Cálculo Diferencial e Integral II

Métodos de integración

20 de marzo de 2020

Hemos aprendido ya el método de cambio de variable para integrales indefinidas. Recordemos que éste consiste en darnos una técnica para calcular integrales que pueden expresarse como

$$\int f\left(g\left(x\right)\right)g'\left(x\right)dx$$

Si F representa una primitiva para f, entonces $F \circ g$ resulta ser una primitiva para el producto $(f \circ g) \cdot g'$. Y por lo tanto

$$\int f\left(g\left(x\right)\right)g'\left(x\right)dx = F\left(g\left(x\right)\right) + C$$

Ahora bien, qué ocurre cuando tenemos una integral definida de la forma

$$\int_c^d f\left(g\left(x\right)\right)g'\left(x\right)dx$$

La identidad previa y el TFC2 nos dicen que debe ocurrir lo siguiente:

$$\int_c^d f\left(g\left(x\right)\right)g'\left(x\right)dx = \left(F\left(g\left(d\right)\right) + C\right) - \left(F\left(g\left(c\right)\right) + C\right) = F\left(g\left(d\right)\right) - F\left(g\left(c\right)\right)$$

Utilizando que F es una primitiva para f, y nuevamente gracias al TFC2, la expresión $F\left(g\left(d\right)\right) - F\left(g\left(c\right)\right)$ se puede ver como la siguiente integral

$$F\left(g\left(d\right)\right) - F\left(g\left(c\right)\right) = \int_{g(c)}^{g(d)} f\left(u\right)du$$

Esto nos da como resultado la identidad

$$\int_c^d f\left(g\left(x\right)\right)g'\left(x\right)dx = \int_{g(c)}^{g(d)} f\left(u\right)du$$

y esta identidad es precisamente lo que se conoce como el Teorema de Cambio de Variable. Vamos a enunciarlo con toda formalidad:

Teorema 1 *(Cambio de Variable) Sean $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua y $g : [c,d] \to [a,b]$ una función de clase C^1 en $[c,d]$. Entonces*

$$\int_c^d f\left(g\left(x\right)\right)g'\left(x\right)dx = \int_{g(c)}^{g(d)} f\left(u\right)du.$$

La discusión previa es en realidad la prueba del Teorema de Cambio de Variable, por lo que ya no la repetiremos. Sólo es importante puntualizar que la continuidad de f en las hipótesis del teorema nos garantiza la existencia de una primitiva F y con ello tenemos derecho a aplicar los razonamientos anteriores.

Hemos escrito la integral $\int_{g(c)}^{g(d)} f\left(u\right)du$ en términos de "u" porque para efectos técnicos queremos que esto atestigüe que se ha realizado un cambio de variable, a saber, $u = g\left(x\right)$.

Ahora veamos un par de ejemplos de cómo aplicar este teorema.

Ejemplo 2 *Calcular*

$$\int_{-2/3}^{1/3} \frac{x}{\sqrt{2-3x}} dx.$$

A simple vista el integrando $\frac{x}{\sqrt{2-3x}}$ *no parace tener la forma de* $f(g(x))\, g'(x)$*, sin embargo, esto se puede solucionar con unas cuantas manipulaciones aritméticas*

$$\frac{x}{\sqrt{2-3x}} = \frac{-3x}{(-3)\sqrt{2-3x}} = \frac{-2+2-3x}{(-3)\sqrt{2-3x}} = \left(-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2-3x}{\sqrt{2-3x}} - \frac{2}{\sqrt{2-3x}}\right)$$

$$= \left(-\frac{3}{9}\right)\left(\sqrt{2-3x} - \frac{2}{\sqrt{2-3x}}\right) = (-3)\left(\frac{1}{9}\sqrt{2-3x} - \frac{2}{9\sqrt{2-3x}}\right)$$

Ahora sí todo parece estar en orden puesto que podemos proponer $g(x) = 2-3x$ *y* $f(x) = \frac{1}{9}\sqrt{x} - \frac{2}{9\sqrt{x}}$. *Notemos que* $g'(x) = -3$ *y por lo tanto tenemos*

$$\frac{x}{\sqrt{2-3x}} = (-3)\left(\frac{2}{9\sqrt{2-3x}} - \frac{1}{9}\sqrt{2-3x}\right) = f(g(x))\, g'(x)$$

