Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Geometria Moderna

Tarea/examen III

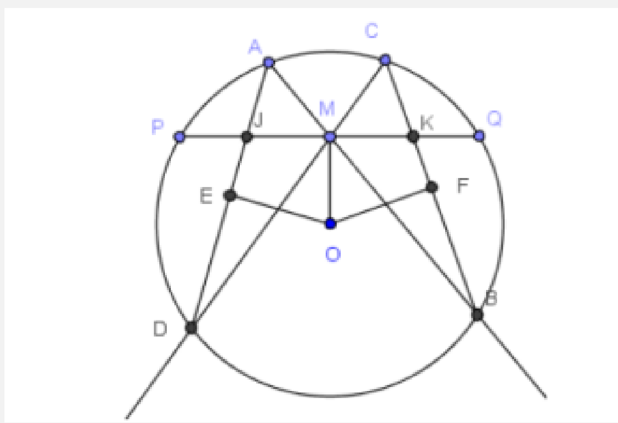
Elías López Rivera [1] Hector Santiago González Baltierra [2]
Roberto Mestre Calderón [3]

{[1] `elias.lopezr`,[2]`hectorgb`
[3]`Robertomstre`}`@ciencias.unam.mx`

Fecha: 16/10/2024

Problema 1

En la siguiente figura, M es el punto medio de la cuerda PQ, O es el centro de la circunferencia y E, F son los puntos medios de AD y CB, respectivamente. Demuestra que los cuadriláteros $JEOM$ y $MOFK$ son cíclicos.



Demostración.

Tenemos que como la recta $\overline{EO}$, pasa por el punto medio de la cuerda AD y por el centro de la circunferencia, esta necesariamente es la madiatriz de esta cuerda, pues dados dos puntos hay una unica recta que pase por ambos, sabemos que la mediatriz de cualquier cuerda pasa por el centro de la circunferencía (proposición 2), por tanto se sigue que $\measuredangle OEA = \frac{\pi}{2}$, usando un razonamiento totalmente análogo se sigue que $\measuredangle JMO = \frac{\pi}{2}$, $\measuredangle KFO = \frac{\pi}{2}$ y $\measuredangle OMK = \frac{\pi}{2}$ de los primeros dos obtenemos que $JEOM$ es cíclico, pues dos de sus ángulos opuestos suman π, de los otros dos obtenemos que $MOFK$ es cíclico por la misma razón. (Teorema 1) $\square$

Problema 2

Sean A, B, C y D los vértices consecutivos de un cuadrilátero convexo cíclico y sean W, X, Y y Z los puntos medios de los arcos $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$, $\widehat{CD}$ y $\widehat{DA}$ respectivamente. Demuestre que las cuerdas WY y XZ son perpéndiculares.

Link: **Construcción 1**

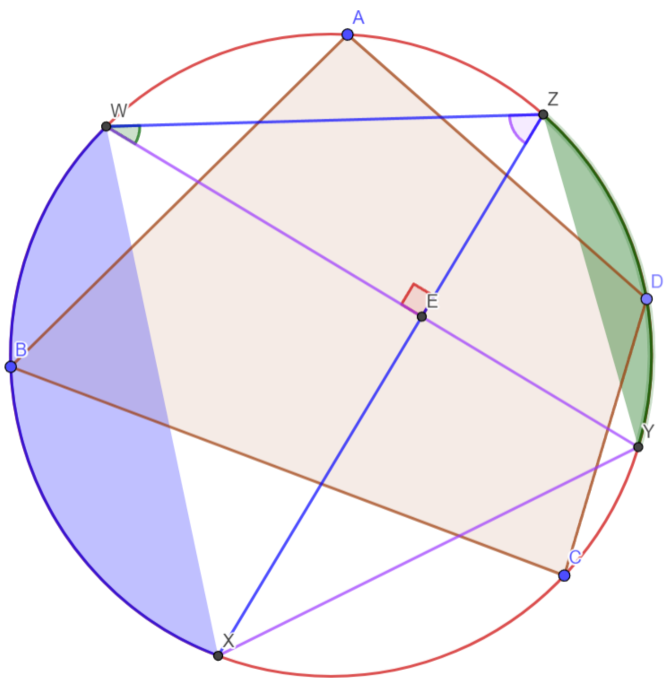


Figura 1: Construcción problema 2

Demostración.

