Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Geometria Moderna
Problema de bitácora 5
Elías López Rivera[1] Héctor Santiago González Baltierra [2]
{[1] elias.lopezr, [2] hectorgb}@ciencias.unam.mx
Fecha: 20/10/2024

Áreas y razones

Dado un triángulo ABC, ¿es posible construir circunferencias que sean tangentes exteriormente a cada uno de los lados (o prolongaciones) del triángulo? En caso afirmativo, ¿cómo son entre sí los segmentos formados por cada vértice del triángulo y el punto de tangencia generado en el lado opuesto a dicho vértice?

S.1 Comprensión del problema y formulación de una conjetura

La primera dificultada importante que nos presenta el problema es la forma en que debemos trazarlo, pues no parece nada intuitivo o fácil el trazo de una circunferencia tangente a tres lados (o sus prolongaciones) de un triángulo $\Delta\, ABC$, sin embargo esta primera dificultad se ve superada si se recuerda el concepto de excentro visto en clase, el excentro es el punto donde se intersecan dos bisectrices exteriores de $\Delta\, ABC$ con una de las interiores, sin embargo para simplificar un poco el problema podemos tomar que solo es el punto donde una bisctriz exterior y una interior se intersecan, esto para no trabajar con concurrencia tan directamente desde el comienzo

Otra cuestion importante, en la generación de la circunferencia es la forma en que elegimos el radios, esta dificultad es atacada mediante el trazo de una recta perpéndicular a cualesquiera de los dos lados (o sus prolongaciones), que pase por el punto donde se intersecan las 2 bisectrices, debido a la condición de tangencia el segmento formado por el centro hasta el punto donde esta perpéndicular interseca a su respectivo lado sera el radio de la circunferencia buscada.

Posteriormente procedemos a realizar nuestra construcción en geogebra, con la herramienta poligono trazamos el triángulo ABC, trazamos las rectas AC y BC, tomamos D un punto arbitrario sobre BC, diferente de B y C, y construimos la bisectriz del ángulo $\measuredangle CBA$ con la herramienta del mismo nombre, luego trazamos la bisectriz del ángulo $\measuredangle BCA$, llamamos E al punto donde se intersecan ambas bisectrices, posteriormente trazamos la perpéndicular que pase por E respecto a la recta AC, cuyo pie es el punto F, finalmente trazamos la circunferencia d con centro en E y radio EF, esta cricunferencia es la buscada, marcamos H el punto de tangencia con el lado AB, y G el punto de tangencia con la recta BC:

Construcción 1

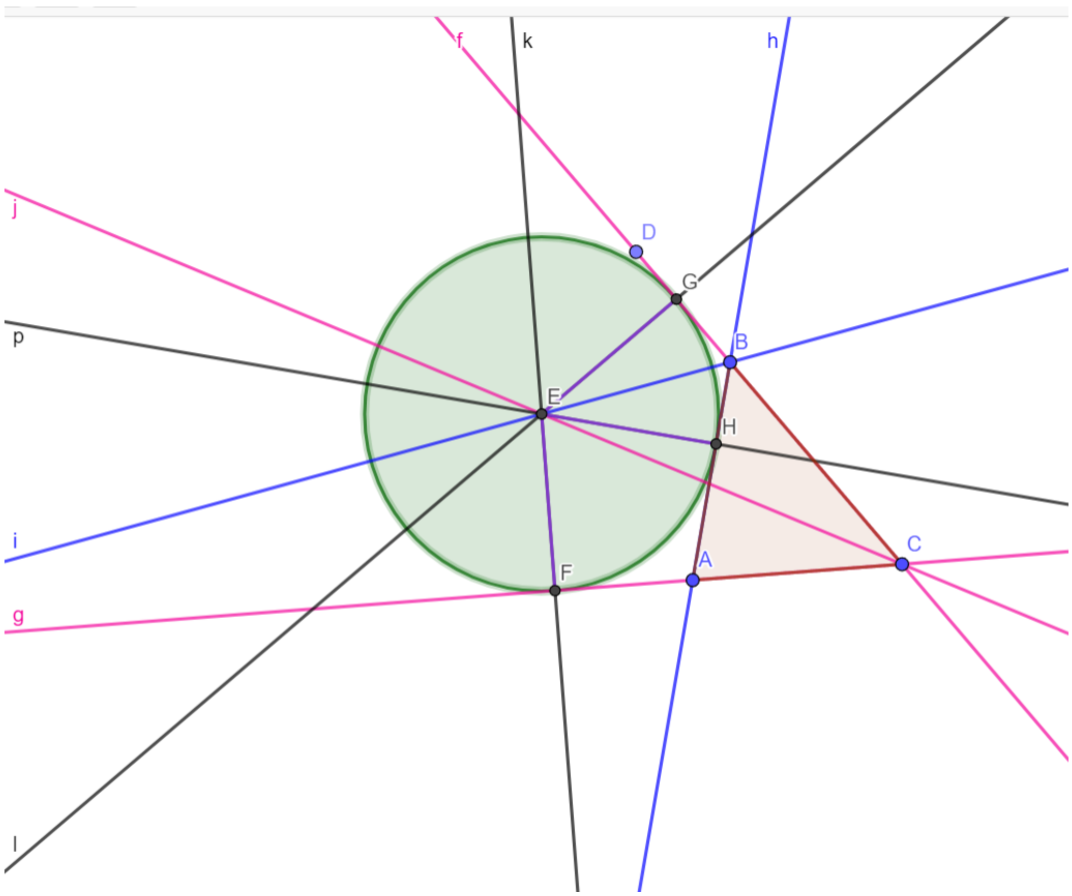

Figura 1: Construcción

Una vez resuelta nuestra primera cuestión basta con repetir el proceso sobre los diferentes lados del triángulo para poder encontrar 3 círculos tangentes a los respectivos lados, una vez hecho esto, trazar los segmentos que van desde un vertice hacia el punto de tangencia sobre el lado opuesto resuta sencillo de lograr

