# Cálculo Diferencial e Integral II

## Series

## 8 de mayo de 2020

La clase pasada tuvimos la oportunidad de darle un sentido a la idea de calcular sumas infinitas. Así mismo, logramos calcular el valor de varias series dentro de nuestros ejemplos. Lo anterior quizá podría habernos generado la idea de que si una sucesión $\{a_n\}$ es sumable, entonces seremos capaces de calcular el valor de

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Desafortunadamente esto no es así (al menos no con las herramientas que este curso nos ofrece). Dentro de nuestros alcances, son muy pocas las series para las cuales podremos encontrar su valor. Digamos que es un fenómeno similar a lo que nos ocurrió con las integrales impropias, en donde si bien nos iba, lográbamos decidir si la integral impropia era convergente.

Ahora bien, al igual que con las integrales impropias, lo que sí podemos hacer es, generar una amplia gama de criterios para decidir si una serie es o no convergente. La clase del día de hoy estará dedicada a ello.

**Nota:** Vale mucho la pena que comparen los criterios de convergencia que vamos a estudiar para series, con aquellos criterios de convergencia que se dieron para integrales impropias (incluyendo los que pusimos en la Tarea 2).

Quisiera aclarar que aunque vamos a dar muchos criterios, todos tendrán una "limitante" en sus hipótesis: vamos a exigir que $a_n \geq 0$. Es decir, vamos a concentrarnos en aquellas sucesiones cuyos términos no van cambiando de signo en el camino. Deberá quedar claro por supuesto, que cada criterio dado para una sucesión que cumpla que $a_n \geq 0$, genera un criterio análogo para sucesiones tales $a_n \leq 0$ (lo único que hay que hacer es considerar a la sucesión $-a_n$).

En próximas clases abordaremos el estudio concreto de aquellas sucesiones que sí van cambiando de signo. Y nos daremos cuenta que éstas son mucho más delicadas de trabajar.

Veamos una primer ganancia que tiene el restringirnos a sucesiones de términos no negativos.

Dada $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$, con $a_n \geq 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$, la correspondiente sucesión de sumas parciales $\{S_n\}$ tiene que ser necesariamente una sucesión creciente.

En efecto, recordemos que para toda $n \in \mathbb{N}$

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$$

Dado que $a_{n+1} \geq 0$, se sigue que

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geq S_n$$

Esto es fantástico para nuestra meta de determinar la convergencia de $\{S_n\}$. Recordarán que una condición necesaria y suficiente para que una sucesión creciente sea convergente, es que esté acotada superiormente. De este modo, hemos aterrizado en nuestro primer criterio de convergencia del día.

**Proposición 1** *Si $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ es una sucesión, con $a_n \geq 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces la sucesión de sumas parciales $\{S_n\}$ es creciente.*

**Teorema 2** *(**Criterio de acotación**) Sea $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ una sucesión, con $a_n \geq 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Si la sucesión de sumas parciales $\{S_n\}$ está acotada superiormente, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.*

El criterio de acotación no es muy útil en la práctica, ya que probar que $\{S_n\}$ está acotada superiormente es esencialmente demostrar su convergencia a pie (y es precisamente lo que no sabemos hacer). Sin embargo, este criterio es la base para demostrar uno nuevo que sí será protagonista en la práctica.

Para llegar a él, primero hagamos una observación técnica importante. En general, si tenemos una sucesión creciente $\{b_n\}$ y ésta converge, entonces sabemos que

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \{b_n\}$$

Es decir, toda sucesión creciente y acotada superiormente converge a su supremo.

Si trasladamos lo anterior a las series, tenemos que si $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ es una sucesión, con $a_n \geq 0$, para la cual $\{S_n\}$ converge, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \{S_n\}$$

Lo que en particular nos dice que el valor de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una cota superior de todas las sumas parciales de $\{a_n\}$.

Y en consecuencia, para toda $n \in \mathbb{N}$

$$S_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

**Teorema 3** *(**Criterio de comparación**) Sean $\{a_n\}, \{b_n\} \subset \mathbb{R}$ dos sucesiones tales que para toda $n \in \mathbb{N}$,*

$$0 \leq a_n \leq b_n$$

*Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.*

**Dem.** La idea es aplicar el criterio de acotación a la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Tenemos derecho a usarlo ya que $a_n \geq 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Llamemos $S_n$ y $\tilde{S}_n$ a las correspondientes sumas parciales de $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ respectivamente.

Dado que $b_n \geq 0$ y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, sabemos que

$$\tilde{S}_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

La hipótesis $a_n \leq b_n$ nos permite concluir que

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \leq \sum_{k=1}^{n} b_k = \tilde{S}_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

Lo que demuestra que las sumas parciales $\{S_n\}$ están acotadas superiormente por $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Por lo tanto, por el criterio de acotación, concluimos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. ■

El criterio de comparación sí es muy poderoso. Veamos algunos ejemplos de su aplicación.

**Ejemplo 4** *Determinar si la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2}{n^3+1}$$

*es convergente.*

*Llamemos*

$$a_n = \frac{2n^2}{n^3+1}$$

*Una buena estrategia para encontrar una sucesión con la cual comparar a* $\{a_n\}$*, es analizar con cuidado el comportamiento que tiene* $a_n$ *para* $n$ *muy grande.*

*En nuestro caso, conforme* $n$ *crece, se tiene que el* $+1$ *del denominador se vuelve despreciable cuantitativamente hablando:*

$$\frac{2n^2}{n^3+1} \approx \frac{2n^2}{n^3} = \frac{2}{n}$$

*Esto es perfecto, porque nos trae a la mente a la serie armónica*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

*la cual sabemos que es divergente. Y así podemos intuir que la serie que queremos también será divergente y además, una buena sucesión con la cual comparar es precisamente* $\left\{\frac{1}{n}\right\}$.

