Problema 6

Elías López Rivera [1]

[1] Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de ciencias

26 de enero de 2025

1. Enunciado

Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, una sucesión de terminos positivos. **Demuestre** lo siguiente:

i) Si el límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

existe y es mayor a 1, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

ii) Si el límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

existe y es mayor a 1, entonces la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es divergente.

2. Solución

i) Sea $l < 1$ tal que: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = l$,

Tomemos $r \in \mathbb{R}$ de tal suerte que $l < r < 1$, se sigue $r - l > 0$, aplicando la definición de límite de una sucesión, $\exists\, k_1 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n \geq k_1 : |\tfrac{a_{n+1}}{a_n} - l| < r - l$$

$$\tfrac{a_{n+1}}{a_n} < r$$

Podemos afirmar:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < r, \frac{a_n}{a_{n-1}} < r, ..., \frac{a_{k_1}+1}{a_{k_1}} < r$$

de donde se sigue:

$$0 < a_{n+1} < a_n r < a_{n-1} r^2 < ..... < a_{k_1} r^{n-k_1+1}$$

Se define: $M := \frac{a_{k_1}}{r^{k_1}}$ finalmente: $n \geq k_1 : 0 < a_{n+1} < M r^{n+1}$

Ahora como $r < 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} r^{n+1} = 0,$ sea $\delta := \frac{\epsilon}{M}$ para $\epsilon > 0$ podemos afirmar que $\exists\, k_2 \in \mathbb{N}$, tal que:

$$n \geq max\{k_1, k_2\} : |a_{n+1}| < c\delta = \epsilon$$

De donde se obtiene que:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

ii)Supongamos $l > 1$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = l$

Tomemos $r \in \mathbb{R}$ de tal suerte que $1 < r < l$ se sigue que $l - r > 0$, aplicando la definición de límite de una sucesión, $\exists\, k_1 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$|\frac{a_{n+1}}{a_n} - l| < l - r \implies r < \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Podemos afirmar:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > r, \frac{a_n}{a_{n-1}} > r, ..., \frac{a_{k_1+1}}{a_{k_1}} > r$$

de donde se sigue:

$$a_{n+1} > a_n r > a_{n-1} r^2 > ..... > a_{k_1} r^{n-k_1+1}$$

Se define: $M := \frac{a_{k_1}}{r^{k_1}}$ finalmente $M r^{n+1} < a_{n+1}$, para $r > 1$

Por tanto $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, no puede ser acotada, y por tanto no converge.