Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Geometria Moderna
Problema de bitácora 1 (Jardines verticales)
Elías López Rivera
elias.lopezr@ciencias.unam.mx
Fecha: 15/08/2024

Los jardines verticales

El diseñador de interiores y paisajes sustentables Luis Camacho ha sido contratado para resolver varios proyectos de jardines verticales. Ayuda a Luis a averiguar si con la información y los materiales proporcionados será posible cumplir con el siguiente proyecto.

Proyecto. *Luis debe construir , sin desperdiciar material , dos jardines verticales cuya estructura sea triangular, para ello cuenta con diferentes varas metálicas, una de* $20cm$*, una de* $30cm$*, dos de* $40cm$*, una de* $50cm$ *y una de* $80cm$*.* ***¿ Con las medidas de estas varas y sin hacer cortes o modificaciones en ellas, será posible que Luis construya las dos estructuras triángulares ?***

S.1 Comprensión del problema y formulación de una conjetura

La condición **Importante**, dentro de este problema es la longitud de las barras, intuitivamente uno podria pensar que siempre se pueden unir cualesquiera tres segmentos para formar un **triángulo**, sin embargo esta proposición puede ser desmentida facilmente.

Al jugar un poco con los segmentos, rotandolos , uniendolos etc, empezamos a notar que el problema no es tan simple como parece, sin embargo despues de unos cuantos ajustes conseguimos que al unir los segmentos de $80cm$ $50cm$ y $40cm$, formamos un triángulo, y al juntar los restantes podemos crear otro triángulo.

La primeras dudas que nos surgen es **¿por qué el caso funciona?, ¿Qué importancia tienen las medidas de los segmentos?**, lo primero que notamos es una curiosidad aparentemente insignificante, esta es que si sumamos dos lados de cualquier triángulo construido esta suma es mayor que el lado restante, resulta aún más curioso notar que los casos fallidos no cumplen esta condición.

Por tanto planteamos esta conjetura, para construir un triángulo con tres segmentos de medidas definidas, la suma de cualesquiera dos medidas de estos debe ser mayor al la medida del restante.

S.2 Elaboración de una estrategia de resolución y justificación del problema

Asi pues llamemos $\overline{HI}$ al segmento de $20cm$, $\overline{JG}$ al de $30cm$ y $\overline{HG}$ al de $80cm$, ahora tracemos la circunferencia e con centro en G y radio $\overline{JG}$, de la misma manera trazamos la circunferencia d con centro en H y radio $\overline{HI}$, es claro que si estas circunferencias se **intersecan** en cierto punto P, entonces el triángulo $\Delta\, H\, P\, I$, es tal que sus lados miden $30cm$, $20cm$ y $80cm$, ya que al pertenecer P a ambas circunferencias, la distancia de este punto hacia los estremos H y G debera ser igual a $\overline{GJ}$ y $\overline{HI}$, sin embargo notemos que:

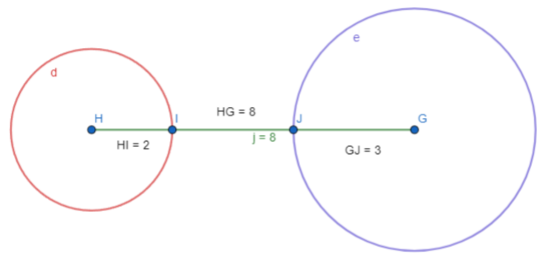

Figura 1: Construcción 2

Sea j el punto en donde se interceptan ambas circunferencias. Podemos notar que las circunferencias no se interceptan en ningún punto, es decir , por tanto es imposible formar un triángulo con estas medidas de segmentos.

Creemos que para resolver el problema debemos garantizar de alguna manera que dichas circunferencias se intercepten en al menos un punto, en primera instancia esto suena una buena idea, sin embargo veamos lo siguiente tomemos $\overline{HG}$ de nuevo y ahora hagamos que $\overline{GJ}$=$\overline{HI}$ midan $4cm$, hagamos exactamente el mismo proceso tracemos las circunferencias e y d de radio $\overline{GJ}$ una con centro en H y otra con centro en G:

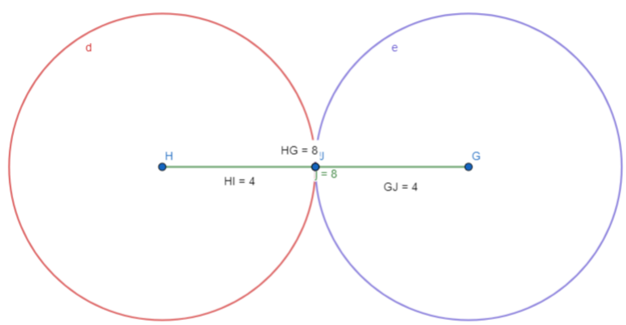

Figura 2: Construcción 2

Notemos que j, **el punto de intersección** de ambas circunferencias se encuentre **sobre la recta que pasa por** $\overline{HG}$, por tanto nos resulta imposible trazar algún triángulo.

