Cálculo Diferencial e Integral II

Métodos de integración

27 de marzo de 2020

Habiendo presentado ya todos los métodos de integración que debíamos conocer, lo que resta del tema es aplicar estas técnicas para trabajar con integrales impropias. En particular estamos interesados en verificar si la integración por partes y el cambio de variable tienen su análogo para las integrales impropias, desde luego, esperamos que así sea.

En clase clasificamos a las integrales impropias en dos tipos, las cuales dependían del dominio de la función:

Integrales impropias del primer tipo

$$i) f : [a, \infty) \to \mathbb{R} \qquad \int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)\,dx$$

$$ii) f : (-\infty, b] \to \mathbb{R} \qquad \int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty} \int_t^b f(x)\,dx$$

$$iii) f : [a, b) \to \mathbb{R} \qquad \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)\,dx$$

$$iv) f : (a, b] \to \mathbb{R} \qquad \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)\,dx$$

Integrales impropias del segundo tipo

$$i) f : (-\infty, \infty) \to \mathbb{R} \qquad \int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^c f(x)\,dx + \int_c^\infty f(x)\,dx$$

$$ii) f : (a, \infty) \to \mathbb{R} \qquad \int_a^\infty f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^\infty f(x)\,dx$$

$$iii) f : (a, b) \to \mathbb{R} \qquad \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

$$iv) f : (-\infty, b) \to \mathbb{R} \qquad \int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \int_{-\infty}^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Las integrales impropias del segundo tipo se descomponen como la suma de dos integrales impropias del primer tipo. Gracias a esto, realmente basta conocer y dominar a las del primer tipo.

El tema pasado aún no teníamos mucha herramienta para calcular integrales impropias, cuando mucho logramos dar un criterio que nos permitía identificar si eran convergentes (y aún esto tenía sus limitantes). Ahora que sabemos integrar, podemos abordarlas con más confianza.

Parémonos en la siguiente situación. Se nos pide calcular

$$\int_a^\infty f(x)\,dx$$

Echando mano de nuestros métodos de integración, decidimos calcular primero

$$\int f(x)\,dx$$

Y digamos que la hemos logrado resolver, es decir, hemos encontrado una primitiva de f, llamémosla F. Esto significa

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

Aplicando la definición de la integral impropia así como el TFC2, obtenemos

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty}\left(F(t) - F(a)\right)$$

Si la integral impropia es convergente, el límite de la derecha debería existir y con esto habríamos logrado calcular el valor de la integral.

Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 1 *Calcular*

$$\int_{-\infty}^{0} e^x \operatorname{sen}(x)\,dx$$

Según la estrategia definida arriba, primero calculamos

$$\int e^x \operatorname{sen}(x)\,dx$$

Esta integral ya fue resuelta en clase usando integración por partes. Recordemos que se obtuvo que

$$\int e^x \operatorname{sen}(x)\,dx = \frac{e^x}{2}\left(\operatorname{sen}(x) - \cos(x)\right) + C$$

Ahora evaluamos la integral impropia

$$\int_{-\infty}^{0} e^x \operatorname{sen}(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^0 e^x \operatorname{sen}(x)\,dx$$

$$= \lim_{t\to-\infty}\left[\frac{e^0}{2}\left(\operatorname{sen}(0) - \cos(0)\right) - \frac{e^t}{2}\left(\operatorname{sen}(t) - \cos(t)\right)\right]$$

$$= -\frac{1}{2} - \lim_{t\to-\infty}\frac{e^t}{2}\left(\operatorname{sen}(t) - \cos(t)\right)$$

Dado que $\lim_{t\to-\infty} e^t = 0$ *y la expresión* $\operatorname{sen}(t) - \cos(t)$ *está acotada, concluimos que*

$$\lim_{t\to-\infty}\frac{e^t}{2}\left(\operatorname{sen}(t) - \cos(t)\right) = 0$$

Y por lo tanto

$$\int_{-\infty}^{0} e^x \operatorname{sen}(x)\,dx = -\frac{1}{2}.$$

Ejemplo 2 *Calcular*

$$\int_0^1 \operatorname{sen}(\log(x))\,dx.$$

Primero encontramos la integral indefinida

$$\int \operatorname{sen}(\log(x))\,dx$$

Para ello usaremos integración por partes. Definimos $f'(x) = 1$ *y* $g(x) = \operatorname{sen}(\log(x))$. *Entonces* $f(x) = x$ *y* $g'(x) = \frac{1}{x}\cos(\log(x))$.

