



Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Álgebra superior 2

Tarea examen 1

Elías López Rivera

elias.lopezr@ciencias.unam.mx

Fecha: 27/10/2024



Lema 1

Sea R un anillo conmutativo con 1 se cumple que $-(ac) = a(-c) \quad \forall a, c \in R$

Demostración.

Sean $a, c \in R$, notemos que por la distributividad del producto sobre la suma:

$$ac + a(-c) = a(c + (-c))$$

Como $(-c) \in R$ es inverso para c :

$$ac + a(-c) = a(c + (-c)) = a(0)$$

Como en cualquier anillo conmutativo con 1 se cumple que $a(0) = 0$, para todo $a \in R$:

$$ac + a(-c) = a(c + (-c)) = a(0) = 0$$

Como en un anillo conmutativo con 1 los inversos son únicos se tiene que necesariamente $-(ac) = a(-c)$

□

Problema 1

A partir de los naturales \mathbb{N} define $\mathbb{Z} = (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) / \sim$ donde $(n, m) \sim (k, l)$ si y solo si $n + l = m + k$. Induce las operaciones de suma y producto en \mathbb{Z} utilizando aquellas de \mathbb{N} , demuestra que están bien definidas (en el sentido de que no dependen de los representantes) y demuestra que el resultado es un anillo conmutativo con 1 que contiene a \mathbb{N}

Definimos $\oplus : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$:

$$[(n, m)] \oplus [(r, s)] = [(n + r, m + s)]$$

Donde $+$ es la suma definida en \mathbb{N} .

Definimos $\odot : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$:

$$[(n, m)] \odot [(r, s)] = [(nr + ms, mr + ns)]$$

donde $+$ es la suma definida en \mathbb{N} y \cdot es el producto en \mathbb{N}

Veamos que \oplus no depende de los representantes:

Demostración.

Sean $[(n, m)]$, $[(r, s)]$, $[(l, k)]$, $[(f, g)]$, tal que $[(n, m)] = [(l, k)]$ y $[(r, s)] = [(f, g)]$, tenemos entonces que:

$$(n, m) \sim (l, k) \implies n + k = m + l$$

$$(r, s) \sim (f, g) \implies r + g = s + f$$

Por tanto usando que $+$ en \mathbb{N} es asociativa y conmutativa (ignorando paréntesis):

$$n + k + r + g = m + l + s + f$$

Por tanto tenemos que:

$$[(n, m)] \oplus [(r, s)] = (n + r, m + s) \sim (l + f, k + g) = [(l, k)] \oplus [(f, g)]$$

Como ambos elementos están relacionados sus clases de equivalencias son iguales:

$$[(n, m)] \oplus [(r, s)] = [(l, k)] \oplus [(f, g)]$$

□

Ahora veamos que \odot no depende de los representantes:

Demostración.

Sean $[(n, m)]$, $[(r, s)]$, $[(l, k)]$, $[(f, g)]$, tal que $[(n, m)] = [(l, k)]$ y $[(r, s)] = [(f, g)]$, tenemos entonces que:

$$(n, m) \sim (l, k) \implies n + k = m + l$$

$$(r, s) \sim (f, g) \implies r + g = s + f$$

Por tanto tenemos que:

$$r(n + k) + s(m + l) + l(r + g) + k(s + f) = r(m + l) + s(n + k) + l(s + f) + k(r + g)$$

Utilizando la distributividad del producto sobre la suma de \mathbb{N} así como sus respectivas conmutatividades obtenemos:

$$rn + rk + sm + sl + lr + lg + ks + kf = mr + lr + ns + ks + sl + fl + rk + gk$$

Como las leyes de cancelación son válidas para la suma en \mathbb{N} :

$$nr + ms + gl + kf = mr + ns + lf + kg$$

Por tanto tenemos que:

$$[(n, m)] \odot [(r, s)] = (nr + ms, mr + ns) \sim (lf + kg, gl + kf) = [(l, k)] \odot [(f, g)]$$

Como ambos elementos están relacionados sus clases de equivalencias son iguales:

$$[(n, m)] \odot [(r, s)] = [(l, k)] \odot [(f, g)]$$

□

Demostraremos que $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$ es un anillo conmutativo con 1

i) (\mathbb{Z}, \oplus) es grupo abeliano:

▪ **a) Conmutatividad**

$$\forall [(n, m)], [(r, s)] \in \mathbb{Z} : ([(n, m)] \oplus [(r, s)] = [(r, s)] \oplus [(n, m)])$$

Demostración.

