Cálculo Diferencial e Integral II

Series

28 de mayo de 2020

La clase pasada dimos una muy breve introducción al manejo de las series de potencias. Ahora vamos a aprovecharnos de ellas para motivar uno de los problemas más difíciles en el tema de series: *el producto de series.*

La linealidad de las series nos ofrece un candidato muy natural para sumar series:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$$

pero para el caso del producto de dos series la cosa no está nada clara:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right) = \ ??? \tag{1}$$

¿De qué trata este problema? ¿Qué necesidad tendríamos de realizar el producto (1)? Si sabemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A \qquad \text{y} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$$

entonces, ¿no nos basta con decir simplemente que

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right) = AB?$$

Piensen en la siguiente situación: sabemos que

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Por las leyes de los exponentes también sabemos que

$$e^x e^y = e^{x+y}$$

Si sustituimos la serie de potencias, entonces debe ser cierto que

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} \tag{2}$$

¡Ajá! Si no supieran que la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ está asociada con la exponencial, ¿cómo le harían para pasar del lado izquierdo al derecho en (2)?

Este hecho pone de manifiesto la necesidad de expresar al producto de dos series como una nueva serie. Y por supuesto, esto nos lleva a la pregunta: ¿siempre es posible expresar el producto de dos series como una nueva serie?

Analizando un simple ejemplo:

$$(a_1 + a_2 + a_3)(b_1 + b_2 + b_3) = a_1b_1 + a_1b_2 + a_1b_3 + a_2b_1 + a_2b_2 + a_2b_3 + a_3b_1 + a_3b_2 + a_3b_3$$

logramos observar que el producto de las sumas $a_1+a_2+a_3$ y $b_1+b_2+b_3$ arroja la suma de todos los posibles productos a_ib_j con $i, j = 1, 2, 3$.

Inspirados en lo anterior, podemos intuir que el resultado de hacer el producto en (1) debería devolver "la suma de **todos** los productos a_ib_j con $i, j \in \mathbb{N}$". Y aquí viene el problema, ¿cómo le hacemos para sumar a todos estos productos?

Si reflexionan con cuidado en la pregunta, podrán apreciar que el conflicto no está en realizar la suma sino en acomodar *correctamente* a los sumandos a_ib_j.

Cuando estudiamos reordenamientos de una serie nos enteramos que en el caso de las sumas infinitas, a menos que la serie sea absolutamente convergente, la manera en la que se acomodan los sumandos repercute drásticamente en el resultado final. Dependiendo del acomodo, la suma puede arrojarnos resultados totalmente arbitrarios.

Para que tengan un mejor panorama de nuestro problema, visualicen el siguiente arreglo:

$$\begin{array}{cccccc}
a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \cdots & a_1b_n & \cdots \\
a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & \cdots & a_2b_n & \cdots \\
a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 & \cdots & a_3b_n & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & \cdots & a_nb_n & \cdots \\
\vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots
\end{array} \tag{3}$$

¿Cómo acomodarían a todos estos sumandos en una misma serie de tal manera que su valor sea igual al producto de las series definidas por $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$?

La idea esencial es buscar definir una sucesión $\{c_n\}$ que de alguna manera vaya recolectando a todos los productos a_ib_j y para la cual se cumpla que

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right)$$

No sé si debamos llamar afortunado o desafortunado al hecho de que la respuesta NO es única. Resulta que hay una gran variedad de formas de generar a una sucesión $\{c_n\}$ con las características buscadas. Es decir, no existe "una fórmula oficial" para el cálculo de un producto de series.

Aquí les presento una primer forma bastante intuitiva de hacerlo:

Tratemos de buscar una sucesión $\{c_n\}$ con la propiedad de que

$$\sum_{k=1}^{n} c_k = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right)$$

Si lo logramos, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} c_k = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right)$$

¿Cómo construimos a c_n?

Muy sencillo. Si se fijan en el producto

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right)$$

esta expresión contiene a todos los sumandos de la forma $a_i b_j$ con $i, j = 1, \ldots, n$.

Regresándomos al diagrama (3), podemos notar que el producto contiene exactamente a los términos de este cuadrado:

$$\begin{array}{ccccc}
a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \cdots & a_1b_n \\
a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & \cdots & a_2b_n \\
a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 & \cdots & a_3b_n \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_nb_1 & a_nb_2 & a_nb_3 & \cdots & a_nb_n
\end{array}$$

Una manera de realizar la suma de todos estos números es ir sumando en "L invertida":

$$\begin{array}{ccccc}
a_1b_1 & a_1b_2 & \blacksquare & \cdots & a_1b_n \\
a_2b_1 & a_2b_2 & \blacksquare & \cdots & a_2b_n \\
\blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \cdots & a_3b_n \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_nb_1 & a_nb_2 & a_nb_3 & \cdots & a_nb_n
\end{array} \tag{4}$$

Es decir, definan

$$c_1 = a_1 b_1$$

$$\text{y para } n \geq 2$$

$$c_n = a_n \left(b_1 + b_2 + \cdots + b_n\right) + b_n \left(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}\right)$$

Observen que c_3 se corresponde precisamente con la suma "en L" de los lugares marcados con $\blacksquare$ en (4).

De esta manera queda claro que

$$\sum_{k=1}^{n} c_k = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right) \tag{5}$$

como se quería.

(*Como ejercicio, traten de dar una prueba formal de la igualdad (5)*)

En algunos textos a esta manera de sumar la llaman "**la suma cuadrada**" porque la sumas parciales de $\{c_n\}$ van barriendo con los cuadrados como el mostrado en (4).

Si no hay una fórmula oficial para calcular un producto de series, ¿qué hacemos ahora?

Aún cuando no hay una fórmula oficial, sí existe un procedimiento que posiblemente sea el más trabajado para abordar el producto de series, el llamado: *producto de Cauchy.*

Conviene mucho conocer este producto. Así que vamos a presentarlo puntualizando algunos detalles importantes que le rodean. Esta manera de multiplicar series es muy popular porque se ajusta perfectamente al producto que uno esperaría tener cuando multiplica series de potencias, de hecho esta es la motivación que hay detrás del producto de Cauchy.

Consideren las series de potencias:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad \text{y} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

(Recuerden que las series de potencias las iniciamos en $n = 0$ porque este sumando representa el "término constante" que toda serie de potencias debe tener)

Si multiplicamos término por término y después agrupamos los coeficientes compartidos por una misma x^k, tenemos que:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots\right)\left(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n + \cdots\right)$$

$$= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)\, x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)\, x^2 + \cdots + (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0)\, x^n + \cdots$$

Esto nos invita a definir

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

Y lo que esperaríamos que ocurriera es que

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

¿Qué pasa si ahora evaluamos en $x = 1$?

Pues si $x = 1$, obtenemos una nueva fórmula para multiplicar series:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

y este es el famosísimo producto de Cauchy.

