Cálculo Diferencial e Integral II

Aproximación polinomial

16 de abril de 2020

La clase anterior logramos introducir los polinomios de Taylor y enunciamos el teorema que motiva todo este tema: el Teorema de Taylor. El día de hoy le daremos prueba a este teorema y exploraremos unas primeras aplicaciones de éste.

Recordemos que para una función $f : I \to \mathbb{R}$, n-veces derivable en $a \in I$, se define el n-ésimo polinomio de Taylor centrado en a, como

$$P_{n,f,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Este polinomio va a cumplir la importante propiedad de

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - P_{n,f,a}(x)}{(x-a)^n} = 0$$

Como ya lo hemos comentado, el cociente

$$\frac{f(x) - P_{n,f,a}(x)}{(x-a)^n}$$

nos permite comparar la rapidez con la que la diferencia $f(x) - P_{n,f,a}(x)$ se aproxima a cero con respecto del polinomio $(x-a)^n$. Un detalle importante a observar es que conforme la n es más grande, el polinomio $(x-a)^n$ se acerca mucho más rápido a 0 cuando $x \to a$. El hecho de que, a pesar de la rapidez que lleva $(x-a)^n$, la diferencia $f(x) - P_{n,f,a}(x)$ sea aún más veloz, nos habla de lo buena que es la aproximación polinomial que ofrece $P_{n,f,a}(x)$. De tal manera que entre más derivable sea la función f, mejores aproximaciones polinomiales podremos conseguir de ella. Desde luego, no hay que perder de vista que estas aproximaciones ocurren de manera local, es decir, entre más cerca nos encontremos del punto a, mejor será la aproximación.

Inspirados en la importante intrepretación que acabamos de darle al límite

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - P_{n,f,a}(x)}{(x-a)^n} = 0$$

podemos abstraer la idea y tomar dos funciones $f, g : I \to \mathbb{R}$ (no necesariamente continuas) para las cuales se cumpla que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - g(x)}{(x-a)^n} = 0$$

Así como ocurre con f y $P_{n,f,a}$, el límite anterior nos dice ahora que las funciones f y g son muy parecidas en puntos cercanos al punto a. Esta particular manera de "parecerse" tiene un nombre especial, que dejaremos plasmada en la siguiente definición.

Definición 1 *Sean $f, g : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$ y $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Diremos que las funciones f y g se **parecen en** a **hasta el orden** n si*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - g(x)}{(x-a)^n} = 0$$

Notemos que si $f, g : I \to \mathbb{R}$, se parecen en $a \in I$ hasta el orden n, entonces se parecen hasta el orden k para cualquier $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, con $k < n$. En efecto, si $k < n$, entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - g(x)}{(x-a)^k} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - g(x)}{(x-a)^k} \frac{(x-a)^{n-k}}{(x-a)^{n-k}}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - g(x)}{(x-a)^n} (x-a)^{n-k} = 0 \cdot 0 = 0$$

También vale la pena mencionar que si f y g son continuas en a, entonces f y g se parecen en a hasta el orden 0 si y sólo si $f(a) = g(a)$.

Una particularidad del concepto que acabamos de definir es, que cuando lo llevamos al terreno de los polinomios, entonces es posible concluir algo muy contundente.

Proposición 2 *Sean $p(x)$ y $q(x)$ dos polinomios de grado a lo más n. Si p y q se parecen en $a \in \mathbb{R}$ hasta el orden n, entonces $p = q$.*

Dem. La demostración la haremos por inducción sobre n.

Sea $a \in \mathbb{R}$ fijo.

Base. $n = 1$.

Supongamos que p y q tienen grado a lo más 1 y que se parecen en a hasta el orden 1.

Escribimos a los polinomios centrados en a:

$$p(x) = p(a) + p'(a)(x-a) \qquad \text{y} \qquad q(x) = q(a) + q'(a)(x-a)$$

Por hipótesis sabemos que

$$\lim_{x \to a} \frac{p(x) - q(x)}{x-a} = 0$$

Si sustituimos a los polinomios en su forma centrada:

$$\lim_{x \to a} \frac{(p(a) + p'(a)(x-a)) - (q(a) + q'(a)(x-a))}{x-a} = 0$$

Simplificando un poco

$$\lim_{x \to a} \left[(p'(a) - q'(a)) + \frac{p(a) - q(a)}{x-a} \right] = 0$$

De acuerdo a las observaciones que hicimos previo a esta proposición, sabemos que si p y q se parecen en a hasta el orden 1, entonces también se parecen hasta el orden 0. Y por la continuidad de los polinomios, concluimos que

$$p(a) = q(a)$$

De donde

$$0 = \lim_{x \to a} \left[(p'(a) - q'(a)) + \frac{p(a) - q(a)}{x-a} \right] = p'(a) - q'(a)$$

Es decir, $p'(a) = q'(a)$. Lo que prueba que $p = q$.

