Cálculo Diferencial e Integral II

Series

4 de mayo de 2020

Nota muy importante: Para el buen entendimiento de este tema, es crucial el dominio de todo lo referente al tema de sucesiones. Para todos aquellos que no lo tengan fresco, sugiero que primero le den una buena repasada antes de iniciar con este nuevo tema.

Al inicio del curso nos dimos a la tarea de "calcular" el área bajo la curva definida por:

$$y = \frac{1}{x^2}, \text{ para } x \geq a > 0$$

En algún punto del problema, apareció la *suma infinita*

$$1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} + \cdots \tag{1}$$

En aquel momento no tuvimos mayor reparo en lo que teníamos enfrente y nos atrevimos a afirmar que para $r > 1$,

$$1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} + \cdots = \frac{r}{r-1}$$

Sin embargo, ¿qué significa realmente la expresión en (1)? ¿qué debemos entender por una suma infinita de números? ¿acaso cualquier colección infinita de números podrá sumarse?

Todas estas preguntas forman la motivación de este nuevo tema que queremos estudiar: *Series.*

La idea de sumar una cantidad infinita de números no es para nada una noción trivial, por el contrario, fue un problema que ocupó alrededor de 2000 años en resolverse. Incluso, aún cuando se había logrado llegar a una "definición aceptable" de sumas infinitas, se siguieron cometiendo errores por demás elementales al querer tratar a las sumas infinitas como si fueran sumas usuales.

Un ejemplo famoso ocurre a partir de la siguiente igualdad:

$$0 = 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + \cdots$$

Definitivamente no tenemos ningún empacho en creer que una suma infinita de 0 debería devolver nuevamente el valor 0.

¿Qué pasa si ahora usamos la igualdad $0 = 1 - 1$?

En este caso obtenemos:

$$0 = (1-1) + (1-1) + (1-1) + (1-1) + (1-1) + \cdots$$

Si aplicamos la propiedad asociativa de la suma:

$$\begin{aligned} 0 &= 1 + (-1+1) + (-1+1) + (-1+1) + (-1+1) + \cdots \\ &= 1 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + \cdots \end{aligned}$$

Como ya habíamos acordado que una suma infinita de 0 arroja 0, concluimos que

$$0 = 1$$

Semejante aberración fue tomada hace algunos siglos, como la prueba contundente e irrefutable de que *es posible crear algo a partir de la nada.* Por supuesto que con el desarrollo de las Matemáticas, quedó claro que algo no cuadraba con el razonamiento anterior. Y como es de esperarse, todo el problema radicaba en no tener una buena comprensión de lo que significan las sumas infinitas.

Dando un poco de contexto histórico, podemos decir que el origen del problema de calcular sumas infinitas se remonta a hace más de 2400 años atrás, con el filosofo griego Zenón de Elea, quien dentro de sus revolucionarias ideas afirmaba que "el movimiento no existe" y en consecuencia "una persona no puede recorrer una distancia en absoluto aunque nuestros sentidos mostrasen que tal cosa es posible". Dichas afirmaciones estaban fundamentadas en lo que hoy se conocen como las paradojas de Zenón (posiblemente conocidas por muchos de ustedes).

Una de estas paradojas, y que compete a nuestro tema, relata el siguiente problema:

Un velocista nunca podrá llegar a la meta de una carrera, puesto que siempre debe correr la mitad de la distancia antes de correr el total.

Analicemos lo que encierra la afirmación anterior apoyados del siguiente segmento:

$$0 \quad \frac{1}{16} \quad \frac{1}{8} \qquad \frac{1}{4} \qquad\qquad \frac{1}{2} \qquad\qquad\qquad\qquad 1$$

Supongamos que un velocista desea partir del punto 1 y quiere llegar hasta el punto 0. De acuerdo con Zenón, antes de llegar a la meta, el velocista primero tendrá que llegar al punto $1/2$. Ahora, para llegar del punto $1/2$ al punto 0, primero debe recorrer la mitad de la distancia restante y llegar al punto $1/4$. Continuando con este razonamiento, para llegar a la meta, el velocista debe recorrer cada uno de los siguientes intervalos (escritos en sentido contrario sólo para ilustrar el recorrido):

$$\left[1, \frac{1}{2}\right], \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right], \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right], \left[\frac{1}{8}, \frac{1}{16}\right], \ldots, \left[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n+1}}\right], \ldots$$

De modo que lo que Zenón quería decir es, que un velocista nunca pueda alcanzar la meta en una cantidad finita de tiempo, puesto que antes tiene que recorrer una cantidad infinita de intervalos y cada uno le tomará un determinado tiempo. En otras palabras, *no es posible que la suma de una cantidad infinita de intervalos de tiempo sea finita.*

Expresado de esta manera, la afirmación de Zenón no suena tan descabellada (sobretodo para su época), sin embargo, se hace evidente que todo el problema de fondo es, ¿qué significa sumar infinitos números?

