Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias

Álgebra lineal

Tarea examen 1

Elías López Rivera[1] Adolfo Cardoso Vazquez [2]
{[1] `elias.lopezr`, [2] `hectorgb`}`@ciencias.unam.mx`

Fecha: 20/10/2024

Problema 1

Sea:

$$F = \{0, 1\}$$

con las operaciones modulo 2 definidas, es decir:

I. ***Suma:*** $0 + 0 = 0$, $0 + 1 = 1, 1 + 1 = 0$, $1 + 0 = 1$

II. ***Multiplicación:*** $1 \cdot 1 = 1$, $0 \cdot 0 = 0$, $0 \cdot 1 = 0$, $1 \cdot 0 = 0$

a) *Verificar que la multiplicación es una operación asociativa, que posee elemento neutro* 1 *y cada elemento distinto de* 0 *posee inverso multiplicativo*

b) *Confirmar la distributividad del producto sobre la suma*

Concluir que F *es un campo*

Demostración. □

Problema 2

Sea:

$$F = \mathbb{Z}_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

con las operaciones modulo 2 definidas, es decir:

I. ***Suma:*** $0+0=0$, $0+1=1, 1+1=0$, $1+0=1$

II. ***Multiplicación:*** $1 \cdot 1 = 1$, $0 \cdot 0 = 0$, $0 \cdot 1 = 0$, $1 \cdot 0 = 0$

a) *Verificar que la multiplicación es una operación asociativa, que posee elemento neutro* 1 *y cada elemento distinto de* 0 *posee inverso multiplicativo*

b) *Confirmar la distributividad del producto sobre la suma*

Concluir que F *es un campo*

Demostración. □

Problema 3

Sea:

$$F = \{a + b\sqrt{2}\,|a,\, b \in \mathbb{Q}\}$$

con las operaciones de suma y multiplicación:

a) *Comprobar que* F *es cerrado bajo la suma y la multiplicación de* $\mathbb{Q}$

b) *Demostrar que existe un elemento neutro para la suma (el cero) y para la multiplicación*

c) *Para cada elemento* $x = a + b\sqrt{2}$ *con* $x \neq 0$*, encontrar o demostrar la existencia de su inverso multiplicativo en* F

d) *Verificar las demas propiedades: existencia de inversos aditivos, asociatividad, conmutatividad y distributividad*

Concluir que F *es un campo*

Demostración.

a) Tomemos $x, y \in F$, tenemos que:

$$x + y = (a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2}) = (a + c) + (d + b)\sqrt{2}$$

Como $(a + c) \in \mathbb{Z}$ y $(b + d) \in Z$, se tiene que $x + y \in \mathbb{Z}$

Ahora veamos que:

$$x(y) = (a + b\sqrt{2})(c + d\sqrt{2}) = ac + ad\sqrt{2} + cb\sqrt{2} + cd(2) = (ac + 2cd) + (cb + ad)\sqrt{2}$$

Como $(ac + 2cd) \in \mathbb{Z}$ y $(cb + ad) \in \mathbb{Z}$, tenemos que $x(y) \in F$

b) Tenemos que $0 = 0 + 0\,\sqrt{2}$, como $0 \in F$, entonces $0 \in F$, como las operaciones de suma y multiplicación son las usuales se tiene que:

$$x = a + b\,\sqrt{2} + 0 = x \ \ \forall\, x \in F$$

Por tanto $(F, +)$ tiene un elemento neutro 0.

$\square$

Problema 4

Sea $F = \mathbb{Z}$ con la operaciones definidas de la siguiente forma:

- **Suma:** Para $a, b \in \mathbb{Z}$ se define
$$a \oplus b = a + b - 1.$$
- **Producto:** Para $a, b \in \mathbb{Z}$ se define
$$a \odot b = a \cdot b - a - b - 2.$$

I. Demostrar que $(F, \oplus)$ es un grupo abeliano. En particular, determinar el elemento neutro aditivo $e_\oplus$ y hallar el inverso aditivo de un elemento a.

