Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Cálculo I
Tarea IV
Elías López Rivera
elias.lopezr@ciencias.unam.mx

Problemas sobre límites de funciones

Ejercicio 1

Demuestre directo de la definición que:

i)

$$\lim_{x \to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$$

ii)

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{|x|} = 0$$

iii)

$$\lim_{x \to 2} x^2 + 4x = 12$$

Demostración.

i) Tomemos dos casos $x_0 = 0$ y $x_0 \neq 0$, si $x_0 = 0$, sea $\varepsilon > 0$ proponemos $\delta := \varepsilon^2$ de donde se sigue que:

$$0 < |x - 0| = |x| < \delta = \varepsilon^2 \implies \sqrt{|x|} = |\sqrt{x} - 0| < \sqrt{\varepsilon^2} = \epsilon$$

Para $x_0 \neq 0$ proponemos $\delta := \frac{\varepsilon}{\sqrt{x_0}}$, se sigue que:

$$0 < \sqrt{x_0} < \sqrt{x} + \sqrt{x_0} \implies |\sqrt{x_0}| < |\sqrt{x} + \sqrt{x_0}| \implies \frac{1}{|\sqrt{x} + \sqrt{x_0}|} < \frac{1}{|\sqrt{x_0}|}$$

Luego se concluye:

$$0 < |x - x_0| < \delta = \frac{\varepsilon}{\sqrt{x_0}} \implies |\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| = \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} < \frac{|x - x_0|}{|\sqrt{x_0}|} < \sqrt{x_0}\,\frac{\varepsilon}{\sqrt{x_0}} = \varepsilon$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitraria, se tiene que:

$$\lim_{x \to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$$

ii) Tomemos $\varepsilon > 0$ definimos $\delta := \varepsilon$, se sigue que:

$$0 < |x - 0| < \delta = \varepsilon \implies \left| \frac{x^2}{|x|} - 0 \right| = |x| < \varepsilon$$

Por tanto del hecho de que $\varepsilon > 0$ es arbitraria se tiene que:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{|x|} = 0$$

iii) Sea $\varepsilon > 0$, definimos $\delta := min\{1, \frac{\varepsilon}{9}\}$, tenemos que:

$$0 < |x - 2| < \delta \implies |x| - |2| < |x - 2| < 1 \implies |x| < 1 + |2| = 3$$

A su vez de que:

$$0 < |x - 2| < \delta \implies |x^2 + 4x - 12| = |x - 2||x + 6| \leq (|x| + |6|)|x - 2| < (6 + 3)\,\frac{\varepsilon}{9} = \varepsilon$$

Por tanto del hecho de que $\varepsilon > 0$ es arbitraria, se concluye que:

$$\lim_{x \to 2} x^2 + 4x = 12$$

$\square$

Ejercicio 2

Suponga que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tiene límite L en $x = 0$ y sea $a > 0$ definimos $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) := f(ax)$, demuestre que

$$\lim_{x\to 0} g(x) = L$$

Demostración.

Como f tiene límite en $x = 0$, para $\epsilon > 0$ sabemos que existe $\delta_1 > 0$ tal que:

$$0 < |x - 0| < \delta_1 \implies |f(x) - l| < \varepsilon$$

Por tanto definimos $\delta_2 := \frac{\delta_1}{|a|}$, se sigue que:

$$0 < |x - 0| < \delta_2 = \frac{\delta_1}{|a|} \implies 0 < |ax| < \delta_1 \implies |f(ax) - l| = |g(x) - l| < \varepsilon$$

□

Ejercicio 3

i) *Sea $A \subseteq \mathbb{R}$, sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y sea $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto de acumulación de A. Si $\lim_{x\to x_0} f$ existe, definimos $|f| : A \to \mathbb{R}$, tal que $|f|(x) = |f(x)|$, demostrar que:*

$$\lim_{x\to x_0} |f| = |\lim_{x\to x_0} f|$$

ii) *Sea $A \subseteq \mathbb{R}$, sea $f : A \to \mathbb{R}$, sea $x \in \mathbb{R}$ punto de acumulación de A. Si $\lim_{x\to x_0} f$ existe, supongamos además que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in A$, $\sqrt{f}$ denota la función definida para $x \in A$ tal que $\sqrt{f}\,(x) = \sqrt{f(x)}$, entonces demuestra que:*

$$\lim_{x\to x_0} \sqrt{f} = \sqrt{\lim_{x\to x_0} f}$$

Demostración.

