

Problema 3

Elías López Rivera ¹

¹ Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas.
{¹elopezr2300}@alumno.ipn.mx.

14 de junio de 2024

1. Enunciado

Considera un modelo de la atmósfera donde la temperatura varía con la altura z de la siguiente manera:

$$T(z) = T_0 - \lambda z \quad (1)$$

Donde $T_0 = 288K$ y $p_0 = 1 \text{ atm} = 1,01 \times 10^5 \text{ Pa}$ es la temperatura y presión a nivel del mar ($z = 0$); $\lambda = 6,5 \times 10^{-3} \frac{K}{m}$ es una constante. Suponiendo que el aire de la atmósfera se comporta como un gas ideal diatómico ($\gamma = \frac{7}{5}$) de masa molar : $M = 28,8 \times 10^{-3} \frac{kg}{mol}$

a) [2.5 puntos] Determina la expresión de la presión atmosférica como función de la altura $p(z)$.

b) [2.5 puntos] Demuestra que la temperatura y la presión en la atmósfera satisfacen la siguiente relación:

$$T = T_0 \left(\frac{p}{p_0} \right)^\alpha \quad (2)$$

donde $\alpha = R\lambda/Mg$ es un número adimensional, determinar su valor ($R = 8,31 J/K \text{ mol}$)

c) [1 punto] A cierta altura de la atmósfera se pueden formar una burbúja de aire que tiene una temperatura diferente del aire que la rodea pero la

misma presión. Si T_a es la temperatura de la atmósfera y T_b la temperatura de la burbuja, demuestra que cuando $T_a > T_b$ el globo se puede elevar.

Consideremos que durante la elevación de la burbuja el gas dentro de la burbuja cambia adiabáticamente. Si designamos (p_{0b}, T_{0b}) su presión y temperatura inicial, cuando la burbuja se ha formado a una altura z_1 Y (p_{1b}, T_{1b}) su presión y temperatura final cuando se eleva hasta la altura z_2 .

d) [4 puntos] La elevación de la burbuja tiene un límite z_{max} a partir del cual ya no se eleva más. Si una burbuja se genera a una altura $z_0 = 2 \text{ km}$, con una temperatura inicial $T_{0b} = 280 \text{ K}$. Determina la altura máxima a la que llega esta burbuja, determina también su presión y temperatura al llegar a esta altura máxima.

2. Solución

a) Considerando la ecuación fundamental de la hidrostática:

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \quad (3)$$

de la ecuación del gas ideal podemos obtener la ρ del aire:

$$PV = R \frac{m}{M} T \implies \rho = \frac{M p}{T} \quad (4)$$

A su vez sabemos que la temperatura depende de z por la ecuación (1), despejando (3) y (4):

$$\frac{1}{p} dp = \frac{-M g}{R} \left(\frac{1}{T_0 - \lambda z} \right) dz \quad (5)$$

Integrado y evaluando ambos lados:

$$\int_p^{p_0} \frac{1}{p} dp = \frac{-M g}{R} \int_{T_0}^{T_0 - \lambda z} \left(\frac{1}{T_0 - \lambda z} \right) dz \quad (6)$$

Utilizando el cambio de variable $u = T_0 - \lambda z$, $dz = \frac{-du}{\lambda}$, se simplifica (6):

$$\int_p^{p_0} \frac{1}{p} dp = \frac{-M g}{R} \int_{u+\lambda z}^u \frac{1}{u} du \quad (7)$$

Finalmente obtenemos:

$$\ln(p) = \frac{Mg}{R\lambda} \ln(T_0 - \lambda z) + c \quad (8)$$

Valuando (8) en $h=0$:

$$\ln(p_0) = \frac{Mg}{R\lambda} \ln(T_0) + c \implies \ln\left(\frac{p_0}{T_0^\beta}\right) = c \quad (9)$$

con $\beta = \frac{Mg}{R\lambda}$

Reescribiendo (8)

$$\ln(p) - \ln(p_0) = \frac{Mg}{R\lambda} [\ln(T_0 - \lambda z) - \ln(T_0)] \quad (10)$$

b) Despejando de (10):

$$\frac{P}{P_0} = \left(\frac{T_0 - \lambda z}{T_0}\right)^\beta \implies T = T_0 \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\beta^{-1}} \quad (11)$$

Sea $\beta^{-1} = \alpha = \frac{R\lambda}{Mg}$

c) Sabemos que si la burbúja flota en la atmósfera se debe cumplir $\rho_b < \rho_a$, obteniendo ambas (la presión en ambas es la misma):

$$\rho_a = \frac{Mp(z)}{RT_a} \quad \rho_b = \frac{Mp(z)}{RT_b} \quad (12)$$

Aplicando la condición de flotación :

$$\frac{1}{T_b} < \frac{1}{T_a} \implies T_a < T_b \quad (13)$$

d) Es claro que la burbúja ascenderá hasta que su temperatura sea la misma de la atmósfera (si es menor la burbúja ya no flotará), por tanto tenemos:

$(p_{0b}, T_{0b}) \longrightarrow (p_{1b}, T_{1b}) : \text{Proceso adiabático de la burbuja}$

$(p_{0a}, T_{0a}) \longrightarrow (p_{1a}, T_{1a}) : \text{Proceso de la atmósfera}$

donde $T_{1a} = T_{1b} = T_1$, $p_{1b} = p_{1a}$, $p_{0b} = p_{0a}$

Aplicando las fórmulas del proceso adiabático y (11) obtenemos:

$$1 = \frac{p_{1b}}{p_{0b}} = \left(\frac{T_{0b}}{T_1} \right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} \quad 1 = \frac{p_{1a}}{p_{0a}} = \left(\frac{T_1}{T_{0a}} \right)^{\beta} \quad (14)$$

Despejando T_1 de (14):

$$T_1 = [(T_0 - \lambda z_0)^{\beta} T_{0b}^{\delta}]^{\Omega} \quad (15)$$

Aplicando que T_1 es también la temperatura de la atmósfera, obtenemos z_{max} :

$$T_0 - \lambda z_{max} = T_1 \implies z_{max} = \frac{1}{\lambda} (T_0 - T_1) \quad (16)$$

De (11) y (14) podemos encontrar la presión p_{1b}

$$p_{1b} = p_0 \left(\frac{T_0 - \lambda z_0}{T_0} \right)^{\beta} \left(\frac{T_{0b}}{T_1} \right)^{\delta} \quad (17)$$

con $\beta = \frac{Mg}{R\lambda}$, $\delta = \frac{\gamma}{\gamma-1}$, $\Omega = (\beta + \delta)^{-1}$

Evaluando: $\beta = 5,22521$, $\delta = -\frac{7}{2}$, $\Omega = 0,5796$

$$T_1 = 265,19 \text{ K}$$

$$Z_{max} = 3487,89 \text{ m}$$

$$p_{1b} = 0,656 \text{ atm}$$