Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias

Geometria Moderna

Problema de bitácora 5

Elías López Rivera[1] Héctor Santiago González Baltierra [2]
{[1] `elias.lopezr`, [2] `hectorgb`}`@ciencias.unam.mx`

Fecha: 20/10/2024

Triángulos isósceles

Se tiene un cuadrado $ABCD$. Si sobre el lado DA se construye su punto medio E, luego se traza el segmento BE y se considera un punto F sobre ese segmento, ¿es posible que el triángulo construido con los vértices C, D y F sea un triángulo isósceles? En caso afirmativo, ¿qué característica tiene el punto F que permite formar un triángulo isósceles? Formula una conjetura y la proposición correspondiente. Luego formula dos argumentaciones distintas que validen tu conjetura

S.1 Comprensión del problema y formulación de una conjetura

Lo primero que hiciomos fue un simulador en GeoGebra, trazamos el cuadrado $ABCD$ con la herramienta polígono regular, posteiormente bisecamos el lado AD con el punto G, con la técnica vista en clase, posteriormente trazamos en segmento $\overline{BG}$ y un punto H movil sobre este segmento, usando la herramienta polígono trazamos el triángulo $\Delta\, DHC$, finalmente medimos cada uno de sus lados con la herramienta distancia de GeoGebra.

Simulador

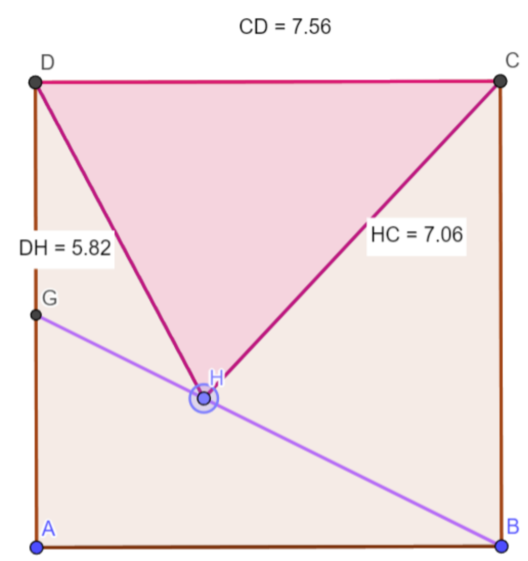

Figura 1: Construcción

Despues de muchas configuraciones, encontramos al menos 4 puntos que nos aseguran la existencia de los triángulo isósceles buscados, naturalmente al ver la diversidad de ideas que se generaron a través de la explocarión del problema, optamos por tomar caminos diferentes para justificar nuestras conjeturas.

Por mi lado, busque trabajar con el aparente hecho de que uno de los triángulos isósceles generados tenia un lado perpéndicular al segmento BE, y pense que a través de este hecho podrian generarse los otros puntos.

Mientras que mi compánero Hector, prefirio ingeniarselas a partir de la idea de construir los triángulos con el algoritmo Euclideo, es decir, prefirio abordar los diferentes casos, individualmente y posteriormente justificar porque esos 4 puntos existen.

Asi que nuestra conjetura principal era la existencia de esos 4 puntos, yo adicionalmente proponia que alguno de ellos debia encontrase donde se interseca la perpéndicular a BE que pasa por A con BE, mientras que hector buscaba demostrar que se una circunferencia $c1$ con centro en C y radio CD el segmento BE no resultaba ser tangente a esta.

S.2 Elaboración de una estrategia de resolución y justificación del problema

Lo primero que busque resolver era el como iba lograr construir los puntos a partir de mi conjetura inicial, despues note que el triángulo isósceles que tenia un lado perpéndicular me daba una herramienta muy poderosa para al menos construir los dos siguientes, esta herramienta era el hecho de tener una perpéndicular que pasara por un vertice del cuadrado, pues si queria obtener triángulos isósceles cuyo lado desigual no fuera el segmento CD, debía contruir puntos F tal que el segmento F A midiera lo mismo que CD, pues este era fijo, es ahi cuando se me ocurrio usar el teorema de la bisectríz, pues ya tenía una perpéndicular a BE que pasaba por un vertice del cuadrado, por tanto me bastaba con acortar el segmento BE, para forzar a esta perpeéndicular a ser bisectriz, y asi obetner un punto F con la característica deseada, y forzar a esta recta a ser mediatriz no era dificíl de imaginar pues solo necesitaba una circunferencia con centro en uno de mis puntos F y de radio CB, a su vez me di cuenta que por construcción esta circunferencia ya me daba un triángulo más, el caso trivial, cuando mi punto F era el punto B, por lo que habia construido 2 triángulos m´as a partir de mi suposición inicial, asi que mi unico problema era justificar de forma contudente porque ese triángulo resultaba tener un lado perpéndicular al segmento BE, este trabajo no es complicado ya que basta con notar la presencia de un cuadrilatero cíclico, y una congruencia entre dos triángulos.

