Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Cálculo I

Función exponencial

Elías López Rivera

elias.lopezr@ciencias.unam.mx

1. Exponencial racional

Definición 1

Sea $a \in \mathbb{R}$ *tal que* $a > 1$ *definimos* $exp_a : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, *una función como:*

$$exp_a(r) = \begin{cases} \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m, \text{ si } r = \dfrac{m}{n} \\ \\ \dfrac{1}{exp_a(-r)}, \text{ si } r = -\dfrac{m}{n} \\ \\ 1, \text{ si } r = 0 \end{cases}$$

Donde $m, n \in \mathbb{N}$

En clase ya se demostro que la definición anterior no causa problemas en torno a las múltiples representaciones de un racional como fraccíon, a continuación presentaremos algunas propiedades de esta función.

Proposicioón 1

Sea $exp_a : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, *esta cumple que:*

1. $exp_a\,(r) > 0 \;\forall\, r \in \mathbb{Q}$
2. $exp_a(r)\, exp_a(s) = exp_a(r + s) \;\forall\, r, s \in \mathbb{Q}$
3. $(exp_a(r))^s = exp_a(rs) \;\forall\, r, s \in \mathbb{Q}$
4. $r, q \in \mathbb{Q}\; r < q \implies exp_a(r) < exp_a(q)$

Demostración.

1) Tomemos $r = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}^+$ tal que $m, n \in \mathbb{N}$, por la definición tenemos que:

$$exp_a(r) = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \underbrace{\left(a^{\frac{1}{n}}\right) \cdots \left(a^{\frac{1}{n}}\right)}_{\text{m veces}}$$

Tenemos que como $a > 0$, entonces por propiedades de la raíz enésima $a^{\frac{1}{n}} > 0$, luego por la definición de la exponencial se sigue que estamos multiplicando m veces un número necesariamente mayor a 0, por propiedades de los números reales se concluye que $exp_a(r) > 0 \ \forall \ r \in \mathbb{Q}^+$, luego por la definición de la exponencial para racionales negativos se pude notar que $\exp_a(-r) = \frac{1}{\exp_a(r)} > 0$, de donde se concluye que $exp_a(s) > 0 \ \forall \ s \in \mathbb{Q}^-$, finalmente si $r = 0$ se tiene que $a^r = 1 > 0$, por tanto la propiedad **1)** es cierta

2) Tomemos $r = \frac{m}{n}, s = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^+$ tal que $m, n, p, q \in \mathbb{N}$, haciendo una pequeña manipulación algebráica tenemos que $r = \frac{mq}{nq}$ y $s = \frac{pn}{qn}$, aplicando la definición tenemos que

$$exp_a\ (r)\ \exp_a(s) = exp_a\left(\frac{mq}{nq}\right) \exp_a\left(\frac{pn}{nq}\right) = \left(a^{\frac{1}{qn}}\right)^{mq} \left(a^{\frac{1}{qn}}\right)^{pn}$$

Como tenemos la misma raź enésima en el termino $a^{\frac{1}{qn}}$, podemos expandir de la siguiente manera:

$$exp_a\ (r)\ \exp_a(s) = \underbrace{\left(a^{\frac{1}{qn}}\right) \cdots \left(a^{\frac{1}{qn}}\right)}_{\text{mq veces}} \underbrace{\left(a^{\frac{1}{qn}}\right) \cdots \left(a^{\frac{1}{qn}}\right)}_{\text{pn veces}} = \left(a^{\frac{1}{qn}}\right)^{mq+pn} = a^{\frac{mq+pn}{qn}} = exp_a(r+s)$$

Podemos aplicar la definición y lo anterior a:

$$exp_a(-r)exp_a(-s) = \frac{1}{exp_a(r)\, exp_a(s)} = \frac{1}{\exp(r+s)} = \exp(-r-s)$$

Ahora notemos lo siguiente:

$$exp_a(s)\, exp_a(-r) = \frac{exp_a(s)}{\exp(r)}$$

De aqui se puede notar que si $r = s$, entonces $exp_a(s)exp_a(-r) = 1 = \exp_a(s-r)$, ahora supongamos que $r < s$, por tanto $s - r > 0$, por tanto:

$$exp_a(s)\, exp_a(-r) = \frac{exp_a(s-r+r)}{\exp(r)} = \frac{exp_a(s-r)\, exp_a(r)}{exp_a(r)} = exp_a(s-r)$$