Continuemos con esta historia y ahora supongamos que el velocista corre a una velocidad constante y que además le toma una cantidad de T minutos en llegar del punto 1 al punto $1/2$.

Nuestra intuición nos diría que el recorrido total debe tomarle una cantidad de $2T$ minutos.

Ahora bien, la velocidad constante que lleva le permite correr el "intervalo" $[1/2, 1/4]$ en una cantidad de $T/2$ minutos (puesto que es la mitad del camino total que aún le falta por hacer). En general, correr a lo largo del intervalo $\left[1/2^n, 1/2^{n+1}\right]$ le toma una cantidad de $T/2^n$ minutos.

Entonces, la suma de todos estos intervalos de tiempo debería satisfacer en "algún sentido" que

$$T + \frac{T}{2} + \frac{T}{4} + \frac{T}{8} + \frac{T}{16} + \cdots + \frac{T}{2^n} + \cdots = 2T$$

Una forma que parece natural y con la que podríamos darle una interpretación a la suma del lado izquierdo es apoyándonos de las "sumas parciales". Es decir, para cada n definimos

$$S_n = T + \frac{T}{2} + \frac{T}{4} + \frac{T}{8} + \frac{T}{16} + \cdots + \frac{T}{2^{n-1}}$$

En el problema que estamos discutiendo, el valor S_n se interpreta como el tiempo acumulado al correr desde el punto 1 hasta el punto $1/2^n$.

Si nos trasladamos desde el punto $1/2^n$ hasta el punto $1/2^{n+1}$, se observa la siguiente relación sobre el tiempo acumulado:

$$S_n + \frac{T}{2^n} = T + \frac{T}{2} + \frac{T}{4} + \frac{T}{8} + \frac{T}{16} + \cdots + \frac{T}{2^{n-1}} + \frac{T}{2^n} = S_{n+1}$$

lo cual es consistente con nuestra interpretación de S_n.

Con la sucesión generada por $\{S_n\}$, el valor de la suma

$$T + \frac{T}{2} + \frac{T}{4} + \frac{T}{8} + \frac{T}{16} + \cdots + \frac{T}{2^n} + \cdots$$

puede obtenerse mediante un proceso límite, es decir, parece razonable afirmar que

$$T + \frac{T}{2} + \frac{T}{4} + \frac{T}{8} + \frac{T}{16} + \cdots + \frac{T}{2^n} + \cdots = \lim_{n\to\infty} S_n$$

Lo ideal por supuesto sería que dicho límite exista.

La fórmula que define a S_n en realidad nos es familiar. En la Clase del jueves 16 de abril, hicimos la siguiente deducción:

$$\frac{1-b^{n+1}}{1-b} = 1 + b + b^2 + b^3 + \cdots + b^n \tag{2}$$

igualdad válida para $b \neq 1$. Si aplicamos la identidad (2) al valor $b = 1/2$ obtenemos:

$$\frac{1-1/2^{n+1}}{1-1/2} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}$$

Simplificando un poco la fracción del lado izquierdo nos queda que

$$\frac{1-1/2^{n+1}}{1-1/2} = 2\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) = 2 - \frac{1}{2^n}$$

Y por lo tanto, para toda $n \in \mathbb{N}$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^n}$$

Como la identidad es válida para toda $n \in \mathbb{N}$, también debe cumplirse entonces que

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

Si ahora multiplicamos por T, se sigue que

$$S_n = T + \frac{T}{2} + \frac{T}{4} + \cdots + \frac{T}{2^{n-1}} = 2T - \frac{T}{2^{n-1}}$$

Por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(2T - \frac{T}{2^{n-1}}\right) = 2T$$

¡Uh! Pero entonces esto significaría que

$$T + \frac{T}{2} + \frac{T}{4} + \frac{T}{8} + \frac{T}{16} + \cdots + \frac{T}{2^n} + \cdots = \lim_{n\to\infty} S_n = 2T$$

tal cuál como nuestra intuición nos había dicho.

Y de esta manera habríamos logrado realizar una suma infinita de números, contrario a lo que pensaba Zenón que era imposible.

Si en particular tomamos $T = 1$, ocurriría que

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = 2$$

Esta estrategia de tomar las sumas parciales y luego calcular su límite, genera una buena noción de lo que podríamos llamar una suma infinita de números. Y es precisamente ésta la que actualmente está aceptada como **la definición** de una suma infinita.

Con estas ideas que hemos generado, ¿cualquier colección infinita de números podrá sumarse?

La respuesta debería ser intuitivamente clara y ser un contundente NO. Y es que bajo cualquier definición razonable de suma infinita que demos, inevitablemente nos vamos a topar con casos tan triviales como querer sumar infinitos 1:

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \cdots$$

Y por supuesto, esperamos que esa suma no arroje algo finito, es decir, que no sea sumable. Debido a la existencia de estos ejemplos, es necesario realizar una distinción entre aquellas colecciones de números que sí podremos sumar y aquellas a las que no.

