Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Geometria Analítca 2

Tarea examen

Elías López Rivera[1]

Hector Gonzalez Baltierra [2]

{[1] `elias.lopezr`,[2] `hectorgb`} `@ciencias.unam.mx`

Fecha: 1/06/2025

Problema 1

Obtén una curva generatriz y un eje para cada una de las siguientes superficies de revolución. Dibuje la superficie:

I. $-\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} = 1$

II. $y^2 + z^2 = e^{2x}$

i) Tomemos la ecuación:

$$\frac{z^2}{4} - \frac{x^2}{4} = 1 \tag{1}$$

Esta representa una hipérbola equilátera en el plano xz, ahora si hacemos el cambio de coordenadas propio de una rotación alrdedor del eje z, obtenemos la siguiente ecuación

$$\frac{z^2}{4} - \frac{(\sqrt{x^2+y^2})^2}{4} = -\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} = 1$$

Por tanto la superficie tiene como eje de rotación al eje z, y como generatriz a la hipérbola equilatera (1):

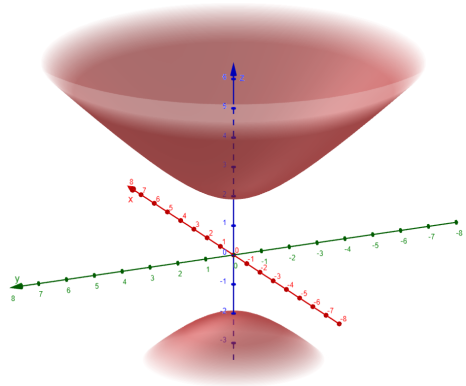

Figura 1: Superficie de revolución

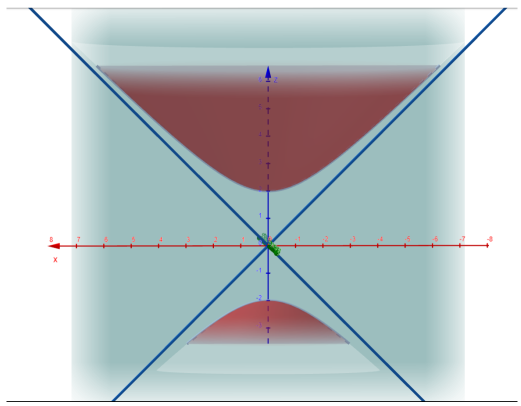

Figura 2: Curvas de nivel (generatrices) de la superficie en el plano $y = 0$ (El cuchillo)

ii) Consideremos la ecuación:

$$y = e^x \tag{2}$$

Esta representa la función exponencial en el plano xy, si tomamos una rotación en torno al eje z, obtenemos:

$$\sqrt{z^2 + y^2} = e^x \implies z^2 + y^2 = e^{2x}$$

Por tanto tenemos que el ejede rotación de la superficie es en eje x y que su curva directriz es la función exponencial en el plano xy descrita por (2):

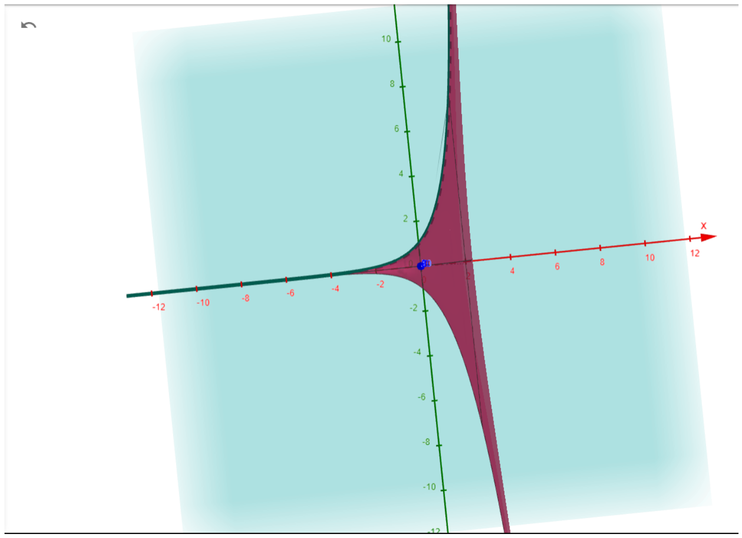

Figura 3: Curvas de nivel (generatirces) de la superficie en el plano $z = 0$ (El cuchillo)

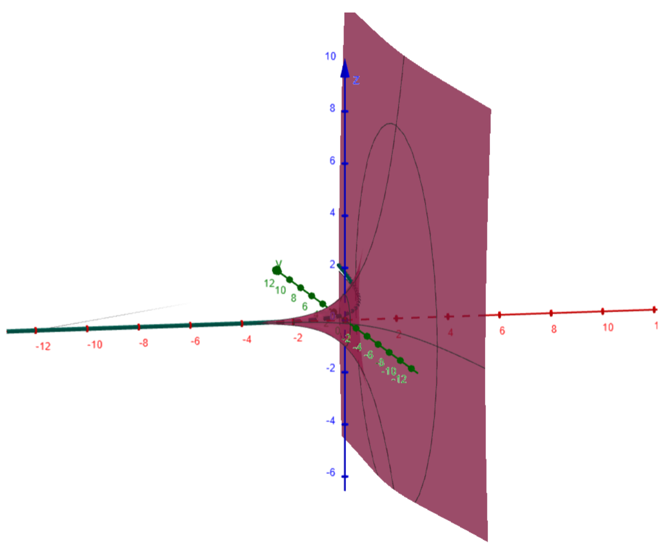

Figura 4: Superficie de revolución

Problema 2

Describe las cuádricas definidas por los polinomios siguientes. Esto es, identifica de que tipo es, da el centro, la dirección de los ejes y la ecuación canónica correspondiente. Dibújalas en su posición no canónica:

