aplicamos la condición de ínfimo a lo anterior:

$$\Omega_f(x_0) < \epsilon$$

Debido a que 0 es cota inferior del conjunto $g[I]$:

$$0 \leq \Omega_f(x_0) < \epsilon$$

como épsilon es arbitrario, conlcuimos que:

$$\Omega_f(x_0) = 0$$

$\Longleftarrow$) Ahora, suponiendo que $\Omega_f(x_0) = 0$, sabemos , por la condición de ínfimo que:

Sea $\epsilon > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que:

$$sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in V_{\delta_1}(x_0) \cap A\} < \Omega_f(x_0) + \epsilon = \epsilon$$

Luego aplicando la condicion de supremo, fijamos x=x_0, tomamos y $\in$ $V_{\delta_1}(x_0) \cap A$ tal que:

$$|\, f(x_0) - f(y) \,| < \epsilon$$

Como épsilon es arbitrario, se cumple la condición de continuidad, por tanto f es continua en x_0.