Cálculo Diferencial e Integral II

Aproximación polinomial

13 de abril de 2020

Las funciones polinomiales son probablemente las funciones más "simples" con las que nos podemos topar y con las que podemos trabajar. Una característica extraordinaria que poseen es que es sencillo realizar cálculos numéricos con ellas puesto que sus valores pueden ser encontrados mediante un número finito de multiplicaciones y sumas. Esto no ocurre con otras funciones "elementales", como las funciones trigonométricas, el logaritmo o la exponencial. Si quisiéramos calcular $\log(2)$, deberíamos ser capaces de calcular la integral

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx$$

La teoría nos dice que a esa integral le corresponde un número real, pero para nada está claro cuál (decir que vale $\log(2)$ es simplemente redundante).

Fue un gran triunfo en los primeros años del Cálculo el descubrimiento hecho por Newton y otros matemáticos quienes se dieron cuenta que muchas funciones conocidas podían aproximarse por un polinomio con cualquier grado de precisión que se quisiera. Esto es muy significativo en la práctica, ya que por ejemplo, si estuviéramos ante el problema de querer calcular

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

y supiéramos que

$$f(x) \approx p(x)$$

donde $p(x)$ es un polinomio, entonces podríamos esperar que

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx \int_a^b p(x)\, dx$$

Muy probablemente es conocido por todos que este tipo de aproximaciones son efectuadas por las mismas computadoras o calculadoras para brindarnos un valor cercano de ciertas operaciones realizadas con funciones elementales no tan simples como los polinomios.

Ahora bien, existen muchas maneras de aproximar funciones por polinomios, todo depende del uso que le queramos dar a esa aproximación. En este tema nosotros estamos interesados en desarrollar un tipo de aproximación que se le atribuye a Brook Taylor (1685 - 1731) mediante los llamados "polinomios de Taylor". Cabe comentar que no es Taylor quien descubrió los polinomios que ahora llevan su nombre, sin embargo, sí es él quien de alguna manera unifica el trabajo logrado por sus predecesores y lo presenta de forma muy general.

Para entrar en materia primero vale la pena sentar un poco de lenguaje. Cuando tenemos un polinomio $p(x)$, estamos acostumbrados a escribir de manera abstracta:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

De hecho esta notación es la que en Cálculo I ofrecimos como "la definición de polinomio". Sin embargo, no tenemos conflicto en identificar por ejemplo que la función

$$p(x) = x^{18} + \left(x^2 + x + 1\right)^4 + (x-7)^3 \left(x^2 + 3\right)^2$$

también representa un polinomio aunque no tenga la forma dada en la definición. Simplemente basta que expandamos las expresiones y simplifiquemos para aterrizar en

$$p(x) = x^{18} + x^8 + 5x^7 - 11x^6 + 169x^5 - 450x^4 + 907x^3 - 2237x^2 + 1327x - 3086$$

expresión que ahora sí satisface la definición de polinomio. Estas manipulaciones están sustentadas en las propiedades aritméticas que sabemos que poseen los números reales. Y gracias a ellas sabemos que en general la suma y producto de polinomios arrojan nuevamente un polinomio.

Para los propósitos que queremos llevar a cabo es conveniente adoptar una nueva manera de referirnos a aquellos polinomios expresados en la forma:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

A lo largo de este tema vamos a llamarlos "**polinomios centrados en** 0".

¿Por qué darle un nombre especial a lo que ya era la definición de polinomio? Una forma de responder esto es a través de otra pregunta muy interesante: Dado un polinomio

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

¿habrá alguna manera de determinar los coeficientes a_k en términos de los valores que toma p?

Bueno, resulta que sí es posible determinar los coeficientes a_k utilizando únicamente el valor que tiene p en 0 así como el de sus sucesivas derivadas.

Veamos cómo se hace esto. Si evaluamos p en 0, obtenemos

$$p(0) = a_0$$

Si ahora derivamos p, sabemos que

$$p'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \cdots + 3a_3 x^2 + 2a_2 x + a_1$$

de modo que

$$p'(0) = a_1$$

Derivamos una vez más:

$$p''(x) = n(n-1) a_n x^{n-2} + (n-1)(n-2) a_{n-1} x^{n-3} + \cdots + 6a_3 x + 2a_2$$

Evaluamos en 0

$$p''(0) = 2a_2$$

o equivalentemente

$$a_2 = \frac{p''(0)}{2} = \frac{p''(0)}{2!}$$

Una tercer derivación nos lleva a concluir que

$$a_3 = \frac{p'''(0)}{6} = \frac{p'''(0)}{3!}$$

Hemos usado convenientemente la notación del factorial para hacer evidente que si continuamos con este procedimiento, en general se cumple que

$$a_k = \frac{p^{(k)}(0)}{k!}$$

(un argumento por inducción debe usarse aquí).

De esta manera logramos ver que

$$p(x) = p(0) + p'(0)x + \frac{p''(0)}{2!}x^2 + \frac{p'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{p^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Y por lo tanto hemos conseguido escribir a $p(x)$ utilizando únicamente el valor que tiene p en 0 así como el de sus sucesivas derivadas.

