Problema 18

Elías López Rivera [1]

[1] Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de ciencias

26 de enero de 2025

1. Enunciado

Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones convergentes a α y β respectivamente. **Demuestre** que

$$\lim_{n\to\infty} max\{a_n, b_n\} = max\{\alpha, \beta\} \quad \lim_{n\to\infty} min\{a_n, b_n\} = min\{\alpha, \beta\}$$

2. Solución

Demostremos que sean $x, y \in \mathbb{R}$, entonces $max\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y - |x + y|)$.

i) $x > y$

$$x - y > 0 \implies |x - y| = x - y$$

$$\tfrac{1}{2}(x + y + |x - y|) = \tfrac{1}{2}(x + y + x - y) = \tfrac{2x}{2} = x = max\{x, y\}$$

ii)$x = y$

$$x - y = 0 \implies |x - y| = 0$$

$$\tfrac{1}{2}(x + y + |x + y|) = \tfrac{1}{2}(x + y) = \tfrac{2x}{2} = x = max\{x, y\}$$

iii)$x < y$

$$x - y < 0 \implies |x - y| = y - x$$

$$\tfrac{1}{2}(x + y + |x - y|) = \tfrac{1}{2}(x + y + y - x) = \tfrac{2y}{2} = y = max\{x, y\}$$

Se sigue que:

$$\lim_{n\to\infty} max(a_n, b_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}(a_n + b_n + |a_n - b_n|)$$

Utlilizando los teoremas de álgebra de límites:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}(a_n + b_n + |a_n - b_n|) = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + |\alpha - \beta|) = max\{\alpha, \beta\}$$

Ahora demostremos que sean:$x, y \in \mathbb{R}$ $min\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$

i) $x > y$

$$x - y > 0 \implies |x - y| = x - y$$

$$\tfrac{1}{2}(x + y - |x - y|) = \tfrac{1}{2}(x + y - x + y) = \tfrac{2y}{2} = y = min\{x, y\}$$

ii) $x = y$

$$x - y = 0 \implies |x - y| = 0$$

$$\tfrac{1}{2}(x + y - |x + y|) = \tfrac{1}{2}(x + y) = \tfrac{2x}{2} = x = min\{x, y\}$$

iii)$x < y$

$$x - y < 0 \implies |x - y| = y - x$$

$$\tfrac{1}{2}(x + y - |x - y|) = \tfrac{1}{2}(x + y - y + x) = \tfrac{2x}{2} = x = min\{x, y\}$$

Se sigue que:

$$\lim_{n\to\infty} min(a_n, b_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}(a_n + b_n - |a_n - b_n|)$$

Utilizando los teoremas de álgebra de límites:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}(a_n + b_n - |a_n - b_n|) = \frac{1}{2}(\alpha + \beta - |\alpha - \beta|) = min\{\alpha, \beta\}$$