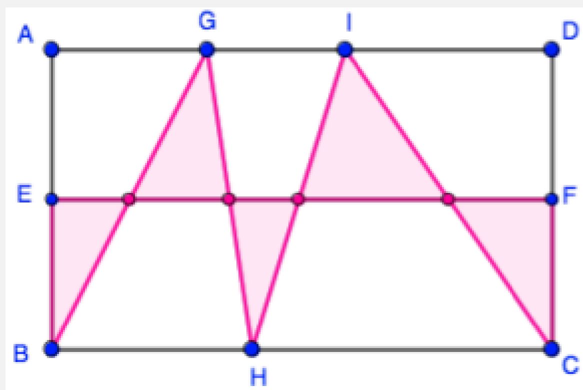
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Geometria Moderna
Problema de bitácora 3
Elías López Rivera[1] Héctor Santiago González Baltierra [2]
{[1] elias.lopezr, [2] hectorgb}@ciencias.unam.mx
Fecha: 20/10/2024

Áreas y razones

En un cuadrilatero convexo $ABCD$ con BC paralelo a AD. Se traza el segmento EF donde E y F son puntos medios de AB y CD respectivamente . Luego, se consideran los segmentos BG, GH, HI, IC, con G e I puntos en AD y H en BC, y las regiones sombreadas como se muestra en la figura ¿Será posible establecer una relación entre el área sombreada y el área no sombreada? ¿Cuál sería la relación ? Establece una conjetura y argumenta su veracidad.



S.1 Comprensión del problema y formulación de una conjetura

La condición **Importante**, dentro de este problema es la condición de paralelismo entre los segmentos AD y BC, ya que este es el arma principal para encontrar alguns relaciones que conduzcan a la resolución del problema, en primera debemos notar que el dibujo es bastante engañoso ya que parece plantearnos el paralelismo de los segmentos AB y DC el cual no necesariamente es cierto, por tanto es importante disuadirnos de la idea de usar esta característica en la construcción de nuestro razonamiento.

Otro punto importante es la aparente arbitrariedad en la ubicación de los puntos G e I, pues estos solamente deben estar sobre el segmento AD, de la misma manera H solo debe cumplir estar sobre el segmento BC

Posteriormente procedemos a realizar nuestra construcción en geogebra:

Se eligen dos puntos arbitrarios A y D, y se traza la recta por A y D llamada l_1 luego se elige un punto arbitrario B y se traza la paralela l_2 por B y se elige un punto arbitrario C.

Se traza AB, CD formando el cuadrilátero ABCD.

Se marcan los puntos medios de AB, como E y el punto medio de D como F y se traza l_3 por E y F.

Se elige un punto arbitrario H en BC y luego se eligen otro punto arbitrario G en AD, luego se elige el punto I en el segmemto GD.

Se trazan los segmentos BG, GH, HI, IC.

Y las intersecciones de BG, GH, HI, IC con l_3 se llaman respectivamente, O, R, S, T.