H.I. Supongamos que para cualesquiera dos polinomios $r(x)$ y $s(x)$ de grado a lo más n, se cumple que, si se parecen en a hasta el orden n, entonces $r(x) = s(x)$.

Paso inductivo. Sean $p(x)$ y $q(x)$ dos polinomios de grado a lo más $n+1$ tales que se parecen en a hasta el orden $n+1$.

Queremos demostrar que $p = q$.

El paso clave una vez más es escribir a p y q centrados en a:

$$p(x) = p(a) + p'(a)(x-a) + \cdots + \frac{p^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{p^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

$$q(x) = q(a) + q'(a)(x-a) + \cdots + \frac{q^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{q^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Ahora hagamos una pequeña manipulación técnica

$$p(x) = p(a) + p'(a)(x-a) + \cdots + \frac{p^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{p^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

$$= p(a) + (x-a)\left(p'(a) + \cdots + \frac{p^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^{n-1} + \frac{p^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^n\right)$$

y llamemos

$$r(x) = p'(a) + \cdots + \frac{p^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^{n-1} + \frac{p^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^n$$

Notemos que $r(x)$ es un polinomio de grado a lo más n y además

$$p(x) = p(a) + (x-a)\,r(x)$$

De manera análoga podemos definir

$$s(x) = q'(a) + \cdots + \frac{q^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^{n-1} + \frac{q^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^n$$

y concluir que $s(x)$ es un polinomio de grado a lo más n y además

$$q(x) = q(a) + (x-a)\,s(x)$$

Por hipótesis sabemos que p y q se parecen en a hasta el orden $n+1$, y así como lo hicimos en el paso Base, podemos concluir que p y q se parecen en a hasta el orden 0 y por tanto

$$p(a) = q(a)$$

Ahora bien, dado que

$$\lim_{x\to a} \frac{p(x) - q(x)}{(x-a)^{n+1}} = 0$$

tenemos que

$$0 = \lim_{x\to a} \frac{(p(a) + (x-a)\,r(x)) - (q(a) + (x-a)\,s(x))}{(x-a)^{n+1}}$$

Simplificando y aprovechando que $p(a) = q(a)$,

$$0 = \lim_{x\to a} \frac{(x-a)\,r(x) - (x-a)\,s(x)}{(x-a)^{n+1}} = \lim_{x\to a} \frac{r(x) - s(x)}{(x-a)^n}$$

El límite de la derecha nos dice que los polinomios r y s se parecen en a hasta el orden n. De manera que por la H.I. concluimos que $r = s$.

De donde

$$p(x) = p(a) + (x-a)\,r(x) = q(a) + (x-a)\,s(x) = q(x)$$

Lo que concluye la inducción. ■

La información que ofrece la Proposición 2 es destacable porque nos está diciendo que basta que dos polinomios (de grado a lo más n) se parezcan hasta el orden n en un sólo punto para concluir que son el mismo polinomio. Esto es muy fuerte, sobretodo si tomamos en cuenta que el concepto de "paracerse hasta el orden n en un punto" es una noción local y a pesar de ello, hemos obtenido un resultado de índole "global". Podemos decir que este tipo de resultados, enriquecen la belleza que poseen los polinomios.

Una última observación técnica que podemos apreciar (y que vamos a usar) del concepto de "paracerse hasta el orden n en un punto", es que éste se comporta como una relación transitiva entre funciones. Es decir, si f y g se parecen en a hasta orden n y además g y h se parecen en a hasta orden n, entonces f y h se parecen en a hasta orden n. Esto es muy simple de probar, ya que si

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-g(x)}{(x-a)^n}=0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to a}\frac{g(x)-h(x)}{(x-a)^n}=0$$

entonces sumando los límites concluimos que

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-h(x)}{(x-a)^n}=0$$

Ya con la Proposición 2 a nuestra disposición, tenemos todas las herramientas para finalmente darle prueba al Teorema de Taylor.

Teorema 3 *(Taylor) Si $f : I \to \mathbb{R}$ es una función n-veces derivable en $a \in I$, entonces $P_{n,f,a}(x)$ es el único polinomio de grado a lo más n, con la propiedad de*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-P_{n,f,a}(x)}{(x-a)^n}=0$$

Dem. Sea $a \in I$ fijo.

Antes de entrar de lleno a la prueba, vale la pena notar que el enunciado nos dice que el polinomio $P_{n,f,a}$ es el único que se le parece a f en a hasta el orden n. Expresado de esta manera, la unicidad del polinomio de Taylor es una consecuencia inmediata de la Proposición 2 y del hecho de que la relación "parecerse hasta orden n en un punto" es transitiva. De manera que lo único que nos queda por demostrar es que $P_{n,f,a}$ en efecto se parece a f en a hasta el orden n.

