Cálculo Diferencial e Integral II

Series

25 de mayo de 2020

No se espanten con la longitud de la clase. Les aseguro que a pesar de ser más extensa que la clase anterior, la de hoy es mucho más digerible que la clase pasada.

Como ya hemos visto, la teoría de las series es muy rica en contenido. Sin embargo, a pesar de toda nuestra experiencia con ellas, tenemos un amargo sabor de boca por el hecho de que son muy poquitas las series para las cuales podemos determinar su valor. Y es una verdadera tristeza que aún con todos nuestros poderosos criterios de convergencia, nos quedemos totalmente desarmados ante el problema de calcular el valor de una serie convergente (a menos que ésta sea geométrica o telescópica).

El criterio del cociente nos permite concluir "trivialmente" que la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

converge absolutamente pero, ¿a dónde converge?

(¿Les sorprendería saber que converge a 0?)

El día de hoy desarrollaremos una técnica que nos va a permitir enriquecer la cantidad de series para las cuales podremos calcular su valor. Seguiremos estando limitados ante el problema general, pero al menos lograremos quedarnos un poco más satisfechos.

La herramienta que motiva lo que vamos a hacer es ni más ni menos que Taylor. Los polinomios de Taylor regresan de manera muy agradable.

Pongámonos en el siguiente escenario: Tenemos una función $f : I \to \mathbb{R}$ **infinitamente derivable** en $a \in I$. Esto implica que para toda $n \in \mathbb{N}$ y para toda $x \in I$ podemos escribir:

$$f(x) = P_{n,f,a}(x) + R_{n,f,a}(x)$$

Una de las cosas que estudiamos en el tema de Aproximación polinomial es que conforme podamos tomar un grado mayor en el polinomio de Taylor, mejor será dicha aproximación (la cual es local). Esto nos puede motivar a tomar el límite cuando $n \to \infty$, es decir,

$$\lim_{n\to\infty} [P_{n,f,a}(x) + R_{n,f,a}(x)]$$

Dado que la expresión entre corchetes siempre es igual a $f(x)$, entonces

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} [P_{n,f,a}(x) + R_{n,f,a}(x)]$$

Ahora bien, si ocurriera el fabuloso caso en el que

$$\lim_{n\to\infty} R_{n,f,a}(x) = 0$$

entonces

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} P_{n,f,a}(x)$$

Escribiendo de manera explícita la definición de $P_{n,f,a}(x)$ se tiene que

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} P_{n,f,a}(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

¡Ah! Resulta que han aparecido unas sumas parciales para una sucesión muy especial (que depende de x):

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Y como estas sumas parciales sí tienen límite, entonces

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Es decir, hemos expresado a f como una serie. Esta es la técnica que queremos presentar. Por su relación con los polinomios de Taylor, dicha serie recibe el nombre de "serie de Taylor de f centrada en a".

Pero hay que tener cuidado, estas series de Taylor no siempre existen. Hay dos condiciones cruciales para su existencia:

1) La función f debe ser infinitamente derivable en a (y por tanto debe ser infinitamente derivable en una vecindad de a).

2) Para toda x en una vecindad de a se debe cumplir que

$$\lim_{n\to\infty} R_{n,f,a}(x) = 0$$

Es muy natural pedir la condición 1) para que la construcción tenga sentido. En cambio, sabiendo que se cumple 1), podríamos estar tentados a pensar que la condición 2) siempre es válida, pero por extraño que parezca, esto no es así. De manera que siempre hay que tener el cuidado de no darla por sentada.

Formalicemos todo esto en un teorema (que ya no necesita prueba).

Teorema 1 *Sean $f : I \to \mathbb{R}$ y $a \in I$. Si f es infinitamente derivable en el intervalo I y para toda $x \in I$ se cumple que*

$$\lim_{n\to\infty} R_{n,f,a}(x) = 0$$

entonces f puede escribirse como la serie

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n, \text{ para toda } x \in I$$

Dicha serie es llamada: la serie de Taylor de f centrada en a.

Debe estar claro que si una función f es infinitamente derivable en un punto a, entonces tenemos todo el derecho de definir la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

La cuestión es, que si no se satisface la condición del límite

$$\lim_{n\to\infty} R_{n,f,a}(x) = 0$$

entonces, aún cuando la serie sea convergente en todo punto, ésta NO va a coincidir con $f(x)$, por lo que no tiene mucho sentido llamarla la *serie de Taylor de f* en este tipo de circunstancias.

Nota: *Observen que la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

siempre converge para $x = a$ y es el único punto en donde siempre tendremos la certeza que se cumple que su valor coincide con $f(a)$.

Ejemplo 2 *Consideremos la función suavizadora:*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Ya sabemos que esta función es infinitamente derivable en 0 *y además* $f^{(n)}(0) = 0$ *para toda* $n \in \mathbb{N}$*. De manera que* $P_{n,f,0} \equiv 0$*.*

Ante esta situación tenemos que

$$f(x) = P_{n,f,0}(x) + R_{n,f,0}(x) = R_{n,f,0}(x)$$

Por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} R_{n,f,0}(x) = \lim_{n\to\infty} f(x) = f(x)$$

Es decir, si $x \neq 0$*, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} R_{n,f,0}(x) \neq 0$$

En este caso, para $x \neq 0$ *se tiene que*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 0 = 0 \neq f(x)$$

Con esto podemos concluir que f *NO tiene una serie de Taylor en* $x = 0$*, a pesar de ser infinitamente derivable en* 0*.*

Gracias al estudio que hicimos en el tema de Aproximación polinomial, tenemos algunos ejemplos notables de funciones que sí tienen asociadas una serie de Taylor.

Consideremos a las funciones:

$$f(x) = \operatorname{sen}(x) \qquad \text{y} \qquad g(x) = \cos(x)$$

En la clase del 23 de abril logramos demostrar que para estas funciones se cumple que

$$|R_{2n+2,f,0}(x)| = |R_{2n+1,f,0}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

y

$$|R_{2n+1,g,0}(x)| = |R_{2n,g,0}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Nota técnica: *Recuerden que todas las derivadas de orden par de* $\operatorname{sen}(x)$ *en* $x = 0$*, así como todas las derivadas de orden impar de* $\cos(x)$ *en* $x = 0$*, son nulas. Esto hace que*

$$P_{2n+2,f,0}(x) = P_{2n+1,f,0}(x) \qquad \text{y} \qquad P_{2n+1,g,0}(x) = P_{2n,g,0}(x)$$

y en consecuencia

$$R_{2n+2,f,0}(x) = R_{2n+1,f,0}(x) \qquad \text{y} \qquad R_{2n+1,g,0}(x) = R_{2n,g,0}(x)$$

Dado que ya sabemos que para toda $a > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$$

entonces se sigue que para toda $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} R_{n,f,0}(x) = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to\infty} R_{n,g,0}(x) = 0$$

Por el Teorema 1 podemos concluir que tanto $\operatorname{sen}(x)$ como $\cos(x)$ tienen asociadas una serie de Taylor centrada en 0 que estará definida en todo $\mathbb{R}$.

Recordando que los polinomios de Taylor de $\operatorname{sen}(x)$ y $\cos(x)$ se ven de la siguiente manera:

$$P_{2n+1,f,0}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

y

$$P_{2n,g,0}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

entonces para generar a su serie de Taylor sólo hay que dejar correr a los sumandos hasta infinito.