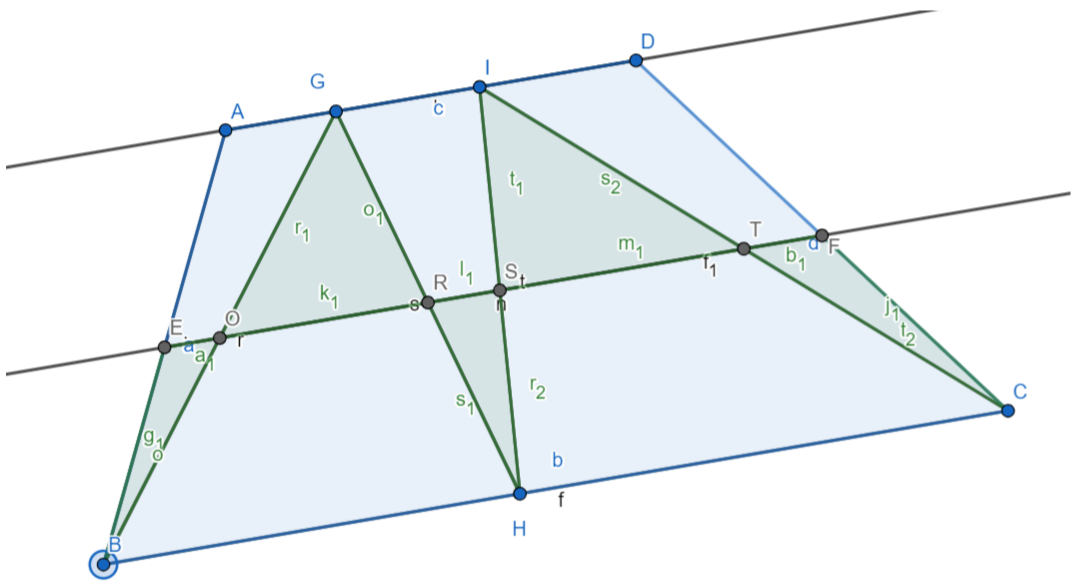


Figura 1: Simulador

Una vez hecha nuestra construcción en geogebra, y despues de experimentar con ella al mover los puntos A, B, C, D, H, G e I sin importar que hagamos, pareciera ser que el dibujo nos dice que el segmento EF es paralelos tanto a AD y BC, ademas si fijamos nuestra atención sobre los triángulos $\Delta\, ABG$ y $\Delta\, EBO$, en caso de que EF cumpliera lo anterior, estos tendrian una relación de paralelismo entre sus lados, luego haciendo uso de Tales, pareciera que estos dos tienen una relación de semejanza, si repetimos este mismo ejercicio sobre los triángulos $\Delta\, BGH$, $\Delta\, OGH$, $\Delta\, GHI$, $\Delta\, RHS$, $\Delta\, HIC$, $\Delta\, SIT$, $\Delta\, ICD$, $\Delta\, TCF$, podriamos conjeturar esta relación de semejanza

Si encontraramos de forma más explicita esta relación de semejanza , podriamos encontrar una relación entre las áreas del triángulo , como estos triángulos forman el cuadrilatero $ABCD$, por tanto encontrariamos la relación buscada entre las areas.

Analizando un poco más nuestra construcción pareciera ser que la relación buscada es igual a $\frac{1}{3}$ ya que pues pareciera la razón antes mencionada de los triángulos es de 1:2 y el área sombreada pareciera ser siempre la parte chica, por lo tanto el área sombreada deberia ser $\frac{1}{3}$ de toda el área.

S.2 Elaboración de una estrategia de resolución y justificación del problema

Conjetura

Sea un cuadrilatero convexo $ABCD$ con BC paralelo a AD. Se traza el segmento EF donde E y F son puntos medios de AB y CD respectivamente . Luego, se consideran los segmentos BG, GH, HI, IC, con G e I puntos en AD y H en BC, la suma de las áreas de los triángulos ΔEBG, ΔOGR, ΔRHS, ΔSIT, ΔTCF, es igual a $\frac{1}{4}$ del área del cuadrilatero $ABCD$, y por tanto la relación entre el area sombreada y el area no sombreada es igual a $\frac{1}{3}$

Para construir un modelo robusto , trazamos un segmento BC, tomamos un punto A no colineal con BC y trazamos la recta paralela a BC que pasa por A, tomamos un punto D diferente de A sobre esta recta, finalmente trazamos el cuadrilatero $ABCD$, posteriormente bisecamos los segmentos AB y CD en E Y F, respectivamente , trazamos la rceta EF, luego tomamos puntos arbitrarios G e I sobre el segmento AD, y un punto H sobre BC, finalmente trazamos los segmentos BG, GH, HI, IC, y los puntos O, R, S y T que son donde los segmentos y la recta EF se intersecan respectivamente.

