Punto Extra

Cardoso Vasquez Adolfo Angel
acardosov2400@ciencias.unam.mx

Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autonoma de Mexico

Problema. 1:

Demuestre que $\forall \{k, n\} \subseteq \mathbb{N} \quad k < n$.

$$\binom{n}{k} = \left[(n+1)\int_0^1 x^k(1-x)^{n-k}\,dx\right]^{-1}$$

Demostración.

Sea $\{k, n\} \subseteq \mathbb{N}$ tal que $k < n$.

Veamos que $\forall m \in \mathbb{N}$ se cumple que:

$$\int_0^{u_m}\int_0^{u_{m-1}}\cdots\int_0^{u_1} t^k\,dt\,du_1\cdots du_{m-1}\,du_m = \frac{k!}{(k+m)!}{u_m}^{k+m}.$$

Procedemos por inducción en m.

Se cumple para $m = 1$:

$$\begin{aligned}\int_0^{u_1} t^k\,dt &= \frac{u_1^{k+1}}{k+1}\\ &= \frac{k!}{(k+1)!}{u_1}^{k+1}\end{aligned}$$

Supongamos que se cumple para $m \in \mathbb{N}$, y demostremos que se cumple para $m+1$.
Entonces:

$$\begin{aligned}\int_0^{u_{m+1}}\int_0^{u_m}\cdots\int_0^{u_1} t^k\,dt\,du_1\cdots du_m\,du_{m+1} &= \int_0^{u_{m+1}}\frac{k!}{(k+m)!}{u_m}^{k+m}\,du_{m+1}\\ &= \frac{k!}{(k+m)!}\frac{u_{m+1}^{k+m+1}}{k+m+1}\\ &= \frac{k!}{(k+m+1)!}{u_{m+1}}^{k+m+1}.\end{aligned}$$

Por tanto se cumple para $m+1$. Por tanto $\forall m \in \mathbb{N}$

$$\int_0^{u_m}\int_0^{u_{m-1}}\cdots\int_0^{u_1} t^k\,dt\,du_1\cdots du_{m-1}\,du_m = \frac{k!}{(k+m)!}{u_m}^{k+m}$$

Ahora por un problema anterior sabemos que $\forall n \in \mathbb{N}$ se cumple que:

$$\int_0^x \frac{f(u)(x-u)^n}{n!}\, dx = \int_0^x \int_0^{u_n} \cdots \int_0^{u_1} f(t)\, dt\, du_1 \cdots du_n$$

Por tanto si tomamos $f(u) = u^k$ y $x = 1$, como $n - k \in \mathbb{N}$ entonces se cumple que:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{u^k(1-u)^{n-k}}{(n-k)!}\, du &= \int_0^1 \int_0^{u_{n-k}} \cdots \int_0^{u_1} t^k\, dt\, du_1 \cdots du_n \\
&= \int_0^1 \frac{k!}{(k+n-k)!} {u_{n-k}}^{k+n-k}\, du \\
&= \frac{k!}{n!} \int_0^1 u_{n-k}^n\, du_{n-k} \\
&= \frac{k!}{n!} \frac{1}{n+1}
\end{aligned}$$

Dea modo que:

$$(n+1)\int_0^1 u^k(1-u)^{n-k}\, du = \frac{(n-k)!k!}{n!} = \binom{n}{k}^{-1}$$

Por lo tanto:

$$\binom{n}{k} = \left[(n+1)\int_0^1 x^k(1-x)^{n-k}\, dx\right]^{-1}$$

$\square$