*¿Qué relación de orden hay entre* $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ *y* $\left\{\frac{2n^2}{n^3+1}\right\}$*?*

*Justamente la relación deseada:*

$$1 \leq n^3 \quad \Rightarrow \quad n^3+1 \leq 2n^3 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n} \leq \frac{2n^2}{n^3+1}$$

*es decir,*

$$\frac{1}{n} \leq \frac{2n^2}{n^3+1} \tag{1}$$

*¿Por qué esta es la desigualdad deseada?*

*Hemos intuido que la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2}{n^3+1}$ *será divergente. Si procedemos por contradicción y suponemos que* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2}{n^3+1}$ *en realidad converge, entonces el criterio de comparación aplicado a la desigualdad (1) nos diría que la serie armónica es convergente. Lo cual ya sabemos que no es cierto.*

*Por lo tanto, concluimos que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2}{n^3+1}$$

*diverge.*

El mensaje que nos da el Ejemplo 4 es muy valioso. El ejemplo nos ha mostrado que el criterio de comparación, que está enunciado como un criterio de convergencia, también puede ser usado como un criterio de divergencia. Vamos a enunciarlo para no olvidarlo.

**Corolario 5** *(Contrapuesta del criterio de comparación) Sean* $\{a_n\}, \{b_n\} \subset \mathbb{R}$ *dos sucesiones tales que para toda* $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq a_n \leq b_n$$

*Si la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverge, entonces la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *diverge.*

Continuemos con los ejemplos.

**Ejemplo 6** *Determinar si la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

*es convergente.*

*La expresión* $\frac{1}{n^2}$ *nos hace recordar a otra serie que estudiamos la clase pasada:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

*Ya sabemos que esta serie es convergente. Lo interesante es que las sucesiones que definen a ambas series son muy parecidas, por lo que podríamos esperar que la nueva serie que tenemos enfrente también sea convergente.*

*Ahora bien, ¿qué relación de orden hay entre ellas?*

*Una muy desafortunada:*

$$\frac{1}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n^2}$$

*Bajo esta relación, el criterio de comparación NO es aplicable, puesto que la sucesión que debería dominar quedó por debajo. Sin embargo, sólo hace falta hacer un pequeño truco técnico para arreglar este problema.*

*Está claro que para toda* $n \in \mathbb{N}$

$$n \leq n^2$$

*Esto implica que*

$$n^2 + n \leq n^2 + n^2$$

*es decir,*

$$n(n+1) \leq 2n^2$$

*Y por lo tanto*

$$0 \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{2}{n(n+1)}$$

*Como la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ *converge, entonces por la "linealidad" de las series, sabemos que* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)}$ *también converge y además*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

*De manera que el criterio de comparación nos dice que la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

*converge.*

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ es el perfecto ejemplo de una suma infinita para la cual estamos muy lejos de poder determinar su valor. Por lo menos nos queda el consuelo de saber que es convergente. Con herramienta de Cálculo IV o de Variable Compleja es posible demostrar que su sorprendente valor es:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

El valor de la serie es un resultado inesperado si tomamos en cuenta que la hemos comparado con una serie que en apariencia no se ve tan diferente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,(n+1)} = 1$$

**Ejemplo 7** *Determinar si la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1 + \cos^2(n^3)}$$

*es convergente.*

*Esta serie se ve un poco más complicada, tanto por la presencia del* $-1$ *como de* $\cos^2\left(n^3\right)$*. Sin embargo, podemos apreciar que si no tuviéramos a estos términos, entonces estaríamos en la presencia de una serie geométrica:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

*la cual ya sabemos que es convergente. Esta observación es la que nos permite intuir que muy probablemente la serie que queremos será convergente y que además un buen candidato para aplicar el criterio de comparación es la sucesión* $\{1/2^n\}$.

*¿Qué relación de orden hay entre las sucesiones*

$$\frac{1}{2^n - 1 + \cos^2(n^3)} \quad y \quad \frac{1}{2^n}?$$

*Una vez más, una muy desafortunada:*

$$\frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2^n - 1 + \cos^2(n^3)}$$

*(*para corroborarlo sólo tomen recíprocos y recuerden que $\cos^2(x) \leq 1$*)*

*De modo que nuevamente habrá que echar algo de ingenio para solucionar este problema.*

*Esta vez lo que vamos a usar es que para toda* $n \in \mathbb{N}$

$$1 \leq 2^{n-1}$$

*Equivalentemente*

$$-2^{n-1} \leq -1$$

*De este forma:*

$$2^n - 2^{n-1} \leq 2^n - 1$$

*Simplificando el lado izquierdo obtenemos*

$$2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1}(2-1) = 2^{n-1}$$

*de donde:*

$$2^{n-1} \leq 2^n - 1$$

*Finalmente, dado que* $\cos^2\left(n^3\right) \geq 0$*, se sigue que*

$$2^{n-1} \leq 2^n - 1 \leq 2^n - 1 + \cos^2\left(n^3\right)$$

*Y por tanto*

$$0 \leq \frac{1}{2^n - 1 + \cos^2(n^3)} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

*Ahora sí, dado que la serie geométrica* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ *converge, entonces la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1 + \cos^2(n^3)}$$

*también converge.*

Hay un par de detalles que podemos puntualizar de los Ejemplos 6 y 7. El primero es, que el éxito o fracaso que tengamos al usar el criterio de comparación depende en gran medida de nuestro ingenio para encontrar una sucesión adecuada con la cual comparar. Ingenio que como siempre, se obtendrá con la práctica. Por supuesto, el punto de partida para este tipo de problemas debe ser, contar con un amplio repertorio de series para las cuales ya sepamos su convergencia o divergencia.

El segundo detalle que podemos notar es que en ambos ejemplos encontramos, en abstracto, a una sucesión $\{b_n\}$ para la cual sabíamos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

era convergente, sin embargo, no ocurría la deseada relación de orden

$$a_n \leq b_n$$

sino que nos quedó todo lo contrario

$$b_n \leq a_n$$

Ahora bien, el detalle técnico a apreciar es que dicha sucesión $\{b_n\}$ pudo ser intuida "fácilmente" a partir de la expresión que tenía $\{a_n\}$ y, aunque no logramos la desigualdad de orden deseada, sí nos fue posible encontrar una constante $c \in \mathbb{R}$ para la cual ocurriera que

$$a_n \leq c b_n$$

y con ello concluir la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

En el Ejemplo 6 obtuvimos

$$\frac{1}{n^2} \leq \frac{2}{n(n+1)}$$

mientras que en el Ejemplo 7 obtuvimos

$$\frac{1}{2^n - 1 + \cos^2(n^3)} \leq \frac{1}{2^{n-1}} = 2\left(\frac{1}{2^n}\right)$$

es decir, en ambos casos nos apoyamos de la constante $c = 2$.