Llamamos a E al punto donde se intersecan WY y XZ, tenemos que como $ABCD$ es cíclico se tiene que:

$$\widehat{AB} + \widehat{BC} + \widehat{CD} + \widehat{DA} = 2\,\pi$$

Como W, X, Y y Z son los puntos medios de los arcos $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$, $\widehat{CD}$ y $\widehat{DA}$ respectivamente, se sigue que:

$$2\,\widehat{WB} + 2\,\widehat{BX} + 2\,\widehat{YD} + 2\,\widehat{DZ} = 2\,\pi \implies \widehat{WB} + \widehat{BX} + \widehat{YD} + \widehat{DZ} = \pi$$

Tenemos que el ángulo $\measuredangle YWZ$ abre el arco $\widehat{YZ}$, y el ángulo $\measuredangle WZX$ abre el arco $\widehat{WX}$, por tanto:

$$\measuredangle YWX + \measuredangle WXZ = \frac{\widehat{YZ} + \widehat{WX}}{2} = \frac{\widehat{YD} + \widehat{DZ} + \widehat{WB} + \widehat{BX}}{2} = \frac{\pi}{2}$$

Como $\measuredangle YWZ$, $\measuredangle WZX$ y $\measuredangle WEZ$ son ángulos del triángulo ΔWEZ, tenemos que:

$$\measuredangle YWX + \measuredangle WXZ + \measuredangle WEZ = \pi \implies \measuredangle WEZ + \frac{\pi}{2} = \pi \implies \measuredangle WEZ = \frac{\pi}{2}$$

Por tanto las cuerdas WY y XZ son perpéndiculares $\square$

Problema 3

Sea P un punto en el arco $\widehat{AB}$ de una circunferencia, si el segmento AB es el lado de un cuadrado $ABCD$ inscrito en la circunferencia, demuestra que $(PA + PC)PC = (PB + PD)PD$.

Link:**Construcción 2**

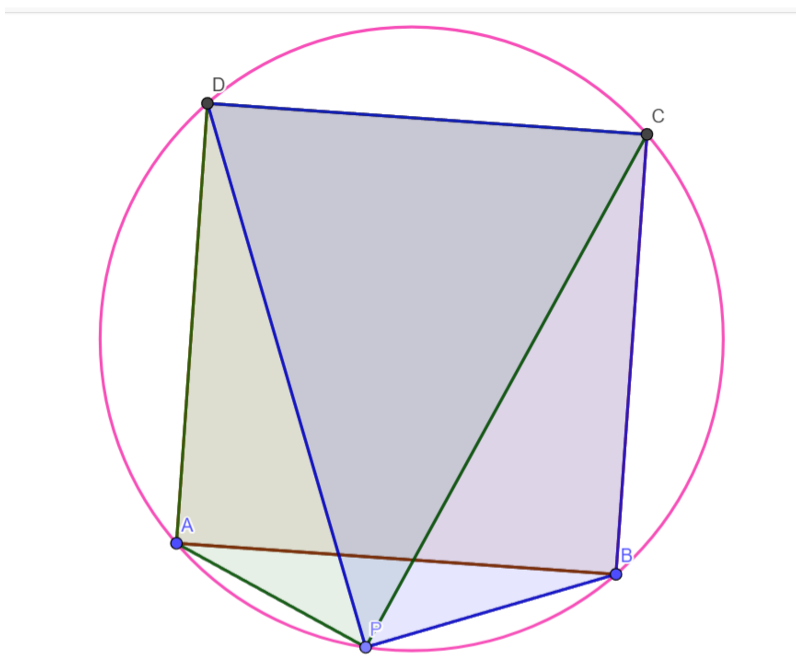


Figura 2: Construcción problema 3

Demostración.