i) Como el $\lim_{x\to x_0} f = l$, tenemos que sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq A/\{x_0\}$ tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$, tenemos que la sucesión definida como $(f(a_n))_{n=1}^{\infty}$ cumple que $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = l$, tenemos que entonces la sucesión $(|f(a_n)|)_{n=1}^{\infty} = (|f|(a_n))_{n=1}^{\infty}$ cumple que $\lim_{n\to\infty} |f|(a_n) = |l|$, como la sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ fue arbitraria por el criterio de sucesiones se tiene que:

$$\lim_{x\to x_0} |f| = |\lim_{x\to x_0} f| = |l|$$

ii) Como el $\lim\limits_{x \to x_0} f = l$, del hecho de que $f(x) \geq 0$ se sigue que $l \geq 0$, sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq A/\{x_0\}$ tal que $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = x_0$, tenemos que la sucesión $(f(a_n))_{n=1}^{\infty}$ es positiva para cualquier $n \in \mathbb{N}$, además de que $\lim\limits_{n \to \infty} f(a_n) = l$, por tanto se sigue que la sucesión definida como $(\sqrt{f(a_n)})_{n=1}^{\infty} = (\sqrt{f}(a_n))_{n=1}^{\infty}$, cumple que $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt{f}(a_n) = \sqrt{l}$, como $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ es arbitraria se concluye que:

$$\lim_{x \to x_0} \sqrt{f} = \sqrt{\lim_{x \to x_0} f}$$

$\square$

Ejercicio 4

Analice la existencia de los siguientes límites, y de existir encuentre el límite de las siguientes funciones:

i)

$$\lim_{x \to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad (x \neq 0)$$

ii)

$$\lim_{x \to 0} \frac{(x+1)^2 - 1}{x} \quad (x > 0)$$

iii)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+2x} - \sqrt{x^5+3}}{x+2x^2} \quad (x > 0)$$

Demostración.

i) Afirmamos que el límite no existe, para demostrar esa afirmación , procedemos a considerar las sucesiones $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(b_n)_{n=1}^{\infty}$, tal que $a_n = \frac{1}{2\pi n}$ y $b_n = \frac{2}{\pi(1+4n)}$, es bastante claro que ambas sucesiones convergen a 0, y que sus terminos siempre son distintos de 0, luego analicemos la sucesiones:

$$\left(\sin\left(\frac{1}{a_n}\right)\right)_{n=1}^{\infty} = (\sin(2n\pi))_{n=1}^{\infty} = (0)_{n=1}^{\infty} \text{ y } \left(\sin\left(\frac{1}{b_n}\right)\right)_{n=1}^{\infty} = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)\right)_{n=1}^{\infty} = (1)_{n=1}^{\infty}$$

Es fácil notar que ambas sucesiones convergen hacia límites diferentes, por tanto usando el reciproco del criterio de sucesiones obtenemos que el límite no existe en $x = 0$

ii) Afirmamos que el límite es igual a 2, procedemos a demostrarlo por definición, sea $\varepsilon > 0$, definimos $\delta := \varepsilon$, por tanto:

$$0 < x < \delta \implies \left|\frac{x^2+2x+1-1}{x} - 2\right| = |x+2-2| = |x| < \delta = \varepsilon \quad (x \neq 0)$$

Por tanto se conlcuye que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(x+1)^2-1}{x} \ (x>0) = 2$$

iii) Afirmamos que el límite descrito tiende a $-\infty$, para eso proponemos el siguiente lema:

Sea f función definida en $(0,\infty)$, y $f(x)<0$ para toda $x \in (0,\infty)$, entonces se cumple que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{f} = 0 \implies \lim_{x\to 0} f = -\infty$$

Demostración.