Proposición 3 *Para toda $x \in \mathbb{R}$ se cumple que*

$$\operatorname{sen}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

y

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

¿Les recuerda a algo la serie de $\operatorname{sen}(x)$?

Eso es porque se trata del caso general de la serie que pusimos al inicio de la clase:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

¡Y ahora ya podemos decir de manera inmediata cuál es su valor!

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n+1}}{(2n+1)!} = \operatorname{sen}(\pi) = 0$$

Con esta idea podemos descubrir el valor de otras series similares, por ejemplo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi^{2n}}{9^n (2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{\pi}{3}\right)^{2n}}{(2n)!} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

Otro ejemplo notable que vimos es la función exponencial

$$h(x) = e^x$$

Para analizar el residuo de esta esta función hay que distinguir los casos $x > 0$ y $x < 0$. De acuerdo a la Proposición 8 de la clase del jueves 23 de abril, sabemos que

$$0 < R_{n,h,0}(x) \leq \frac{3^x x^{n+1}}{(n+1)!} \qquad \text{para } x > 0$$

y

$$|R_{n,h,0}(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \qquad \text{para } x < 0$$

En ambos casos, para una $x \in \mathbb{R}$ fija, podemos concluir que

$$\lim_{n\to\infty} R_{n,h,0}(x) = 0$$

Y por lo tanto, de acuerdo al Teorema 1, e^x también tiene asociada una serie de Taylor centrada en 0 y válida para toda $x \in \mathbb{R}$.

Los polinomios de Taylor de la exponencial están dados por:

$$P_{n,h,0}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

De manera que su serie Taylor es la serie asociada a la sucesión $x^n/n!$.

Proposición 4 *Para toda $x \in \mathbb{R}$ se cumple que*

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

La clase del viernes 8 de mayo habíamos prometido demostrar el valor de la serie dada en la Proposición 4. Deuda pagada.

En particular ocurre que

$$e = e^1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

Hay otras funciones, que podemos llamar elementales, que tienen asociadas una serie de Taylor pero en un domino más restringido. Una de ellas es el $\arctan(x)$.

De acuerdo a la Proposición 1 de la clase del 23 de abril, sabemos que si $|x| \leq 1$, entonces

$$|R_{2n+2,\arctan,f,0}(x)| = |R_{2n+1,\arctan,0}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3} \leq \frac{1}{2n+3}$$

De manera que para $|x| \leq 1$ se cumple que

$$\lim_{n\to\infty} R_{n,\arctan,0}(x) = 0$$

Esto nos dice que al menos en el intervalo $[-1,1]$ el $\arctan(x)$ puede expresarse como una serie centrada en 0.

¿Qué pasa para $|x| > 1$?

En este caso la desigualdad

$$|R_{2n+2,\arctan,f,0}(x)| = |R_{2n+1,\arctan,0}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}$$

sigue siendo válida pero ahora es obsoleta ya que

$$\frac{|x|^{2n+3}}{2n+3} \underset{n\to\infty}{\to} \infty$$

Recordemos que el residuo de orden $2n+1$ para $\arctan(x)$ se puede expresar mediante una integral:

$$R_{2n+1,\arctan,0}(x) = (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt$$

Si $|x| > 1$, entonces para toda $t \in \langle 0, x \rangle$ (¿recuerdan esta notación?)

$$1 + t^2 \leq 1 + x^2 \leq 2x^2$$

Noten que en la segunda desigualdad se está usando la hipótesis $|x| > 1$.

Por lo tanto, para toda $t \in \langle 0, x \rangle$

$$\frac{t^{2n+2}}{2x^2} \leq \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}$$

De tal forma que si integramos en $[0, x]$ ó $[x, 0]$ (según sea el caso $x > 1$ ó $x < -1$) se tiene que

$$\frac{1}{2x^2} \int_0^x t^{2n+2} dt \leq \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt \quad \text{para } x > 1$$

y

$$-\frac{1}{2x^2} \int_0^x t^{2n+2} dt \leq -\int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt \quad \text{para } x < -1$$

(*¿Pueden justificar por completo la segunda desigualdad?*)

De ambos casos se sigue que para $|x| > 1$

$$\frac{1}{2x^2} \left| \int_0^x t^{2n+2} dt \right| \leq \left| \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt \right| = |R_{2n+1,\arctan,0}(x)|$$

Ahora bien,

$$\int_0^x t^{2n+2} dt = \frac{x^{2n+3}}{2n+3}$$

de manera que

$$\frac{1}{2x^2} \left| \int_0^x t^{2n+2} dt \right| = \frac{1}{2x^2} \left| \frac{x^{2n+3}}{2n+3} \right| = \frac{|x|^{2n+1}}{4n+6}$$

Y de esta forma, para $|x| > 1$

$$\frac{|x|^{2n+1}}{4n+6} \leq |R_{2n+1,\arctan,0}(x)|$$

Pero al tener $|x| > 1$, se sigue que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|x|^{2n+1}}{4n+6} = \infty$$

y en consecuencia

$$\lim_{n \to \infty} |R_{2n+1,\arctan,0}(x)| = \infty$$

Por lo tanto, no podemos definir la serie de Taylor de $\arctan(x)$ centrada en 0 para valores de x tales que $|x| > 1$.

Juntando toda esta información y recordando que los polinomios de Taylor de $\arctan(x)$ están dados por

$$P_{2n+1,\arctan,0}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

podemos dar la siguiente proposición.

Proposición 5 *Si $x \in [-1, 1]$, entonces*

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Como un ejemplo particular del uso de esta serie tenemos el bonito resultado:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

Cerremos estos ejemplos con una última función elemental

$$f(x) = \log(1+x)$$

El tema pasado nunca nos dimos el tiempo de ofrecer cotas para sus residuos, así que tendremos que hacerlo en este momento. Para ello vamos a usar una técnica similar a la que aplicamos con $\arctan(x)$.

Por el TFC2 tenemos que

$$\log(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}dt$$

Recordando la fórmula de factorización:

$$b^n - a^n = (b-a)\left(b^{n-1} + b^{n-2}a + \cdots ba^{n-2} + a^{n-1}\right)$$

si la aplicamos para $b = 1$ y $a = -t$, se sigue que

$$1 - (-t)^n = (1+t)\left(1 - t + t^2 - t^3 + \cdots + (-t)^{n-2} + (-t)^{n-1}\right)$$

De donde

$$\frac{1}{1+t} = \left(1 - t + t^2 - t^3 + \cdots + (-1)^{n-2} t^{n-2} + (-1)^{n-1} t^{n-1}\right) + (-1)^n \frac{t^n}{1+t}$$

Integrando de 0 a x:

$$\log(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}dt = \int_0^x \left(1 - t + \cdots + (-1)^{n-2} t^{n-2} + (-1)^{n-1} t^{n-1}\right)dt + (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t}dt$$

Es decir,

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t}dt$$

La expresión polinomial la podemos reconocer perfectamente como $P_{n,f,0}(x)$. Por lo tanto

$$R_{n,f,0}(x) = (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t}dt$$

Concentrémonos primero en $x > 0$. En este caso

$$|R_{n,f,0}(x)| = \int_0^x \frac{t^n}{1+t}dt \leq \int_0^x t^n dt = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

De esta forma, si $0 < x \leq 1$, entonces

$$\frac{x^{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$$

y de aquí ya se ve que, para $0 < x \leq 1$

$$\lim_{n\to\infty} R_{n,f,0}(x) = 0$$

Por otra parte, para $x > 1$ y para toda $t \in [0, x]$, se tiene que

$$1 + t \leq 1 + x \leq 2x$$

Por tanto

$$\frac{1}{2x}\int_0^x t^n dt \leq \int_0^x \frac{t^n}{1+t}dt$$

Es decir,

$$\frac{x^n}{2n+2} \leq \int_0^x \frac{t^n}{1+t}dt = |R_{n,f,0}(x)|$$

Como $x > 1$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{2n+2} = \infty$$

y con ello

$$\lim_{n\to\infty} |R_{n,f,0}(x)| = \infty$$

Esto nos dice que la serie de Tayor de $\log(1+x)$ no estará definida para $x > 1$.