El concepto de "polinomio centrado en 0" naturalmente puede generalizarse:

Definición 1 *Decimos que un polinomio $p(x)$ (de grado n) está centrado en $a \in \mathbb{R}$, si existen coeficientes $b_0, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ tales que*

$$p(x) = b_n (x-a)^n + b_{n-1} (x-a)^{n-1} + \cdots + b_2 (x-a)^2 + b_1 (x-a) + b_0$$

De manera análoga a como lo hicimos con el polinomio centrado en 0, podemos deducir que, para toda $k = 0, 1, \ldots, n$, se debe cumplir:

$$b_k = \frac{p^{(k)}(a)}{k!}$$

(en donde entendemos que $p^{(0)}(x) = p(x)$). Y de esta forma ocurre que

$$p(x) = p(a) + p'(a)(x-a) + \frac{p''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{p^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Es decir, cuando un polinomio $p(x)$ está centrado en $a \in \mathbb{R}$, los coeficientes $b_0, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ que afirma la Definición 1 que existen, están determinados de **manera única** mediante la relación

$$b_k = \frac{p^{(k)}(a)}{k!}$$

Esta observación es tan importante que conviene que la dejemos plasmada en una proposición.

Proposición 2 *Si*

$$p(x) = b_n (x-a)^n + b_{n-1} (x-a)^{n-1} + \cdots + b_2 (x-a)^2 + b_1 (x-a) + b_0$$

entonces para toda $k = 0, 1, \ldots, n$, se cumple que

$$b_k = \frac{p^{(k)}(a)}{k!}$$

en donde $p^{(0)}(x) = p(x)$.

Como veremos más adelante, el concepto de "polinomio centrado en a" es crucial para lo que pretendemos desarrollar.

Una buena pregunta en este momento es: Dado un polinomio $p(x)$, centrado en 0, digamos

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

y dado $a \in \mathbb{R}$, ¿es posible reescribir a $p(x)$ como un polinomio centrado en a?

La agradable respuesta es: ¡sí! Y ni siquiera es tan complicado convencerse de ello. Simplemente notemos que

$$\begin{aligned} p(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \\ &= a_n ((x-a)+a)^n + a_{n-1} ((x-a)+a)^{n-1} + \cdots + a_1 ((x-a)+a) + a_0 \end{aligned}$$

Si desarrollamos todas las potencias $((x-a)+a)^k$ manejando el término $(x-a)$ como un sólo número y hacemos las correspondientes simplificaciones, obtenemos que

$$p(x) = b_n (x-a)^n + b_{n-1} (x-a)^{n-1} + \cdots + b_2 (x-a)^2 + b_1 (x-a) + b_0$$

para algunos coeficientes $b_0, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$.

Quizá nos deje un poco insatisfechos el paso de *desarrollamos todas las potencias* $((x-a)+a)^k$, porque se siente un poco informal y se pierde algo de luz en lo que ocurrió. Vamos a formular el resultado anterior como una proposición y le daremos una prueba más rigurosa. Será importante apreciar a detalle la técnica que emplearemos porque la volveremos a usar más adelante.

Proposición 3 *Si $p(x)$ es un polinomio centrado en 0, entonces para toda $a \in \mathbb{R}$, $p(x)$ puede reescribirse como un polinomio centrado en a.*

Dem. La demostración la haremos por inducción sobre el grado del polinomio $p(x)$.
Sea $a \in \mathbb{R}$ fijo.

Base. $n = 1$

Supongamos que $p(x)$ es un polinomio de grado 1. Eso significa que $p(x)$ se escribe como

$$p(x) = a_1 x + a_0$$

Entonces

$$p(x) = a_1 x + a_0 = a_1 (x - a + a) + a_0 = a_1 (x - a) + (a_1 a + a_0)$$

Y de esta manera $p(x)$ ha quedado escrito como un polinomio centrado en a.

H.I. Supongamos que si $q(x)$ es un polinomio de grado n centrado en 0, entonces $q(x)$ puede reescribirse como un polinomio centrado en a.

Paso inductivo. Sea $p(x)$ un polinomio de grado $n+1$ centrado en 0. Digamos

$$p(x) = a_{n+1} x^{n+1} + a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$$

Para aplicar la H.I vamos a hacer un pequeño paso técnico:

$$p(x) = a_{n+1} x^{n+1} + a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = x\left(a_{n+1} x^n + a_n x^{n-1} + \cdots + a_1\right) + a_0$$

Por comodidad llamemos $q(x) = a_{n+1} x^n + a_n x^{n-1} + \cdots + a_1$. Notemos que $q(x)$ es un polinomio de grado n y centrado en 0, así que por H.I. $q(x)$ puede reescribirse como un polinomio centrado en a. Es decir,

$$q(x) = b_n (x - a)^n + b_{n-1} (x - a)^{n-1} + \cdots + b_1 (x - a) + b_0$$

para algunos coeficientes $b_0, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$. Escrito lo anterior en notación compacta tenemos:

$$q(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k (x - a)^k$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} p(x) &= xq(x) + a_0 = ((x - a) + a)\, q(x) + a_0 \\ &= (x - a)\, q(x) + aq(x) + a_0 \\ &= (x - a) \sum_{k=0}^{n} b_k (x - a)^k + a \sum_{k=0}^{n} b_k (x - a)^k + a_0 \\ &= \sum_{k=0}^{n} b_k (x - a)^{k+1} + \sum_{k=0}^{n} ab_k (x - a)^k + a_0 \end{aligned}$$

Lo que demuestra que $p(x)$ puede escribirse como un polinomio centrado en a. Si quisiéramos ser un poco más exquisitos podríamos escribir:

$$p(x) = c_{n+1} (x - a)^{n+1} + c_n (x - a)^n + \cdots + c_1 (x - a) + c_0$$

en donde

$$c_k = \begin{cases} b_n & \text{si } k = n+1 \\ b_{k-1} + ab_k & \text{si } k = 1, 2, \ldots, n \\ ab_0 + a_0 & \text{si } k = 0 \end{cases}$$

