Problema 7

Elías López Rivera [1]

[1] Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de ciencias

26 de enero de 2025

1. Enunciado

Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, una sucesión de terminos positivos. **Demuestre** lo siguiente:

i) Si el límite

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$$

existe y es mayor a 1, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

ii) Si el límite

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$$

existe y es mayor a 1, entonces la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es divergente.

2. Solución

i) Sea $l < 1$ tal que:

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$, tomemos $r \in \mathbb{R}$ de tal suerte que $l < r < 1$, se sigue $r - l > 0$, aplicando la definición de límite de una sucesión, $\exists\, k_1 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n > k_1 \implies |\sqrt[n]{a_n} - l| < r - l$$

Desarrollando el valor absoluto:

$$\sqrt[n]{a_n} - l < r - l$$

$$\sqrt[n]{a_n} < r$$

$$a_n < r^n$$

$$a_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \implies |a_n| < r^n$$

Como $r < 1$, se sigue:

$$\tfrac{1}{r} > 1$$

$$\delta := \tfrac{1}{r} - 1 > 0$$

$$r = \tfrac{1}{\delta+1}$$

Se obtiene:

$$n > k_1 \implies |a_n| < \frac{1}{(1+\delta)^n}$$

Aplicado la desigualdad de Bernoulli y reduciendo:

$$n > k_1 \implies |a_n| < \frac{1}{(1+\delta)^n} < \frac{1}{1+n\delta} < \frac{1}{n}$$

Por tanto $\forall \, \epsilon < 0 \; \exists \, k_2 \in \mathbb{N}$ que cumple que:

$$n > max\{k_1, k_2\} \implies |a_n| < \epsilon$$

Se concluye que:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

ii) Supongamos $l > 1$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$, tomemos $r \in \mathbb{R}$ de tal suerte que $1 < r < l$ se sigue que $l - r > 0$, aplicando la definición de límite de una sucesión, $\exists \, k_1 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n > k_1 \implies |\sqrt[n]{a_n} - l| < l - r$$

Desarollando el valor absoluto:

$$r - l < \sqrt[n]{a_n} - l$$

$$r^n < a_n$$

Se sigue:

$$n > k_1 \implies r^n < |a_n|$$

Como $r > 1$, se tiene que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no puede ser acotada, se concluye:

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ es divergente.}$$