Trazamos los segmentos PA, PB, PC Y PD, es fácil notar que los cuadrilateros $PADC$ y $PBCD$ son cuadrilateros cíclicos, pues todos sus puntos estan sobre la misma circunferencia aplicando el teorema de Ptolomeo a ambos cuadrilateros obtenemos que:

$$(PD)\,(AC) = (PC)\,(AD) + (PA)\,(DC)$$

$$(PC)\,(BD) = (PD)\,(BC) + (PB)\,(DC)$$

Como $ABCD$ es un cuadrado se tienen las siguientes igualdades, $AC = BD$, $AD = BC = AB = DC$, por tanto:

$$(PD)\,(AC) = (PC)\,(AB) + (PA)\,(AB) = AB\,(PC + PA)$$

$$(PC)\,(AC) = (PD)\,(AB) + (PB)\,(AB) = AB\,(PD + PB)$$

Luego se obtiene que:

$$\frac{PD}{PC} = \frac{PC + PA}{PD + PB} \implies PD\,(PD + PB) = PC\,(PC + PA)$$

$\square$

Problema 4

Si se considera un triángulo cualquiera y se trazan dos rectas de Simpson de dos puntos distintos P y P_1 respecto al mismo triángulo, ¿qué relación se puede establecer entre la medida del ángulo formado por las rectas de Simpson y el ángulo central formado por los puntos P y P_1 en el circuncírculo del triángulo?. Escribe y demuestra la proposición correspondiente.

Proposición: El ángulo formado por las dos rectas de simpson dadas por dos puntos P y P_1 diferentes dentro del circuncŕicuulo un mismo triángulo es igual a la mitad del arco $\widehat{P_1P}$

Link: **Construcción 3 (1)**

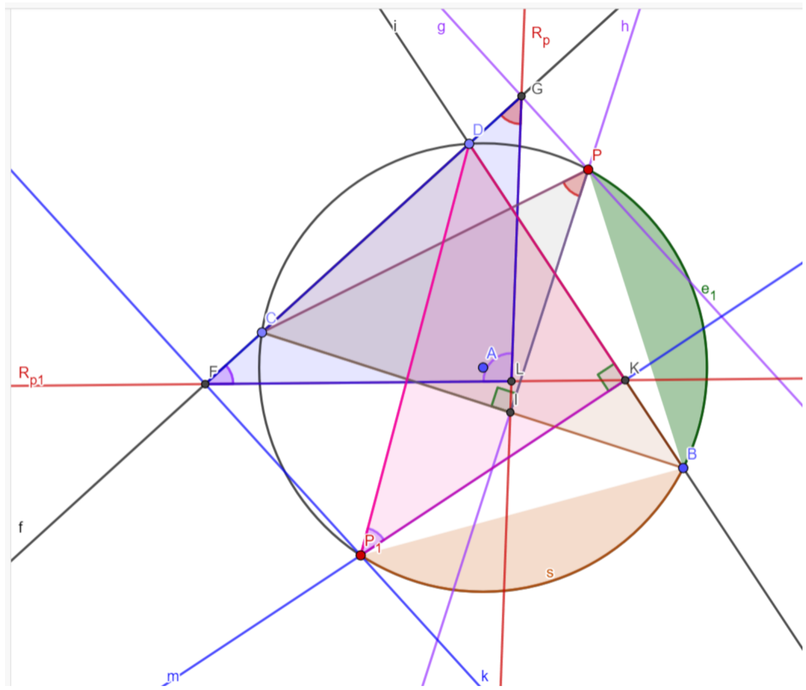


Figura 3: Construcción problema 4 (1)

Demostración.

Suponemos que P y P_1, puntos sobre los arcos $\widehat{BD}$ y $\widehat{CB}$ del circuncírculo del triángulo $\Delta\, CDB$, trazamos R_P la recta de simpson respecto al punto P y R_{P_1} la recta de simpson respecto a P_1, sean G y I los pies de las perpéndiculares que pasan por P_1 de las rectas CD y BD, debido a la construcción de G e I se sigue que $\measuredangle PIC = \frac{\pi}{2}$ y $\measuredangle CGP = \frac{\pi}{2}$, como ambos son suman π y son ángulos opuestos del cuadrilatero $CGIP$, este es cíclico, de la misma manera sean F y K los pies de las perpéndiculares que pasan por P_1 de las rectas CD y DB, usando un razonamiento análogo $FDKP_1$ es cíclico.

