Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Geometria Moderna
Tarea examen 1
Elías López Rivera[1] Adolfo Cardoso Vazquez [2]
{[1] `elias.lopezr`, [2] `hectorgb`}`@ciencias.unam.mx`
Fecha: 20/10/2024

Problema 1

Sea:

$$F = \{0, 1\}$$

con las operaciones modulo 2 definidas, es decir:

I. ***Suma:*** $0 + 0 = 0$, $0 + 1 = 1, 1 + 1 = 0$, $1 + 0 = 1$

II. ***Multiplicación:*** $1 \cdot 1 = 1$, $0 \cdot 0 = 0$, $0 \cdot 1 = 0$, $1 \cdot 0 = 0$

a) *Verificar que la multiplicación es una operación asociativa, que posee elemento neutro* 1 *y cada elemento distinto de* 0 *posee inverso multiplicativo*

b) *Confirmar la distributividad del producto sobre la suma*

Concluir que F es un campo

Demostración. □

Problema 2

Sea:

$$F = \mathbb{Z}_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

con las operaciones modulo 2 definidas, es decir:

I. ***Suma:*** $0 + 0 = 0$, $0 + 1 = 1, 1 + 1 = 0$, $1 + 0 = 1$

II. ***Multiplicación:*** $1 \cdot 1 = 1$, $0 \cdot 0 = 0$, $0 \cdot 1 = 0$, $1 \cdot 0 = 0$

a) *Verificar que la multiplicación es una operación asociativa, que posee elemento neutro* 1 *y cada elemento distinto de* 0 *posee inverso multiplicativo*

b) *Confirmar la distributividad del producto sobre la suma*

Concluir que F *es un campo*

Demostración. □

Problema 3

Sea:

$$F = \{a + b\sqrt{2}\,|a,\, b \in \mathbb{Q}\}$$

con las operaciones de suma y multiplicación: ***a)*** *Comprobar que* F *es cerrado bajo la suma y la multiplicación de* $\mathbb{Q}$

b) *Demostrar que existe un elemento neutro para la suma (el cero) y para la multiplicación*

c) *Para cada elemento* $x = a + b\sqrt{2}$ *con* $x \neq 0$, *encontrar o demostrar la existencia de su inverso multiplicativo en* F

d) *Verificar las demas propiedades: existencia de inversos aditivos, asociatividad, conmutatividad y distributividad*

Concluir que F *es un campo*

Demostración. □

Problema 4

Sea $F = \mathbb{Z}$ con la operaciones definidas de la siguiente forma:

- **Suma:** Para $a, b \in \mathbb{Z}$ se define
$$a \oplus b = a + b - 1.$$
- **Producto:** Para $a, b \in \mathbb{Z}$ se define
$$a \odot b = a \cdot b - a - b - 2.$$

I. Demostrar que $(F, \oplus)$ es un grupo abeliano. En particular, determinar el elemento neutro aditivo $e_\oplus$ y hallar el inverso aditivo de un elemento a.

II. Determinar el elemento neutro multiplicativo $e_\odot$ en $(F \setminus \{e_\oplus\}, \odot)$ y comprobar que no todo elemento $a \in F$ con $a \neq e_\oplus$ tiene inverso multiplicativo.

III. Verificar la distributividad de $\odot$ respecto a $\oplus$

Concluir que $(F, \oplus, \odot)$ no es un campo

Demostración. □

Problema 5

Sea:

$$F = \mathbb{R}^2$$

con las operaciones definidas de la siguiente forma:

I. ***Suma***:$(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d)$

II. ***Multiplicación***: $(a, b) \odot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$

a) *Verificar que la suma y el producto estan bien definidos y son operaciones en* F

b) *Demostrar que existe un elemento neutro para la suma* $(0, 0)$ *y para el producto* $(1, 0)$

c) *Comprobar que para cada elemento* $(a, b) \neq (0, 0)$ *le corresponde un inverso mutiplicativo.*

d) *Verificar la conmutatividad, la asociatividad y la distributividad del producto respecto a la suma*

Demostración. $\square$

Problema 6

Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *se llama* ***función par*** *si para todo* $t \in \mathbb{R}$ *se cumple que* $f(t) = f(-t)$. *Demostrar que el conjunto* $P := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | f \text{ es par}\}$, *con las siguientes operaciones:*

$$\forall\, f, g \in P \;\; y \;\; c \in \mathbb{R} : (f + g)(s) = f(s) + g(s) \;\; y \;\; (cf)(s) = c\,(f(s))$$

Es un $\mathbb{R} - espacio\, vectorial$

Demostración. $\square$