La primera cuestión que debemos resolver para constuir la solución de nuestro problema es justificar el paralelismo de EF con AB y BC.

Primero se nota que sabemos que el segmento AE esta dentro del segmento AB, por lo tanto son paralelos, analogamente con los segmentos GO y GB.

De donde el ángulo $\angle GBA = \angle OBE$ y también sabemos que AE y AB están en razón 1:2 y también podemos afirmar por construcción que GO y GB están en razón 1:2.

Por lo que podemos afirmar semejanza entre $\triangle ABG$ y $\triangle EBO$ con un razón 1:2.

De donme EF es paralelo a AD y a BC

S.3 Resolución del problema

Link de la construcción: `https://www.geogebra.org/calculator/tjpntucx`

Para la resolución del problema, como fue observado en S2, primero probaremos el paralelismo EF con AD y BC. Al ser E y F puntos medios de los segmentos AB y CD respectivamente, la recta que forman, EF, va a ser paralela a AD y BC. Todos los puntos de la recta EF serán puntos medios si se traza una perpendicular desde un punto arbitrario de la recta extendida de AD a la recta extendida de BC.

Habiendo establecido esto, se realiza la construcción detallada en S2: ,

Se trazan dos paralelas arbitrarias, l_1 y l_2. Se eligen dos puntos arbitrarios en cada una que llamaremos A y D en l_1, y B y C en l_2, de tal forma que se forme un cuadrilátero convexo llamado $\square ABCD$.

Luego se eligen 3 puntos arbitrarios: uno en el segmento AD y dos en el segmento BC, a los que llamaremos respectivamente G, H, I.

Se trazarán los segmentos AH, HG, GI, ID formando los triángulos: $\triangle ABH$, $\triangle AHG$, $\triangle GHI$, $\triangle GID$, $\triangle IDC$.

Marcaremos ahora los puntos medios de AB y CD y los llamaremos E y F respectivamente.

Trazaremos EF, y las intersecciones con AH, GH, GI y ID las llamaremos O, R, S, T respectivamente.

Queremos encontrar la razón entre los triángulos $\triangle AEO$, $\triangle ORH$, $\triangle GRS$, $\triangle SIT$ y $\triangle DTF$ y el área $\square ABCD$.

Trazaremos las perpendiculares a los puntos A, B, C, D, E, F, G, H, I, O, R, S y T llamándolas l_A, l_B, l_C, l_D, l_E, l_F, l_G, l_H, l_I, l_O, l_R, l_S y l_T respectivamente.

Extenderemos los segmentos AD, BC y EF en sus rectas.

Se nombrarán intersecciones:

- Intersección l_B y EF, B' y l_B y AD, B''.
- Intersección l_E y BC, E' y l_E y AD, E''.
- Intersección l_A y EF, A' y l_A y BC, A''.
- Intersección l_O y AD, O' y l_O y BC, O''.
- Intersección l_H y EF, H' y l_H y AD, H''.
- Intersección l_R y BC, R' y l_R y AD, R''.
- Intersección l_G y EF, G' y l_G y BC, G''.
- Intersección l_S y AD, S' y l_S y BC, S''.
- Intersección l_I y EF, I' y l_I y AD, I''.
- Intersección l_T y BC, T' y l_T y AD, T''.
- Intersección l_D y EF, D' y l_D y BC, D''.
- Intersección l_F y AD, F' y l_F y BC, F''.
- Intersección l_C y EF, C' y l_C y AD, C''.

Se observa fácilmente que se forma el rectángulo $\square BB''CC''$.

Por nuestra construcción, ya que $B''C''$ y BC son paralelas, todas las líneas son perpendiculares a $B''C''$ por excepción de $B'C'$. Entonces se forman los siguientes triángulos rectángulos de nuestro interés:

$\triangle AA'E$, $\triangle AA'O$, $\triangle HH'O$, $\triangle HH'R$, $\triangle GG'R$, $\triangle GG'S$, $\triangle II'S$, $\triangle II'T$, $\triangle DD'T$, $\triangle DD'F$.