Esta observación técnica de encontrar una constante de apoyo $c \in \mathbb{R}$ puede ser de mucha utilidad en la práctica. Y es un "truco" tan valioso que da origen a nuestro siguiente criterio de convergencia.

**Teorema 8** ***(Criterio de comparación con límites)*** *Sean* $\{a_n\}, \{b_n\} \subset \mathbb{R}$ *dos sucesiones tales que para toda* $n \in \mathbb{N}$, $0 < a_n$ *y* $0 < b_n$.
*Si*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c, \text{ con } c \neq 0$$

*entonces la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *converge si y sólo si la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge.*

**Dem.** $\Rightarrow\rfloor$ Supongamos primero que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge.

La idea es llevar estas condiciones a una adaptación del criterio de comparación.

El hecho de que ambas sucesiones sean positivas nos dice algo sobre el signo de $c$:

$$c = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \geq 0$$

Dado que por hipótesis $c \neq 0$, entonces $c > 0$. Así que vamos a aplicar la definición del límite al valor particular

$$\varepsilon = c$$

Esto quiere decir que existe un índice $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, entonces

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - c \right| < c$$

Abriendo el valor absoluto:

$$-c < \frac{a_n}{b_n} - c < c$$

o equivalentemente

$$0 < a_n < 2cb_n \tag{2}$$

La desigualdad (2) ya tiene cara del criterio de comparación, con el detalle técnico de que hay una constante de apoyo de por medio como lo habíamos comentado. Su presencia desde luego que no nos afecta.

Por la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, se sigue que $\sum_{n=1}^{\infty} 2cb_n$ converge y por tanto $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

**Observación:** *Con todo rigor, dado que la desigualdad (2) es válida para $n \geq N$, el criterio de comparación nos permitiría concluir que la serie $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ converge, sin embargo, la clase pasada puntualizamos que esto implica la convergencia de la serie completa $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.*

$\Leftarrow\rfloor$ La implicación contraria sólo requiere un truco muy fino para su prueba.

Supongamos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

El hecho de que $0 < a_n$ y $c \neq 0$ nos permite tomar el límite recíproco:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{a_n}{b_n}} = \frac{1}{c} \neq 0$$

Pero entonces hemos caído exactamente en las condiciones de la implicación de ida $\Rightarrow\rfloor$.

Dado que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces por la $\Rightarrow\rfloor$ concluimos que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge. ■

En la prueba de la primera implicación del Teorema 8 quizá hemos dado a entender que la hipótesis de $c \neq 0$ es necesaria, sin embargo, no lo es. Noten que la prueba bien pudo haber continuado su curso si hubiéramos aplicado la definición del límite a cualquier valor de $\varepsilon > 0$.

Con esto estamos diciendo que en realidad es cierto que si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$$

y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. Lo que ya no es cierto es el recíproco, para esto sí es necesaria la hipótesis de $c \neq 0$.

Piensen por ejemplo en las sucesiones

$$a_n = \frac{1}{n^2} \quad \text{y} \quad b_n = \frac{1}{n}$$

Si hacemos el límite del cociente:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

pero $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge mientras que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge.

La utilidad práctica que tiene el criterio de comparación con límites es que nos permite ahorrarnos ciertas acrobacias que tendríamos que llevar a cabo si quisiéramos utilizar el criterio de comparación sin límites.

Retomando el Ejemplo 6, si consideramos a las sucesiones

$$a_n = \frac{1}{n^2} \quad \text{y} \quad b_n = \frac{1}{n\,(n+1)}$$

y tomamos el límite del cociente

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\,(n+1)}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$$

entonces el criterio de comparación con límites nos dice que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge si y sólo si $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ converge. Dado que sí sabemos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ converge, entonces ya podemos concluir que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ también converge. (¿qué solución les parece más simple?)

Algo que refleja la prueba del Teorema 8 es que si el *criterio de comparación con límite* funciona, entonces también funciona el *criterio de comparación*. En términos de estrategia esto se puede interpretar como que siempre conviene intentar usar el criterio de comparación con límite y si éste no funciona, entonces usar el criterio de comparación. De esta manera podremos evitar algunos trucos rebuscados para acotar sucesiones.

Veamos un par de ejemplos más del uso del criterio de comparación con límites.

**Ejemplo 9** *Determinar si la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^5 + 15n^3 - 17}{n^7 + 91n^6 - n - 78}$$

*converge.*

*Llamemos*

$$a_n = \frac{2n^5 + 15n^3 - 17}{n^7 + 91n^6 - n - 78}$$

*Como lo mencionamos en el Ejemplo 4, ante este tipo de expresiones un primer paso que conviene dar es analizar el comportamiento que tiene la sucesión $a_n$ para $n \in \mathbb{N}$ grande.*

*En este caso podemos observar que los términos de mayor grado en el numerador y denominador serán los dominantes. De modo que podemos intuir que:*

$$\frac{2n^5 + 15n^3 - 17}{n^7 + 91n^6 - n - 78} \approx \frac{2n^5}{n^7} = \frac{2}{n^2}$$

*Lo que sugiere que debemos comparar a la sucesión $a_n$ con la sucesión*

$$b_n = \frac{1}{n^2}$$

*(*¿podrían dar alguna relación de orden entre estas sucesiones?*)*

*Si calculamos el límite del cociente obtenemos:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(2n^5 + 15n^3 - 17\right)}{n^7 + 91n^6 - n - 78} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^7 + 15n^5 - 17n^2}{n^7 + 91n^6 - n - 78} = 2$$

*Por lo tanto, por el criterio de comparación con límites y dado que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, concluimos que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^5 + 15n^3 - 17}{n^7 + 91n^6 - n - 78}$$

*converge.*

**Ejemplo 10** *Determinar si la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$$

*converge.*

*En ocasiones las comparaciones buscadas están escondidas mediante algunos límites famosos. En nuestro ejemplo, la serie en apariencia complicada, en realidad es muy sencilla si recordamos el límite*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1$$

*Este límite es la clave porque nos permite hacer la siguiente comparación con límite:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1$$

*Como la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *diverge, concluimos que la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$ *también diverge.*

Vale la pena notar en el Ejemplo 10 que la relación de orden que hay entre las sucesiones involucradas es la indeseada:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$$

De manera que habríamos tenido que utilizar algún artificio rebuscado si hubiéramos querido usar el criterio de comparación. Artificio que necesariamente habría tenido que pasar por el hecho de que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1$$

haciéndonos trabajar de más teniendo a nuestra disposición el criterio con límites.

