Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Álgebra superior 2

Tarea examen 2

Elías López Rivera

elias.lopezr@ciencias.unam.mx

Fecha: 27/07/2025

Problema 1

Para $n \in \mathbb{Z}$ define $D(n) = \{x \in \mathbb{Z} |\ x|n\}$

I. *Encuentra $D(20)$ y $D(25)$*

II. *Encuentra $D(20) \cup D(25)$*

III. *Encuentra el $mcd(20, 25)$*

IV. *Expresa $mcd(20, 25)$ de 5 maneras diferentes como combinación lineal de 20 y 25*

Demostración.

i) Tenemos que:

$$D(20) := \{-20, -10, -5, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 5, 10, 20\}$$

$$D(25) := \{-25, -5, -1, 1, 5, 25\}$$

ii) Encontramos que:

$$D(20) \cup D(25) := \{-5, -1, 1, 5\}$$

iii) Tenemos que $mcd(5, 25) := max\{D(20) \cup D(25)\} = 5$

iv) Tenemos que:

I. $20(-1) + 25(1) = 5$

II. $20(4) + 25(-3) = 5$

III. $20(9) + 25(-7) = 5$

IV. $20(14) + 25(-11) = 5$

V. $20(19) + 25(-15) = 5$

$\square$

Problema 2

Si $a|b$ y $b \neq 0$ definimos $b/a \in \mathbb{Z}$ como aquel entero tal que $a\,(b/a) = b$

I. *Encuentra b/a para los siguientes pares $a|b$: $1|23$, $7|14$, $1|81$, $2|4$, $3|162$, que debe ocurrir para que $2n|4m$*

II. *Dmuestra que:* $\forall\, a, b, c \in \mathbb{Z} \left(b \neq 0 \wedge c|a \wedge c|b \implies mcd\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right) = \frac{mcd(a,b)}{|c|} \right)$, *tomando en cuenta que* $K_1 = \frac{a}{c}$, $K_2 = \frac{b}{c}$

Demostración.

i) $\frac{23}{1} = 23, \frac{14}{7} = 2, \frac{4}{2} = 2, \frac{162}{3} = 54$

Si $2n|4m$, entonces existe $r \in \mathbb{Z}$ tal que $4m = (2n)r$, luego $2(2m) = 2(nr)$, como $\mathbb{Z}$ es dominio entero $2m = nr$, por tanto $n|2m$ y tenemos que $\frac{4m}{2n} = \frac{2m}{n}$

ii) Como $K_1 c = a$ y $K_2 c = b$, entonces:

$$|c|(K_1, K_2) = (K_1 c, K_2 c) = (a, b)$$

Luego como $c|a$ y $c|b$ entonces $|c|\,|(a, b)$, por tanto $(a, b) = |c|\,\frac{(a,b)}{|c|}$, luego como $\mathbb{Z}$ es dominio entero

$$|c|(K_1, k_2) = |c|\,\frac{(a, b)}{c} \implies (K_1, K_2) = \frac{(a, b)}{|c|}$$

$\square$

Problema 3

Para $n \in \mathbb{Z}$ *definimos* $M(n) := \{k \in \mathbb{Z} | \, n|k\}$

I. *Encuentra* $M(6) \cap M(10)$

II. *Encuentra el mínimo entero positivo en* $M(6) \cap M(10)$

III. *Haz lo mismo para* 20 *y* 25

IV. *Es verdad que* $mcd(20,5)mcm(20,5) = 20(5)$

Demostración.

i) Tenemos que:

$$M(6) \cap M(10) = \{l = 2(3)(5)(q) | q \in \mathbb{Z}\}$$

Ya que la factorización prima de $6 = 2(3)$ y $10 = 5(2)$, por tanto cada uno de sus múltiplos debe contener los factores primos $2, 3, 5$

ii) tenemos que el mínimo entero positivo posible del conjunto es el caso $q = 1$, es decir 30

iii) De nuevo $25 = (5)(5)$ y $20 = (2)(2)(5)$, por tanto aplicando el mismo argumento

$$M(25) \cap M(20) = \{l = (5^2)(2^2)q | q \in \mathbb{Z}\}$$

De nuevo el mínimo entero positivo del conjunto es $25(4) = 100$

iv) Si $(20, 25)[20, 25] = 5(100) = 500 = 20(25)$ $\square$

Problema 4

Demustra que $\forall\, a, b \in \mathbb{Z}$

I. $1|a$ *y* $-1|a$

II. $a|a$

III. $a|b \implies (-a|b \wedge a|(-b) \wedge (-a)|(-b))$

IV. $a|b \wedge b|a \implies a = b \vee a = -b$

Demostración.