De forma similar tenemos que si $s < r$, entonces $0 < r - s$, por tanto:

$$exp_a(s)\, exp_a(-r) = \frac{exp_a(s)}{\exp(r-s+s)} = \frac{exp_a(s)}{exp_a(r-s)\, exp_a(s)} = \frac{1}{\exp(r-s)} = exp_a(s-r)$$

Finalmente se tiene que si $r = 0$ y $q \in \mathbb{Q}$, entonces, $exp_a(q)\, exp_a(r) = exp_a(q)\, 1 = \exp(q+r)$, se concluye que la proposición **2)** es cierta

3) Tomemos $r, s \in \mathbb{N}$, tenemos que:

$$(exp_a(r))^s = \underbrace{\underbrace{(a\cdots a)}_{\textbf{r veces}}\cdots\underbrace{(a\cdots a)}_{\textbf{r veces}}}_{\text{s veces}} = exp_a(rs)$$

Ahora definimos $l = (a^{\frac{1}{r}})^{\frac{1}{s}}$, calculemos l^{rs}:

$$l^{rs} = \underbrace{\underbrace{[(a^{\frac{1}{r}})^{\frac{1}{s}}\cdots(a^{\frac{1}{r}})^{\frac{1}{s}}]}_{\textbf{s veces}}\cdots\underbrace{[(a^{\frac{1}{r}})^{\frac{1}{s}}\cdots(a^{\frac{1}{r}})^{\frac{1}{s}}]}_{\textbf{s veces}}}_{\text{r veces}} = \underbrace{(a^{\frac{1}{r}})\cdots(a^{\frac{1}{r}})}_{\text{r veces}} = a$$

Aplicando propiedades de la raíz n-esíma, tenemos que $(a^{\frac{1}{r}})^{\frac{1}{s}} = l = a^{\frac{1}{rs}}$

Por tanto hemos demostrado que para todo $r, q \in \mathbb{Q}$, tal que $r = \frac{m}{n}$ y $q = \frac{a}{b}$, donde $a, b, m, n \in \mathbb{N}$, se cumple que:

$$(exp_a(r))^q = exp_a(rq)$$

De forma similar tenemos que:

$$(exp_a(-r))^s = \left(\frac{1}{exp_a(r)}\right)^s = \frac{1}{(exp_a(r))^s} = \frac{1}{exp_a(rs)} = exp_a(-rs)$$

$$(exp_a(r))^{-s} = \frac{1}{exp_a(r)^s} = \frac{1}{exp_a(rs)} = exp_a(-rs)$$

$$(exp_a(-r))^{-s} = \frac{1}{\left(\frac{1}{exp_a(r)}\right)^s} = (exp_a(r))^s = exp_a(rs)$$

Finalmente si $r = 0$, la propiedad es trivial pues $(exp_a(l))^r = (exp_a(r))^l = 1 = exp_a(0)$, por tanto la propiedad **3)** es cierta.

4) Tomemos $r, q \in \mathbb{Z}^+$ tal que $q < r \implies r - q > 0$ ademas se tiene que $exp_a(q) > 0$, se tiene que:

$$1 < a \leq exp_a(r-q) \implies exp_a(q) < exp_a(r-q)\, exp_a(q) = \exp(r)$$

Sea $-r < q$, tenemos que $exp_a(r+q) > 0$ y por tanto:

$$1 < exp_a(r+q) \implies 1 < exp_a(r)\, exp_a(q) \implies \frac{1}{exp_a(r)} < exp_a(q) \implies exp_a(-r) < exp_a(q)$$

De la misma manera tenemos que $q < r \implies -r < -q$ y por tanto:

$$exp_a(q) < exp_a(r) \implies \frac{1}{exp_a(r)} < \frac{1}{exp_a(q)} \implies exp_a(-r) < exp_a(-q)$$

Hemos demostrado que $\forall\, p, q \in \mathbb{Z}$ tal que $p < q$, entonces $exp_a(p) < exp_a(q)$