La demostración la haremos por inducción sobre n.

Base. $n = 1$.

Este caso ya fue demostrado la clase pasada (ver Proposición 5, Clase lunes 13).

H.I. Supongamos que para cualquier función $g : I \to \mathbb{R}$, n-veces derivable en a, el polinomio $P_{n,g,a}$ se parece a g en a hasta orden n.

Paso inductivo. Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función $(n+1)$-veces derivable en $a \in I$. Queremos demostrar que

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-P_{n+1,f,a}(x)}{(x-a)^{n+1}}=0$$

Para calcular el límite vamos a echar mano de la Proposición 16 de la clase pasada:

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función $(n+1)$-veces derivable en a . Entonces

$$P_{n,f',a}(x) = P'_{n+1,f,a}(x)$$

Este resultado es la clave porque es el que nos va permitir aplicar la H.I. Primero noten que el límite

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-P_{n+1,f,a}(x)}{(x-a)^{n+1}}$$

es de la forma $\frac{0}{0}$. De modo que si aplicamos L'Hopital obtenemos:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-P_{n+1,f,a}(x)}{(x-a)^{n+1}}=\frac{1}{n+1}\lim_{x\to a}\frac{f'(x)-P'_{n+1,f,a}(x)}{(x-a)^{n}}$$

Ahora bien, la función f' es n-veces derivable en a y además

$$P_{n,f',a}(x)=P'_{n+1,f,a}(x)$$

De manera que, por H.I.

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)-P'_{n+1,f,a}(x)}{(x-a)^{n}}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)-P_{n,f',a}(x)}{(x-a)^{n}}=0$$

Y en consecuencia

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-P_{n+1,f,a}(x)}{(x-a)^{n+1}}=\frac{1}{n+1}\lim_{x\to a}\frac{f'(x)-P'_{n+1,f,a}(x)}{(x-a)^{n}}=0$$

Lo que concluye la inducción y la prueba del teorema. ■

Ya con el tan importante teorema que hemos demostrado, ahora nos vamos a dar a la tarea de estudiar algunas aplicaciones muy interesantes, mismas que nos permitirán asimilar con más profundidad el potencial de la aproximación polinomial que hemos conseguido con el Teorema de Taylor.

La primera aplicación que veremos tiene que ver con un problema que se estudia en Cálculo I, y es el de determinar los máximos y mínimos locales de una función derivable.

Dada una función derivable $f: I \to \mathbb{R}$, sabemos que la estrategia para encontrar sus máximos y mínimos locales es, en primer lugar, encontrar los puntos críticos, es decir, aquellos puntos donde

$$f'(x)=0$$

Una vez encontrados dichos puntos, si teníamos la fortuna de que nuestra función fuera dos veces derivable, entonces podíamos aplicar el famoso "criterio de la segunda derivada":

Si $a\in I$ es punto crítico de f, entonces

1) Si $f''(a)>0$, entonces f tiene un mínimo local en a.

2) Si $f''(a)<0$, entonces f tiene un máximo local en a.

Este criterio estaba a todo dar, sin embargo, rápidamente surgen limitantes en su uso aún con funciones de lo más elementales.

Recordarán que la función $f(x)=x^4$ es una función con un mínimo en $x=0$, pero es un ejemplo en donde el criterio de la segunda derivada no aplica ya que $f''(0)=0$. Así mismo, si ahora consideramos $g(x)=x^3$, entonces g tiene un punto crítico en $x=0$ que no es ni máximo ni mínimo local y una vez más ocurre que $g''(0)=0$.

Afortunadamente los ejemplos anteriores son lo suficientemente sencillos como para checar por nuestros propios medios que x^4 tiene mínimo en 0 y x^3 tiene un punto de inflexión en 0. En general la función

$$h(x)=b(x-a)^n$$

es sencilla de estudiar para $n\geq 2$ y $a,b\in\mathbb{R}$, con $b\neq 0$. Está claro que el único punto crítico que tiene h es en $x=a$, ya que

$$h'(x)=nb(x-a)^{n-1}$$

Si n es un número par, entonces la función h tendrá un máximo o un mínimo en $x=a$ dependiendo del signo de b. Para n par la gráfica de h se puede ver como una "parábola" con vértice en $x=a$ y un poco achatada cerca de a dependiendo del tamaño de n. Esta "parábola" abrirá hacia arriba si $b>0$ (en cuyo caso hay un mínimo en $x=a$) y abrirá hacia abajo si $b<0$ (en cuyo caso hay un máximo en $x=a$).

En cambio, si n es impar, entonces h se comporta de manera similar a las funciones x^3 y $-x^3$. Una vez más, esto depende del signo de b, sin embargo, en cualquier caso se puede apreciar que $x = a$ no será ni máximo ni mínimo.