Mientras que Hector, desarrollo su idea en torno a la no tangencialidad de BE sobre la circunferencia $c1$, para esto le basto notar que en caso de que esta cumpliera ser tangente el ángulo $\measuredangle CBE = \frac{\pi}{2}$, lo cual resulta en una clara contradiccíon, apartir de esto se obtiene casi por añadidura la existencia de dos de los puntos.

Sin embargo ambos llegamos a la misma construcci´on para el caso en que DC sea el lado desigual, pues ambos pensamos en trazar la perpéndicular al segmento desde su punto medio y tomar el punto en que esta se interseca al segmente BE

S.3 Resolución del problema

Conjetura

Sea la construcción sobre el cuadrado $ABCD$ descrita anteriormente, trazamos la perpéndiculare s a BE desde C, el punto donde BE y s se intersecan lo llamamos F_2, trazamos el punto l el cual biseca el segmento DC, y trazamos la recta perpéndicular a al segmento DC por l, llamamos F_1 al punto donde DC y a se intersecan, finalmente trazamos la circunferencia $c1$ con centro en F_2 y radio F_2B, al segundo punto donde c_1 interseca al segmento BE, lo llamamos F_4, fianlmente renombramos a B como F_3, afirmamos que los triángulos ΔDF_1C, ΔDF_2C, ΔDF_3C, ΔDF_4C, son todos isósceles

Solución 1

Construcción conjetura

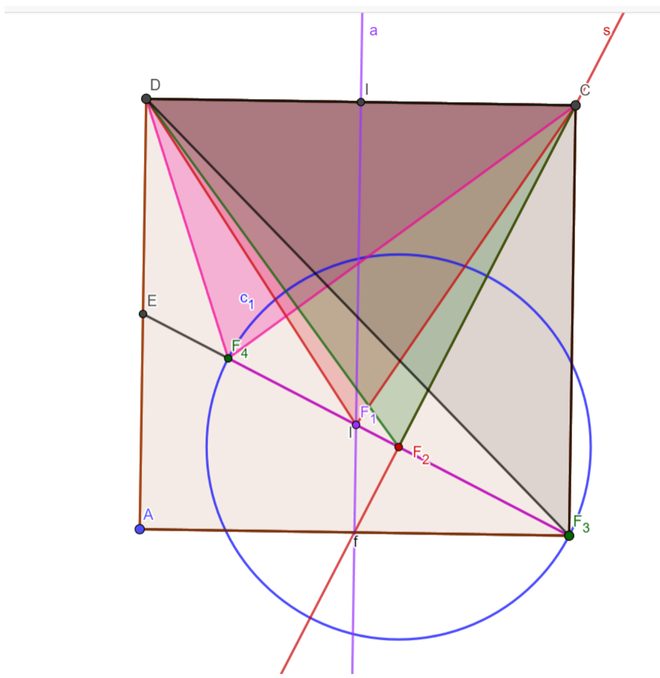

Figura 2: Construcción

Demostración.

i) Demostraremos primero que el tri´angulo $\Delta\, DF_3C$ es isósceles, trazamos el cuadrilatero DF_3C y el segmento EC:

Construcción caso I

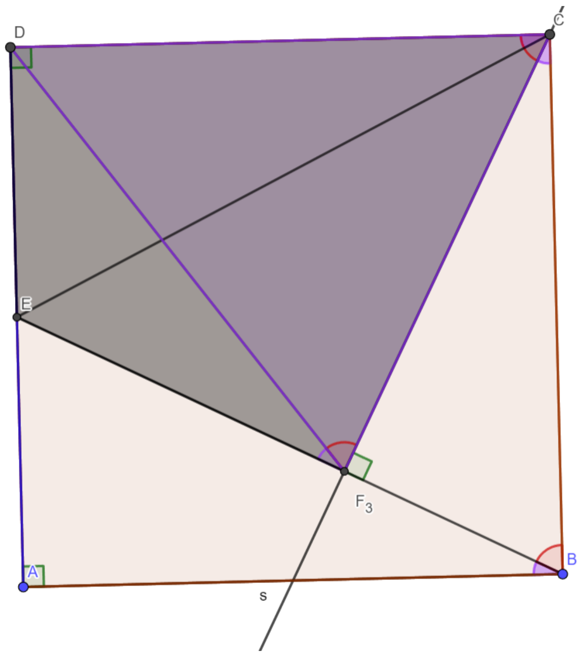

Figura 3: Construcción

Por construcción tenemos que $\measuredangle CBE + \measuredangle EBA = \frac{\pi}{2}$, luego igualmente tenemos que $\measuredangle BF_3C = \frac{\pi}{2}$, como $\measuredangle BF_3C$, $\measuredangle CBE$ Y $\measuredangle F_3CB$, son ángulos internos del triángulo $\Delta\, BF_3C$ entonces $\measuredangle F_3CB + \measuredangle CBE = \frac{\pi}{2}$, como también tenemos que $\measuredangle F_3CB + \measuredangle DCF_3 = \frac{\pi}{2}$, por tanto:

$$\measuredangle DCF_3 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + \measuredangle CBE = \measuredangle CBE$$

Luego tenemos que $CD = BA$, luego $AE = ED$ Y $\measuredangle EDC = \measuredangle BAE = \frac{\pi}{2}$, por criterio lado-ángulo-lado, se sigue que $\Delta\, EAB \cong \Delta\, EDC$, por tanto $\measuredangle DCE = \measuredangle EBA$

Por construcción tenemos que $\measuredangle EDC + \measuredangle CF_3E = \pi$, y ambos son ángulos opuestos del cuadrilatero DEF_3C, se tiene que este es cíclico, luego $\measuredangle DCE = \measuredangle DF_3E$ y también $\measuredangle DF_3E + \measuredangle CF_3D = \frac{\pi}{2}$ por tanto:

$$\frac{\pi}{2} - \measuredangle DCF_3 = \frac{\pi}{2} - \measuredangle CBE = \measuredangle EBA = \measuredangle DCE = \frac{\pi}{2} - \measuredangle CF_3D \implies \measuredangle CF_3D = \measuredangle DCF_3$$

Por tanto $\Delta\, DF_3C$ es isósceles.

ii) Demostraremos que $\Delta\, DF_4C$ y $\Delta\, DF_3C$ son isósceles

Construcción caso II

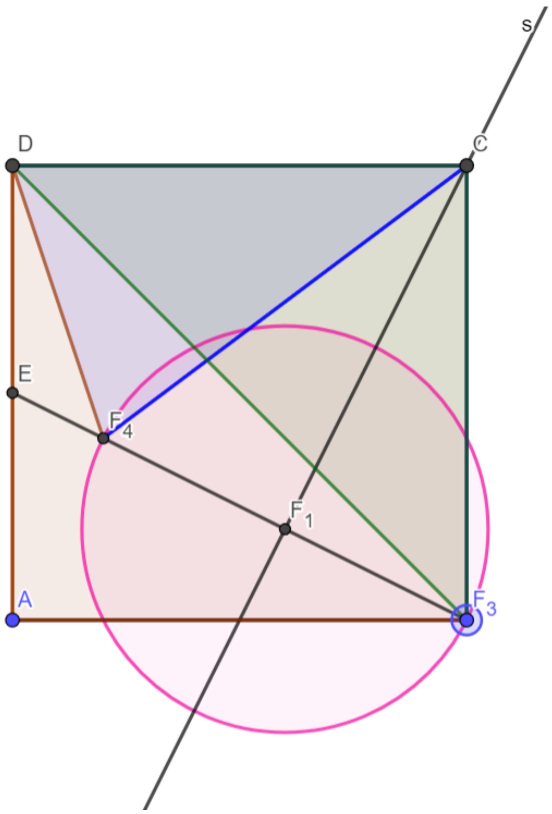

Figura 4: Construcción

Como CD y CF_3 son lados del cuadrado $ABCD$, entonces $CD = CF_3$, por tanto el triángulo $\Delta\, DF_3C$, luego tenemos que como F_4 es punto de la círcunferencias C_1, se sigue que $F_4F_1 = F_1F_3$, se sigue que m es la bisectriz de F_4F_3 por teorema de la bisectriz se tiene que $F_4C = CF_3 =$ CD, por tanto $\Delta\, DF_4C$ es isósceles.

iii) Demostraremos que $\Delta\, DF_1C$ es isósceles:

Construcción caso III

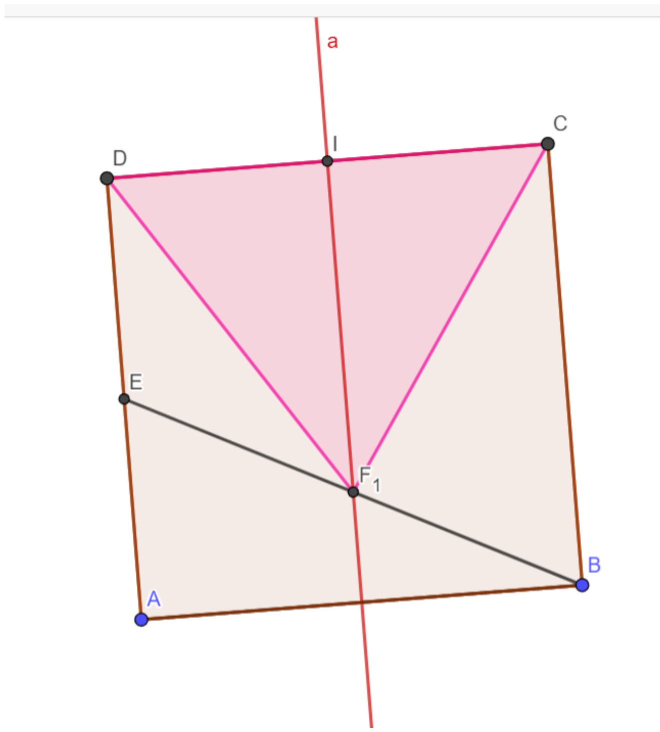

Figura 5: Construcción

Como n es bisectriz del segmento CD, entonces por teorema de la bisectrız $DF_1 = F_1C$, por tanto $\Delta\, DF_1C$ es isósceles. $\square$

Solución 2

Construcción solución 2

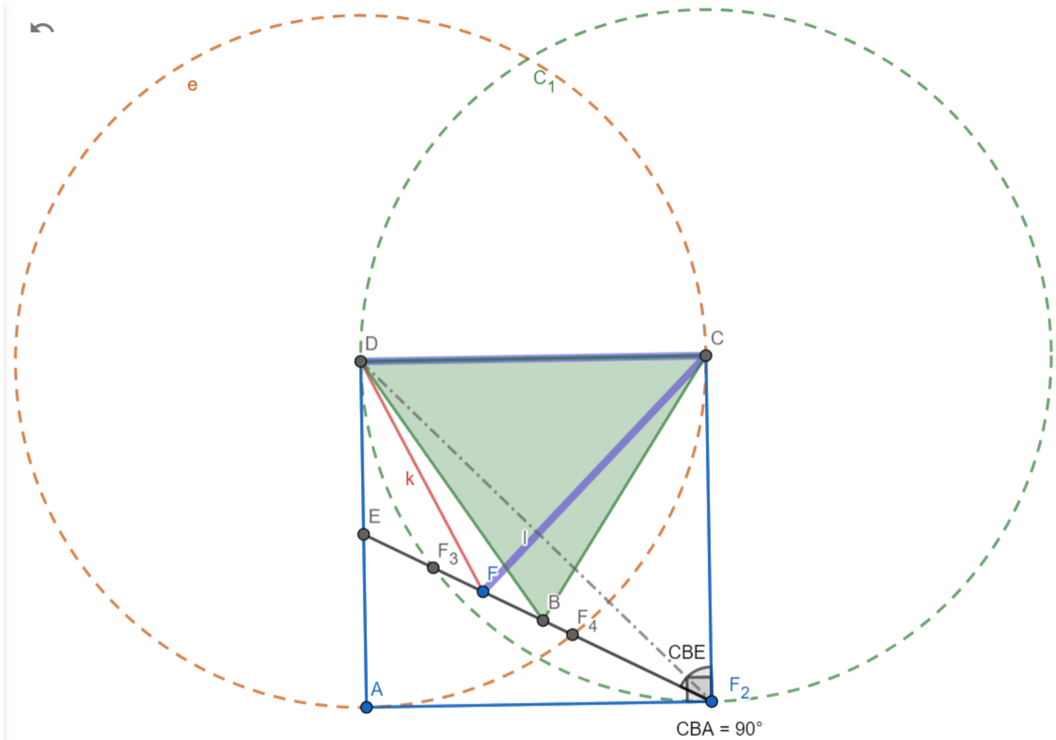

Figura 6: Construcción

Demostración.

Se traza un cuadrilátero $ABCD$ y el punto medio de DC llamado E, luego se traza el segmento EB y un punto F arbitrario en EB, queremos encontrar todos los puntos F tales que el triángulo ΔCDF sea isósceles.

Sé puede afirmar que la recta EB no es tangente a la circunferencia ya que si lo fuera el ángulo $\measuredangle CBE = \frac{\pi}{2}$, pero $\measuredangle CBA = \frac{\pi}{2}$, lo que implicaria que A, E y B son colineales lo cual es falso por construcción ya que E es punto medio de DA. Y también es necesario notar que el ángulo $\measuredangle CBA$, sería mayor a $\frac{\pi}{2}$ lo que haría que el cuadrado dejara de ser cuadrado.