Tomemos $s = \frac{m}{n}, t = \frac{a}{c} \in \mathbb{Q}$ tal que $\frac{m}{n} < \frac{a}{c}$, como podemos tomar que $n, c \in \mathbb{N}$ se sigue que $mc < an$, como tanto mc, an son números enteros entonces:

$$exp_a(mc) < exp_a(an)$$

Como la raíz nc-esíma preseva la desigualdad tenemos que:

$$exp_a(mc)^{\frac{1}{nc}} < exp_a(an)^{\frac{1}{nc}} \implies exp_a\left(\frac{m}{n}\right) < exp_a\left(\frac{a}{c}\right)$$

Se concluye que la propiedad **4)** es cierta. $\square$

2. Exponencial definida sobre $\mathbb{R}$

La definición anterior de la función exponencial pareciera ser util para trabajar con una gran cantidad de casos, sin embargo es necesario poder extender esta función para definirla sobre todo R, a continuación construiremos los pasos necesarios para realizarlo.

Proposición 2

Sea $a \in \mathbb{R}$ tal que $a > 1$, definimos el conjunto $A_x := \{a^r : r \in \mathbb{Q} \text{ y } r < x\}$ para $x \in \mathbb{R}$, entonces existe $Sup\, A_x \in \mathbb{R}$

Demostración.

Primero demostraremos que $A_x \neq \emptyset \; \forall x \in \mathbb{R}$, procedemos por dos casos si $x > 0$, entonces $a^0 = 1 \in A_x$, en cambio si $x \leq 0$, entonces $-x \geq 0$, por propiedad arquimediana existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > -x$ y por tanto $-n < x$, se sigue que $a^{-n} \in A_x$, se concluye la tesís.

Luego demostraremos que A_x esta acotado superiormente para todo $x \in \mathbb{R}$, tomemos $r \in \mathbb{Q}$ tal que $r < x$, si $x \leq 0$, entonces $r < 0$, por la propiedades de la exponencial racional y del hecho que $a > 1$ se tiene que $a^r < 1$, entonces 1 es cota superior de A_x, luego si $x > 0$, por propiedad arquimediana se tiene que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > x$, por tanto $r < n$, y de nuevo por propiedades de la exponencial racional se concluye que $a^r < a^n$, por tanto es cota superior de A_x

Como A_x siempre es no vacio y acotado superiormente se concluye que existe $Sup\, A_x$ para todo $x \in \mathbb{R}$

$\square$

Definición 2

Sea $a \in \mathbb{R}$ tal que $a > 1$, definimos $exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como:

$$exp_a(x) = Sup\, A_x$$

Proposición 3

Sea $exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, esta cumple que:

1. $exp_a\,(r) > 0 \; \forall r \in \mathbb{R}$
2. $exp_a(r)\, exp_a(s) = exp_a(r + s) \; \forall r, s \in \mathbb{R}$
3. $r, q \in \mathbb{R} \; r < q \implies exp_a(r) < exp_a(q)$

Demostración.

1) Directamente de la definición tenemos que $exp_a(x) \geq exp_a(r)$, para todo $r \in \mathbb{Q}$ tal que $r < x$, por propiedad de la exponencial racional se sigue que $exp_a(x) \geq exp_a(r) > 0$

2) Sean $x, y \in \mathbb{R}$, definimod los conjuntos $A_y\,A_x := \{a^{rs} : r \in A_x \; s \in A_y\}$, $A_{y+x} := \{a^r : r \in \mathbb{Q} \; y \; r < x+y\}$, tenemos que como tanto A_x y A_y cumplen los axiomas del supremo, entonces $A_x\,A_y$ también los cumplen, ademas de que $Sup\,A_x\,A_y = Sup\,A_x\,Sup\,A_y = exp_a(x)\,exp_a(y)$, por tanto bata demostrar que $A_y\,A_x = A_{x+y}$, para asegurar la propiedad:

$A_x\,A_y \subset A_{x+y}$

Tomemos $a^r \in A_x\,A_y$, tenemos entonces que existen $m, n \in \mathbb{Q}$ tal que $r = mn$ y $a^m \in A_y$ y $a^n \in A_x$, luego $m \leq y$ y $n \leq x$ por tanto $m + n \leq x + y$, ademas por propiedades de la exponencial racional se tiene que $a^r = a^{mn} = a^{m+n}$, por tanto $a^r \in A_{x+y}$