Ahora bien, ¿cómo entra en juego el Teorema de Taylor en todo esto?

Pongámonos en la siguiente situación: Tenemos $f : I \to \mathbb{R}$ y sabemos que f es n-veces derivable en todo el intervalo abierto I, con $n \geq 2$. Pero además sabemos que para algún $a \in I$

$$f^{(k)}(a) = 0, \text{ para toda } k = 1, \ldots, n-1$$

mientras que

$$f^{(n)}(a) \neq 0$$

(tal como ocurre con las funciones $f(x) = x^4$ y $g(x) = x^3$ en $x = 0$) y quisiéramos determinar si f tendrá un máximo, un mínimo o nada en el punto $x = a$.

Bien, notemos que con los datos anteriores ocurre que

$$P_{n,f,a}(x) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + f(a)$$

Ahora, por el Teorema de Taylor sabemos que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - P_{n,f,a}(x)}{(x-a)^n} = 0$$

Esto significa que para puntos cercanos al punto a ocurre que

$$f(x) \approx P_{n,f,a}(x) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + f(a)$$

¡Ah! Aquí está la clave. De acuerdo a lo que ya discutimos, el polinomio $\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + f(a)$ tendrá un máximo o mínimo local en $x = a$ si n es par y dependiendo del signo de $f^{(n)}(a)$, y en el caso de que n sea impar, entonces el polinomio no tiene ni máximo ni mínimo en $x = a$.

(Noten que la presencia del término $f(a)$ en $P_{n,f,a}$ es irrelevante para nuestro análisis puesto que sólo representa una traslación del polinomio $\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$).

Acomodemos esta información en una tablita:

n par y $f^{(n)}(a) > 0$	$\Rightarrow$	$P_{n,f,a}$ tiene mínimo local en $x = a$
n par y $f^{(n)}(a) < 0$	$\Rightarrow$	$P_{n,f,a}$ tiene máximo local en $x = a$
n impar	$\Rightarrow$	$P_{n,f,a}$ no tiene ni máximo ni mínimo local en $x = a$

Dado que $f(x) \approx P_{n,f,a}(x)$, podemos esperar que el comportamiento que posee $P_{n,f,a}(x)$ alrededor de a, prevalezca en f. De tal manera que podemos lanzar la siguiente conjetura:

n par y $f^{(n)}(a) > 0$	$\Rightarrow$	f tiene mínimo local en $x = a$
n par y $f^{(n)}(a) < 0$	$\Rightarrow$	f tiene máximo local en $x = a$
n impar	$\Rightarrow$	f no tiene ni máximo ni mínimo local en $x = a$

Lo fantástico de todo esto es que la conjetura es verdadera y lo mejor es que, ¡vamos a demostrarla!

Teorema 4 *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función n-veces derivable en el intervalo abierto I, con $n \geq 2$. Supongamos que para algún $a \in I$*

$$f^{(k)}(a) = 0, \text{ para toda } k = 1, \ldots, n-1$$

mientras que

$$f^{(n)}(a) \neq 0$$

Entonces:

1) Si n es par y $f^{(n)}(a) > 0$, entonces f tiene un mínimo local en $x = a$.

2) Si n es par y $f^{(n)}(a) < 0$, entonces f tiene un máximo local en $x = a$.

3) Si n es impar, entonces f no tiene ni máximo ni mínimo local en $x = a$.

Dem. Noten que la hipótesis $n \geq 2$ es necesaria para asegurar que $x = a$ es un punto crítico de la función y que de esta manera tenga sentido preguntarnos si es máximo o mínimo local.

La estructura de la prueba para este teorema depende de que distingamos el signo que tiene $f^{(n)}(a)$. Los incisos 1) y 2) claramente están redactados con esta dependencia, sin embargo, para demostrar el inciso 3) también es necesaria hacer la distinción. Ambos análisis son realmente análogos, por lo que sólo demostraremos el teorema bajo el supuesto general de $f^{(n)}(a) < 0$ y dejaremos como ejercicio el caso $f^{(n)}(a) > 0$.

Supongamos $f^{(n)}(a) < 0$.

Antes de pararnos en el inciso 2) o 3) vamos a desmenuzar un poco la información que nos ofrece el Teorema de Taylor. Éste nos dice que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - P_{n,f,a}(x)}{(x-a)^n} = 0$$

De la hipótesis se desprende que

$$P_{n,f,a}(x) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + f(a)$$

Y por lo tanto

$$0 = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - P_{n,f,a}(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}{(x-a)^n}$$

De donde

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^n} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Como estamos bajo el supuesto de que $f^{(n)}(a) < 0$, vamos a aplicar la definición del límite al valor particular

$$\varepsilon = -\frac{f^{(n)}(a)}{2(n!)} > 0$$

Esto significa que existe $\delta_0 > 0$ tal que, para toda $x \in I$, si $0 < |x - a| < \delta_0$, entonces

$$\left| \frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^n} - \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \right| < -\frac{f^{(n)}(a)}{2(n!)}$$