I. $2xy + 2xz + 2y - 5$

II. $xz - x + z - 3$

,

i) Primero escribimos a la cuadrica en su forma matricial:

$$P(x,y,z) = \overline{x}^t \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overline{x} + \overline{x}^t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - 5$$

Procedemos a diagonalizar la matríz principal

$$Det(A - I\,\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & -\lambda \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda\,(\lambda^2 - 0) - 1(-\lambda - 0) + \lambda = -\lambda(\lambda^2) + 2\lambda = \lambda(\lambda^2 - 2)$$

Por tanto los eigenvalues de la matríz son $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \sqrt{2}$, $\lambda_3 = -\sqrt{2}$ Ahora procedemos a obtener los eigenvectores, resolviendo los respectivos sistemas de ecuaciones, resolviendo el de $\lambda_1 = 0$:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y + z & = & 0 \\ 0z & = & 0 \end{array} \right.$$

Una solución a este sistema es $x = 0, y = -1, z = 1$, por tanto nuestro Primer eigenvector unitario es:

$$\overline{v_{\lambda_1}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Resolviendo el sistema de $\lambda_2 = \sqrt{2}$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\sqrt{2}x + y + z & = & 0 \\ x - \sqrt{2}y & = & 0 \\ x - \sqrt{2}z & = & 0 \end{array} \right.$$

Como λ_2 es raiz del polinomio caracteristico, tenemos que la matríz que representa al sistema homogeneo tiene determinante 0, luego este no es invertible, por tanto el sistema tiene infinitas soluciones, para evitarnos la fatiga de hallar el subespacio de soluciones, ya que solo nos interesa una partícular fijemos $y = 1$, obtenemos que $x = \sqrt{2}$ y que $z = 1$, por tanto nuestro eigenvector unitario es:

$$\overline{v_{\lambda_2}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Resolvemos el sistema de $\lambda_3 = -\sqrt{2}$::

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \sqrt{2}x + y + z & = & 0 \\ x + \sqrt{2}y & = & 0 \\ x + \sqrt{2}z & = & 0 \end{array} \right.$$

Siguiendo un proceso totalmente análogo al anterior fijamos $y = 1$ y obtenemos que $x = -\sqrt{2}$, $z = 1$ por tanto nuestro eigenvector unitario es:

$$\overline{v_{\lambda_3}} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Ahora que ya tenemos todos los eigenvectores de la matríz principal ya podemos proponer un cambio de coordenadas adecuado:

$$W(\overline{x}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \overline{x}$$

Por tanto vemos la cuadrica desde este sistema:

$$p \circ W(x,y,z) = \overline{x}^t \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \overline{x} + \overline{x}^t \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - 5$$

$$= \sqrt{2}x^2 - \sqrt{2}y^2 + x + y - \sqrt{2}z - 5 = x^2 + x - y^2 + y - z - \frac{5}{\sqrt{2}} = x^2 + \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4(2)} - y^2 + \frac{y}{\sqrt{y}} - \frac{1}{4(2)} - z - \frac{5}{\sqrt{2}}$$

$$= \left(x + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 - \left(y - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 - \left(z + \frac{5}{\sqrt{2}}\right)$$

Finalmente proponemos la traslación:

$$\pi(\overline{x}) = \overline{x} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{5}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Finalmente obtenemos la cuadrica bajo la transformación afín $l = W \circ \pi$:

$$p \circ l(x,y,z) = x^2 - y^2 - z$$

La cuadrica representa un paraboloide hiperbolico, como sabemos esta cuadrica no tiene centro, este se encuntra rotado hacia los ejes:

$$\begin{aligned} L_{x'} &:= T\,\overline{v_{\lambda_2}} \\ L_{y'} &:= T\,\overline{v_{\lambda_3}} \\ L_{z'} &:= T\,\overline{v_{\lambda_1}} \\ con &\quad T \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