Entonces parece ser que la condición necesaria para poder construir un triángulo con las medidas requeridas es que al seguir el proceso anteriormente descrito, las circunferencias obtenidas se intercepten en al menos **dos puntos**.

Es asi como llegamos a la solución deseada del problema:

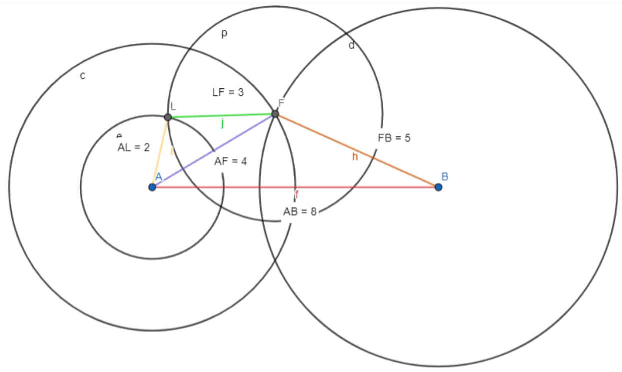

Figura 3: Construcción 3

Parece ser que una forma de forzar esa intersección entre circunferencias es que para cualquier lado del triángulo, la suma de la medida de los dos lados adyacentes sea mayor a la medida del mismo.

Es claro que las varas de luis cumplen esta condición si son construidas de una forma especifica (construcción 3)

Por tanto deberiamos demostrar que nuestra conjetura:

Para construir un triángulo con tres segmentos de medidas definidas, la suma de cualesquiera dos medidas de estos debe ser mayor al la medida del restante.

Es de alguna manera equivalente a que si trazamos las circunferencias, con centros en los extremos de un lado y radios de longitud igual a sus respectivos lados adyacentes estas deben interceptarse en al menos 2 puntos.

S3. Resolución y argumentación del problema

Para solucionar el problema basta tomar el segmento de mayor longitud, y buscar dos segmentos cuya suma sea mayor a este mismo, una vez encontrados, procedemos a trazar el triángululo cuyos lados midan lo mismo que estos, posteriormente aplicamos el mismo proceso a los segmentos restantes.

Proposición

Dados a, b, c, números positivos tales que $a + b > c$, $a + c > b$ y $c + b > a$, entonces existe un triángulo con lados a, b, c

Demostración.

Procedemos a construir dicho triángulo, suponemos sin perdida de generalidad que $a \leq b \leq c$. contruimos un segmento AB tal que la medida de este sea igual a c, trazamos ahora dos circunferencias c, d una con centro en A y radio b, la otra con centro en B y radio a respectivamente.

Construcción

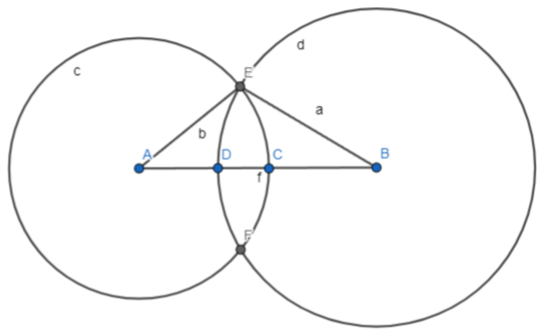

Figura 4: Construcción 4

Como $c < a+b$, se sigue que ambas circunferencias deben intersectarse en al menos 2 puntos, pues en caso contrario necesariamente se tendria que $a + b \leq c$, cualquiera de los puntos en donde se intersecan ambas cricunferencias sirve como vertice de nuestro triaángulo, ya que al pertenecer a ambas circunferencias tenemos que la distancia de este punto al extremo A sera b, y que la distancia del mismo punto a C sera a. $\square$

Notemos que la condición anterior es equivalente a que $max\{a, b, c\}$, sea menor a la suma de los 2 lados restantes, pues $max\{a, b, c\}$ es mayor o igual a cualquiera de los tres números a, b, c.

