Cálculo Diferencial e Integral II

Métodos de integración

23 de marzo de 2020

La clase anterior nos familiarizamos con el Teorema de Cambio Variable así como con la Sustitución Inversa para integrales definidas. Previamente ya habíamos trabajado con cambios de variable para integrales indefinidas pero ahora que tenemos a nuestra disposición la sustitución inversa, vale la pena aplicar esta técnica para el cálculo de integrales indefinidas.

Pongamos un poco de contexto para desarrollar el método. La sustitución inversa establece que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(u))\,g'(u)\,du$$

en donde $g : [c,d] \to [a,b]$ debe ser una función de clase C^1 en $[c,d]$, biyectiva y cuya derivada nunca es cero y $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ debe ser una función continua.

¿Cómo trasladamos la igualdad al lenguaje de las integrales indefinidas?

El escenario inicial en el que nos debemos poner es que queremos calcular $\int f(x)\,dx$. Una vez más, la estrategia es tratar de transformar esta integral en una nueva integral indefinida con la esperanza de que su cálculo resulte más sencillo que la original. La igualdad de la sustitución inversa sugiere que lo que debemos hacer es buscar una sustitución de la forma

$$x = g(u)$$

es decir, poner a x en función de una nueva variable u en lugar de definir a u en función de x como tradicionalmente lo veníamos trabajando. Con esta sustitución podemos decir que

$$dx = g'(u)\,du$$

Realizando el cambio en la integral obtenemos

$$\int f(x)\,dx = \int f(g(u))\,g'(u)\,du$$

y ahora nuestro trabajo consistirá en resolver la integral $\int f(g(u))\,g'(u)\,du$. Una vez resuelta, no debemos olvidar regresar a la variable inicial o nuestro resultado final no será correcto.

Nota 1 *Un detalle imprescindible es que para que este método sea aplicable, es necesario que la función $g(u)$ sea invertible y tenga inversa derivable en al menos un intervalo (a,b), por pequeño que éste pudiera ser. De esta manera nos mantenos congruentes con las condiciones de la sustitución inversa.*

Veamos un ejemplo para ir adaptándonos a este método.

Ejemplo 2 *Calcular*

$$\int \frac{\operatorname{arccsc}\left(1/\sqrt{1-x^2}\right)\log\left(\operatorname{arcsen}\left(\sqrt{1-x^2}\right)\right)}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

La expresión no podría ser más escandalosa, sin embargo, es importante no dejarnos intimidar por ello. Si analizamos con cuidado, podremos deducir un cambio de variable adecuado. La presencia de los términos $1-x^2$ dentro del integrando hacen que un cambio trigonométrico luzca prometedor. Tradicionalmente la expresión $1-x^2$ nos lleva a proponer

$$x = \operatorname{sen}(u)$$

La razón es, porque al hacer la sustitución obtenemos una buena simplificación:

$$1 - x^2 = 1 - \operatorname{sen}^2(u) = \cos^2(u)$$

Ahora bien, resulta que en nuestro problema este cambio no es tan adecuado. Si continuamos con la sustitución y ahora nos paramos en la expresión $\operatorname{arcsen}\left(\sqrt{1-x^2}\right)$*, obtenemos que*

$$\operatorname{arcsen}\left(\sqrt{1-x^2}\right) = \operatorname{arcsen}\left(\sqrt{\cos^2(u)}\right) = \operatorname{arcsen}(\cos(u))$$

Y aquí la cosa en apariencia sigue estando fea con respecto al integrando original, porque el $\operatorname{arcsen}(\cos(u))$ *no es una expresión que pareciera que podamos seguir simplificando a algo más amigable. Sin embargo, podemos apreciar que habría sido fantástico que en lugar de obtener* $\operatorname{arcsen}(\cos(u))$*, hubiéramos obtenido* $\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}(u))$*. Afortunadamente sí es algo que podemos lograr, sólo necesitamos regresar a la identidad trigonométrica*

$$1 - \operatorname{sen}^2(u) = \cos^2(u)$$

y notar que es equivalente a

$$1 - \cos^2(u) = \operatorname{sen}^2(u)$$

Y por lo tanto, el verdadero cambio de variable que vamos a aplicar es

$$x = \cos(u)$$

Con el nuevo cambio conseguimos que

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\cos^2(u)} = \sqrt{\operatorname{sen}^2(u)} = \operatorname{sen}(u)$$

De manera que

$$\operatorname{arcsen}\left(\sqrt{1-x^2}\right) = \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}(u)) = u$$

Así mismo

$$\operatorname{arccsc}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \operatorname{arccsc}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}(u)}\right) = \operatorname{arccsc}(\csc(u)) = u$$

Finalmente no nos olvidemos que

$$dx = -\operatorname{sen}(u)\,du$$

Realizando todas las sustituciones dentro de la integral nos queda

$$\int \frac{\operatorname{arccsc}\left(1/\sqrt{1-x^2}\right)\log\left(\operatorname{arcsen}\left(\sqrt{1-x^2}\right)\right)}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{u\log(u)}{\operatorname{sen}(u)}(-\operatorname{sen}(u))\,du = -\int u\log(u)\,du$$

Como podemos apreciar, la simplificación ha sido drástica y hemos aterrizado en una nueva integral que ya no luce tan intimidante. Esta integral no necesita de un cambio de variable para ser resuelta. Ésta hay que resolverla mediante integración por partes.