Sea $M>0 \implies \frac{1}{M}>0$, si por hipótesis se tiene que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{f} = 0$, entonces existe $\delta \in \mathbb{R}^+$ tal que:

$$0<x<\delta \implies \left|\frac{1}{f(x)}\right| < \frac{1}{M}$$

Por tanto se sigue que:

$$-\frac{1}{M} < \frac{1}{f(x)} \implies -\frac{f(x)}{M} > 1 \implies f(x) < -M < 0 < M$$

De lo anterior se sigue que sea $z \in \mathbb{R}$, entonces existe $\delta \in \mathbb{R}^+$ tal que:

$$0<x<\delta \implies f(x) < z$$

Fianlmente tenemos que:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$$

□

Tenemos que sea $f(x) = x^5 - 2x + 2$ definida para $x>0$, entonces se cumple que:

$$x^5-2x+2>0 \implies x^5+3>2x+1 \implies \sqrt{x^5+3} > \sqrt{2x+1} \implies \sqrt{2x+1} - \sqrt{x^5+3} < 0$$

Por tanto se tiene que:

$$g(x) := \frac{\sqrt{1+2x} - \sqrt{x^5+3}}{x+2x^2}$$

Cumple que $g(x) < 0$ para toda $x \in (0, \infty)$, a su vez tenemos que:

$$\frac{1}{g}(x) := \frac{x+2x^2}{\sqrt{1+2x} - \sqrt{x^5+3}}$$

Cumple ser una función continua en $x = 0$, pues es producto de funciones continuas en $x = 0$, por tanto:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{g} = \frac{1}{g}(0) = 0$$

Aplicando el lema demsotrado anterioremente se conlcuye que:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+2x} - \sqrt{x^5+3}}{x+2x^2} \ (x > 0) = -\infty$$

$\square$

Problemas sobre continuidad de funciones

Ejercicio 5

Sea $K > 0$ y sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisface la condición $|f(x) - f(y)| < K\,|x - y|$ para toda $x, y \in \mathbb{R}$. Demostrar que f es continua en todo punto de $\mathbb{R}$

Demostración.

Tomemos $x_0 \in \mathbb{R}$ fijo, tenemos que sea $\varepsilon > 0$, entonces definimos $\delta := \frac{\varepsilon}{k}$, tenemos que sea $x \in \mathbb{R}$ tal que:

$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < K\,|x - x_0| < k\,\delta = \varepsilon$$

Del hecho de que $\varepsilon > 0$ es arbitrario se sigue que f es continuo en x_0 y del hecho de que x_0 es un punto arbitrario se sigue que f es continua en todo $\mathbb{R}$ $\square$

Ejercicio 6

Suponer que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es continua en* $\mathbb{R}$ *además que* $\lim_{x\to\infty} f = 0$ *y* $\lim_{x\to-\infty} f = 0$. Demostrar que f esta acotada en $\mathbb{R}$ y que alcanza un máximo o un mínimo en $\mathbb{R}$, dar un ejemplo para mostrar que no necesariamente alcanza un máximo y un mínimo

Demostración.

Como $\lim\limits_{x\to\infty} f = 0$, tenemos que sea $\varepsilon := 1 > 0$, entonces existe $m \in \mathbb{R}$ tal que:

$$x > m \implies |f(x)| < 1$$

De manera similar tenemos que como $\lim\limits_{x\to-\infty} f = 0$, sea $\varepsilon = 1 > 0$, existe $l \in \mathbb{R}$ tal que:

$$x < l \implies |f(x)| < 1$$

Definimos $r := max\{l, m\}$ y $s := min\{l, m\}$, entonces tenemos que si $x \notin [s, r]$, se tiene que $|f(x)| < 1$, luego como f es continua en el intervalo $[s, r]$, tenemos que la imagen de f bajo ese intervalo se encuentra acotadada, es decir, existe $w \in \mathbb{R}$, tal que $|f(x)| \leq w$ para todo $x \in [s, r]$, por tanto sea $M := max\{w, 1\}$, se sigue que $|f(x)| < M$, para todo $x \in \mathbb{R}$, por tanto tenemos que sea $f(\mathbb{R})$, la imagen de la función bajo $\mathbb{R}$, entonces existe $S := Sup\, f(\mathbb{R})$ y $I := inf\; f(\mathbb{R})$, pues este es un conjunto no vacio y acotado, tomemos los siguientes casos:

i) $M > 0$

Tenemos que como $\lim\limits_{x\to\infty} f = 0$, entonces sea $\frac{S}{2} > 0$, existe $b \in \mathbb{R}$, tal que:

$$x > b \implies f(x) \leq |f(x)| < \frac{S}{2}$$

De manera similar tenemos que como $\lim\limits_{x\to-\infty} f = 0$, sea $\frac{S}{2} > 0$, existe $a \in \mathbb{R}$, tal que:

$$x < a \implies f(x) \leq |f(x)| < \frac{S}{2}$$

Definimos $g := min\{a, b\}$ y $h := max\{a, b\}$, sea el conjunto:

$$A := \{f(x) : x \in (-\infty, g) \cap (h, \infty)\}$$

Se tiene que $SupA \leq \frac{S}{2}$, lo cual implica que sea el conjunto:

$$B := \{f(x) : x \in [g, h]\}$$

Necesariamente cumple que $SupB = S$, debido a la construcción de S, luego como $[g, h]$, es un intervalo cerrado y f es continua, tenemos que existe $c \in [g, h]$ tal que $f(c) = SupB = S$, es decir S es parte de la imagen de f, por tanto f alcanza un máximo

ii) $S \leq 0$

Dividimos en dos subcasos:

***)** $S \leq 0$**,** $I \neq 0$

Se sigue que necesariamente $I \leq S \leq 0$, tenemos que como $\lim\limits_{x \to \infty} f = 0$, entonces sea $-2\,I > 0$, existe $d \in \mathbb{R}$, tal que:

$$x > d \implies |f(x)| < 2\,I \implies 2I < f(x)$$

De manera similar tenemos que como $\lim\limits_{x \to -\infty} f = 0$, sea $-2\,I > 0$, existe $e \in \mathbb{R}$, tal que:

$$x < e \implies |f(x)| < 2\,S \implies 2I < f(x)$$

Definimos $k := min\{d, e\}$ y $j := max\{d, e\}$, sea el conjunto:

$$P := \{f(x) : x \in (-\infty, k) \cap (j, \infty)\}$$

Se tiene que $InfP \geq 2\,I$, lo cual implica que sea el conjunto:

$$O := \{f(x) : x \in [k, j]\}$$

Necesariamente cumple que $InfO = I$, debido a la construcción de I, luego como $[k, j]$, es un intervalo cerrado y f es continua, tenemos que existe $q \in [g, h]$ tal que $f(q) = InfB = I$, es decir I es parte de la imagen de I, por tanto f alcanza un mínimo

****)** $S \leq 0$, $I = 0$

Como $I = 0$, se tiene que necesariamente $S = 0$, pues $I \leq S \leq 0$, esto implica que f es la función constante 0, la cual claramente alcanza su máximo

Un ejemplo de que una función que cumpla con las hipótesis del problema pero que no alcanza su máximo y mínimo, es la distribución Gaussiana:

$\square$

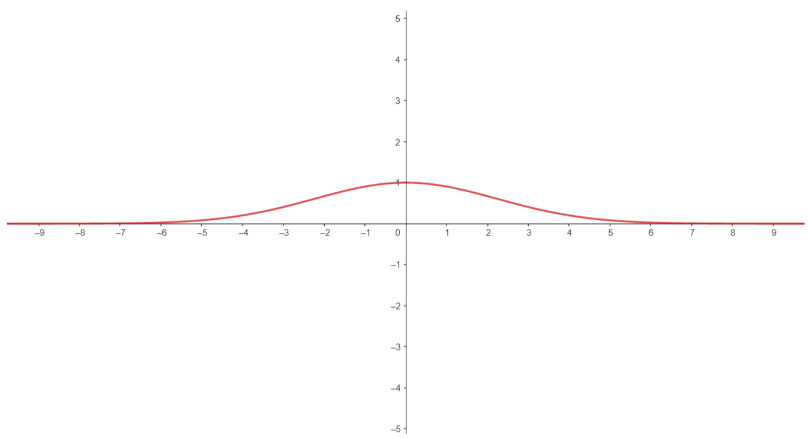

Figura 1: Distribución Gussiana