Construcción 2

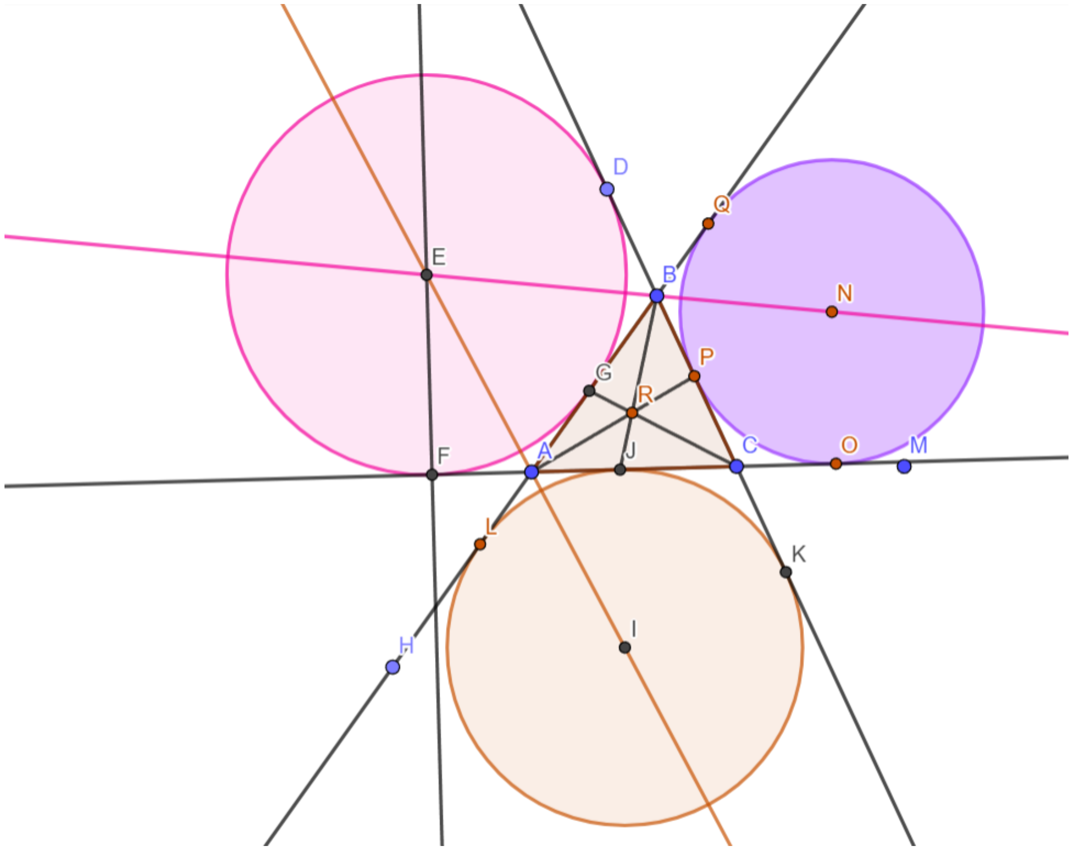

Figura 2: Construcción

Enumeramos los elementos de nuestra construcción:

1. Triángulo $\Delta\, ABC$
2. m bisectriz de $\measuredangle\, DBA$ y j bisectriz de $\measuredangle\, BAF$
3. Circunfrencia d con centro en E y radio EF, puntos de tangencia F, G y D con las recta AC, el lado AB y la recta BC respectivamente
4. Circunfrencia e con centro en I y radio IJ, puntos de tangencia L, J y K con las recta AB, el lado AC y la recta BC respectivamente
5. Circunfrencia r con centro en N y radio NP, puntos de tangencia Q, P y O con las recta AB, el lado BC y la recta AC respectivamente
6. Segmentos $\overline{BJ}$, $\overline{CG}$ y $\overline{AP}$

Podemos notar que nuestro modelo es robusto debido a que si movemos cualesquiera de los puntos que lo permiten, las características principales del modelo se mantienen intactas, por tanto investigando algunas de esta posibles condiciones notamos que hay algo que permanece invariante dentro de nuestro modelo y es la concurrencia de los segmentos trazados por un vertice y un punto de tangencia opuesto, es asi como vemos el primer atisbo de nuestra conjetura

S.2 Elaboración de una estrategia de resolución y justificación del problema

Conjetura

Sea un triángulo ΔABC, trazamos las tres circunferencias que son tangentes a los tres lados de ΔABC, tenemos que los segmentos formados por un vertice y el punto de tangencia sobre el lado opuesto a dicho vertice siempre son concurrentes

Tan solo al escuchar la palabra concurrencia el problema pide a gritos el uso del teorema de Ceva, sin embargo para el uso de este teorema se necesitan algunas relaciones elementales entre las razones que hay por los segmentos generados por los puntos donde las cevianas intersecan a los lados del triángulo, en primera estancia esto resulta complicado pues no tenemos muhca información respecto a estas cuestiones, por lo que pareciera ser que el problema necesitara de algunas construcciones adicionales.

Es asi como notamos que las mejores armas para la construcción de dichos triángulos son el hecho de que tenemos circunferencias tangentes, y sus radios resultan perp"endiculares a los 3 lados (o sus respectivas prolongaciones) de ΔABC, ademas de contar con las bisectrices de alguno de los ángulos internos y externos de ΔABC, por tanto aparentemente ya no resulta tan complejo encontrar una combinación de triángulos que nos den el teorema de ceva de forma instantanea

S.3 Resolución del problema

Enumeramos los elementos de nuestra siguiente construcción:

1. Triángulo ΔABC
2. i bisectriz de $\measuredangle OAF$, l bisectriz de $\measuredangle JGR$
3. j perpéndicular a AC que pasa por E, m perpéndicular a AC que pasa por I
4. Circunfrencia d con centro en E y radio EF, puntos de tangencia F, O y Q con las recta AC, el lado AB y la recta BC respectivamente
5. Circunfrencia e con centro en I y radio IR, puntos de tangencia J, R y K con las recta AC, el lado BC y la recta AB respectivamente
6. Circunfrencia r con centro en N y radio NP, puntos de tangencia P, M y T con las recta AB, el lado AC y la recta BC respectivamente
7. Segmentos $\overline{CO}$, $\overline{AR}$ y $\overline{BM}$, N el punto donde estos concurren

Construcción 3

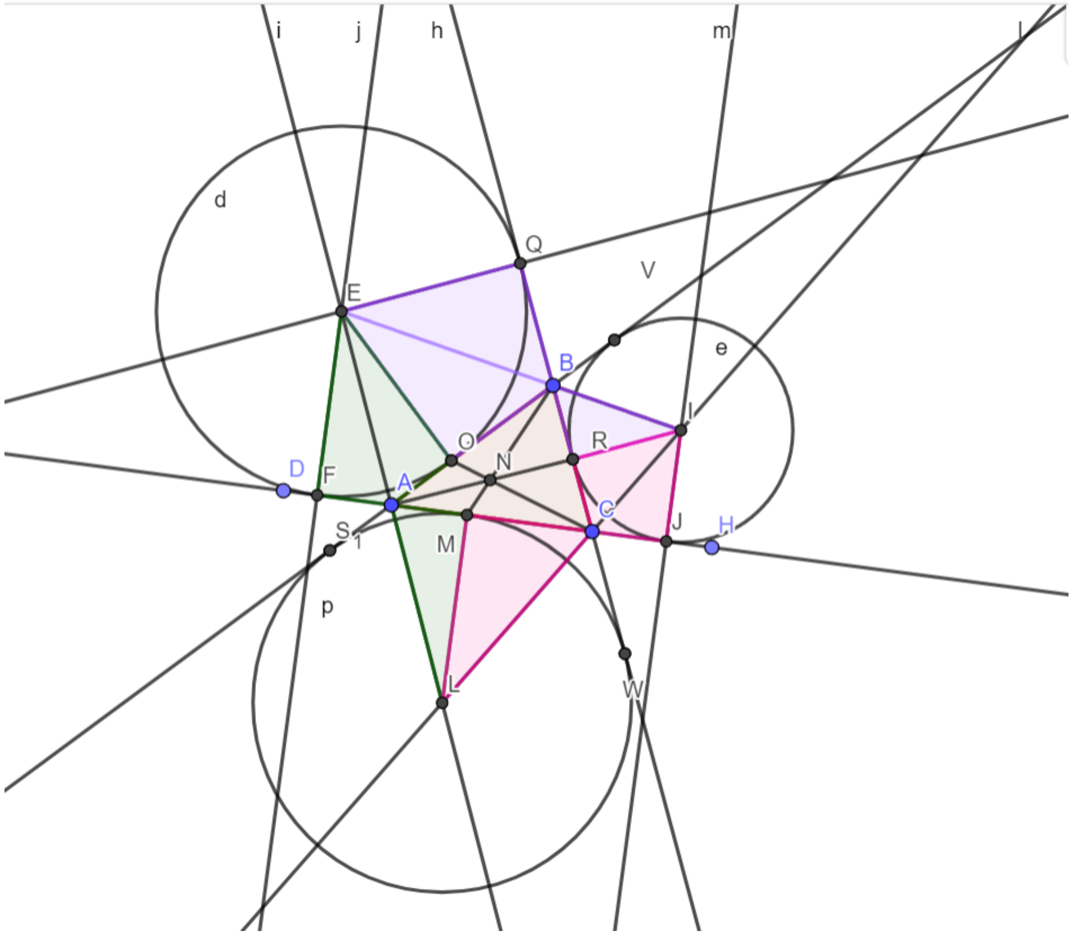

Figura 3: Construcción

Construimos los triángulos $\Delta\, AEF$, ΔAEO y $\Delta\, AML$, afirmamos que $\Delta\, AEF \cong AEO$, y que $\Delta\, AEF \approx \Delta\, AML$, procedemos a demostrar lo anterior, como i es bisectriz del ángulo $\measuredangle\, FAO$, se tiene que $\measuredangle\, EAF = \measuredangle\, OAE$, luego tenemos que como EF y EO, son los radios formados por los puntos de tangencia sobre las rectas $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$ de la circunferencia d tangente a los tres lados o sus prolongaciones, tenemos que necesariamente $\measuredangle\, AFE = \measuredangle\, EOA = \frac{\pi}{2}$, de estas igualdades y un despeje es fácil ver que $\measuredangle\, FEA = \measuredangle\, AEO$, luego como AE es lado común de $\Delta\, AEF$ y $\Delta\, AEO$, se sigue por criterio ángulo-lado-ángulo que $\Delta\, AEF \cong AEO$.

Ahora tenemos que como LM es el radio formado por el punto de tangencia sobre la recta $\overline{AC}$ de la circunferencia p tangente a los tres lados o prolongaciones, se sigue que necesariamente $\measuredangle\, AML = \frac{\pi}{2}$, a su vez tenemos que $\measuredangle\, EAF = \measuredangle\, LAM$ pues estos son opuestos por el vertice, por criterio ángulo -ángulo se tiene que $\Delta\, AEF \approx \Delta\, AML$, de lo anterior se obtiene que:

$$\frac{AM}{FA} = \frac{ML}{EF} \implies \frac{AM}{OA} = \frac{ML}{EO}$$

Podemos seguir un proceso análogo sobre los triángulos $\Delta\, EBO$, $\Delta\, EBQ$ y $\Delta\, IBR$, para obtener que $\Delta\, EBO \cong \Delta\, EBQ$ y $\Delta\, EBQ \approx \Delta\, IBR$,se sigue que:

$$\frac{BQ}{RB} = \frac{EQ}{RI} \implies \frac{BO}{RB} = \frac{EO}{RI}$$

De la misma manera hacemos un proceso análogo sobre $\Delta\, RGI$, $\Delta\, JGI$ y $\Delta\, GML$, para obtener $\Delta\, RGI \cong \Delta\, JGI$ y $\Delta\, JGI \approx \Delta\, MGL$, se sigue que:

$$\frac{CJ}{MC} = \frac{IJ}{ML} \implies \frac{CR}{MC} = \frac{RI}{ML}$$

Juntando todo lo anterior tenemos que:

$$\frac{BO}{OA}\frac{AM}{MC}\frac{CR}{RB} = \frac{AM}{OA}\frac{BO}{RB}\frac{CR}{MC} = \frac{ML}{EO}\frac{EO}{RI}\frac{RI}{ML} = 1$$

Por tanto por teorema de Ceva CO, BM Y AR son concurrentes, lo que se queria demostrar.

S.4 Extensión del problema

La verdad no nos aventurariamos a afirmar que el proceso seguido para construir las circunferencias tangentes sea único, a pesar de que no se nos ocurra otra forma de hacerlo, los conceptos más importantes para construir dichas circunferencias es el de excentro, bisectriz interior y exterior, y el hecho de que el radio formado por el punto de tangencia resulta perpéndicular a la recta tangente.

El proceso que seguimos para trazar las circunferencias tangentes, es replicable con el uso de solo regla y compás, pues no usamos ningún lugar geométrico que no tenga un algoritmo claro para su construcción

Como extensión del problema planteamos una cuestión algo diferente a la propuesta, y es que haciendo una conjetura basada puramente en la intuición, en algo que parece ser al verlo, hemos notado que el triángulo $\Delta\, ABC$ parece ser el triángulo pedal órtico del triángulo cuyos vertices son los excentros de las tres circunferencias tangentes a los lados o sus prolongaciones de $\Delta\, ABC$, para demostrar esto, bastaria probar que los vertices A, B y C, son pies de las alturas desde N, I, E.