Nota importante: Los razonamientos anteriores son totalmente informales y sólo representan una deducción del producto de Cauchy.

Conociendo de dónde surge el producto de Cauchy, ahora formalicemos su definición para estudiar todo lo que nos tiene que ofrecer.

Definición 1 *Sean* $\{a_n\}, \{b_n\} \subset \mathbb{R}$ *dos sucesiones (con* $n \geq 0$*). Para cada* $n \geq 0$ *definimos*

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

A la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

la llamaremos el producto de Cauchy de las sucesiones $\{a_n\}$ *y* $\{b_n\}$*.*

Modificando un poco el diagrama (3) para que ahora las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ comiencen en $n = 0$, podemos escribir:

$$\begin{array}{ccccccc}
a_0b_0 & a_0b_1 & a_0b_2 & a_0b_3 & \cdots & a_0b_n & \cdots \\
a_1b_0 & a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \cdots & a_1b_n & \cdots \\
a_2b_0 & a_2b_1 & a_2b_1 & a_2b_3 & \cdots & a_2b_n & \cdots \\
a_3b_0 & a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 & \cdots & a_3b_n & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_nb_0 & a_nb_1 & a_nb_2 & a_nb_3 & \cdots & a_nb_n & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots &
\end{array}$$

La sucesión $\{c_n\}$ generada para obtener el producto de Cauchy lo que hace es ir recolectando los sumandos de las diagonales trazadas desde el punto a_0b_n hasta el punto a_nb_0:

$$\begin{array}{ccccccc}
a_0b_0 & a_0b_1 & a_0b_2 & \blacksquare & \cdots & a_0b_n & \cdots \\
a_1b_0 & a_1b_1 & \blacksquare & a_1b_3 & \cdots & a_1b_n & \cdots \\
a_2b_0 & \blacksquare & a_2b_1 & a_2b_3 & \cdots & a_2b_n & \cdots \\
\blacksquare & a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 & \cdots & a_3b_n & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_nb_0 & a_nb_1 & a_nb_2 & a_nb_3 & \cdots & a_nb_n & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots &
\end{array} \tag{6}$$

En el diagrama anterior la suma de los lugares marcados con $\blacksquare$ se corresponde con el termino c_3.

Observen por favor que en la Definición 1 no se está imponiendo ninguna restricción a las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$. Es decir, el producto de Cauchy puede generarse aún con sucesiones que no son sumables.

Dentro de los detalles patológicos que tiene el producto de Cauchy, podemos toparnos con las siguientes dos situaciones:

1) *Existen dos sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$, NO sumables pero tales que su producto de Cauchy $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ sí es convergente.*

2) *Existen dos sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$, sumables pero tales que su producto de Cauchy $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ no es convergente. En particular NO se cumple que*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

Veamos estos ejemplos.

Ejemplo 2 *Consideremos a las sucesiones:*

$$a_n = \begin{cases} -1 & n = 0 \\ \\ 2\left(-1\right)^{n+1} & n \geq 1 \end{cases}$$

$$y$$

$$b_n = \begin{cases} -1 & n = 0 \\ \\ -2 & n \geq 1 \end{cases}$$

Ninguna de las sucesiones $\{a_n\}$ *y* $\{b_n\}$ *puede ser sumable ya que* $a_n \nrightarrow 0$ *y* $b_n \nrightarrow 0$.

Sin embargo, vamos a ver que su producto de Cauchy sí es convergente.

Primero notemos que

$$c_0 = a_0 b_0 = \left(-1\right)\left(-1\right) = 1$$

Así mismo

$$c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0 = \left(-1\right)\left(-2\right) + 2\left(-1\right)^2\left(-1\right) = 2 - 2 = 0$$

Ahora vamos a demostrar que sorprendentemente para $n \geq 2$ *se cumple que* $c_n = 0$. *(No es necesario proceder por inducción)*

Tomemos $n \geq 2$. *Por definición*

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = a_0 b_n + a_n b_0 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k}$$

Observen que en esta separación implícitamente estamos usando que $n \geq 2$.

Ahora sustituyamos los valores explícitos de las sucesiones:

$$c_n = \left(-1\right)\left(-2\right) + 2\left(-1\right)^{n+1}\left(-1\right) + \sum_{k=1}^{n-1}\left[2\left(-1\right)^{k+1}\left(-2\right)\right]$$

$$= 2 - 2\left(-1\right)^n - 4\sum_{k=1}^{n-1}\left(-1\right)^{k+1}$$

Dado que

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(-1\right)^{k+1} = \begin{cases} 1 & n \text{ impar} \\ \\ 0 & n \text{ par} \end{cases}$$

podemos concluir que

$$c_n = \begin{cases} 2 - 2\left(-1\right)^n - 4 & n \text{ impar} \\ \\ 2 - 2\left(-1\right)^n & n \text{ par} \end{cases} = \begin{cases} 4 - 4 & n \text{ impar} \\ \\ 2 - 2 & n \text{ par} \end{cases}$$

En cualquier caso se tiene que $c_n = 0$ *para* $n \geq 2$.

Y de este modo concluimos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 1$$

Por lo tanto el producto de Cauchy de $\{a_n\}$ *y* $\{b_n\}$ *converge a pesar de que estas sucesiones no son sumables.*

Hay una manera muy interesante de abordar el Ejemplo 2 si lo vemos desde la perspectiva de las series de potencias (no olviden que a partir de ellas motivamos al producto de Cauchy).

Para la sucesión $\{a_n\}$ del Ejemplo 2 podemos asociar la serie de potencias:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Si tratamos de encontrar a f de manera explícita:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = -1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2(-1)^{n+1} x^n$$

$$= -1 - 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^n = -1 - 2\sum_{n=1}^{\infty} (-x)^n$$

Ahora noten que nos quedó una serie geométrica (empezada en $n = 1$) y para ésta sí sabemos calcular su valor:

$$f(x) = -1 - 2\left(\frac{1}{1+x} - 1\right)$$

Nota técnica: $\sum_{n=1}^{\infty} r^n = \sum_{n=0}^{\infty} r^n - 1$

Por lo tanto

$$f(x) = -1 - 2\left(\frac{1}{1+x} - 1\right) = 1 - \frac{2}{1+x} = \frac{x-1}{1+x}$$

Es decir,

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1}$$

Por otra parte, para $\{b_n\}$ podemos asociar la serie de potencias:

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

Si tratamos de encontrar a g de manera explícita:

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n = -1 - 2\sum_{n=1}^{\infty} x^n$$

Una vez más nos quedó una serie geométrica (empezada en $n = 1$). De modo que:

$$g(x) = -1 - 2\left(\frac{1}{1-x} - 1\right) = 1 - \frac{2}{1-x} = \frac{-1-x}{1-x}$$

Es decir,

$$g(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

Si multiplicamos f y g:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = f(x)\, g(x) = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 1 \tag{7}$$

Partiendo de la motivación que dimos del producto de Cauchy se sigue que

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = 1$$

exactamente como lo obtuvimos en el Ejemplo 2.