i) Como 1 es unidad en $\mathbb{Z}$, sea $a \in Z$ se cumple que $a(1) = a$ por tanto $1|a$, luego por propiedades del producto en $\mathbb{Z}$ $a = (-1)(-a)$, por tanto $-1|a$

ii) Sea $a \in \mathbb{Z}$ de lo anterior se tiene que $a = (1)a$, por tanto $a|a$

iii) Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ tal que $a|b$, entonces se tiene que existe $r \in \mathbb{Z}$ tal que $b = ra$, por propiedades del producto en $\mathbb{Z}$ se tiene que $b = (-r)(-a)$, $-b = (-r)a$, $-b = (r)(-a)$, por tanto $-a|b \wedge a|(-b) \wedge (-a)|(-b)$

iv) Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ tal que $a|b \wedge b|a$, existen $r, s \in \mathbb{Z}$ tal que $b = ra$ y $a = bs$, luego tenemos que $b(1) = bs(r)$, aplicando la ley de cancelación $1 = sr$, es decir s y r necesariamente son unidades en $\mathbb{Z}$ de esto se sigue que $a = b$ ó $a = -b$ $\square$

Problema 5

Di si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos. justifica tu respuesta

I. $6|42$

II. $4|50$

III. $0|15$

Demostración.

i) Tenemos que $42 = 7(6)$, por tanto $\exists\, m \in \mathbb{Z}$ tal que $42 = 6m$, es decir $6|42$

ii) Tenemos que $50 = 12(4) + 2$, como $2 < 4$, es imposible encontrar un $m \in \mathbb{Z}$ tal que $50 = 4m$, por tanto 4 no divide a 50

iii) Como $0 = 15(0)$, por tanto $\exists\, m \in \mathbb{Z}$ tal que $0 = 15m$, es decir $0|15$

$\square$

Problema 6

Demuestra lo siguiente:

I. $\forall\, a, b \in \mathbb{Z}\,(mcd(a,b)|mcm[a,b])$

II. $\forall\, a, b \in \mathbb{Z}\,(mcd(a,b) = mcm[a,b] \implies a = b)$

III. $\forall\, a, b \in \mathbb{Z}\,(mcd(a,b) = 1 \iff mcd(a+b, ab) = 1)$

Demostración.

i) Sean $a, b \in \mathbb{Z}$, tenemos que como $(a,b)|a$ y $(a,b)|b$, ademas que $a|[a,b]$ y $b|[a,b]$, entonces $(a,b)|[a,b]$

ii) Sean $a, b \in \mathbb{Z}$, tenemos que $[a,b] = (a,b)|a$ y $a|[a,m]$, por tanto $[a,m] = (a,b) = a$, de la misma manera $[a,b] = (a,b)|b$ y $b|[a,b]$ por tanto $a = [a,b] = (a,b) = b$

iii) $\Leftarrow$) Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $(a+b, ab) = 1$, tenemos que $\exists\, r, s \in \mathbb{Z}$ tal que:

$$a(s+tb) + b(s) = s(a+b) + t(ab) = 1$$

Como 1 se puede escribir como combinación lineal de a y b entonces $(a,b) = 1$

$\Rightarrow$) Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $(a,b) = 1$, entonces existen $s, t \in \mathbb{Z}$ tales que:

$$as + tb = 1 \implies (as+tb)^2 = 1^2 \implies a^2s^2 + 2(abst) + b^2t^2 = 1$$

luego sea $abs^2 + abt^2 - abs^2 - abt^2 = 0$, tenemos que:

$$a^2s^2 + abs^2 + b^2t^2 + abt^2 + 2(abst) - abs^2 - abt^2 = (as^2 + bt^2)(a+b) + ab(2st - s^2 - t^2) = 1$$

Por tanto 1 se puede ver como combinación lineal de ab y $a+b$, es decir $(ab, a+b) = 1$ $\square$

Problema 7

Encuentra el máximo común divisor de 1984 *y* 34131 *y expresalo como combinación lineal de* 1984 34131

Demostración.