Aplicando la integración por partes nos queda

$$\int \operatorname{sen}(\log(x))\,dx = x \operatorname{sen}(\log(x)) - \int \cos(\log(x))\,dx$$

La nueva integral que nos ha quedado no parece haber mejorado nuestra situación inicial. Sin embargo, podemos volver aplicar integración por partes y obtener

$$\int \cos(\log(x))\,dx = x\cos(\log(x)) + \int \operatorname{sen}(\log(x))\,dx$$

Sustituimos este dato en la integral originial y logramos

$$\int \operatorname{sen}(\log(x))\,dx = x\operatorname{sen}(\log(x)) - x\cos(\log(x)) - \int \operatorname{sen}(\log(x))\,dx$$

De donde

$$\int \operatorname{sen}(\log(x))\,dx = \frac{x}{2}\left(\operatorname{sen}(\log(x)) - \cos(\log(x))\right) + C$$

Regresando a la integral impropia

$$\int_0^1 \operatorname{sen}(\log(x))\,dx = \lim_{t\to 0^+}\int_t^1 \operatorname{sen}(\log(x))\,dx$$

$$= \lim_{t\to 0^+}\left[\frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}(\log(1)) - \cos(\log(1))\right) - \frac{t}{2}\left(\operatorname{sen}(\log(t)) - \cos(\log(t))\right)\right]$$

$$= -\frac{1}{2} - \lim_{t\to 0^+}\frac{t}{2}\left(\operatorname{sen}(\log(t)) - \cos(\log(t))\right) = -\frac{1}{2}$$

El último límite vale 0 *ya que* $\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{t}{2} = 0$ *y* $\operatorname{sen}(\log(t)) - \cos(\log(t))$ *está acotado.*
Por lo tanto

$$\int_0^1 \operatorname{sen}(\log(x))\,dx = -\frac{1}{2}.$$

Parece un poco sospechoso el gran parecido entre las integrales de los Ejemplos 1 y 2 incluyendo el hecho de que hayan dado el mismo valor. La razón de estas similitudes es, que resulta que es posible ir de una a la otra mediante un cambio de variable (aplicado a integrales impropias).

Tomemos la integral del Ejemplo 2

$$\int_0^1 \operatorname{sen}(\log(x))\,dx$$

Proponemos el cambio de variable

$$u = \log(x) \Longrightarrow x = e^u \wedge dx = e^u du$$

Si nos "permitimos" aplicar el Teorema de Cambio de Variable a pesar de tener una integral impropia, entonces podemos cambiar los límites de integración como sigue

$$x = 1 \Longrightarrow u = \log(1) = 0$$

Así mismo

$$x = 0 \Longrightarrow u = \lim_{x\to 0^+}\log(x) = -\infty$$

Y por lo tanto "debería ocurrir" que

$$\int_0^1 \operatorname{sen}(\log(x))\,dx = \int_{-\infty}^0 e^u \operatorname{sen}(u)\,du$$

Es decir, hemos pasado de la integral del Ejemplo 2 a la integral del Ejemplo 1 (sólo que la aplicación del cambio de variable aún no está justificada).

Veamos un último ejemplo antes de hacer más comentarios.

Ejemplo 3 *Calcular*
$$\int_0^1 \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}dx.$$
Una vez más tenemos una integral impropia porque el integrando tiene un problema en $x=1$. Para calcularla primero atacamos la integral indefinida
$$\int \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}dx$$
Haciendo una pequeña modificación al integrando observamos que
$$\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{2x}{\sqrt{1-\left(x^2\right)^2}}$$
Esto nos permite notar que el cambio de variable $u=x^2$ parece adecuado. Con este cambio $du=2xdx$. Sustituyendo
$$\int \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du = \operatorname{arcsen}(u) + C$$
Regresando a la variable x
$$\int \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}dx = \operatorname{arcsen}\left(x^2\right) + C$$
Finalmente evaluamos la integral impropia
$$\int_0^1 \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}dx = \lim_{t\to 1^-}\int_0^t \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}dx$$
$$= \lim_{t\to 1^-}\left[\operatorname{arcsen}\left(t^2\right) - \operatorname{arcsen}(0)\right] = \operatorname{arcsen}(1) = \frac{\pi}{2}$$
Y por lo tanto
$$\int_0^1 \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}dx = \frac{\pi}{2}.$$

Si en el Ejemplo 3 nuevamente nos hubiéramos permitido aplicar el Teorema de Cambio de Variable directamente en la integral impropia, entonces ahorraríamos un poco de tiempo.

Con el cambio $u=x^2$ nuestros límites habrían quedado de la siguiente forma
$$x=0 \Longrightarrow u=0$$
$$x=1 \Longrightarrow u=1$$
Y "en consecuencia"
$$\int_0^1 \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du = \operatorname{arcsen}(1) - \operatorname{arcsen}(0) = \frac{\pi}{2}$$

Después de todos estos sencillos ejemplos ya se va haciendo más fuerte la sensación de que tanto la Integración por Partes como el Teorema de Cambio de Variable permanecerán válidos al aplicarlos a las integrales impropias. Que esto sea así es de mucha ayuda en la práctica porque en particular nos permite simplificar el procedimiento que trazamos al principio de la clase.