Abriendo el valor absoluto obtenemos

$$\frac{f^{(n)}(a)}{2(n!)} < \frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^n} - \frac{f^{(n)}(a)}{n!} < -\frac{f^{(n)}(a)}{2(n!)}$$

Y por lo tanto

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{f^{(n)}(a)}{n!} < \frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^n} < \frac{1}{2} \cdot \frac{f^{(n)}(a)}{(n!)}$$

Para nuestros propósitos únicamente necesitamos echar mano de la desigualdad derecha:

$$\frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^n} < \frac{1}{2} \cdot \frac{f^{(n)}(a)}{(n!)} \tag{1}$$

Ahora sí distingamos los incisos 2) y 3).

2) Supongamos que n es par. Queremos demostrar que f tiene un máximo local en $x = a$. Recordemos que por definición, la función f tiene un máximo local en $x = a$ si existe $\delta > 0$ tal que, para toda $x \in I$,

$$\text{si } |x-a| < \delta \text{ entonces } f(x) \leq f(a)$$

Así que nuestra meta es atrapar a esa $\delta > 0$. De nuestro trabajo previo, $\delta = \delta_0$ parace un buen candidato. Ahora hay que corroborar que en efecto es la buscada.

Sea $x \in I$ tal que $|x-a| < \delta_0$. Queremos exhibir que se cumple que $f(x) \leq f(a)$.

Naturalmente si $x = a$, entonces $f(x) = f(a)$. Así que podemos suponer que $x \neq a$.

Como $|x-a| < \delta_0$ y $x \neq a$, entonces se cumple que $0 < |x-a| < \delta_0$ y en consecuencia tenemos derecho a aplicar la desigualdad (1):

$$\frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^n} < \frac{1}{2} \cdot \frac{f^{(n)}(a)}{(n!)}$$

Ahora bien, como n es par, entonces $(x-a)^n > 0$, de tal manera que si multiplicamos la desigualdad anterior por este factor, entonces la desigualdad no se altera:

$$f(x) - f(a) \leq \frac{f^{(n)}(a)}{2(n!)}(x-a)^n$$

Y dado que $\frac{f^{(n)}(a)}{2(n!)} < 0$, entonces

$$f(x) - f(a) \leq \frac{f^{(n)}(a)}{2(n!)}(x-a)^n < 0$$

Es decir,

$$f(x) < f(a)$$

Y por lo tanto f tiene un máximo local en $x = a$.

3) Supongamos que n es impar. Queremos demostrar que f no tiene ni máximo ni mínimo local en $x = a$.

En palabras simples queremos demostrar que siempre es posible encontrar puntos $x, y \in I$, tan cercanos de a como queramos, tales que

$$f(x) < f(a) < f(y)$$

La desigualdad de la izquierda nos dice que a no es mínimo y la desigualdad derecha nos dice que a no es máximo.

Lo anterior escrito de manera más formal se traduce en lo siguiente: Queremos probar que para toda $\delta > 0$, existen $x, y \in I$ tales que

$$|x-a| < \delta \qquad \text{y} \qquad |y-a| < \delta$$

$$\text{pero}$$

$$f(x) < f(a) < f(y)$$

Sea $\delta > 0$. Como lo que nos interesa son los puntos **cercanos** al punto a, podemos suponer sin problemas que $\delta \leq \delta_0$. De esta manera tenemos derecho a apoyarnos de la desigualdad (1). Ahora bien, para encontrar los dos puntos especiales $x, y \in I$ que queremos, será necesario refinar todavía más el tamaño de la δ. Aquí entra en juego una hipótesis que hasta antes de este momento no había sido necesaria y que quizá pasó desapercibida, ésta es que el intervalo I **es abierto.** Esto es muy importante porque gracias a que I es abierto podemos tomar $r > 0$ tal que

$$(a - r, a + r) \subset I$$

Y de este modo podemos trabajar únicamente con aquellas $\delta > 0$ que satisfagan que

$$\delta \leq \min\{\delta_0, r\}$$

Los puntos que buscamos los vamos a conseguir tomando cualesquiera $x \in (a, a + \delta)$ y $y \in (a - \delta, a)$.

Observación importante: *La elección que acabamos de hacer de "x" y "y" refleja la razón de pedir $\delta \leq r$ y es importante convencerse de ello. Gracias a que $\delta \leq r$, podemos asegurar*

$$(a - \delta, a + \delta) \subset (a - r, a + r) \subset I$$

y de esta manera los puntos $x \in (a, a + \delta)$ y $y \in (a - \delta, a)$ son tales que $x, y \in I$. Es decir son puntos dentro del domino de la función.

