Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Cálculo I

Complemento examen 1

Elías López Rivera

elias.lopezr@ciencias.unam.mx

Ejercicio 1

Sea $x \in \mathbb{R}$, muestre que existe una única $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n - 1 \leq x < n$

Demostración.

Tomemos $0 \leq x$, por la propiedad arquimediana tenemos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x < n$, definimos el conjunto $U := \{n \in \mathbb{N} : x < n\}$, por la afirmación anterior $U \neq \emptyset$, aplicando el príncipio del buen orden se sigue que U tiene un elemento mínimo n_0:

Si $n_0 = 1$ se sigue que $1 - 1 = 0 \leq x < 1$.

Si $n_0 > 1$ se sigue que $n_0 - 1 > 0$, por tanto $n_0 - 1$ es un número natural de donde se obtiene que $n_0 - 1 \leq x$, pues por construcción n_0 es el elemento mínimo de U, por tanto $n_0 - 1 \leq x < n_0$, donde $n_0 \in \mathbb{Z}$

Ahora sea $x < 0$ se sigue que $-x > 0$, aplicando lo demostrado anteriomente existe n_0 tal que
$n_0 - 1 \leq -x < n_0$, de donde se sigue que $-n_0 + 1 - 1 = -n_0 < x \leq -n_0 + 1$, donde $-n_0 + 1 \in \mathbb{Z}$

Por tanto para todo $x \in \mathbb{R}$, existe $n \in \mathbb{Z}$, tal que $n - 1 \leq x < n$.

Para probar la unicidad de n, suponemos la existencia de $n_1 \neq n$ tal que este cumple las mismas condiciones que n_0, es decir dado $x \in \mathbb{R}$, $n - 1 \leq x < n$, y $n_1 - 1 \leq x < n_1$, de la primera desigualdad se sigue que $x < n \leq x + 1$, de la segunda se sigue que $x < n_1 \leq x + 1 \implies -x > -n_1 \geq -x - 1$ sumando ambas desigualdades se tiene que $-1 < n - n_1 < 1$, como el tanto n como n_1 son enteros $n - n_1$ es entero tambien, el unico entero que cumple estar entre $-1, 1$ es el 0 por tanto $n - n_1 = 0 \implies n = n_1$, una contradicción ya que $n \neq n_1$ por hipótesis, se concluye que n_0 es unico. $\square$