Aplicamos el algoritmo de Euclides para encontrar $(1984, 34131)$:

I. $34131 = 17(1984) + 403$
II. $1984 = 4(403) + 372$
III. $403 = 1(372) + 31$
IV. $372 = 31(12)$

Por tanto $(34131, 1984) = 31$, luego procedemos a escribirlo como combinación lineal de 34131 y 1984

I. $31 = 403 - 372$
II. $31 = 403 - (1984 - 4(403))$
III. $31 = 5(403) - 1984$
IV. $31 = 5(34131 - 17(1984)) - 1984$
V. $31 = 5(34131) - (86)(1984)$

□

Problema 8

Encuentra todas las soluciones enteras de la ecuación $20x + 72y = 56$

Demostración.

Sabemos que la ecuación tiene soluciones si y solo sí $(20, 72)|56$, porcedemos a obtener $(20, 72)$ por el algoritmo de Euclides

I. $72 = (20)3 + 12$
II. $20 = 12(1) + 8$
III. $12 = 8(1) + 4$
IV. $8 = 4(2)$

Por tanto $(20, 72) = 4$, como $4|56$, tenemos que la ecuación tiene una infinidad de soluciones de la forma:

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{72}{(20,72)}\, t \\ \\ y = y_0 - \frac{20}{(20,72)}\, t \end{cases}$$

Donde $t \in \mathbb{Z}$, y x_0, y_0 son soluciones partículares de la ecuación, encontramos una solución particular expresando a $(20, 72)$ como combinación linea de 20 y 72

I. $4 = 12 - 8$

II. $4 = (20 - 8) - (20 - 12)$

III. $4 = (20 - (20 - 12)) - (20 - 12)$

IV. $4 = 2(12) - 20$

V. $4 = 2(72 - 3(20)) - 20$

VI. $4 = 2(72) - 7(20)$

Como $56 = 14(4)$, entonces tenemos que:

$$56 = 14(4) = 14(2)(72) - 14(7)(20)$$

Por tanto $x_0 = -14(7)$ y $y_0 = 14(2)$ son soluciones particulares de esta ecuación, por tanto las soluciones de la ecuación pueden ser escritas como:

$$\begin{cases} x = -14(7) + 18\, t \\ \\ y = 14(2) - 5\, t \end{cases}$$

Con $t \in \mathbb{Z}$ $\square$

Problema 9

Demuestra que $\forall\, a, b, c \in \mathbb{Z}\, (mcm[ca, cb] = |c| mcm[a, b])$

Demostración.

Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tenemos que se cumple que $(ca, cb)[ca, cb] = c^2|ab|$, a su vez tenemos que $|ab| = (a, b)[a, b]$, por tanto $(ca, cb)[ca, cb] = c^2(a, b)[a, b] = |c|[a, b](|c|(a, b))$, luego como $(ca, cb) = |c|(a, b)$, por tanto $|c|(a, b)[ca, cb] = |c|[a, b](|c|(a, b))$, como $\mathbb{Z}$ es dominio entero tenemos que $[ca, cb] = |c|[a, b]$

$\square$

Problema 10

Demuestra que no existe un número racional tal que $r^2 = 2$

Demostración.

Procedemos por contradicción es decir $\exists\, a, b \in \mathbb{Z}$, con $(a, b) = 1$, tales que:

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \implies 2 = \frac{a^2}{b^2} \implies 2b^2 = a^2$$

Como $(b, a) = 1$ entonces $(b^2, a^2) = 1$, luego tenemos que:

$$1 = (a^2, b^2) = (2b^2, b^2) = b^2(2, 1) = b^2$$

por tanto $b^2 \in \mathbb{Z}$ es unidad, luego tendriamos que necesariamente $2 = a^2$, una comntradicción pues 2 no es un cuadrado perfecto

$\square$

Problema 11

Demuestra que si $n \in \mathbb{N}$ no es un cuadrado perfecto, entonces $\sqrt{n}$ es irracional

Demostración.

