Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias

Geometria Moderna

Tarea 1

Elías López Rivera[1] Emmanuel Sánchez Guzmán[2]
{[1] elias.lopezr, [2]emmanuelsg}@ciencias.unam.mx

Fecha: 01/09/2024

Problema 1

En los triángulos de la siguiente figura se tiene que: $AC = C'A'$, AH *es bisectriz del ángulo* $< DAC$, $DC = D'C'$, $A'H'$ *es bisectriz del ángulo* $< D'\acute{A}'C'$, $AH \perp DC$, $A'H' \perp D'C'$ *y* $< BAC =< B'A'C'$. *Demuestra que el triángulo* $\Delta\, ADC \cong \Delta A'D'C'$

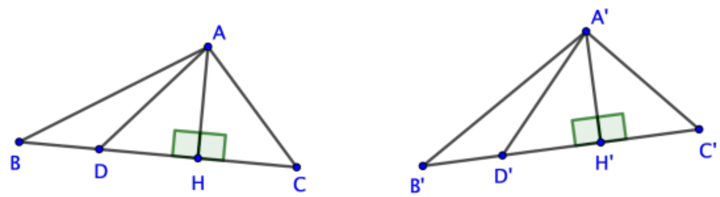

Figura 1: Construcción

Demostración. Como $AH \perp DC$ se tiene que $< DHA =< AHC$, luego como AH es bisectriz de $< DAC$ se tiene que $< HAC =< HAD$, como $AH = AH$, por criterio ángulo-lado-ángulo $\Delta\, HAC \cong \Delta\, HAD$, por tanto $AC = AD \cdots$ **1)**

Como $A'H' \perp D'C'$ se tiene que $< D'H'A =< A'H'C'$, luego como $A'H'$ es bisectriz de $< D'A'C'$ se tiene que $< H'A'C' =< H'A'D'$, como $A'H' = A'H'$, por criterio ángulo-lado-ángulo $\Delta\, H'A'C' \cong \Delta\, H'A'D'$, por tanto $A'C' = A'D' \cdots$ **2)**

De **1)** y **2)** se tiene que $AD = AC = A'C' = A'D'$, por hipótesis $AC = A'C'$ y $DC = D'C'$, por criterio lado-lado-lado $\Delta ADC \cong \Delta A'D'C'$ $\square$

Problema 2

¿Cuáles de los siguientes enunciados son verdaderos y cuáles falsos

i) *Algunos tríangulos obtusángulos son isósceles*

ii) *Todo triángulo equilatero es equiángulo*

iii) *Algunos triángulos rectángulos son obtusángulos*

Demostración.

i) Tomemos ΔABC es un triángulo tal que sus ángulos midan $< BAC = 30 =< CBA$ y $< ABC = 120$, este es obtusángulo e isósceles al mismo tiempo por construcción , luego tomemos $\Delta\, EFG$ tal que $< EFG = 140$, $< FEG = 30$, $FGE = 10$, es claro que este triángulo es obtusángulo pero no isósceles, por tanto la proposición es verdadera

ii) Sea ΔABC un triángulo equilatero, en partícular cumple que $AB = AC$, por tanto ΔABC es isósceles y por proposición 1.5 se tiene que $< ABC =< ACB$, podemos aplicar un razonamiento análogo ya que $BC = AB$, por tanto ΔABC sigue siendo isósceles ademas de que $< BCA =< BAC$, por nociones comunes se tiene que $< BCA =< BAC =< ACB$, por tanto la proposición es verdadera

iii) Sea $\Delta\, ABC$, un triángulo rectangulo con $< ABC = 90$, si este triángulo fuera a su vez obtusángulo se tiene que necesariamente $< CAB$ o $< BCA$ son mayores que un ángulo recto, sin embargo la suma de $< ABC$ con cualquiera de estos dos debe ser menor a dos ángulos rectos (proposición 1.16), suponemos sin perdida de generalidad que $< CAB > 90$, entonces $< ABC+ < CAB > 180$, por tanto es imposible que el triángulo ΔABC sea obtusángulo.