Definición 1 *Sea $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ una sucesión. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos*

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

La sucesión $\{S_n\}$ recibe el nombre de sucesión de sumas parciales de $\{a_n\}$.

A lo largo de este tema será de vital importancia apoyarnos de la notación sigma $\sum$. Con esta notación, la sucesión de sumas parciales puede escribirse de manera más simplificada:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Definición 2 *Sea $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ una sucesión. Decimos que $\{a_n\}$ es **sumable** si la sucesión de sumas parciales $\{S_n\}$ es convergente. En este caso denotamos por*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n$$

El valor $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ recibe el nombre de suma de la sucesión $\{a_n\}$.

Nota importante: *Cuando una sucesión $\{a_n\}$ es sumable, al valor de su suma $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ también se le conoce como **la serie** de los a_n.*

La notación $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ para el valor de una serie, resulta más formal para escribir una suma infinita:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

En la práctica (y en muchos textos), la afirmación de que $\{a_n\}$ es o no sumable, es sustituido por las afirmaciones de que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge o diverge respectivamente. Sin embargo, debe quedar claro que estas expresiones guardan un abuso del lenguaje porque, en el mejor de los casos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ denota un número (y por tanto no puede "converger") y en el peor de los casos, no designa nada si $\{a_n\}$ no es sumable. Sólo para recalcar esta costumbre didáctica vamos a enunciarlo como una convención para nosotros y la utilizaremos a lo largo del tema.

Convención: *Para una sucesión $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$, diremos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si la sucesión $\{a_n\}$ es sumable y diremos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge si la sucesión $\{a_n\}$ no es sumable.*

Quisiera recalcar que la definición de sucesión sumable que hemos dado es la comúnmente aceptada en la labor matemática, sin embargo, no es la única definición de sumas infinitas que existe. En la tarea se ofrecerá otra noción de sumabilidad, atribuida a Cesàro, la cual es un poco más amplia (es decir, más sucesiones son sumables bajo la noción de Cesàro que bajo nuestra definición). Por supuesto aún hay más definiciones de suscesiones sumables pero que se escapan de los objetivos del curso.

Ya con la definición oficial de *sumas infinitas*, vamos a comenzar recapitulando los ejemplos que ya hemos visto.

Ejemplo 3 *La serie* $\sum_{n=1}^{\infty} 0$ *converge.*

El ejemplo es muy claro. Si llamamos $a_n \equiv 0$*, entonces la sucesión de sumas parciales de* $\{a_n\}$ *se convierte en*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} 0 = 0$$

De donde

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

Es decir, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 0$ *converge.*

Ejemplo 4 *La serie* $\sum_{n=1}^{\infty} 1$ *diverge.*

En efecto, si definimos la sucesión constante $a_n \equiv 1$*, entonces la sucesión de sumas parciales de* $\{a_n\}$ *se convierte en*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} 1 = n$$

Dado que

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} n = \infty$$

concluimos que $\sum_{n=1}^{\infty} 1$ *diverge.*

En general, para cualquier constante $c \in \mathbb{R}$, con $c \neq 0$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c$ diverge. La prueba es análoga a lo hecho en el Ejemplo 4.

Ejemplo 5 *La serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ *converge.*

Ya hemos visto que esta serie no sólo converge sino que además

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 2$$

El Ejemplo 5 nos permite hacer una pequeña manipulación técnica. En ocasiones conviene permitir que el índice de la sucesión $\{a_n\}$ comience en $n = 0$ y no en $n = 1$. En el caso del Ejemplo 5, mediante una traslación del índice podemos escribir

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

y de esta manera concluir que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2$$

No hay nada especial en el cambio de índice que acabamos de hacer, digamos que sólo obedece a una cuestión estética.

Aprovechemos esta observación técnica para generalizar el Ejemplo 5. Vamos a analizar la convergencia de las series del tipo $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$. Esta clase de series son conocidas como series geométricas.

Proposición 6 *(Serie geométrica) Sea $r \in \mathbb{R}$.*

1) Si $|r| < 1$, entonces la serie $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ converge y además

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$$

2) Si $|r| \geq 1$, entonces la serie $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ diverge.

Dem. Llamemos $a_n = r^n$ para $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Por el Ejemplo 4 ya sabemos que la serie diverge si $r = 1$.

Si $r = -1$, la sumas parciales tienen un comportamiento que oscila entre dos valores

$$S_n = \begin{cases} -1 & n \text{ impar} \\ 0 & n \text{ par} \end{cases}$$

(*¿por qué?*). Esto significa que las subsucesiones $\{S_{2n-1}\}$ y $\{S_{2n}\}$ convergen a valores distintos, lo que implica que $\{S_n\}$ no es convergente. Es decir, la serie diverge.

Supongamos que $|r| \neq 1$.