Es decir, si por ejemplo se nos pide calcular la integral
$$\int_a^\infty f(x)\,dx$$

entonces no es necesario realizar el paso intermedio de calcular la integral indefinida

$$\int f(x)\,dx$$

Simplemente podemos tratar a la integral impropia $\int_a^\infty f(x)\,dx$ como si fuera una integral definida usual (propia) y manipularla como tal a la hora de aplicar la integración por partes o cambios de variable.

Veamos un ejemplo adicional para afianzar este mensaje. En él vamos a tratar al límite de integración "∞" como si fuera cualquier número.

Ejemplo 4 *Calcular*

$$\int_0^\infty e^{2x-e^x}dx.$$

Vamos a comenzar por proponer el cambio

$$u = e^x \wedge du = e^x dx$$

Con este cambio, los límites de integración se modifican como sigue:

$$x = 0 \Longrightarrow u = 1$$

$$x \to \infty \Longrightarrow u \to \infty$$

Por lo tanto

$$\int_0^\infty e^{2x-e^x}dx = \int_0^\infty e^{-e^x}e^x e^x dx = \int_1^\infty ue^{-u}du$$

Para calcular la nueva integral ahora usaremos integración por partes.

Proponemos $f'(u) = e^{-u}$ *y* $g(u) = u$. *Entonces* $f(u) = -e^{-u}$ *y* $g'(u) = 1$.

Aplicando la integración por partes:

$$\int_1^\infty ue^{-u}du = -ue^{-u}\Big|_1^\infty + \int_1^\infty e^{-u}du$$

La expresión $-ue^{-u}\Big|_1^\infty$ *denota:*

$$-ue^{-u}\Big|_1^\infty = \lim_{t\to\infty}\left(-te^{-t} - \left(-e^{-1}\right)\right) = \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{t}{e^t} + e^{-1}\right) = \frac{1}{e}$$

De este modo

$$\int_1^\infty ue^{-u}du = \frac{1}{e} + \int_1^\infty e^{-u}du = \frac{1}{e} + \left(-e^{-u}\Big|_1^\infty\right)$$
$$= \frac{1}{e} + \lim_{t\to\infty}\left(-e^{-t} + \frac{1}{e}\right) = \frac{2}{e}$$

Y de esta manera concluimos que

$$\int_0^\infty e^{2x-e^x}dx = \frac{2}{e}.$$

(Como ejercicio encuentren una primitiva explícita de la función $f(x) = e^{2x-e^x}$ y corroboren el resultado que acabamos de obtener)

Bien, ya con este último ejemplo hemos reunido las suficientes evidencias para constatar que todo parece funcionar perfectamente con las integrales impropias. Así que ahora vamos a formalizar los teoremas.

Vamos a enunciar la Integración por Partes y el Teorema de Cambio de Variable únicamente para las integrales de la forma $\int_a^\infty f(x)\,dx$, sin embargo, debe quedar claro que para cada integral impropia del primer tipo se tienen los teoremas análogos (y sería un excelente ejercicio que los enunciaran).

Teorema 5 *(Integración por partes) Sean $f, g : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ funciones derivables y tales que sus derivadas $f', g' : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ son integrables en cada intervalo $[a, b]$. Supongamos que existe el límite*

$$\lim_{x\to\infty} f(x)\,g(x)$$

Si la integral $\int_a^\infty f(x)\,g'(x)\,dx$ converge, entonces la integral $\int_a^\infty f'(x)\,g(x)\,dx$ converge y además

$$\int_a^\infty f'(x)\,g(x)\,dx = f(x)\,g(x)\Big|_a^\infty - \int_a^\infty f(x)\,g'(x)\,dx$$

en donde $f(x)\,g(x)\Big|_a^\infty$ denota

$$f(x)\,g(x)\Big|_a^\infty = \lim_{t\to\infty}\left(f(t)\,g(t) - f(a)\,g(a)\right)$$

Dem. La demostración no es más que una ligera modificación a la prueba de la integración por partes para integrales definidas.
Primero notemos que la hipótesis de que $\lim_{x\to\infty} f(x)\,g(x)$ existe, nos está dando la información de que la integral impropia $\int_a^\infty (fg)'(x)\,dx$ converge.
En efecto, si llamamos $L = \lim_{x\to\infty} f(x)\,g(x)$, entonces por el TFC2 se tiene que

$$\int_a^\infty (fg)'(x)\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_a^t (fg)'(x)\,dx = \lim_{t\to\infty}\left[f(t)\,g(t) - f(a)\,g(a)\right] = L - f(a)\,g(a)$$

Ya que sabemos que $\int_a^\infty (fg)'(x)\,dx$ converge, como por hipótesis $\int_a^\infty f(x)\,g'(x)\,dx$ también converge, entonces la diferencia de estas integrales es convergente.
Es decir, la integral

$$\int_a^\infty \left[(fg)'(x) - f(x)\,g'(x)\right]dx$$

converge y además

$$\int_a^\infty \left[(fg)'(x) - f(x)\,g'(x)\right]dx = \int_a^\infty (fg)'(x)\,dx - \int_a^\infty f(x)\,g'(x)\,dx$$