Sean $[(n, m)], [(r, s)] \in \mathbb{Z}$, tenemos que:

$$[(n, m)] \oplus [(r, s)] = [(n + r, m + s)]$$

Como $+$ es conmutativa en \mathbb{N} :

$$[(n, m)] \oplus [(r, s)] = [(n + r, m + s)] = [(r + n, s + m)] = [(r, s)] \oplus [(n, m)]$$

□

■ **b) Asociatividad**

$$\forall [(n, m)], [(r, s)], [(t, u)] \in \mathbb{Z} : ([(n, m)] \oplus ([(r, s)] \oplus [(t, u)])) = ([(n, m)] \oplus [(r, s)]) \oplus [(t, u)]$$

Demostración.

Sean $[(n, m)], [(r, s)], [(t, u)] \in \mathbb{Z}$, tenemos que:

$$[(n, m)] \oplus ([(r, s)] \oplus [(t, u)]) = [(n + (r + t), m + (s + u))]$$

Debido a que $+$ es asociativa en \mathbb{N} :

$$\begin{aligned} [(n, m)] \oplus ([(r, s)] \oplus [(t, u)]) &= [(n + (r + t), m + (s + u))] \\ &= [((n + r) + t, (m + s) + u)] = ([(n, m)] \oplus [(r, s)]) \oplus [(t, u)] \end{aligned}$$

□

■ **c) Existencia de neutro**

$$\exists [(0, 0)] \in \mathbb{Z} : (\forall [(n, m)] \in \mathbb{Z} : [(n, m)] \oplus [(0, 0)] = [(n, m)])$$

Demostración.

Sea $[(n, m)] \in \mathbb{Z}$, veamos que:

$$[(n, m)] \oplus [(0, 0)] = [(n + 0, m + 0)]$$

Como $0 \in \mathbb{N}$ es neutro para $+$ se tiene que:

$$[(n, m)] \oplus [(0, 0)] = [(n + 0, m + 0)] = [(n, m)]$$

□

■ **d) Existencia de inversos**

$$\forall [(n, m)] \in \mathbb{Z} (\exists [(m, n)] \in \mathbb{Z} : [(m, n)] \oplus [(n, m)] = [(0, 0)])$$

Demostración.

Sean $[(m, n)], [(n, m)] \in \mathbb{Z}$, se cumple que:

$$[(n, m)] \oplus [(m, n)] = [(n + m, m + n)]$$

Por la conmutatividad de $+$ en \mathbb{N} y que $0 \in \mathbb{N}$ es neutro para $+$

$$(n + m) + 0 = (m + n) + 0 \implies (n + m, m + n) \sim (0, 0)$$

Como ambos elementos estan relacionados bajo la relación de equivalencia \sim , tenemos que sus clases de equivalencia son necesariamente iguales:

$$[(n + m, m + n)] = [(0, 0)]$$

Por tanto:

$$[(n, m)] \oplus [(m, n)] = [(n + m, m + n)] = [(0, 0)]$$

□

De **a), b), c), d)** se sigue que (\mathbb{Z}, \oplus) es un grupo abeliano.

ii) Demostraremos que (\mathbb{Z}, \odot) es un monoide conmutativo.

■ **a) Conmutatividad**

$$\forall [(n, m)], [(r, s)] \in \mathbb{Z} ([(n, m)] \odot [(r, s)] = [(r, s)] \odot [(n, m)])$$

Demostración.