Por supuesto que el argumento anterior tiene un paso oscuro y es que el producto realizado en (7) no es válido para $x = 1$. De hecho, es importante que noten que las series de potencias definidas por f y g sólo convergen (absolutamente) si $x \in (-1, 1)$. (*No está de más que demuestren este hecho, apliquen el criterio del cociente*)

Ahora bien, gracias a que el producto de f y g no es válido para $x = 1$ podemos darnos una idea del por qué dos series divergentes pudieron tener un producto de Cauchy convergente. Y es que desde esta perspectiva, el problema de fondo no es un problema de series, sino un problema de límite de funciones.

Para nosotros ya debe ser muy familiar el hecho de que un producto de funciones puede tener límite a pesar de que uno de los factores no lo tenga.

Si se fijan

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x-1}{x+1} = 0$$

mientras que

$$\lim_{x\to 1^-} g(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x+1}{x-1} = -\infty$$

En principio, al calcular el límite del producto de f y g se nos genera una indeterminación

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)\, g(x) = 0\,(-\infty)$$

Pero dado que $f(x)\, g(x) = 1$ para toda $x \neq 1$, tiene todo el sentido del mundo que la indeterminación se solucione de manera satisfactoria:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)\, g(x) = 1$$

Más adelante regresaremos a este ejemplo para apreciar con más amplitud lo que está pasando.

Vamos a nuestro siguiente ejemplo patológico.

Ejemplo 3 *Consideremos la sucesión $\{a_n\}$ definida como sigue:*

$$a_0 = 0 \qquad \text{y para } n \geq 1 \qquad a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$$

Ahora tomemos $b_n = a_n$. Ya sabemos que la sucesión $\{a_n\}$ es sumable (y por tanto $\{b_n\}$ lo es).

Demostraremos que el producto de Cauchy de $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ no converge.

Comencemos con algunas estimaciones de la sucesión

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

Como $a_0 = b_0 = 0$, entonces $c_0 = c_1 = 0$.

Tomemos $n \geq 2$. Entonces:

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = a_0 b_n + a_n b_0 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k} = \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}} \cdot \frac{(-1)^{n-k+1}}{\sqrt{n-k}} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{n+2}}{\sqrt{k}\sqrt{n-k}}$$

Es decir,
$$c_n = (-1)^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k}}$$
Ahora bien, como para toda $k = 1, \ldots, n-1$ se cumple que
$$\sqrt{k} \leq \sqrt{n-1} \qquad y \qquad \sqrt{n-k} \leq \sqrt{n-1}$$
entonces
$$\frac{1}{\sqrt{n-1}} \leq \frac{1}{\sqrt{k}} \qquad y \qquad \frac{1}{\sqrt{n-1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n-k}}$$
y por lo tanto
$$\frac{1}{n-1} \leq \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k}}$$
De donde
$$|c_n| = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k}} \geq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n-1} = \frac{n-1}{n-1} = 1$$
es decir,
$$|c_n| \geq 1 \qquad \textit{para toda } n \geq 2$$
Lo que implica que $c_n \nrightarrow 0$ y por lo tanto el producto de Cauchy
$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n$$
no converge a pesar de que las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ sí son sumables.

A diferencia del desconcertante Ejemplo 2, el Ejemplo 3 es más bien desmotivante. ¡De qué rayos nos sirve el producto de Cauchy si es posible que dos sucesiones sumables tengan un producto de Cauchy divergente!

No olviden que el objetivo final de lo que estamos haciendo es ofrecer una buena fórmula para calcular el producto de dos series convergentes. Y uno de los más grandes obstáculos que tiene este problema es elegir el orden para sumar los productos. La sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ usadas en el Ejemplo 3 son **condicionalmente convergentes** y esto limita enormemente nuestra libertad para elegir un orden adecuado de los productos $a_i b_j$ que haga que al efectuar la suma de todos ellos nos quede algo convergente. Lo que nos muestra el Ejemplo 3 es que el ordenamiento dado por el producto de Cauchy no sirve para estas sucesiones. Pero podemos considerarlo como un pequeño bachecito en nuestro camino.

Más adelante demostraremos un poderoso resultado que afirma que si ya sabemos que las tres series
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \qquad \sum_{n=0}^{\infty} b_n \qquad \sum_{n=0}^{\infty} c_n$$
son convergentes (en donde $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ es el producto de Cauchy de $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$), entonces
$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)$$
Es decir, siempre que podamos asegurar la convergencia del producto de Cauchy de dos sucesiones sumables, entonces el producto de Cauchy necesariamente debe converger al anhelado producto de las series. Así que sí es un buen candidato para trabajar.

Ahora bien, ¿y cómo aseguramos que el producto de Cauchy de dos sucesiones sumables produzca algo convergente?

Pues de acuerdo a lo que nos mostró el Ejemplo 3 quizá una buena idea sea exigir que al menos una de las series involucradas no sólo sea convergente, sino que sea absolutamente convergente. Esto es algo que observó Franz Mertens, notable matemático polaco especializado en Teoría de Números y a quien le debemos el siguiente teoremón:

Teorema 4 *(Mertens) Sean* $\{a_n\}, \{b_n\} \subset \mathbb{R}$ *dos sucesiones sumables. Si* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *ó* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *converge absolutamente, entonces el producto de Cauchy de* $\{a_n\}$ *y* $\{b_n\}$ *converge y además*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)$$

Dem. Supongamos sin pérdida de generalidad que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge absolutamente.

Definimos

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

Queremos demostrar que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ converge y además

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)$$

Llamemos

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \qquad B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k \qquad C_n = \sum_{k=0}^{n} c_k$$

Llamemos también

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \qquad \text{y} \qquad B = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

Con toda esta notación lo que tenemos que demostrar ahora es que

$$\lim_{n\to\infty} C_n = AB$$

Hay que pasar por algunas cuentas, pero con algo de paciencia verán que la prueba no es tan difícil (aunque sí es algo truculenta).

Definamos

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \qquad \text{y} \qquad D_n = B_n - B$$

El número S está bien definido puesto que estamos suponiendo que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge absolutamente.

Vamos a comenzar manipulando la definición de C_n para transformar su definición en una expresión en donde aparezcan A_n y B.

