Problema 4

Elías López Rivera [1]

[1] Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de ciencias

26 de enero de 2025

1. Enunciado

Sea $c > 0$ con $c \in \mathbb{R}$

i) **Examine** la convergencia de la sucesión $(\frac{n}{c^n})_{n\in\mathbb{N}}$

ii) **Examine** la convergencia de la sucesión $(\frac{c^n}{n!})$

2. Solución

i) Aplicando el criterio del cociente (problema 6) a $a_n := \frac{n}{c^n}\,\forall\, n \in \mathbb{N}$ obtenemos:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{c^{n+1}}}{\frac{n}{c^n}} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)\frac{1}{c} = \frac{1}{c}$$

Se sigue que si $c > 1 \implies 1/c < 1$, la sucesión converge a 0, y si en cambio $c < 1 \implies 1 > 1/c$, la sucesion es divergente, en tanto que si c=1 $a_n = n\,, \forall\, n \in \mathbb{N}$ lo cual claramente es divergente.

ii) Aplicando de nuevo el criterio del cociente a $b_n := \frac{c^n}{n!}\;\;\forall\, n \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{c^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{c^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1}\right) c = 0$$

Por tanto la sucesión converge a 0 $\forall\, c > 0$