Pero

$$(fg)'(x) - f(x)\,g'(x) = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x) - f(x)\,g'(x) = f'(x)\,g(x)$$

Por lo tanto $\int_a^\infty f'(x)\,g(x)\,dx$ converge y

$$\int_a^\infty f'(x)\,g(x)\,dx = \int_a^\infty (fg)'(x)\,dx - \int_a^\infty f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)\,g(x)\Big|_a^\infty - \int_a^\infty f(x)\,g'(x)\,dx$$

Y esto concluye la prueba. ∎

Es importante destacar que el papel de los productos $f'g$ y fg' es simétrico en el enunciado de la integración por partes, de manera que bajo las hipótesis del Teorema 5 en realidad ocurre que

$$\int_a^{\infty} f(x)\,g'(x)\,dx \text{ converge si y sólo si } \int_a^{\infty} f'(x)\,g(x)\,dx \text{ converge}$$

El Teorema de Cambio de Variable para integrales impropias tiene una formulación un poco más delicada que su versión para integrales propias, sin embargo, la esencia de los teoremas es la misma.

(La prueba tiene detalles importantes, así que hay que leerla con mucho cuidado)

Teorema 6 *(Cambio de Variable) Sea $g : [c,\infty) \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1 y tal que $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = L$, en donde $L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty,\infty\}$. Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo tal que $g(x) \in I$ para toda $x \in [c,\infty)$. Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función continua.*

Si la integral $\int_{g(c)}^{L} f(u)\,du$ converge, entonces la integral $\int_c^{\infty} f(g(x))\,g'(x)\,dx$ converge y además

$$\int_c^{\infty} f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int_{g(c)}^{L} f(u)\,du$$

Dem. Lo más difícil de este teorema es comprender completamente el enunciado. Cuando decimos que $L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty,\infty\}$, naturalmente queremos decir que se está dejando abierta la posibilidad de que

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty \text{ ó } \lim_{x\to\infty} g(x) = -\infty$$

(situación que ya nos ocurrió en el Ejemplo 4 por cierto).
La fórmula de cambio de variable para integrales propias establece que

$$\int_c^{d} f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int_{g(c)}^{g(d)} f(u)\,du$$

Si sustituimos d por ∞ y escribimos **muy informalmente**, la igualdad a la que ahora queremos llegar se puede ver como

$$\int_c^{\infty} f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int_{g(c)}^{g(\infty)} f(u)\,du$$

Y esto permite observar que en efecto las fórmulas guardan la misma esencia. Como obviamente es un abuso usar $g(\infty)$, entonces en lugar de esto escribimos L, donde $L = \lim\limits_{x\to\infty} g(x)$.

Hemos puesto el dominio de f como un intervalo I abstracto porque de acuerdo a las condiciones del teorema, no es posible determinar si I será acotado, no acotado, abierto, cerrado o semiabierto, no podemos saber nada. Lo único que sí es importante asegurar es que la composición $f \circ g$ esté bien definida y por eso hemos exigido que se cumpla que $g(x) \in I$ para toda $x \in [c,\infty)$.

Finalmente, el no saber el valor concreto de L y tener abierta la posibilidad de que valga ∞ o $-\infty$, hace que debamos manejar a la integral $\int_{g(c)}^{L} f(u)\,du$ como si fuera una integral impropia. Por esta razón en las hipótesis del teorema aparece como dato que $\int_{g(c)}^{L} f(u)\,du$ converge.

Ojo: En la práctica es posible que $L \in \mathbb{R}$ y que de todas maneras la integral $\int_{g(c)}^{L} f(u)\,du$ sea impropia.

Bien, con estas precisiones quizá ya ha quedado un poco más claro lo que nos dice este teorema. Así que vamos a la prueba (vayan con calma por favor).

Como $f : I \to \mathbb{R}$ es una función continua, podemos definir $F : I \to \mathbb{R}$ como

$$F(t) = \int_{g(c)}^{t} f(u)\,du$$

La función F es continua (de hecho derivable pero la continuidad es la importante para nuestros propósitos).

La hipótesis de que $\int_{g(c)}^{L} f(u)\,du$ converge nos dice que $\lim\limits_{t\to L} F(t)$ existe y además

$$\lim_{t\to L} F(t) = \lim_{t\to L} \int_{g(c)}^{t} f(u)\,du = \int_{g(c)}^{L} f(u)\,du$$

Por comodidad llamemos $S = \lim\limits_{t\to L} F(t)$. Ahora bien, aprovechando que $\lim\limits_{t\to\infty} g(t) = L$ buscamos que se cumpla que

$$\lim_{t\to\infty} F(g(t)) = S$$

Esto sí va a ocurrir pero no es tan inmediato como podríamos suponerlo. Para probarlo es necesario distinguir dos casos: $L \in I$ ó $L \notin I$.

