Problema 4

Elías López Rivera [1], Adolfo Ángel Cardoso Vásquez [2]
[1] [2] Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias

19 de julio de 2024

1. Enunciado

Considerar $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de tal manera que:

$$T(e_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad T(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad T(e_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Calcular el rango y el kernel de la T

2. Solución

Tenemos que la representación matricial de la transformación lineal, repecto a las bases canónicas, es:

$$[T] = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Para encontrar una base para el rango de T, bastara reducir por columnas a la representación matricial, tendremos que todas las columnas diferentes de cero despues de este proceso necesariamente representaran vectores linealmente independientes dentro de $\mathbb{R}^3$, como todo elemento del rango puede verse como combinación lineal de la tranformación valuada en la base canónica se sigue que estos vectores seran bases del rango.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_3 = 2\,C_3 - C_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_3 = C_3 - 2\,C_2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

De lo anterior tenemos que:

$$Rank(T) = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Ahora debemos encontar una base para el kernel de T, para lo cual bastara resolver el sistema de ecuaciones homogéneo $[T]\,x = 0$, para lo que reduciremos por filas a la matríz $[T]$ para posteriormente resolver el sistema por sustitución hacia atras:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 = R_2 - R_3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De esto se sigue que el sistema a resolver es:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_3 &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 0 \\ 0\,x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Aplicando sustitución asi atras se sigue que:

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{1}{2}\,x_3 \\ x_2 &= -x_3 \\ x_3 &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Por tanto el kernel es generado por un solo vector, al ser uno solo por definición debe representar una base del kernel, por tanto:

$$ker(T) = \left\langle \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$