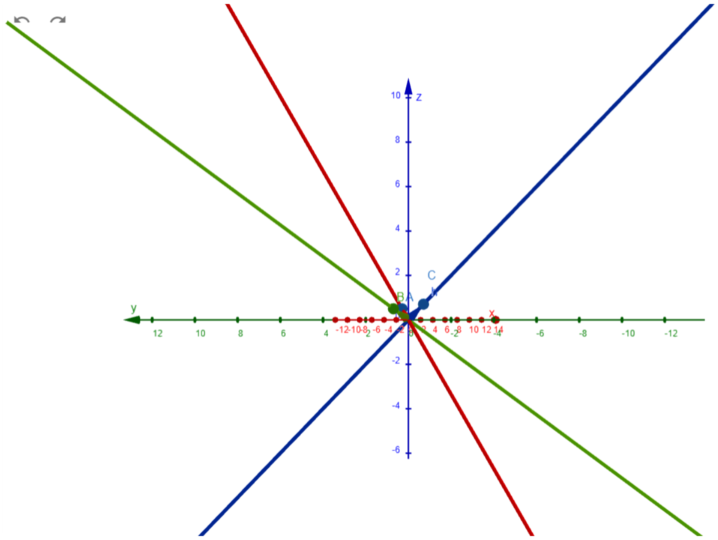

Figura 5: Nuevo sistema de ejes

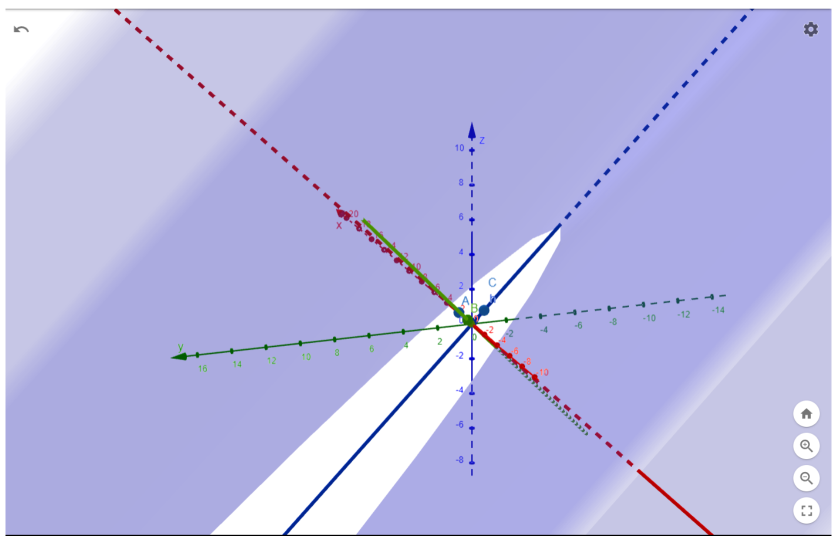

Figura 6: Cuadrica en posición no canonica

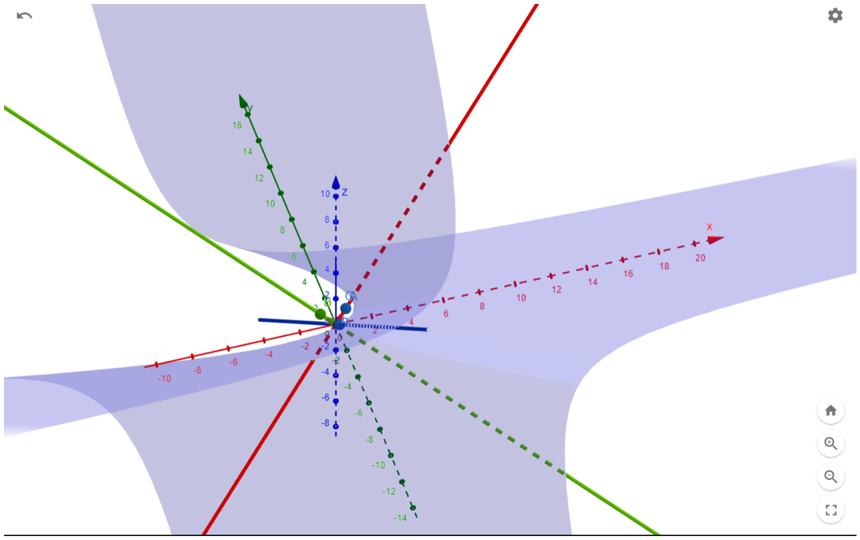

Figura 7: Cuadrica en posición no canonica

ii) Primero escribimos a la cuadrica en su forma matricial:

$$P(x,y,z) = \overline{x}^t \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \overline{x} + \overline{x}^t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 3$$

Procedemos a diagonalizar la matríz principal

$$Det(A - I\,\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\lambda & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \lambda \end{vmatrix} + \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & -\lambda \\ \frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda\,(-\lambda^2) - \frac{\lambda}{4} = \lambda(\lambda^2 - \frac{1}{4})$$

Por tanto los eigenvalues de la matríz son $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}$, $\lambda_3 = -\frac{1}{2}$ Ahora procedemos a obtener los eigenvectores, resolviendo los respectivos sistemas de ecuaciones, resolviendo el de $\lambda_1 = 0$:

$$\begin{cases} \frac{x}{2} &= 0 \\ 0y &= 0 \\ \frac{z}{2} &= 0 \end{cases}$$

Una solución a este sistema es $x = 0, y = 1, z = 0$, por tanto nuestro Primer eigenvector unitario es:

$$\overline{v_{\lambda_1}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resolviendo el sistema de $\lambda_2 = \frac{1}{2}$

$$\begin{cases} -\frac{x}{2} + \frac{z}{2} & = & 0 \\ \frac{x}{2} - \frac{z}{2} & = & 0 \\ -\frac{y}{2} & = & 0 \end{cases}$$

Obtenemos que $x = 1$, $z = 1$, $y = 0$ por tanto nuestro eigenvector unitario es:

$$\overline{v_{\lambda_2}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Resolvemos el sistema de $\lambda_3 = -\frac{1}{2}$::

$$\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{z}{2} & = & 0 \\ \frac{x}{2} + \frac{z}{2} & = & 0 \\ \frac{y}{2} & = & 0 \end{cases}$$