Recordemos la fórmula de la integración por partes:

$$\int f'(u)\,g(u)\,du = \left(f(u)\,g(u) - \int f(u)\,g'(u)\,dx\right) + C$$

Para nuestro ejemplo proponemos $f'(u) = u$ *y* $g(u) = \log(u)$*. De manera que* $f(u) = \frac{1}{2}u^2$ *y* $g'(u) = \frac{1}{u}$*. Sustituyendo en la fórmula:*

$$\int u\log(u)\,du = \left(\frac{1}{2}u^2\log(u) - \frac{1}{2}\int udu\right) + C = \frac{1}{2}u^2\log(u) - \frac{1}{4}u^2 + C$$

De donde

$$\int \frac{\operatorname{arccsc}\left(1/\sqrt{1-x^2}\right)\log\left(\operatorname{arcsen}\left(\sqrt{1-x^2}\right)\right)}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\int u\log(u)\,du = \frac{1}{4}u^2 - \frac{1}{2}u^2\log(u) + C$$

(¿Por qué pusimos $+C$ y no $-C$ en el resultado?)
Nuestro último paso ahora es regresar a la variable original. Como $x = \cos(u)$*, entonces* $u = \arccos(x)$*. En consecuencia*

$$\int \frac{\operatorname{arccsc}\left(1/\sqrt{1-x^2}\right)\log\left(\operatorname{arcsen}\left(\sqrt{1-x^2}\right)\right)}{\sqrt{1-x^2}}dx$$
$$= \frac{1}{4}(\arccos(x))^2 - \frac{1}{2}(\arccos(x))^2\log(\arccos(x)) + C.$$

Un buen ejercicio ahora es derivar el resultado que se obtuvo en el Ejemplo 2 y corroborar que se llega al integrando. Por supuesto, esto queda de tarea moral para el que tenga la paciencia de hacerlo (si se van animar, en algún momento la identidad $\arccos(x) = \operatorname{arcsen}\left(\sqrt{1-x^2}\right)$ puede ser de utilidad).

En el Ejemplo 2, cuando llegamos a la expresión $\operatorname{arcsen}(\cos(u))$ decidimos cambiar de estrategia porque dimos a entender que no había más futuro por este camino, pero en honor a la verdad, hay que decir que esto no es cierto (¡perdón!).

La clase pasada dimos una pequeña lista de identidades trigonométricas que nos pueden ayudar en estos problemas. Ahora vamos a aumentar esa lista con un par identidades más que también son de utilidad

$$\cos(x) = \operatorname{sen}\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\operatorname{sen}(x) = \cos\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right)$$

Si en particular hubiéramos utilizado la primera, habríamos llegado a

$$\operatorname{arcsen}(\cos(u)) = \operatorname{arcsen}\left(\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - u\right)\right) = \frac{\pi}{2} - u$$

por lo que la integral ¡sí tenía futuro por ese camino!

(*Queda como ejercicio resolver el ejemplo con la sustitución inicial* $x = \operatorname{sen}(u)$ *y comparen su respuesta con la obtenida aquí*).

La razón por la que elegimos cambiar de camino es para exhibir que las integrales en donde aparece la expresión $1 - x^2$ y que admiten una sustitución $x = \operatorname{sen}(u)$, también son integrales que admiten una sustitución $x = \cos(u)$. Y consideramos que es más sencillo recordar este hecho que recordar la identidad $\cos(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

Observación importante: Para el lector cuidadoso, hay un detalle dentro del Ejemplo 2 que debería saltar a la vista. Y éste es el paso cuando declaramos que

$$\sqrt{\operatorname{sen}^2(u)} = \operatorname{sen}(u)$$

Siendo rigurosos deberíamos exigir que $\sqrt{\operatorname{sen}^2(u)} = |\operatorname{sen}(u)|$. Si en general lleváramos a cabo este paso con toda formalidad, las integrales indefinidas cobrarían una mayor dificultad y en muchas ocasiones no nos quedaría de otra más que realizar un odioso análisis de casos.

En la práctica solemos tomarnos estas libertades porque el objetivo final de estos problemas es el de darnos un entrenamiento para dominar las técnicas de integración a fin de que, cuando tengamos que enfrentarnos a problemas "más concretos" lleguemos bien armardos.

Para no romper con este espíritu, vamos a realizar un acuerdo efectivo únicamente para los ejercicios en donde haya que calcular una integral indefinida.

Convención: Siempre que se nos pida, "Calcular la integral $\int f(x)\,dx$", vamos a entender, "encuentre una primitiva de f **en algún dominio adecuado de su preferencia**".

Con esta convención podemos llegar al acuerdo adicional de, usar en general que

$$\sqrt{g^2(x)} = g(x)$$

sin necesidad de preocuparnos por cargar $|g|$. Insisto, el acuerdo sólo es válido para el cálculo de integrales indefinidas.

Recalcando: Si en nuestro problema sí se nos está dando la información sobre dónde queremos que estén definidas las primitivas, entonces sí debemos actuar con cuidado. Esto en particular ocurre cuando queremos calcular integrales definidas. Vale la pena que vuelvan a revisar los ejemplos de la clase anterior para que noten que sí hemos tenido ese cuidado.

Aclarado lo anterior, vamos a continuar con más ejemplos y haremos uso de nuestra convención sin mayores preocupaciones.

Ejemplo 3 *Para $n > 2$, calcular*

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^n - x^2}} dx.$$

Como es de esperarse, generalmente nos toparemos con integrales en donde no es tan inmediato identificar algún cambio de variable adecuado. Muchas veces tendremos que hacer ciertas manipulaciones técnicas antes de lanzarnos a introducir un cambio de variable. Este es un ejemplo de ello. En este caso podemos realizar lo siguiente

$$\frac{1}{\sqrt{x^n - x^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2\left(x^{n-2} - 1\right)}} = \frac{1}{x\sqrt{x^{n-2} - 1}}$$

Ahora bien, analizando la expresión podemos coincidir en que lo que más estorba es la presencia de la raíz cuadrada. Afortunadamente esa raíz puede funcionar como nuestro punto de inspiración para proponer un cambio de variable. Si lo que queremos es deshacernos de la raíz, entonces valdría la pena pensar que todo lo que tenemos dentro ella se puede expresar como un número al cuadrado. Es decir, podemos proponer

$$u^2 = x^{n-2} - 1$$

Equivalentemente

$$u = \sqrt{x^{n-2} - 1}$$

y este será nuestro cambio de variable.

