Problema 14

Elías López Rivera [1]

[1] Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias.

{[1]elopezr2300}@alumno.ipn.mx.

7 de julio de 2025

1. Enunciado

i)Sean x, $y \in \mathbb{R}$ dos números reales distintos. **Demuestre** que existen dos vecindades U de x y V de y tales que $U \cap V = \emptyset$. **Deduzca** que para todo $x \in \mathbb{R}$ el conjuno $\{x\}$, es la intersección de todas sus vecindades.

2. Solución

Sean x, y dos números reales diferentes, por tricotomía $x < y$ ó $x > y$, tomaremos que $x < y$

Definimos $\delta := \frac{|x-y|}{2}$, es claro que $\delta > 0$.

Ahora definamos $V := (x - \delta, x + \delta)$ $U := (y - \delta, y + \delta)$, Como U, V son dos intervalos abiertos que contienen a x, y respectivamente se sigue que V es vecindad de x, y que U es vecindad de y.

A su vez notamos que :

$$x + \delta = x + \frac{|x-y|}{2} = \frac{x}{2} + \frac{y}{2} = y - \frac{|x-y|}{2} = y - \delta$$

Demostremos que $U \cap V = \emptyset$

Procedamos por contradicción es decir $\exists\, r \in \mathbb{R} : r \in V \cap U \implies r < x + \delta, r > y - \delta$ de donde se sigue que $r = x + \delta = y - \delta$ pero esto implica que $r \notin U$, $r \notin V$, una contradicción.

Se concluye que: $U \cap V = \emptyset$

ii) Sea $\overline{X} := \bigcap_{V \in V(x)} V$

Es claro que cualquier vecindad de x debe contener a x, de donde se sigue: $x \in \overline{X}$

Ahora tomemos $a > x$, demostremos que $a \notin \overline{X}$

Podemos definir $a := x + \epsilon$, para algún $\epsilon > 0$, es claro que sea $I := (x - \epsilon, x + \epsilon)$, tenemos que $I \in V(x)$, pero $a \notin I$, de esto se sigue que $a \notin \overline{X}$ (el caso $a < x$ es análogo)

De esto se concluye: $\overline{X} = \{x\}$