En este caso las sumas parciales de $\{a_n\}$ pueden calcularse mediante la fórmula dada en la ecuación (2):

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} r^k = 1 + r + r^2 + \cdots r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1-r}$$

De manera que

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - r^{n+1}}{1-r} = \frac{1}{1-r}\left(1 - \lim_{n\to\infty} r^{n+1}\right)$$

Ahora bien, si $|r| < 1$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} r^{n+1} = 0$$

y en consecuencia la serie converge y además

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - r^{n+1}}{1-r} = \frac{1}{1-r}$$

Por otra parte, si $|r| > 1$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} |r|^{n+1} = \infty$$

En este caso hay que distinguir el posible signo que pudiera tener r.

Si $r > 1$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 - r^{n+1}}{1-r} = \infty$$

En cambio, si $r < -1$, entonces el límite $\lim\limits_{n\to\infty} r^{n+1}$ no existe, puesto que $r^{2n+1} \to -\infty$ pero $r^{2n} \to \infty$.

En cualquier caso se concluye que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ diverge. ■

Así como hemos considerado series que empiezan en $n = 0$, también podríamos considerar series que comiencen en cualquier índice $m \in \mathbb{N}$ por grande que m pudiera ser. Es decir, en la práctica tiene total sentido preguntarnos por ejemplo si es convergente la serie

$$\sum_{n=10000}^{\infty} a_n$$

Un caso particular donde lo anterior cobra mucho sentido lo tenemos en la siguiente serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 \log(n)}$$

Esta serie necesariamente debe empezar en un índice $n > 1$, ya que para $n = 1$ el denominador del cociente $\frac{1}{n^2 \log(n)}$ se anula, creando un enorme conflicto.

Ahora bien, ¿qué significa que una serie $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ converja?

Recordemos que el objetivo principal de este tema es darle un sentido a la idea de una suma infinita de números. De tal modo que la serie $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ representa la suma infinita:

$$\sum_{n=m}^{\infty} a_n = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + a_{m+3} + \cdots$$

Si quisiéramos ser muy rigurosos con la definición de serie convergente que hemos dado, para hablar de la convergencia de la serie $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ podríamos apoyarnos de una nueva sucesión:

$$b_n = a_{n+(m-1)}$$

(por supuesto estamos pensando que $m > 1$).

De esta manera se tiene que $b_1 = a_m$, $b_2 = a_{m+1}$, $b_3 = a_{m+2}$, etcétera. Lo que significa que la serie $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ converge si y sólo si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge y además

$$\sum_{n=m}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

Todas estas discusiones técnicas tienen el propósito de ganar familiarización con la notación $\sum$. Para finalizar esta discusión y avanzar con los ejemplos, veamos una simple pero importante proposición.

Proposición 7 *Sea $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ una sucesión. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si y sólo si para toda $m \in \mathbb{N}$, con $m > 1$, la serie $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ converge. En ambos casos se cumple que*

$$\sum_{n=m}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - (a_1 + a_2 + \cdots + a_{m-1})$$

Dem. La prueba es muy sencilla si hemos comprendido lo que significa que la serie $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ sea convergente.

Tomemos $m \in \mathbb{N}$, con $m > 1$ y usemos la sucesión

$$b_n = a_{n+(m-1)}$$

Llamemos S_n y $\tilde{S}_n$ a las correspondientes sumas parciales de $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$.

Lo que queremos demostrar entonces es que $\{S_n\}$ converge si y sólo si $\left\{\tilde{S}_n\right\}$ converge.

Por definición, para $n > m$ ocurre que

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = (a_1 + a_2 + \cdots + a_{m-1}) + \sum_{k=m}^{n} a_k$$

De acuerdo a la definición de b_n, se cumple que

$$a_k = a_{(k-(m-1))+(m-1)} = b_{k-(m-1)}$$

Si en particular $k = m$, entonces $a_m = b_1$, mientras que si $k = n$, entonces $a_n = b_{n-(m-1)}$.

De manera que

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n-(m-1)} b_k$$

Y en consecuencia

$$S_n = (a_1 + a_2 + \cdots + a_{m-1}) + \sum_{k=m}^{n} a_k = (a_1 + a_2 + \cdots + a_{m-1}) + \sum_{k=1}^{n-(m-1)} b_k$$

$$= (a_1 + a_2 + \cdots + a_{m-1}) + \tilde{S}_{n-(m-1)}$$

Es decir, para toda $n > m$

$$S_n = (a_1 + a_2 + \cdots + a_{m-1}) + \tilde{S}_{n-(m-1)} \tag{3}$$

Como lo que nos interesa es hacer $n \to \infty$, podemos trabajar sin problemas con $n > m$.

Debe quedar claro que bajo la hipótesis de $n > m$ ocurre que

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{S}_{n-(m-1)} = \lim_{n\to\infty} \tilde{S}_n$$

puesto que la única diferencia entre ambas sucesiones es un desfasamiento del índice con el que se empieza.