Con todos estos ejemplos quizá se sienta que estamos demeritando el potencial que tiene el criterio de comparación, siendo que éste es en realidad muy poderoso. Así que trataremos de reivindicarlo a nivel teórico mostrando que es la clave para la prueba de los criterios de convergencia que nos faltan.

**Teorema 11** ***(Criterio del cociente)*** *Sean* $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ *una sucesión tal que* $a_n > 0$ *para toda* $n \in \mathbb{N}$. *Si*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r, \text{ con } r \neq 1$$

*entonces se cumple lo siguiente:*

*1) Si* $r < 1$, *entonces la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge.*

*2) Si* $r > 1$, *entonces la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverge.*

**Dem.** 1) Supongamos que $r < 1$.

La estrategia para este caso es tratar de comparar a la sucesión $\{a_n\}$ con una sucesión geométrica adecuada.

Démonos la oportunidad de actuar ingenuamente para tratar de encontrar a dicha sucesión geométrica.

"Supongamos" que la hipótesis del límite se puede traducir en una igualdad literal. Es decir, supongamos que para toda $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = r$$

Equivalentemente:

$$a_{n+1} = ra_n$$

Esta relación nos permite viajar desde el término $a_n$ hasta el término $a_1$ de manera recursiva. Veamos algunos pasos para ver de qué se trata:

$$a_2 = ra_1$$
$$a_3 = ra_2 = r\left(ra_1\right) = r^2 a_1$$
$$a_4 = ra_3 = r\left(r^2 a_1\right) = r^3 a_1$$
$$a_5 = ra_4 = r\left(r^3 a_1\right) = r^4 a_1$$

Todo indica que se está cumpliendo la relación

$$a_{n+1} = r^n a_1$$

y de esta manera ha aparecido una sucesión geométrica $\{r^n\}$ (multiplicada por una constante de apoyo: $a_1$).

Estas ideas no forman parte de la prueba rigurosa, pero sí nos sirven para generar algo de intuición en lo que estamos buscando.

Sería bastante inocente de nuestra parte creer que va a ocurrir la igualdad

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = r$$

sin embargo, para efectos del criterio de comparación, nos bastaría con demostrar que podemos encontrar una constante $0 < s < 1$ para la cual se dé una desigualdad del tipo:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq s$$

Ya que de este modo

$$a_{n+1} \leq sa_n$$

y con ello podríamos emplear el razonamiento recursivo que hicimos hace un momento.

Aquí entra la hipótesis sobre límite junto con el hecho de que $r < 1$.

Tomemos $r < s < 1$.

Dado que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r < s$$

entonces necesariamente habrá un momento a partir del cual los cocientes $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ serán menores que este número $s$.

Hagamos esto con rigor. Como $r < s$, entonces podemos aplicar la definición del límite al valor particular

$$\varepsilon = s - r > 0$$

Esto significa que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, entonces

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - r\right| < s - r$$

Abriendo el valor absoluto:

$$-\left(s - r\right) < \frac{a_{n+1}}{a_n} - r < s - r$$

La única desigualdad que nos interesa es la de la derecha,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} - r < s - r$$

De donde,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < s$$

En consecuencia, hemos demostrado que para toda $n \geq N$

$$a_{n+1} < sa_n \tag{3}$$

La idea ahora es aplicar la estrategia recursiva que usamos al inicio, pero hay que tener el debido cuidado con los índices que estamos manejando porque la desigualdad en (3) sólo es válida para $n \geq N$.

En este caso tenemos que para $n \geq N$, podemos viajar del término $a_n$ al término $a_N$ mediante la relación:

$$a_n \leq s^{n-N} a_N$$

(*Dejamos como ejercicio la verificación por inducción de esta desigualdad*).

Bien, como $0 < s < 1$, entonces sabemos que la serie geométrica

$$\sum_{n=N}^{\infty} s^n$$

converge. (*¿por qué $s$ es mayor que 0?*)

Por lo tanto la serie

$$\sum_{n=N}^{\infty} s^{n-N} a_N = s^{-N} a_N \sum_{n=N}^{\infty} s^n$$

también converge.

Por el criterio de comparación concluimos que

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n$$

converge y con ello la serie completa $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

Esto concluye la prueba del inciso 1).

2) Ahora supongamos que $r > 1$.

La prueba en este caso es un poco más corta y ya podemos inspirarnos de las ideas que seguimos en el inciso 1).

Comencemos tomando $1 < s < r$ y apliquemos la definición del límite al valor particular

$$\varepsilon = r - s > 0$$

Esto significa que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, entonces

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - r \right| < r - s$$

Abriendo el valor absoluto:

$$-(r-s) < \frac{a_{n+1}}{a_n} - r < r - s$$

Esta vez la única desigualdad que nos interesa es la de la izquierda,

$$s - r < \frac{a_{n+1}}{a_n} - r$$

De donde

$$1 < s < \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Es decir, que para toda $n \geq N$

$$a_n < a_{n+1} \tag{4}$$

La desigualdad en (4) es muy interesante porque nos está diciendo que a partir de un momento, la sucesión $\{a_n\}$ se vuelve estrictamente creciente. Este hecho junto con la hipótesis de que todos los términos de la sucesión $\{a_n\}$ son positivos, nos dice que NO es posible que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Pues en el mejor de los casos va a ocurrir que

$$\lim_{n\to\infty} a_n \geq a_N > 0$$

(el peor de los casos es que el límite ni siquiera exista).