Esto concluye la inducción. ■

Nota: *En la Proposición 3 es posible seguir otro camino en el Paso inductivo en el que, al polinomio*

$$p(x) = a_{n+1}x^{n+1} + a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$$

le separemos la expresión $a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ *y sea ésta a la que le apliquemos la H.I. y decir que*

$$a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = b_n (x-a)^n + b_{n-1}(x-a)^{n-1} + \cdots + b_1 (x-a) + b_0$$

Como ejercicio vale la pena que intenten seguir este camino. Pero ojo, hay un datalle (no muy grave) que debe notarse. Es posible que $a_n = 0$, *de manera que la expresión* $a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ *NO representaría un polinomio de grado* n *como lo pide la H.I. Sin embargo esto se podría arreglar si en lugar de aplicar la inducción usual, aplicáramos "inducción fuerte" o "inducción completa".*

Una consecuencia de las Proposiciones 2 y 3 es el siguiente resultado que por su importancia, enunciaremos como teorema:

Teorema 4 *Si* $p(x)$ *es un polinomio de grado* n, *entonces para toda* $a \in \mathbb{R}$ *se cumple que*

$$p(x) = p(a) + p'(a)(x-a) + \frac{p''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{p^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Dem. Sea $a \in \mathbb{R}$ fijo. Como $p(x)$ es un polinomio, sabemos que $p(x)$ puede expresarse como un polinomio centrado en 0. De acuerdo a la Proposición 3, $p(x)$ puede reescribirse como un polinomio centrado en a. Es decir

$$p(x) = b_n (x-a)^n + b_{n-1}(x-a)^{n-1} + \cdots + b_2 (x-a)^2 + b_1 (x-a) + b_0$$

Por la Proposición 2 sabemos que se cumple que

$$b_k = \frac{p^{(k)}(a)}{k!}$$

Y en consecuencia

$$p(x) = p(a) + p'(a)(x-a) + \frac{p''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{p^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

■

Comencemos a abordar ahora el problema de la aproximación polinomial. Lo que buscamos hacer es, aproximar funciones al menos de "manera local" por polinomios. ¿Qué significa eso de "manera local"? Dada una función f y un punto a en el dominio de la función, quisiéramos encontrar un polinomio $p(x)$ para el cual ocurra que

$$f(x) \approx p(x)$$

para toda x en *alguna vecindad del punto* a. Para esto, necesitamos darle una interpretación más concreta a la expresión $f(x) \approx p(x)$. Una primer exigencia que parece natural es, que si queremos que f y p se parezcan en puntos cercanos al punto a, entonces al menos debe ocurrir $f(a) = p(a)$.

Por lo que hemos aprendido de Cálculo I, quizá el concepto que mejor encierra la noción de *cercanía* entre funciones es la **continuidad.** De manera que para desarrollar nuestro problema, no parece muy atrevido quedarnos en el universo de las funciones continuas. Y así lo haremos.

Como se recordará, cuando una función f es derivable en un punto a, definimos:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

Una simple manipulación nos permite transformar el límite anterior en algo muy interesante:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) \Rightarrow \lim_{x \to a} \left[\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) \right] = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)}{x-a} = 0$$

Es decir, si f es derivable en a, se debe cumplir que

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - (f(a) + f'(a)(x-a))}{x-a} = 0$$

Si definimos $P_1(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$, el límite anterior nos dice que, conforme x se acerca al punto a, entonces $f(x)$ se parece mucho al polinomio de grado 1, $P_1(x)$. Pero no sólo eso, sino que f y P_1 se parecen tanto que su diferencia se aproxima a 0 más rápido de lo que la diferencia $x-a$ se va a 0 cuando $x \to a$.

Ahora bien, imaginemos que tenemos "otro" polinomio de grado 1, $Q(x)$, con la propiedad de que

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - Q(x)}{x-a} = 0 \tag{1}$$

¿Qué relación podemos esperar que haya entre $Q(x)$ y $P_1(x)$?

La respuesta no es otra más que: $P_1(x) = Q(x)$.

Veamos por qué. Como ya lo mencionamos, la derivabilidad de f implica que

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - P_1(x)}{x-a} = 0 \tag{2}$$

Si restamos los límites (1) y (2), se deduce que

$$\lim_{x\to a} \frac{P_1(x) - Q(x)}{x-a} = 0 \tag{3}$$

Por el Teorema 4, sabemos que $Q(x)$ puede escribirse como un polinomio centrado en a de la siguiente manera:

$$Q(x) = Q(a) + Q'(a)(x-a)$$

Sustituyendo esto y la definición de $P_1(x)$ en (3), se tiene que

$$\lim_{x\to a} \frac{(f(a) + f'(a)(x-a)) - (Q(a) + Q'(a)(x-a))}{x-a} = 0$$

Equivalentemente

$$\lim_{x\to a} \left[(f'(a) - Q'(a)) + \frac{f(a) - Q(a)}{x-a} \right] = 0$$

Y por lo tanto

$$\lim_{x\to a} \frac{f(a) - Q(a)}{x-a} = Q'(a) - f'(a)$$

Ahora bien, la única manera de que el límite de la izquierda exista se da si el numerador es 0. Eso signifca que $f(a) = Q(a)$. Pero si esto ocurre, entonces

$$Q'(a) - f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(a) - Q(a)}{x-a} = 0$$

Es decir, $Q'(a) = f'(a)$. De donde

$$Q(x) = Q(a) + Q'(a)(x-a) = f(a) + f'(a)(x-a) = P_1(x)$$

Esto es muy interesante, porque lo que hemos demostrado es que si f es derivable en a, entonces existe **un único** polinomio de grado 1, $P_1(x)$, con la propiedad de

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-P_1(x)}{x-a}=0$$

Y gracias al Teorema 4 este polinomio satisface a su vez que

$$f(a)=P_1(a) \qquad \text{y} \qquad f'(a)=P_1'(a)$$

Para tenerlo bien presente, dejemos enunciado lo que acabamos de probar como una proposición.