Por lo tanto, de la ecuación (3) concluimos que

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left[(a_1 + a_2 + \cdots + a_{m-1}) + \tilde{S}_{n-(m-1)}\right]$$

$$= (a_1 + a_2 + \cdots + a_{m-1}) + \lim_{n\to\infty} \tilde{S}_{n-(m-1)} = (a_1 + a_2 + \cdots + a_{m-1}) + \lim_{n\to\infty} \tilde{S}_n$$

Es decir,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = (a_1 + a_2 + \cdots + a_{m-1}) + \lim_{n\to\infty} \tilde{S}_n$$

Esta igualdad nos ofrece la información que buscamos: $\{S_n\}$ converge si y sólo si $\left\{\tilde{S}_n\right\}$ converge.

Y dado que

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{S}_n = \sum_{n=m}^{\infty} a_n$$

obtenemos finalmente que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = (a_1 + a_2 + \cdots + a_{m-1}) + \sum_{n=m}^{\infty} a_n$$

O equivalentemente

$$\sum_{n=m}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - (a_1 + a_2 + \cdots + a_{m-1})$$

como se quería. ■

La Proposición 7 tiene varias lecturas. La primera de ellas es la siguiente:

Cualquier cantidad finita de términos puede ser agregada u omitida al inicio de una serie sin afectar su convergencia o divergencia.

Una segunda lectura y sumamente crucial es:

La convergencia de una serie depende únicamente de los últimos términos de la sucesión que la define.

La segunda observación es tan importante que nos invita a dar la siguiente definición.

Definición 8 *Sea $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ una sucesión. Para cada $m \in \mathbb{N}$ definimos la m-ésima cola de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ como la serie:*

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n$$

Observen que para cada $m \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S_m + \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n$$

Tomando en cuenta que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n$$

se tiene que, cuando una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, entonces para $m \in \mathbb{N}$ muy grande la diferencia

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n - S_m\right| = \left|\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n\right|$$

es muy chica, pero esto es equivalente a decir que la correspondiente cola de la serie debe ser muy chica.

En otras palabras, cuando una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, entonces necesariamente debe ocurrir que

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{n=m}^{\infty} a_n = 0$$

Ojo, esta observación de ninguna manera es un criterio de convergencia, al contrario, es una observación que únicamente tiene sentido si de antemano sabemos que la serie en cuestión es convergente. Y la información que nos está ofreciendo es, que los "últimos sumandos" de una serie convergente cada vez van aportando menos al valor total de la suma infinita.

¡Ah! Pero entonces, si en una serie convergente los últimos sumandos casi no aportan nada, eso nos habla ahora sí de una condición necesaria que debe poseer toda serie convergente. Esta es, que los sumandos a_n cada vez son más y más pequeños, es decir,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Veamos que esto es correcto.

Proposición 9 *Sea $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ una sucesión. Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Dem. La demostración recae en una relación muy importante que guarda la sucesión $\{a_n\}$ con sus respectivas sumas parciales S_n.

Notemos que para $n > 1$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n-1} a_k + a_n = S_{n-1} + a_n$$

Equivalentemente

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

Bajo el supuesto de que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, podemos llamar

$$L = \lim_{n\to\infty} S_n$$

Dado que $\{S_{n-1}\}$ es una subsucesión de $\{S_n\}$, concluimos que

$$L = \lim_{n\to\infty} S_{n-1}$$

Y por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = L - L = 0$$

lo que concluye la prueba. ∎

En ocasiones la Proposición 9 es más útil cuando se lee mediante su contrapositiva.

Corolario 10 *Sea* $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ *una sucesión. Si* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$*, entonces la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverge.*

La hipótesis $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ en el Corolario 10 incluye la posibilidad de que el límite ni siquiera exista.

El Corolario 10 ofrece un criterio fantástico para determinar la divergencia de muchas series. Algunas en apariencia no tan sencillas de analizar. Por ejemplo, las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \qquad \text{y} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right)$$

son ambas divergentes. En el primer caso porque el límite $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^{n+1}$ no existe y en el segundo caso porque

$$\lim_{n\to\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right) = \cos(0) = 1 \neq 0$$

Vale la pena mencionar que la primer serie, escrita de manera desarrollada nos da:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

Es decir, se trata de aquella serie que fue utilizada para "demostrar" que $0 = 1$. Sin embargo, ahora podemos argumentar qué es lo que estuvo mal, la falla estuvo en haber hecho cálculos con una serie que es divergente. Por lo tanto, cualquier conclusión desprendida de haber manipulado esta serie divergente, no tiene ninguna validez.

Una duda que debería surgirnos respecto a la Proposición 9 es:

¿Se vale su recíproco?

Es decir, si tenemos una sucesión $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ para la cual se cumple que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, entonces ¿se tendrá que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente?

Este no es un problema tan sencillo de resolver. Su respuesta es negativa y el ejemplo más famoso de ello es la llamada "serie armónica".

