

Problema 5

Elías López Rivera ¹

¹ Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias.

7 de julio de 2025

1. Enunciado

Una función de \mathbb{R} a \mathbb{R} se dice *par* (*resp. impar*) si $f(-x) = f(x)$ (*resp.* $f(-x) = -f(x)$) para todo $x \in \mathbb{R}$. **Demuestre** que toda función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ puede escribirse como la suma de una función *par* y una función *impar*.

2. Solución

Tomemos f una función de \mathbb{R} a \mathbb{R} , definimos g, t de tal suerte que:

$$g(x) := \frac{f(x) - f(-x)}{2} \quad t(x) := \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Es claro que $(g + t)(x) = f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$

Luego veamos que:

$$g(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -g(x)$$

Por tanto g es una función *impar*

Ahora veamos que:

$$t(-x) = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = t(x)$$

Por tanto t es una función *par*