Luego como R_P y R_{P_1} son rectas de simpson respecto a los puntos P y P_1, se tiene que necesariamente pasan por G e I, F y K, por tanto estas unen dos vertices de los cuadrilateros $CGIP$ y $FDKP_1$, por consiguiente los ángulos $\measuredangle FGI$ y $\measuredangle CPI$, tienen la misma medida, pues estos siempre representan los ángulos formados por dos lados opuestos y las diagonales del cuadriltaero $CGIP$ y debido a que este es cíclico se cumple lo antes mencionado, analogamente tenemos que $\measuredangle KFG = \measuredangle KP_1D$

Posteriormente trazamos el triángulo $\Delta\, FLG$ donde L es el punto donde se intersecan R_P y R_{P_1}, se obtiene que:

$$\measuredangle FGL + \measuredangle KFL + \measuredangle GLF = \pi$$

Luego trazamos los triángulos $\Delta\, CIP$ e $\Delta\, DKP_1$, tenemos que por construcción $\measuredangle DKP_1 = \frac{\pi}{2}$ y $\measuredangle PIC = \frac{\pi}{2}$ por tanto:

$$\measuredangle CPI = \frac{\pi}{2} - \measuredangle ICP$$

$$\measuredangle KP_1D = \frac{\pi}{2} - \measuredangle P_1DK$$

Finalmente debido a la colinealidad de F, L y K, junto con la de G, L e I, esto derivado de la construcción de L se tiene que:

$$\begin{aligned} \measuredangle GLF &= \pi - (\measuredangle FGI + \measuredangle KFG) \\ &= \pi - (\measuredangle CPI + \measuredangle KP_1D) \\ &= \measuredangle ICP + \measuredangle P_1DK \end{aligned}$$

Por la construcción de K e I y usando el teorema del arco inscrito:

$$\measuredangle GLF = \measuredangle BCP + \measuredangle P_1DB = \frac{\widehat{BP} + \widehat{P_1B}}{2} = \frac{\widehat{P_1P}}{2}$$

A pesar de abordar un caso bastante especifico, realizar una demostración totalmente análoga para cualesquiera puntos sobre el circuncirculo si logramos probar un detalle adicional, y es el hecho de poder asumir que siempre se puede construir un cuadriltaero cíclico que pase por los puntos C, G, I, P, y otro que pase por los puntos P_1, F, D, K, este hecho puede abordarse a través, del hecho de que si los pies de las alturas se encuentra uno sobre un lado del triángulo y otro sobre la extensión de un lado respecto a un vertice, entonces el argumento dado en la demostración es valido, es decir el hecho de que dos ángulos opuestos suman π, sin embargo dado el caso de que ambos pies no se encuentre sobre nínguna extensión obtenemos el caso de la siguiente construcción:

Link: **Construcción 3 (2)**

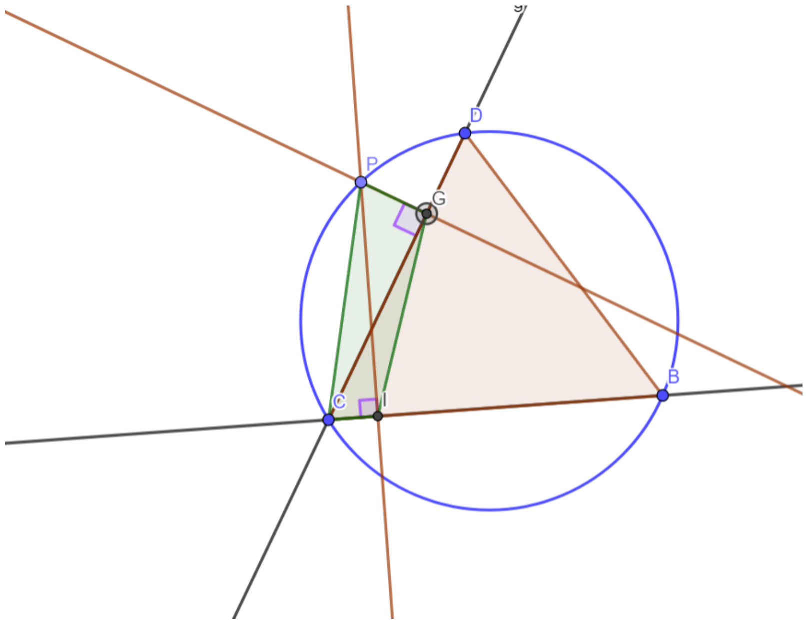


Figura 4: Construcción problema 4 (2)

En este caso tenemos que $\measuredangle GIC = \measuredangle PGC = \frac{\pi}{2}$, como estos ángulos son formados por dos lados opuestos y las dos diagonales del cuadrilitaero $CIGP$, este es cíclico, de lo anteriro se sigue que la demostración hecha con anterioridad puede realizarce sin importar la posición de los puntos sobre el circuncírculo que eligamos.

