Problema 3

Elías López Rivera [1]

[1] Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias.

11 de julio de 2025

1. Enunciado

Considera un modelo de la atmósfera donde la temperatura varía con la altura z de la siguiente manera:

$$T\,(z) = T_0 - \lambda z \tag{1}$$

Donde $T_0 = 288K$ y $p_0 = 1\,atm = 1{,}01\,X\,10^5\,Pa$ es la temperatura y presión a nivel del mar $(z = 0)$; $\lambda = 6{,}5\,x\,10^{-3}\,\frac{K}{m}$ es una constante . Suponiendo que el aire de la atmósfera se comporta como un gas ideal diatómico $(\gamma = \frac{7}{5})$ de masa molar : $M = 28{,}8\,X\,10^{-3}\,\frac{kg}{mol}$

a) [2.5 puntos] Determina la expresión de la presión atmósferica como función de la altura $p\,(z)$.

b) [2.5 puntos] Demuestra que la temperatura y la presión en la atmósfera satisfacen la siguiente relación:

$$T = T_0 \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\alpha} \tag{2}$$

donde $\alpha = R\lambda/Mg$ es un número adimensional, determinar su valor ($R = 8{,}31J/K\,mol$)

c) [1 punto] A cierta altura de la atmósfera se pueden formar una burbúja de aire que tiene una temperatura diferente del aire que la rodea pero la misma presión . Si T_a es la temperatura de la atmósfera y T_b la temperatura de la burbuja, demuestra que cuando $T_a > T_b$ el globo se puede elevar.

Consideremos que durante la elevación de la burbúja el gas dentro de la burbúja cambia adiabáticamente. Si designamos $(p_{0\,b}, T_{0\,b})$ su presión y temperatura inicial, cuando la burbúja se ha formado a una altura z_1 Y $(p_{1\,b}, T_{1\,b})$ su presión y temperatura final cuando se eleva hasta la altura z_2.

d) [4 puntos] La elevación de la burbúja tiene un límite z_{max} a partir del cual ya no se eleva más. Si una burbúja se genera a una altura $z_0 = 2\,km$, con una temperatura inicial $T_{0\,b} = 280\,K$. Determina la altura máxima a la que llega esta burbúja, determina también su presión y temperatura al llegar a esta altura máxima.

2. Solución

a) Considerando la ecuación fundamental de la hidrostática:

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \tag{3}$$

de la ecuación del gas ideal podemos obtener la ρ del aire:

$$PV = R\,\frac{m}{M}\,T \implies \rho = \frac{M\,p}{T} \tag{4}$$

A su vez sabemos que la temperatura depende de z por la ecuación (1),despejando (3) y (4):

$$\frac{1}{p}\,dp = \frac{-M\,g}{R}\left(\frac{1}{T_0 - \lambda\,z}\right)dz \tag{5}$$

Integrado y evaluando ambos lados:

$$\int_p^{p_0} \frac{1}{p}\,dp = \frac{-M\,g}{R}\int_{T_0}^{T_0-\lambda z}\left(\frac{1}{T_0 - \lambda\,z}\right)dz \tag{6}$$

Utilizando el cambio de variable $u = T_0 - \lambda z$, $dz = \frac{-du}{\lambda}$, se simplifica (6):

$$\int_p^{p_0} \frac{1}{p}\,dp = \frac{-M\,g}{R}\int_{u+\lambda\,z}^{u} \frac{1}{u}\,du \tag{7}$$

Finalmente obtenemos:

$$ln\,(p) = \frac{M\,g}{R\,\lambda}\,ln\,(T_0 - \lambda\,z) + c \tag{8}$$

Valuando (8) en h=0:

$$ln(p_0) = \frac{M\,g}{R\,\lambda}\,ln\,(T_0) + c \implies ln\left(\frac{p_0}{T_0^{\beta}}\right) = c \tag{9}$$

con $\beta = \frac{Mg}{R\lambda}$

Reescribiendo (8)

$$ln\,(p) - ln(p_0) = \frac{M\,g}{R\,\lambda}\,\left[ln\,(T_0 - \lambda\,z) - ln(T_0)\right] \tag{10}$$

b) Despejando de (10):

$$\frac{P}{P_0} = \left(\frac{T_0 - \lambda\,z}{T_0}\right)^{\beta} \implies T = T_0\,\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\beta^{-1}} \tag{11}$$

Sea $\beta^{-1} = \alpha = \frac{R\lambda}{Mg}$

c) Sabemos que si la burbúja flota en la atmósfera se debe cumplir $\rho_b < \rho_a$, obteniendo ambas (la presión en ambas es la misma):

$$\rho_a = \frac{M\,p\,(z)}{R\,T_a} \quad \rho_b = \frac{M\,p\,(z)}{R\,T_b} \tag{12}$$

Aplicando la condición de flotación :

$$\frac{1}{T_b} < \frac{1}{T_a} \implies T_a < T_b \tag{13}$$

d) Es claro que la burbúja ascenderá hasta que su temperatura sea la misma de la atmósfera (si es menor la burbúja ya no flotará), por tanto tenemos:

$$(p_{0\,b}, T_{0\,b}) \longrightarrow (p_{1\,b}, T_{1\,b}) : Proceso\ \ adiabático\ de\ la\ burbuja$$

$$(p_{0\,a}, T_{0\,a}) \longrightarrow (p_{1\,a}, T_{1\,a}) : Proceso\ de\ la\ atmósfera$$

donde $T_{1\,a} = T_{1\,b} = T_1$, $p_{1\,b} = p_{1\,a}$, $p_{0\,b} = p_{0\,a}$

Aplicando las fórmulas del proceso adibático y (11) obtenemos:

$$1 = \frac{p_{1\,b}}{p_{0\,b}} = \left(\frac{T_{0\,b}}{T_1}\right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} \qquad 1 = \frac{p_{1\,a}}{p_{0\,a}} = \left(\frac{T_1}{T_{0\,a}}\right)^{\beta} \tag{14}$$

Despejando T_1 de (14):

$$T_1 = [(T_0 - \lambda\, z_0)^{\beta} \;\; T_{0\,b}^{\delta} \;\;]^{\Omega} \tag{15}$$

Aplicando que T_1 es también la temperatura de la atmósfera, obtenemos z_{max}:

$$T_0 - \lambda\, z_{max} = T_1 \implies z_{max} = \frac{1}{\lambda}\,(T_0 - T_1) \tag{16}$$

De (11) y (14) podemos encontrar la presión $p_{1\,b}$

$$p_{1\,b} = p_0 \left(\frac{T_0 - \lambda\, z_0}{T_0}\right)^{\beta} \left(\frac{T_{0\,b}}{T_1}\right)^{\delta} \tag{17}$$

con $\beta = \frac{M\,g}{R\lambda}$, $\delta = \frac{\gamma}{\gamma-1}$, $\Omega = (\beta + \delta)^{-1}$

Evaluando: $\beta = 5{,}22521$, $\delta = -\frac{7}{2}$, $\Omega = 0{,}5796$

$$T_1 = 265{,}19\ K$$

$$Z_{max} = 3487{,}89\ m$$

$$p_{1\,b} = 0{,}656\ atm$$