$A_{x+y} \subset A_x\,A_y$

Tomemos $r \in A_{x+y}$, entonces $r < x + y$, luego $x + y - r > 0$, por propiedad arquimediana $\exists\, n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < x + y - r$, por tanto $r < x + y - \frac{1}{n}$, luego aplicando la densidad de los racionales cosntruimos $m \in \mathbb{Q}$ tal que $x - \frac{1}{n} < m < x$, definimos $t = r - s$, por cerradura $t \in \mathbb{Q}$, ademas $r = t + s$, aplicando propiedades de la exponencial racional tenemos que $a^r = a^{t+s} = a^t\,a^s$, donde $s < x$ y

$$t = r - s < \left(x + y - \frac{1}{n}\right) - x + \frac{1}{n} = y$$

Tenemos que $a^s \in A_x$, $a^t \in A_y$, luego $a^r = a^s\,a^t \in A_x\,A_y$

De ambas contenciones se concluye que $A_x\,A_y = A_{x+y}$, se tiene que la propiedad **2)** es cierta

3) Aplicando la propiedad de densidad de los racionales construimos $r \in \mathbb{Q}$ tal que $x < r < y$, tenemos que $a^r \in A_x$ pero $a^r \notin A_y$, por tanto $a^x \leq a^r \leq a^y$, sin emabrgo usando de nuevo la densidad de los racionales construimos $s \in \mathbb{Q}$ tal que $r < s < y$, luego por propiedades de la exponencial racional necesariamente $a^x \leq a^r < a^s \leq a^y$, por tanto $a^x < a^y$, la propiedad **3)** es cierta

$\square$

Proposición 4

Sea $a \in \mathbb{R}$ tal que $a > 1$ y $B_x := \{a^x : x \in \mathbb{Q} \; y \; x < r\}$ con $x \in \mathbb{R}$, entonces se cumple que:

$$exp_a(x) = Inf\,B_x$$

Demostración.

Llamemos $\alpha = Sup\,A_x$ y $\beta = Inf\,B_x$, si $x \in \mathbb{Q}$ la igualdad es obvia si no tenemos que como $a > 0$, entonces la sucesión $(a^{\frac{1}{n}})_{n=1}^{\infty}$, converge a 1, por tanto aplicando la definición de convergencia tenemos que, sea $\frac{\epsilon_0}{\alpha} > 0$:

$$\exists\, K_0 \in \mathbb{N} : n \geq K_0 \implies |a^{\frac{1}{n}} - 1| < \frac{\epsilon_0}{\alpha}$$

Tomemos nx con $n \geq K_0$, tenemos que existe $z \in \mathbb{Z}$ tal que $z < nx < z + 1$, luego como $n > 0$ se sigue que $\frac{z}{n} < x < \frac{z+1}{n}$, por tanto:

$$a^{\frac{z+1}{n}} \in B_x \;\; a^{\frac{z}{n}} \in A_x$$

Por la definicón tenemos que $\beta \leq a^{\frac{z+1}{n}}$ y $a^{\frac{z}{n}} \leq \alpha \implies -\alpha \leq -a^{\frac{z}{n}}$, sumando ambas desigualdades y aplicando propiedades de la exponencial racional obtenemos que:

$$\beta - \alpha \leq a^{\frac{z}{n}}(a^{\frac{1}{n}} - 1) \implies 0 \leq |\beta - \alpha| \leq |a^{\frac{z}{n}}||a^{\frac{1}{n}} - 1| < \alpha\,\frac{\epsilon_0}{\alpha} = \epsilon_0$$

Como $\epsilon_0 > 0$ es arbitraria se concluye que necesariamente $|\beta - \alpha| = 0$ y por tanto $\beta = \alpha$

$\square$

Proposición 5

Sea $exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, esta es continua en todo punto de $\mathbb{R}$

Demostración.