Dado que una condición necesaria para que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sea convergente es que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

concluimos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge. ■

El criterio del cociente probablemente es el más popular de todos para determinar la convergencia de la series porque es un criterio que permite abordar algunas sucesiones más complicadas, particularmente aquellas en donde aparecen números factoriales.

**Ejemplo 12** *Determinar si la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

*converge.*

*Si definimos*

$$a_n = \frac{1}{n!}$$

*entonces el criterio del cociente nos pide calcular el límite:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

*De acuerdo al criterio del cociente, concluimos que la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ *converge (¡así de sencillo!).*

Más adelante demostraremos que la serie del Ejemplo 12 en realidad converge ni más ni menos que al famoso número $e$, es decir,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$$

En nuestro siguiente ejemplo vamos a generalizar lo logrado en el Ejemplo 12.

**Ejemplo 13** *Para $a > 0$, determinar si la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$$

*converge.*

*Definimos*

$$a_n = \frac{a^n}{n!}$$

*Calculamos el límite del cociente:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{a^n}{n!}} \lim_{n\to\infty} \frac{a^{n+1} n!}{a^n\,(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{n+1} = 0$$

*Por lo tanto, de acuerdo al criterio del cociente, la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$ *converge.*

Generalizando el valor de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$, también demostraremos más adelante que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!} = e^a$$

(*¿Pueden intuir por qué el valor de la serie es este?*)

El Ejemplo 13 nos permite pagar una deuda que dejamos el tema anterior. La Clase del lunes 27 de abril, en el Lema 4 anunciamos que para toda $a > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$$

Con la herramienta que nos brindan las series, este es un resultado inmediato.

Como ya hemos demostrado que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$$

converge, entonces necesariamente la sucesión que la define debe converger a 0, es decir,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$$

¡Y listo!

Esta técnica es muy socorrida para demostrar la convergencia de muchas sucesiones que en apariencia se ven muy complejas. Es decir, muchas veces es más sencillo demostrar que una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge que demostrar que $a_n \to 0$ de manera directa.

El criterio del cociente es una verdadera maravilla, sin embargo, también hay que tener buena intuición para identificar cuándo vale la pena usarlo (no es un método infalible).

Consideren la serie que estudiamos en el Ejemplo 6:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

El criterio de comparación nos ofreció una prueba no tan complicada de que esta serie converge.

¿Qué pasaría si usamos el criterio del cociente?

Llamando

$$a_n = \frac{1}{n^2}$$

tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$$

Ups. Hemos caído exactamente en la condición en donde el criterio del cociente NO ofrece respuesta.

¿Por qué el criterio del cociente no dice nada cuando

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1?$$

La respuesta es muy simple. Existen tanto sucesiones sumables como no sumables para las cuales el límite del cociente vale 1.

La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

ya nos dio una muestra de una serie convergente en donde el límite del cociente vale 1.

La serie armónica, nos da el caso divergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

ya que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

De manera que siempre que nos topemos con la situación de que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$$

necesitaremos buscar un método alternativo para determinar la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

**Para que no se nos olvide:** *Si* $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ *es una sucesión tal que* $a_n > 0$ *para toda* $n \in N$*, y*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$$

*entonces el criterio del cociente NO es concluyente.*

Demos un ejemplo más de cómo aplicar el criterio del cociente.

**Ejemplo 14** *Determinar si la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{3^n (n!)^2}$$

*converge.*

*Como ya lo hemos mencionado, cuando en nuestra serie aparecen números factoriales, el criterio del cociente puede ser un buen camino para abordar el problema.*

*Llamemos*

$$a_n = \frac{(2n)!}{3^n (n!)^2}$$

*Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(2n+2)!}{3^{n+1}((n+1)!)^2}}{\frac{(2n)!}{3^n (n!)^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n (n!)^2 (2n+2)!}{3^{n+1} ((n+1)!)^2 (2n)!}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2 (2n+1)(2n+2)(2n)!}{3 (n!)^2 (n+1)^2 (2n)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)(2n+2)}{3(n+1)^2} = \frac{4}{3}$$

*Es decir,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{4}{3}$$

*De acuerdo al criterio del cociente, como* $\frac{4}{3} > 1$*, entonces la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{3^n (n!)^2}$ *diverge.*

Para cerrar la clase de hoy, vamos a ver un criterio adicional que está íntimamente relacionado con el criterio del cociente. Este es conocido como el *criterio de la raíz*, el cual en cierto sentido es una generalización del criterio del cociente. Y es que resulta que si el criterio del cociente funciona, entonces también el criterio de la raíz funciona, sin embargo, lo recíproco no es cierto. Es decir, habrá situaciones en las que el criterio de la raíz nos dé la solución mientras que el criterio del cociente nos deje en la incertidumbre.

**Teorema 15** *(Criterio de la raíz) Sean $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ una sucesión tal que $a_n \geq 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Si*

$$\lim_{n\to\infty} (a_n)^{1/n} = r, \text{ con } r \neq 1$$

*entonces se cumple lo siguiente:*

*1) Si $r < 1$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.*

*2) Si $r > 1$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.*

**Dem.** Como se puede apreciar en la conclusión del teorema, el criterio de la raíz tiene exactamente la misma naturaleza que el criterio del cociente.

Una pequeña diferencia (aunque no muy sustancial) que podemos notar entre el criterio de la raíz y el del cociente es que aquí no hace falta restringirnos a sucesiones de términos estrictamente positivos.

El parecido entre los criterios es tal, que hasta sus pruebas son prácticamente una calca.

1) Supongamos que $r < 1$.

Tomemos $r < s < 1$.

