Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Cálculo I
Tarea V
Elías López Rivera
elias.lopezr@ciencias.unam.mx

Problemas sobre derivavilidad

Ejercicio 1

Encuentre de la definición la derivada de las siguientes funciones:

i)

$$f(x) := x^2 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

ii)

$$f(x) := \sqrt{x} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

Demostración.

i) Por la definición de derivada:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Aplicamos esta sobre $f(x) = x^2$, en un punto fijo x_0:

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{x_0^2 + 2hx_0 + h^2 - x_0}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} = 2x_0 + h = 2x_0 \end{aligned}$$

Por tanto $f'(x_0) = 2x_0$, para todo $x_0 \in \mathbb{R}$

ii) Por la definición de derivada:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Aplicamos esta sobre $f(x) = \sqrt{x}$, en un punto fijo $x_0 \in \mathbb{R}^+$:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x_0+h} - \sqrt{x_0}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x_0+h} - \sqrt{x_0}}{h} \frac{\sqrt{x_0+h} + \sqrt{x_0}}{\sqrt{x_0+h} + \sqrt{x_0}}$$

$$= \lim_{h \to 0} = \frac{h}{h\,(\sqrt{x_0+h} + \sqrt{x_0})} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

Por tanto $f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$, para todo $x_0 \in \mathbb{R}^+$

□

Ejercicio 2

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R}/\mathbb{Q} \end{cases}$$

Demostrar que f es derivable en $x = 0$ y encontrar $f'(0)$

Demostración.

Afirmamos que $f'(0) = 0$, asi pues sea $\epsilon_0 > 0$, definimos $\delta := \epsilon_0$, por tanto sea $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $0 < |x_0| < \delta$, como $|x| < 1$, entonces $|x^2| < 1$, asi pues, si $x_0 \in \mathbb{Q}$:

$$\left| \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right| = \left| \frac{x^2}{x} \right| = |x| < \epsilon$$

Y si $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$:

$$\left| \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right| = 0 < \epsilon$$

Por tanto queda demsotrado que $f'(0) = 0$ □

Problemas sobre aplicaciones de la derivada

Ejercicio 3

Evalua los siguientes límites:

i)

$$\lim_{x \to 0^+} x^3 \, ln(x) \;\; x \in \mathbb{R}^+$$

ii)

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^3}{e^x} \;\; x \in \mathbb{R}^+$$

Demostración.

i) Tenemos que:

$$\lim_{x \to 0^+} x^3 \ln(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x^3}}$$

Tenemos una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$, por tanto podemos usar la regla L'hópital:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{ln(x)}{\frac{1}{x^3}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{3}{x^4}} = \lim_{x \to 0^+} -\frac{x^3}{3} = 0$$

ii) La función $f(x) := \frac{x^3}{e^x}$, es continua en $x_0 = 0$, por tanto:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^3}{e^x} = f(0) = \frac{0^3}{1} = 0$$

$\square$

Ejercicio 4

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y derivable en $c \in \mathbb{R}$, demuestre que:

$$f'(c) = \lim_{n\to\infty} n\left[f\left(c + \frac{1}{n}\right) - f(c)\right]$$

Sin embargo, demostrar con un ejemplo que la existencia del límite de esta sucesión no implica la existencia de $f'(c)$

Demostración.

Como f es derivable tenemos que sea $\epsilon_0 > 0$ y c fijo, entonces existe $\delta \in \mathbb{R}^+$, tal que:

$$0 < |h| < \delta \implies \left|\frac{f(c+h) - f(c)}{h} - f'(c)\right| < \epsilon_0$$

Sabemos por propiedad arquimediana existe K_0 tal que $\frac{1}{k_0} < \delta$, por tanto sea $n \in \mathbb{R}$, tal que $n \geq K_0$, entonces se cumple que:

$$\left|\frac{f\left(c + \frac{1}{n}\right) - f(c)}{\frac{1}{n}} - f'(c)\right| < \epsilon_0$$

Por tanto la sucesion:

$$a_n = n\left[f\left(c + \frac{1}{n}\right) - f(c)\right]$$

Cumple que:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = f'(c)$$

Sea $f(x) := |x|$, y $c = 0$, se cumple que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \to 1$, sin embargo $f'(0)$, no existe $\square$

Ejercicio 5

Sea $h(x) := e^{-\frac{1}{x^2}}$ *para* $x \neq 0$ *y* $h(0) := 0$. *Demostrar que* $h_n(0) = 0$ *para toda* $n \in \mathbb{N}$. *Concluir que el término del residuo en el teorema de Taylor para* $x_0 = 0$ *no converge a cero cuando* $n \to \infty$ *para* $x \neq 0$.