□

Problema 5

Demuestra que si A, B y C son tres puntos colineales y P, Q y R son los puntos medios de BC, CA y AB respectivamente, entonces el punto medio de CR coincide con el punto medio de PQ.

Demostración.

Sea m el punto medio de CR, por hipótesis tenemos que:

$$\frac{BP}{PC} = 1 \quad \frac{CQ}{QA} = 1 \quad \frac{AR}{RB} = 1 \quad \frac{Cm}{mR} = 1$$

Aplicando la relación de Chasles, se sigue que:

$$\begin{aligned} RQ &= RB + BQ \\ &= RB + BP + PQ \\ &= RB + BP + PC + CQ \end{aligned}$$

Usando que $RB = AR$ Y $CQ = QA$, además de que $AR = -RA$, $QA = -AQ$:

$$\begin{aligned} RQ &= AR + BP + PC + QA \\ &= BP + PC - (RA + AQ) \end{aligned}$$

De la relación de Chasles se tiene que:

$$\begin{aligned} RQ &= BC - RQ \\ 2RQ &= BC \end{aligned}$$

Como C es punto medio de BC, se tiene que $BC = 2PC$ y por tanto:

$$RQ = PC$$

Luego tenemos que usando nuevamente la relación de Chasles:

$$\begin{aligned} Pm &= PC + Cm \\ mQ &= mR + RQ \end{aligned}$$

Por hipótesis teníamos que $mR = Cm$, además demostramos que $PC = RQ$, por tanto:

$$Pm = mQ$$

Es decir m es punto medio de PQ □

Problema 6

En un triángulo ΔABC sean H_a, el pie de la altura desde A y A' el punto medio de BC. Si por A' se trazan rectas paralelas a AB y CA, que cortan a AH_a en P y Q respectivamente, demostrar que A y H_a son conjugados armónicos de P y Q

Link:**Construcción 4**

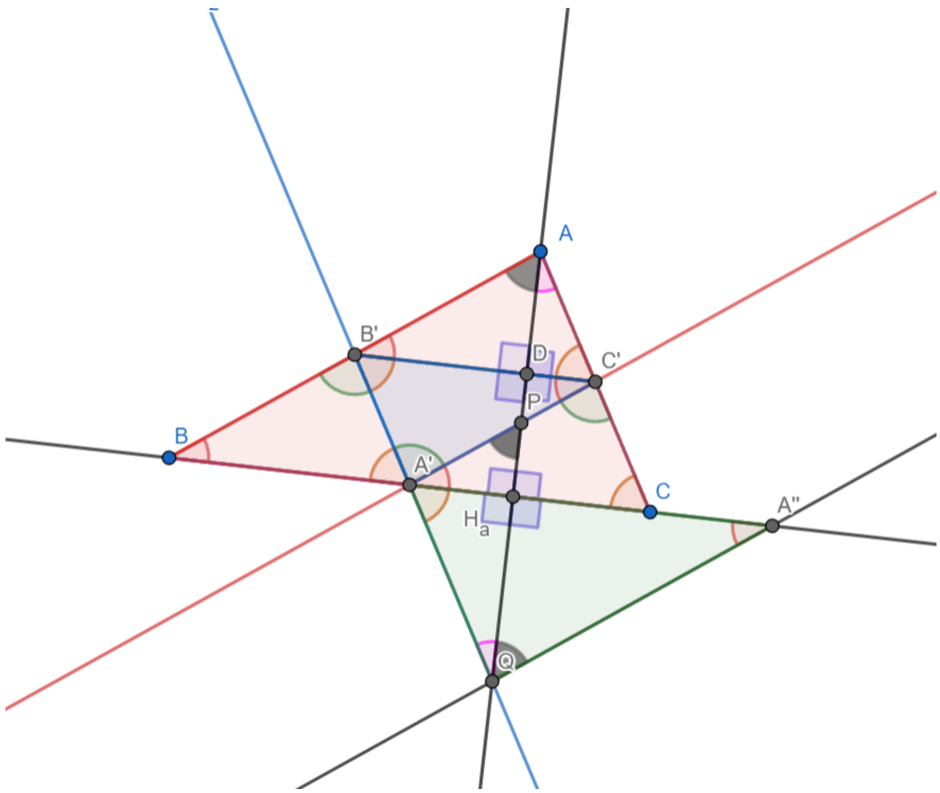


Figura 5: Construcción problema 6

Demostración.