Proposición 5 *Si $f:I\to\mathbb{R}$ es una función derivable en $a\in I$ (con $I\subset\mathbb{R}$ un intervalo), entonces existe un único polinomio $P_1(x)$ de grado a lo más 1, con la propiedad de*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-P_1(x)}{x-a}=0$$

Y bajo estas condiciones se cumple que $f(a)=P_1(a)$ y $f'(a)=P_1'(a)$.

Observación importante: *Debería saltar a la vista que en la conclusión de la Proposición 5 hemos escrito $P_1(x)$ de grado* ***a lo más*** *1. Esto se debe a que el polinomio $P_1(x)$ está dado por*

$$P_1(x)=f(a)+f'(a)(x-a)$$

Si ocurriera el muy frecuente caso de que $f'(a)=0$, entonces P_1 es en realidad un polinomio constante, es decir, de grado 0. Durante la discusión previa a la Proposición 5, manejamos a $P_1(x)$ como un polinomio de grado 1 únicamente para no distraernos de lo que realmente queríamos exhibir (ojalá estén de acuerdo en que es un detalle minúsculo).

Hay que resaltar que la Proposición 5 es un resultado que habla sobre aproximación polinomial como lo motivamos al principio. En palabras muy simples estamos diciendo que si f es derivable en a, entonces para puntos cercanos al número a se tiene que

$$f(x)\approx P_1(x)$$

y en el caso particular de $x=a$, se cumple que $f(a)=P_1(a)$ y tenemos la ganancia adicional de saber que $f'(a)=P_1'(a)$.

Antes de avanzar, cabe externar una queja. Al inicio de toda la discusión dijimos que nos íbamos a quedar en el universo de las funciones continuas, e inmediatamente después, ¡tomamos una función f derivable en a! ¡De qué se trata!

Bueno, el cociente

$$\frac{f(x)-P_1(x)}{x-a}$$

nos permite comparar la rapidez con la cual la diferencia $f(x)-P_1(x)$ se acerca a 0 con respecto de $x-a$. El hecho de que

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-P_1(x)}{x-a}=0$$

nos asegura que la aproximación polinomial que hemos logrado no es "tan burda", puesto que $f(x)-P_1(x)$ se va a 0 más rápido de lo que lo hace $x-a$.

Si lo anterior nos ha convencido de lo conveniente que es tomar los cocientes

$$\frac{f(x)-P_1(x)}{x-a}$$

para asegurar que se tiene una buena aproximación polinomial, entonces ahora pongámonos en la siguiente situación:

Supongamos que $f : I \to \mathbb{R}$ es continua en $a \in I$ (con $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo) y supongamos que existe un polinomio de grado 1, $p(x)$, tal que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - p(x)}{x - a} = 0$$

Por la continuidad de f y p se sigue que

$$f(a) - p(a) = \lim_{x \to a} [f(x) - p(x)]$$

Pero si multiplicamos por un 1 elegante logramos

$$f(a) - p(a) = \lim_{x \to a} [f(x) - p(x)] = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - p(x)}{x - a} (x - a) = 0 \cdot 0 = 0$$

Es decir, $f(a) = p(a)$ (como se busca). Ahora bien, si escribimos a $p(x)$ como un polinomio centrado en a, tenemos que

$$p(x) = p(a) + p'(a)(x - a) = f(a) + p'(a)(x - a)$$

De donde

$$\begin{aligned} 0 = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - p(x)}{x - a} &= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - p'(a)(x - a)}{x - a} \\ &= \lim_{x \to a} \left[\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - p'(a) \right] \end{aligned}$$

Y por lo tanto

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = p'(a)$$

Es decir, ¡f es derivable en a! (y además $f'(a) = p'(a)$)

Así que el descaro de pedir derivabilidad en a como lo hicimos, en realidad es una condición necesaria para poder lograr la existencia de un polinomio de grado 1, $P_1(x)$, que cumpla que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - P_1(x)}{x - a} = 0.$$

Motivados por lo que hemos demostrado en la Proposición 5, ahora podemos preguntarnos algo un poco más complicado:

Si $f : I \to \mathbb{R}$ es una función derivable en $a \in I$, ¿existirá un polinomio de grado 2, $P_2(x)$, tal que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - P_2(x)}{x - a} = 0?$$

Supongamos que sí existe dicho polinomio $P_2(x)$. Observemos que nuevamente debe ocurrir que

$$\lim_{x \to a} [f(x) - P_2(x)] = 0$$

y por la continuidad de f y P_2, se tiene que $f(a) = P_2(a)$.

Aprovechando una vez más el Teorema 4, podemos escribir a P_2 como un polinomio centrado en a:

$$\begin{aligned} P_2(x) &= P_2(a) + P_2'(a)(x - a) + \frac{P_2''(a)}{2}(x - a)^2 \\ &= f(a) + P_2'(a)(x - a) + \frac{P_2''(a)}{2}(x - a)^2 \end{aligned}$$

De esta manera obtenemos que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - P_2(x)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - \left[f(a) + P_2'(a)(x - a) + \frac{P_2''(a)}{2}(x - a)^2 \right]}{x - a}$$

Simplificando un poco:

$$0=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-P_2(x)}{x-a}=\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-P_2'(a)-\frac{P_2''(a)}{2}(x-a)\right]$$

Dado que f es derivable en a, obtenemos finalmente

$$0=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-P_2(x)}{x-a}=f'(a)-P_2'(a)$$

Es decir, $f'(a)=P_2'(a)$. Hasta este punto se ha ido preservando la información que ofrece la Proposición 5. Hemos logrado probar que si existe el polinomio P_2, entonces

$$P_2(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{P_2''(a)}{2}(x-a)^2$$

Pero ahora observen con cuidado los cálculos que hemos realizado y noten que en realidad reflejan algo un poco más drástico: Si tomamos un polinomio de la forma

$$q(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+A(x-a)^2$$

entonces este polinomio satisface que

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-q(x)}{x-a}=0$$

¡sin importar el valor de A!