De nuestros conocimientos de Cálculo I sabríamos que si $L \in I$, entonces por la continuidad de F se tendría que

$$\lim_{t\to\infty} F(g(t)) = F\left(\lim_{t\to\infty} g(t)\right) = F(L) = S$$

El problema es que no sabemos que $L \in I$, en particular porque podría ocurrir que $L = \pm\infty$. Entonces el caso $L \notin I$ debe hacerse con más detalle. De hecho aquí también es necesario distinguir tres nuevos casos: $L = \infty$ ó $L = -\infty$ ó $L \in \mathbb{R}$. Afortunadamente estos tres casos sí son similares. De los tres casos, el más fino es cuando $L \in \mathbb{R}$, así que sólo probaremos éste.

Vamos con cuidado.

Supongamos que $L \in \mathbb{R}$ y $L \notin I$. Queremos demostrar que $\lim\limits_{t\to\infty} F(g(t)) = S$. Lo haremos por definición.

Sea $\varepsilon > 0$. Como sabemos que $\lim\limits_{t\to L} F(t) = S$, existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |t - L| < \delta$, entonces

$$|F(t) - S| < \varepsilon$$

Por otra parte, como $\lim\limits_{t\to\infty} g(t) = L$, existe $M > 0$ tal que si $t > M$, entonces

$$|g(t) - L| < \delta$$

No se nos olvide que estamos suponiendo que $L \notin I$ y que por hipótesis del teorema, $g(t) \in I$ para toda $t \in [c, \infty)$. Esto quiere decir que

$$g(t) \neq L, \forall t \in [c, \infty)$$

Por lo tanto, si $t > M$, entonces podemos asegurar que

$$0 < |g(t) - L| < \delta$$

y en consecuencia

$$|F(g(t)) - S| < \varepsilon$$

De esta manera queda demostrado que $\lim\limits_{t\to\infty} F(g(t)) = S$.

¿Para que nos sirve ese límite? Bueno, si sustituimos el valor explícito de F tenemos

$$S = \lim_{t\to\infty} F(g(t)) = \lim_{t\to\infty} \int_{g(c)}^{g(t)} f(u)\,du$$

Es decir,

$$\lim_{t\to\infty} \int_{g(c)}^{g(t)} f(u)\,du = \int_{g(c)}^{L} f(u)\,du$$

Si ahora aplicamos el Teorema de Cambio de Variable para **integrales propias**, tenemos que para toda $t \in [c, \infty)$

$$\int_{c}^{t} f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int_{g(c)}^{g(t)} f(u)\,du$$

De modo que si tomamos límites de ambos lados concluimos finalmente que

$$\int_c^{\infty} f(g(x))\, g'(x)\, dx = \lim_{t\to\infty} \int_c^{t} f(g(x))\, g'(x)\, dx = \lim_{t\to\infty} \int_{g(c)}^{g(t)} f(u)\, du = \int_{g(c)}^{L} f(u)\, du$$

¡Y esto era lo que queríamos demostrar! Hemos probado de manera conjunta que la integral $\int_c^{\infty} f(g(x))\, g'(x)\, dx$ converge y además

$$\int_c^{\infty} f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int_{g(c)}^{L} f(u)\, du$$

■

Por último nos falta probar ahora la versión impropia de la sustitución inversa. La prueba de este resultado es más tranquila, sin embargo, vale la pena ir desmenuzando un poco las condiciones antes de enunciarlo formalmente.

Recordemos que la sustitución inversa para integrales propias establece que

$$\int_a^{b} f(x)\, dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(u))\, g'(u)\, du$$

en donde $g : [c,d] \to [a,b]$ debe ser una función de clase C^1 en $[c,d]$, biyectiva y cuya derivada nunca es cero y $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ debe ser una función continua.

Ahora supongamos que lo que queremos calcular es una integral de la forma

$$\int_a^{\infty} f(x)\, dx$$

y lo que buscamos hacer es aplicar una sustitución inversa $x = g(u)$. Inspirados en la fórmula (y nuevamente abusando notablemente de la notación) podemos esperar que ocurra

$$\int_a^{\infty} f(x)\, dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(\infty)} f(g(u))\, g'(u)\, du$$

Esto automáticamente nos hace pedir que

$$\lim_{t\to\infty} g^{-1}(x) = L$$

y de esta manera podemos escribir más rigurosamente la fórmula que queremos

$$\int_a^{\infty} f(x)\, dx = \int_{g^{-1}(a)}^{L} f(g(u))\, g'(u)\, du$$

Naturalmente no podemos restringir el valor de L sólo a los números reales. Al igual que en el Teorema de Cambio de Variable, debemos permitir la posibilidad de que $L = \pm\infty$, es decir, $L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, lo que en particular nos dice que muy probablemente la integral $\int_{g^{-1}(a)}^{L} f(g(u))\, g'(u)\, du$ también sea impropia.