Ejemplo 11 *(Serie armónica) La serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *diverge.*

Llamemos

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}$$

Queremos demostrar que la sucesión $\{S_n\}$ *es divergente. Existen muchos "trucos" para argumentar por qué esta serie es divergente, la mayoría de ellos sólo necesitan algunas manipulaciones aritméticas. Nosotros vamos a tratar de vernos más elegantes usando nuestra teoría de integración.*

Si consideramos la función $f(x) = \frac{1}{x}$*, resulta que el valor de* S_n *coincide con una suma superior de* f *en el intervalo* $[1, n+1]$*.*

En efecto, tomemos la partición $P = \{1, 2, 3, \ldots, n+1\}$. *Como* f *es decreciente, el supremo en cada subintervalo* $[k, k+1]$ *se alcanza en el extremo izquierdo, es decir, vale* $\frac{1}{k}$.

De manera que

$$\bar{S}(f, P) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}((k+1) - k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = S_n$$

Con esto podemos concluir que

$$\int_{1}^{n+1} \frac{1}{x} dx \leq \bar{S}(f, P) = S_n$$

Pero la integral de la izquierda sí la conocemos, es la definición del valor de $\log(n+1)$.

Por lo tanto

$$\log(n+1) \leq S_n$$

Como

$$\lim_{n \to \infty} \log(n+1) = \infty$$

concluimos que

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \infty$$

Y en con ello, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *diverge.*

La serie armónica nos ofrece el ejemplo de que el recíproco de la Proposición 9 no es válido, puesto que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge pero la sucesión que la define $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ converge a 0.

Como dato cultural (dirigido particularmente a los Físicos del curso), la serie armónica recibe su nombre porque la longitud de onda de los *armónicos* de una cuerda que vibra es proporcional a la serie de fracciones unitarias, es decir, $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$

Continuemos con más ejemplos para seguir familiarizándonos con la convergencia de series.

Ejemplo 12 *Determinar si la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ *converge.*

Para este ejemplo, lo que tenemos que hacer es estudiar a las sumas parciales (de preferencia encontrar una expresión explícita para ellas) y a partir de ahí determinar si hay convergencia o no.

Llamemos

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \qquad y \qquad a_n = \frac{1}{n(n+1)}$$

Calculemos algunos valores particulares de S_n *para analizar su comportamiento. Para facilitar los cálculos, no olviden la siguiente relación general:*

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$$

De este modo:

$$S_1 = a_1 = \tfrac{1}{2}$$

$$S_2 = S_1 + a_2 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2(3)} = \tfrac{2}{3}$$

$$S_3 = S_2 + a_3 = \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{3(4)} = \tfrac{3}{4}$$

$$S_4 = S_3 + a_4 = \tfrac{3}{4} + \tfrac{1}{4(5)} = \tfrac{4}{5}$$

Todo indica que se está respetando un patrón para S_n:

$$S_n = \frac{n}{n+1}$$

*La fórmula es válida y de fácil verificación por inducción (*lo dejamos como ejercicio*).*

Por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

Es decir, la serie dada es convergente y además:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,(n+1)} = 1.$$

Todos aquellos lectores avispados, posiblemente habrán notado que había un método un poco más simple de abordar el Ejemplo 12. Y es que nuestra experiencia con fracciones parciales nos indica que

$$\frac{1}{n\,(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

Esto significa que las sumas parciales S_n son generadas a partir de una "suma telescópica"

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right]$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

Si hacemos las cancelaciones correspondientes, sólo sobrevive lo siguiente:

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

Es decir, hemos llegado exactamente al mismo resultado que en el Ejemplo 12.

El proceso que generan las sumas telescópicas es algo que se puede poner en un lenguaje más abstracto. En efecto, para tener una suma telescópica necesitamos que la sucesión $\{a_n\}$ que define a una serie tenga un comportamiento del siguiente estilo:

$$a_n = b_n - b_{n+1}$$

para alguna sucesión $\{b_n\}$.

Bajo estas condiciones, las sumas parciales para $\{a_n\}$ se pueden calcular de manera sencilla:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (b_k - b_{k+1})$$

$$= (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + (b_3 - b_4) + \cdots + (b_{n-1} - b_n) + (b_n - b_{n+1})$$

Si cancelamos adecuadamente, concluimos que

$$S_n = b_1 - b_{n+1} \tag{4}$$

(una formalización de esta fórmula debe hacerse por inducción)

De esta manera si quisiéramos determinar si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, lo único que necesitamos saber es si la sucesión $\{b_n\}$ converge. Más aún, deberá cumplirse que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = b_1 - \lim_{n\to\infty} b_{n+1}$$

Formalicemos este hecho en una proposición.