Sean $[(n, m)], [(r, s)] \in \mathbb{Z}$ tenemos que:

$$[(n, m)] \odot [(r, s)] = [(nr + ms, mr + ns)]$$

Como el producto de \mathbb{N} y la suma de \mathbb{N} es conmutativo:

$$[(n, m)] \odot [(r, s)] = [(nr + ms, mr + ns)] = [(rn + sm, sn + rm)] = [(r, s)] \odot [(n, m)]$$

□

■ b) Asociatividad

$$\forall [(n, m)], [(r, s)], [(t, u)] \in \mathbb{Z} : ([[(n, m)] \odot ([[(r, s)] \odot [(t, u)])]) = ([[(n, m)] \odot [(r, s)]] \odot [(t, u)])$$

Demostración.

$$[(n, m)] \odot ([[(r, s)] \odot [(t, u)])] = [(n, m)] \odot [(rt + su, st + ru)] = [(n(rt + su) + m(st + ru), m(rt + su) + n(st + ru))]$$

Aplicando la distributividad del producto sobre la suma \mathbb{N} :

$$[(n, m)] \odot ([[(r, s)] \odot [(t, u)])] = [(n(rt) + n(su) + m(st) + m(ru), m(rt) + m(su) + n(st) + n(ru))]$$

Aplicando la asociatividad del producto de \mathbb{N}

$$[(n, m)] \odot ([[(r, s)] \odot [(t, u)])] = [((nr)t + (ns)u + (ms)t + (mr)u, (mr)t + (ms)u + (ns)t + (nr)u)]$$

Aplicando de nuevo la distributividad del producto sobre la suma de \mathbb{N}

$$\begin{aligned} [(n, m)] \odot ([[(r, s)] \odot [(t, u)])] &= [(t(nr + ms) + u(ns + mr), t(mr + ns) + u(ms + nr)u)] \\ &= [(nr + ms, ns + mr)] \odot [(t, u)] \\ &= ([[(n, m)] \odot [(r, s)]] \odot [(t, u)]) \end{aligned}$$

□

■ c) Existencia de neutro

$$\exists [1, 0] \in \mathbb{Z} (\forall [(n, m)] \in \mathbb{Z} : [(n, m)] \odot [(0, 1)] = [(n, m)])$$

Demostración.

Tomemos $[(n, m)] \in \mathbb{Z}$, tenemos que:

$$[(n, m)] \odot [(0, 1)] = [(n0 + m1, m0 + n1)]$$

Como el producto en \mathbb{N} cumple que $n0 = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ y 1 es neutro para el producto tenemos que:

$$[(n, m)] \odot [(0, 1)] = [(n0 + m1, m0 + n1)] = [(0 + m, 0 + n)]$$

Como 0 es neutro para + en \mathbb{N} finalmente:

$$[(n, m)] \odot [(0, 1)] = [(n, m)]$$

□

De **a), b), c)** tenemos que (\mathbb{Z}, \odot) es un monoide conmutativo

iii) Demostraremos la distributividad de \odot sobre \oplus en \mathbb{Z} (solo lo haremos por la derecha pues tanto \odot como \oplus son conmutativas)

$$\forall [(n, m)], [(r, s)], [(l, t)] \in \mathbb{Z} : ([(n, m)] \odot ([(r, s)] \oplus [(l, t)]) = ([(n, m)] \odot [(r, s)]) \oplus ([(n, m)] \odot [(l, t)]))$$

Demostración.

Sean $[(n, m)], [(r, s)], [(l, t)] \in \mathbb{Z}$ se sigue que:

$$[(n, m)] \odot ([(r, s)] \oplus [(l, t)]) = [(n, m)] \odot [(r + l, s + t)] = [(n(r + l) + m(s + t), m(r + l) + n(s + t))]$$

Como el producto de \mathbb{N} se distribuye sobre su suma:

$$[(n, m)] \odot ([(r, s)] \oplus [(l, t)]) = [(nr + nl + ms + mt, mr + ml + ns + nt)]$$