Así como sucede en la sustitución inversa para integrales propias, aquí también debemos pedir que g sea una función de clase C^1 en su dominio, biyectiva y de derivada no nula para poder asegurar que existe la inversa y que ésta será de clase C^1. Esta condición implica que g y g^{-1} serán ambas estrictamente crecientes o estrictamente decrecientes, y en consecuencia va a ocurrir que

$$g^{-1}(a) < L \text{ si son crecientes}$$

$$\text{ó } L < g^{-1}(a) \text{ si son decrecientes}$$

Esta información nos permite dar el dominio que debe tener g:

$$g : \left[g^{-1}(a), L\right) \to [a,\infty) \text{ si } g^{-1}(a) < L$$

$$g : \left(L, g^{-1}(a)\right] \to [a,\infty) \text{ si } L < g^{-1}(a)$$

Con todas estas precisiones ahora sí vamos a enunciar la sustitución inversa para integrales impropias.

Teorema 7 *(Sustitución inversa) Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y $g : I \to [a, \infty)$ una función de clase C^1, biyectiva y cuya derivada nunca es cero. Sea $L = \lim_{t\to\infty} g^{-1}(x)$. Sea $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ una función continua.*
Si la integral $\int_{g^{-1}(a)}^{L} f(g(u))\, g'(u)\, du$ converge, entonces $\int_a^\infty f(x)\, dx$ converge y además

$$\int_a^\infty f(x)\, dx = \int_{g^{-1}(a)}^{L} f(g(u))\, g'(u)\, du.$$

Dem. Por supuesto vamos a probar este teorema apoyándonos del Teorema de Cambio de Variable para integrales impropias.

Sólo para enfatizar la parte de los dominos, la hipótesis de que $L = \lim_{t\to\infty} g^{-1}(x)$, implica que el intervalo abstracto I es de la forma $[c, L)$ ó $(L, c]$. Y dado que g es biyección, debe ocurrir que $c = g^{-1}(a)$.

Inspirados en la prueba que dimos en la sustitución inversa para integrales propias (en la clase del 20 de marzo), vamos a definir $h : I \to [a, \infty)$ como

$$h(u) = f(g(u))\, g'(u)$$

Por hipótesis $\int_{g^{-1}(a)}^{L} f(g(u))\, g'(u)\, du$ converge. En términos de h eso significa que la integtral $\int_{g^{-1}(a)}^{L} h(u)\, du$ converge.

Notemos que para toda $x \in [a, \infty)$ se cumple que

$$h\left(g\left(^{-1}(x)\right)\right)\left(g^{-1}\right)'(x) = f\left(g\left(g^{-1}(x)\right)\right) g'\left(g^{-1}(x)\right)\left(g^{-1}\right)'(x)$$

Si sustituimos la derivada de la inversa $\left(g^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{g'(g^{-1}(x))}$ en el lado derecho, nos queda

$$f\left(g\left(g^{-1}(x)\right)\right) g'\left(g^{-1}(x)\right)\left(g^{-1}\right)'(x) = f(x)\, g'\left(g^{-1}(x)\right)\frac{1}{g'\left(g^{-1}(x)\right)} = f(x)$$

Por lo tanto

$$f(x) = h\left(g\left(^{-1}(x)\right)\right)\left(g^{-1}\right)'(x)$$

Y de esta manera

$$\int_a^\infty f(x)\, dx = \int_a^\infty h\left(g\left(^{-1}(x)\right)\right)\left(g^{-1}\right)'(x)\, dx$$

Ahora bien, la integral de la derecha tiene la forma del Teorema de Cambio de Variable para integrales impropias. Dado que la integral $\int_{g^{-1}(a)}^{L} h(u)\, du$ converge, concluimos que la integral $\int_a^\infty h\left(g\left(^{-1}(x)\right)\right)\left(g^{-1}\right)'(x)\, dx$ converge y además

$$\int_a^\infty h\left(g\left(^{-1}(x)\right)\right)\left(g^{-1}\right)'(x)\, dx = \int_{g^{-1}(a)}^{L} h(u)\, du$$

Es decir, $\int_a^\infty f(x)\, dx$ converge y

$$\int_a^\infty f(x)\, dx = \int_a^\infty h\left(g\left(^{-1}(x)\right)\right)\left(g^{-1}\right)'(x)\, dx = \int_{g^{-1}(a)}^{L} h(u)\, du = \int_{g^{-1}(a)}^{L} f(g(u))\, g'(u)\, du$$

Lo que termina la prueba. ■

Ya con la prueba de los tres teoremas anteriores, ahora sí podemos calcular tranquilamente integrales impropias aplicando todos los métodos de integración que hemos aprendido. Así que para concluir la clase veamos dos ejemplos ilustrativos.

Ejemplo 8 *Calcular*

$$\int_0^\infty e^{-2x}\left(x - x^2\right) dx$$

Esta integral puede resolverse tanto por integración por partes como por cambio de variable. Para practicar, vamos a resolverla por ambos métodos.