Ahora analicemos el caso $x < 0$. Como $\log(1+x)$ sólo está definido para $x > -1$, entonces estamos parados en $-1 < x < 0$.

En este caso, para $-1 < x \le t \le 0$ se tiene

$$0 < 1 + x \le 1 + t \le 1$$

Y por lo tanto

$$\frac{1}{1+t} \le \frac{1}{1+x}$$

De donde

$$\left| \int_0^x \frac{t^n}{1+t} dt \right| \le \int_x^0 \left| \frac{t^n}{1+t} \right| dt = \int_x^0 \frac{|t|^n}{1+t} dt \le \int_x^0 \frac{|t|^n}{1+x} dt$$

(*¿Por qué se da la primer desigualdad?*)

Noten que sin importar la paridad de n se cumple que la expresión $|t|^n$ decrece en el intervalo $[x, 0]$, de modo que

$$\int_x^0 \frac{|t|^n}{1+x} dt \le \int_x^0 \frac{|x|^n}{1+x} dt = \frac{|x|^n}{1+x}(-x) = \frac{|x|^{n+1}}{1+x}$$

Finalmente, como $-1 < x < 0$, entonces $|x| < 1$ y en consecuencia

$$\lim_{n\to\infty} |x|^{n+1} = 0$$

y con ello, para $-1 < x < 0$ se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} |R_{n,f,0}(x)| = 0$$

Juntando toda esta información hemos logrado exhibir que la serie de Taylor de $\log(1+x)$ centrada en 0 estará definida en $(-1, 1]$.

Proposición 6 *Si* $x \in (-1, 1]$, *entonces*

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$$

Observen que hemos escrito $(-1)^{n+1}$ en lugar de $(-1)^{n-1}$. Esto es sólo por cuestiones estéticas, pero debe quedar claro que $(-1)^{n+1} = (-1)^{n-1}$ así que es realmente irrelevante usar una u otra.

El caso de $\log(1+x)$ es particularmente interesante porque nos da un ejemplo en donde la serie de Taylor tiene validez en un intervalo que no es ni abierto ni cerrado.

Como ejemplo particular de esta serie tenemos el fantástico resultado para $x = 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \log(1+1) = \log(2)$$

Es decir, la serie de Taylor nos ha dado el valor de la serie armónica alternante sin ningún esfuerzo.

Si nos paramos en el intervalo $[-1,1)$ podemos evaluar la serie de Taylor en el punto "$-x$":

$$\log(1-x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(-x)^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(-1)^n x^n}{n}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$$

Por lo tanto, para $x\in[-1,1)$ se cumple que

$$\log(1-x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$$

Podríamos haber quedado algo decepcionados con el logaritmo porque su serie de Taylor tiene un dominio muy "pequeño", pero fíjense que eso basta para expresar el logaritmo de *cualquier número positivo* como una serie.

En efecto, si quisiéramos el valor de $\log(x)$ para $0<x<1$, entonces sólo necesitamos llevar a cabo el "truquito" de escribir

$$x=1+(x-1)$$

Dado que $-1<x-1<0$, se tiene que

$$\log(x)=\log(1+(x-1))=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(x-1)^n}{n}$$

Por otra parte, para $x>1$ lo que podemos hacer es usar que $0<1/x<1$ y además

$$\log(x)=-\log\left(\frac{1}{x}\right)$$

De donde:

$$\log(x)=-\log\left(\frac{1}{x}\right)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{x}-1\right)^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{1-x}{x}\right)^n$$

Ojo, esta última serie NO es una serie de Taylor, pero es igualmente interesante poder expresar a $\log(x)$ como una curiosa serie.

Si sustituimos en $x=e$, obtenemos la extraña serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(1-e)^n}{ne^n}=1$$

El poder de las series de Taylor por supuesto que no se restringe al cálculo de series explícitas. Una aplicación que tienen a nivel teórico es que dan origen a una nueva clase de funciones, las llamadas *series de potencias*.

Como podemos observar, las series de Taylor tienen una forma muy particular:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Si escribimos a los coeficientes $\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ de manera más abstracta, digamos

$$a_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

entonces

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n$$

Si ignoramos que partimos de una serie de Taylor, la serie anterior es lo que se conoce como *serie de potencias centrada en a.*

Definición 7 *Dada una sucesión* $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$*, para cada* $a \in \mathbb{R}$ *definimos la serie de potencias asociada a* $\{a_n\}$ *y centrada en* a*, como*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$$

Las series de potencias son funciones muy ricas en propiedades siempre que tengan un buen dominio para trabajar. Al estar definidas como una serie, su dominio es el conjunto de puntos para los que la serie converge:

$$Dom(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \text{ converge} \right\}$$

En este dominio siempre hay al menos un punto: $a \in Dom(f)$. Sin embargo, puede ocurrir el drámatico caso en el que el dominio sea exactamente un punto:

$$Dom(f) = \{a\}$$

en cuyo caso, la serie de potencias carece de interés teórico para trabajar.

Ejemplo 8 *Consideremos la serie de potencias centrada en* 0 *dada por:*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$$

Tomemos $x \neq 0$*. La sucesión que define a la serie es*

$$b_n = n! x^n$$

Ahora notemos que sin importar el valor de x*, esta sucesión* b_n *no converge a* 0*, lo que nos dice que la serie diverge.*

Recordando que para cualquier $a > 0$ *se tiene que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{a^n} = \infty$$

Pero esto implica que

$$\lim_{n\to\infty} |b_n| = \lim_{n\to\infty} n! |x|^n = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\left(\frac{1}{|x|}\right)^n} = \infty$$

Por lo tanto b_n *no converge a* 0*. De esta manera, podemos concluir que la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$$

diverge. Y con ello el domino de f *consiste sólo del* 0

$$Dom(f) = \{0\}$$

Algo que es muy interesante es que si el dominio de una serie de potencias consta de al menos dos puntos, entonces el dominio automáticamente contiene a todo un intervalo abierto. Y por lo tanto ahora sí podemos trabajar con mayor profundidad con dicha serie de potencias.

Proposición 9 *Sea $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ una sucesión y sea $a \in \mathbb{R}$ fijo. Si existe un punto $b \in \mathbb{R}$, con $b \neq a$, tal que la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (b-a)^n$$

converge, entonces para todo $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x-a| < |b-a|$ se tiene que la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$$

converge absolutamente.