Siguiendo un proceso totalmente análogo al anterior obtenemos que $x = 1$, $z = -1$, $y = 0$ por tanto nuestro eigenvector unitario es:

$$\overline{v_{\lambda_3}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Ahora que ya tenemos todos los eigenvectores de la matríz principal ya podemos proponer un cambio de coordenadas adecuado:

$$W(\overline{x}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \overline{x}$$

Por tanto vemos la cuadrica desde este sistema:

$$p \circ W(x,y,z) = \overline{x}^t \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \overline{x} + \overline{x}^t \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 3$$

$$= \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 - \sqrt{2}y - 3 = x^2 - y^2 - 2\sqrt{2}y - 6 = x^2 - (y^2 + 2\sqrt{2}y + 2) + 2 - 6$$

$$= x^2 - (y + \sqrt{2})^2 - 4 = \frac{x^2}{4} + \frac{(y+\sqrt{2})^2}{4} - 1$$

Finalmente proponemos la traslación:

$$\pi(\overline{x}) = \overline{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Finalmente obtenemos la cuadrica bajo la transformación afín $l = W \circ \pi$:

$$p \circ l(x, y, z) = \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} - 1$$

La cuadrica representa un cilindro hiperbólico rotado hacia los ejes:

$$\begin{aligned} L_{x'} &:= T\,\overline{v_{\lambda_2}} \\ L_{y'} &:= T\,\overline{v_{\lambda_3}} \\ L_{z'} &:= T\,\overline{v_{\lambda_1}} \\ con &\quad T \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