Demostración.

Notemos que, sea $x \neq 0$:

$$h'(x) = \frac{2\, e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3}$$

Ahora podemos aplicar la regla de Leibinz, para la derivada de un producto para encontrar la derivada de orden enesima, sobre el producto de $g(x) := e^{-\frac{1}{x^2}}$, $f(x) := \frac{2}{x^3}$:

$$h^{n+1}(x) = (fg)^n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{n-k}(x)\, g^k(x)$$

Es fácil notar que la enésima derivada de $h(x)$, sera una suma de terminos de la forma $\alpha\, \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^k}$, donde α es una constante y k un número natural.

Con esto en mente procedemos a probar la proposición por inducción matemática:

(i) Hipótesis de inducción:

Tomemos la definición de derivada:

$$h'(x) = \lim_{x\to 0} \frac{h(x) - h(0)}{x} = \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = 0$$

Esto derivado de la regla de L'Hópital la cual nos asegura que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^k} = 0 \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}$$

ii) Hipótesis de inducción:

Suponemos la existencia de $m \in \mathbb{N}$ tal que $h^m(0) = 0$

iii) $P(m) \implies P(m+1)$

De nuevo aplicamos la definición de derivada:

$$h^{m+1}(0) = \lim_{x \to 0} \frac{h^m(x) - h^m(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{h^m(x)}{x}$$

Ahora como recordamos la emésima derivada de $h(x)$, es una suma de terminos con la forma $\alpha \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^k}$, aplicando nuevamente la regla de L'Hópital se obtiene que:

$$h^{m+1}(x) = \lim_{x \to 0} \frac{h^m(x)}{x} = 0$$

Por tanto la proposición queda demostrada

Ahora recordando la expansión de taylor de grado $n \in \mathbb{N}$ de la función alrededor de $x_0 = 0$ y $x \in (0, 1)$

$$h(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{h^i(0)}{i!} (x) + R_n$$

Por la proposición anterior se tiene que:

$$h(x) = R_n$$

Por tanto:

$$\lim_{n \to \infty} R_n = \lim_{n \to \infty} h(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \neq 0$$

$\square$

Ejercicio 5

El nivel de sonido medido en watts por metro cuadrado varía en proporción directa a la potencia de la fuente e inversamente al cuadrado de la distancia desde la fuente, por lo que está dado por la ecuación

$$y = Kpx^{-2}$$

donde y es el nivel de sonido, P es la potencia de la fuente, x es la distancia desde la fuente, y k es una constante positiva.

Dos fiestas en la playa, separadas por 100 metros, están tocando música fuerte en sus bocinas portátiles. La bocina de la segunda fiesta tiene 64 veces más potencia que la de la primera. La música se aproxima al ruido blanco, por lo que la potencia de las dos fuentes que llega a un punto entre ellas se suma, sin importar si las fuentes están en fase o fuera de fase.

¿A qué punto del segmento de línea entre las dos fiestas debo estar si quiero disfrutar del mayor silencio posible? Demuestre que ha encontrado un mínimo absoluto, no solo un mínimo relativo.

Demostración.

Tenemos que sea $x > 0$, un punto en el espacio comprendido entre ambas fuentes de sonido, tenemos que la suma de potencias en este punto esta dada por:

$$f(x) := \frac{Kp}{x^2} + \frac{64Kp}{(100-x)^2}$$

Encontramos la primera derivada de esta función, e la igualamos a 0, para encontrar sus puntos criticos:

$$f'(x) = Kp\left[-\frac{2}{x^3} + \frac{128}{(100-x)^3}\right] = Kp\left[\frac{10(x-20)(13x^2+200x+10000)}{x^3(100-x)^3}\right]$$

Es claro que en $x_0 = 20$, la función tiene un punto crítico, ahora notemos que si tomamos $x \in (0, 20)$, entonces $f'(x) < 0$, luego si tomamos $x \in (20, 100)$,esto nos dice que $x_0 = 20$ es un mínimo, luego se tiene que $f'(x) > 0$, luego $f'(100)$ no esta definido y para $x \in (100, \infty)$, se sigue que $f'(x) < 0$, por tanto $x_0 = 20$, es un mínimo absoluto de la función. $\square$