

Problema. 1:

Demostrar que T es una transformación lineal y encontrar bases para $N(T)$ y $R(T)$. Calcular la nulidad y el rango de T . Emplear los teoremas adecuados para determinar si T es inyectiva o suprayectiva, donde $T : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_3(\mathbb{R})$ definida por $T(f(x)) = xf(x) + f'(x)$.

Demostración.

Sean $f, g \in P_2(\mathbb{R})$ $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned} T(f(x) + \lambda g(x)) &= x(f(x) + \lambda g(x)) + (f'(x) + \lambda g'(x)) \\ &= xf(x) + f'(x) + \lambda(xg(x) + g'(x)) \\ &= T(f(x)) + \lambda T(g(x)). \end{aligned}$$

Como f, g y λ son arbitrarios, se concluye que T es lineal.

Para encontrar una base de $N(T)$, se resuelve la ecuación $T(f(x)) = 0$:

$$\begin{aligned} xf(x) + f'(x) &= 0 \\ \Rightarrow f'(x) &= -xf(x) \\ \Rightarrow 2ax + b &= -x(ax^2 + bx + c) \\ \Rightarrow 2ax + b &= -ax^3 - bx^2 - cx \\ \Rightarrow 0 &= -ax^3 - bx^2 - (c + 2a)x - b \\ \Rightarrow a = 0, b = 0, c + 2a &= 0 \\ \Rightarrow c &= 0 \end{aligned}$$

Es decir que $f(x) = 0$. Por lo tanto, $N(T) = \{0\}$, de donde se concluye que T es inyectiva.

Por el teorema de la dimensión, se tiene que $\dim(N(T)) + \dim(R(T)) = \dim(P_2(\mathbb{R})) = 3$. Es decir, $\dim(R(T)) = 3$. Por tanto T no es suprayectiva.

Como T es inyectiva, manda conjuntos li en conjuntos li. De modo que, para encontrar una base de $R(T)$, se evalúa T en la base canónica de $P_2(\mathbb{R})$:

$$T(1) = x(1) + 0 = x \tag{0.1}$$

$$T(x) = x(x) + 1 = x^2 + 1 \tag{0.2}$$

$$T(x^2) = x(x^2) + 2x = x^3 + 2x \tag{0.3}$$

$$\tag{0.4}$$

Por lo tanto, $R(T) = \{x, x^2 + 1, x^3 + 2x\}$.

□

Problema. 2:

Sean V y W espacios vectoriales y sea $T : V \rightarrow W$ una transformación lineal inyectiva. Supóngase que S es un subconjunto de V . Entonces S es linealmente independiente si y sólo si $T(S)$ es linealmente independiente.

Demostración.

□

Problema. 3:

Sea $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $T(a_1, a_2) = (a_1 - a_2, a_1, 2a_1 + a_2)$. Sean β la base canónica para \mathbb{R}^2 y $\gamma = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (2, 2, 3)\}$. Calcular $[T]_{\gamma}^{\beta}$.

Demostración.

Evaluemos T en la base canónica de \mathbb{R}^3 :

$$T(1, 0) = (1, 1, 2) = e_1 + e_2 + 2e_3$$

$$T(0, 1) = (-1, 0, 1) = -e_1 + e_3$$

Es decir

$$[T]_{\beta}^E = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Notemos que

$$(1, 1, 0) = e_1 + e_2$$

$$(0, 1, 1) = e_2 + e_3$$

$$(2, 2, 3) = 2e_1 + 2e_2 + 3e_3$$

Es decir la matriz de cambio de base es:

$$[\gamma]_E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} [T]_{\beta}^{\gamma} &= [\gamma]_E [T]_{\beta}^E \\ &= \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

Problema. 4:

Sean V y W espacios vectoriales tales que $\dim(V) = \dim(W)$, y sea $T : V \rightarrow W$ una transformación lineal. Demostrar que existen bases ordenadas β y γ para V y W , respectivamente, tales que $[T]_{\gamma\beta}$ es una matriz diagonal.

Demostración.

□

Problema. 5:

Sean V un espacio vectorial de dimensión finita y $T : V \rightarrow V$ una transformación lineal. Si $r(T) = r(T^2)$, demostrar que $R(T) \cap N(T) = \{0\}$. También ver que $V = R(T) \oplus N(T)$.

Demostración.

□

Problema. 6:

Demostrar que T es una transformación lineal y encontrar bases para $N(T)$ y $R(T)$. Calcular la nulidad y el rango de T . Emplear los teoremas adecuados para determinar si T es inyectiva o suprayectiva, donde $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ está definida por $T(a_1, a_2, a_3) = (a_1 - a_2, 2a_3)$.

Demostración.

Sean $x, y \in \mathbb{R}^3$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned} T(x + \lambda y) &= T(x_1 + \lambda y_1, x_2 + \lambda y_2, x_3 + \lambda y_3) \\ &= (x_1 + \lambda y_1 - x_2 - \lambda y_2, 2x_3 + 2\lambda y_3) \\ &= (x_1 - x_2, 2x_3) + (\lambda y_1 - \lambda y_2, 2\lambda y_3) \\ &= T(x) + \lambda T(y). \end{aligned}$$

Por lo tanto, T es lineal.

Para encontrar una base de $N(T)$, se resuelve la ecuación $T(x) = 0$; $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} (x_1 - x_2, 2x_3) &= (0, 0) \\ \Rightarrow x_1 - x_2 &= 0; \quad x_3 = 0 \\ \Rightarrow x_1 &= x_2 \end{aligned}$$

Es decir $x \in \{a(1, 1, 0) \mid a \in \mathbb{R}\}$. Ahora si $x \in \{a(1, 1, 0) \mid a \in \mathbb{R}\}$, es inmediato que $T(x) = 0$. Por lo tanto, $N(T) = \{a(1, 1, 0) \mid a \in \mathbb{R}\}$ y tiene como base a $\{(1, 1, 0)\}$.

De donde se concluye que $\dim(N(T)) = 1$. Por tanto T no es inyectiva.

Por el teorema de la dimensión, se tiene que $\dim(N(T)) + \dim(R(T)) = \dim(\mathbb{R}^3) = 3$.

Es decir, $\dim(R(T)) = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$. Por tanto T es suprayectiva.

De modo que, una base de $R(T)$ es $\{(1, 0), (0, 1)\}$.

□

Problema. 7:

Sean V y W espacios vectoriales, y sea $T : V \rightarrow W$ lineal. Entonces T es inyectiva si y sólo si T lleva subconjuntos linealmente independientes de V a subconjuntos linealmente independientes de W .

Demostración.

□

Problema. 8:

Sea $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $T(a_1, a_2) = (a_1 - 2a_2, a_2, 3a_1 + 4a_2)$. Sean β la base canónica para \mathbb{R}^2 y $\gamma = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (2, 2, 3)\}$. Calcular $[T]_{\gamma\beta}$.

Demostración.

□

Problema. 9:

Sean V, W y Z espacios vectoriales, $T : V \rightarrow W$ y $U : W \rightarrow Z$ transformaciones lineales. Demostrar que si $U \circ T$ es inyectiva, entonces T es inyectiva. ¿Debe ser U inyectiva también?

Demostración.

□

Problema. 10:

Sean V un espacio vectorial de dimensión finita y $T : V \rightarrow V$ una transformación lineal. Si $T = T^2$, demostrar que $R(T) \cap N(T) = \{0\}$. También ver que $V = \text{Im}(T) \oplus \text{Nuc}(T)$.

Demostración.

□