Como sabemos el ángulo $\measuredangle CBE$ es menor a $\frac{\pi}{2}$, debe cortar dos veces a la circunferencía ya que una recta corta a una circunferencía a lo más en dos puntos; una vez en el punto B ya que la distancia $CB = CD$ y otro en algún punto en EB, la intersección de C_1 y EB se nombrará F_3 y B se nombrará F_2

Para encontrar el último punto se supone que FC es el lado desigual, entonces $CD = DF$, se traza una circunferencía C_2 desde D a C, los puntos F deberían ser los puntos que corten a EB

La circunferencía tiene centro en D y pasa por D, C y A, ya que $CD = DA$, al ser E punto medio de DA, el punto E está dentro de la circunferencía y al ser EB el lado contrario y por teorema de Pitágoras $DB > DC = DA$, la circunferencía C_2 entonces se marca F_4 como la intersección C_2 y EB

Los puntos entonces van a ser F_1, F_2, F_3, F_4.

Se puede afirmar que el triángulo no puede ser equílatero ya que la intersección C_1y C_2 se encuentran fuera de la recta EB.

□

S.4 Extensión del problema

Construimos los puntos I que biseca DC, N que biseca a CF_3, y O que biseca en AF_3, haciendo una construcción en GeoGebra podemos notar que podemos representar los puntos F_1 y F_2 como los puntos donde se intersecan los segmentos AN, EF_3, y OC, EF_3, respectivamente, esto se pude ver a través de nuestra construcción en GeoGebra:

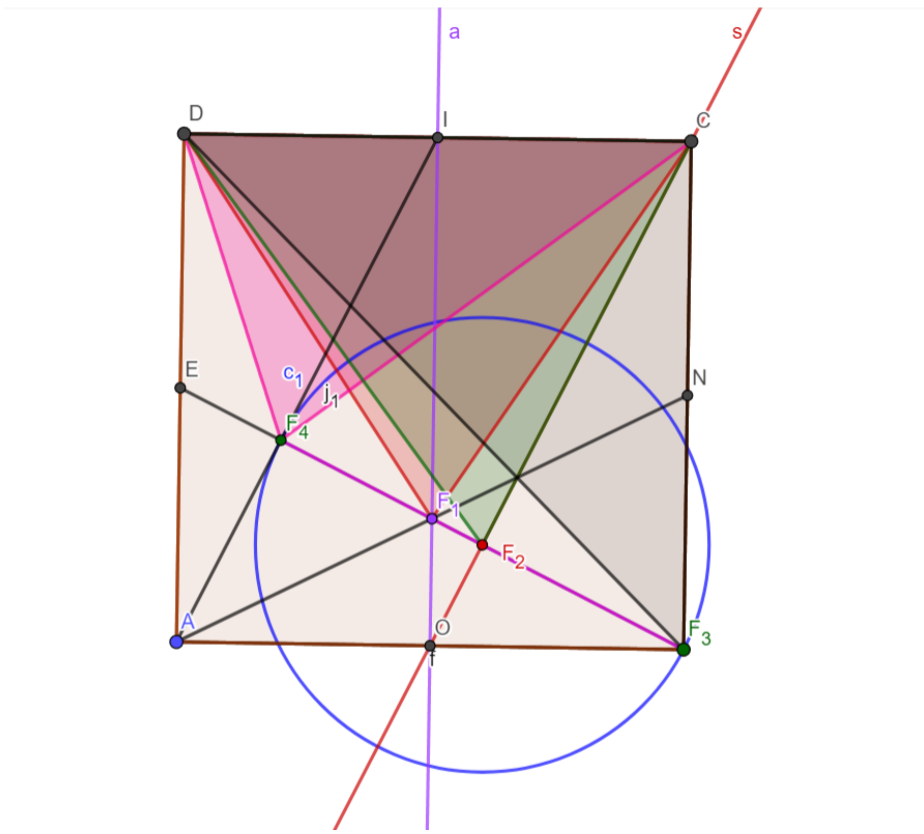

Figura 7: Construcción

En el caso de F_4 caracterizado como la intersección de AN y EF_3, podemos notar que los triángulos $\Delta\, DEF_3 \cong \Delta\, CNF_3$, asi quedaria demostrado que $DF_3 = CF_3$, para el caso de F_2 basta con demostrar que los segmentos OC y EF_3, resultan perpéndiculares, despues la demosytración seria análoga a la mostrada en la solución 1.