Para hallar dx en términos de du, conviene retomar la igualdad $u^2 = x^{n-2} - 1$ y derivar desde aquí:

$$2udu = (n-2)\, x^{n-3} dx$$

Para continuar hay que echar algo de ingenio. Dado que $u^2 = x^{n-2} - 1$, entonces $x^{n-2} = u^2 + 1$. Si lo sustituimos en las derivadas, obtenemos

$$2udu = (n-2)\, x^{n-3} dx = (n-2)\, x^{n-2} \left(\frac{1}{x}\right) dx = (n-2)\left(u^2 + 1\right)\left(\frac{1}{x}\right) dx$$

y de esta forma llegamos a que

$$\frac{1}{x} dx = \frac{2u}{(n-2)\left(u^2 + 1\right)} du$$

Esto es importante porque después de las manipulaciones iniciales que le hicimos a nuestro integrando, aparece precisamente la expresión $\frac{1}{x} dx$.
Aplicando el cambio de variable tenemos

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^n - x^2}} dx = \int \frac{1}{x\sqrt{x^{n-2} - 1}} dx = \int \frac{1}{u}\left(\frac{2u}{(n-2)\left(u^2 + 1\right)}\right) du$$

$$= \frac{2}{n-2} \int \frac{1}{u^2 + 1} du = \frac{2}{n-2} \arctan(u) + C$$

Finalmente regresamos a la variable original y tenemos

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^n - x^2}} dx = \frac{2}{n-2} \arctan\left(\sqrt{x^{n-2} - 1}\right) + C.$$

Este ejemplo, no tan complicado, nos da la oportunidad de reafirmar lo importante de nuestra convención previa. La primitiva que hemos encontrado no es una primitiva de $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^n - x^2}}$ en cualquier dominio, es una primitiva válida únicamente si estamos parados en $(1, \infty)$. Para convencernos con más cuidado de esto, analicemos con detalle los posibles dominios de f (éstos dependen de la paridad de n).

Está claro que en ningún caso el 0 y el 1 pertenecen al dominio. Para que un punto $x \in \mathbb{R}$ pertenezca al dominio de f es necesario que se cumpla que $x^n - x^2 > 0$.

Caso 1. Si n es un número impar, entonces la expresión $x^n - x^2$ siempre es negativa para $x < 0$. Por lo que estos puntos no pueden ser parte del dominio.

Dado que $2 < n$, entonces para $0 < x < 1$ se tiene que $x^n < x^2$ y por lo tanto $x^n - x^2 < 0$. En consecuencia estos puntos tampoco están en el dominio. En cambio, si $1 < x$, entonces $x^2 < x^n$ y por tanto estos puntos sí están en el dominio.

Con esto concluimos que $Dom(f) = (1, \infty)$.

Caso 2. Si n es un número par, entonces $n = 2k$. De modo que la condición $x^2 < x^{2k}$ implica que $1 < x^{2(k-1)}$ o equivalentemente $1 < \left(x^{k-1}\right)^2$. Sacando raíz cuadrada obtenemos que

$$1 < \left|x^{k-1}\right| \text{ es decir, } 1 < |x|^{k-1}$$

y la última desigualdad es equivalente a $1 < |x|$.

Por lo tanto, en este caso $Dom(f) = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

Con la información anterior, ¿cómo concluimos que $F(x) = \frac{2}{n-2} \arctan\left(\sqrt{x^{n-2} - 1}\right)$ sólo es primitiva de f en $(1, \infty)$? Bien, esto tiene que ver con uno de los pasos cruciales que hicimos en nuestro cálculo. Al inicio del ejemplo comenzamos manipulando el integrando y realizamos la siguiente operación:

$$\frac{1}{\sqrt{x^n - x^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2\left(x^{n-2} - 1\right)}} = \frac{1}{x\sqrt{x^{n-2} - 1}}$$

La última igualdad implícitamente usó que $x > 0$. Lo más riguroso sería haber hecho

$$\frac{1}{\sqrt{x^n - x^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2\left(x^{n-2} - 1\right)}} = \frac{1}{\sqrt{x^2}\sqrt{x^{n-2} - 1}} = \frac{1}{|x|\sqrt{x^{n-2} - 1}}$$

Al hacer uso de nuestra convención, simplemente nos quedamos parados en la parte positiva de nuestro dominio, es decir, $(1, \infty)$. Y por eso nuestra primitiva únicamente lo es si nos restringimos al dominio $(1, \infty)$.

Sólo para enfatizar, "calculemos" la siguiente integral

$$\int_{-2}^{-\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{x^4 - x^2}} dx$$

Aquí estamos trabajando con $n = 4$. Según la fórmula que obtuvimos en el Ejemplo 3,

$$F(x) = \frac{2}{4-2} \arctan\left(\sqrt{x^{4-2} - 1}\right) = \arctan\left(\sqrt{x^2 - 1}\right)$$

es una primitiva para $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^4 - x^2}}$. Si F en efecto fuera una primitiva de f en **todo** su dominio, entonces por el TFC2 debería ser cierto que

$$\int_{-2}^{-\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{x^4 - x^2}} dx = F\left(-\sqrt{2}\right) - F(-2) = \arctan(1) - \arctan\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{12} < 0$$

Pero este resultado es totalmente incongruente con el hecho de que f siempre es positiva y por lo tanto debería ocurrir que $\int_{-2}^{-\sqrt{2}} f > 0$. Así que hay que tener cuidado cuando los dominios son explícitos.

Otro detalle importante que hemos reflejado en el Ejemplo 3 es la libertad con la que nos hemos permitido manipular el resultado de la derivación para "despejar" dx. Aquí lo único que hay que recalcar es que podemos estar tranquilos con todas esas cuentas porque estamos respaldados en la parte teórica por el método de cambio de variable y la sustitución inversa.