Veamos:

$$\begin{aligned} C_n &= c_0 + c_1 + \cdots + c_n \\ &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) + \cdots + (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0) \end{aligned}$$

Para tener un poco más de visión, apóyense de la representación de c_n que nos muestra el diagrama (6) y noten que podemos asociar la suma anterior de la siguiente manera:

$$C_n = a_0 (b_0 + b_1 + \cdots + b_{n-1} + b_n) + a_1 (b_0 + b_1 + \cdots + b_{n-2} + b_{n-1}) + \cdots + a_{n-1} (b_0 + b_1) + a_n b_0$$

En términos de B_n podemos escribir lo anterior como:

$$C_n = a_0 B_n + a_1 B_{n-1} + \cdots + a_{n-1} B_1 + a_n B_0$$

Ahora bien, como $D_n = B_n - B$, entonces

$$C_n = a_0 (D_n + B) + a_1 (D_{n-1} + B) + \cdots + a_{n-1} (D_1 + B) + a_n (D_0 + B)$$

O lo que es equivalente:

$$C_n = (a_0 + a_1 + \cdots + a_n)\, B + (a_0 D_n + a_1 D_{n-1} + \cdots + a_{n-1} D_1 + a_n D_0)$$

Es decir,

$$C_n = A_n B + \sum_{k=0}^{n} a_k D_{n-k} \tag{8}$$

Ya hemos hecho el truco sucio de esta prueba. La identidad (8) es lo que estábamos buscando.

Noten que si $n \to \infty$, entonces $A_n B \to AB$. De manera que para demostrar lo que queremos sólo resta demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k D_{n-k} = 0$$

Esto lo haremos por definición de límite. Llamemos

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} a_k D_{n-k}$$

Sea $\varepsilon > 0$. Queremos demostrar que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$, entonces

$$|T_n| < \varepsilon$$

Dado que $B_n \to B$, y $D_n = B_n - B$, entonces $D_n \to 0$. Vamos a utilizar este hecho así como la hipótesis de que $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ converge para tomar $N \in \mathbb{N}$ y $M > 0$ tales que:

i) Para toda $n \in \mathbb{N}$, $|D_n| \leq M$.

ii) Si $n \geq N$, entonces $|D_n| < \varepsilon$.

iii) Si $n > m \geq N$, entonces

$$\left| \sum_{k=0}^{n} |a_n| - \sum_{k=0}^{m} |a_k| \right| = \sum_{k=m+1}^{n} |a_n| < \varepsilon$$

El punto iii) nos habla de que la sucesión de sumas parciales de $\{|a_n|\}$ es de Cauchy gracias a que $\{|a_n|\}$ es una sucesión sumable.

Bien, ahora demostremos que el índice $2N \in \mathbb{N}$ es el buscado (en un momento más se verá por qué tenemos un 2 ahí).

Tomemos $n > 2N$.

Por la desigualdad del triángulo:

$$|T_n| = \left| \sum_{k=0}^{n} a_k D_{n-k} \right| \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k D_{n-k}| = \sum_{k=0}^{n-N} |a_k D_{n-k}| + \sum_{k=n-N+1}^{n} |a_k D_{n-k}| \tag{9}$$

¿Por qué hacemos esta separación en la suma?

Si k corre de 0 hasta $n - N$, entonces D_{n-k} va desde D_n hasta D_N. Eso significa que a todos estos términos podemos aplicarles el punto ii), es decir,

$$|D_{n-k}| < \varepsilon \text{ para toda } k = 0, \ldots, n - N \tag{10}$$

En cambio, si k recorre de $n - N + 1$ hasta n, entonces D_{n-k} va desde D_{N-1} hasta D_0. Para estos términos no tenemos mucho control sobre el tamaño de D_{n-k}, así que les vamos aplicar el punto i).

Con lo anterior en mente, tomemos la primer suma del lado derecho en (9) y acotemos usando (10):

$$\sum_{k=0}^{n-N} |a_k D_{n-k}| < \varepsilon \sum_{k=0}^{n-N} |a_k|$$

Dado que $|a_k| \geq 0$, entonces

$$\sum_{k=0}^{n-N} |a_k| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = S$$

De donde

$$\sum_{k=0}^{n-N} |a_k D_{n-k}| < \varepsilon \sum_{k=0}^{n-N} |a_k| \leq \varepsilon S \tag{11}$$

Ahora vamos con la segunda suma en (9):

$$\sum_{k=n-N+1}^{n} |a_k D_{n-k}| \leq M \sum_{k=n-N+1}^{n} |a_k|$$

Ojo con esta parte: Como $n > 2N$, entonces $n - N > N$. De manera que tenemos derecho a aplicar el punto iii) a los índices $n > n - N > N$ (esta la razón por la que tomamos $2N$ como el índice buscado).

Por iii) concluimos que

$$\sum_{k=n-N+1}^{n} |a_k D_{n-k}| \leq M \sum_{k=n-N+1}^{n} |a_k| < \varepsilon M \tag{12}$$

Sumando (11) y (12) y juntando la información con (9) tenemos finalmente:

$$|T_n| \leq \sum_{k=0}^{n-N} |a_k D_{n-k}| + \sum_{k=n-N+1}^{n} |a_k D_{n-k}| < \varepsilon S + \varepsilon M = \varepsilon (S + M)$$

Como $S + M$ es fijo y ε arbitrario, ya podemos concluir que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k D_{n-k} = \lim_{n\to\infty} T_n = 0$$

Y por (8) se sigue que

$$\lim_{n\to\infty} C_n = \lim_{n\to\infty} \left[A_n B + \sum_{k=0}^{n} a_k D_{n-k} \right] = AB$$

Lo que termina la prueba. ■

Aprovechemos el Teorema de Mertens para resolver el problema que planteamos al inicio de la clase en la identidad (2): Imaginemos que NO sabemos que

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Y vamos a demostrar que

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!}$$

Lo que sí sabemos es que la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

converge absolutamente para cualquier $x \in \mathbb{R}$. Así que por el Teorema de Mertens, dados $x, y \in \mathbb{R}$, el producto de Cauchy de las sucesiones $\{x^n/n!\}$ y $\{y^n/n!\}$ es convergente y además:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^{n-k}}{(n-k)!}\right)$$

Cocentrémonos en la parte encerrada en paréntesis del lado derecho:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!\,(n-k)!} x^k y^{n-k}$$

Si metemos un "1" elegante:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!\,(n-k)!} x^k y^{n-k} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} x^k y^{n-k}$$

El número $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ coincide con el coeficiente binomial $\binom{n}{k}$. De manera que

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!\,(n-k)!} x^k y^{n-k} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} x^k y^{n-k} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Y ahora sólo noten que la última suma es la definición del *binomio de Newton*, es decir,

$$\frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \frac{1}{n!} (x+y)^n$$

Por lo tanto

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^{n-k}}{(n-k)!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!}$$

Si hubiéramos sido un poco violentos en el curso, bien podríamos haber definido la exponencial como la serie de potencias

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

y ahora gracias al Teorema de Mertens y al producto de Cauchy habríamos demostrado una de las propiedades más representativas de e^x

$$e^x e^y = e^{x+y}$$

Con el Teorema de Mertens ya podemos regresar al Ejemplo 2 para terminar de justificar lo que pasó ahí.