Dem. La esencia de esta proposición es lo que mencionábamos previamente. Implícitamente estamos diciendo que si la serie de potencias

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$$

tiene un dominio con al menos dos puntos a y b, entonces el dominio de f contiene a todo un intervalo abierto.

En efecto, si llamamos $r = |b-a|$, entonces $r > 0$ y la desigualdad

$$|x-a| < |b-a|$$

es equivalente a

$$a - r < x < a + r$$

La conclusión de la proposición nos diría entonces que

$$(a-r, a+r) \subset Dom(f)$$

Una alegre ganancia de esta proposición es que la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$$

no sólo será convergente, sino que será *absolutamente* convergente.

Vamos a la demostración.

Dado que la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (b-a)^n$$

converge, entonces la sucesión

$$b_n = a_n (b-a)^n$$

debe converger a 0. Lo que en particular nos dice que la sucesión $\{b_n\}$ está acotada. Es decir, existe $M > 0$ tal que para toda $n \geq 0$,

$$|a_n (b-a)^n| \leq M \tag{1}$$

Tomemos $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x-a| < |b-a|$. Entonces

$$|a_n (x-a)^n| = |a_n| |x-a|^n = |a_n| |x-a|^n \frac{|b-a|^n}{|b-a|^n} = |a_n (b-a)^n| \left(\frac{|x-a|}{|b-a|} \right)^n$$

Observen que tenemos derecho a dividir entre $|b-a|$ ya que $a \neq b$.

Ahora bien, por (1) tenemos

$$|a_n (x-a)^n| = |a_n (b-a)^n| \left(\frac{|x-a|}{|b-a|} \right)^n \leq M \left(\frac{|x-a|}{|b-a|} \right)^n$$

Dado que $|x-a|<|b-a|$, entonces
$$\frac{|x-a|}{|b-a|}<1$$
de manera que la serie geométrica
$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{|x-a|}{|b-a|}\right)^{n}$$
converge. Y por lo tanto, por el criterio de comparación, concluimos que la serie
$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|a_n\left(x-a\right)^n\right|$$
converge. Es decir, la serie
$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(x-a\right)^n$$
converge absolutamente. ■

Si observamos con cuidado los ejemplos que dimos de series de Taylor, todas son series de potencias centradas en 0. Ahora bien, en el caso particular de $\log(1+x)$ su serie asociada es:
$$\log(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}$$
Nosotros ya sabíamos que esta serie es convergente para $x=1$, pues se trata de la serie armónica alternante. Tan sólo con este dato, de acuerdo con la Proposición 9 sabríamos que la serie de potencias debe ser convergente para todo punto en el intervalo $(-1,1)$. Pero además la Proposición 9 nos ofrece la información de que esta convergencia es absoluta en el intervalo $(-1,1)$.

Este ejemplo es importante porque, aunque la serie de Taylor de $\log(1+x)$ converge en todo punto del intervalo $(-1,1]$, **sólo** converge absolutamente en $(-1,1)$.

Gracias a la naturaleza de la Proposición 9, es tradicional trabajar con series de potencias
$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(x-a\right)^n$$
restringidos siempre a un dominio de la forma
$$(a-r,a+r)$$
en donde sepamos que la serie converge absolutamente. Trabajar con esta clase de dominios es muy significativo, ya que nos permite preguntarnos cuestiones de continuidad o derivabilidad de las series de potencias, entre otras cosas.

Imaginemos que tenemos la serie de potencias
$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(x-a\right)^n$$
definida para toda $x\in(a-r,a+r)$ (con $r>0$ por supuesto). Si de casualidad supiéramos que f es derivable en $(a-r,a+r)$, ¿cómo encontrarían a $f'(x)$?

Lo "más natural" sería llevar al extremo la linealidad de la derivación y decir que la derivada de esta serie debe ser la serie de las derivadas. Es decir, para calcular $f'(x)$ lo único que debemos hacer es derivar cada sumando:
$$f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}na_n\left(x-a\right)^{n-1}$$

Observen que para $n = 0$ el correspondiente sumando se anula, por lo que podemos escribir simplemente

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-a)^{n-1} \tag{2}$$

La conjetura parece razonable y lo mejor es que el resultado es una nueva serie de potencias. De manera que bajo nuestro principio de derivación, debería ser cierto que ahora podemos derivar a f' y obtener

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x-a)^{n-2} \tag{3}$$

Si nuestra intuición está en lo correcto, entonces nada nos va a detener para irnos a lo grande y concluir que una serie de potencias (cuyo domino no es trivial) siempre define a una función infinitamente derivable.

Todas estas afirmaciones son correctas, así que vamos a demostrarlas. Aunque el proceso de derivación de una serie de potencias parece muy simple, demostrar su validez no lo es tanto.

Lo primero que vamos a hacer es demostrar que si una serie de potencias

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$$

converge en un intervalo $(a-r, a+r)$, entonces las series de potencias en (2) y (3) también convergen en el mismo intervalo. Una vez logrado lo anterior, nos lanzaremos a probar que efectivamente las series (2) y (3) se corresponden con f' y f'' respectivamente. Y a partir de aquí quedará claro la infinita derivabilidad de f.

Para comenzar esta labor primero demostraremos un sencillo lema técnico.

Lema 10 *Si* $0 \leq R < 1$*, entonces la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n R^{n-1}$$

converge.

Dem. Noten que en el caso $R = 0$, la convergencia de la serie es trivial, por lo que sólo debemos ocuparnos del caso $R > 0$.

Supongamos $R > 0$.

La demostración es una simple consecuencia del criterio del cociente. La hipótesis $R > 0$ nos da derecho a usar este criterio.

Llamemos

$$a_n = n R^{n-1}$$

Calculamos el límite del cociente:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1) R^n}{n R^{n-1}} \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} R = R$$

Dado que $R < 1$, entonces por el criterio del cociente, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n R^{n-1}$$

converge. ■

Proposición 11 *Sea* $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ *una sucesión y sean* $a, b \in \mathbb{R}$ *fijos, con* $b \neq a$*. Si la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (b-a)^n$$

converge, entonces para todo $x \in \mathbb{R}$ *tal que* $|x-a| < |b-a|$ *se tiene que la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-a)^{n-1}$$

converge absolutamente.

Dem. Noten que el enunciado es muy similar al dado en la Proposición 9. No es de extrañar que la demostración siga los mismos razonamientos.

Dado que la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (b-a)^n$$

converge, entonces la sucesión

$$b_n = a_n (b-a)^n$$

debe converger a 0. Y por lo tanto la sucesión $\{b_n\}$ está acotada. Es decir, existe $M > 0$ tal que para toda $n \geq 0$,

$$|a_n (b-a)^n| \leq M \tag{4}$$

Tomemos $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x-a| < |b-a|$. Entonces

$$\left| n a_n (x-a)^{n-1} \right| = n |a_n| |x-a|^{n-1} = n |a_n| |x-a|^{n-1} \frac{|b-a|^n}{|b-a|^n} = \frac{n}{|b-a|} |a_n (b-a)^n| \left(\frac{|x-a|}{|b-a|} \right)^{n-1}$$

Ahora bien, por (4) tenemos

$$\left| n a_n (x-a)^{n-1} \right| = \frac{n}{|b-a|} |a_n (b-a)^n| \left(\frac{|x-a|}{|b-a|} \right)^{n-1} \leq \frac{M}{|b-a|} \left[n \left(\frac{|x-a|}{|b-a|} \right)^{n-1} \right]$$

Dado que $|x-a| < |b-a|$, entonces

$$0 \leq \frac{|x-a|}{|b-a|} < 1$$

Por el Lema 10, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{|x-a|}{|b-a|} \right)^{n-1}$$

converge. Y por lo tanto, por el criterio de comparación, concluimos que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| n a_n (x-a)^{n-1} \right|$$

converge. Es decir, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-a)^{n-1}$$

converge absolutamente. ■

Una manera un poco más ilustrativa de enunciar la Proposición 11 se muestra en el siguiente corolario.