Continuemos con los ejemplos. La clase anterior hablábamos de lo importante que es la práctica para poco a poco desarrollar la intuición que nos permita atacar las integrales eficientemente. También aconsejamos dar rienda suelta a la imaginación porque muchas veces eso es lo que se necesita para resolver algunas integrales. El ejemplo que veremos a continuación es uno de esos casos en donde por mucha intuición que tengamos, a veces no alcanza y hay que recurrir a cambios de variable que rayan en lo absurdo (producto de mucha imaginación).

Ejemplo 4 *Calcular*

$$\int \frac{x^2-1}{x^2+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} dx$$

(Antes de ver la solución, valdría mucho la pena que le inviertan un poco de tiempo a tratar de resolverla por su cuenta)
Hoja dejada intencionalmente en blanco para evitar un spoiler.

Ahora sí. Sin mayor motivación (porque realmente no la hay) vamos a proponer el siguiente cambio de variable

$$u = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

Aunque aquí estamos definiendo directamente una nueva variable u en términos de x, en realidad estamos en la presencia de una sustitución inversa. Y es que para poder efectuar el cambio de variable, vamos a necesitar conocer explícitamente quién es x en términos de u y de este modo poder sustituir ese valor en la expresión $\sqrt{1+x^4}$. Para ello simplemente despejamos x de nuestro cambio de variable

$$u = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \Longrightarrow u\left(x^2+1\right) = x^2 - 1 \Longrightarrow 1 + u = x^2\left(1-u\right)$$

$$\Longrightarrow x = \sqrt{\frac{1+u}{1-u}}$$

Ahora procedemos a calcular dx derivando directamente la igualdad anterior. Al derivar el lado derecho hay que hacerlo por regla de la cadena y notar que lo que está dentro de la raíz hay que derivarlo como un cociente.

$$dx = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1+u}{1-u}}}\left(\frac{1-u-(1+u)(-1)}{(1-u)^2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-u}{1+u}}\left(\frac{2}{(1-u)^2}\right) = \frac{1}{(1-u)^2}\sqrt{\frac{1-u}{1+u}}$$

Ya que tenemos todos los elementos procedemos a realizar las sustituciones y simplificaremos lo obtenido con mucha paciencia:

$$\int \frac{x^2-1}{x^2+1}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}dx = \int u\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^2}}\cdot\frac{1}{(1-u)^2}\sqrt{\frac{1-u}{1+u}}du$$

$$= \int \frac{u}{(1-u)^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{(1-u)^2}{(1-u)^2}+\frac{(1+u)^2}{(1-u)^2}}}\sqrt{\frac{1-u}{1+u}}du = \int \frac{u}{(1-u)^2}\cdot\frac{\sqrt{(1-u)^2}}{\sqrt{(1-u)^2+(1+u)^2}}\sqrt{\frac{1-u}{1+u}}du$$

$$= \int \frac{u}{(1-u)^2}\cdot\frac{1-u}{\sqrt{2+2u^2}}\cdot\frac{\sqrt{1-u}}{\sqrt{1+u}}du = \int \frac{u}{(1-u)}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1+u^2}}\cdot\frac{\sqrt{1-u}}{\sqrt{1+u}}du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{u}{\sqrt{1+u^2}\sqrt{1+u}}\cdot\frac{\sqrt{1-u}}{1-u}du = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{u}{\sqrt{1+u^2}\sqrt{1+u}\sqrt{1-u}}du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{u}{\sqrt{1+u^2}\sqrt{1-u^2}}du$$

Llegados a este punto quizá estamos tentados a juntar las dos raíces del denominador, pero dejémoslas así como están por ahora. La razón es porque aquí sí es posible intuir un nuevo cambio de variable. Podemos proponer

$$z = u^2 \text{ y } \frac{1}{2}dz = udu$$

Con este cambio ahora tenemos

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{u}{\sqrt{1+u^2}\sqrt{1-u^2}}du = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{\sqrt{1+z}\sqrt{1-z}}\left(\frac{1}{2}\right)dz = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}dz$$

Después de tanta talacha hemos llegado finalmente a una integral que nos es totalmente conocida

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}dz = \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arcsen}(z) + C$$

Como paso final debemos regresar a la variable x:

$$z = u^2 \wedge u = \frac{x^2-1}{x^2+1} \Longrightarrow z = \left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^2$$

Y por lo tanto

$$\int \frac{x^2-1}{x^2+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} dx = \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arcsen}\left(\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^2\right) + C.$$

Si se dieron a la tarea de calcular por su cuenta el Ejemplo 4 y trataron con los cambios de variable "naturales", habrán notado que ninguno arrojaba mucha luz sobre cómo continuar. Dependiendo el cambio de variable, las cosas se podían poner todavía peor (si encontraron el cambio que servía, les envío unas calurosas felicitaciones). Una vez que propusimos el cambio adecuado, la integral no es tan complicada (aunque sí talachuda), el punto es, ¿cómo damos con ese cambio si realmente no hay motivación detrás?

Qué hubiera pasado si en lugar de enunciarlo como ejemplo, lo hubiéramos propuesto como pregunta abierta: ¿Puede encontrar una primitiva de la siguiente función en términos de funciones elementales?

A lo mejor nuestra respuesta habría sido NO, no hay forma de encontrar una primitiva explícita porque ningún cambio de variable funciona e integrar por partes es simplemente una locura en este ejercicio.

Pues bueno, precisamente este es el mensaje del tan rebuscado ejemplo, de ninguna manera es para desmotivarlos, todo lo contrario, nos sirve para tener conciencia de la existencia de un problema general muy difícil de resolver:

¿Cómo saber que la integral que queremos calcular tiene una solución en términos de funciones elementales?

