Problema 3

Elías López Rivera [1], Adolfo Ángel Cardoso Vásquez[2],
Jonathan Sayid Mercado Martínez[3]

[1] Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas.
{[1] elopezr2300,[2] acardosov2300,[3] jmercadom2000}@alumno.ipn.mx.

14 de abril de 2024

1. Enunciado

Demostrar que existe una matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ que satisface la ecuación:

$$A^2 + 2\,A + 5\,I_n = 0_n$$

si y solo sí n es par.

2. Solución

$\Longrightarrow$) Tomemos que $\exists\, A \in M_n$ tal que:

$$A^2 + 2\,A + 5I_n = 0_n$$

Como la suma de matrices esta bien definida:

$$A^2 + 2A + I_n = -4\,I_n \implies A^2 + A + A + I_n = -4\,I_n \implies$$

$$A^2 + I_n\,A + I_n\,A + I_n = -4\,I_n$$

Debido a que estamos hablando de matrices cuadradas se sigue que $A\,I_n = I_n\,A$, de donde se sigue:

$$A^2 + A\,I_n + I_n\,A + I_n = -4\,I_n$$

Aplicando la distributividad del producto matricial sobre la suma:

$$A\,(A + I_n) + I_n(A + I_n) = -4\,I_n \implies (A + I_n)(A + I_n) = -4\,I_n \implies$$

$$(A + I_n)^2 = -4\,I_n$$

Se sigue que como ambas matrices son iguales, la igualdad se conserva para el producto matrices:

$$Det((A + I_n)^2) = Det(-4\,I_n)$$

Como el determinante de un producto de matrices, es el producto de los determinantes de las matrices:

$$[Det(A + I_n)]^2 = Det(-4\,I_n)$$

Como $-4\,I_n \in Dgn\,(\mathbb{R})$ se sigue que $Det(-4\,I_n) = -4^n$, entonces:

$$[Det(A + I_n)]^2 = (-4)^n \implies |Det(A + I_n)| = \sqrt{(-4)^n}$$

Por tanto si $n = 2k + 1$ para $k \in \mathbb{Z}$, se sigue que $(-4)^n < 0$, luego $\sqrt{(-4)^n}$ no existe en $\mathbb{R}$, de donde se sigue que para que A exista n debe ser par.

$\Longleftarrow$) Para demostrar la suficiencia, demostremos que si no existe $A \in M_n(\mathbb{R})$ que cumpla las cualidades que presenta el enunciado, entonces n es impar.

Procedemos por reducción al absurdo, si existiera $A \in M_n(\mathbb{R})$ con n impar que cumpla las condiciones del problema, entonces por $\Longrightarrow$) se sigue que $|Det(A + I_n)| = \sqrt{(-4)^n}$ lo cual claramente es una contradicción.