II. Determinar el elemento neutro multiplicativo $e_\odot$ en $(F \setminus \{e_\oplus\}, \odot)$ y comprobar que no todo elemento $a \in F$ con $a \neq e_\oplus$ tiene inverso multiplicativo.

III. Verificar la distributividad de $\odot$ respecto a $\oplus$

Concluir que $(F, \oplus, \odot)$ no es un campo

Demostración.

(I)

- **Asociatividad**
Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$
$$\begin{aligned}(a \oplus b) \oplus c &= (a + b - 1) + c - 1\\ &= a + (b - 1 + c) - 1\\ &= a + (b + c - 1) - 1\\ &= a \oplus (b \oplus c).\end{aligned}$$
- **Conmutatividad**
Sean $a, b \in \mathbb{Z}$
$$\begin{aligned}a \oplus b &= a + b - 1\\ &= b + a - 1\\ &= b \oplus a.\end{aligned}$$
- **Neutro**
Proponemos $e_\oplus \in \mathbb{Z}$ como $e_\oplus = 1$, de modo que $\forall a \in \mathbb{Z}$
$$a \oplus e_\oplus = a + 1 - 1 = a,$$
en efecto $e_\oplus$ es el neutro.

- **Inverso**
  Sea $a \in \mathbb{Z}$ proponemos $b = -a + 2 \in \mathbb{Z}$, de modo que

  $$a \oplus b = a + (-a + 2) - 1 = (a + (-a)) + (2 + (-1)) = 0 + 1 = 1 = e_{\oplus}.$$

  Es decir b es el inverso de a.

$\therefore$ $(F, \oplus)$ es un grupo abeliano.

(II)

Suponemos $\exists\, e_{\odot} \in \mathbb{Z} \setminus \{e_{\oplus}\}$ neutro multiplicativo. Esto es $\forall a \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} a &= a \odot e_{\odot} \\ &= a \cdot (e_{\odot}) - a - (e_{\odot}) - 2 \\ &= e_{\odot}(a-1) - a - 2 \\ 2(a+1) &= e_{\odot}(a-1) \end{aligned}$$

Pero para $4 \in \mathbb{Z} \setminus \{e_{\oplus}\} \nexists e_{\odot} \in \mathbb{Z} \setminus \{e_{\oplus}\}$ tal que

$$\begin{aligned} 2(4+1) &= e_{\odot}(4-1) \\ 10 &= 3e_{\odot}. \end{aligned}$$

Es decir que $(F \setminus \{e_{\oplus}\}, \odot)$ no tiene neutro multiplicativo, y por tanto no exiten inversos multiplicativos.

(III)

Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} a \odot (b \oplus c) &= a \odot (b + c - 1) \\ &= a(b + c - 1) - a - (b + c - 1) - 2 \\ &= ab + ac - a - a - b - c + 1 - 2 \\ &= (ab - a - b - 2) + (ac - a - c - 2) + 2 + 1 \\ &= ((a \odot b) + (a \odot c) - 1) + 4 \\ &= (a \odot b) \oplus (a \odot c) + 4 \end{aligned}$$

Es decir en general las operaciones no son distributivas. $\square$

Problema 5

Sea:

$$F = \mathbb{R}^2$$

con las operaciones definidas de la siguiente forma:

I. ***Suma***:$(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d)$

II. ***Multiplicación***: $(a, b) \odot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$

a) *Verificar que la suma y el producto estan bien definidos y son operaciones en* F

b) *Demostrar que existe un elemento neutro para la suma* $(0, 0)$ *y para el producto* $(1, 0)$

c) *Comprobar que para cada elemento* $(a, b) \neq (0, 0)$ *le corresponde un inverso mutiplicativo.*

d) *Verificar la conmutatividad, la asociatividad y la distributividad del producto respecto a la suma*

Demostración.
a)
Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, por la cerradura de la suma en $\mathbb{R}$ se sigue que $(a + c), (b + d) \in \mathbb{R}$, es decir