Se procede a la construcción, se construye un triángulo con vértices A, B ,C y se traza el punto medio de BC, llamado A', también la base de la altura de A sea H_a y se traza una paralela l_1 a AB por A', la intersección con AH_a va a ser el punto P y la intersección con AC va a ser B', luego una paralela l_2 a AC por A', la intersección con AH_a va a ser el punto Q y la intersección con AB va a ser C, luego una l_3 paralela a AB por Q y cuya intersección con el segmento o la extensión de la recta BC se llamará A'', luego trazamos el segmento $B'C'$, y llamamos D al punto donde se interseca este segmento y la recta $\overline{QA}$

Tenemos que por la condición de paralelismo entre l_2 y AC, se sique que $\measuredangle AQB' = \measuredangle QAC$, luego por la condición de paralelismo entre l_1 y AB, se obtiene que $\measuredangle B'AQ = \measuredangle A'PQ$, luego como $\measuredangle A'PQ$ y $\measuredangle C'PA$ son iguales pues son opuestos por el vertice, obtenemos por criterio ángulo-ángulo que $\Delta\, PAC' \approx\ \Delta\, AQB'$, de esta relación se obtiene que:

$$\frac{PA}{AQ} = \frac{AC'}{QB'} = \frac{C'P}{B'A} \tag{1}$$

Luego por lo anteriro tenemos que $\measuredangle C'PA = \measuredangle A'PQ$, ademas de que $\measuredangle ADB' = \measuredangle PDC'$, pues estos son opuestos por el vertice, de nuevo por criterio ángulo-ángulo se tiene que $\Delta\, DB'A \approx \Delta\, DC'P$, de donde se obtiene que:

$$\frac{DB'}{DC'} = \frac{B'A}{C'P} = \frac{AD}{PD} \tag{2}$$

Por la condiciones de paralelismo de l_1 y l_2, obtenemos que los triángulos $\Delta\, A'C'C$ y $\Delta\, BB'A$ son congruentes por criterio ángulo-lado-ángulo, pues $\measuredangle A'BB' = \measuredangle CA'C$, $\measuredangle B'AB = \measuredangle C'CA'$ y $BA' = A'C$ por la construcción de A, se tiene entonces que los puntos B' y C', bisecan a AB y AC, y por tanto el segmento $B'C'$, resulta paralelo a BC

Luego tenemos que $\measuredangle C'PA = \measuredangle A'PH_a$, por ser opuestos por el vertice, y que $\measuredangle C'DA = \measuredangle PH_aA'$, esto derivado del paralelismo entre BC y $B'C'$, como AH_a es perpéndicular a BC, lo es también a $B'C'$, por criterio ángulo-ángulo se tiene que $\Delta\, PDC' \approx \Delta\, PH_aA'$, por tanto:

$$\frac{PD}{PH_a} = \frac{DC'}{H_aA'} = \frac{C'P}{A'P} \tag{3}$$

Luego ya se tenia que $\measuredangle AQB' = \measuredangle DAC'$, y de nuevo por el paralelismo entre $B'C'$ y BC, se sigue que $\measuredangle AH_aQ = \measuredangle C'DA$, aplicando nuevamente el criterio ángulo-ángulo se sigue que $\Delta\, ADC' \approx', \Delta\, QH_aA'$, por tanto:

$$\frac{AD}{QH_a} = \frac{DC'}{H_aA'} = \frac{C'A}{A'Q} \tag{4}$$

Usando (1) y (2):

$$\frac{PA}{AQ} = \frac{C'P}{B'A} = \frac{PD}{AD}$$

Por (3) y (4):

$$\frac{PD}{PH_a} = \frac{DC'}{H_aA'} \implies PD = DC'\left(\frac{PH_a}{H_aA'}\right)$$

$$AD = DC'\left(\frac{QH_a}{H_aA'}\right)$$

$$\frac{PA}{AQ} = \frac{PD}{AD} = \frac{PH_a}{QH_a}$$

Finalmente por segementos dirigidos $-H_aQ = QH_a$, por tanto:

$$\frac{PA}{AQ} = -\frac{PH_a}{H_aQ}$$

□

Problema extra

Si de cada par de ángulos adyacentes de un cuadrilátero convexo $ABCD$ se trazan las bisectrices, los segmentos que unen las intersecciones de las bisectrices forman un cuadrilátero cíclico.