Primero usaremos ***integración por partes****.*

Vamos a proponer $f'(x) = e^{-2x}$ *y* $g(x) = x - x^2$*. Entonces* $f(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x}$ *y* $g'(x) = 1 - 2x$*.*

Aplicamos la fórmula de integración por partes:

$$\int_0^\infty e^{-2x}\left(x - x^2\right)dx = -\frac{1}{2}e^{-2x}\left(x - x^2\right)\Big|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{1}{2}e^{-2x}\left(1 - 2x\right)dx$$

Ahora,

$$-\frac{1}{2}e^{-2x}\left(x - x^2\right)\Big|_0^\infty = \lim_{t\to\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{-2t}\left(t - t^2\right) - \left(-\frac{1}{2}e^{-2(0)}\left(0 - 0^2\right)\right)\right] = \lim_{t\to\infty} -\frac{t - t^2}{2e^{2t}} = 0$$

Y en consecuencia

$$\int_0^\infty e^{-2x}\left(x - x^2\right)dx = \int_0^\infty \frac{1}{2}e^{-2x}\left(1 - 2x\right)dx$$

Aplicamos una vez más integración por partes a la integral del lado derecho.

Proponemos $f'(x) = e^{-2x}$ *y* $g(x) = \frac{1}{2}(1 - 2x)$*. Entonces* $f(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x}$ *y* $g'(x) = -1$*.*

De donde

$$\int_0^\infty \frac{1}{2}e^{-2x}\left(1 - 2x\right)dx = -\frac{1}{4}e^{-2x}\left(1 - 2x\right)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{1}{2}e^{-2x}dx$$

Simplificamos la expresión $-\frac{1}{4}e^{-2x}\left(1 - 2x\right)\Big|_0^\infty$

$$-\frac{1}{4}e^{-2x}\left(1 - 2x\right)\Big|_0^\infty = \lim_{t\to\infty}\left[-\frac{1}{4}e^{-2t}\left(1 - 2t\right) - \left(-\frac{1}{4}e^{-2(0)}\left(1 - 2\left(0\right)^2\right)\right)\right]$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left[-\frac{1 - 2t}{4e^{2t}} + \frac{1}{4}\right] = \frac{1}{4}$$

Por lo tanto

$$\int_0^\infty \frac{1}{2}e^{-2x}\left(1 - 2x\right)dx = \frac{1}{4} - \int_0^\infty \frac{1}{2}e^{-2x}dx = \frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{4}e^{-2x}\Big|_0^\infty\right)$$

$$= \frac{1}{4} - \left(\lim_{t\to\infty}\left[-\frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{1}{4}\right]\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$$

Y con esto concluimos que

$$\int_0^\infty e^{-2x}\left(x - x^2\right)dx = 0$$

(Un resultado un poco inesperado)

Ahora resolvamos la misma integral por ***cambio de variable****.*

Para ello primero modifiquemos convenientemente el integrando

$$e^{-2x}\left(x - x^2\right) = xe^{-2x}\left(1 - x\right) = xe^{-x}\left(e^{-x} - xe^{-x}\right)$$

De esta manera, si proponemos $u = xe^{-x}$*, entonces* $du = \left(e^{-x} - xe^{-x}\right)dx$*.*

Ahora cambiamos los límites de integración

$$x = 0 \Longrightarrow u = 0$$

$$x \to \infty \Longrightarrow u = \lim_{x\to\infty} xe^{-x} = 0$$

Y noten que nos quedó una verdadera maravilla:

$$\int_0^{\infty} e^{-2x}\left(x - x^2\right)dx = \int_0^{\infty} xe^{-x}\left(e^{-x} - xe^{-x}\right)dx = \int_0^0 udu = 0$$

Y así hemos llegado al mismo resultado que con la integración por partes.

Es muy agradable que tras un cambio de variable se obtengan cosas como $\int_a^a f(x)\,dx$. Si todos nuestros argumentos han sido correctos, no hay porque dudar de haber llegado a algo así, pero como precaución, nunca está de más darle una doble revisada a las cuentas.

Ejemplo 9 *Calcular*

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\cos(x)}dx$$

Esta integral es muy interesante. Noten que de ninguna manera se trata de una integral impropia, ya que el denominador nunca se anula y estamos trabajando con un intervalo acotado.

Ahora bien, ¿cómo la resolveremos? El integrando es "una función racional trigonométrica". Recuerden que hemos dado un cambio muy ingenioso para transformar este tipo de integrales en la integral de una función racional. Este cambio está dado por

$$u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

De acuerdo con las relaciones que obtuvimos la clase pasada sabemos que

$$dx = \tfrac{2}{1+u^2}du$$

$$\cos(x) = \tfrac{1-u^2}{1+u^2}$$

Si lo sustituimos en la expresión $\frac{1}{2+\cos(x)}dx$*, nos queda*

$$\frac{1}{2+\cos(x)}dx = \frac{1}{2+\frac{1-u^2}{1+u^2}}\left(\frac{2}{1+u^2}\right)du$$

$$= \frac{2}{2+2u^2+1-u^2}du = \frac{2}{3+u^2}du$$

Ahora chequemos los límites de integración

$$x = 0 \Longrightarrow u = \tan(0) = 0$$

$$x = 2\pi \Longrightarrow u = \tan(\pi) = 0$$

Por lo tanto

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\cos(x)}dx = \int_0^0 \frac{2}{3+u^2}du = 0$$

