



Probelma 36

Sea $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión de Fibonacci

- Demuestre que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, hint: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ converge
- Demuestre que $f_{n+2}f_n - f_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$
- Deduzca que:

$$\left| \frac{f_{n+1}}{f_n} - \frac{f_{n+2}}{f_{n+1}} \right| < \frac{1}{n^2} \quad \forall n > 4 \quad n \in \mathbb{N}$$

- Pruebe que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \phi$$

Demostración.

Tenemos que sea $n \in \mathbb{N}$ tal que , entonces $n(n+1) < (n+1)^2$, por tanto $\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n(n+1)}$, por tanto:

$$1 + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{n} < 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

Por tanto $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge

Demostremos que $f_{n+2}f_n - f_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$, por inducción fuerte:

- Base de Inducción

$$f_3f_1 - f_2^2 = 2(1) - 1 = 1^2$$

- Hipotesis de inducción

$$\exists k \in \mathbb{N} : n \leq k \implies f_{n+2}f_n - f_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$$

- Paso inductivo:

$$\begin{aligned}
f_{k+3}f_{k+1} - f_{k+2}^2 &= (f_{k+2} + f_{k+1})(f_k + f_{k-1}) - (f_{k+1} + f_k) \\
&= f_{k+2}f_k - f_{k+1}^2 + f_{k+2}f_{k-1} + f_{k+1}f_k - 2f_{k+1}f_k + f_{k+1}f_{k-1} - f_k^2 \\
&\stackrel{\text{H.I}}{=} (-1)^{k+1} + f_{k+2}f_{k-1} - f_{k+1}f_k + (-1)^k = f_{k+2}(f_{k+1} - f_k) - f_{k+1}(f_{k+2} - f_{k+1}) \\
&= -f_{k+2}f_k + f_{k+1}^2 + f_{k+2}f_{k+1} - f_{k+2}f_{k+1} = -f_{k+2}f_k + f_{k+1}^2 \stackrel{\text{H.I}}{=} (-1)^{k+2}
\end{aligned}$$

Ahora demostraremos que $f_n f_{n+1} > n^2$ para $n > 4$, $n \in \mathbb{N}$, de nuevo por inducción:

- Base de inducción:

$$f_5 f_{5+1} = 5(8) = 40 > 25 = 5^2$$

- Hipótesis de inducción:

$$\exists k \in \mathbb{N} : f_k f_{k+1} \geq k^2 \quad k > 4$$

- Paso inductivo:

$$f_{k+1}f_{k+2} = f_{k+1}(f_{k+1} + f_k) > f_{k+1}(f_k + f_k) \stackrel{\text{H.I}}{\geq} 2k^2$$

Como $k > 2$ entonces $k(k-2) > 1 \implies k^2 > 2k+1 \implies 2k^2 > (k+1)^2$, por tanto:

$$f_{k+1}f_{k+2} > 2k^2 > (k+1)^2$$

De lo anterior tenemos que:

$$\left| \frac{f_{n+1}}{f_n} - \frac{f_{n+2}}{f_{n+1}} \right| = \left| \frac{f_{n+1}^2 - f_n f_{n+2}}{f_n f_{n+1}} \right| = \left| \frac{(-1)^{n+1}}{f_n f_{n+1}} \right| = \frac{1}{f_n f_{n+1}} < \frac{1}{n^2}$$

Luego tenemos que la serie $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^2}$ converge por criterio de la integral, entonces sea $\epsilon > 0$ existe $r \in \mathbb{N}$ tal que si $m > k > r$, entonces $\sum_{i=k+1}^m \frac{1}{i^2} < \epsilon$, luego tenemos que:

$$\left| \frac{f_{m+2}}{f_{m+1}} - \frac{f_{k+2}}{f_{k+1}} \right| \leq \left| \frac{f_{m+2}}{f_{m+1}} - \frac{f_{m+1}}{f_m} \right| + \left| \frac{f_{m+1}}{f_m} - \frac{f_m}{f_{m-1}} \right| + \dots + \left| \frac{f_{k+3}}{f_{k+2}} - \frac{f_{k+2}}{f_{k+1}} \right| < \frac{1}{m^2} + \frac{1}{(m-1)^2} + \dots + \frac{1}{(k+1)^2} \leq \epsilon$$

Por tanto la sucesión $a_n = \frac{f_{n+1}}{f_n}$ es de Cauchy y es convergente, ahora notemos que:

$$a_n = \frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{f_n + f_{n-1}}{f_n} = 1 + \frac{f_{n-1}}{f_n} = 1 + \frac{1}{a_{n-1}}$$

Por tanto tenemos que $\lambda := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ cumple que:

$$\lambda = 1 + \frac{1}{\lambda} \implies \lambda^2 = \lambda + 1 \implies \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

De donde se sigue que $\lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ o $\lambda = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, como $a_n > 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$, se concluye que $\lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi$ □