Usando la conmutatividad del producto y de la suma en \mathbb{N} :

$$[(n, m)] \odot ([(r, s)] \oplus [(l, t)]) = [(nr + ms, mr + ns)] \oplus [(nl + mt, ml + nt)] = ([(n, m)] \odot [(r, s)]) \oplus ([(n, m)] \odot [(l, t)])$$

□

De **i), ii), iii)** tenemos que $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$ es un anillo conmutativo con 1

Ahora definimos la función $i : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$, de tal manera que $i(n) = [(n, 0)]$, si restringimos i de la siguiente manera $i : \mathbb{N} \rightarrow i[\mathbb{N}] \subset \mathbb{Z}$, donde $i[\mathbb{N}]$ es la imagen de \mathbb{N} bajo i obtenemos una función suprayectiva, bastaría probar que i es inyectiva para argumentar la biyección entre \mathbb{N} y un subconjunto de \mathbb{Z} , lo que nos animaría a decir que \mathbb{N} está contenido en \mathbb{Z} , procedemos a demostrarlo:

Demostración.

Sean $m, n \in \mathbb{N}$ tal que $i(n) = i(m)$, se sigue que:

$$i(n) = [(n, 0)] = [(m, 0)] = i(m)$$

Como las clases son iguales los representantes necesariamente están relacionados:

$$(n, 0) \sim (m, 0) \implies n + 0 = m + 0$$

De nuevo como $0 \in \mathbb{N}$ es neutro para $+$ se sigue que:

$$n = m$$

Por tanto i es suprayectiva □

Problema 2

Demuestra que para todo elemento $[(n, m)] \in \mathbb{Z}$ se satisface exactamente una de las siguientes afirmaciones:

- *Existe $c \in \mathbb{N}/\{0\}$ tal que $[(n, m)] = [(c, 0)]$*
- *$[(n, m)] = [(0, 0)]$*
- *Existe $c \in \mathbb{N}/\{0\}$ tal que $[(n, m)] = [(0, c)]$*

Demostración.

Sean $n, m \in \mathbb{N}$ por tricotomía tenemos tres casos:

- $m < n$
- $n = m$
- $n < m$

i) Primero tomemos que $n < m$, por la definición del orden en \mathbb{N} tenemos que:

$$\exists c \in \mathbb{N}/\{0\} : n = m + c$$

Usando que 0 es neutro para la suma definida en \mathbb{N} , tenemos que:

$$n + 0 = m + c$$

Y por la relación de equivalencia definida anteriormente:

$$n + 0 = m + c \implies (n, m) \sim (c, 0)$$

Como estos dos elementos están relacionados sus clases de equivalencia son iguales necesariamente:

$$[(n, m)] = [(c, 0)]$$

ii) Ahora tomemos que $n = m$, usando nuevamente que el 0 es neutro para la suma de \mathbb{N} :

$$n + 0 = m + 0$$

De nuevo por la relación de equivalencia definida anteriormente:

$$n + 0 = m + 0 \implies (n, m) \sim (0, 0)$$

Como estos dos elementos están relacionados sus clases de equivalencia son iguales necesariamente:

$$[(n, m)] = [(0, 0)]$$

iii) Finalmente tomamos el caso $m < n$, por la definición del orden en \mathbb{N} tenemos que:

$$\exists c \in \mathbb{N}/\{0\} : m = n + c$$

Usando que 0 es neutro para la suma definida en \mathbb{N} , tenemos que:

$$n + c = m + 0$$

Y por la relación de equivalencia definida anteriormente:

$$n + c = m + 0 \implies (n, m) \sim (0, c)$$

Como estos dos elementos están relacionados sus clases de equivalencia son iguales necesariamente:

$$[(n, m)] = [(0, c)]$$

□

Problema 3

Demuestra que un elemento u de un anillo conmutativo con 1 tiene a lo más un inverso multiplicativo

Demostración.