Corolario 12 *Sea* $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ *una sucesión y sean* $a, r \in \mathbb{R}$ *fijos, con* $r > 0$*. Si la serie de potencias*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$$

converge para todo $x \in (a-r, a+r)$*, entonces la serie de potencias*

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-a)^{n-1}$$

converge absolutamente para toda $x \in (a-r, a+r)$*.*

Dem. Lo único que tenemos que hacer es adaptar las condiciones que tenemos en este corolario para poder aplicar la Proposición 11.

Tomemos $x \in (a-r, a+r)$. Esto significa que

$$|x-a| < r$$

Si tomamos $s \in \mathbb{R}$ tal que

$$|x-a| < s < r$$

entonces podemos definir

$$b = a + s$$

y aplicar la Proposición 11 apoyados de este número b.

En primer lugar

$$|b-a| = s < r$$

Por lo tanto $b \in (a-r, a+r)$. De acuerdo a la hipótesis, la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (b-a)^n$$

converge.

Como

$$|x-a| < s = |b-a| \tag{5}$$

entonces, por la Proposición 11, concluimos que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-a)^{n-1}$$

converge absolutamente.

Nota técnica: La desigualdad (5) así como la Proposición 9, nos permiten concluir adicionalmente que la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$$

no sólo converge, sino que converge absolutamente para todo $x \in (a-r, a+r)$. ■

Corolario 13 *Sea* $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ *una sucesión y sean* $a, r \in \mathbb{R}$ *fijos, con* $r > 0$*. Si la serie de potencias*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$$

converge para todo $x \in (a-r, a+r)$, entonces la serie de potencias

$$h(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x-a)^{n-2}$$

converge absolutamente para toda $x \in (a-r, a+r)$.

Dem. Este corolario no es más que una doble aplicación del Corolario 12.

Por el Corolario 12 sabemos que la serie de potencias

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n (x-a)^{n-1}$$

converge absolutamente para toda $x \in (a-r, a+r)$.

Si ahora le aplicamos el Corolario 12 a la función g, concluimos que la serie de potencias

$$h(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x-a)^{n-2}$$

converge absolutamente para toda $x \in (a-r, a+r)$. ■

Con los Corolarios 12 y 13 ya estamos listos para desarrollar el proceso de derivación de una serie de potencias.

Teorema 14 *Sea $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ una sucesión y $r > 0$. Si la serie de potencias*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

converge para todo $x \in (-r, r)$, entonces f es derivable y además

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$$

para toda $x \in (-r, r)$.

Dem. Como pueden observar, este teorema nos da un caso particular de cómo derivar una serie de potencias, en este caso estamos parados en una serie de potencias centrada en 0. Un poco más adelante veremos que esto es suficiente para probar la derivabilidad de una serie de potencias centrada en un punto arbitrario $a \in \mathbb{R}$. La única razón para hacer esta distinción en este momento es para simplificar un poco las cuentas de la ya de por sí talachuda prueba.

Comencemos llamando

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$$

De acuerdo al Corolario 12, la serie de potencias definida con g converge para toda $x \in (-r, r)$. Conocer esta convergencia nos va a permitir hacer manipulaciones con dicha serie de potencias.

Tomemos $a \in (-r, r)$. Queremos demostrar que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = g(a)$$

O lo que es equivalente

$$\lim_{x \to a} \left[\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - g(a) \right] = 0$$

Vamos a ir haciendo algunas manipulaciones con la diferencia $f(x) - f(a)$ para ganar un poco más de información técnica.

Por definición de f tenemos:

$$f(x) - f(a) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n a^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x^n - a^n)$$

Noten que para $n = 0$ el correspondiente sumando en la última suma se anula, es decir,

$$f(x) - f(a) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x^n - a^n)$$

Recordando que

$$(x^n - a^n) = (x - a)\left(x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + xa^{n-2} - a^{n-1}\right)$$

entonces

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + xa^{n-2} - a^{n-1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} a^k\right) \tag{6}$$

Un truco técnico útil es el siguiente:

$$na^{n-1} = a^{n-1} + \cdots + a^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1}$$

De esta forma

$$g(a) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n a^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1}\right) \tag{7}$$

Usando (6) y (7) obtenemos:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - g(a) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} a^k\right) - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1}\right)$$

Y juntado las sumas:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - g(a) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\sum_{k=0}^{n-1} \left(x^{n-1-k} a^k - a^{n-1}\right)\right)$$

(Por favor no dejen de apreciar que todos los pasos que hemos dado son válidos gracias a que estamos trabajando con series convergentes)

A la expresión $\left(x^{n-1-k} a^k - a^{n-1}\right)$ le podemos factorizar un factor a^k:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - g(a) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\sum_{k=0}^{n-1} a^k \left(x^{n-1-k} - a^{n-1-k}\right)\right) \tag{8}$$

A partir de aquí vayan con mucho cuidado porque los índices pueden causar algo de confusión.

Vamos a factorizar a $x^{n-1-k} - a^{n-1-k}$

$$x^{n-1-k} - a^{n-1-k} = (x - a)\left(x^{n-k-2} + x^{n-k-3}a + \cdots + xa^{n-k-3} + a^{n-k-2}\right) = (x - a) \sum_{j=0}^{n-k-2} x^{n-k-2-j} a^j$$

Sustituyendo esto en (8) tenemos:

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-g(a)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\left[\sum_{k=0}^{n-1}a^k(x-a)\left(\sum_{j=0}^{n-k-2}x^{n-k-2-j}a^j\right)\right]$$

El factor $x-a$ que aparece del lado derecho no es afectado por ninguna de las sumas involucradas, así que podemos sacarlo de toda la expresión:

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-g(a)=(x-a)\sum_{n=1}^{\infty}a_n\left[\sum_{k=0}^{n-1}a^k\left(\sum_{j=0}^{n-k-2}x^{n-k-2-j}a^j\right)\right] \tag{9}$$

La identidad (9) es la clave. Si pudiéramos demostrar que al menos para x "suficientemente cerca" de a la expresión

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\left[\sum_{k=0}^{n-1}a^k\left(\sum_{j=0}^{n-k-2}x^{n-k-2-j}a^j\right)\right] \tag{10}$$

está acotada, entonces ya habríamos terminado.