Para aplicar la fórmula de cambio de variable nos hace falta calcular $g(-2/3)$ *y* $g(1/3)$. *Sustituimos estos valores en* g *y obtenemos que* $g(-2/3) = 4$ *y* $g(1/3) = 1$. *Por el Teorema de Cambio de Variable logramos*

$$\int_{-2/3}^{1/3} \frac{x}{\sqrt{2-3x}} dx = \int_{-2/3}^{1/3} f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int_{g(-2/3)}^{g(1/3)} f(u)\, du$$

$$= \int_{4}^{1} \left(\frac{1}{9}\sqrt{u} - \frac{2}{9\sqrt{u}}\right) du = \int_{1}^{4} \left(\frac{2}{9\sqrt{u}} - \frac{1}{9}\sqrt{u}\right) du$$

Para concluir el cálculo necesitamos hallar una primitiva de $f(u) = \frac{2}{9\sqrt{u}} - \frac{1}{9}\sqrt{u}$. *Esto ya nos es más familiar y podemos decir simplemente que una primitiva para* f *es* $F(u) = \frac{4}{9}\sqrt{u} - \frac{2}{27}u^{3/2}$. *De donde*

$$\int_{1}^{4} \left(\frac{2}{9\sqrt{u}} - \frac{1}{9}\sqrt{u}\right) du = F(4) - F(1) = \left(\frac{8}{9} - \frac{16}{27}\right) - \left(\frac{4}{9} - \frac{2}{27}\right) = -\frac{2}{27}$$

Y con esto

$$\int_{-2/3}^{1/3} \frac{x}{\sqrt{2-3x}} dx = -\frac{2}{27}.$$

El Ejemplo 2 parece un poco decepcionante porque para un ejemplo tan sencillo tuvimos que poner mucho ingenio para poder transformar el integrando en algo de la forma $f(g(x))\, g'(x)$. En la práctica esto no parece muy eficiente. Y en efecto, no lo es. Es precisamente para evitar este tipo de manipulaciones que entra en juego el lenguaje del cambio de variable.

Retomemos el Ejemplo 2 pero ahora en lugar de buscar transformar el integrando en algo de la forma $f(g(x))\, g'(x)$, introduzcamos directamente una nueva variable

$$u = 2 - 3x.$$

Esta igualdad es equivalente a decir que $x = \frac{1}{3}(2-u)$. De acuerdo con el lenguaje que hemos trabajado en clase, si derivamos, podemos decir que

$$dx = -\frac{1}{3} du$$

Además, de la relación $u = 2-3x$ concluimos que si $x = -\frac{2}{3}$, entonces $u = 4$. Así mismo si $x = \frac{1}{3}$, entonces $u = 1$. Ahora procedemos a hacer el cambio de variable en la integral solicitada.

$$\int_{-2/3}^{1/3} \frac{x}{\sqrt{2-3x}} dx = \int_{4}^{1} \frac{\frac{1}{3}(2-u)}{\sqrt{u}} \left(-\frac{1}{3}\right) du = \frac{1}{9}\int_{1}^{4} \frac{2-u}{\sqrt{u}} du = \int_{1}^{4} \left(\frac{2}{9\sqrt{u}} - \frac{1}{9}\sqrt{u}\right) du$$

Noten que en la primer igualdad hemos sustituido $2-3x$ por u y en el numerador en lugar de x hemos puesto $\frac{1}{3}(2-u)$. Y por supesto, en lugar de dx hemos puesto $-\frac{1}{3}du$. Finalmente noten que la última integral es exactamente la misma que obtuvimos en el Ejemplo 2, sin embargo, las manipulaciones con este procedimiento se sienten más limpias puesto que no hemos tenido que introducir ni un 0 ni un 1 "elegantes".

Pasemos a otro ejemplo. En este ya usaremos directamente la técnica de introducir una nueva variable.

Ejemplo 3 *Calcular*

$$\int_0^{\pi} \frac{x \operatorname{sen}(x)}{1+\cos^2(x)} dx.$$

En este ejemplo definitivamente no queda claro algún cambio de variable explícito. Un candidato podría ser $u=\cos(x)$ *pero la presencia de la* x *en el numerador es un poco desalentadora (*como ejercicio traten de ver hacia dónde conduce este cambio de variable*).*
Por comodidad llamemos

$$I = \int_0^{\pi} \frac{x \operatorname{sen}(x)}{1+\cos^2(x)} dx$$

El inesperado cambio de variable que haremos es el siguiente

$$u = \pi - x$$

Con este cambio tenemos las siguientes relaciones

$$\begin{array}{lcl} x=\pi-u & \wedge & dx=-du \\ x=0 & \Rightarrow & u=\pi \\ x=\pi & \Rightarrow & u=0 \end{array}$$

Realizando el cambio de variable obtenemos

$$I = \int_{\pi}^{0} \frac{(\pi-u)\operatorname{sen}(\pi-u)}{1+\cos^2(\pi-u)}(-1)\,du$$

