Problema 5

Elías López Rivera [1]

[1] Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de ciencias

26 de enero de 2025

1. Enunciado

Demuestre que $(\frac{1}{2})(\frac{3}{4})........(\frac{2n-1}{2n}) \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}}\, \forall\, n \in \mathbb{N}$. **Concluya** que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\frac{3}{4}.....\frac{2n-1}{2n} = 0$$

2. Solución

Probemos

$$\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{4}\right)........\left(\frac{2n-1}{2n}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \;\; \forall n \in \mathbb{N}$$

por inducción:

i) Base de inducción:

$$3 < 4 \implies 3 < 2^2 \implies \frac{1}{2^2} < \frac{1}{3} \implies \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}$$

ii) Hipótesis de inducción:

$$\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{4}\right)........\left(\frac{2n-1}{2n}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

Para algún $n \in \mathbb{N}$

iii) $P(n) \implies P(n+1)$

Es claro que $2n+3 > 2n+1 \ \forall\, n \in \mathbb{N}$ se sigue que $\frac{1}{2n+1} < \frac{1}{2n+3}$.

Ahora también es claro que $2n+1 < 2n+2 \ \forall\, n \in \mathbb{N}$, de donde se tiene $(2n+1)^2 < (2n+2)^2$

Se obtiene que:

$$\frac{1}{2n+1} < \frac{1}{2n+3} \implies \frac{(2n+1)^2}{2n+1} < \frac{(2n+2)^2}{2n+3} \implies \frac{1}{2n+1}\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^2 < \frac{1}{2n+3}$$

Se concluye que:

$$\frac{1}{2n+1}\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^2 < \frac{1}{2n+3} \implies \frac{1}{\sqrt{2n+1}}\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right) < \frac{1}{\sqrt{2n+3}}$$

Por ii)

$$\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{4}\right)\cdots\cdots\left(\frac{2n-1}{2n}\right)\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}}\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right) < \frac{1}{\sqrt{2n+3}}$$

Se concluye que:

$$\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{4}\right)\cdots\cdots\left(\frac{2n-1}{2n}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n}} \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Cómo $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, se sigue:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{4}\right)\cdots\cdots\left(\frac{2n-1}{2n}\right) = 0$$