En efecto, si supiéramos que

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}a_n\left[\sum_{k=0}^{n-1}a^k\left(\sum_{j=0}^{n-k-2}x^{n-k-2-j}a^j\right)\right]\right|\leq M$$

entonces de (9) tendríamos que

$$\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-g(a)\right|=|x-a|\left|\sum_{n=1}^{\infty}a_n\left[\sum_{k=0}^{n-1}a^k\left(\sum_{j=0}^{n-k-2}x^{n-k-2-j}a^j\right)\right]\right|\leq M|x-a|$$

Y de esta forma si hacemos tender $x\to a$, ya podríamos concluir que

$$\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-g(a)\right]=0$$

Así que démonos a la tarea de demostrar que hay una vecindad alrededor de a en donde las series dadas en (10) están acotadas.

Un primer detalle importante a notar es que, dado que las series representadas por $f(x)$, $f(a)$ y $g(a)$ son absolutamente convergentes (vean el Corolario 12 así como la Nota técnica dentro de su prueba), entonces la expresión

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-g(a)$$

representa el resultado de una serie que también converge absolutamente, y en consecuencia la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\left[\sum_{k=0}^{n-1}a^k\left(\sum_{j=0}^{n-k-2}x^{n-k-2-j}a^j\right)\right]$$

converge absolutamente.

Llamemos

$$S=\frac{r+|a|}{2}\qquad \text{y}\qquad \delta=\frac{r-|a|}{2}$$

Dado que $a \in (-r, r)$, entonces $\delta > 0$ y además

$$|a| < S < r$$

Vamos a demostrar que parados en la vecindad $(a - \delta, a + \delta)$, todas las series en (10) están acotadas por alguna $M > 0$ que vamos a descubrir.

Dada $x \in (a - \delta, a + \delta)$ se tiene que

$$|x - a| < \delta$$

y por tanto

$$|x| < \delta + |a| = \frac{r - |a|}{2} + |a| = \frac{r + |a|}{2} = S$$

Es decir, $|x| < S$.

De esta manera

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} a^k \left(\sum_{j=0}^{n-k-2} x^{n-k-2-j} a^j \right) \right| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{n-k-2} x^{n-k-2-j} a^{j+k} \right) \right|$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left| \left(\sum_{j=0}^{n-k-2} x^{n-k-2-j} a^{j+k} \right) \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{n-k-2} \left| x^{n-k-2-j} a^{j+k} \right| \right) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{n-k-2} |x|^{n-k-2-j} |a|^{j+k} \right)$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{n-k-2} S^{n-k-2-j} S^{j+k} \right) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{n-k-2} S^{n-2} \right)$$

No pierdan de vista la cantidad masiva de aplicaciones de la desigualdad del triángulo que hemos realizado para aterrizar en la desigualdad:

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} a^k \left(\sum_{j=0}^{n-k-2} x^{n-k-2-j} a^j \right) \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{n-k-2} S^{n-2} \right) \tag{11}$$

Ahora notemos que, como S^{n-2} no depende del índice j ni del índice k, entonces

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{n-k-2} S^{n-2} \right) = S^{n-2} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{n-k-2} 1 \right) = S^{n-2} \sum_{k=0}^{n-1} (n-k-1) \leq S^{n-2} \sum_{k=0}^{n-1} (n-1) = n\,(n-1)\, S^{n-2}$$

(en la primer desigualdad estamos usando que $n - k - 1 \leq n - 1$)

Si aplicamos esta desigualdad en (11), entonces

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} a^k \left(\sum_{j=0}^{n-k-2} x^{n-k-2-j} a^j \right) \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{n-k-2} S^{n-2} \right) \leq n\,(n-1)\, S^{n-2} \tag{12}$$

Ya comienza a tomar forma todo.

Ahora usemos que las series en (10) son absolutamente convergentes y apliquemos la "desigualdad del triángulo generalizada" junto con lo obtenido en (12)

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[\sum_{k=0}^{n-1} a^k \left(\sum_{j=0}^{n-k-2} x^{n-k-2-j} a^j \right) \right] \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \left| \left[\sum_{k=0}^{n-1} a^k \left(\sum_{j=0}^{n-k-2} x^{n-k-2-j} a^j \right) \right] \right|$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \, n \, (n-1) \, S^{n-2}$$

Es decir,

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[\sum_{k=0}^{n-1} a^k \left(\sum_{j=0}^{n-k-2} x^{n-k-2-j} a^j \right) \right] \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \, n \, (n-1) \, S^{n-2} \tag{13}$$

Bien, aquí hay que tener cuidado con la formalidad. Para que la desigualdad anterior sea realmente válida nos hace falta argumentar que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \, n \, (n-1) \, S^{n-2}$$

es convergente. Ya que logremos ver esto, entonces

$$M = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \, n \, (n-1) \, S^{n-2}$$

será la cota que estábamos buscando.

Ahora bien, por el Corolario 13 sabemos que para cualquier $x \in (-r, r)$ la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} n \, (n-1) \, a_n \, (x-a)^{n-2}$$

converge absolutamente.

Dado que $0 \leq |a| < S < r$, entonces $S \in (-r, r)$ y por lo tanto la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \, n \, (n-1) \, S^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \, n \, (n-1) \, S^{n-2}$$

converge (en la igualdad sólo estamos exhibiendo que el sumando para $n = 1$ es nulo).

En consecuencia tenemos derecho a definir

$$M = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \, n \, (n-1) \, S^{n-2}$$

y de acuerdo con (13) podemos concluir que, para toda $x \in (a-\delta, a+\delta)$ se cumple que

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[\sum_{k=0}^{n-1} a^k \left(\sum_{j=0}^{n-k-2} x^{n-k-2-j} a^j \right) \right] \right| \leq M$$

Como ya lo habíamos argumentado, esto implica que

$$\lim_{x \to a} \left[\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - g(a) \right] = 0$$

Es decir, f es derivable en a y además

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = g(a) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n a^{n-1}$$

Lo que nos dice que f es derivable en $(-r, r)$ y

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

Con lo que concluimos la prueba. ■

Es de destacar cómo una idea intuitiva tan clara como lo es la derivación de una serie de potencias, tenga una prueba tan elaborada. Una prueba difícil para un resultado invaluable.

Ahora ataquemos el caso general de la derivación de una serie de potencias centrada en cualquier punto. No hay que preocuparse, este resultado ya es bastante sencillo.

Teorema 15 *Sean $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ una sucesión y $a, r \in \mathbb{R}$, con $r > 0$. Si la serie de potencias*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$$

converge para todo $x \in (a-r, a+r)$, entonces f es derivable y además

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-a)^{n-1}$$

para toda $x \in (a-r, a+r)$.

Dem. Este teorema es en realidad un corolario del Teorema 14 así como de la regla de la cadena.

Definamos

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

y definamos también

$$h(x) = x - a$$

Ahora notemos que

$$(g \circ h)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n = f(x)$$

De manera que para demostrar lo que se nos pide, lo único que necesitamos argumentar es que g es derivable. Y para ello, de acuerdo al Teorema 14, sólo necesitamos probar que la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

converge para toda $x \in (-r, r)$.

Veamos que esto es así. Tomemos $x \in (-r, r)$. Entonces el número $x + a$, satisface que

$$|(x+a) - a| = |x| < r$$

y en consecuencia, $x + a \in (a-r, a+r)$.

De esta forma podemos aplicar la hipótesis al punto $x + a$, lo que significa que la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n ((x+a) - a)^n$$

converge. Es decir,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

converge.

De esta manera la serie de potencias

$$g\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}a_{n}x^{n}$$

converge para toda $x\in\left(-r,r\right)$.