El problema es muy díficil porque no hay una regla que nos permita identificar a las funciones "indeseables", por llamarlas de algún modo. Lo que lo hace más difícil todavía es que en realidad este tipo de funciones abundan. Las siguientes tres integrales, son ejemplos tradicionales de funciones para las que no podemos dar una solución explícita:

$$\int e^{-x^2} dx \qquad \int \tfrac{\operatorname{sen}(x)}{x} dx \qquad \int \tfrac{\arctan(x)}{x} dx$$

Son populares porque su integrando es de lo más inocente y a pesar de ello, por más vueltas que le demos, no hay una forma de dar con una primitiva.

Ahora bien, esta situación derivó en la necesidad de contar con algún criterio que por lo menos permitiera identificar ciertas clases de funciones para las cuales tengamos la certeza de que siempre será posible hallar una primitiva explícita.

El próximo ejemplo nos va a dar un acercamiento a una de estas clases de funciones.

Ejemplo 5 *Para $b, c \in \mathbb{R}$ fijos, calcular*

$$\int \frac{1}{x^2+2bx+c} dx.$$

(La presencia del 2 es únicamente para aligerar las cuentas)
¿Cómo comenzamos a abordar esta integral? Vamos a iniciar por puntualizar que existen tres posibles casos que deberemos distinguir porque cada uno arrojará una solución distinta. Estos casos se desprenden de la naturaleza de la ecuación cuadrática $x^2+2bx+c=0$. Recordemos que una ecuación cuadrática podría o no tener solución en $\mathbb{R}$, esto depende del signo de su discriminante. El discriminante para esta ecuación está definido como

$$\Delta = 4b^2 - 4c$$

Sabemos que

1. *Si $\Delta = 0$, entonces la ecuación tiene una solución doble.*

2. *Si $\Delta > 0$, entonces la ecuación tendrá dos soluciones distintas.*

3. *Si $\Delta < 0$, entonces la ecuación no tiene solución en $\mathbb{R}$.*

Y estos son los tres casos posibles que debemos distinguir para solucionar lo que se nos pide. Dado que $\Delta = 4b^2 - 4c$, entonces el signo de Δ depende en realidad del signo de $b^2 - c$, así que vamos a enunciar nuestros casos en función de este dato.

Caso 1. *Supongamos que $b^2 - c = 0$.*

Apoyados de nuestra hipótesis vamos a sustituir $c = b^2$ en la expresión cuadrática:

$$x^2 + 2bx + c = x^2 + 2bx + b^2 = (x+b)^2$$

Por lo tanto la integral que se nos pide es

$$\int \frac{1}{x^2 + 2bx + c} dx = \int \frac{1}{(x+b)^2} dx = -\frac{1}{x+b} + C$$

Este era el caso fácil.

Caso 2. *Supongamos que $b^2 - c > 0$.*

Según nuestra hipótesis, la ecuación $x^2 + 2bx + c = 0$ debe tener dos soluciones distintas. Pero una manera equivalente de decir esto es que la expresión cuadrática puede factorizarse como el producto de factores lineales distintos, es decir, existen $s, t \in \mathbb{R}$, con $s \neq t$, tales que

$$x^2 + 2bx + c = (x-s)(x-t)$$

(Los números s y t en realidad no nos son desconocidos, los podemos obtener resolviendo la ecuación cuadrática y llegar a que $s = -b + \sqrt{b^2 - c}$ y $t = -b - \sqrt{b^2 - c}$)
De esta manera nuestra integral se transforma en

$$\int \frac{1}{x^2 + 2bx + c} dx = \int \frac{1}{(x-s)(x-t)} dx$$

Ahora, la estrategia para calcular la nueva integral es "descomponer nuestra fracción" como suma de otras dos fracciones en cuyos denominadores aparecerán $x - s$ y $x - t$ respectivamente. Es decir, vamos a tratar de encontrar dos números $A, B \in \mathbb{R}$ para los cuales se cumpla la siguiente igualdad

$$\frac{1}{(x-s)(x-t)} = \frac{A}{x-s} + \frac{B}{x-t}$$

Esto se puede lograr mediante algunos artificios tales como multiplicar por un 1 y sumar un 0 elegantes. Incluso se puede lograr con puro tanteo. Pero para no sacar las cosas mágicamente, veamos una deducción más natural. Tomemos la expresión del lado derecho y hagamos la suma de fracciones:

$$\frac{A}{x-s} + \frac{B}{x-t} = \frac{A(x-t) + B(x-s)}{(x-s)(x-t)}$$

De acuerdo con la igualdad a la que queremos llegar, debe ocurrir entonces que

$$\frac{A(x-t) + B(x-s)}{(x-s)(x-t)} = \frac{1}{(x-s)(x-t)}$$

y en consecuencia

$$A(x-t) + B(x-s) = 1$$

La igualdad $A(x-t) + B(x-s) = 1$ debe ser válida sin importar el valor de la x. Esto nos permite asignarle valores específicos a la x de tal manera que nos ayuden a deducir quién es A y quién es B. Analizando con cuidado la expresión notamos que evaluar en $x = s$ y $x = t$ nos da la solución:

$$x = s \Longrightarrow A(s-t) + B(s-s) = 1 \Longrightarrow A = \frac{1}{s-t}$$

$$x = t \Longrightarrow A\left(t-t\right) + B\left(t-s\right) = 1 \Longrightarrow B = \frac{1}{t-s} = -\frac{1}{s-t}$$

Con esto llegamos a que

$$\frac{1}{\left(x-s\right)\left(x-t\right)} = \frac{A}{x-s} + \frac{B}{x-t} = \frac{1}{s-t}\left(\frac{1}{x-s} - \frac{1}{x-t}\right)$$

Y ahora sí la integral que queremos ya es totalmente accesible

$$\int \frac{1}{x^2+2bx+c}dx = \int \frac{1}{\left(x-s\right)\left(x-t\right)}dx = \frac{1}{s-t}\int\left(\frac{1}{x-s} - \frac{1}{x-t}\right)dx$$

$$= \frac{1}{s-t}\left(\log\left(x-s\right) - \log\left(x-t\right)\right) + C$$

Si quisieramos escribir la solución en los valores reales de s y t, la solución quedaría

$$\int \frac{1}{x^2+2bx+c}dx = \frac{1}{2\sqrt{b^2-c}}\left(\log\left(x+b-\sqrt{b^2-c}\right) - \log\left(x+b+\sqrt{b^2-c}\right)\right) + C$$

Vale la pena que noten que en la solución que dimos también estamos usando nuestra convención, ya sabemos que formalmente $\int \frac{1}{x-a}dx = \log|x-a| + C$. Pero nuestra convención nos está dando la oportunidad de quedarnos en el dominio de nuestra preferencia.