Mmm, algo huele muy mal aquí. ¿Cómo es posible que el resultado sea 0 *si el integrando es estrictamente positivo? ¿Qué salio mal?*

(Traten de encontrar la falla antes de continuar)

El problema no es otro más que el dominio de nuestro cambio de variable. En la integral que nos interesa se tiene que $x \in [0, 2\pi]$. De manera que cuando tomamos el cociente $\frac{x}{2}$, entonces

$$\frac{x}{2} \in [0, \pi]$$

y este intervalo tiene un ENORME conflicto cuando aplicamos la tangente, ¡la presencia del valor $\frac{\pi}{2}$!

Recuerden que

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = \infty \qquad \textit{pero} \qquad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = -\infty$$

¿Qué procede ahora? Lo correcto es partir la integral original en π y calcular cada integral por separado:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\cos(x)} = \int_0^{\pi} \frac{1}{2+\cos(x)} dx + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{1}{2+\cos(x)} dx$$

¿Por qué la partimos en π? Porque vamos a volver a hacer el cambio $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ y con estas divisiones ocurre que

$$x \in [0, \pi] \Longrightarrow \tfrac{x}{2} \in \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right]$$

$$x \in [\pi, 2\pi] \Longrightarrow \tfrac{x}{2} \in \left[\tfrac{\pi}{2}, \pi\right]$$

Es decir, separamos el conflicto que tiene la tangente.

Comencemos con la primer integral $\int_0^{\pi} \frac{1}{2+\cos(x)} dx$.

Con el cambio $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, tenemos las siguientes relaciones

$$x = 0 \Longrightarrow u = \tan(0) = 0$$

$$x = \pi \Longrightarrow u = \lim_{x \to \pi^-} \tan\left(\tfrac{x}{2}\right) = \infty$$

Y por lo tanto

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{2+\cos(x)} dx = \int_0^{\infty} \frac{2}{3+u^2} du$$

Y ahora noten que, ¡hemos pasado de una integral que era totalmente propia a una integral impropia!

Calculemos la integral mediante un nuevo cambio de variable

$$u = \sqrt{3}\tan(z)$$

Este es un cambio inverso en donde

$$z = \arctan\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right) \wedge du = \sqrt{3}\sec^2(z)\, dz$$

Los límites de integración vuelven a cambiar:

$$u = 0 \Longrightarrow z = \arctan(0) = 0$$

$$u \to \infty \Longrightarrow z = \lim_{u \to \infty} \arctan\left(\tfrac{u}{\sqrt{3}}\right) = \tfrac{\pi}{2}$$

Sustituimos:

$$\int_0^{\infty} \frac{2}{3+u^2} du = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{3}\sec^2(z)}{3\sec^2(z)} dz = \frac{2}{\sqrt{3}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dz = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

Por lo tanto

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{2+\cos(x)} dx = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

Ahora resolvemos la integral $\int_{\pi}^{2\pi} \frac{1}{2+\cos(x)} dx$.

Con el cambio $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, *tenemos las siguientes relaciones*

$$x = \pi \Longrightarrow u = \lim_{x \to \pi^+} \tan\left(\tfrac{x}{2}\right) = -\infty$$

$$x = 2\pi \Longrightarrow u = \tan(\pi) = 0$$

Y por lo tanto

$$\int_{\pi}^{2\pi} \frac{1}{2+\cos(x)} dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{2}{3+u^2} du$$

Una vez más nos ha quedado una integral impropia.

Calculemos la integral mediante el mismo cambio de variable que usamos hace momento:

$$u = \sqrt{3}\tan(z)$$

Entonces

$$z = \arctan\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right) \wedge du = \sqrt{3}\sec^2(z)\, dz$$

Los nuevos límites de integración son

$$u \to -\infty \Longrightarrow z = \lim_{u \to -\infty} \arctan\left(\tfrac{u}{\sqrt{3}}\right) = -\tfrac{\pi}{2}$$

$$u = 0 \Longrightarrow z = \arctan(0) = 0$$

Sustituimos:

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{2}{3+u^2} du = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\sqrt{3}\sec^2(z)}{3\sec^2(z)} dz = \frac{2}{\sqrt{3}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} 1 dz = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

Por lo tanto

$$\int_{\pi}^{2\pi} \frac{1}{2+\cos(x)} dx = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

Finalmente concluimos que

$$\int_{0}^{2\pi} \frac{1}{2+\cos(x)} dx = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

(Esto ya tiene más sentido que el absurdo 0 *que obtuvimos inicialmente)*

El mensaje del Ejemplo 9 es el mismo en el que hemos insistido todo este tema: Mucho cuidado con los dominios al hacer un cambio de variable.