La parte clave ahora es recordar que $\operatorname{sen}(\pi-u)=\operatorname{sen}(u)$ *y* $\cos(\pi-u)=-\cos(u)$. *Sustituyendo estas identidades logramos*

$$I = \int_0^{\pi} \frac{(\pi-u)\operatorname{sen}(u)}{1+\cos^2(u)} du$$

Noten que gracias al (-1) *que teníamos, hemos cambiado el orden de los límites de integración.*
Recordemos que convenientemente definimos $I=\int_0^{\pi}\frac{x\operatorname{sen}(x)}{1+\cos^2(x)}dx$. *Esto nos permite hacer la siguiente manipulación*

$$I = \int_0^{\pi} \frac{(\pi-u)\operatorname{sen}(u)}{1+\cos^2(u)} du = \int_0^{\pi} \frac{\pi\operatorname{sen}(u)}{1+\cos^2(u)} du - \int_0^{\pi} \frac{u\operatorname{sen}(u)}{1+\cos^2(u)} du = \int_0^{\pi} \frac{\pi\operatorname{sen}(u)}{1+\cos^2(u)} du - I$$

Y por lo tanto

$$2I = \pi \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen}(u)}{1+\cos^2(u)} du$$

Equivalentemente

$$I = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen}(u)}{1+\cos^2(u)} du$$

Con esto tenemos una integral que ya se ve más amigable. Noten que nos hemos desecho de la x *que nos estorbaba inicialmente. Así que ahora sí podemos intentar el cambio de variable que parece más natural:*

$$z = \cos(u)$$

Con este cambio tenemos las siguientes relaciones

$$\begin{array}{lcl} dz=-\operatorname{sen}(u)\,du & \text{ó} & -dz=\operatorname{sen}(u)\,du \\ u=0 & \Rightarrow & z=1 \\ u=\pi & \Rightarrow & z=-1 \end{array}$$

Aplicamos el cambio de variable

$$I = \frac{\pi}{2}\int_{1}^{-1} \frac{(-1)}{1+z^2}dz = \frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+z^2}dz = \pi \int_{0}^{1} \frac{1}{1+z^2}dz$$

Para la última igualdad, hemos usado la paridad del integrando.
Ya sabemos que una primitiva de $\frac{1}{1+z^2}$ *es* $\arctan(z)$. *Por lo tanto*

$$I = \pi \int_{0}^{1} \frac{1}{1+z^2}dz = \pi\left(\arctan(1) - \arctan(0)\right) = \pi\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi^2}{4}$$

En conclusión

$$\int_{0}^{\pi} \frac{x \operatorname{sen}(x)}{1+\cos^2(x)}dx = \frac{\pi^2}{4}.$$

Como se puede apreciar en el Ejemplo 3, es un hecho que el cálculo de integrales está lleno de trucos (sucios) y es la práctica la que nos permite familiarizarnos con ellos al grado de llegarlos a percibir como "pasos naturales". Poco a poco podremos identificar cuál de estos trucos es el que necesitamos.

Un detalle muy interesante que vale la pena destacar del Ejemplo 3 es que aunque logramos hallar el valor de la integral $\int_0^\pi \frac{x\operatorname{sen}(x)}{1+\cos^2(x)}dx$, en ningún momento estuvimos cerca siquiera de lograr encontrar una primitiva para la función $f(x) = \frac{x\operatorname{sen}(x)}{1+\cos^2(x)}$. Este fenómeno es muy frecuente en el cálculo de integrales definidas, lo cual es muy valioso porque son muchas las funciones para las cuales **no** es posible hallar una primitiva expresada en términos de funciones elementales.

Ya que nos hemos familiarizado con el Teorema de Cambio de Variable, estamos en condiciones de atacar una especie de problema inverso. Todo parte de la identidad que ofrece el Teorema de Cambio de Variable

$$\int_{c}^{d} f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int_{g(c)}^{g(d)} f(u)\, du$$

Recordemos que toda identidad puede leerse de"izquierda a derecha" o de "derecha a izquierda". Y es precisamente cuando la leemos de derecha a izquierda que generamos una pregunta interesante:

Dada una función continua $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, ¿habrá manera de transformar la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ en algo de la forma $\int_c^d f(g(u))\, g'(u)\, du$?

Por supuesto, la idea detrás de querer hacer un cambio de este estilo es que ahora logremos que la integral $\int_c^d f(g(u))\, g'(u)\, du$ resulte ser más accesible para calcular.