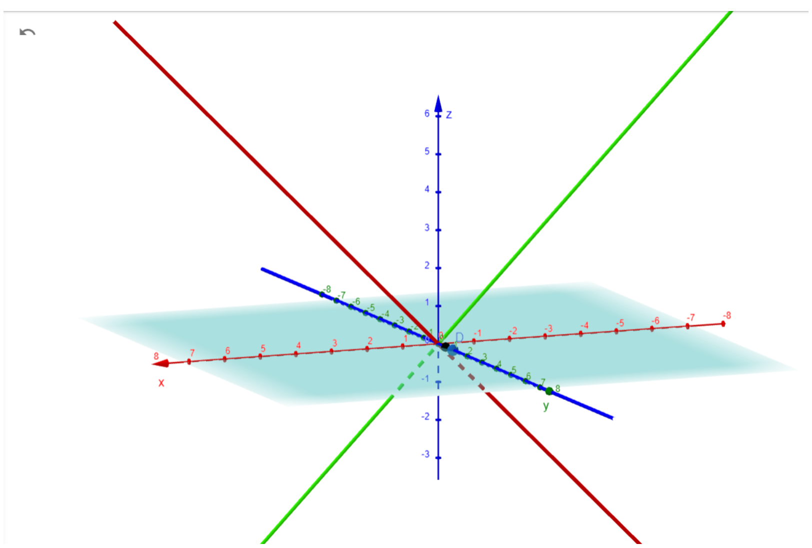

Figura 8: Nuevo sistema de ejes

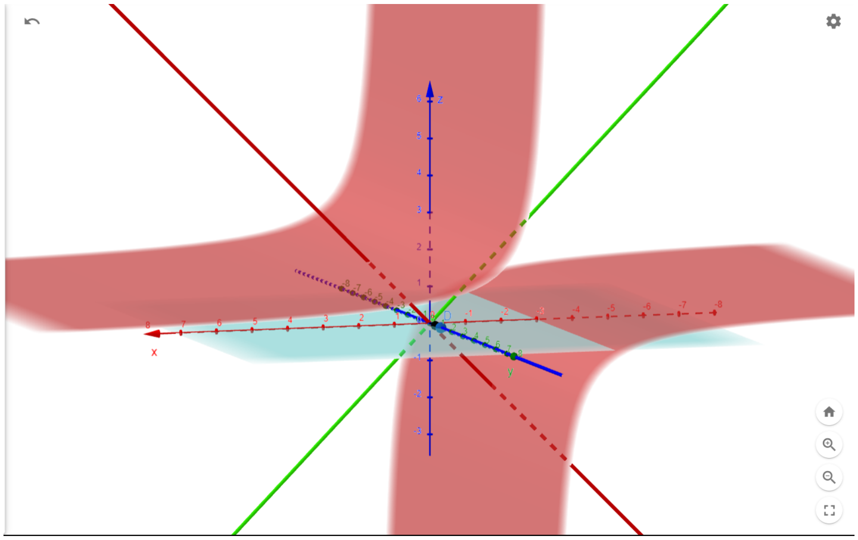

Figura 9: Cuadrica en posición no canonica

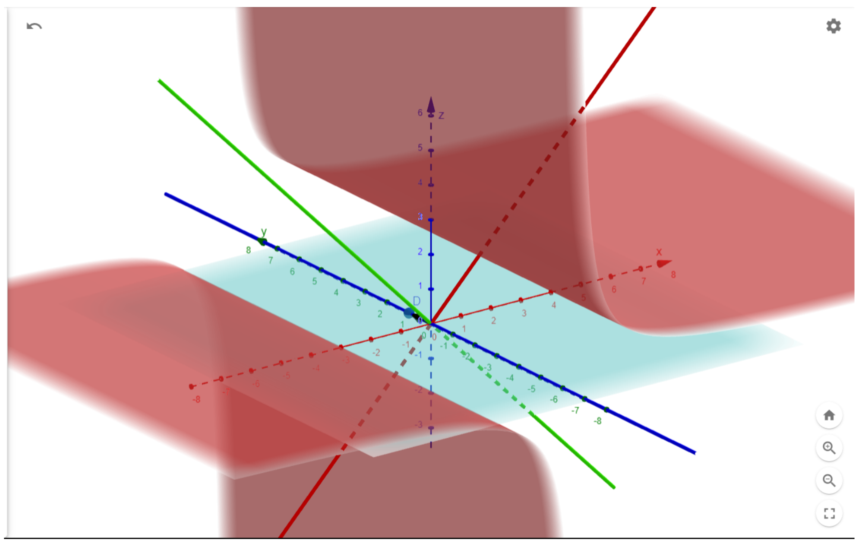

Figura 10: Cuadrica en posición no canonica

Ahora si bien el cilindro hiperbolico no tiene centro, este si tiene una recta de centros, esta es una recta paralela al eje del cilindro que pasa por el centro de la cónica vista como superficie de nivel para algún plano perpéndicular a su eje, primero hallaremos esta recta para la cónica vista desde el sistema de referencia solamente rotado, para Esto trazamos las curvas de nivel del cilindro en el plano $z = 0$, la ecuación que hara el cilindro en este plano es la misma claramente:

$$\frac{x^2}{4} - \frac{(y + \sqrt{2})}{4} = 1$$

Por conocimiento de Geometria Anaálitica I sabemos que el centro de esta cónica se encuentra en el punto $\overline{P} := (0, -\sqrt{2}, 0)$,por tanto para hallar la recta de centros solo necesitamos una recta que pase por $\overline{P}$ y que se paralela a $\overline{e_3} = (0, 0, 1)$, la cual e sla siguiente:

$$L_c := T\,\overline{e_1} + \overline{P} \quad T \in \mathbb{R}$$

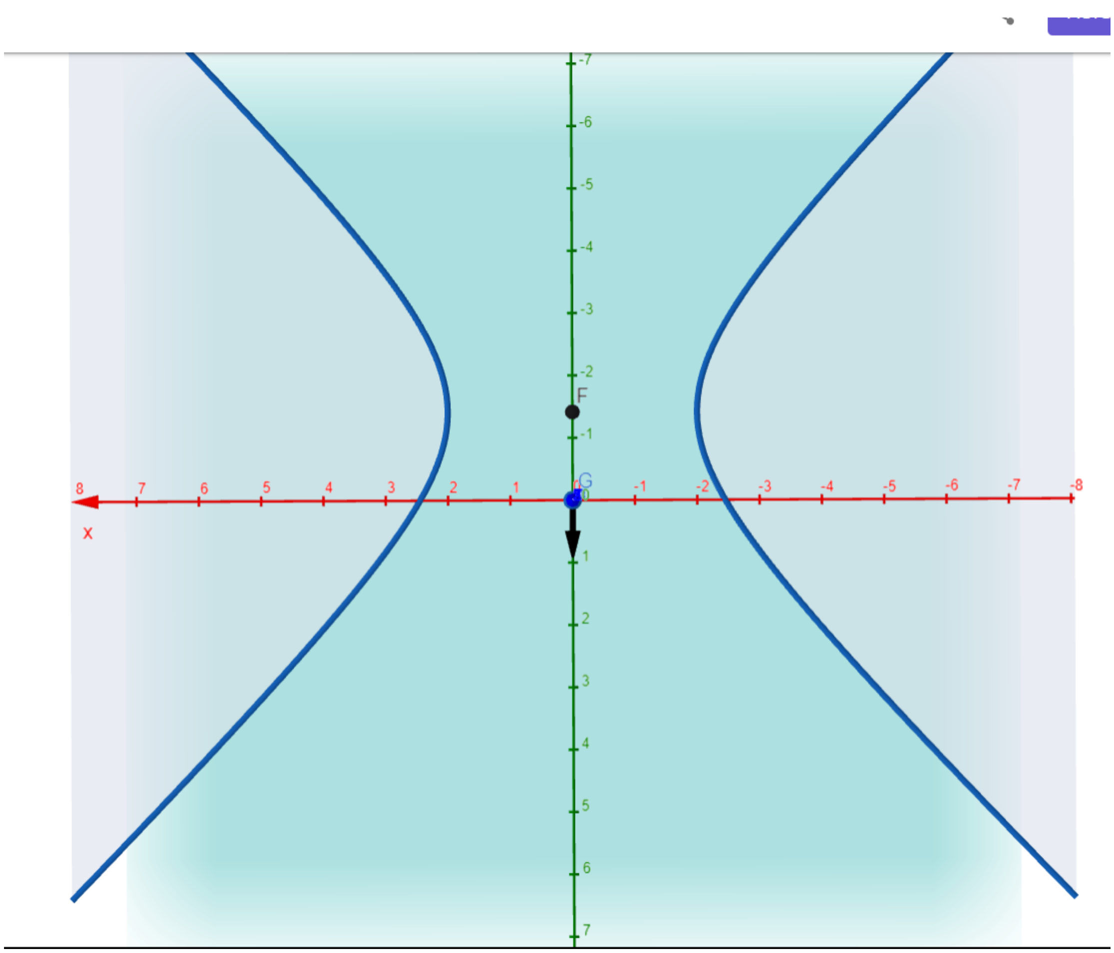

Figura 11: Curva de nivel en el plano $z = 0$

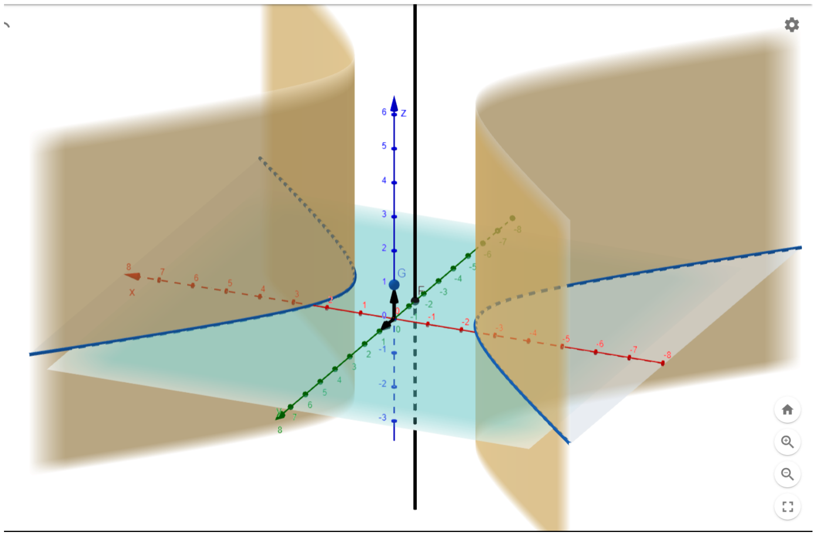

Figura 12: Recta de centros L_c

Esta es una recta de centros debido a que si tomas cualquier superficie de nivel dada por un plano paralelo a $z = 0$, la intersección del plano y la recta en un solo punto te dara el centro de la curva de nivel dada, ahora obtuvimos la recta de centros para la cuadrica vista desde el cambio de sistema, para obtener la recta de la cuadrica original bastara aplicarla transformación al punto $\overline{P}$ y al vector $\overline{e_3}$, por construcción ya sabemos que $T(\overline{e_3}) = (0, 1, 0)$, por tanto bastara aplicarle la matriz a $\overline{P}$:

$$W(\overline{P}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto la recta buscada es:

$$L'_c = T\,\overline{e_2} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad T \in \mathbb{R}$$

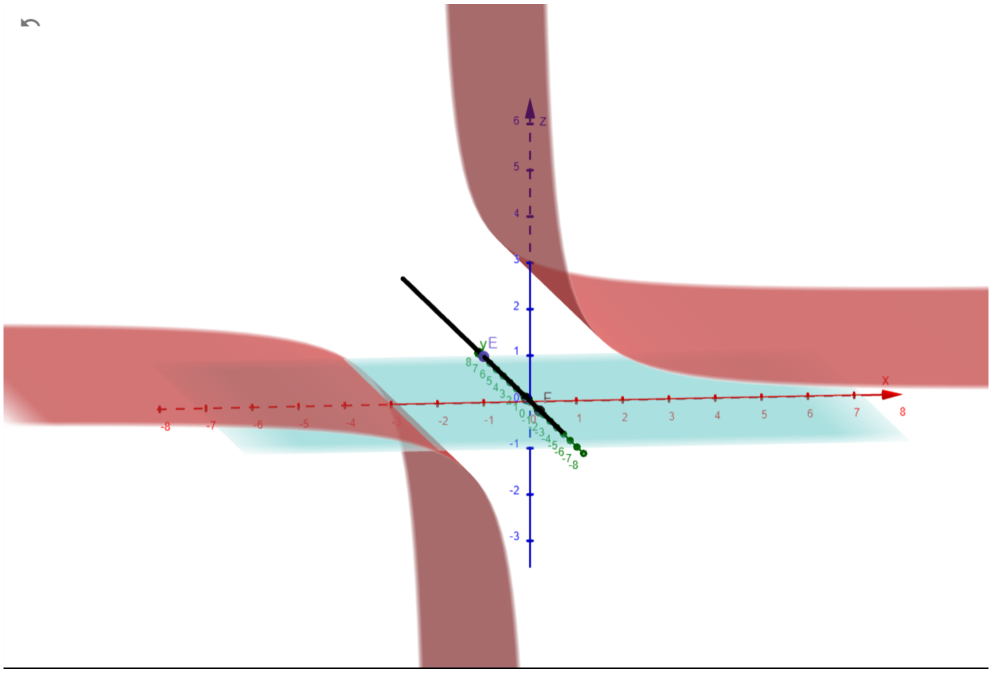

Figura 13: Recta de centros L'_c

Problema 3

Encuentre las ecuaciones de las rectas que son testigo de la definición de superficie reglada para $z = 2xy$

Primero obtendremos la ecuación canónica de de la cuadrica:

$$P(x,y,z) = \overline{x}^t \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overline{x} + \overline{x}^t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Procedemos a diagonalizar la matríz principal

$$Det(A - I\,\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda\,(\lambda^2) + \lambda = \lambda(-\lambda^2 + 1)$$