Dado que

$$\lim_{n\to\infty} (a_n)^{1/n} = r < s$$

entonces podemos aplicar la definición del límite al valor particular

$$\varepsilon = s - r > 0$$

Esto significa que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, entonces

$$\left|(a_n)^{1/n} - r\right| < s - r$$

Abriendo el valor absoluto:

$$-(s-r) < (a_n)^{1/n} - r < s - r$$

La única desigualdad que nos interesa es la de la derecha,

$$(a_n)^{1/n} - r < s - r$$

De donde,

$$(a_n)^{1/n} < s$$

Es decir, hemos demostrado que para toda $n \geq N$

$$a_n < s^n$$

Como $0 < s < 1$, entonces sabemos que la serie geométrica

$$\sum_{n=N}^{\infty} s^n$$

converge.

(*Aquí también cabe la pregunta: ¿por qué $s$ es mayor que $0$?*)

Por lo tanto, por el criterio de comparación concluimos que

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n$$

converge y con ello la serie completa $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

Esto concluye la prueba del inciso 1).

2) Supongamos que $r > 1$.

Comencemos tomando $1 < s < r$ y apliquemos la definición del límite al valor particular

$$\varepsilon = r - s > 0$$

Esto significa que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, entonces

$$\left| (a_n)^{1/n} - r \right| < r - s$$

Abriendo el valor absoluto:

$$-(r - s) < (a_n)^{1/n} - r < r - s$$

Ahora la única desigualdad que nos interesa es la de la izquierda,

$$s - r < (a_n)^{1/n} - r$$

De donde

$$1 < s < (a_n)^{1/n}$$

Es decir, que para toda $n \geq N$

$$1 < a_n$$

Este hecho necesariamente implica que no es posible que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

ya que, en el supuesto de que dicho límite exista, se tendría que

$$\lim_{n\to\infty} a_n \geq 1$$

De esta manera concluimos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge. ■

**Nota importante:** *Al igual que ocurre con el criterio del cociente, el criterio de la raíz NO es concluyente cuando*

$$\lim_{n\to\infty} (a_n)^{1/n} = 1$$

Un límite importante (que hay que tener presente) es

$$\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1 \tag{5}$$

Para quien no lo haya visto antes, recomiendo que lo intente calcular usando su definición a través de la exponencial:

$$n^{1/n} = e^{\log(n)/n}$$

Apoyándonos del límite en (5), si quisiéramos usar el criterio de la raíz para la serie armónica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

se sigue que

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{1/n}} = 1$$

Es decir, el criterio de la raíz no logra identificar que la serie armónica es divergente.

Así mismo
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)^{1/n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{1/n}}\cdot\frac{1}{n^{1/n}}=1$$
por lo tanto, el criterio de la raíz no logra identificar que la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$
es convergente.

Veamos ejemplos en donde el criterio de la raíz sí funciona.

**Ejemplo 16** *Determinar si la serie*
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^7+n^3-1}{4n^7+15n^4-16n^2}\right)^n$$
*converge.*

*Llamemos*
$$a_n=\left(\frac{2n^7+n^3-1}{4n^7+15n^4-16n^2}\right)^n$$
*(*¿Se les ocurre aplicar algún criterio distinto al de la raíz?*)*

*La convergencia de esta serie a través del criterio de la raíz, es muy simple:*
$$\lim_{n\to\infty}(a_n)^{1/n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^7+n^3-1}{4n^7+15n^4-16n^2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$
*Dado que* $\frac{1}{2}<1$*, concluimos que la serie*
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^7+n^3-1}{4n^7+15n^4-16n^2}\right)^n$$
*converge.*

**Ejemplo 17** *Determinar si la serie*
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+(-1)^n}$$
*converge.*

*Naturalmente vamos a usar el criterio de la raíz, sin embargo, recomiendo enormemente que intenten aplicar el criterio del cociente (¡a ver a dónde llegan!).*

*Con el criterio de la raíz, si definimos*
$$a_n=\left(\frac{1}{3}\right)^{n+(-1)^n}$$
*entonces*
$$\lim_{n\to\infty}(a_n)^{1/n}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{n+(-1)^n}\right]^{1/n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{1+\frac{(-1)^n}{n}}=\left(\frac{1}{3}\right)^{1+0}=\frac{1}{3}$$
*Como* $\frac{1}{3}<1$*, concluimos que la serie*
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+(-1)^n}$$
*converge.*

**Ejemplo 18** *Determinar si la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n n!}{2^{n^2}}$$

*converge.*

*Habrá ocasiones en donde nos topemos con ciertas series en donde sea una buena estrategia apoyarnos de más de un criterio de convergencia. Este es un ejemplo de ello.*

*Lo que vamos a hacer con esta serie es acotarla mediante el criterio de comparación, con una serie que será convergente. Sin embargo, esta nueva serie que conseguiremos no será "claramente convergente", sino que deberemos probar su convergencia apoyados del criterio de la raíz.*

*Veamos. Para comenzar notemos que para cualquier $n \in \mathbb{N}$ se cumple que*

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n \leq n \cdot n \cdot n \cdot \cdots \cdot n = n^n$$

*es decir,*

$$n! \leq n^n$$

*Esto implica que*

$$\frac{n^n n!}{2^{n^2}} \leq \frac{n^n n^n}{2^{n^2}} = \frac{n^{2n}}{2^{n^2}}$$

*Para aplicar el criterio de comparación vamos a demostrar que la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}}{2^{n^2}}$$

*converge. Y para ello usaremos el criterio de la raíz.*

*Definamos*

$$a_n = \frac{n^{2n}}{2^{n^2}}$$

*Entonces:*

$$\lim_{n\to\infty} (a_n)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^{2n}}{2^{n^2}}\right)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^n} = 0$$

*Para el último límite estamos usando un resultado que estudiamos en el tema de la exponencial: Para toda $c > 0$ y para toda $k \in \mathbb{N}$ se cumple que*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^k}{e^{cx}} = 0$$

*El nuestro es el caso particular $k = 2$ y $c = \log(2)$, ya que $2^n = e^{n\log(2)}$.*

*De esta manera hemos demostrado que la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}}{2^{n^2}}$$

*converge.*

*Por el criterio de comparación, ahora concluimos que la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n n!}{2^{n^2}}$$

*converge.*

Independientemente de la información sobre la convergencia que nos ofrecen los Ejemplos 13, 14 y 18 sobre sus respectivas series, vale mucho la pena que reflexionen en la información que ofrecen sobre el comportamiento que tienen las sucesiones que las definen:

$$\frac{a^n}{n!} \qquad \frac{(2n)!}{3^n\,(n!)^2} \qquad \frac{n^n n!}{2^{n^2}}$$

Las tres ponen de manifiesto un juego sobre la rapidez de crecimiento entre tres sucesiones que crecen de una manera descomunal: $a^n$, para $a > 1$, $n!$ y $n^n$.