Vayamos con cuidado. Imaginemos que se nos pide calcular la integral $\int_a^b f(x)\,dx$. Entonces lo que buscamos hacer nosotros es transformar la integral en una más tranquila. Para lograrlo se nos ocurre intentar llegar a la identidad

$$\int_{a}^{b} f(x)\, dx = \int_{c}^{d} f(g(u))\, g'(u)\, du$$

Y lo hacemos comenzando desde el lado izquierdo y tratando de obtenerla como una consecuencia del Teorema de Cambio de Variable. La identidad que queremos sugiere un cambio de variable de la forma

$$x = g(u)$$

en donde $g : [c,d] \to [a,b]$ al menos deberá ser una función de clase C^1. Ahora bien, si ocurriera que g es una biyección entre los intervalos $[c,d]$ y $[a,b]$ (y que por lo tanto posee inversa), entonces podríamos escribir

$$u = g^{-1}(x)$$

Sería deseable que la función g^{-1} fuera derivable en su domino. Para ello necesitaremos pedir que g' nunca se anule, es decir, $g'(u) \neq 0$ para toda $u \in [c,d]$. Recordemos que con estas condiciones ocurre que

$$\left(g^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{g'\left(g^{-1}(x)\right)}$$

Bien, juntando la información anterior podemos hacer las siguientes manipulaciones:

$$f(x) = f\left(\left(g \circ g^{-1}\right)(x)\right) = f\left(g\left(g^{-1}(x)\right)\right)\frac{\left(g^{-1}\right)'(x)}{\left(g^{-1}\right)'(x)} = (f \circ g)\left(g^{-1}(x)\right) g'\left(g^{-1}(x)\right)\left(g^{-1}\right)'(x)$$

Noten que en la última igualdad se ha aplicado la fórmula de la derivada de g^{-1} únicamente en el denominador.

Si llamamos $h(u) = (f \circ g)((u))\, g'(u)$, se observa que

$$f(x) = (f \circ g)\left(g^{-1}(x)\right) g'\left(g^{-1}(x)\right)\left(g^{-1}\right)'(x) = h\left(g^{-1}(x)\right)\left(g^{-1}\right)'(x)$$

Y por lo tanto

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b h\left(g^{-1}(x)\right)\left(g^{-1}\right)'(x)\,dx$$

Pero ahora la integral que tenemos en el lado derecho ya tiene la forma que exige el Teorema de Cambio de Variable. De donde

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b h\left(g^{-1}(x)\right)\left(g^{-1}\right)'(x)\,dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} h(u)\,du$$

Y finalmente, escribiendo la definición explícita de h, concluimos que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} h(u)\,du = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(u))\,g'(u)\,du$$

y así hemos llegado a la identidad deseada. De esta manera hemos obtenido una fórmula que tradicionalmente se conoce como "sustitución inversa", ya que en lugar de empezar definiendo una nueva variable u en función de x, aquí ponemos a x en función de una nueva variable u. Enunciemos esta fórmula como un corolario del Teorema de Cambio de Variable.

Corolario 4 *(Sustitución inversa) Sea $g : [c,d] \to [a,b]$ una función de clase C^1 en $[c,d]$, biyectiva y cuya derivada nunca es cero. Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua, entonces*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(u))\,g'(u)\,du$$

Observación 5 *Bajo las condiciones del Corolario 4, se sigue que g será una función estrictamente creciente o estrictamente decreciente. Lo que implica que debe ocurrir que $c = g^{-1}(a)$ y $d = g^{-1}(b)$ si g crece, o bien $c = g^{-1}(b)$ y $d = g^{-1}(a)$ si g decrece. Sin embargo, hemos decidido dejar la fórmula en términos de $g^{-1}(a)$ y $g^{-1}(b)$ para hacer énfasis en cómo cambian los límites de integración bajo el cambio de variable $x = g(u)$.*

Un revisión cuidadosa del Ejemplo 3 muestra que ya hemos aplicado la técnica de la sustitución inversa, sólo que el cambio de variable fue tan elemental que no tuvimos reparo en ello. Ahora hagamos unos ejemplos con cambios de variable un poco más sofisticados.