Proposición 13 *Sea $\{b_n\} \subset \mathbb{R}$ una sucesión. Si definimos*

$$a_n = b_n - b_{n+1}$$

entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si y sólo si la sucesión $\{b_n\}$ converge. En ambos casos se cumple que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = b_1 - \lim_{n\to\infty} b_{n+1}$$

Dem. La prueba es una consecuencia de la ecuación (4). ■

En la práctica, como es de esperarse, no siempre es tan simple notar que estamos en la presencia de una serie telescópica. Por lo general hay que hacer algunas manipulaciones previas para notarlo.

Veamos un ejemplo.

Ejemplo 14 *Determinar si la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

es convergente.

Definamos

$$a_n = \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

Como se puede apreciar, no está nada claro que estemos en la presencia de una serie telescópica. Sin embargo, podemos intuir que una descomposición en fracciones parciales puede ser de utilidad.

Dado que ya somos expertos en fracciones parciales, sólo ofrecemos la descomposición final:

$$a_n = \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)} = -\frac{1}{2(n+1)} + \frac{2}{n+2} - \frac{3}{2(n+3)}$$

*(*Por favor, no dejen comprobar los cálculos como ejercicio*)*

La nueva expresión a la que hemos llegado sigue sin arrojar mucha luz, es decir, aún no tiene cara de tratarse de algo telescópico.

La expresión telescópica está escondida en una simple desomposición del número $2:$

$$2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}$$

Aprevachando está igualdad obtenemos:

$$a_n = -\frac{1}{2(n+1)} + \frac{2}{n+2} - \frac{3}{2(n+3)} = -\frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)} + \frac{3}{2(n+2)} - \frac{3}{2(n+3)}$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right] + \frac{3}{2}\left[\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right]$$

Ahora sí cada una de las expresiones entre corchetes parace generar algo telescópico. De manera que si definimos

$$b_n = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+1} + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{n+2}$$

se cumple que

$$a_n = b_n - b_{n+1}$$

Dado que

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+1}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{n+2}\right]=0$$

por la Proposición 13 concluimos que la serie que queremos, converge y además

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)} = b_1 - \lim_{n\to\infty} b_{n+1} = b_1 = -\frac{1}{4}+\frac{1}{2}$$

Es decir,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{1}{4}$$

Algo que implícitamente deja entrever el Ejemplo 14 es una de las propiedades más elementales e importantes que poseen las series: *su linealidad.*

Retomemos la igualdad

$$a_n = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right]+\frac{3}{2}\left[\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right]$$

Si en lugar de haber definido a b_n como lo hicimos en el Ejemplo 14 hubiéramos definido dos sucesiones:

$$c_n = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+1} \qquad \text{y} \qquad d_n = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{n+2}$$

entonces

$$a_n = (c_n - c_{n+1}) + (d_n - d_{n+1})$$

Es decir, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ en realidad se pudo descomponer como la suma de dos series telescópicas:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty}(c_n - c_{n+1}) + \sum_{n=1}^{\infty}(d_n - d_{n+1})$$

y por supuesto, cada una de estas series telescópicas es convergente implicando así la convergencia de la serie para $\{a_n\}$.

El concepto de *linealidad de un operador* es algo con la que ya nos hemos topado en este curso, en concreto, somos conocedores de la linealidad de la integración:

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g \qquad \text{y} \qquad \int_a^b cf = c\int_a^b f$$

Algo análogo ocurre con las series.

Proposición 15 *Sean $\{a_n\},\{b_n\}\subset\mathbb{R}$ y $c\in\mathbb{R}$. Si las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergen, entonces las series $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ y $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ convergen y además*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \qquad y \qquad \sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Dem. La prueba es una consecuencia directa de la linealidad que posee la convergencia de sucesiones.

Veamos. Sean S_n y S'_n las sumas parciales de las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ respectivamente y sea S_n^+ las sumas parciales de la sucesión $\{a_n+b_n\}$.

Llamemos también

$$a = \lim_{n\to\infty} S_n \qquad \text{y} \qquad b = \lim_{n\to\infty} S'_n$$

Los límites existen puesto que estamos suponiendo convergencia de las series definidas por $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$.

Ahora bien,

$$S_n^+ = \sum_{n=k}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k = S_n + S_n'$$

Y por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} S_n^+ = \lim_{n\to\infty} (S_n + S_n') = \lim_{n\to\infty} S_n + \lim_{n\to\infty} S_n' = a + b$$

Esto demuestra que $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ converge y además

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

Para probar que las series sacan constantes, hay que realizar razonamientos muy similares.

Siguiendo la notación anterior y llamando S_n^c a las sumas parciales de $\{ca_n\}$, se sigue que

$$S_n^c = \sum_{n=k}^{n} ca_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k = cS_n$$

Y por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} S_n^c = \lim_{n\to\infty} cS_n = c \lim_{n\to\infty} S_n$$

Lo que prueba que $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ converge y además

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

■

Es muy importante no perder de vista la hipótesis sobre la convergencia de las series en la Proposición 15. Sin ellas, el resultado no es cierto.