Por tanto los eigenvalues de la matríz son $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$ Ahora procedemos a obtener los eigenvectores, resolviendo los respectivos sistemas de ecuaciones, resolviendo el de $\lambda_1 = 0$:

$$\begin{cases} y &= 0 \\ x &= 0 \\ 0z &= 0 \end{cases}$$

Una solución a este sistema es $x = 0, y = 0, z = 1$, por tanto nuestro Primer eigenvector unitario es :

$$\overline{v_{\lambda_1}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Resolviendo el sistema de $\lambda_2 = 1$

$$\begin{cases} -x + y &= 0 \\ x - y &= 0 \\ -z &= 0 \end{cases}$$

Obtenemos que $x = 1$, $z = 0$, $y = 1$ por tanto nuestro eigenvector unitario es:

$$\overline{v_{\lambda_2}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resolvemos el sistema de $\lambda_3 = -1$::

$$\begin{cases} x + y &= 0 \\ x + y &= 0 \\ z &= 0 \end{cases}$$

Siguiendo un proceso totalmente análogo al anterior obtenemos que $x = 1$, $z = 0$, $y = -1$ por tanto nuestro eigenvector unitario es:

$$\overline{v_{\lambda_3}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ahora que ya tenemos todos los eigenvectores de la matríz principal ya podemos proponer un cambio de coordenadas adecuado:

$$W(\overline{x}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overline{x}$$

Por tanto vemos la cuadrica desde este sistema:

$$p \circ W(x,y,z) = \overline{x}^t \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overline{x} + \overline{x}^t \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= x^2 - y^2 - z$$

Como vemos la cuadrica representa un paraboloide hiperbolico, cuyos ejes son:

$$\begin{aligned} L_{x'} &:= T\,\overline{v_{\lambda_2}} \\ L_{y'} &:= T\,\overline{v_{\lambda_3}} \\ L_{z'} &:= T\,\overline{v_{\lambda_1}} \\ con & \quad T \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