Así que gracias al Teorema 14, g es derivable y además

$$g'\left(x\right)=\sum_{n=1}^{\infty}na_{n}x^{n-1}$$

Por la regla de la cadena tenemos que la composición $g\circ h$ es derivable en $\left(a-r,a+r\right)$ y además

$$\left(g\circ h\right)'\left(x\right)=g'\left(h\left(x\right)\right)h'\left(x\right)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}na_{n}\left(x-a\right)^{n-1}\right)\cdot 1=\sum_{n=1}^{\infty}na_{n}\left(x-a\right)^{n-1}$$

Con esto podemos concluir que f es derivable y

$$f'\left(x\right)=\sum_{n=1}^{\infty}na_{n}\left(x-a\right)^{n-1}$$

como queríamos. ■

Los Teoremas 14 y 15 son una verdadera maravilla. Como lo habíamos anticipado, una sistemática aplicación de estos teoremas nos demuestra que las series de potencias (definidas en un dominio no trivial) generan funciones infinitamente derivables. Pongamos como corolario este hecho para no olvidarlo.

Corolario 16 *Sea $\{a_n\}\subset\mathbb{R}$ una sucesión y $a,r\in\mathbb{R}$, con $r>0$. Si la serie de potencias*

$$f\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}a_{n}\left(x-a\right)^{n}$$

converge para todo $x\in\left(a-r,a+r\right)$, entonces f es infinitamente derivable en $\left(a-r,a+r\right)$.

Tomemos la serie de Taylor de $\operatorname{sen}\left(x\right)$

$$\operatorname{sen}\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^{n}\frac{x^{2n+1}}{\left(2n+1\right)!}$$

Si derivamos esta serie según el Teorema 14:

$$\operatorname{sen}'\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^{n}\left(2n+1\right)\frac{x^{2n}}{\left(2n+1\right)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^{n}\frac{x^{2n}}{\left(2n\right)!}=\cos\left(x\right)$$

Similarmente, si derivamos la serie de Taylor de $\cos\left(x\right)$ aterrizaremos en $-\operatorname{sen}\left(x\right)$ como nuestro curso de Cálculo I nos había enseñado.

Algunos textos tienen el atrevimiento de definir a las funciones trigonométricas a partir de su serie de potencias y con ellas sacan todas sus propiedades.

Otro bonito ejemplo lo tenemos con la función exponencial $f\left(x\right)=e^{x}$. Si derivamos su serie de Taylor:

$$f\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n}}{n!}$$

entonces

$$f'\left(x\right)=\sum_{n=1}^{\infty}n\frac{x^{n-1}}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{\left(n-1\right)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n}}{n!}=e^{x}$$

Como ejercicio deriven las series de Taylor de $\arctan(x)$ y $\log(1+x)$ y verifiquen que las series obtenidas coinciden con las derivadas conocidas para estas funciones.

Saber que una serie de potencias es infinitamente derivable, en particular nos dice que toda serie de potencias es una función continua. Y con ello, el Teorema Fundamental del Cálculo nos asegura que dicha serie debe tener una primitiva. ¿Cómo la encontramos? Muy fácil, sólo hay que apoyarnos del mismo Teorema 14.

Si la serie de potencias

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$$

será el resultado de una derivación, lo único que tenemos que hacer es visualizar una nueva serie de potencias cuya derivada regrese f. El candidato natural es:

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-a)^{n+1}$$

Si derivamos esta serie, obtenemos lo deseado:

$$g'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n (n+1)}{n+1} (x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n = f(x)$$

Por supuesto, para tener derecho a llevar a cabo esta derivación es necesario asegurar la convergencia de las serie definida por g. Vamos a dejar esto como un ejercicio para que practiquen las técnicas estudiadas el día de hoy.

Proposición 17 *Sea $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ una sucesión y $a, r \in \mathbb{R}$, con $r > 0$. Si la serie de potencias*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$$

converge para todo $x \in (a-r, a+r)$, entonces la serie de potencias

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-a)^{n+1}$$

converge absolutamente para toda $x \in (a-r, a+r)$.

Corolario 18 *Sea $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ una sucesión y $a, r \in \mathbb{R}$, con $r > 0$. Si la serie de potencias*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$$

converge para todo $x \in (a-r, a+r)$, entonces la serie de potencias

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-a)^{n+1}$$

es una primitiva para f en $(a-r, a+r)$. Es decir, $g'(x) = f(x)$.

Ahora veamos un par de ejemplos ilustrativos de las aplicaciones que tienen las series de potencias para el cálculo de series.

Ejemplo 19 *Encontrar el valor de la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$$

La estrategia para este tipo de problemas es tratar de identificar alguna serie de potencias relacionada con la serie que nos interesa y para la cual podamos asociarle una función explícita.

En nuestro ejemplo podemos identificar que si llamamos

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$$

entonces

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$$

Así que para calcular el valor de la serie pedida, lo que tenemos que hacer es tratar de encontrar a esta f explícitamente.

Un buen punto de partida siempre es la serie geométrica:

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

Si derivamos a g, obtenemos

$$g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$$

Ahora consideren a la función

$$h(x) = x g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^n$$

Si derivamos a h, nos queda

$$h'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$$

Esto es fantástico porque ahora es evidente que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1} = x h'(x)$$

Es decir,

$$f(x) = x h'(x)$$

¿Que hay que hacer con todo esto?

Debemos regresarnos a la definición explícita de g y trabajar con ella hasta aterrizar en $xh'(x)$.

Veamos:

$$g(x) = \frac{1}{1-x}$$

Por lo tanto

$$g'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

De esta manera

$$h(x) = xg'(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Y por lo tanto

$$h'(x) = \frac{(1-x)^2 - x(-2)(1-x)}{(1-x)^4} = \frac{1+x}{(1-x)^3}$$

De donde

$$f(x) = xh'(x) = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3} = \frac{x+x^2}{(1-x)^3}$$

Justo lo que necesitábamos. Ahora ya somos capaces de hallar el valor de la serie pedida:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1/2+1/4}{1/8} = 6$$

Es decir,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} = 6$$

¡Sorprendente!

Ejemplo 20 *Calcular el valor de la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{3^n(n+1)}$$

De acuerdo la estrategia seguida en el Ejemplo 19, nuestro primer paso es identificar a una serie de potencias relacionada con la serie pedida.

En este caso podemos definir

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^n$$

De aquí podemos notar que

$$f\left(-\frac{1}{3}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}\left(-\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{3^n(n+1)}$$

Nuestro siguiente paso es tratar de encontrar a f de manera explícita, ya sea derivando o integrando la serie de potencias.

Retomando lo logrado en el Ejemplo 19, si definimos

$$h(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$$

ya hemos visto que esta h se corresponde con la serie de potencias

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n$$

Aprovechemos ahora al Corolario 18 para dar una primitiva de esta serie de potencias. Es decir, si

$$H(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^{n+1}$$

entonces se satisface que

$$H'(x) = h(x)$$

La expresión de H es bastante conveniente porque ya se le parece mucho a la f que estamos buscando:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^n = \frac{H(x)}{x}$$

El camino ahora ya está trazado, sólo hay que partir de la definición explícita de h y llegar hasta el cociente $H(x)/x$.