Consideremos por ejemplo la serie telescópica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right]$$

Ya sabemos que ésta converge y además

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right] = 1$$

sin embargo, NO es verdad que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$$

puesto que ninguna de las series del lado derecho es convergente.

Vamos a cerrar la clase con un último ejemplo que reuna todo lo que hemos aprendido el día de hoy.

Ejemplo 16 *Determinar si la serie*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n \log(n^n) \log\left((n+1)^{n+1}\right) - 3^n \log\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n (n+1)\right]}{3^{n+1} \log(n^n) \log\left((n+1)^{n+1}\right)}$$

converge.

Lo primero que tenemos que hacer es mantener la calma ante una expresión tan espantosa. La idea por supuesto es tratar de simplificarla lo más posible hasta aterrizar en algo que sea más amigable.

Noten que la serie debe empezar en $n = 2$ puesto que $\log(n^n)$ se anula en $n = 1$, anulando así a todo el denominador.

Llamemos

$$a_n = \frac{2^n \log(n^n) \log\left((n+1)^{n+1}\right) - 3^n \log\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n (n+1)\right]}{3^{n+1} \log(n^n) \log\left((n+1)^{n+1}\right)}$$

Simplifiquemos un poco:

$$a_n = \frac{2^n}{3^{n+1}} - \frac{1}{3} \cdot \frac{\log\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n (n+1)\right]}{\log(n^n) \log\left((n+1)^{n+1}\right)}$$

De acuerdo a la Proposición 15 podríamos esperar que

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+1}} - \frac{1}{3} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n (n+1)\right]}{\log(n^n) \log\left((n+1)^{n+1}\right)} \tag{5}$$

Pero ojo, para que la igualdad (5) sea válida, primero que tenemos que probar que cada una de las series del lado derecho es convergente. Digamos que lo que se ha logrado hasta aquí es simplificar un poco el problema inicial.

Ahora veamos que en efecto cada serie del lado derecho en (5) es convergente.

La serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+1}}$ esconde una serie geométrica con $r = \frac{2}{3}$ (ver Proposición 6):

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{3^n} = \frac{1}{3} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

La Proposición 6 nos dice que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ es convergente, sin embargo, nosotros tenemos la serie comenzando en $n = 2$. Gracias a la Proposición 7 sabemos que esto no es un problema, la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ es convergente y además:

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\left(\frac{2}{3}\right)^0 + \left(\frac{2}{3}\right)^1\right) \\ &= \frac{1}{1-\frac{2}{3}} - \left(1 + \frac{2}{3}\right) = 3 - \frac{5}{3} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Por lo tanto $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+1}}$ converge y además

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{4}{9} \tag{6}$$

Ahora vamos a ocuparnos de la segunda serie:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n (n+1)\right]}{\log(n^n) \log\left((n+1)^{n+1}\right)}$$

Llamemos

$$b_n = \frac{\log\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n (n+1)\right]}{\log(n^n) \log\left((n+1)^{n+1}\right)}$$

Lo que vamos a hacer es simplificar a b_n utilizando las propiedades que conocemos del logaritmo:

$$\log(ab) = \log(a) + \log(b) \qquad \log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b) \qquad \log\left(a^b\right) = b\log(a)$$

Con estas propiedades el numerador de b_n se transforma en:

$$\log\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n (n+1)\right] = \log\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right] + \log(n+1)$$

$$= n\log\left(\frac{n+1}{n}\right) + \log(n+1) = n\log(n+1) - n\log(n) + \log(n+1)$$

$$= (n+1)\log(n+1) - n\log(n)$$

Ahora el denominador:

$$\log(n^n)\log\left((n+1)^{n+1}\right) = n(n+1)\log(n)\log(n+1)$$

De este modo

$$b_n = \frac{(n+1)\log(n+1) - n\log(n)}{n(n+1)\log(n)\log(n+1)} = \frac{1}{n\log(n)} - \frac{1}{(n+1)\log(n+1)}$$

Esto significa que la serie $\sum_{n=2}^{\infty} b_n$ es telescópica. Dado que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\log(n)} = 0$$

por la Proposición 13 concluimos que la serie $\sum_{n=2}^{\infty} b_n$ converge y además

$$\sum_{n=2}^{\infty} b_n = \frac{1}{2\log(2)} - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)\log(n+1)} = \frac{1}{2\log(2)} \tag{7}$$

Juntando la información obtenida en (6) y (7) ahora sí tenemos derecho a aplicar la Proposición 15 y concluir que la serie $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ converge y

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+1}} - \frac{1}{3}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n (n+1)\right]}{\log(n^n)\log\left((n+1)^{n+1}\right)} = \frac{4}{9} - \frac{1}{6\log(2)}$$

Es decir,

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n\log(n^n)\log\left((n+1)^{n+1}\right) - 3^n\log\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n (n+1)\right]}{3^{n+1}\log(n^n)\log\left((n+1)^{n+1}\right)} = \frac{4}{9} - \frac{1}{6\log(2)}.$$