Caso 3. *Supongamos que $b^2 - c < 0$.*

En este caso sabemos que la ecuación cuadrática $x^2+2bx+c = 0$ no tiene solución. ¿Qué información nos ofrece esto para el cálculo de la integral? Lo que podemos concluir es que esta vez no podemos factorizar la expresión $x^2+2bx+c$ como ocurrió en los dos primeros casos.
Cuando una expresión cuadrática no se puede factorizar en factores lineales, recibe el nombre de expresión ***irreducible****.*
Ante esta situación lo que vamos a hacer es completar el cuadrado:

$$x^2+2bx+c = x^2+2bx+b^2-b^2+c = \left(x+b\right)^2 + \left(c-b^2\right)$$

De donde

$$\int \frac{1}{x^2+2bx+c}dx = \int \frac{1}{\left(x+b\right)^2 + \left(c-b^2\right)}dx$$

Nuestra hipótesis nos dice que el número $c-b^2 > 0$. De tal manera que el denominador esconde una igualdad de la forma

$$\left(x+b\right)^2 + \left(c-b^2\right) = y^2 + a^2$$

La clase anterior ya tuvimos un primer encuentro con algo de la forma y^2+a^2. En ese ejemplo propusimos un cambio que involucrara a la tangente, $y = a\tan\left(u\right)$. Así que lo mismo haremos aquí, sólo que en nuestra situación el papel de "y" lo juega $x+b$ mientras que el papel de "a" lo juega $\sqrt{c-b^2}$. Con esto en mente proponemos

$$x + b = \sqrt{c-b^2}\tan\left(u\right)$$

Equivalentemente

$$x = -b + \sqrt{c-b^2}\tan\left(u\right)$$

Derivando nos queda

$$dx = \sqrt{c-b^2}\sec^2\left(u\right)du$$

Además

$$\left(x+b\right)^2 + \left(c-b^2\right) = \left(c-b^2\right)\tan^2\left(u\right) + \left(c-b^2\right) = \left(c-b^2\right)\left(\tan^2\left(u\right)+1\right) = \left(c-b^2\right)\sec^2\left(u\right)$$

Sustituyendo todo dentro de la integral obtenemos

$$\int \frac{1}{x^2+2bx+c}dx = \int \frac{1}{\left(x+b\right)^2 + \left(c-b^2\right)}dx = \int \frac{\sqrt{c-b^2}\sec^2\left(u\right)}{\left(c-b^2\right)\sec^2\left(u\right)}du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{c-b^2}} \int 1du = \frac{1}{\sqrt{c-b^2}} u + C$$

Finalmente hay que regresar a la variable original despejando u de nuestro cambio de variable

$$x + b = \sqrt{c-b^2} \tan(u) \Longrightarrow \tan(u) = \frac{x+b}{\sqrt{c-b^2}} \Longrightarrow u = \arctan\left(\frac{x+b}{\sqrt{c-b^2}}\right)$$

y con esto

$$\int \frac{1}{x^2+2bx+c} dx = \frac{1}{\sqrt{c-b^2}} \arctan\left(\frac{x+b}{\sqrt{c-b^2}}\right) + C.$$

El Ejemplo 5 guarda un par de mensajes que debemos puntualizar. El primero de ellos y quizá el más evidente es que cualquier integral de la forma

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c} dx, a \neq 0$$

tiene solución explícita. Esto es porque el denominador puede ser llevado fácilmente a una expresión como en el Ejemplo 5

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + 2\left(\frac{b}{2a}\right)x + \left(\frac{c}{a}\right)\right)$$

Con un poco más de esfuerzo podemos tener la certeza de que en general las integrales de la forma

$$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} dx$$

también tienen solución explícita (*Queda como ejercicio verificar esta afirmación. No es necesario distinguir casos sobre los valores de las constantes, es importante que se apoyen de la información que provee el Ejemplo 5*).

De manera que estamos en la presencia de una pequeña pero muy importante clase de funciones para las cuales siempre es posible encontrar una primitiva explícita. Ahora bien, saber que es posible calcular primitivas para las funciones del tipo $f(x) = \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$, abre la puerta hacia una clase mucho mayor de funciones para las cuales siempre habrá una primitiva explícita, y estas son las "Funciones Racionales". Recuerden que una función racional f, es aquella que puede expresarse como el cociente de dos polinomios p y q, es decir, $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$.

Nuestro próximo gran objetivo dentro de este tema será demostrar que toda función racional, tiene primitiva explícita. ¿Cómo vamos a lograr esto? Bueno, una parte importante para conseguirlo tiene que ver con el segundo mensaje que guarda el Ejemplo 5, y éste es la técnica que hemos empleado para darle solución al Caso 2 del ejemplo. Este es un caso particular de lo que se conoce como el método de "Descomposición en Fracciones Parciales". Este método lo desarrollaremos con cuidado la próxima clase. Por ahora y a fin de avanzar un poco en nuestro gran objetivo, vamos a probar una generalización del Caso 3 del Ejemplo 5. Sólo que antes probaremos un lema que es muy importante por sí sólo.

