Problema 20

Elías López Rivera [1]

[1] Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de ciencias

26 de enero de 2025

1. Enunciado

Demuestre que la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donde:

$$a_n = \sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+....+\sqrt{n}}}}$$

$\forall\, n \in \mathbb{N}$.
es convergente.

2. Solución

Primero demostremos que$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona creciente, es claro que sea $n \in \mathbb{N}$:

$$n+1 > n.$$

$$\sqrt{n+1} > \sqrt{n}.$$

$$n+\sqrt{n+1} > n+\sqrt{n} > n-1+\sqrt{n}.$$

$$n+\sqrt{n+1} > n-1+\sqrt{n}$$

$$\sqrt{n+\sqrt{n+1}} > \sqrt{n-1+\sqrt{n}}$$

Si repetimos estre proceso n veces obtendremos:

$$a_{n+1} = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + ... + \sqrt{n+1}}}} > \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + ... + \sqrt{n}}}} = a_n$$

Concluimos que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, es una sucesión monótona creciente. Ahora si tomamos un $n \in \mathbb{N}$, tal que $n \geq 4$ es claro que :

$$4n \leq n^2.$$

$$4n \leq n^2 < n^2 + 1.$$

$$2n < n^2 - 2n + 1.$$

$$2n < (n-1)^2.$$

$$\sqrt{2n} < n - 1$$

Concluimos que $\sqrt{2n} < n - 1 \ \ \forall n \geq 4$. Usando lo anterior:

$$a_n = \sqrt{1 + \sqrt{2 + ... + \sqrt{n - 1 + \sqrt{n}}}} < \sqrt{1 + \sqrt{2 + ... + \sqrt{n - 1 + \sqrt{2n}}}}$$

$$< \sqrt{1 + \sqrt{2 + ... + \sqrt{n - 2 + \sqrt{2(n-1)}}}} < \sqrt{1 + \sqrt{2 + ... + \sqrt{2(n-2)}}}$$

$$< .... < \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \sqrt{4 + \sqrt{2(5)}}}}} < \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \sqrt{2(4)}}}}$$

Por tanto $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, es acotada y monótona:

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, \text{ es convergente.}$$