Ejemplo 6 *Calcular*

$$\int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{2}} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx.$$

Es prácticamente estándar que cuando en el integrando aparecen expresiones del tipo $1-x^2$, x^2+1 ó x^2-1, lo primero que se nos ocurre es realizar un cambio de variable que involucre una función trigonométrica (y *esto es así porque generalmente no fallan). La motivación para aplicar una sustitución trigonométrica tiene que ver con las famosas identidades trigonométricas:*

$$\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

$$\tan^2(x) + 1 = \sec^2(x)$$

$$\sec^2(x) - 1 = \tan^2(x)$$

El hecho de que en nuestro integrando aparezca la expresión $x^2 - 1$, *sugiere que debemos realizar el cambio*

$$x = \sec(u)$$

Como estamos trabajando con una integral definida, no se nos debe olvidar que al hacer un cambio de variable, los límites de integración también deben cambiar. ¿Cómo logramos esto? Si $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$, *entonces sustituimos este valor en nuestro cambio de variable y generamos la ecuación*

$$\frac{2}{\sqrt{3}} = \sec(u)$$

Esto significa que

$$u = \operatorname{arcsec}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$$

Similarmente, si $x = \sqrt{2}$, *entonces queremos que*

$$\sqrt{2} = \sec(u)$$

y por lo tanto

$$u = \operatorname{arcsec}\left(\sqrt{2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

En resumen obtenemos las siguientes relaciones:

$$\begin{array}{lcl} x = \sec(u) & \wedge & dx = \sec(u)\tan(u)\,du \\ x = \frac{2}{\sqrt{3}} & \Rightarrow & u = \frac{\pi}{6} \\ x = \sqrt{2} & \Rightarrow & u = \frac{\pi}{4} \end{array}$$

Realizando el cambio de variable en la integral tenemos

$$\int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{2}} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sec(u)\sqrt{\sec^2(u)-1}}\sec(u)\tan(u)\,du = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan(u)}{\sqrt{\sec^2(u)-1}}du$$

Parados en la última igualdad queda en evidencia el por qué las identidades trigonométricas que pusimos al inicio son la fuente de inspiración. En este caso la expresión $\sqrt{\sec^2(u)-1}$ *puede ser simplificada como sigue*

$$\sqrt{\sec^2(u)-1} = \sqrt{\tan^2(u)} = \tan(u)$$

Formalmente deberíamos escribir $\sqrt{\tan^2(u)} = |\tan(u)|$, *sin embargo, no perdamos de vista que nuestra variable* u *se mueve en el intervalo* $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$ *y en este intervalo la tangente es una función positiva.*
Por lo tanto tenemos

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan(u)}{\sqrt{\sec^2(u)-1}}du = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan(u)}{\tan(u)}du = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} 1du = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}$$

Y en consecuencia

$$\int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{2}} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx = \frac{\pi}{12}.$$

Hagamos un ejemplo más en donde conviene hacer un cambio trigonométrico.

Ejemplo 7 *Para $a \in \mathbb{R}$ fija, calcular*

$$\int_a^{\sqrt{3}a} \frac{1}{\left(a^2+x^2\right)^2} dx.$$

Para elegir el cambio trigonométrico adecuado es necesario analizar un poco la expresión a^2+x^2. Ésta es similar a $1+x^2$ pero parece que el número a^2 representa un estorbo. Una manera de esquivar este obstáculo es notar que

$$a^2+x^2 = a^2\left(1+\left(\frac{x}{a}\right)^2\right)$$

Aunque $1+\left(\frac{x}{a}\right)^2$ no es exactamente lo que buscábamos, esta expresión ya da un poco de luz. Podemos definir

$$\frac{x}{a} = \tan(u)$$

Equivalentemente

$$x = a\tan(u)$$

Al hacer este cambio de variable, la expresión a^2+x^2 se transforma en

$$a^2+a^2\tan^2(u) = a^2\left(1+\tan^2(u)\right) = a^2\sec^2(u)$$

y esto nos da una pequeña simplificación de la expresión como queríamos.

Para continuar veamos cómo cambian nuestros límites de integración. Si $x=a$, entonces

$$a = a\tan(u)$$

es decir,

$$u = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

Si $x=\sqrt{3}a$, entonces

$$\sqrt{3}a = a\tan(u)$$

y por tanto

$$u = \arctan\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3}$$

En resumen, tenemos las siguientes relaciones

$$\begin{array}{lll} x = a\tan(u) & \wedge & dx = a\sec^2(u)\,du \\ x = a & \Rightarrow & u = \frac{\pi}{4} \\ x = \sqrt{3}a & \Rightarrow & u = \frac{\pi}{3} \end{array}$$

Aplicando el cambio de variable obtenemos

$$\int_a^{\sqrt{3}a} \frac{1}{\left(a^2+x^2\right)^2} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\left(a^2+a^2\tan^2(u)\right)^2} a\sec^2(u)\,du = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{a\sec^2(u)}{\left(a^2\sec^2(u)\right)^2} du$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{a\sec^2(u)}{a^4\sec^4(u)} du = \frac{1}{a^3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sec^2(u)} du = \frac{1}{a^3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2(u)\,du$$