$\square$

Problema 3

El triángulo que se forma al unir los puntos medios de los lados de un triángulo equilatero , tambíen es equilátero

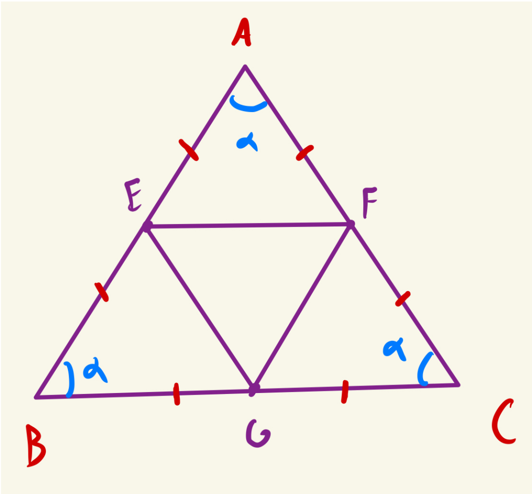

Figura 2: Construcción

Demostración.

ΔABC es equilatero se tiene que $AB = BC = AC$, como todo triángulo equilatero es equiángulo *[Problema 2 ii)]*, entonces $< BAC =< ACB =< CBA$, notemos los triángulos ΔEFA, ΔEGB y ΔFGC, probaremos que $\Delta EGB \cong \Delta FGC$

i) $EB = FC$ pues $AB = AC$ ademas que E Y F bisecan AB y AC respectivamente

ii)$BG = GC$ pues G biseca BC

iii)$< GBE =< FCG$ pues G, B y C son colineales, a su vez A, F y C también son colineales

Por criterio lado-ángulo -lado, se concluye que $\Delta EGB \cong \Delta FGC \cdots$ **1)**

Ahora probaremos que $\Delta EGB \cong \Delta EFA$

i)$EB = EA$ pues E biseca a AB

ii) $AF = BG$, pues $AC = BC$, ademas F G, bisecan a AC Y BG respectivamente

iii) $< EAF =< GBE$ pues A, E Y B son colineales, de la misma manera B, G Y C son colineales

Por tanto $\Delta EGB \cong \Delta EFA \ \cdots$ **2)**

De **1)** se sigue que $FG = GE$, de **2)** se sigue que $GE = EF$, por nociones comunes se tiene que $FG = GE = EF$, por tanto ΔGEF es equilátero $\square$

Problema 4

En un poblado situado junto a un río, cuyo borde es totalmente recto, hay un inciendo en un lugar que llamaremos A. Cerca del borde del río, y del mismo lado, está la casa del bombero del pueblo, en un lugar al que llamaremos B. Para apagar el incendio el bombero llena con agua del río una cubeta y corre a vaciarla al fuego . ¿Cuál de los puntos en el borde del río hariá que la longitud de la trayectoria que debe recorrer el bombero sea la mínima posible?

Demostración.

Reflejamos el punto A a un punto C del otro lado del rio, sea el segmeno AC tal que interseca a la recta que representa el rio en un punto E, tenemos que $AE = CE$, de la misma manera reflejamos el punto B en un punto D al otro lado del rio, sea el punto E donde el segmento BD interseca a la recta que representa al rio, tenemos que la distancia más corta entre el punto C y el B es el segmento CB, por tanto para minimizar el recorrido del bombero tenemos que encontrar un recorrido que recorra la misma distancia que el segmento CB, para esto tracemos el segmento AD, y llamemos G al punto donde se intersecan CB, AD y la recta que representa al rio, a su vez notemos que $CB = GB + CG$, notemos que $< AEG =< GEC = 90$, ya que la recta del rio y el segmento AE son perpéndiculares, luego tenemos que $AE = CE$, y que ademas $EG = EG$, por criterio lado-ángulo-lado se tiene que $\Delta AEG \cong \Delta CEG$, de donde se obtiene que $AG = CG$, por tanto $CG + GB = CB$, es decir el punto G es el que minimiza la distancia recorrida por el bombero

$\square$

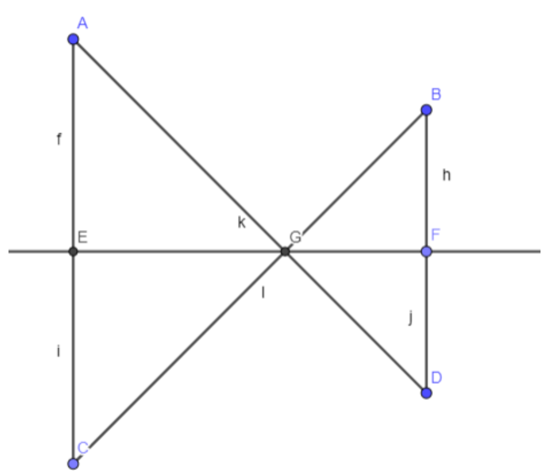

Figura 3: Construcción

Problema 5

¿Cuáles de los siguientes enunciados son verdaderos y cuáles falsos

i) *Si dos ángulos son congruentes, entonces son suplementarios*

ii) *Un ángulo cualquiera de puede dividir en 4 partes iguales*

Demostración.