De acuerdo a la información obtenida de los Ejemplos 13, 14 y 18 se cumple:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!}{3^n\,(n!)^2} = \infty \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n^n n!}{2^{n^2}} = 0$$

El segundo límite es particularmente intrigante. Como ejercicio intenten demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!}{5^n\,(n!)^2} = 0$$

Para finalizar la clase (perdonen lo cargada que está), vamos a aclarar la relación oculta que hay entre el criterio de la raíz y el criterio del cociente. Hemos comentado que el criterio de la raíz se puede pensar como una "generalización" del criterio del cociente porque, siempre que el criterio del cociente funcione, también funciona el de la raíz. Pero, ¿por qué ocurre esto?

Lo que vamos a demostrar esencialmente es lo siguiente

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} (a_n)^{1/n} = r \tag{6}$$

Con esto queda claro por qué si el criterio del cociente funciona, entonces funciona el de la raíz. Si se animaron a intentar aplicar el criterio del cociente en el Ejemplo 17, habrán notado que éste simplemente no funciona. Quedando demostrado así que el criterio de la raíz es más amplio. Pero ojo, esto NO significa que estratégicamente siempre debamos elegir al criterio de la raíz sobre el del cociente, no, para nada. Cada método es más eficaz en cierto tipo de series, pero es teóricamente interesante saber que el criterio de la raíz es más poderoso.

La prueba de la implicación dada en (6) no es en absoluto trivial. La parte fuerte de la prueba recae en un lema que es muy interesante por sí mismo.

**Lema 19** *Sean* $\{b_n\} \subset \mathbb{R}$ *una sucesión tal que*

$$\lim_{n\to\infty} (b_{n+1} - b_n) = L$$

*en donde* $L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. *Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{n} = L$$

**Dem.** Recuerden que al escribir que $L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ estamos dejando abierta la posibilidad de que

$$\lim_{n\to\infty} (b_{n+1} - b_n) = \pm\infty$$

Esto necesariamente nos va a hacer distinguir casos para los posibles valores de $L$. Afortunadamente, todos siguen la misma línea de razonamiento.

**Caso 1.** Comencemos suponiendo que $L \in \mathbb{R}$.
Queremos demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{n} = L$$

y lo haremos usando la definición de límite.

Por cuestiones técnicas durante el desarrollo de la prueba, en realidad demostraremos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{n+1} = L$$

sin embargo, ya debe estar claro que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{n+1}$$

puesto que sólo se trata de un desfase en el inicio de ambas sucesiones.

Allá vamos.

Tomemos $\varepsilon > 0$. Ojo, no olviden a lo largo de la prueba que esta $\varepsilon$ ha quedado fija.

Por hipótesis podemos conseguir $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_0$, entonces

$$|(b_{n+1} - b_n) - L| < \varepsilon$$

Lo cual es equivalente a

$$L - \varepsilon < b_{n+1} - b_n < L + \varepsilon \tag{7}$$

Tomemos una $n > N_0$ y aprovechemos la desigualdad en (7) para sumar desde $N_0$ hasta $n$:

$$\sum_{k=N_0}^{n} (L - \varepsilon) < \sum_{k=N_0}^{n} (b_{k+1} - b_k) < \sum_{k=N_0}^{n} (L + \varepsilon)$$

Como $(L - \varepsilon)$ y $(L + \varepsilon)$ son valores constantes en la suma, concluimos que:

$$(n - N_0)(L - \varepsilon) < \sum_{k=N_0}^{n} (b_{k+1} - b_k) < (n - N_0)(L + \varepsilon)$$

Ahora bien, la suma que tenemos en el centro es telescópica y por tanto se satisface que

$$\sum_{k=N_0}^{n} (b_{k+1} - b_k) = b_{n+1} - b_{N_0}$$

De donde,

$$(n - N_0)(L - \varepsilon) < b_{n+1} - b_{N_0} < (n - N_0)(L + \varepsilon)$$

O equivalentemente

$$b_{N_0} + (n - N_0)(L - \varepsilon) < b_{n+1} < b_{N_0} + (n - N_0)(L + \varepsilon)$$

Ahora dividamos toda esta desigualdad entre $n + 1$:

$$\frac{b_{N_0}}{n+1} + \frac{n - N_0}{n+1}(L - \varepsilon) < \frac{b_{n+1}}{n+1} < \frac{b_{N_0}}{n+1} + \frac{n - N_0}{n+1}(L + \varepsilon) \tag{8}$$

Ya hemos hecho la parte crucial.

Por comodidad llamemos

$$c_n = \frac{b_{N_0}}{n+1} + \frac{n - N_0}{n+1}(L - \varepsilon)$$

y

$$d_n = \frac{b_{N_0}}{n+1} + \frac{n - N_0}{n+1}(L + \varepsilon)$$

Con estas sucesiones, la desigualdad en (8) nos dice que para $n > N_0$

$$c_n < \frac{b_{n+1}}{n+1} < d_n \tag{9}$$

Notemos por otra parte que
$$\lim_{n\to\infty} c_n = L - \varepsilon \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} d_n = L + \varepsilon$$
Así que podemos aplicar la definición de límite **al mismo valor** $\varepsilon$ que hemos fijado desde el inicio.