*Hemos llegado a una integral que no nos habíamos topado antes. Ésta puede resolverse ingeniosamente aplicando integración por partes (*queda de ejercicio calcularla por este método*). Lo que vamos hacer aquí es aplicar una identidad trigonométrica que es muy socorrida para este tipo de problemas:*

$$\cos^2(u) = \frac{1+\cos(2u)}{2}$$

Aplicando esta identidad tenemos

$$\frac{1}{a^3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\cos^2(u)\,du=\frac{1}{a^3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1+\cos(2u)}{2}du=\frac{1}{2a^3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}(1+\cos(2u))\,du$$

La integral del lado derecho ya es totalmente accesible, una primitiva para $f(u)=1+\cos(2u)$ es $F(u)=u+\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2u)$. Por lo tanto

$$\frac{1}{2a^3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}(1+\cos(2u))\,du=\frac{1}{2a^3}\left[\left(\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(2\frac{\pi}{3}\right)\right)-\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(2\frac{\pi}{4}\right)\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2a^3}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2a^3}\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}-2}{4}\right)$$

Y con esto

$$\int_a^{\sqrt{3}a}\frac{1}{(a^2+x^2)^2}dx=\frac{1}{2a^3}\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}-2}{4}\right).$$

Nota 8 *En el cálculo de integrales, frecuentemente las funciones trigonométricas pueden sacarnos de un apuro, pero para poder aprovechar su potencial es importante tener a la mano la mayor cantidad de indentidades trigonométricas que nos sea posible. Algunas identidades que pueden ser de utilidad son las siguientes:*

$$\operatorname{sen}(2x)=2\operatorname{sen}(x)\cos(x)$$

$$\cos(2x)=\cos^2(x)-\operatorname{sen}^2(x)$$

$$\cos^2(x)=\tfrac{1+\cos(2x)}{2}$$

$$\operatorname{sen}^2(x)=\tfrac{1-\cos(2x)}{2}$$

$$\tan^2(x)=\tfrac{1-\cos(2x)}{1+\cos(2x)}$$

Hemos mencionado en clase que como tal no hay una receta para comenzar a atacar una integral. Muchas veces habrá más de un camino disponible, algunos más eficientes que otros pero generalmente todos deberían llevar al resultado correcto (por supuesto, existen sus patológicas excepciones). Así que digamos que se vale dejar volar la imaginación porque entre otras cosas, esto brinda mucho entrenamiento y a la larga permite generar buena intuición para atacar estos problemas y eventualmente lograremos elegir los caminos más óptimos. Veamos un ejemplo de una integral no tan complicada pero que se puede resolver con un cambio de variable que en apariencia luce rebuscado. El objetivo de este ejemplo únicamente es el de motivarlos a que experimenten los cambios de variable con toda confianza.

Ejemplo 9 *Calcular*

$$\int_{-\log(3)}^{0}\frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}dx.$$

Como podemos observar, hay un cambio de variable muy natural para comenzar a abordar esta integral, $u=e^x$. Otro no tan natural pero que también funciona muy bien es $u=\sqrt{e^x+1}$ (quedan como ejercicios resolver la integral con estos cambios de variable)*.*
El cambio de variable que realizaremos aquí será

$$x=\log\left(\tan^2(u)\right)$$

Este cambio no es tan disparatado como parece y viene motivado de nuestras experiencias con las sustituciones trigonométricas. ¿De dónde surge la intuición para este cambio? Recordemos que e^x siempre es un número estrictamente positivo. De manera que la expresión

$$e^x+1$$

esconde una igualdad como

$$e^x + 1 = y^2 + 1$$

Aquí es donde entra nuestra experiencia trigonométrica porque la expresión del lado derecho sugiere hacer un cambio por la tangente, es decir, queremos obtener

$$e^x + 1 = \tan^2(u) + 1$$

lo que implica definir (mediante un despeje)

$$x = \log\left(\tan^2(u)\right)$$

Al derivar la igualdad (usando regla de la cadena) obtenemos

$$dx = \frac{2\tan(u)\sec^2(u)}{\tan^2(u)}du = \frac{2\sec^2(u)}{\tan(u)}du$$

Veamos cómo cambian los límites de integración. Si $x = -\log(3) = \log\left(\frac{1}{3}\right)$*, entonces*

$$\log\left(\frac{1}{3}\right) = \log\left(\tan^2(u)\right)$$

Eliminando el logaritmo

$$\frac{1}{3} = \tan^2(u)$$

Llegados a este punto nos topamos con un obstáculo importante, porque la igualdad anterior implica que

$$\tan(u) = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

y aprovechando que el arco tangente es una función impar tenemos que

$$u = \pm\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \pm\frac{\pi}{6}$$

