**Universidad Nacional Autónoma de México**

**Facultad de Ciencias**

**Cálculo II**

Decima extra

Elías López Rivera

elias.lopezr@ciencias.unam.mx

Fecha: 25/04/2025

**Problema**

*Encuentre el siguiente límite*

$$\lim_{x\to 0} \frac{3(\,(\log(x+1)-3x+\frac{3}{2}x^2)^5\,(6\,\mathrm{sen}(x^2)+65x^6-6x^2)^{\frac{5}{6}})}{x^3e^{x^2}\,((1+\mathrm{sen}(x))^x-1+\pi x)(\cos(\mathrm{sen}(x^3))-1)}$$

*Demostración.*
Procederemos a abordar el límite por polinomios de Taylor, por tanto reestringimos $|x|\leq 1$, y comenzamos a acotar:

**I**) $f(x)=\cos(\mathrm{sen}(x^3))$ □

Recordamos que la composición de polinomios de taylor cumple que:

$$P_{g\circ r,n,0}=[\,P_{g,n,0}\circ P_{r,n,0}\,]_n$$

Por tanto tenemos que sea $l(x)=\mathrm{sen}(x^3)$ se cumple que:

$$P_{l,6,0}=\left[x^3-\frac{x^9}{3!}+\frac{x^{15}}{5!}\right]_6=x^3$$

Luego tenemos que:

$$P_{f,6,0}=\left[1-\frac{x^6}{2!}+\frac{x^{12}}{4!}-\frac{x^{18}}{6!}\right]_6=1-\frac{x^6}{2!}$$

Finalmente obtenemos que:

$$f(x)=1-\frac{x^6}{2!}+R_{f,6,0}$$

**II)** $z(x) = sen(x^2)$

Tenemos que:

$$P_{z,6,0} = \left[x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{15}}{5!}\right]_6 = x^2 - \frac{x^6}{3!}$$

Por tanto

$$z(x) = x^2 - \frac{x^6}{3!} + R_{z,6,0}$$

**III)** $w(x) = log(x+1)$

Como reestringimos $-1 < x \leq 1$, tenemos que:

$$w(x) = x + R_{w,1,0}$$

**IV)** $g(x) = e^{xlog(1+sen(x))}$

Definimos $c(x) = log(1 + sen(x))$, como $-1 \leq sen(x) \leq 1$, tenemos que:

$$P_{c,1,0} = [x]_1 = x$$

Luego recordando que el polinomio de grado $n$ de una multiplicación es la multiplicación de los correspondientes polinomios de grado $n$ truncada a solo los grados menores o iguales a $n$,tenemos que

$$P_{xc,1,0} = [x^2]_1 = 0$$

Finalmente usando de nuevo el teorema de composición

$$P_{g,1,0} = [1]_1 = 1$$

Por tanto

$$g(x) = 1 + R_{g,1,0}$$

Ahora reescribimos el límite con **I),II),III),IV)**

$$\lim_{x\to 0} \frac{3(\,(-2x+\frac{3}{2}x^2+R_{w,1,0})^5\,(6x^2-x^6+6R_{z,6,0}+65x^6-6x^2)^{\frac{5}{6}})}{x^3e^{x^2}\,(\pi x+R_{g,1,0})(R_{f,6,0}-\frac{x^6}{2!})}$$

Reduciendo y factorizando el límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{3\left(x^5\left(-2+\frac{3}{2}x+\frac{R_{w,1,0}}{x}\right)^5 x^5\left(6\frac{R_{z,6,0}}{x^6}+64\right)^{\frac{5}{6}}\right)}{x^3e^{x^2}\,x\left(\pi+\frac{R_{g,1,0}}{x}\right)\,x^6\left(\frac{R_{f,6,0}}{x^6}-\frac{1}{2!}\right)}$$

Reduciendo aún más:

$$\lim_{x\to 0} \frac{3\left(\left(-2+\frac{3}{2}x+\frac{R_{w,1,0}}{x}\right)^5\left(6\frac{R_{z,6,0}}{x^6}+64\right)^{\frac{5}{6}}\right)}{e^{x^2}\left(\pi+\frac{R_{g,1,0}}{x}\right)\left(\frac{R_{f,6,0}}{x^6}-\frac{1}{2!}\right)}$$

Usando la propiedad del residuo, y todos los teoremas de límites pertinentes finalmente obtenemos:

$$\lim_{x\to 0} \frac{3(\,(\log(x+1)-3x+\frac{3}{2}x^2)^5\,(6\operatorname{sen}(x^2)+65x^6-6x^2)^{\frac{5}{6}})}{x^3e^{x^2}\,((1+\operatorname{sen}(x))^x-1+\pi x)(\cos(\operatorname{sen}(x^3))-1)} = \frac{(3)(-2)^5(64)^{5/6}}{-\frac{\pi}{2}} = \frac{3(2^{11})}{\pi}$$