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d) \in \mathbb{R}^2.$$

Y por la cerradura del producto en $\mathbb{R}$, entonces $ac, bd, ad, bc \in \mathbb{R}$, asi por la cerradura de la suma $ac - bd, ad + bc \in \mathbb{R}$ por tanto

$$(a, b) \in ()$$

$\square$

Problema 6

Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *se llama* ***función par*** *si para todo* $t \in \mathbb{R}$ *se cumple que* $f(t) = f(-t)$. *Demostrar que el conjunto* $P := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | f \text{ es par}\}$, *con las siguientes operaciones:*

$$\forall\, f, g \in P \;\; y \;\; c \in \mathbb{R} : (f + g)(s) = f(s) + g(s) \;\; y \;\; (cf)(s) = c\,(f(s))$$

Es un $\mathbb{R} - espacio\, vectorial$

Demostración.

Sea $F := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | f\ es\ funcion\}$, en clase se ha demostrado que F con las operaciones definidas es un espacio vectorial real por tanto basta demostrar que $P \subset F$ es un subespacio de F, para esto tomamos $f, g \in P$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, dmostraremos que $\lambda f + g \in P$:

$$\lambda f + g(-x) = \lambda f(-x) + g(-x) = \lambda f(x) + g(x) = \lambda f + g(x)$$

Por tanto $\lambda f + g \in P$, es decir P es un subespacio vectorial de F □

Problema 7

Sea $V = \{(a_1, a_2) | a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$. *Para* (a_1, a_2), $(b_1, b_2) \in V$ *y* $c \in \mathbb{R}$ *definimos* $(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 b_2)$ *y* $c \cdot (a_1, a_2) = (ca_1, a_2)$. *¿Es* V *un* $\mathbb{R} -$ *espacio vectorial*

Demostración.

Si V cumpliera ser un espacio vectorial bajo la soperaciones definidas se tendria que necesariamente $(V, +)$ es un grupo abeliano, proponemos que $(0, 1) \in V$ es un neutro para V

$$(a_1, a_2) + (0, 1) = (a_1 + 0, a_2 \cdot 1) = (a_1, a_2) \ \ \forall \ (a_1, a_2) \in V$$

Ahora tomemos $(b_1, 0) \in V$, demostremos que este elemento no tiene inverso en V:

$$(b_1, 0) + (a_1, a_2) = (b_1 + a_1, 0 \cdot a_2) = (b_1, 0) \neq (0, 1) \ \ \forall \ (a_1, a_2) \in V$$

Por tanto $(V, +)$ no es un grupo abeliano, y por tanto V no es un espacio vectorial con esas operaciones □

Problema 8

Sea $V = \{(a_1, a_2) | a_1, a_2 \in \mathbb{F}\}$, *donde* $\mathbb{F}$ *es un campo. Definimos la suma de elementos de* V *coordenada a coordenada. Para* $c \in \mathbb{F}$ *y* (a_1, a_2) *definimos el producto como* $c\,(a_1, a_2) = (a_1, 0)$. *¿Es* V *un* $\mathbb{F} -$ *espacio vectorial con las operaciones definidas?*

Demostración.

Si V fuera un espacio vectorial tendriamos que para $1 \in \mathbb{F}$, neutro para el producto de $\mathbb{F}$, deberia cumplir que:

$$1 \cdot (a_1, a_2) = (a_1, a_2) \ \ \forall (a_1, a_2) \in V$$

Sin embargo tomemos (b_1, b_2), tal que $b_2 \neq 0$, donde 0 es el neutro para la suma de $\mathbb{F}$, tenemos que:

$$1 \cdot \ (b_1, b_2) = (b_1, 0) \neq (b_1, 0)$$

Por tanto V no puede ser un espacio vectorial con esa operación como producto por escalar

$\square$

Problema 9

Sea $V = \{(a_1, a_2)\,|a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$*. Para* (a_1, a_2), $(b_1, b_2) \in V$ *y* $c \in \mathbb{R}$ *definimos* $(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + 2b_1, a_2 + 3b_2)$ *y* $c\,(a_1, a_2) = (ca_1, a_2)$. *¿Es* V *un* $\mathbb{R} - espacio\,vectorial$

Demostración.

$\square$