Tomemos $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ como en el Ejemplo 2.

Ya hemos dicho que las series de potencias

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad \text{y} \qquad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

convergen absolutamente para $x \in (-1, 1)$. Así que para una $x \in (-1, 1)$ fija tenemos derecho a aplicar el Teorema de Mertens al producto de Cauchy que se genera con las sucesiones $\{a_n x^n\}$ y $\{b_n x^n\}$.

Llamemos

$$C_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(a_k x^k\right) \left(b_{n-k} x^{n-k}\right)$$

es decir,

$$C_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} x^n = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) x^n = c_n x^n$$

en donde

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

De esta manera el producto de Cauchy de $\{a_n x^n\}$ y $\{b_n x^n\}$ está dado por

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

Y por el teorema de Mertens se cumple que

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right) = f(x) g(x)$$

Ahora bien, para $x \in (-1, 1)$ sabemos que

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1} \qquad \text{y} \qquad g(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

Así que, para $x \in (-1, 1)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = f(x) g(x) = 1$$

Esto quiere decir que la función fg tiene una doble expresión como una serie de potencias:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = f(x) g(x) = 1 = 1 + 0x + 0x^2 + 0x^3 + \cdots + 0x^n + \cdots$$

Por la *unicidad de las series de potencias* concluimos que

$$c_0 = 1 \qquad \text{y para } n \geq 1 \qquad c_n = 0$$

Es decir, el producto de Cauchy de $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ es

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = 1$$

Este procedimiento ahora ya no tiene huecos en su argumentación. Y el mensaje que nos está dando es que el producto de Cauchy de las sucesiones no sumables $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ es generado desde algo mucho más sólido, fue generado a partir del producto de Cauchy de sucesiones que sí son sumables $\{a_n x^n\}$ y $\{b_n x^n\}$. Y lo que origina que dos sucesiones no sumables tengan un producto de Cauchy convergente es un proceso límite dentro de las series de potencias (en nuestro caso al hacer $x \to 1^-$) como ya lo habíamos remarcado.

Espero que lo anterior sirva para tener un poco más de luz en lo que hay detrás del producto de Cauchy y lo íntimamente relacionado que está con las series de potencias.

Observación importante: *Noten que implícitamente hemos demostrado que si dos series de potencias*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad \text{y} \qquad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

convergen absolutamente para $x \in (-1, 1)$, entonces

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \text{en donde } c_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k}$$

Para continuar vamos a demostrar que si el producto de Cauchy de dos sucesiones sumables es convergente, entonces el producto de Cauchy converge al producto de las series. Este resultado se le atribuye a Abel y es consecuencia de una propiedad muy importante que cumplen las series de potencias.

Teorema 5 *Si $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ es una sucesión sumable, entonces la serie de potencias*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

converge absolutamente para toda $x \in (-1,1)$ y además

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

Dem. Esencialmente el teorema nos está hablando de una condición de continuidad que debe satisfacer una serie de potencias cuando ésta está definida en un intervalo de la forma $(-1,1]$ (la serie de potencias de $\log(1+x)$ es un ejemplo de esto). La hipótesis de que $\{a_n\}$ es sumable es vital.

Ahora bien, la forma en la que está enunciado el teorema nos está diciendo algo muy poderoso. De acuerdo con las condiciones que tenemos, si una sucesión es sumable, entonces siempre tendremos derecho a definir una serie de potencias con ella, la cual tendrá un dominio no trivial, cosa que siempre deseamos que ocurra.

Vamos a la prueba.

Para demostrar la primer parte del teorema sólo hay que recordar la Proposición 9 de la clase del 25 de mayo:

Sea $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ una sucesión y sea $a \in \mathbb{R}$ fijo. Si existe un punto $b \in \mathbb{R}$, con $b \neq a$, tal que la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (b-a)^n$$

converge, entonces para todo $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x-a| < |b-a|$ se tiene que la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$$

converge absolutamente.

Si tomamos $a = 0$ y $b = 1$ en la proposición, dado que la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (b-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

converge, entonces podemos concluir que para toda $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x| < 1$, se cumple que

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

converge absolutamente.

Ahora vamos a demostrar que

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \tag{13}$$

La demostración es algo dura (hay muchos trucos), así que vayan con mucha calma.

Llamemos
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \qquad \text{y} \qquad S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$
Por comodidad técnica definamos también
$$S_{-1} = 0$$
De esta manera, para toda $n \geq 0$ se cumple que
$$a_n = S_n - S_{n-1}$$
Tomemos $x \in (-1, 1)$ y $n \geq 0$ fijos. Entonces:
$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \sum_{k=0}^{n} (S_k - S_{k-1})\, x^k = \sum_{k=0}^{n} S_k x^k - \sum_{k=0}^{n} S_{k-1} x^k \tag{14}$$
Vamos a recorrer el índice de S_{k-1} para que coincida con S_k, es decir,
$$\sum_{k=0}^{n} S_{k-1} x^k = \sum_{k=-1}^{n-1} S_k x^{k+1} = S_{-1} x^0 + \sum_{k=0}^{n-1} S_k x^{k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} S_k x^{k+1}$$
Sustituyendo lo anterior en (14):
$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \sum_{k=0}^{n} S_k x^k - \sum_{k=0}^{n} S_{k-1} x^k = \sum_{k=0}^{n} S_k x^k - \sum_{k=0}^{n-1} S_k x^{k+1} = S_n x^n + \sum_{k=0}^{n-1} S_k x^k - \sum_{k=0}^{n-1} S_k x^{k+1}$$
Juntando las sumas:
$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = S_n x^n + \sum_{k=0}^{n-1} S_k \left(x^k - x^{k+1}\right) = S_n x^n + \sum_{k=0}^{n-1} S_k x^k \,(1 - x)$$
En consecuencia hemos demostrado que para cualquier $x \in (-1, 1)$ y para toda $n \geq 0$ se cumple que
$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = S_n x^n + (1 - x) \sum_{k=0}^{n-1} S_k x^k \tag{15}$$
Para una $x \in (-1, 1)$ fija, ya sabemos que
$$\lim_{n \to \infty} x^n = 0$$
y por lo tanto
$$\lim_{n \to \infty} S_n x^n = S \cdot 0 = 0$$
Del límite anterior y dado que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge absolutamente, podemos concluir que la serie
$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n$$
también converge absolutamente y además, por (15) se cumple que
$$f(x) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \lim_{n \to \infty} \left[S_n x^n + (1 - x) \sum_{k=0}^{n-1} S_k x^k \right] = (1 - x) \sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n$$
Es decir, para toda $x \in (-1, 1)$
$$f(x) = (1 - x) \sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n \tag{16}$$

Toda esta talacha sólo es preparación para poder abordar el límite (13), mismo que tendremos que demostrar por definición de límite.