Si de casualidad ocurriera por ejemplo que I es de la forma $(c, a]$, entonces no habríamos tenido la oportunidad de elegir a x, y con esto nuestra prueba se nos cae.

Notemos que como $x \in (a, a + \delta)$, entonces

$$0 < |x - a| = x - a < \delta$$

y similarmente como $y \in (a - \delta, a)$, entonces

$$0 < |y - a| = a - y < \delta$$

Ahora verifiquemos que se cumple que $f(x) < f(a) < f(y)$.

Como ya lo mencionamos, el hecho de haber pedido $\delta \leq \delta_0$, nos permite aplicar la desigualdad (1).

Primero usamos la desigualdad (1) aplicada al valor x:

$$\frac{f(x) - f(a)}{(x - a)^n} < \frac{1}{2} \cdot \frac{f^{(n)}(a)}{(n!)}$$

Como $x - a > 0$, entonces $(x - a)^n > 0$. De donde

$$f(x) - f(a) \leq \frac{f^{(n)}(a)}{2(n!)}(x - a)^n < 0$$

En la última desigualdad estamos usando que $f^{(n)}(a) < 0$. En consecuencia

$$f(x) < f(a)$$

Ahora usamos la desigualdad (1) pero aplicada al valor y:

$$\frac{f(y) - f(a)}{(y - a)^n} < \frac{1}{2} \cdot \frac{f^{(n)}(a)}{(n!)}$$

Como $a - y > 0$, entonces $y - a < 0$. Y dado que n es impar, se sigue que $(y - a)^n < 0$. De donde

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(y - a)^n < f(y) - f(a)$$

Finalmente, dado que $f^{(n)}(a) < 0$ y $(y-a)^n < 0$ obtenemos:

$$0 < \frac{1}{2} \cdot \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(y-a)^n < f(y) - f(a)$$

Y por lo tanto

$$f(a) < f(y)$$

Lo que termina la prueba. ■

El Teorema 4 representa una agradable generalización teórica del criterio de la segunda derivada. Lo llamo generalización "teórica" porque la realidad es que no es tan frecuente necesitarlo en la práctica (lo cual es un poco triste). Usualmente aquellas funciones en donde el criterio de la segunda derivada no es aplicable, son funciones en donde es más sencillo estudiar los cambios de signo de la primera derivada alrededor del punto crítico (y así determinar su naturaleza) que continuar derivando hasta dar con una derivada que no se anule en el punto crítico. Y lo que es más trágico es que existen funciones tan patológicas que, a pesar de ser infinitamente derivables, sus derivadas de todos los órdenes se anulan en el punto crítico, de tal manera que es imposible aplicar el Teorema 4.

Durante el tema de Logaritmo y Exponencial, conocimos una función muy curiosa, *la suavizadora*. Esta función está definida como

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Y es una función infinitamente derivable en su domino con la propiedad de que

$$f^{(n)}(0) = 0, \text{ para toda } n \in \mathbb{N}$$

Es decir, $x = 0$ es un punto crítico de f pero para el cual no tenemos oportunidad de aplicar el Teorema 4. Afortunadamente, no nos hace falta porque, dado que la exponencial siempre es positiva, es muy claro que $x = 0$ es el mínimo de f.

Otro desafortunado ejemplo ocurre con la función

$$f(x) = \begin{cases} x^n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Entre más grande se elija a la n, mayor será el orden de derivación que posea f. Sin embargo, sin importar cuán grande sea n, se llegará a un punto en donde ya no es posible seguir derivando en 0. Lo desafortunado del ejemplo es que $x = 0$ es un punto crítico pero todas las derivadas calculables para f se anulan en 0, de manera que nuevamente no es posible echar mano del Teorema 4. ¿Podrían determinar la naturaleza del punto crítico que tiene f en $x = 0$?

Para no quedar con un mal sabor de boca, como ejercicio traten de encontrar los máximos y mínimos locales del siguiente polinomio aplicando el Teorema 4

$$f(x) = 105x^8 - 360x^7 + 420x^6 + 168x^5$$

Pasemos a la siguiente aplicación del día. (Si ya se cansaron, este puede ser un buen momento para tomar un respiro y continuar en otro momento)

Lo que vamos a hacer es refinar nuestra técnica para calcular polinomios de Taylor. Esto podría parecer una pérdida de tiempo porque ¿qué tan difícil se puede poner calcular $P_{n,f,a}$ si lo único que tenemos que hacer es derivar? Pues precisamente eso, derivar sucesivamente es algo que se puede volver una tarea titánica. Probemos con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5 *Sea* $f(x) = \arctan(x)$. *Calcular* $P_{n,f,0}(x)$.

