Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Cálculo I

Lista 2

Elías López Rivera

elias.lopezr@ciencias.unam.mx

Fecha: 11/07/2025

Probelma 36

Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de Fibonacci

- *Demuestre que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ converge, hint: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ converge*
- *Demuestre que $f_{n+2}f_n - f_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$*
- *Deduzca que:*

$$\left|\frac{f_{n+1}}{f_n} - \frac{f_{n+2}}{f_{n+1}}\right| < \frac{1}{n^2} \quad \forall\, n > 4 \quad n \in \mathbb{N}$$

- *Pruebe que:*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi$$

Demostración.

Tenemos que sea $n \in \mathbb{N}$ tal que , entonces $n(n+1) < (n+1)^2$, por tanto $\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n(n+1)}$, por tanto:

$$1 + \sum_{i=2}^{\infty}\frac{1}{n} < 1 + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$$

Por tanto $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ converge

Demostremos que $f_{n+2}f_n - f_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$, por inducción fuerte:

- Base de Inducción

$$f_3 f_1 - f_2^2 = 2(1) - 1 = 1^2$$

- Hipotesis de imducción

$$\exists\, k \in \mathbb{N} : n \leq k \implies f_{n+2}f_n - f_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$$

- Paso inductivo:

$$f_{k+3}f_{k+1} - f_{k+2}^2 = (f_{k+2} + f_{k+1})(f_k + f_{k-1}) - (f_{k+1} + f_k)$$

$$= f_{k+2}f_k - f_{k+1}^2 + f_{k+2}f_{k-1} + f_{k+1}f_k - 2f_{k+1}f_k + f_{k+1}f_{k-1} - f_k^2$$

$$\overset{\textbf{H.I}}{=} (-1)^{k+1} + f_{k+2}f_{k-1} - f_{k+1}f_k + (-1)^k = f_{k+2}(f_{k+1} - f_k) - f_{k+1}(f_{k+2} - f_{k+1})$$

$$= -f_{k+2}f_k + f_{k+1}^2 + f_{k+2}f_{k+1} - f_{k+2}f_{k+1} = -f_{k+2}f_k + f_{k+1}^2 \overset{\textbf{H.I}}{=} (-1)^{k+2}$$

Ahora demostraremos que $f_n\, f_{n+1} > n^2$ para $n > 4$, $n \in \mathbb{N}$, de nuevo por inducción:

- Base de inducción:

$$f_5 f_{5+1} = 5(8) = 40 > 25 = 5^2$$

- Hipótesis de inducción:

$$\exists\, k \in \mathbb{N} : f_k f_{k+1} \geq k^2 \quad k > 4$$

- Paso inductivo:

$$f_{k+1}f_{k+2} = f_{k+1}(f_{k+1} + f_k) > f_{k+1}(f_k + f_k) \overset{\textbf{H.I}}{\geq} 2k^2$$

  Como $k > 2$ entonces $k(k-2) > 1 \implies k^2 > 2k+1 \implies 2k^2 > (k+1)^2$, por tanto:

$$f_{k+1}f_{k+2} > 2k^2 > (k+1)^2$$

De lo anterior tenemos que:

$$\left|\frac{f_{n+1}}{f_n} - \frac{f_{n+2}}{f_{n+1}}\right| = \left|\frac{f_{n+1}^2 - f_n f_{n+2}}{f_n f_{n+1}}\right| = \left|\frac{(-1)^{n+1}}{f_n f_{n+1}}\right| = \frac{1}{f_n f_{n+1}} < \frac{1}{n^2}$$

Luego tenemos que la serie $\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^2}$ converge, entonces sea $\epsilon > 0$ existe $r \in \mathbb{N}$ tal que si $m > k > r$, entonces $\sum_{i=k+1}^{m} \frac{1}{i^2} < \epsilon$, luego tenemos que:

$$\left|\frac{f_{m+2}}{f_{m+1}} - \frac{f_{k+2}}{f_{k+1}}\right| \leq \left|\frac{f_{m+2}}{f_{m+1}} - \frac{f_{m+1}}{f_m}\right| + \left|\frac{f_{m+1}}{f_m} - \frac{f_m}{f_{m-1}}\right| + \cdots + \left|\frac{f_{k+3}}{f_{k+2}} - \frac{f_{k+2}}{f_{k+1}}\right| < \frac{1}{m^2} + \frac{1}{(m-1)^2} + \cdots + \frac{1}{(k+1)^2} \leq \epsilon$$

Por tanto la sucesión $a_n = \frac{f_{n+1}}{f_n}$ es de Cauchy y es convergente, ahora notemos que:

$$a_n = \frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{f_n + f_{n-1}}{f_n} = 1 + \frac{f_{n-1}}{f_n} = 1 + \frac{1}{a_{n-1}}$$

Por tanto tenemos que $\lambda := \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ cumple que:

$$\lambda = 1 + \frac{1}{\lambda} \implies \lambda^2 = \lambda + 1 \implies \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

De donde se sigue que $\lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ o $\lambda = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, como $a_n > 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$, se conlcuye que $\lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi$ $\square$