S4. Extensión del problema

Como posible extensión del problema podriamos probar que esta es una condición necesaria y suficiente para que a, b, c, representen los lados del triángulo, es decir que en cualquier triángulo se cumple que la suma de dos lados es estrictamente mayor al restante.

Para mostrar esto al menos de manera visual, trazamos un triángulo $\Delta\, ABC$ en GeoGebra, trazamos la circunferencia c_1 con radio AB y centro en A, luego extendemos AC hasta que corte a c_1 en D, ahora veamos que la distancia de CD es igual a la suma de AC con AB, ademas notemos que al variar las posiciones de los puntos sie CDAm, luego la desigualdad se sigue para los lados es decir $BD = BC + CD > AB$, como este proceso puede repetirse para los dos lado restantes, tenemos que el recirpoco de nuestra proposición es ciertopre tenemos que $CD > BC$, por tanto parece ser que el reciproco es cierto

Construcción

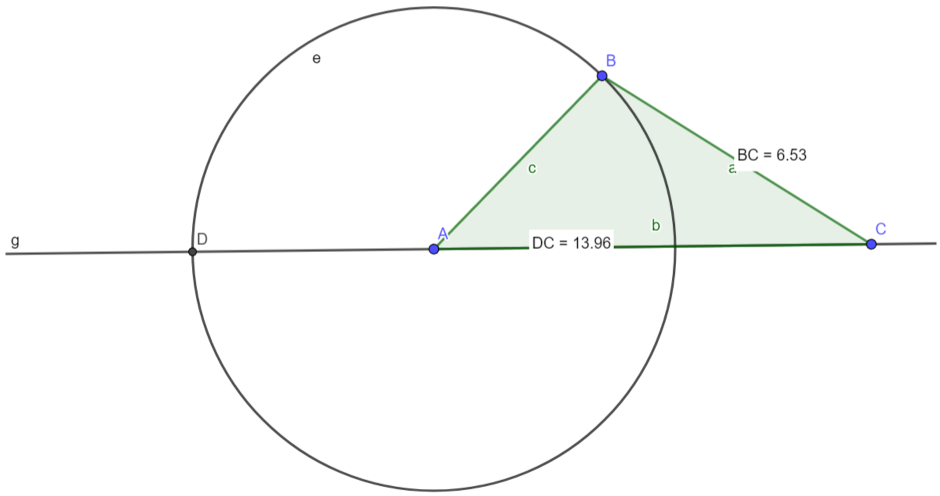

Figura 5: Construcción 5

Para demostrar esta afirmación, proponemos lo siguiente, sea $\Delta\, ABC$, tomamos D sobre la prolongación del lado BC, de tal suerte que $AC = CD$, luego $BD = BC + CD$, luego tenemos que $\measuredangle\, BAD = \measuredangle\, BAC + \measuredangle\, CAD$, luego tenemos que $\measuredangle\, CAD = \measuredangle\, CDA$, a su vez $\measuredangle\, BAD > \measuredangle CAD = \measuredangle\, CDA$, luego la desigualdad se sigue para los lados opuestos es decir $BD = BC + CD > AB$, como este proceso puede repetirse para los dos lado restantes, tenemos que el recirpoco de nuestra proposición es cierto

Construcción

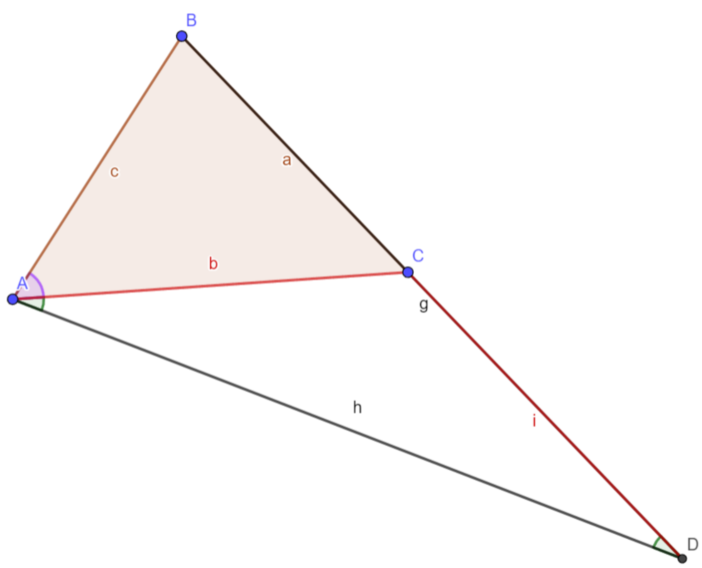

Figura 6: Construcción 6