Lema 6 *(Fórmula de reducción para las funciones seno y coseno) Para toda $n \in \mathbb{N}$ se cumplen*

$$\int \operatorname{sen}^n(x)\, dx = -\frac{1}{n} \operatorname{sen}^{n-1}(x) \cos(x) + \frac{n-1}{n} \int \operatorname{sen}^{n-2}(x)\, dx$$

$$\int \cos^n(x)\, dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1}(x) \operatorname{sen}(x) + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2}(x)\, dx$$

Dem. Las fórmulas enunciadas reciben su nombre debido a que nos dan una fórmula recursiva para calcular primitivas para las potencias de $\operatorname{sen}(x)$ y $\cos(x)$. De esta manera, sin importar que tan grande sea n, tenemos los medios para ir bajando esa potencia hasta eventualmente llegar a la integral de $\int \operatorname{sen}(x)\, dx$ en caso de que n sea impar o al trivial caso de calcular la integral de $\int 1dx$ en caso de que n sea par. Razón

por la cual estas fórmulas son una verdadera maravilla.
Para no opacar tan bonitas fórmulas con unas molestas constantes de integración, hemos decidido prescindir de ellas en su formulación, mismas que deberían ir al final de la expresión del lado derecho. Y lo mismo haremos durante la prueba.
La prueba de ambas identidades es totalmente análoga. Por lo que sólo demostraremos la primera. Esto lo llevaramos a cabo mediante integración por partes. Para poderla aplicar, necesitamos probar de manera independiente el caso $n = 1$.
Si $n = 1$, entonces ya sabemos que $\int \operatorname{sen}(x)\,dx = -\cos(x)$. Por otro lado, si sustituimos $n = 1$ en la expresión del lado derecho obtenemos

$$-\frac{1}{n}\operatorname{sen}^{n-1}(x)\cos(x) + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2}(x)\,dx = -\frac{1}{1}\operatorname{sen}^{0}(x)\cos(x) + \frac{0}{1}\int \operatorname{sen}^{-1}(x)\,dx = -\cos(x)$$

Ahora supongamos $n > 1$. Con esta hipótesis podemos descomponer $\operatorname{sen}^{n}(x)$ como un producto y así hacer más evidente la integración por partes. Si escribimos

$$\operatorname{sen}^{n}(x) = \operatorname{sen}^{n-1}(x)\operatorname{sen}(x)$$

entonces podemos proponer $f'(x) = \operatorname{sen}(x)$ y $g(x) = \operatorname{sen}^{n-1}(x)$. De esta manera $f(x) = -\cos(x)$ y $g'(x) = (n-1)\operatorname{sen}^{n-2}(x)\cos(x)$. Aplicando la integración por partes obtenemos

$$\int \operatorname{sen}^{n}(x)\,dx = -\operatorname{sen}^{n-1}(x)\cos(x) + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2}(x)\cos^2(x)\,dx$$

El siguiente paso es aprovechar la identidad trigonométrica $\cos^2(x) = 1 - \operatorname{sen}^2(x)$ y sustituirla en la integral de la derecha. De este modo

$$\int \operatorname{sen}^{n-2}(x)\cos^2(x)\,dx = \int \operatorname{sen}^{n-2}(x)\left(1 - \operatorname{sen}^2(x)\right)dx = \int \operatorname{sen}^{n-2}(x)\,dx - \int \operatorname{sen}^{n}(x)\,dx$$

Por lo tanto

$$\int \operatorname{sen}^{n}(x)\,dx = -\operatorname{sen}^{n-1}(x)\cos(x) + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2}(x)\,dx - (n-1)\int \operatorname{sen}^{n}(x)\,dx$$

Y ahora podemos aplicar el tan socorrido truco de pasar la última integral del lado derecho hacia el lado izquierdo:

$$\int \operatorname{sen}^{n}(x)\,dx + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n}(x)\,dx = -\operatorname{sen}^{n-1}(x)\cos(x) + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2}(x)\,dx$$

Simplificando

$$n\int \operatorname{sen}^{n}(x)\,dx = -\operatorname{sen}^{n-1}(x)\cos(x) + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2}(x)\,dx$$

Y finalmente

$$\int \operatorname{sen}^{n}(x)\,dx = -\frac{1}{n}\operatorname{sen}^{n-1}(x)\cos(x) + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2}(x)\,dx.$$

Lo que concluye la prueba. ■

Vale la pena echar a andar estas fórmulas con un par de ejemplos:

$$\int \operatorname{sen}^{2}(x)\,dx = -\frac{1}{2}\operatorname{sen}^{2-1}(x)\cos(x) + \frac{2-1}{2}\int \operatorname{sen}^{2-2}(x)\,dx = -\frac{1}{2}\operatorname{sen}(x)\cos(x) + \frac{1}{2}\int 1dx$$
$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\operatorname{sen}(x)\cos(x) + C$$

Ahora aprovechamos este resultado y calculamos

$$\int \operatorname{sen}^{4}(x)\,dx = -\frac{1}{4}\operatorname{sen}^{4-1}(x)\cos(x) + \frac{4-1}{4}\int \operatorname{sen}^{4-2}(x)\,dx = -\frac{1}{4}\operatorname{sen}^{3}(x)\cos(x) + \frac{3}{4}\int \operatorname{sen}^{2}(x)\,dx$$
$$= -\frac{1}{4}\operatorname{sen}^{3}(x)\cos(x) + \frac{3}{8}x - \frac{3}{8}\operatorname{sen}(x)\cos(x) + C$$

Observación 7 *Una consecuencia muy importante del Lema 6 es que todas las potencias* $\operatorname{sen}^n(x)$ *y* $\cos^n(x)$ *tienen primitivas que pueden ser expresadas de manera explícita.*

Ya para finalizar la clase del día de hoy. Vamos a probar la anunciada generalización del Caso 3 del Ejemplo 5 y en donde vamos a hacer uso del Lema 6.