i) Si α, β son ángulos congruentes entonces $\alpha = \beta$, si estos mismo fueran suplementarios $\alpha + \beta = 180$, es claro que $\alpha = 30 = \beta$, son congruentes sin embargo $\alpha + \beta = 60$, por tanto la proposición es falsa.

ii) Sea el ángulo $< ABC$, por la proposición 1.19 se tiene que es posible bisecar este, tomemos el punto F de tal suerte que $< ABC =< CBF+ < FBC$ y $< CBF = FBC$, de la misma manera es posible bisecar los ángulos $< CBF$ y $< FBC$, llamemos L un punto tal que $< CBF =< ABL+ < LBF$, y $< ABL =< LBF$, de la misma manera tomemos el punto H tal que $< FBC =< FBH+ < HBC$ y $< FBH =< HBC$, se deduce que $< ABC =< ABL+ < LBF+ < FBH+ < HBC$ y por nociones comunes tenemos que $< FBH =< HBC = ABL = LBF$, por tanto hemos dividido $< ABC$ en 4 partes iguales. □

Problema 6

Demuestra que las diagonales de un paralelogramo se bisecan

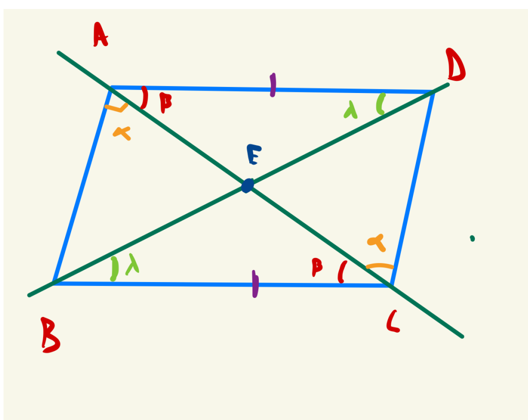

Figura 4: Construcción

Demostración.

Sea $ABCD$ un paralelogramos, trazamos el segmento AC, como AD es paralela a BC, tenemos que

$< ACB =< CAD$, pues son alternos internos, de la misma manera AB es paralela a DC, entonces $< ACD =< CAB$, pues son alternos internos, luego $AC = AC$, por criterior ángulo-lado-ángulo se tiene que $\Delta ADC \cong \Delta CBA$, por tanto $AD = CB$

Luego trazamos BD, llamamos F al punto donde se intersecan AC y BD, como AD es paralela a BC, se tiene que $< BDA =< DBC$, pues son alternos internos por tanto:

i) $< ACB =< CAD$

ii)$< BDA =< DBC$

iii)$AD = BC$

Por criterio ángulo-lado-ángulo, se tiene que $\Delta\, FDA \cong \Delta\, FBC$, por tanto $FA = FC$ Y $FB = FD$, por tanto F biseca tanto a AC como a BD

$\square$

Problema 7

Sea ΔABC un triángulo isósceles con $AB = AC$ y A' el punto medio del lado BC. Demuestra que los triángulos que se forman $\Delta ABA'$ y $\Delta ACA'$ son congruentes

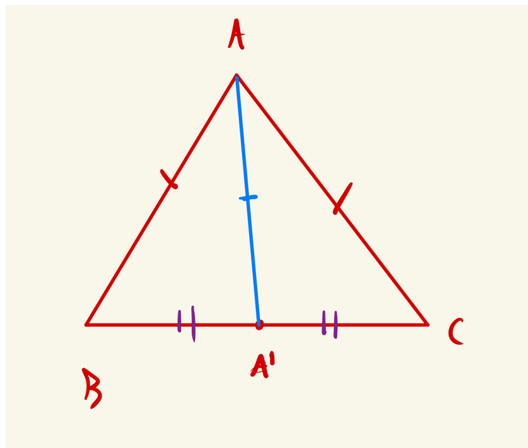

Figura 5: Construcción

Demostración.

i) Por hipótesis se tiene que $AB = AC$

ii) Como A' es punto medio de BC se tiene que $BA' = A'C$

iii) Tenemos que $AA' = AA'$

Por tanto por criterio lado-lado-lado se concluye que $\Delta A'BA \cong \Delta\, A'CA$ $\square$