Sea $\varepsilon > 0$. Queremos demostrar que existe $\delta > 0$ tal que, para toda $x \in (-1, 1)$, si $0 < 1 - x < \delta$, entonces

$$|f(x) - S| < \varepsilon$$

Para analizar la diferencia $f(x) - S$ será necesario emplear otro "truco". Para $x \in (-1, 1)$ sabemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

o equivalentemente

$$1 = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

Usando (16) y este "1" elegante comenzamos a acotar la diferencia $f(x) - S$:

$$|f(x) - S| = |f(x) - S \cdot 1| = \left|(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n - S(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right|$$

Juntando las series:

$$|f(x) - S| = \left|(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}(S_n - S)x^n\right| = (1-x)\left|\sum_{n=0}^{\infty}(S_n - S)x^n\right|$$

(Observen que $1 - x > 0$ ya que $x \in (-1, 1)$)

Aplicando la desigualdad del triángulo generalizada tenemos

$$|f(x) - S| \leq (1-x)\sum_{n=0}^{\infty}|(S_n - S)x^n| = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty}|S_n - S|\,|x|^n$$

Hasta aquí hemos logrado demostrar que para toda $x \in (-1, 1)$

$$|f(x) - S| \leq (1-x)\sum_{n=0}^{\infty}|S_n - S|\,|x|^n$$

Como nos interesa hacer $x \to 1^-$ podemos concentrarnos con las $x > 0$. De esta forma si $0 < x < 1$, entonces

$$|f(x) - S| \leq (1-x)\sum_{n=0}^{\infty}|S_n - S|\,x^n \tag{17}$$

¿Cuál es la estrategia con todas estas manipulaciones que hemos hecho?

Estamos tratando de cazar una $\delta > 0$ que haga que para todo punto tal que $0 < 1 - x < \delta$ se cumpla que

$$|f(x) - S| < \varepsilon$$

De acuerdo a (17), nos basta lograr que

$$(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}|S_n - S|\,x^n < \varepsilon$$

Vamos a partir esta suma, digamos

$$(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}|S_n - S|\,x^n = (1-x)\left[\sum_{n=0}^{N}|S_n - S|\,x^n + \sum_{n=N+1}^{\infty} x^n\right]$$

para un índice N conveniente y la idea será exhibir que cada una de estas sumas puede hacerse tan pequeña como queramos conforme x se acerca a 1.

El índice N lo vamos a sacar de la convergencia de $\{S_n\}$.

Como $S_n \to S$, entonces podemos tomar $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$, entonces

$$|S_n - S| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Veamos la ganancia que nos brinda lo anterior. Si tomamos $0 < x < 1$, entonces:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |S_n - S| \, x^n = \sum_{n=0}^{N} |S_n - S| \, x^n + \sum_{n=N+1}^{\infty} |S_n - S| \, x^n < \sum_{n=0}^{N} |S_n - S| \, x^n + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{n=N+1}^{\infty} x^n$$

y dado que $x > 0$, se sigue que

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} x^n < \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

Por lo tanto

$$(1-x) \sum_{n=0}^{\infty} |S_n - S| \, x^n < (1-x) \left[\sum_{n=0}^{N} |S_n - S| \, x^n + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{n=N+1}^{\infty} x^n \right] < (1-x) \left[\sum_{n=0}^{N} |S_n - S| \, x^n + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{1-x} \right]$$

Es decir, para $0 < x < 1$ se cumple que

$$|f(x) - S| \leq (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} |S_n - S| \, x^n < (1-x) \sum_{n=0}^{N} |S_n - S| \, x^n + \frac{\varepsilon}{2} \tag{18}$$

Ahora sólo tenemos que controlar el tamaño de

$$(1-x) \sum_{n=0}^{N} |S_n - S| \, x^n$$

pero esto es muy sencillo. Como la N está fija, la expresión

$$p(x) = \sum_{n=0}^{N} |S_n - S| \, x^n$$

representa a un polinomio, mismo que tiene límite en $x = 1$ y en consecuencia

$$\lim_{x \to 1^-} (1-x) \sum_{n=0}^{N} |S_n - S| \, x^n = \lim_{x \to 1^-} (1-x) \, p(x) = 0 \cdot p(1) = 0$$

De manera que podemos tomar $\delta > 0$, con $\delta < 1$ (ahorita vemos para qué), tal que si $0 < 1 - x < \delta$, entonces

$$\left| (1-x) \sum_{n=0}^{N} |S_n - S| \, x^n \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

La razón de pedir $\delta < 1$ es porque de este modo si $0 < 1 - x < \delta < 1$, entonces $0 < x < 1$ y por lo tanto tenemos derecho a usar la desigualdad (18) y también podemos decir que

$$\left| (1-x) \sum_{n=0}^{N} |S_n - S| \, x^n \right| = (1-x) \sum_{n=0}^{N} |S_n - S| \, x^n$$

De donde, para $0 < 1 - x < \delta$ se cumple que

$$|f(x) - S| < (1-x) \sum_{n=0}^{N} |S_n - S| \, x^n + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Lo que demuestra que

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

como queríamos. ∎

El Teorema 1 es muy importante dentro de la teoría de las series de potencias. En su tarea se les pregunta acerca del recíproco de este resultado. Con todo lo que hemos visto el día de hoy, el problema debe ser muy accesible.

Ya estamos listos para el teorema de Abel.

Teorema 6 *(Abel) Sean $\{a_n\}, \{b_n\} \subset \mathbb{R}$ dos sucesiones sumables. Si el producto de Cauchy*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n, \;\; \textit{con } c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

de las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ es convergente, entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right)$$

Dem. La demostración del teorema es muy sencilla gracias al Teorema 5.

Vamos a definir tres series de potencias

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

Por hipótesis la sucesiones $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ y $\{c_n\}$ son sumables. Así que por el Teorema 5 las series de potencias definidas por f, g y h convergen absolutamente en $(-1,1)$ pero además

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \lim_{x \to 1^-} g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \quad \lim_{x \to 1^-} h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

Ahora bien, por la **Observación importante** que hicimos previo al Teorema 5, sabemos que para cada $x \in (-1,1)$ se cumple que

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

Es decir, que para toda $x \in (-1,1)$

$$h(x) = f(x) \, g(x)$$

Si tomamos límites, se sigue que

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \lim_{x \to 1^-} h(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x) \, g(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right)$$

Lo que termina la prueba. ∎

Vale mucho la pena que mediten tanto en el Teorema de Mertens como en el de Abel. El Teorema de Mertens nos da condiciones **suficientes** para que el producto de Cauchy sea convergente, mientras que el

Teorema de Abel nos dice que si el producto de Cauchy va a ser convergente, entonces debe converger al producto de las series (siempre que estas sean sumables).