Proposición 8 *Si la expresión* ax^2+bx+c *es irreducible, entonces para cualesquiera números* $A, B \in \mathbb{R}$ *y para toda* $n \in \mathbb{N}$*, la integral*

$$\int \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}dx$$

tiene solución explícita.

Dem. Antes de lanzarnos a la prueba, hay que comprender muy bien qué es lo que queremos demostrar. Se nos está pidiendo probar que la integral tiene solución explícita. Lo que debemos entender por esto es que podemos encontrar una primitiva en términos de funciones elementales, pero ojo, no se nos está pidiendo que la demos, sólo que probemos que se puede dar.
Sean $A, B \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$. Para demostrar lo pedido, primero vamos a separar la integral como una suma

$$\int \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}dx = A\int \frac{x}{(ax^2+bx+c)^n}dx + B\int \frac{1}{(ax^2+bx+c)^n}dx$$

El primer sumando lo vamos a modificar agregando algunas constantes de tal manera que quede en evidencia un cambio de variable muy claro.

$$\int \frac{x}{(ax^2+bx+c)^n}dx = \frac{1}{2a}\int \frac{2ax}{(ax^2+bx+c)^n}dx = \frac{1}{2a}\int \frac{2ax+b-b}{(ax^2+bx+c)^n}dx$$

$$= \frac{1}{2a}\int \frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^n}dx - \frac{b}{2a}\int \frac{1}{(ax^2+bx+c)^n}dx$$

Antes de continuar con los cálculos vamos a llevar esta igualdad a la integral original:

$$\int \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}dx = \frac{A}{2a}\int \frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^n}dx - \frac{bA}{2a}\int \frac{1}{(ax^2+bx+c)^n}dx + B\int \frac{1}{(ax^2+bx+c)^n}dx$$

$$= \frac{A}{2a}\int \frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^n}dx + \left(B - \frac{bA}{2a}\right)\int \frac{1}{(ax^2+bx+c)^n}dx$$

Ahora sí, para probar que $\frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}$ tiene una primitiva explícita, lo único que tenemos que probar es que las dos nuevas integrales tienen solución explícita.
Como se puede apreciar, lo que nos ha quedado en el numerador de la primera integral, se corresponde con la derivada de la expresión ax^2+bx+c. De modo que un cambio de variable

$$u = ax^2+bx+c$$

debería funcionar para calcular esa integral:

$$\int \frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^n}dx = \int \frac{1}{u^n}du$$

Como estamos buscando un resultado válido para toda $n \in \mathbb{N}$, debemos considerar en particular el caso $n=1$ cuya solución es sustancialmente diferente con respecto a lo que sucede cuando $n \neq 1$. Podemos expresar la solución general como sigue

$$\int \frac{1}{u^n}du = \begin{cases} \log(u) & n=1 \\ \frac{1}{1-n}u^{1-n} & n \neq 1 \end{cases}$$

Si regresamos a la variable original nos queda

$$\int \frac{2ax+b}{\left(ax^2+bx+c\right)^n}dx = \begin{cases} \log\left(ax^2+bx+c\right) & n=1 \\ \frac{1}{1-n}\left(ax^2+bx+c\right)^{1-n} & n\neq 1 \end{cases}$$

Esto demuestra que la primer integral sí tiene solución explícita.

Pasemos a la segunda integral. Es importante destacar que hasta este momento no hemos usado que la expresión ax^2+bx+c sea irreducible. Ahora será momento de usarlo. Nos vamos a inspirar del procedimiento que llevamos a cabo en el Ejemplo 5. Como aquí tenemos más constantes, las cuentas pueden parecer más latosas pero la esencia es exactamente la misma.

El hecho de que ax^2+bx+c sea irreducible nos dice que su discriminante es negativo. En este caso su discriminante es b^2-4ac. Y por lo tanto

$$4ac-b^2>0$$

Ahora vamos a completar el cuadrado:

$$ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right) = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right)$$

De este modo logramos

$$\int \frac{1}{\left(ax^2+bx+c\right)^n}dx = \frac{1}{a^n}\int \frac{1}{\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right)^n}dx$$

Aquí es donde haremos un cambio de variable inspirados en el Ejemplo 5. Como $4ac-b^2>0$, eso significa que podemos hacer un cambio con la tangente:

$$x+\frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\tan(u)$$

$$dx = \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\sec^2(u)\,du$$

Sustituimos en la integral (para que no se abrumen, no le presten mucha atención a las constantes, lo que importa es el integrando)

$$\int \frac{1}{\left(ax^2+bx+c\right)^n}dx = \frac{1}{a^n}\int \frac{1}{\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right)^n}dx$$

$$= \frac{1}{a^n}\int \frac{1}{\left(\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right)^n\left(\tan^2(u)+1\right)^n}\cdot\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\sec^2(u)\,du$$

$$= \frac{(4a)^n\sqrt{4ac-b^2}}{2a\left(4ac-b^2\right)^n}\int \frac{\sec^2(u)}{\sec^{2n}(u)}du$$

Bien, ahora nuestro problema se reduce a calcular la integral

$$\int \frac{\sec^2(u)}{\sec^{2n}(u)}du = \int \frac{1}{\sec^{2n-2}(u)}du$$

¿Cuál es la magia aquí? Que sabemos que

$$\int \frac{1}{\sec^{2n-2}(u)}du = \int \cos^{2n-2}(u)\,du$$

y según el Lema 6, la integral del lado derecho ¡tiene solución explícita! Quién sabe cuál es y ni nos importa. Lo que importa es que si $\int \cos^{2n-2}(u)\,du$ tiene solución explícita, entonces $\int \frac{1}{(ax^2+bx+c)^n}dx$ también tiene solución explícita. Y con esto queda demostrado que las integrales

$$\int \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}dx$$

siempre pueden resolverse. $\blacksquare$

Con esto concluimos la clase. Será importante tomarse su tiempo para digerir lo aquí expuesto.