Link: **Construcción 5**

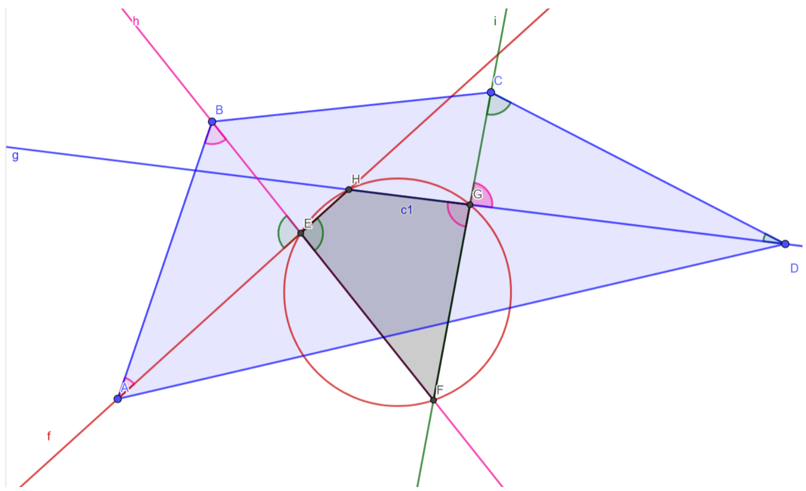


Figura 6: Construcción problema extra

Demostración.

Sea g la bisectrź del ángulo $\measuredangle CDA$, f la bisectríz de $\measuredangle BAD$, h la bisectríz de $\measuredangle ABC$, i la bisectríz del ángulo $\measuredangle BCD$, llamamos G al punto donde se intersecan i e g, H donde se intersecan f y g, E donde se intersecan f y h, F donde se intersecan h e i, como $ABCD$ es convexo tenemos que:

$$\measuredangle BAD + \measuredangle ABC + \measuredangle CDA + \measuredangle BCD = 2\measuredangle EAB + 2\measuredangle ABE + 2\measuredangle CDG + 2\measuredangle GCD = 2\pi$$

Por tanto se sigue que:

$$\measuredangle EAB + \measuredangle ABE + \measuredangle CDG + \measuredangle GCD = \pi$$

Tenemos que $\measuredangle EAB$, $\measuredangle ABC$ y $\measuredangle BEA$ son ángulos del triángulo ΔBEA, obtenemos:

$$\measuredangle EAB + \measuredangle ABE + \measuredangle BEA = \pi = \measuredangle EAB + \measuredangle ABE + \measuredangle CDG + \measuredangle GCD$$

$$\measuredangle BEA = \measuredangle CDG + \measuredangle GCD$$

De la misma manera tenemos que $\measuredangle CDG$ y $\measuredangle GCD$ y $\measuredangle DGC$ son ángulos del triángulos ΔDGC, obtenemos que:

$$\measuredangle CDG + \measuredangle GCD + \measuredangle DGC = \pi = \measuredangle EAB + \measuredangle ABE + \measuredangle CDG + \measuredangle GCD$$

$$\measuredangle DGC = \measuredangle EAB + \measuredangle ABE$$

Ademas tenemos que $\measuredangle HGF$ y $\measuredangle FEH$ son ángulos opuestos del cuadrilátero $HEFG$, también tenemos las igualdades $\measuredangle BEA = \measuredangle FEH$, $\measuredangle DGC = \measuredangle HGF$, pues son opuestos por el vertice, por tanto:

$$\measuredangle FEH + \measuredangle HGF = \measuredangle BEA + \measuredangle DGC = \measuredangle EAB + \measuredangle ABE + \measuredangle CDG + \measuredangle GCD = \pi$$

Como $HEFG$ tiene dos ángulos opuestos cuya suma es π se concluye que este es un cuadrilátero cíclico. $\square$