De acuerdo a estos teoremas y con la experiencia que tuvimos con el Ejemplo 3, nos debe brincar una pregunta muy natural: ¿Existen sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ tales que sus series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ sean condicionalmente convergentes y para las que su producto de Cauchy converge?

Si la respuesta fuera negativa, entonces el teorema de Abel sería un resultado obsoleto. Afortunadamente la respuesta es afirmativa.

Ejemplo 7 *Consideremos la sucesión*

$$a_0 = 0 \quad \text{y para } n \geq 1 \quad a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

Hagamos también

$$b_n = a_n$$

Ya sabemos que las series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *y* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *son condicionalmente convergentes. Vamos a ver que su producto de Cauchy sí converge.*

Sea

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

Como $a_0 = b_0 = 0$*, entonces* $c_0 = c_1 = 0$*.*

Tomemos $n \geq 2$*. Entonces:*

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = a_0 b_n + a_n b_0 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k} = \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \cdot \frac{(-1)^{n-k+1}}{n-k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{n+2}}{k\,(n-k)}$$

Por lo tanto

$$c_n = (-1)^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k\,(n-k)}$$

Aplicando fracciones parciales tenemos:

$$\frac{1}{k\,(n-k)} = \frac{1}{n}\left[\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k}\right]$$

De esta manera

$$c_n = \frac{(-1)^n}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \left[\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k}\right]$$

Ahora noten que

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n-k} = \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \cdots + \frac{1}{2} + 1 = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

Por lo tanto

$$c_n = \frac{2\,(-1)^n}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

Bien, lo que queremos demostrar es que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ *converge, pero por la definición de* c_n *podemos ver que estamos en la presencia de una serie alternante. De modo que podemos intentar aplicar el criterio de*

Leibniz para verificar su convergencia.

Llamemos

$$d_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$$

(el 2 que carga c_n lo podemos ignorar)

Lo que necesitamos verificar es que la sucesión $\{d_n\}$ decrece y que converge a 0. Veamos primero la monotonía:

$$d_{n+1} - d_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} = \frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$$

$$= \frac{1}{n(n+1)} + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right)\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} = \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$$

Por lo tanto

$$d_{n+1} - d_n = \frac{1}{n(n+1)}\left(1 - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\right)$$

Como para $n \geq 2$ se tiene que

$$1 < \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$$

entonces

$$d_{n+1} - d_n < 0$$

es decir,

$$d_{n+1} < d_n$$

Ahora veamos que $d_n \to 0$. Para esto vamos a traer a nuestra memoria a la constante de Euler, es decir, aquel curioso número γ que está definido mediante el límite:

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \log(n)\right]$$

La existencia de este límite implica que

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} - \log(n-1)\right]$$

Así que para calcular el límite para d_n lo único que hay que hacer es sumar un cero conveniente:

$$\lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} - \frac{\log(n-1)}{n} + \frac{\log(n-1)}{n}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} - \log(n-1)\right) + \frac{\log(n-1)}{n}\right] = 0\cdot\gamma + 0 = 0$$

En consecuencia, por el criterio de Leibniz, la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}d_n$$

converge.

Ahora noten finalmente que

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=2}^{\infty} c_n = -2 \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} d_n$$

Por lo tanto, el producto de Cauchy de $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ covnerge y además, por Abel se cumple que

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right)$$

Un bonito ejemplo, particularmente por la presencia de la constante de Euler.

Con todo esto hemos cubierto a grandes rasgos todo lo que rodea al producto de Cauchy. Producto que ofrece una particular fórmula para multiplicar series y bastante útil a la hora de trabajar con series de potencias.

Para cerrar la clase no podemos dejar de preguntarnos: ¿Qué pasa si multiplicamos dos series que son absolutamente convergentes?

Toda la discusión del día tuvo su fundamento en lo peligroso que es acomodar sumandos si estamos trabajando con series condicionalmente convergentes. Sin embargo, las series absolutamente convergentes son muy bien portadas en este aspecto.

Como lo podríamos esperar, cuando multiplicamos dos series absolutamente convergentes NO importa el orden en el que elijan poner a los sumandos generados por el producto. Lo cual es una verdadera maravilla porque significa que cualquier fórmula que se encuentren para multiplicar series, necesariamente será válida para el producto de series absolutamente convergentes.

Para terminar la clase vamos demostrar este hecho. Para poder abordar el resultado es necesario tener una mejor idea de lo que significa "*ordenar a los sumandos generados por un producto*". La idea intuitiva es muy clara pero tratar de dar una definición rigurosa es un poco latoso y quizá es más claro si nos ahorramos un poco de formalismo técnico.

Definición 8 *Sean $\{a_n\}, \{b_n\} \subset \mathbb{R}$ dos sucesiones. Decimos que una sucesión $\{p_n\} \subset \mathbb{R}$ es un ordenamiento de los productos $\{a_i b_j\}$ si se satisfacen las siguientes tres condiciones:*

1) Para toda $n \in \mathbb{N}$ el término p_n está formado por una suma finita de números $a_i b_j$.

2) Para cada par de índices $i, j \in \mathbb{N}$, no necesariamente distintos, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que el producto $a_i b_j$ aparece en la suma dada en p_n.

3) Para cualesquiera $n, m \in \mathbb{N}$, con $n \neq m$, si $a_i b_j$ aparece en p_n, entonces $a_i b_j$ no aparece en p_m.

Con una revisada rápida a las sucesiones creadas tanto en el producto de Cauchy como en la "suma cuadrada" se podrán dar cuenta que ambas satisfacen las tres condiciones dadas en la Definición 8.

Al declarar que cada p_n está formado por una *suma finita* de números $a_i b_j$, bien podría ocurrir el caso de que cada p_n sea igual a un único $a_i b_j$, es decir, no nos estamos restrigiendo a sumas de al menos dos elementos. Por ejemplo, si consideran a la función $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida como

$$f(n, m) = \frac{1}{2}(n+m)(n+m+1) + m$$

resulta que f es una biyección entre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ y $\mathbb{N}$. De manera que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe una única pareja de índices $(i_n, j_n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tal que

$$f(i_n, j_n) = n$$

De esta forma

$$p_n = a_{i_n} b_{j_n}$$

es un ordenamiento de los productos $\{a_i b_j\}$ en donde cada p_n consta de exactamente un sumando. Esta clase de ordenamientos es especial puesto que no es tan sencillo crear biyecciones entre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ y $\mathbb{N}$ (¡a pesar de que existen muchísimas biyecciones entre ellos!). Así que vamos distinguirlos llamándolos **ordenamientos unitarios**.

Como nota técnica, observen que si $\{p_n\}$ y $\{q_n\}$ son ordenamientos unitarios de $\{a_i b_j\}$, entonces $\{p_n\}$ es un reordenamiento de la sucesión $\{q_n\}$ y viceversa.

