Problema 15

Elías López Rivera [1]

[1] Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de ciencias

26 de enero de 2025

1. Enunciado

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto no vacio. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se define

$$A_n := \{x \in \mathbb{R} : \exists\, y \in A, |x - y| < \frac{1}{n}\}$$

Sea $\overline{A} := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$. **Demuestre** lo siguiente:

$i)$ Si A esta acotado superiormente, entonces $\overline{A}$ también lo esta, y:

$$max\,\overline{A} = sup\,A$$

$ii)$ Se tiene:

$$\overline{A} = \{x \in \mathbb{R} : \exists\,(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A, \lim_{n\to\infty} x_n = x\}$$

$iii)$ **Demuestre** que $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. Esto implica que todo número real es el límite de una sucesión de números racionales.

2. Solución

$i)$ Primero, si A es acotado existe $sup\,A$, demostraremos que $sup\,A \in \overline{A}$, luego que sí $x > sup\,A$, entonces $x \notin \overline{A}$.
Aplicando la condición de supremo obtenemos que $\forall \epsilon > 0$ existe $y' \in A$ tal que:

$$sup\,A - \epsilon < y' < sup\,A + \epsilon$$

de donde se deduce que:

$$|sup\, A - y^{'}| < \epsilon$$

debido a que $\frac{1}{n} > 0\ \forall n \in \mathbb{N}$ se sigue que $\exists\, y_n \in A$ tal que:

$$|sup\, A - y_n| < \frac{1}{n}$$

se conluye:

$$sup\, A \in \overline{A}$$

Luego tomemos $x > sup\, A$, $x := sup\, A + \delta$, para algún $\delta > 0$, aplicando nuevamente la condición de supremo:

$$x = sup\, A + \delta > y + \delta$$

$$\forall\, y \in A$$

De donde se sigue que :

$$|x - y| > \delta$$

Como $\delta > 0$ por propiedad arquimediana, $\exists\, n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \delta$ de donde se tiene que

$$|x - y| > \frac{1}{n}$$

Finalmente concluimos que:

$$x > sup\, A \implies x \notin \overline{A}$$

Por tanto sup A es cota superior del conjunto $\overline{A}$, además de que sup A$\in \overline{A}$, de donde se sigue que:

$$max\, \overline{A} = sup\, A$$

ii) Sea

$$B := \{x \in \mathbb{R} : \exists\, (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A,\ \lim_{n\to\infty} x_n = x\}$$

$\subseteq$) Tomemos $x \in \overline{A}$, esto implica que $\forall\, \frac{1}{n}$ con $n \in \mathbb{N}$, $\exists\, y_n \in A$, tal que:

$$|y_n - x| < \frac{1}{n}$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ se sigue que:

$$\lim_{n\to\infty} y_n = x$$

Por tanto se concluye que $x \in B$, de donde se sigue:

$$\overline{A} \subseteq B$$

$\supseteq$) Tomemos $x \in B$, se sigue que $\exists\,(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A$ tal que $\forall\,\epsilon > 0\ \exists\,k \in \mathbb{N}$ que cumple que:

$$n > k \implies |x_n - x| < \epsilon$$

por tanto $\forall\,n \in \mathbb{N}\ \exists\,k_n \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n > k_n \implies |x - x_n| < \frac{1}{n}$$

se conluye que:

$$B \subseteq \overline{A}$$

De $\subseteq$), $\supseteq$) se sigue:

$$B = \overline{A}$$

iii)Es claro que $\overline{\mathbb{Q}} \subseteq \mathbb{R}$, ahora tomemos $x \in \mathbb{R}$, sabemos que $x+\frac{1}{n}, x-\frac{1}{n} \in \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, además $x - \frac{1}{n} < x + \frac{1}{n}$, aplicando el principio de densidad sobre $\mathbb{Q}$, $\exists\,r \in \mathbb{Q}$ tal que $x - \frac{1}{n} < r < x + \frac{1}{n}$ de donde se concluye que:

$$|x - r| < \frac{1}{n}$$

Se obtiene:

$$\mathbb{R} \subseteq \overline{\mathbb{Q}}$$

finalmente:

$$\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$$