Esto nos dice que la pregunta, ¿existirá un polinomio de grado 2, $P_2(x)$, tal que

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-P_2(x)}{x-a}=0?$$

tiene una respuesta afirmativa pero bastante desafortunada: ¡Existen una infinidad de polinomios!

No perdiendo de vista que nuestra meta es ofrecer una aproximación polinomial, el hecho de que no importe el valor del coeficiente A, nos hace pensar que quizá estamos perdiendo algo de información y entonces la aproximación polinomial lograda ahora sí es un poco burda.

¿Cómo le hacemos para refinar la aproximación polinomial?

Todo parece indicar que el problema está en la rapidez que le hemos impuesto a la diferencia $f(x)-P_2(x)$ para acercarse a 0. Es decir, dado que buscamos que P_2 sea un polinomio de grado 2, quizá sea más adecuado exigir que la diferencia $f(x)-P_2(x)$ se vaya más rápido a 0 de lo que lo hace el polinomio de grado 2, $(x-a)^2$. De manera que ahora podemos pedir

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-P_2(x)}{(x-a)^2}=0$$

Nota: *Debe estar claro que el polinomio $(x-a)^2$ se va más rápido a 0 que $x-a$, conforme nos acercamos al punto a. En efecto:*

$$\lim_{x\to a}\frac{(x-a)^2}{x-a}=\lim_{x\to a}(x-a)=0$$

Así que replanteemos la pregunta: Si $f:I\to\mathbb{R}$ es una función derivable en $a\in I$, ¿existirá un polinomio de grado 2, $P_2(x)$, tal que

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-P_2(x)}{(x-a)^2}=0?$$

La sorprendente respuesta esta vez es: ¡NO! Al menos, no necesariamente.

El hecho de que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - P_2(x)}{(x-a)^2} = 0$$

nos dice que en particular se cumple lo siguiente

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - P_2(x)}{x-a} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - P_2(x)}{(x-a)^2}(x-a) = 0 \cdot 0 = 0$$

Esto implica, de acuerdo a lo que ya probamos, que si escribimos a $P_2(x)$ como un polinomio centrado en a, entonces

$$P_2(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + A(x-a)^2$$

(donde $A = \frac{P_2''(a)}{2}$). Usemos esta información para analizar el siguiente ejemplo.

Ejemplo 6 *Sea*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & si\ x \geq 0 \\ \\ -x^2 & si\ x < 0 \end{cases}$$

La función f es derivable en todo su dominio y además

$$f'(x) = 2|x|$$

En particular tenemos derivabilidad en el punto $a = 0$. Veamos que no existe un polinomio $q(x)$ de grado 2 que cumpla que

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - q(x)}{x^2} = 0$$

Para ello supongamos que sí existe. Ya sabemos que $q(x)$ debe ser de la forma:

$$q(x) = f(0) + f'(0)x + Ax^2$$

Como $f(0) = f'(0) = 0$, entonces $q(x) = Ax^2$ para alguna $A \in \mathbb{R}$.

Dado que

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - q(x)}{x^2} = 0$$

tenemos derecho a tomar límites laterales y éstos también deben valer 0. Es decir,

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - q(x)}{x^2} = 0 \qquad y \qquad \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - q(x)}{x^2} = 0$$

Analicemos cada uno con detenimiento.

$$0 = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - q(x)}{x^2} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 - Ax^2}{x^2} = 1 - A$$

Por lo tanto $A = 1$.

Así mismo

$$0 = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - q(x)}{x^2} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x^2 - Ax^2}{x^2} = -1 - A$$

y en consecuencia $A = -1$, lo cual es absurdo. Así que en efecto, no existe un polinomio $q(x)$ de grado 2 que cumpla que

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - q(x)}{x^2} = 0.$$

El Ejemplo 6 deja en evidencia que esta vez la sola derivabilidad de f ya NO es suficiente para lograr una aproximación polinomial más exquisita que la lograda en la Proposición 5. El detalle importante que nos debería saltar a la vista del Ejemplo 6 es, que la función f no es dos veces derivable en el punto alrededor del cual buscábamos dar la aproximación polinomial, es decir, $a = 0$.

¿Qué pasaría si exigimos doble derivabilidad de f en a?

¡Ah! Ahora la cosa cambia enormemente. Pongámonos en ese escenario:

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función dos veces derivable en $a \in I$ (noten que esto significa de antemano que f es derivable en al menos toda una vecindad de a).

Inspirados en lo que logramos previo a aterrizar en la Proposición 5, vamos a pararnos en la definición de $f''(a)$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x) - f'(a)}{x-a} = f''(a)$$

Esto es equivalente a

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x) - (f'(a) + f''(a)(x-a))}{x-a} = 0$$

Si ahora proponemos el polinomio

$$P_2(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2$$

resulta que

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - P_2(x)}{(x-a)^2}$$

es un límite de la forma $\frac{0}{0}$. Pero como f es derivable en una vecindad de a, tenemos derecho a usar L'Hopital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - P_2(x)}{(x-a)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x) - P_2'(x)}{2(x-a)}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{f'(x) - (f'(a) + f''(a)(x-a))}{x-a} = 0$$

Por lo tanto

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - P_2(x)}{(x-a)^2} = 0$$

Es decir, ¡sí existe el polinomio que buscamos!

