Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Álgebra superior 2
Tarea examen 1
Elías López Rivera
elias.lopezr@ciencias.unam.mx
Fecha: 27/10/2024

Lema 1

Sea R un anillo conmutativo con 1 se cumple que $-(ac) = a(-c)\ \ \forall\ a, c \in R$

Demostración.

Sean $a, c \in R$, notemos que por la distributividad del producto sobre la suma:

$$ac + a(-c) = a(c + (-c))$$

Como $(-c) \in R$ es inverso para c:

$$ac + a(-c) = a(c + (-c)) = a(0)$$

Como en cualquier anillo conmutativo con 1 se cumple que $a(0) = 0$, para todo $a \in R$:

$$ac + a(-c) = a(c + (-c)) = a(0) = 0$$

Como en un anillo conmutativo con 1 los inversos son únicos se tiene que necesariamente $-(ac) = a(-c)$ $\square$

Problema 1

A partir de los naturales $\mathbb{N}$ define $\mathbb{Z} = (\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\sim$ donde $(n, m) \sim (k, l)$ si y solo si $n + l = m + k$ .Induce las operaciones de suma y producto en $\mathbb{Z}$ utilizando aquellas de $\mathbb{N}$, demuestra que están bien definidas (en el sentido de que no dependen de los representantes) y demuestra que el resultado es un anillo conmutativo con 1 que contiene a $\mathbb{N}$

Demostración.

Definimos $\oplus : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$:

$$[(n, m)] \oplus [(r, s)] = ([n + r, m + s])$$

Donde $+$ es la suma definida en $\mathbb{N}$.
Definimos $\odot : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$:

$$[(n, m)] \odot [(r, s)] = [(nr + ms, mr + ns)]$$

donde $+$ es la suma definida en $\mathbb{N}$ y $\cdot$ es el producto en $\mathbb{N}$

$\square$

Problema 2

Demuestra que para todo elemento $[(n, m)] \in \mathbb{Z}$ se satisface exactamente una de las siguientes afirmaciones:

- *Existe $c \in \mathbb{N}/\{0\}$ tal que $[(n, m)] = [(c, 0)]$*
- $[(n, m)] = [(0, 0)]$
- *Existe $c \in \mathbb{N}/\{0\}$ tal que $[(n, m)] = [(0, c)]$*

Demostración.

Sean $n, m \in N$ por tricotomia tenemos tres casos:

- $m < n$
- $n = m$
- $n < m$

i) Primero tomemos que $n < m$, por la definición del orden en $\mathbb{N}$ tenemos que:

$$\exists\ c \in \mathbb{N}/\{0\} :\ n = m + c$$

Usando que 0 es neutro para la suma definida en $\mathbb{N}$, tenemos que:

$$n + 0 = m + c$$

Y por la relación de equivalencia definida anteriormente:

$$n + 0 = m + c \implies (n, m) \sim (c, 0)$$

Como estos dos elementos están relacionados sus clases de equivalencia son iguales necesariamente:

$$[(n, m)] = [(c, 0)]$$

ii) Ahora tomemos que $n = m$, usando nuevamente que el 0 es neutro para la suma de $\mathbb{N}$:

$$n + 0 = m + 0$$

De nuevo por la relación de equivalencia definida anterioemente:

$$n + 0 = m + 0 \implies (n, m) \sim (0, 0)$$

Como estos dos elementos están relacionados sus clases de equivalencia son iguales necesariamente:

$$[(n, m)] = [(0, 0)]$$

iii) Finalmente tomamos el caso $m < n$, por la definición del orden en $\mathbb{N}$ tenemos que:

$$\exists\ c \in \mathbb{N}/\{0\} :\ m = n + c$$

Usando que 0 es neutro para la suma definida en $\mathbb{N}$, tenemos que:

$$n + c = m + 0$$

Y por la relación de equivalencia definida anteriormente:

$$n + c = m + 0 \implies (n, m) \sim (0, c)$$

Como estos dos elementos están relacionados sus clases de equivalencia son iguales necesariamente:

$$[(n, m)] = [(0, c)]$$

$\square$

Problema 3

Demuestra que un elemento u de un anillo conmutativo con 1 tiene a lo más un inverso multiplicativo

Demostración.
Sea $a \in R$ tal que existe $u \in R$ con $a(u) = 1$, demostraremos que si se tiene que $a(u') = 1$, necesariamente $u' = u$:

$$a(u) = 1 = a(u')$$

Como $a(u') \in R$ tenemos que existe $-a(u') \in R$, sumando este de ambos lados:

$$a(u) + (-au') = a(u') + (-au') = 0$$

Aplicando el lema 1 tenemos que $-au' = a(-u')$ y la distributividad del producto sobre la suma:

$$a(u) + (-au') = a(u + (-u')) = 0$$

Multiplicando ambos lados por u:

$$u(a(u + (-u'))) = 0u$$

Usando el hecho de que $0u = 0$ para todo $u \in R$, y la asociatividad del producto:

$$(ua)(u + (-u')) = 0$$

Usando la conmutatividad del producto y nuestra hipótesis:

$$(ua)(u + (-u')) = (au)(u + (-u')) = 1(u + (-u')) = 0$$

Como 1 es neutro para el producto:

$$u + (-u') = 0 = u' + (-u')$$

Como las leyes de cancelación son validas para la suma en un anillo conmutativo con 1 se concluye que:

$$u = u'$$

□

Problema 4

Demuestra: $\forall\ a, b \in \mathbb{Z}\,(a > 0\ b > 0\ a^2 > b^2 \implies a > b)$

Demostración.

□

Problema 5

Demuestra que un dominio entero R se vale la ley de cancelación: $\forall\ a, b, c \in R\,(a \neq 0\ ab = ac \implies b = c)$

Demostración.

Tomamos $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tal que $a \neq 0$, tenemos que:

$$ab = ac$$

Como ac es un elemento del dominio entero R, entonces este tiene un único inverso $-(ac) \in R$, sumando por ambos lados tenemos que:

$$ab + (-ac) = ac + (-ac)$$

Como $-(ac)$ se definio como el inverso bajo $+$ de ac, se sigue que:

$$ab + (-ac) = 0$$

Como $ab, -(ac) \in R$, podemos aplicar el lema 1 y posteriormente la distribución del producto sobre la suma:

$$ab + (-ac) = ab + a(-c) = a(b + (-c)) = 0$$

Como R es dominio entero necesariamente $a = 0$ o $(b + (-c)) = 0$, como por hipótesis $a \neq 0$, entonces $(b + (-c)) = 0$, por tanto sumando c a ambos lados de la igualdad:

$$b + (-c) + c = 0 + c \implies b + 0 = 0 + c \implies b = c$$

□

Problema 1

Demuestra que un elemento $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *del anillo de series formales* $\mathbb{Q}[[x]]$ *con coeficientes en* $\mathbb{Q}$ *es una unidad en* $\mathbb{Q}[[x]]$ *si y solo si* $a_0 \neq 0$

Demostración. □