Ahora establezcamos relaciones de áreas locales:

$$
\begin{aligned}
AA'E &= \frac{1}{4} \cdot AA''E'E'' \\
AA'O &= \frac{1}{4} \cdot AA''O''O' \\
HH'O &= \frac{1}{4} \cdot O'O''HH'' \\
HH'R &= \frac{1}{4} \cdot HH''R'R'' \\
GG'R &= \frac{1}{4} \cdot GG''R''R' \\
GG'S &= \frac{1}{4} \cdot GG''S''S \\
II'S &= \frac{1}{4} \cdot II''S'S'' \\
II'T &= \frac{1}{4} \cdot II''T'T'' \\
DD'T &= \frac{1}{4} \cdot DD''T''T' \\
DD'F &= \frac{1}{4} \cdot DD''F''F'.
\end{aligned}
$$

Estas se obtienen ya que los triángulos que se notan en la izquierda de las igualdades son un cuarto del área de los de la derecha, ya que los rectángulos denotados a la derecha se dividen en dos rectángulos de igual medida que a su vez uno de estos se divide en dos triángulos de igual medida de donde cada uno de esos triángulos que son los que se denotan a la izquierda son un cuarto del área del rectángulo derecho.

También es importante notar que por congruencia ALA, ya que: $E''E = EE'$, $\angle\ AEE'' = \angle\ BEE'$, $\angle\ EE''A = \angle\ EE'B$.

$\triangle\ AE''E = \triangle BE'E$.

Análogamente, $\triangle DF'F = \triangle CFF''$.

Entonces se puede simplificar el área que queremos obtener de $\square ABCD$, que era un cuadrilátero convexo, al rectángulo $\square E''E'F''F'$, ya que el área que le falta a $\square ABCD$ para ser igual a $\square E''E'F''F'$ son los triángulos $\triangle AE''E$ y $\triangle DF'F$ y estos dos triángulos son iguales a los triángulos que sobran que son $\triangle BE'E$ y $\triangle CFF''$, entonces se afirma lo anterior.

El área de $\square E''E'F''F'$ es igual a la suma de: $\mathrm{A}(E''E'F''F') = \mathrm{A}(A''AE'E'') + \mathrm{A}(A''O''O') + \mathrm{A}(O'O''HH'')$ $+ \mathrm{A}(HH''R'R'') + \mathrm{A}(GG''R''R') + \mathrm{A}(GG''S''S) + \mathrm{A}(II''S'S'') + \mathrm{A}(II''T'T'') + \mathrm{A}(DD''T''T') + \mathrm{A}(DD''F''F')$.

Que es equivalente a la suma de $\triangle AEO$, $\triangle ORH$, $\triangle RGS$, $\triangle STI$, $\triangle TDF$ que como se afirmo en la relación de áreas locales es igual a un cuarto del área que acabamos de escribir.

Y la razón entre el área de los triángulos mencionados y su complemento en $ABCD$ es entonces $\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}$ que es igual a $\frac{1}{3}$.

Se adjunta imagen de la construcción:

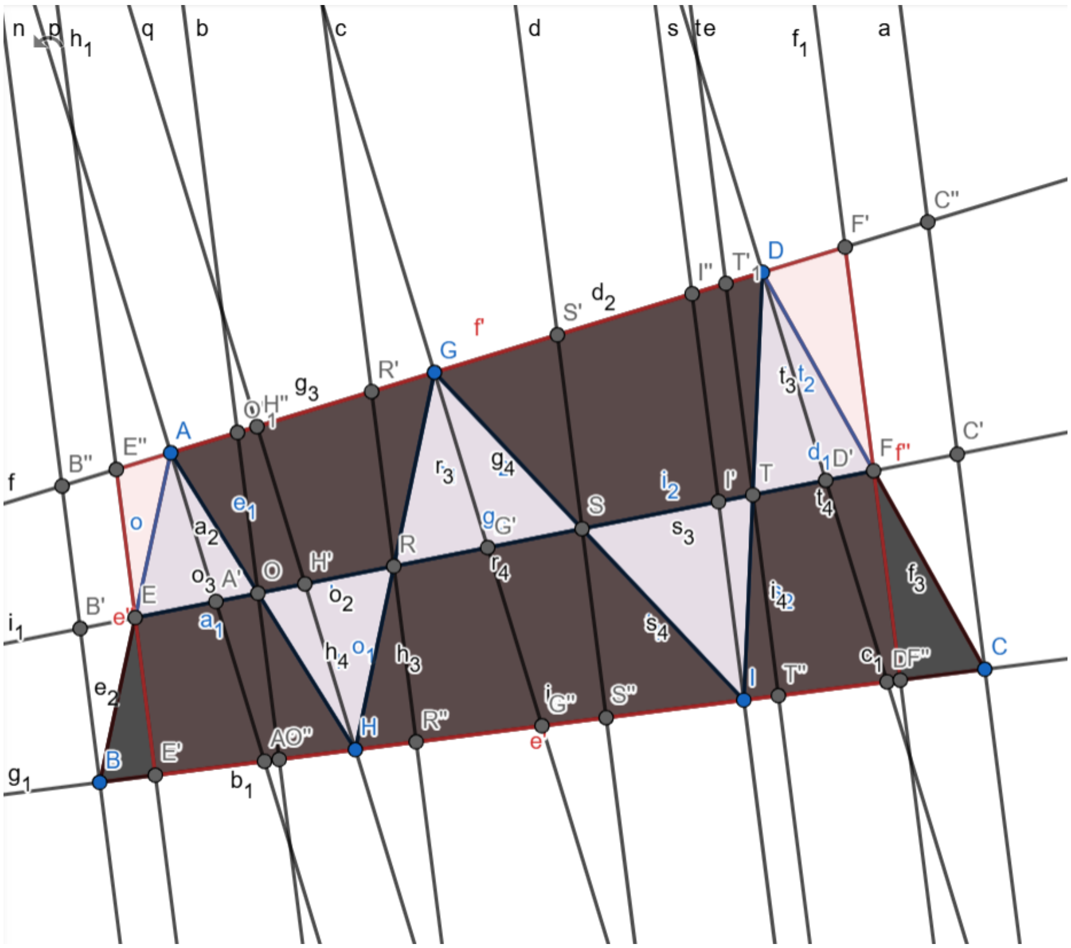


Figura 2: Simulador

S.4 Extensión del problema

Link de la construcción: `https://www.geogebra.org/calculator/q2j4fcqg`
Se nos pregunta si el tipo de cuadrilátero fuera de otro tipo. Creo que ya se abordó en la bitácora. En vez de la construcción mostrada en la imagen del documento, que es un rectángulo, asumimos que era un paralelogramo. La pregunta que nos gustaría conjeturar es: ¿qué pasaría si el cuadrilátero fuera un cuadrilátero no convexo?

Primero observamos que la construcción, tal como se detalló anteriormente, no funciona con un cuadrilátero cruzado, ya que obtendremos áreas fuera del cuadrilátero. Sin embargo, para fines de la extensión, se construirá en GeoGebra la anterior y solo se transformará.

Utilizando la herramienta de área, se observa que de hecho se pierden dos áreas, ya que al ser cruzado, algunos triángulos dejan de ser posibles y, por más que intentamos encontrar, no encontramos ninguna relación entre el área sombreada y la que no.

Para la formulación de un nuevo problema, nos gustaría plantear la pregunta: ¿y es la relación $\frac{1}{3}$ verdadera para cualquier cantidad de triángulos?

Nosotros planteamos que sí, ya que podemos realizar el razonamiento de áreas de triángulos y rectángulos, sea cual sea la cantidad de triángulos.