Calculemos las primeras tres derivadas de f:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow f'(0) = 1$$

$$f''(x) = \frac{-2x}{\left(1+x^2\right)^2} \Rightarrow f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = \frac{\left(1+x^2\right)^2(-2) + 2x\left[2\left(1+x^2\right)(2x)\right]}{\left(1+x^2\right)^4} = \frac{-2x^2+8x-2}{\left(1+x^2\right)^3} \Rightarrow f'''(0) = -2$$

Llegados a este punto se percibe que continuar derivando no nos va a llevar muy lejos. Las derivadas están creciendo en dificultad y no se aprecia que esté apareciendo un patrón que nos ayude como ocurrió por ejemplo con las funciones $\operatorname{sen}(x)$, $\cos(x)$ *y* $\log(x)$. *Sin duda podemos seguir derivando unas cuantas veces, pero de ninguna manera llegaremos a una expresión general para* $f^{(n)}(x)$.

Así que vamos a declararnos derrotados por el $\arctan(x)$ *y demos por terminado este ejemplo. Al menos ofrecemos* $P_{3,f,0}$:

$$P_{3,f,0}(x) = x - \frac{x^3}{3}$$

Bien, entonces ¿cómo le haremos para hallar el n-ésimo polinomio de Taylor del arco tangente? La idea es aprovechar una parte muy importante del Teorema de Taylor: *La unicidad del polinomio de Taylor.*

¿Qué sucedería si por buena fortuna lográramos encontrar un polinomio $P(x)$, de grado menor o igual que n, tal que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(x) - P(x)}{x^n} = 0?$$

Bueno, por la unicidad del polinomio de Taylor, necesariamente debe ocurrir que $P_{n,\arctan,0}(x) = P(x)$. Y de esta forma cobraremos venganza en contra del arco tangente.

Así que tratemos de cazar a ese polinomio $P(x)$.

Lo que vamos a hacer es expresar a $\arctan(x)$ de manera ingeniosa a través del Teorema Fundamental del Cálculo:

$$\arctan(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

Recordemos una importante fórmula de factorización:

$$a^m - b^m = (a-b)\left(a^{m-1} + a^{m-2}b + \cdots + ab^{m-2} + b^{m-1}\right)$$

Si en particular usamos los valores $a = 1$ y $m = n+1$, ahora obtenemos

$$1 - b^{n+1} = (1-b)\left(1 + b + \cdots + b^{n-1} + b^n\right)$$

Equivalentemente, para $b \neq 1$:

$$\frac{1-b^{n+1}}{1-b} = 1 + b + \cdots + b^{n-1} + b^n$$

Y finalmente

$$\frac{1}{1-b} = 1 + b + \cdots + b^{n-1} + b^n + \frac{b^{n+1}}{1-b}$$

¿Cuál es la magia de esta expresión? Resulta que el lado izquierdo de la igualdad tiene toda la cara del integrando que define a $\arctan(x)$:

$$\frac{1}{1+t^2} = \frac{1}{1-\left(-t^2\right)}$$

De manera que si aplicamos la fórmula que acabamos de deducir con el valor particular $b=-t^2$, obtenemos:

$$\frac{1}{1+t^2}=1+\left(-t^2\right)+\left(-t^2\right)^2+\left(-t^2\right)^3+\cdots+\left(-t^2\right)^n+\frac{\left(-t^2\right)^{n+1}}{1+t^2}$$

Simplificando un poco:

$$\frac{1}{1+t^2}=1-t^2+t^4-t^6+\cdots+\left(-1\right)^n t^{2n}+\frac{\left(-1\right)^{n+1}t^{2n+2}}{1+t^2}$$

Y ahora, ¡integremos!

$$\begin{aligned}\arctan\left(x\right)&=\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt=\int_0^x\left[1-t^2+t^4-t^6+\cdots+\left(-1\right)^n t^{2n}+\frac{\left(-1\right)^{n+1}t^{2n+2}}{1+t^2}\right]dt\\&=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots+\left(-1\right)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\left(-1\right)^{n+1}\int_0^x\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}dt\end{aligned}$$

En la parte derecha ha aparecido un polinomio de grado $2n+1$ junto con una integral horrenda pero bastante conveniente para nuestros objetivos.

Definamos

$$P\left(x\right)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots+\left(-1\right)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Lo que vamos a demostrar es que P debe ser el $(2n+1)$-ésimo polinomio de Taylor de $\arctan\left(x\right)$ en $x=0$. Y para ello sólo hay que ocuparnos de calcular el límite

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan\left(x\right)-P\left(x\right)}{x^{2n+1}}$$

Pero de acuerdo a la identidad que logramos, el límite es equivalente a:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(-1\right)^{n+1}\int_0^x\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}dt}{x^{2n+1}}$$