Lo que sería sumamente deseable es que este polinomio fuera único así como ocurrió con P_1. Afortunadamente esto sí ocurre.

Proposición 7 *Si $f : I \to \mathbb{R}$ es una función dos veces derivable en $a \in I$ (con $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo), entonces existe un único polinomio $P_2(x)$ de grado a lo más 2, con la propiedad de*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - P_2(x)}{(x-a)^2} = 0$$

Y bajo estas condiciones se cumple que $f(a) = P_2(a)$, $f'(a) = P_2'(a)$ y $f''(a) = P_2''(a)$.

Dem. Hemos demostrado ya que el polinomio

$$P_2(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2$$

satisface que

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - P_2(x)}{(x-a)^2} = 0 \tag{4}$$

y además $f(a) = P_2(a)$, $f'(a) = P_2'(a)$ y $f''(a) = P_2''(a)$.

Ahora supongamos que $q(x)$ es un polinomio de grado a lo más 2 y tal que

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - q(x)}{(x-a)^2} = 0 \tag{5}$$

Vamos a demostrar que $P_2(x) = q(x)$.

Comencemos por escribir a $q(x)$ centrado en a

$$q(x) = q(a) + q'(a)(x-a) + \frac{q''(a)}{2}(x-a)^2$$

Ya sabemos que la condición

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - q(x)}{(x-a)^2} = 0$$

implica que $q(a) = f(a)$ y $q'(a) = f'(a)$. De manera que

$$q(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{q''(a)}{2}(x-a)^2$$

Si logramos demostrar que $q''(a) = f''(a)$, habremos terminado.

Restemos los límites (4) y (5):

$$\lim_{x\to a} \frac{P_2(x) - q(x)}{(x-a)^2} = 0$$

Sustituyendo las definiciones de P_2 y q

$$0 = \lim_{x\to a} \frac{\left(f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2\right) - \left(f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{q''(a)}{2}(x-a)^2\right)}{(x-a)^2}$$

Simplificando

$$0 = \lim_{x\to a} \frac{\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 - \frac{q''(a)}{2}(x-a)^2}{(x-a)^2} = \frac{f''(a)}{2} - \frac{q''(a)}{2}$$

Y por lo tanto $q''(a) = f''(a)$ como queríamos. ■

Con toda esta enorme motivación seguramente ya podemos intuir cuál será el resultado general que buscamos generar:

Si $f : I \to \mathbb{R}$ es una función n-veces derivable en $a \in I$, entonces existe un único polinomio $P_n(x)$ de grado a lo más n, con la propiedad de

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x-a)^n} = 0$$

Y bajo estas condiciones se cumple que $f(a) = P_n(a)$, $f'(a) = P_n'(a)$,..., $f^{(n)}(a) = P_n^{(n)}(a)$.

Este resultado es conocido como el Teorema de Taylor. La información sobre las derivadas de P_n junto con el Teorema 4 nos dice que el polinomio P_n, si está centrado en a, entonces

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Este polinomio es lo que se conoce como el "n-ésimo polinomio de Taylor de f centrado en a".

Para cerrar la clase del día de hoy, vamos a formalizar la definición de los polinomios de Taylor y daremos algunos ejemplos. Dejaremos para la próxima clase la prueba del Teorema de Taylor.

Definición 8 *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función n-veces derivable en $a \in I$ (con I un intervalo). Definimos el n-ésimo polinomio de Taylor de f centrado en el punto a, como*

$$P_{n,f,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Es necesario cargar un poco la notación y usar $P_{n,f,a}$ en lugar de sólo P_n porque en ocasiones será indispensable distinguir a qué función le estamos tomando su polinomio de Taylor para evitar confusiones.

Es importante enfatizar que, como consecuencia del Teorema 4, $P_{n,f,a}(x)$ es un polinomio con la propiedad de

$$f(a) = P_{n,f,a}(a),\ f'(a) = P'_{n,f,a}(a), \ldots,\ f^{(n)}(a) = P^{(n)}_{n,f,a}(a).$$

Con el fin de tener en consideración que los polinomios también pueden tener grado 0, vale la pena permitirnos hablar del polinomio de Taylor:

$$P_{0,f,a}(x)$$

En este caso, este polinomio siempre será un polinomio constante,

$$P_{0,f,a}(x) \equiv f(a)$$

Nota: *En algunos textos se suele cometer un abuso en el lenguaje, que es comunmente aceptado, y al n-ésimo polinomio de Taylor le llaman el polinomio de Taylor* **de grado** *n, aún cuando es posible que éste en realidad sea de un grado estrictamente menor que n.*

El verdadero grado de $P_{n,f,a}$ es

$$\begin{cases} \max\left\{k = 1,\ldots,n \mid f^{(k)}(a) \neq 0\right\} & \text{si existe } k = 1,\ldots,n \text{ tal que } f^{(k)}(a) \neq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Es aceptado el uso de "grado n" únicamente para destacar hasta qué derivada de f debe calcularse para generar al correspondiente polinomio $P_{n,f,a}(x)$.

Ahora vamos ofrecer algunos ejemplos de polinomios de Taylor de las que quizá son las funciones más tradicionales.