Sea $a \in R$ tal que existe $u \in R$ con $a(u) = 1$, demostraremos que si se tiene que $a(u') = 1$, necesariamente $u' = u$:

$$a(u) = 1 = a(u')$$

Como $a(u') \in R$ tenemos que existe $-a(u') \in R$, sumando este de ambos lados:

$$a(u) + (-au') = a(u') + (-au') = 0$$

Aplicando el lema 1 tenemos que $-au' = a(-u')$ y la distributividad del producto sobre la suma:

$$a(u) + (-au') = a(u + (-u')) = 0$$

Multiplicando ambos lados por u :

$$u(a(u + (-u'))) = 0u$$

Usando el hecho de que $0u = 0$ para todo $u \in R$, y la asociatividad del producto:

$$(ua)(u + (-u')) = 0$$

Usando la conmutatividad del producto y nuestra hipótesis:

$$(ua)(u + (-u')) = (au)(u + (-u')) = 1(u + (-u')) = 0$$

Como 1 es neutro para el producto:

$$u + (-u') = 0 = u' + (-u')$$

Como las leyes de cancelación son validas para la suma en un anillo conmutativo con 1 se concluye que:

$$u = u'$$

□

Problema 4

Demuestra: $\forall a, b \in \mathbb{Z} (a > 0 \wedge b > 0 \implies a^2 > b^2 \implies a > b)$

Demostración.

Por proposición tenemos que segun la proposición 1 $\forall a, b, c, \in \mathbb{Z} : (a < b \implies a + c < b + c)$, sea $-b^2 \in \mathbb{Z}$ el inverso aditivo de b^2 :

$$a^2 + (-b^2) > b^2 + (-b^2)$$

Por tanto:

$$a^2 - b^2 > 0$$

Luego tomemos $(a + b)(a - b)$, aplicando la distributividad del producto sobre la suma

$$(a + b)(a - b) = (a(a + b) - b(a + b)) = a^2 + ab - b(a) - b(b)$$

Aplicando la conmutatividad y el lema 1:

$$(a + b)(a - b) = a^2 + ab - ab - b^2 = a^2 - b^2$$

Ahora por hipótesis $a > 0 \wedge b > 0$, por tanto $a + b > 0 + a > 0$ esto por la proposición 1, luego tenemos que $(a - b) > 0$, pues de otra manera por la proposición 2 $\forall a, b \in \mathbb{Z} : (a > 0 \wedge b < 0 \implies ab < 0)$ tendríamos que:

$$(a + b), (a - b) \in \mathbb{Z} : (a + b) > 0 \wedge (a - b) < 0 \implies a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) < 0$$

Lo que contradice nuestra hipótesis, por tanto usando nuestra proposición 1 tenemos que:

$$a - b > 0 \implies a - b + b > 0 + b \implies a > 0$$

□

Problema 5

Demuestra que un dominio entero R se vale la ley de cancelación: $\forall a, b, c \in R (a \neq 0 \wedge ab = ac \implies b = c)$

Demostración.

Tomamos $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tal que $a \neq 0$, tenemos que:

$$ab = ac$$

Como ac es un elemento del dominio entero R , entonces este tiene un único inverso $-(ac) \in R$, sumando por ambos lados tenemos que:

$$ab + (-ac) = ac + (-ac)$$

Como $-(ac)$ se definió como el inverso bajo $+$ de ac , se sigue que:

$$ab + (-ac) = 0$$

Como $ab, -(ac) \in R$, podemos aplicar el lema 1 y posteriormente la distribución del producto sobre la suma:

$$ab + (-ac) = ab + a(-c) = a(b + (-c)) = 0$$

Como R es dominio entero necesariamente $a = 0$ o $(b + (-c)) = 0$, como por hipótesis $a \neq 0$, entonces $(b + (-c)) = 0$, por tanto sumando c a ambos lados de la igualdad:

$$b + (-c) + c = 0 + c \implies b + 0 = 0 + c \implies b = c$$

□

Problema 6

Demuestra que un elemento $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ del anillo de series formales $\mathbb{Q}[[x]]$ con coeficientes en \mathbb{Q} es una unidad en $\mathbb{Q}[[x]]$ si y solo si $a_0 \neq 0$

\Rightarrow) Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ es una unidad en el anillo de series formales $\mathbb{Q}[[x]]$ con coeficientes en \mathbb{Q} , entonces $a_0 \neq 0$

Demostración.

Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ una unidad en $\mathbb{Q}[[x]]$ tenemos que se cumple:

$$\exists \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \in \mathbb{Q}[[x]] : \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \odot \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \bar{1}$$

Donde \odot es el producto definido en $\mathbb{Q}[[x]]$ y $\bar{1}$ es el neutro para este producto, por tanto aplicando la definición de este

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \odot \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k+l=n} a_k b_l x^n$$

Expandiendo esta serie de potencias y reescribiendo a $\bar{1}$ en su forma de serie de potencia:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \odot \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = a_0 b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k+l=n} a_k b_l x^n = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} 0 x^n$$

Como dos series de potencias son iguales si y solo si todos sus terminos son iguales:

$$a_0 b_0 = 1 \quad y \quad 0 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k+l=n} a_k b_l x^n$$

Por tanto a_0 es una unidad en \mathbb{Q} , lo que implica que es diferente de 0. □

\Leftarrow) Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ es tal que $a_0 \neq 0$ entonces $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ es unidad en $\mathbb{Q}[[x]]$

Demostración.

Como $a_n \neq 0$ entonces a_n es una unidad en \mathbb{Q} , por tanto construimos $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, tal que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \odot \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \bar{1}$$

De donde se obtiene que:

$$a_0 b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l+k=n} a_l b_k x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 0 x^n$$

Que es equivalente a:

$$a_0 b_0 = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \left(\sum_{l+k=n} a_l b_k = 0 \right)$$

De aqui se sigue inmediatamente que $b_0 = a_0^{-1}$ donde a_0^{-1} es el inverso multiplicativo de a_0 , ahora para obtener b_{n+1} con $n \geq 1$ proponemos un proceso recursivo, supongamos que para $0 \leq r \leq n$, tenemos calculados los valores b_r , para obtener b_{n+1} proponemos lo siguiente:

$$\sum_{k+l=n+1} a_k b_l = \sum_{k=0}^{n+1} a_{n+1-k} b_k = 0$$

Esta igualdad es valida ya que el producto es conmutativo en \mathbb{Q} , por tanto reescribiendo:

$$a_0 b_{n+1} + \sum_{k=0}^n a_{n+1-k} b_k = 0$$

Como $\sum_{k=0}^n a_{n+1-k} b_k \in \mathbb{Q}$ y este es un anillo afirmamos la existencia de $-\sum_{k=0}^n a_{n+1-k} b_k \in \mathbb{Q}$ por tanto como a_0^{-1} también existe proponemos que:

$$b_{n+1} = a_0^{-1} \left(-\sum_{k=0}^n a_{n+1-k} b_k \right)$$

Vemos que todos los terminos de esta suma son conocidas pues conocemos todos los b_r con $0 \leq r \leq n$, veamos que:

$$a_0 \left(a_0^{-1} \left(-\sum_{k=0}^n a_{n+1-k} b_k \right) \right) + \sum_{k=0}^n a_{n+1-k} b_k$$

Aplicando la asociatividad del producto y la propiedad del neutro multiplicativo en \mathbb{Q} :

$$(a_0 a_0^{-1}) \left(- \sum_{k=0}^n a_{n+1-k} b_k \right) + \sum_{k=0}^n a_{n+1-k} b_k = - \sum_{k=0}^n a_{n+1-k} b_k + \sum_{k=0}^n a_{n+1-k} b_k = 0$$

Por tanto construimos la serie:

$$b_0 + a_0^{-1} \left(- \sum_{k=0}^0 a_{1-k} b_k \right) x + a_0^{-1} \left(- \sum_{k=0}^1 a_{2-k} b_k \right) x^2 + \cdots + \left(\sum_{k=0}^n a_{n+1-k} b_k \right) x^{n+1} + \cdots$$

Que es el inverso para $\sum_{i=0}^{\infty} a_n x^n$

□