Pero entonces, ¿qué valor debemos elegir? Dejemos pendiente por un momento la elección del signo y veamos qué pasa cuando $x = 0$*. En este caso ocurre que*

$$0 = \log\left(\tan^2(u)\right)$$

o equivalentemente

$$1 = \tan^2(u)$$

y por tanto

$$\tan(u) = \pm 1$$

Terminando de despejar obtenemos que

$$u = \pm\arctan(1) = \pm\frac{\pi}{4}$$

Una vez más hemos llegado a una encrucijada. A simple vista parece que tenemos cuatro parejas posibles para los nuevos límites de integración: $\left(-\frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{4}\right)$*,* $\left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right)$*,* $\left(\frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{4}\right)$ *y* $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right)$*. Ahora bien, no todas las opciones son posibles, en concreto no es posible que* u *cambie de signo. Es decir, las opciones* $\left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right)$ *y* $\left(\frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{4}\right)$ *deben ser descartadas.*

Veamos por qué. El cambio de variable $x = \log\left(\tan^2(u)\right)$ *representa una "sustitución inversa". Así que de acuerdo al Corolario 4, debemos exigir que la función* $g(u) = \log\left(\tan^2(u)\right)$ *sea en particular una función inyectiva. Si permitimos que la variable* u *cambie de signo, es decir, si estamos parados en* $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$ *ó en* $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}\right]$*, entonces la* $\tan^2(u)$ *rompe la inyectividad de* g*.*

Con esto podemos concluir con toda certeza que la variable u *debe mantener su signo. Y por lo tanto los*

límites de integración o son ambos positivos o son ambos negativos. Lo que es muy sorprendente pero a la vez satisfactorio es que el resultado final de la integral que queremos, no va a depender de si elegimos a los positivos o a los negativos.
Por tratarse de una situación muy peculiar hagamos el esfuerzo y veamos ambos casos.

Caso 1. *Supongamos que estamos en la siguiente situación:*

$$x = \log\left(\tan^2(u)\right) \quad \wedge \quad dx = \tfrac{2\sec^2(u)}{\tan(u)}du$$

$$x = -\log(3) \quad \Rightarrow \quad u = \tfrac{\pi}{6}$$

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad u = \tfrac{\pi}{4}$$

Aplicando el cambio de variable obtenemos

$$\int_{-\log(3)}^{0} \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\left(\tan^2(u)\right)^2}{\sqrt{\tan^2(u)+1}} \frac{2\sec^2(u)}{\tan(u)}du = 2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^4(u)}{\sec(u)}\frac{\sec^2(u)}{\tan(u)}du$$

$$= 2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \tan^3(u)\sec(u)\,du$$

La última integral puede parecer complicada, sin embargo, manipulando un poco el integrando se obtiene algo más accesible:

$$\tan^3(u)\sec(u) = \tan^2(u)\tan(u)\sec(u) = \left(\sec^2(u)-1\right)\tan(u)\sec(u)$$

Sustituyendo en la integral

$$2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \tan^3(u)\sec(u)\,du = 2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\sec^2(u)-1\right)\tan(u)\sec(u)\,du$$

El nuevo integrando tiene una forma que nos permite identificar un nuevo cambio de variable

$$z = \sec(u)$$

Con este cambio de variable se logra:

$$dz = \tan(u)\sec(u)\,du$$

$$u = \tfrac{\pi}{6} \quad \Rightarrow \quad z = \tfrac{2}{\sqrt{3}}$$

$$u = \tfrac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad z = \sqrt{2}$$

De donde

$$2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\sec^2(u)-1\right)\tan(u)\sec(u)\,du = 2\int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{2}} \left(z^2-1\right)dz$$

Una primitiva para $f(z) = z^2-1$ *es* $F(z) = \frac{1}{3}z^3 - z$. *Por lo tanto*

$$2\int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{2}} \left(z^2-1\right)dz = 2\left[\left(\frac{1}{3}\left(2\sqrt{2}\right)-\sqrt{2}\right) - \left(\frac{1}{3}\left(\frac{8}{3\sqrt{3}}\right)-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\right] = 2\left(\frac{10}{27}\sqrt{3}-\frac{1}{3}\sqrt{2}\right)$$

De este modo concluimos que

$$\int_{-\log(3)}^{0} \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}dx = \frac{20}{27}\sqrt{3} - \frac{2}{3}\sqrt{2}$$