Ejemplo 9 *Sean $q(x)$ un polinomio de grado n y $a \in \mathbb{R}$. Calcular $P_{n,q,a}(x)$.*

Este ejemplo es muy simple pero importante a la vez. Gracias al Teorema 4 y por definición de $P_{n,q,a}(x)$ tenemos que

$$P_{n,q,a}(x) = q(a) + q'(a)(x-a) + \frac{q''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{q^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = q(x)$$

Es decir, $q(x)$ es su propio n-ésimo polinomio de Taylor. Ojo, es importante mantener el rigor de escribir a q centrado en a para referirnos a él como polinomio de Taylor.

Ejemplo 10 *Sea $q(x) = x^4 + 5x^3 + 3(x-2)^2 + 7$. Calcular $P_{3,q,1}(x)$ y $P_{4,q,1}(x)$.*

Vamos a calcular ambos polinomios al mismo tiempo. Necesitamos $q^{(k)}(1)$ para $k = 0,1,2,3,4$.

Primero notemos que $q(1) = 16$. Ahora calculemos las derivadas:

$$\begin{aligned} q'(x) &= 4x^3 + 15x^2 + 6(x-2) && \Rightarrow \quad q'(x) = 13 \\ q''(x) &= 12x^2 + 30x + 6 && \Rightarrow \quad q''(1) = 48 \\ q'''(x) &= 24x + 30 && \Rightarrow \quad q'''(1) = 54 \\ q^{(4)}(x) &= 24 && \Rightarrow \quad q^{(4)}(1) = 24 \end{aligned}$$

De donde
$$P_{3,q,1}(x) = 16 + 13(x-1) + 24(x-1)^2 + 9(x-1)^3$$
$$P_{4,q,1}(x) = 16 + 13(x-1) + 24(x-1)^2 + 9(x-1)^3 + (x-1)^4$$

Como se puede observar $P_{3,q,1}(x) \neq q(x)$ porque no tienen el mismo grado. En cambio $P_{4,q,1}(x) = q(x)$ aunque $P_{4,q,1}(x)$ está centrado en 1 mientras que $q(x)$ originalmente no está centrado en nada.

Ejemplo 11 *Sea $f(x) = e^x$. Calcular $P_{n,f,0}(x)$.*

Este ejemplo es particularmente sencillo puesto que sabemos que para toda $k \in \mathbb{N}$
$$f^{(k)}(x) = e^x$$
Y por lo tanto
$$f^{(k)}(0) = 1$$
De donde
$$P_{n,f,0}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

Como una pequeña aplicación del ejemplo anterior (aunque por el momento, sin completo fundamento), podemos dar una aproximación al valor del famoso número e.

Dando por válido que los polinomios de Taylor ofrecen una aproximación polinomial, esperamos que ocurra que
$$e^x \approx P_{n,f,0}(x)$$
En particular podríamos esperar que
$$e \approx P_{n,f,0}(1)$$
Si usamos $n = 9$, entonces
$$P_{9,f,0}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^9}{9!}$$
Por lo que
$$e \approx P_{9,f,0}(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{9!} \approx 2.7182815256$$
Una aproximación acertada a seis decimales.

Más adelante desarrollaremos técnicas que nos permitan tener un mejor control de las aproximaciones y lograremos tener certeza por ejemplo de que
$$e \approx 2.7182815256$$
es en efecto una aproximación correcta a seis decimales.

Ejemplo 12 *Sea $f(x) = \log(x)$. Calcular $P_{n,f,1}(x)$.*

Comenzamos calculando $f^{(k)}(x)$ para $k = 1, \ldots, n$. Bastará con encontrar las primeras derivadas para notar un patrón en el cálculo de las mismas
$$\begin{array}{ll} f'(x) = \frac{1}{x} & f^{(4)}(x) = -\frac{2\cdot 3}{x^4} \\ f''(x) = -\frac{1}{x^2} & f^{(5)}(x) = \frac{2\cdot 3\cdot 4}{x^5} \\ f'''(x) = \frac{2}{x^3} & f^{(6)}(x) = -\frac{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{x^6} \end{array}$$

Por lo que se aprecia, las sucesivas derivadas van alternando la presencia del factor -1. Así mismo, los numeradores tienen la forma de un número factorial en concreto, para la k-ésima derivada el numerador es $(k-1)!$.

En general parece que ocurre:

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{x^k}$$

(Queda como ejercicio verificar esta fórmula por inducción)

Por lo tanto

$$f^{(k)}(1) = (-1)^{k-1}(k-1)!$$

Dado que los coeficientes del polinomio de Taylor están dados por

$$\frac{f^{(k)}(1)}{k!} = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{k!} = \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

concluimos que

$$P_{n,f,1}(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n$$

La comodidad que ofrece el trabajar con polinomios centrados en 0, motiva a querer tener polinomios de Taylor del logaritmo centrados en 0, sin embargo, el 0 no es parte de su dominio. Para brincar ese obstáculo es frecuente utilizar la función:

$$g(x) = \log(x+1)$$

En este caso el dominio de g es $(-1,\infty)$. De manera que tiene sentido preguntarnos por $P_{n,g,0}(x)$. Las sucesivas derivadas de g guardan el mismo patrón que las derivadas de $\log(x)$:

$$g^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{(x+1)^k}$$

De esta manera

$$g^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!$$

Con lo que se puede concluir:

$$P_{n,g,0}(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$$

polinomio muy socorrido en la práctica.

Ejemplo 13 *Sea $f(x) = \operatorname{sen}(x)$. Calcular $P_{n,f,0}(x)$.*

Este ejemplo es muy interesante porque aquí muchas de las sucesivas derivadas de f se anulan en 0. Esto hace necesario distinguir la paridad de n para ofrecer el correspondiente polinomio de Taylor de manera más clara.

Primero notemos que

$$f'(x) = \cos(x) \qquad f'''(x) = -\cos(x)$$

$$f''(x) = -\operatorname{sen}(x) \qquad f^{(4)}(x) = \operatorname{sen}(x)$$

Y de aquí en adelante las derivadas se repiten en ciclos de 4.