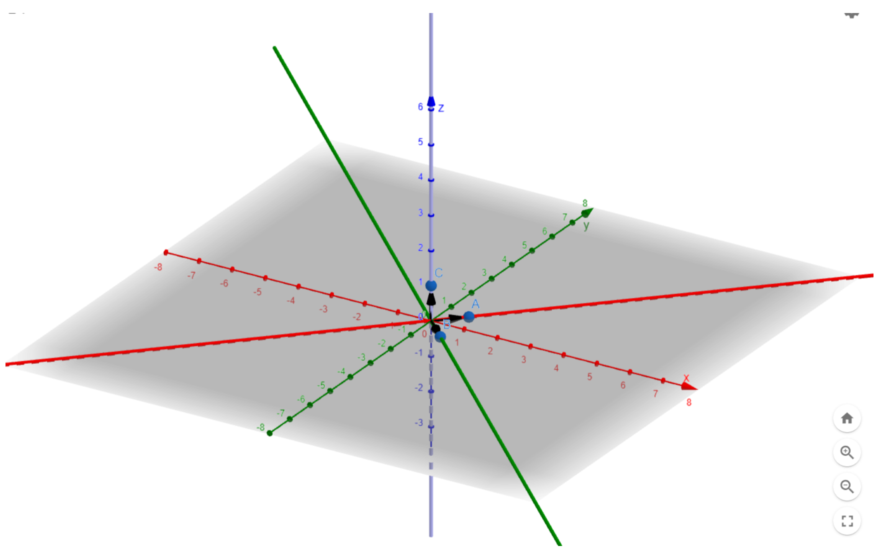

Figura 14: Nuevo sistema de ejes

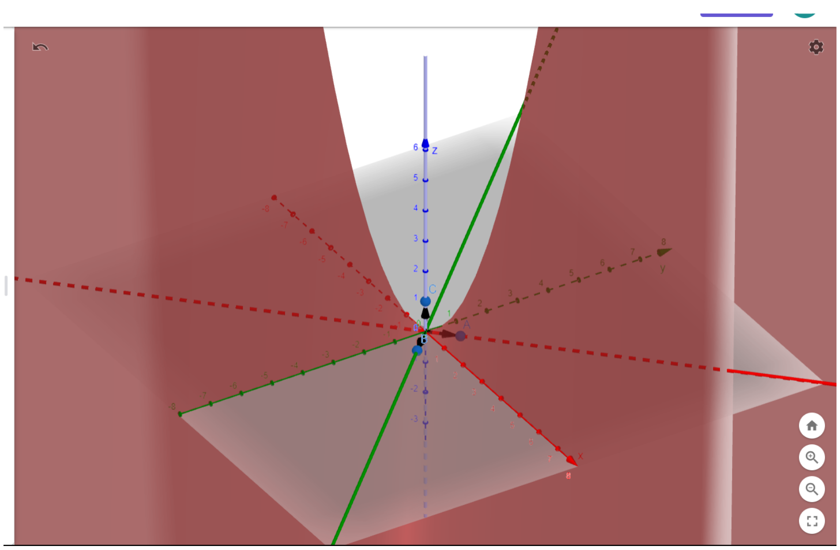

Figura 15: Cuadrica en posición no canonica

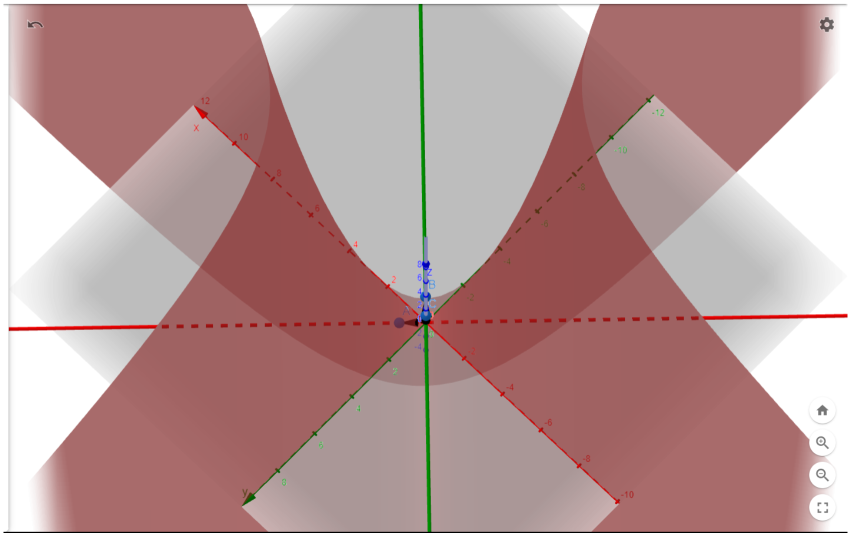

Figura 16: Cuadrica en posición no canonica

Ahora por lo visto en clase si tomamos $\overline{r} \in \wp_{p\circ W}$(un vector en la curva definida por los ceros de $p \circ W$), con $\overline{r} = (x, y, z)$, si $\overline{r}$ no esta en la intercepción del paraboloide con el plano xy, entonces las dos rectas que pasan por $\overline{r}$ y que estan totalmente contenidas en la curva estan dadas por los siguientes sistemas de ecuaciones para $k \in \mathbb{R} - \{0\}$:

$$\begin{cases} x + y &= kz \\ x - y &= \frac{1}{k} \end{cases}$$
$$\begin{cases} x - y &= kz \\ x + y &= \frac{1}{k} \end{cases}$$

Estos sistemas representan las rectas:

$$L_1 = \overline{r} + T(-k, -k, -2)$$
$$L_2 = \overline{r} + T(k, -k, 2)$$
$$con \quad T \in \mathbb{R}$$

En cambio como la curva de nivel de $\wp_{p\circ W}$ con $z = 0$, son las 2 rectas $L_z = (1, 1, 0)T$ y $L'_z = (1, -1, 0)T$ con $T \in \mathbb{R}$, tendremos que cualquier punto de la forma que se encuntre en esta curva de nivel, tendra ya dada una recta trival toalmente contenida sobre la cuadrica que pase por dicho punto mientras que la otra estaria dada por alguno de los dos sistemas anteriores.

Ahora para encontrar las rectas contenidas en la cuadrica original(rotada), demostremos el siguiente lema:

Lemma 0.1.
Sea W una transformación lineal invertible, si $L \subset \mathbb{R}^3$ es una recta tal que $L \subset \wp_{p \circ W}$ (la curva definida pos los ceros de $p \circ W$), donde p es el polinomio de una superficie cuadrica, entonces $W[L] \in \wp_p$

Demostración.

Sea $\overline{r} \in W[L]$, entonces existe $\overline{e} \in L$ tal que $W(\overline{e}) = \overline{r}$, luego como $L \subset \wp_{p \circ W}$, por tanto $p \circ W(\overline{e}) = p(\overline{r}) = 0$, por tanto $\overline{r} \in p$ como $\overline{r}$ fue arbitrario $W[L] \subset \wp_p$ □

Como $W(\overline{x})$ definida al principio del problema es invertible, pues esta es una rotación, y ademas tenemos que como W manda biyectivamente puntos de $\wp_{p \circ W}$ a puntos de $\wp$, tenemos que para cualquier $\overline{x} \in \wp_{p \circ W}$ entonces $W(\overline{x}) \in \wp_p$, basta encontrar la imagen bajo W de las rectas que reglán $\wp_{p \circ W}$, ya que estas reglaran a $\wp_p$ por el lemma, por tanto las obtenemos:

$$\begin{aligned} L_1' = W(\overline{r}) + T\, W(-k, -k, -2) = W(\overline{r}) + T\,(-\sqrt{2}\,k, 0, -2) \\ L_2' = W(\overline{r}) + T\,(k, -k, 2) = W(\overline{r}) + T\,(0, \sqrt{2}k, 2) \\ Con\ T \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Recordemos que estas formulas sirven siempre y cuando $\overline{r} \in \wp_{p \circ W}(W(r) \in \wp_p)$, no este en la intersección de nuestro paraboloide y el plano xy, si esto sucediera debemos encontrar también la imagen de las rectas triviales en caso de que el vector caiga sobre esta intersección:

$$\begin{aligned} L_z' = T\, W(1, 1, 0) = T\,(\sqrt{2}, 0, 0) \\ L_z'' = T\, W(1, -1, 0) = T\,(0, \sqrt{2}, 0) \\ Con\ \ T \in \mathbb{R} \end{aligned}$$