Caso 2. *Ahora supongamos que estamos en la siguiente situación:*

$$x = \log\left(\tan^2(u)\right) \quad \wedge \quad dx = \tfrac{2\sec^2(u)}{\tan(u)}du$$

$$x = -\log(3) \quad \Rightarrow \quad u = -\tfrac{\pi}{6}$$

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad u = -\tfrac{\pi}{4}$$

Aplicando el cambio de variable tenemos

$$\int_{-\log(3)}^{0} \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}dx = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{-\frac{\pi}{4}} \frac{\left(\tan^2(u)\right)^2}{\sqrt{\tan^2(u)+1}}\frac{2\sec^2(u)}{\tan(u)}du = 2\int_{-\frac{\pi}{6}}^{-\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^4(u)}{\sec(u)}\frac{\sec^2(u)}{\tan(u)}du$$

$$= 2\int_{-\frac{\pi}{6}}^{-\frac{\pi}{4}} \tan^3(u)\sec(u)\,du$$

Esta vez, en lugar de continuar como en el Caso 1, lo que vamos a hacer es el cambio de variable $z = -u$ y aprovecharemos la paridad de la secante y la imparidad de la tangente.
Con el cambio obtenemos

$$dz = -du \quad \text{ó} \quad -dz = du$$

$$u = -\tfrac{\pi}{6} \quad \Rightarrow \quad z = \tfrac{\pi}{6}$$

$$u = -\tfrac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad z = \tfrac{\pi}{4}$$

Entonces

$$2\int_{-\frac{\pi}{6}}^{-\frac{\pi}{4}} \tan^3(u)\sec(u)\,du = 2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \tan^3(-z)\sec(-z)(-1)\,dz$$

$$= 2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} (-1)\tan^3(z)\sec(z)(-1)\,dz = 2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \tan^3(z)\sec(z)\,dz$$

y de este modo hemos llegado exactamente a la misma integral que tuvimos en el Caso 1. Con lo cual podemos concluir ahora sí que

$$\int_{-\log(3)}^{0} \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}dx = \frac{20}{27}\sqrt{3} - \frac{2}{3}\sqrt{2}.$$

Aunque en el Ejemplo 9, las cuentas nos atestiguan que se obtiene el mismo valor de la integral tanto en el Caso 1 como en el Caso 2, es muy importante tratar de comprender el por qué sucedió esto apoyados de un enfoque más teórico. Si lo logramos, en futuros problemas ya no tendremos la necesidad de hacer todos los casos.

¿Qué fue lo que ocurrió en el Ejemplo 9? Teníamos definido nuestro cambio de variable $x = \log\left(\tan^2(u)\right)$ pero también teníamos a nuestra disposición dos posibles pares de límites de integración $\left(-\frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{4}\right)$ y $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right)$ y no quedaba claro cuál debíamos elegir. Sin embargo, lo que debimos notar es que en realidad estabamos trabajando con dos cambios de variable distintos pero que tenían la misma regla de correspondencia:

$$g : \left[-\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{6}\right] \to [-\log(3), 0] \text{ y } h : \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right] \to [-\log(3), 0]$$

ambas definidas mediante

$$g(u) = \log\left(\tan^2(u)\right) \text{ y } h(u) = \log\left(\tan^2(u)\right)$$

Ahora bien, la clave es que las dos funciones son biyecciones de los respectivos intervalos. Por lo tanto, de acuerdo al Corolario 4, si llamamos $f(x) = \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}$, entonces debía cumplirse que

$$\int_{-\log(3)}^{0} f(x) = \int_{g^{-1}(-\log(3))}^{g^{-1}(0)} f(g(u))\,g'(u)\,du = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{-\frac{\pi}{4}} f(g(u))\,g'(u)\,du$$

Pero por el mismo corolario, también debía ser cierto que

$$\int_{-\log(3)}^{0} f(x) = \int_{h^{-1}(-\log(3))}^{h^{-1}(0)} f(h(u))\,h'(u)\,du = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} f(h(u))\,h'(u)\,du$$

Es decir,

$$\int_{-\frac{\pi}{6}}^{-\frac{\pi}{4}} f(g(u))\,g'(u)\,du = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} f(h(u))\,h'(u)\,du$$

y esto fue exactamente lo que nos comprobaron las cuentas.

El camino que hemos elegido para resolver el Ejemplo 9 definitivamente no es el más óptimo, pero posiblemente sí es el más ilustrativo, de manera que no hay que tomarlo como una pérdida de tiempo. A pesar de lo extenso del camino, nos hemos topado con detalles que enriquecen nuestra comprensión del método del cambio de variable. Y no está de más insistir que, aunque el camino no fue el más rápido ni el más sencillo, hemos llegado a la solución correcta. Así que adelante chicos, ¡exploren!