Procedemos por contradicción es decir $\exists\, a, b \in \mathbb{Z}$, con $(a, b) = 1$, tales que:

$$\sqrt{n} = \frac{a}{b} \implies n = \frac{a^2}{b^2} \implies b^2 n = a^2$$

Como $(b, a) = 1$ entonces $(b^2, a^2) = 1$, luego tenemos que:

$$1 = (a^2, b^2) = (b^2 n, b^2) = b^2(n, 1) = b^2$$

por tanto $b^2 \in \mathbb{Z}$ es unidad, luego tendriamos que necesariamente $n = a^2$ una contradicción ya que por hipotesis este no es un cuadrado perfecto, como nuestra unica suposición fue que $\sqrt{n}$ era racional concluimos que $\sqrt{n}$ es irracional $\square$

Problema 12

Demuestra que $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ es irracional

Demostración.

Procedemos por contradiccón es decir existen $q \in \mathbb{Q}$, tales que:

$$\sqrt{3} + \sqrt{2} = q \implies 3 + 2\sqrt{6} + 2 = q^2 \implies \sqrt{6} = \frac{q^2 - 5}{2} \in \mathbb{Q}$$

Una contradicción ya que 6 no es un cuadrado perfecto por tanto $\sqrt{6}$ es irraccional, como nuestra única suposición fue que $\sqrt{3} + \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ se tiene que necesariamente este es irracional

$\square$

Problema 13

Sean $a, b, c, d \in Z$ y $m, n \in \mathbb{Z}^+$. demuestre que:

I. $a \cong b\ mod(m)$ *si y solo si* $a + c \cong b + c\ mod(m)$

II. *Si* $a \cong b\ mod(m)$ *y* $c \cong d\ mod(m)$, *entonces* $ax + cy \cong bx + dy\ mod(m)$

III. *Si* $a \cong b\ mod(m)$, *entonces* $mcd(a, m) = mcd(b, m)$

Demostración.

i) $\Rightarrow$) Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $a \cong b\ mod(m)$, entonces $m|a - b$, luego tenemos que sea $c \in \mathbb{Z}$ $a - b = a + c - b - c = a + c - (b + c)$, por tanto $m|a + c - (b + c)$, se sigue que $a + c \cong b + c\ mod(m)$

$\Leftarrow$) Luego si tomamos $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $a + c \cong b + c\ mod(m)$ entonces $m|(a + c) - (b - c)$, por el argumento antes dado $m|a - b$ es decir $a + c \cong b + c\ mod(m)$

ii) Sean $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ tales que $a \cong b\ mod(b)$ y $c \cong d\ mod(b)$ tenemos que $m|a - b$ y $m|c - d$, luego sean $x, y \in \mathbb{Z}$ se sigue que $m|x(a - b)$ y $m|y(c - d)$, luego $m|x(a - b) + y(c - d)$, luego tenemos que $x(a-b)+y(c-d) = ax+cy-(bx+dy)$ por tanto $m|ax+cy-(bx+dy)$, por tanto $ax+cy \cong bx+dy\ mod(m)$

iv) Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ tal que $a \cong b\ mod(m)$, entonces tenemos que $m|b - a$ por tanto existe $s \in \mathbb{Z}$ tal que $a - b = ms$ por tanto tenemos que $a = ms + b$ como por hipótesis $m \neq 0$ por tanto aplicando el lema usado en el agoritmo de Euclides, tenemos que $(a, m) = (b, m)$

□

Problema 14

Diga si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos justifique su respuesta

I. $7 \cong 5\ mod(2)$

II. $8 \cong 12\ mod(3)$

III. $50 \cong 208\ mod(4)$

IV. $5 \cong -5 \pmod{5}$

Demostración.

1) Tenemos que $2|7 - 5 = 2$ por tanto $7 \cong 5\ mod(2)$

ii) Esto no es cierto ya que 3 no divide a $8 - 12 = -4$

iii) Tenemos que 4 no divide a $50 - 208 = -158$, por tanto el enunciado es falso

iv) Claramente $5| - 5$ y $5|5$ por tanto $5|5 - (-5)$ es decir $5 \cong -5 \pmod{5}$ □