De esta forma, existe $N \in \mathbb{N}$, la cual podemos pedir tal que $N > N_0$, y para la cual se cumpla que si $n > N$, entonces
$$|c_n - (L - \varepsilon)| < \varepsilon \quad \text{y} \quad |d_n - (L + \varepsilon)| < \varepsilon$$
Abriendo los respectivos valores absolutos podemos concluir que
$$-\varepsilon + (L - \varepsilon) < c_n \quad \text{y} \quad d_n < \varepsilon + (L + \varepsilon)$$
es decir,
$$L - 2\varepsilon < c_n \quad \text{y} \quad d_n < L + 2\varepsilon$$
Al pedir $N > N_0$, tenemos derecho a aplicar estas desigualdades en (9) para toda $n > N$, y de esta manera concluir que
$$L - 2\varepsilon < c_n < \frac{b_{n+1}}{n+1} < d_n < L + 2\varepsilon$$
Lo que implica que
$$\left| \frac{b_{n+1}}{n+1} - L \right| < 2\varepsilon$$
Dado que $\varepsilon > 0$ fue arbitrario, podemos concluir finalmente que
$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{n+1} = L$$
límite que, como ya mencionamos, es equivalente a
$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{n} = L$$
lo que concluye el Caso 1.

**Caso 2.** Supongamos que $L = \infty$.

En este caso nuestra hipótesis nos dice que
$$\lim_{n\to\infty} (b_{n+1} - b_n) = \infty$$
La prueba sigue exactamente los mismos pasos que el Caso 1, salvo algunas condiciones técnicas.

Queremos demostrar que
$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{n} = \infty$$
y también lo haremos usando la definición de límite.

Nuevamente lo que vamos a demostrar en realidad es que
$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{n+1} = \infty$$
Tomemos $M > 0$.

Para fijar ideas, lo que queremos demostrar es que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, entonces
$$M < \frac{b_{n+1}}{n+1}$$
Aplicando la definición de límite a
$$\lim_{n\to\infty} (b_{n+1} - b_n) = \infty$$

podemos conseguir $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_0$, entonces

$$2M < b_{n+1} - b_n$$

(*El valor $2M$ es sólo para que las cuentas queden elegantes.*)

Tomemos una $n > N_0$ y sumemos desde $N_0$ hasta $n$:

$$\sum_{k=N_0}^{n} 2M < \sum_{k=N_0}^{n} (b_{k+1} - b_k)$$

De donde:

$$2M\,(n - N_0) < b_{n+1} - b_{N_0}$$

O equivalentemente

$$b_{N_0} + 2M\,(n - N_0) < b_{n+1}$$

Ahora dividamos la desigualdad entre $n+1$:

$$\frac{b_{N_0}}{n+1} + 2M\frac{n - N_0}{n+1} < \frac{b_{n+1}}{n+1}$$

Por comodidad llamemos

$$c_n = \frac{b_{N_0}}{n+1} + 2M\frac{n - N_0}{n+1}$$

De modo que, para $n > N_0$

$$c_n < \frac{b_{n+1}}{n+1}$$

Como

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 2M$$

podemos aplicar la definición de límite al valor $M$. De esta forma, existe $N \in \mathbb{N}$, con $N > N_0$, tal que si $n > N$, entonces

$$|c_n - 2M| < M$$

Abriendo el valor absoluto podemos concluir que

$$M < c_n$$

Dado que para $n > N_0$ se cumple que

$$c_n < \frac{b_{n+1}}{n+1}$$

entonces para $n > N > N_0$ tenemos:

$$M < c_n < \frac{b_{n+1}}{n+1}$$

como queríamos.

Esto prueba que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{n+1} = \infty$$

Y en consecuencia:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{n} = \infty$$

**Caso 3.** Supongamos que $L = -\infty$.

Este caso ya es inmediato del Caso 2.

Nuestra hipótesis nos dice que

$$\lim_{n\to\infty} (b_{n+1} - b_n) = -\infty$$

Si consideramos a la sucesión

$$a_n = -b_n$$

entonces se cumple que

$$\lim_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_n) = -\lim_{n\to\infty} (b_{n+1} - b_n) = \infty$$

Por lo tanto, por el Caso 2 se sigue que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \infty$$

De donde

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{n} = -\infty$$

■

Este extraño pero muy bonito Lema nos va demostrar la implicación (6) de una manera muy elegante.

**Teorema 20** *Sea* $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ *una sucesión tal que* $a_n > 0$ *para toda* $n \in \mathbb{N}$.
*Si*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$$

*entonces*

$$\lim_{n\to\infty} (a_n)^{1/n} = r$$

**Dem.** Dado que $a_n > 0$, entonces $r \geq 0$.

Así mismo, tenemos derecho a definir

$$b_n = \log(a_n)$$

La sucesión $\{b_n\}$ será a la que le aplicaremos el Lema 19.

Para ello debemos calcular el límite:

$$\lim_{n\to\infty} (b_{n+1} - b_n) = \lim_{n\to\infty} (\log(a_{n+1}) - \log(a_n)) = \lim_{n\to\infty} \log\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$$

Esta parte es clave y es donde entra nuestra hipótesis. Sólo hay que distinguir dos casos.

Si $r > 0$, entonces por la continuidad del logaritmo podemos decir simplemente que

$$\lim_{n\to\infty} (b_{n+1} - b_n) = \lim_{n\to\infty} \log\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \log(r)$$

En cambio si $r = 0$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} (b_{n+1} - b_n) = \lim_{n\to\infty} \log\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = -\infty$$

En ambos casos hemos caído en las condiciones del Lema 19 puesto que

$$\lim_{n\to\infty} (b_{n+1} - b_n) = L$$

en donde $L = \log(r) \in \mathbb{R}$ ó $L = -\infty$.

Por lo tanto tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{n} = L$$

Es decir,

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log(a_n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \log\left((a_n)^{1/n}\right) \tag{10}$$

Si ahora aplicamos la continuidad de la exponencial en (10), tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} (a_n)^{1/n} = \begin{cases} r & \text{si } L = \log(r) \\ \\ 0 & \text{si } L = -\infty \end{cases}$$

En cualquier caso se cumple que

$$\lim_{n\to\infty} (a_n)^{1/n} = r$$

Lo que termina la prueba. ■

Sin duda, una relación muy bonita entre los criterios del cociente y el de la raíz.

Aún nos falta estudiar un último criterio de convergencia, pero ya no cargaremos más la ya de por sí intensa clase del día de hoy.