Ahora bien,

$$f'(0) = 1 \qquad f'''(0) = -1$$

$$f''(0) = 0 \qquad f^{(4)}(0) = 0$$

Esto nos dice que todas las derivadas de orden par de f se anulan en 0. Mientras que las de orden impar van alternando entre 1 y -1.

Con esta información podemos hacer las siguientes distinciones en la derivada:

$$f^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 & k = 4m, m \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\ \\ 1 & k = 4m+1, m \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\ \\ 0 & k = 4m+2, m \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\ \\ -1 & k = 4m+3, m \in \mathbb{N} \cup \{0\} \end{cases}$$

Simplificando un poco

$$f^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 & k = 2m, m \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\ \\ (-1)^m & k = 2m+1, m \in \mathbb{N} \cup \{0\} \end{cases}$$

Ahora escribamos los polinomios de Taylor distinguiendo la paridad del orden del polinomio:

$$P_{0,f,0}(x) = 0$$

$$P_{2n,f,0}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \qquad \textit{para } n \in \mathbb{N}$$

$$P_{2n+1,f,0}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^{n} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \textit{para } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Es muy importante no dejar de apreciar que el $2n$-ésimo polinomio de Taylor de f tiene grado $2n-1$, puesto que $f^{(2n)}(0) = 0$. Además, de acuerdo con la fórmula de $P_{2n+1,f,0}(x)$, podemos concluir que para toda $n \in \mathbb{N}$,

$$P_{2n,f,0}(x) = P_{2n-1,f,0}(x)$$

Ejemplo 14 *Sea $g(x) = \cos(x)$. Calcular $P_{n,f,0}(x)$.*

Al igual que ocurrió con la función seno, las derivadas sucesivas de g mantienen un ciclo de 4:

$$g'(x) = -\operatorname{sen}(x) \qquad g'''(x) = \operatorname{sen}(x)$$

$$g''(x) = -\cos(x) \qquad g^{(4)}(x) = \cos(x)$$

De modo que,

$$g'(0) = 0 \qquad g'''(0) = 0$$

$$g''(0) = -1 \qquad g^{(4)}(0) = 1$$

De manera análoga a lo que hicimos con $f(x) = \operatorname{sen}(x)$, podemos dar las siguientes distinciones en la derivada de g:

$$g^{(k)}(0) = \begin{cases} (-1)^m & k = 2m, m \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\ \\ 0 & k = 2m+1, m \in \mathbb{N} \cup \{0\} \end{cases}$$

Nuevamente escribamos los polinomios de Taylor distinguiendo la paridad del orden del polinomio:

$$P_{2n,g,0}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^{n} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad \textit{para } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

$$P_{2n+1,g,0}(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\qquad \textit{para } n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$$

En este caso el $(2n+1)$-ésimo polinomio de Taylor de g tiene grado $2n$, puesto que $f^{(2n+1)}(0)=0$. Y de acuerdo con las fórmulas que obtuvimos, se aprecia que para toda $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$,

$$P_{2n+1,g,0}(x)=P_{2n,g,0}(x)$$

Si observamos con cuidado los polinomios de Taylor que obtuvimos para $f(x)=\operatorname{sen}(x)$ y $g(x)=\cos(x)$ se puede notar una relación curiosa entre ellos:

$$P'_{2n+1,f,0}(x)=P_{2n,g,0}(x)$$

Así mismo,

$$P'_{2n,g,0}(x)=-P_{2n-1,f,0}(x)$$

Esto es sumamente interesante si tomamos en cuenta que $f'(x)=g(x)$ y $g'(x)=-f(x)$, y nos lleva a plantear la conjetura de que en general los polinomios de Taylor de f' pueden obtenerse derivando los polinomios de Taylor de f. Y por supuesto, así ocurre. Vamos a enunciar con más formalidad esta idea y con ello daremos por terminada la clase de hoy.

Proposición 15 *Sean $f,g:I\to\mathbb{R}$ funciones n-veces derivables en $a\in I$ y $c\in\mathbb{R}$. Entonces*

$$P_{n,f+g,a}(x)=P_{n,f,a}(x)+P_{n,g,a}(x)\qquad y\qquad P_{n,cf,a}(x)=cP_{n,f,a}(x)$$

Dem. Queda de ejercicio. ■

Proposición 16 *Sea $f:I\to\mathbb{R}$ una función $(n+1)$-veces derivable en $a\in I$. Entonces*

$$P_{n,f',a}(x)=P'_{n+1,f,a}(x)$$

Dem. Primero hay que destacar que dado que f es $(n+1)$-veces derivable en a, entonces f' es n-veces derivable en a. De modo que tiene sentido hablar de $P_{n,f',a}(x)$.

De acuerdo a la definición de $P_{n,f',a}(x)$ se tiene que

$$P_{n,f',a}(x)=f'(a)+(f')'(a)(x-a)+\frac{(f')''(a)}{2}(x-a)^2+\cdots+\frac{(f')^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Es decir,

$$P_{n,f',a}(x)=f'(a)+f''(a)(x-a)+\frac{f'''(a)}{2}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n+1)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Ahora bien, tomamos

$$P_{n+1,f,a}(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

y calculamos la derivada:

$$P'_{n+1,f,a}(x)=f'(a)+f''(a)(x-a)+\frac{f'''(a)}{2}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n+1)}(a)}{n!}(x-a)^n=P_{n,f',a}(x)$$

Por lo tanto,

$$P_{n,f',a}(x)=P'_{n+1,f,a}(x)$$

■