1) Primero probaremos la continuidad en $x_0 = 0$, sabemos que las sucesiones $(a^{\frac{1}{n}})_{n=1}^{\infty}$ y $(a^{-\frac{1}{n}})_{n=1}^{\infty}$ convergen ambas a 1, por tanto sea ϵ_0 entonces $\exists\, K_0 \in \mathbb{N}$, tal que si $n \geq K_0$ se cumple que $|a^{\frac{1}{n}} - 1| < \epsilon_0$ y $\exists\, K_1 \in \mathbb{N}$, tal que si $n \geq K_1$ cumple que $|a^{-\frac{1}{n}} - 1| < \epsilon_0$, tomamos $\delta := min\{\frac{1}{K_0}, -\frac{1}{K_1}\}$, tenemos que si $|x| < \delta$, se tiene que:

$$-\frac{1}{K_1} < x < \frac{1}{K_0}$$

Por las propiedades de la exponencial real se sigue que:

$$a^{-\frac{1}{K_1}} < a^x < a^{\frac{1}{K_0}} \implies a^{-\frac{1}{K_1}} - 1 < a^x - 1 < a^{\frac{1}{K_0}} - 1 \implies -\epsilon_0 < a^{-\frac{1}{K_1}} - 1 < a^x - 1 < a^{\frac{1}{K_0}} - 1 < \epsilon_0 \implies |a^x - 1| < \epsilon$$

Por tanto hemos hemostrado que:

$$\lim_{x \to 0} exp_a(x) = exp_a(0) = 1$$

Sea $x \in \mathbb{R}$, podemos excribir $exp_a(x)$ de la siguiente manera:

$$exp_a(x) = exp_a(x_0)(exp_a(x - x_0) - 1) + \exp_a(x_0)$$

Aplicando teoremas de límites tenemos que:

$$\lim_{x\to x_0} exp_a(x) = exp_a(x_0)(\lim_{x\to x_0} exp_a(x-x_0)-1) + \exp_a(x_0) = exp_a(x_0)(1-1) + exp_a(x_0) = exp_a(x_0)$$

Por tanto la función exponencial es continua en todo $\mathbb{R}$

2) Por la proposición 4 se tiene que:

$$exp_a(x_0) = Sup\, A_x = Inf\, B_x$$

Sea $\epsilon > 0$. Por la definición de infimo y supremos, existen número racionales $r_1 < x < r_2$ tales que:

$$a^{x_0} - \epsilon < a^{r_1} < a^{x_0} < a^{r_2} < a^{x_0} + \epsilon_0$$

Sea $\delta := \{x_0 - r_1, r_2 - x_0\}$, claramente $\delta > 0$. Sea $x \in \mathbb{R}$ tal que $0 < |x - x_0| < \delta$, hay dos casos si $x < x_0$, entonces $r_1 < x < x_0$

$$a^{r_1} < a^x < a^{x_0} \implies a^{x_0} - \epsilon_0 < a^x \implies a^{x_0} - a^x < \epsilon_0$$

Si $x > x_0$ entonces $x_0 < x < r_2$; luego

$$a^{r_2} > a^x > a^{x_0} \implies a^{x_0} + \epsilon > a^x \implies a^x - a^{x_0} < \epsilon_0$$

En ambos $|a^x - a^{x_0}| < \epsilon_0$, por tanto la función exp_a es continua en todo su dominio

$\square$

Definición 3

Sea $a \in \mathbb{R}$ *tal que* $0 < a < 1$*, definimos* $exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *como:*

$$exp_a(x) = \frac{1}{exp_{\left(\frac{1}{a}\right)}(x)}$$

A su vez definimos $exp_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *de tal manera:*

$$exp_1(x) = 1$$

Proposición 6

Sea $a \in \mathbb{R}$ *tal que* $0 < a \leq 1$*, entonces* $exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, es continua*

Demostración.

Si $a = 1$, exp_1, es la función constante 1, por tanto esta es continua, si $0 < a < 1$, de la definición de exp_a se tiene que:

$$\lim_{x \to x_0} exp_a(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{exp_{\left(\frac{1}{a}\right)}(x)} = \frac{1}{\frac{1}{exp_a(x_0)}} = exp_a(x_0)$$

$\square$

3. Función Logaritmo

Teorema de la inversa continua

Sea $I \subset \mathbb{R}$ *un intervalo y sea* $f : I \to \mathbb{R}$ *estrictamente mónotona y continua en* I*. Entonces la función* g *inversa de* f *es estrictamente mónotona y continua*

Como $exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, donde $a \in \mathbb{R}^+$, es continua y monotona entonces existe exp_a^{-1}, la definimoc a continuación

Logaritmo

Definimos $log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *como:*

$$log_a = exp_a^{-1}$$

Por el teorema de la inversa continua tenemos que $log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *es continua*