Como H es primitiva de h entonces calculamos:

$$\int \frac{x}{(1-x)^2} dx = -\int \frac{(1-x)-1}{(1-x)^2} dx = \int \frac{1}{(1-x)^2} dx - \int \frac{1}{1-x} dx$$

$$= \frac{1}{1-x} + \log(1-x)$$

Por lo tanto

$$H(x) = \frac{1}{1-x} + \log(1-x) + C$$

(¡No hay que olvidarnos de la constante de integración!)

De esta forma

$$f(x) = \frac{H(x)}{x} = \frac{1}{x(1-x)} + \frac{\log(1-x)}{x} + \frac{C}{x}$$

Parecería que hemos llegado a una barrera, ¿cómo vamos a calcular el valor de de $f(-1/3)$ sin conocer a esa C?

Bueno, en realidad resulta que sí podemos conocer a esa C. Noten que en la definición de f, el 0 es parte de su dominio y de hecho $f(0) = 0$.

Por lo tanto se debe cumplir que

$$\lim_{x \to 0} \frac{H(x)}{x} = \lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = 0$$

Así que lo que tenemos que hacer es sustituir la expresión explícita del cociente $H(x)/x$ en este límite y con ello deducir el valor de C.

Primero notemos que

$$\frac{1}{x(1-x)} + \frac{C}{x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} + \frac{C}{x} = \frac{1}{1-x} + \frac{C+1}{x}$$

De donde

$$\frac{H(x)}{x} = \frac{1}{1-x} + \frac{\log(1-x)}{x} + \frac{C+1}{x}$$

Esta separación es bastante conveniente porque

$$\lim_{x \to 0} \left[\frac{1}{1-x} + \frac{\log(1-x)}{x} \right] = \lim_{x \to 0} \frac{1}{1-x} + \lim_{x \to 0} \frac{\log(1-x)}{x} = 1 + (-1) = 0$$

(Comprueben el segundo límite con L'Hopital)

De manera que

$$0 = \lim_{x \to 0} \frac{H(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \left[\frac{1}{1-x} + \frac{\log(1-x)}{x} + \frac{C+1}{x} \right] = \lim_{x \to 0} \frac{C+1}{x}$$

y la única forma de que el último límite exista es si $C = -1$.

Con esto podemos concluir que

$$f(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{\log(1-x)}{x}$$

Y por lo tanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{3^n (n+1)} = f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{1+1/3} + \frac{\log(1+1/3)}{(-1/3)} = \frac{3}{4} - 3\log\left(\frac{4}{3}\right)$$

Es decir,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{3^n (n+1)} = \frac{3}{4} - 3\log\left(\frac{4}{3}\right)$$

En la tarea encontrarán algunos ejemplos para calcular series echando mano de todo lo aprendido aquí.

Para cerrar la clase, vale mucho la pena que analicemos la relación más profunda que hay entre las series de potencias y las series de Taylor.

Hemos dicho que una serie de Taylor

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

es una serie de potencias pero, ¿qué hay del recíproco?

La satisfactoria respuesta es, que si una serie de potencias

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$$

tiene un domino no trivial (es decir, por lo menos está definida en un intervalo $(a-r, a+r)$), entonces la serie de potencias es una serie de Taylor para g.

Para corroborar que esto es cierto lo único que necesitaríamos exhibir es que los coeficientes a_n se corresponden con los valores $g^{(n)}(a)/n!$. Pero eso es muy simple gracias a la derivabilidad de todos los órdenes que poseen las series de potencias.

Para facilitar la deducción vamos a separar el término constante de la serie

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-a)^n$$

Si evaluamos en $x = a$:

$$g(a) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (a-a)^n = a_0$$

es decir,

$$a_0 = g(a) = \frac{g^{(0)}(a)}{0!}$$

Ahora derivamos la serie:

$$g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-a)^{n-1} = a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n (x-a)^{n-1}$$

Evaluando en $x = a$

$$g'(a) = a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n (a-a)^{n-1} = a_1$$

es decir,

$$a_1 = g'(a) = \frac{g'(a)}{1!}$$

Un simple proceso inductivo nos muestra que

$$g^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)\, a_n (x-a)^{n-k}$$

$$= k!a_k + \sum_{n=k+1}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)\, a_n (x-a)^{n-k}$$

De esta manera

$$g^{(k)}(a) = k!a_k + \sum_{n=k+1}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)\, a_n (a-a)^{n-k} = k!a_k$$

Y por lo tanto

$$a_k = \frac{g^{(k)}(a)}{k!} \tag{14}$$

Con esto hemos probado que

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

Una consecuencia inmediata de este hecho es que las series de potencias son únicas una vez que se escriben de manera centrada en un punto $a \in \mathbb{R}$.

Proposición 21 *(Unicidad de las series de potencias) Sean* $\{a_n\}, \{b_n\} \subset \mathbb{R}$ *dos sucesiones y* $a, r \in \mathbb{R}$*, con* $r > 0$*. Si para todo* $x \in (a-r, a+r)$ *se cumple que*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-a)^n$$

entonces

$$a_n = b_n \qquad \textit{para toda } n \in \mathbb{N}$$

Dem. Llamemos

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$$

Por hipótesis se cumple que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-a)^n$$

De esta manera, por lo demostrado en (14), para toda $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = b_n$$

■

Como un bonito resumen de todo lo logrado el día de hoy podemos pagar otra deuda pendiente. Consideremos la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

El tema anterior fuimos incapaces de demostrar que esta función es infinitamente derivable en 0. Con las series de potencias ahora este problema sí está a nuestro alcance.

La clase del 27 de abril logramos argumentar que

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = \frac{P_{2n+1,\operatorname{sen},0}(x)}{x} + \frac{R_{2n+1,\operatorname{sen},0}(x)}{x}$$

y sabemos que a través del límite este cociente es válido aún en $x = 0$, es decir,

$$\lim_{x\to 0} \frac{P_{2n+1,\operatorname{sen},0}(x)}{x} = 1 = f(0)$$

mientras que

$$\lim_{x\to 0} \frac{R_{2n+1,\operatorname{sen},0}(x)}{x} = 0$$

Aprovechando que

$$|R_{2n+1,\operatorname{sen},0}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

se sigue que para toda $x \in \mathbb{R}$

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \left| \frac{R_{2n+1,\operatorname{sen},0}(x)}{x} \right| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+2)!} = 0$$

En consecuencia

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{P_{2n+1,\operatorname{sen},0}(x)}{x} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k+1)!}$$

Y por tanto

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$$

Es decir, hemos logrado expresar a f como una serie de potencias (con dominio todo $\mathbb{R}$). Así que por el Teorema 14, f debe ser infinitamente derivable en todo $\mathbb{R}$. ¡En particular lo es en el 0! Más aún, esta serie debe ser su serie de Taylor centrada en 0 y con ello:

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \begin{cases} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} & n = 2k, k \in \mathbb{N} \\ 0 & n = 2k-1, k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

o equivalentemente

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} \frac{(-1)^k}{2k+1} & n = 2k, k \in \mathbb{N} \\ 0 & n = 2k-1, k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Las series de potencias son una herramienta sumamente poderosa, sin embargo, su verdadero potencial se verá explotado en cursos más avanzados. En particular regresan con mucha fuerza en Variable Compleja. Lo que hemos ofrecido el día de hoy ha sido sólo una breve y humilde introducción.