Proposición 9 *Sean $\{a_n\}, \{b_n\} \subset \mathbb{R}$ dos sucesiones tales que las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ son absolutamente convergentes. Si $\{p_n\} \subset \mathbb{R}$ es un ordenamiento unitario de los productos $\{a_i b_j\}$, entonces la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n$$

converge absolutamente.

Dem. La demostración no es tan complicada si sí hemos comprendido bien lo que significa un ordenamiento de los productos.

Dado que $\{p_n\}$ es un ordenamiento unitario de los productos $\{a_i b_j\}$, entonces para cada p_n debe existir una única pareja de índices $(i_n, j_n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tal que

$$p_n = a_{i_n} b_{j_n}$$

Tomemos $n \in \mathbb{N}$ fijo y consideremos

$$m = \max\{i_k, j_k \mid p_k = a_{i_k} b_{j_k}, k = 1, \ldots, n\}$$

Con este índice m resulta que cada sumando de

$$\sum_{k=1}^{n} |p_k|$$

aparece en el producto

$$\left(\sum_{k=1}^{m} |a_k|\right)\left(\sum_{k=1}^{m} |b_k|\right)$$

Como todos los sumandos involucrados son no negativos, entonces

$$\sum_{k=1}^{n} |p_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{m} |a_k|\right)\left(\sum_{k=1}^{m} |b_k|\right)$$

Ahora bien, dado que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ son absolutamente convergentes, entonces podemos llamar

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \qquad \text{y} \qquad B = \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$$

y concluir que

$$\sum_{k=1}^{m} |a_k| \leq A \qquad \text{y} \qquad \sum_{k=1}^{m} |b_k| \leq B$$

De donde

$$\sum_{k=1}^{n} |p_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{m} |a_k|\right)\left(\sum_{k=1}^{m} |b_k|\right) \leq AB$$

Esto quiere decir que las sumas parciales de $\{p_n\}$ están acotadas por el número AB. Así que por el criterio de acotacion, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} |p_n|$$

converge. Es decir, $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ converge absolutamente. ∎

Ahora veamos el poder que tiene la Proposición 9

Teorema 10 *Sean* $\{a_n\}, \{b_n\} \subset \mathbb{R}$ *dos sucesiones tales que las series* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *son absolutamente convergentes. Si* $\{p_n\} \subset \mathbb{R}$ *es un ordenamiento unitario de los productos* $\{a_i b_j\}$*, entonces*

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right)$$

Dem. La demostración es sumamente sencilla gracias a la Proposición 9.

Por la Proposición 9 sabemos que $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ converge absolutamente. Por lo tanto si $\{q_n\}$ es un reordenamiento de $\{p_n\}$, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = \sum_{n=1}^{\infty} q_n$$

Aquí estamos usando el Teorema 12 de la clase del jueves 21 de mayo.

Ahora lo único que hay que hacer es utilizar el reordenamiento de $\{p_n\}$ que se genera cuando consideramos la "suma cuadrada" de $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$.

Recuerden que la suma cuadrada está definida como

$$c_1 = a_1 b_1$$

y para $n \geq 2$

$$c_n = a_n (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) + b_n (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1})$$

Si separamos de manera individual cada sumando que va apareciendo en c_n y a esta sucesión la llamamos $\{q_n\}$, entonces $\{q_n\}$ es un ordenamiento unitario de los productos $\{a_i b_j\}$ y por lo tanto es un reordenamiento de $\{p_n\}$.

Para visualizar un poco a q_n podemos escribir algunos términos como lista:

$$q_1 = a_1 b_1, q_2 = a_2 b_1, q_3 = a_2 b_2, q_4 = a_1 b_2, q_5 = a_3 b_1, q_6 = a_3 b_2, q_7 = a_3 b_3, q_8 = a_1 b_3, q_9 = a_2 b_3, \ldots$$

No es difícil convencerse que

$$\sum_{k=1}^{n} c_k = \sum_{k=1}^{n^2} q_k$$

(vean el diagrama (4))

Como las sucesiones $\{q_n\}$ y $\{c_n\}$ son sumables, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} q_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n^2} q_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} c_k = \sum_{n=1}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right)$$

La última igualdad se da gracias a que ya sabemos que la suma cuadrada converge al producto de las series.

En consecuencia:

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = \sum_{n=1}^{\infty} q_n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right)$$

Lo que termina la prueba. ∎

¿Qué pasa si en lugar de tener un ordenamiento unitario tenemos un ordenamiento arbitrario?

Felizmente el resultado dado en el Teorema 10 sigue siendo válido. Y la demostración es un pequeña variante de los razonamientos dados en la prueba del Teorema 10. La parte clave es la generación de la sucesión $\{q_n\}$ que dimos en la prueba.

Teorema 11 *Sean* $\{a_n\}, \{b_n\} \subset \mathbb{R}$ *dos sucesiones tales que las series* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *son absolutamente convergentes. Si* $\{p_n\} \subset \mathbb{R}$ *es un ordenamiento de los productos* $\{a_i b_j\}$*, entonces*

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right)$$

Dem. Tomando como modelo lo hecho con la suma cuadrada en el Teorema 10, si $\{p_n\}$ es un ordenamiento de los productos $\{a_i b_j\}$, entonces podemos separar de manera individual cada sumando que va apareciendo en el ordenamiento $\{p_n\}$ y con ello generar un ordenamiento unitario de $\{a_i b_j\}$. Llamemos $\{q_n\}$ a dicho ordenamiento unitario.

Por definición de q_n se cumple que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $m_n \in \mathbb{N}$, con $n \leq m_n$ tal que

$$\sum_{k=1}^{n} p_k = \sum_{k=1}^{m_n} q_k$$

Esto genera una sucesión estrictamente creciente de índices $\{m_n\} \subset \mathbb{N}$. (Comparen con lo que hicimos en el Teorema 10)

Como $\{q_n\}$ es un ordenamiento unitario de los productos $\{a_i b_j\}$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ converge absolutamente y además, de acuerdo al Teorema 10, se tiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty} q_n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right)$$

Por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} p_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{m_n} q_k = \sum_{n=1}^{\infty} q_n$$

Lo que demuestra que $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ converge y además

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = \sum_{n=1}^{\infty} q_n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right)$$

como se quería. ■

Algunas ideas de la prueba anterior pueden formalizarse con más rigor, por ejemplo la definición de $\{q_n\}$ así como la existencia de m_n. Sin embargo, hacerlo con sumo cuidado sería un gasto de energía innecesario que lo único que lograría sería despistarnos por completo de lo que está pasando. Considero que en este caso es mejor apoyarnos de la intuición y darnos la oportunidad de ser un poco bruscos en la prueba (después de todo el esfuerzo que hemos realizado el día de hoy, creo que lo merecemos).

Con este teorema damos por terminada la clase.

¡FIN DE TEMA Y FIN DE CURSO!

Gracias por su paciencia y su confianza en el curso.