Este problema puede ser atacado demostrando un hecho interesante, y es que la bisectriz interior y exterior respecto a un mismo vertice de un triángulo, resultan perpénsiculares, en nuestro problema por construcción la recta IN, resulta ser bisectriz del ángulo $\measuredangle OCB$, ahora si trazamos la bisectriz de BCA, tendremos que esta sera perpéndicular a IN, ademas de que pasara por el punto E, que el vertice opuesto respecto al ladp $\overline{IN}$, es decir la bisectriz es la altura respecto al vertice E del triángulo $\Delta\, EIN$, cuyo pie se encunetra en el vertice C, podemos seguir un proceso análogo para todos los vertices, y encontraremos que el triángulo pedal órtico de $\Delta\, EIN$ es de hecho $\Delta\, ABC$

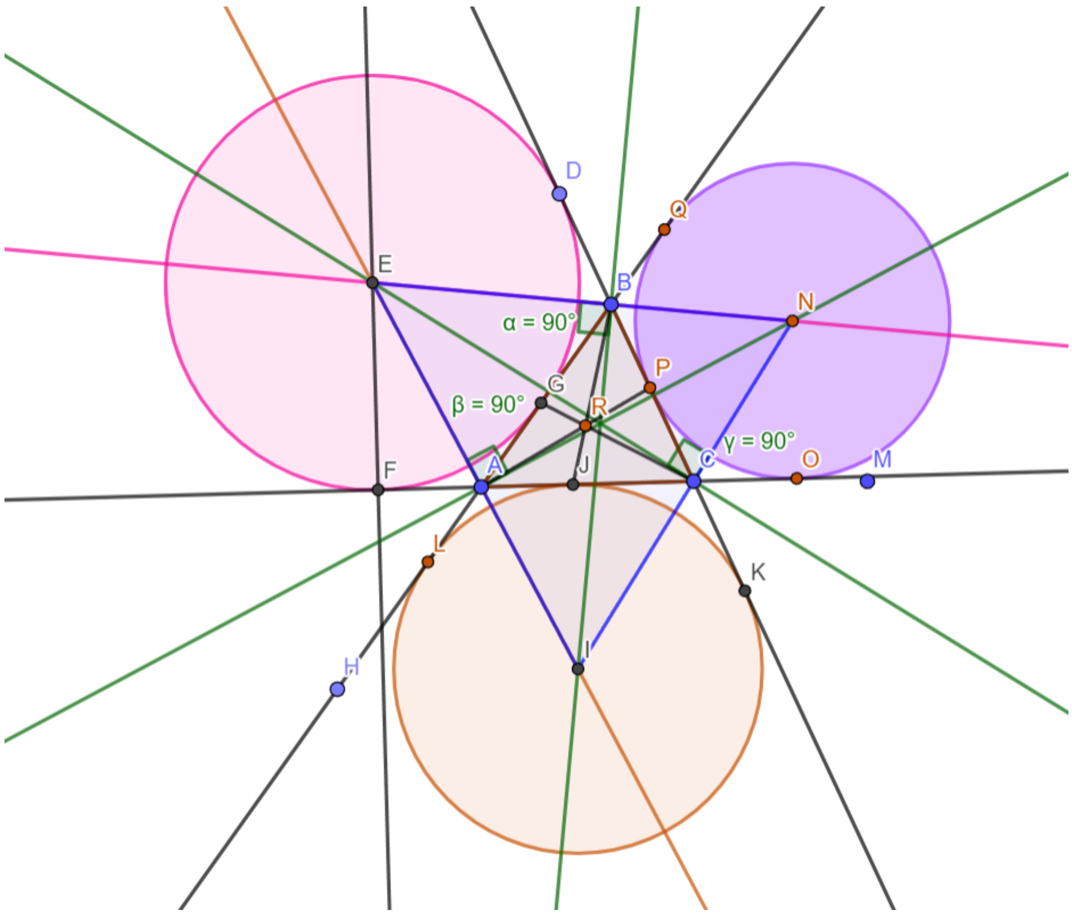

Figura 4: Construcción