El límite no es tan complicado como parece. Basta notar que es de la forma $\frac{0}{0}$ y por tanto podemos aplicar L'Hopital:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\left(-1\right)^{n+1}\int_0^x\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}dt}{x^{2n+1}}&=\lim_{x\to 0}\frac{\left(-1\right)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{1+x^2}}{\left(2n+1\right)x^{2n}}=\frac{\left(-1\right)^{n+1}}{2n+1}\lim_{x\to 0}\frac{x^{2n+2}}{x^{2n}\left(1+x^2\right)}\\&=\frac{\left(-1\right)^{n+1}}{2n+1}\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1+x^2}=0\end{aligned}$$

Y por lo tanto, $P\left(x\right)=P_{2n+1,\arctan,0}\left(x\right)$. Es decir,

$$P_{2n+1,\arctan,0}\left(x\right)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots+\left(-1\right)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Noten que el resultado que obtuvimos es consistente con el Ejemplo 5 ya que si sustituimos $n=1$, tenemos

$$P_{3,\arctan,0}\left(x\right)=x-\frac{x^3}{3}$$

tal cual como ocurrió en el Ejemplo 5.

Hora de la venganza:

Ejemplo 6 *Sea* $f(x) = \arctan(x)$. *Calcular* $P_{n,f,0}(x)$.

Hemos demostrado ya que

$$P_{2n+1,f,0}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

y esta fórmula es válida para toda $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. *De manera que sólo nos falta decir quién es* $P_{2n,f,0}(x)$.

Bien, ahora viene una parte muy importante que se logra a partir de la definición del polinomio de Taylor:

$$P_{n,f,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

En nuestro caso

$$P_{2n+1,f,0}(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \cdots + \frac{f^{(2n+1)}(a)}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

A partir de esto podemos deducir los valores de $\frac{f^{(k)}(0)}{k!}$:

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \begin{cases} \frac{(-1)^m}{2m+1} & k = 2m+1, m \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\ 0 & k = 2m, m \in \mathbb{N} \cup \{0\} \end{cases}$$

Por lo tanto, ya tenemos toda la información para calcular $P_{2nf,0}(x)$. *Para* $n \in \mathbb{N}$,

$$P_{2n,f,0}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{2n-1} = P_{2n-1,f,0}(x)$$

Por supuesto no hay que olvidar: $P_{0,f,0}(x) \equiv 0$.

El Ejemplo 6 nos deja un par de mensajes importantes que vale la pena puntualizar. La relación

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \begin{cases} \frac{(-1)^m}{2m+1} & k = 2m+1, m \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\ 0 & k = 2m, m \in \mathbb{N} \cup \{0\} \end{cases}$$

fue obtenida igualando los coeficientes del polinomio abstracto $P_{2n+1,f,0}(x)$ con los del polinomio explícito.

Si ahora despejamos $f^{(k)}(0)$ nos queda:

$$f^{(k)}(0) = \begin{cases} \frac{(-1)^m}{2m+1}(2m+1)! & k = 2m+1, m \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\ 0 & k = 2m, m \in \mathbb{N} \cup \{0\} \end{cases}$$

Es decir,

$$f^{(k)}(0) = \begin{cases} (-1)^m (2m)! & k = 2m+1, m \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\ 0 & k = 2m, m \in \mathbb{N} \cup \{0\} \end{cases}$$

Esto es sumamente valioso porque hemos logrado calcular las derivadas de todos los órdenes de f en $x = 0$ aún cuando no nos fue posible encontrar una fórmula general para $f^{(n)}(x)$.

El otro mensaje tiene que ver con la técnica en sí que desarrollamos. Bajo nuestros propios medios logramos encontrar un polinomio $P(x)$ para el cual se cumpliera que

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - P(x)}{x^{2n+1}} = 0$$

y gracias a la unicidad del polinomio de Taylor, concluimos que $P_{2n+1,f,0}(x) = P(x)$.

Ahora bien, quizá estemos tentados a decir que siempre que encontremos un polinomio $P(x)$ (de grado a lo más n) para el cual se cumpla que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - P(x)}{(x-a)^n} = 0$$

entonces debe ocurrir que $P_{n,f,a}(x) = P(x)$. Y sí, pero con una importante condición: Es necesario que la función f tenga derecho a poseer tal polinomio de Taylor. Es decir, para hablar de $P_{n,f,a}$ es necesario que f **sea n-veces derivable en** a. Si f no es lo suficientemente derivable, no tenemos derecho a hablar del correspondiente polinomio de Taylor aún cuando se cumpla la condición del límite.

Consideren por ejemplo la función

$$g(x) = \begin{cases} x^4 & x \in \mathbb{Q} \\ \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Ahora tomemos $P(x) \equiv 0$ y notemos que

$$\lim_{x \to 0} \frac{g(x) - P(x)}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{g(x)}{x^3} = 0$$

lo cual nos puede llevar a decir que $P_{3,g,0}(x) \equiv 0$, pero esto es un error. La función g es derivable en $x = 0$ pero en el resto de su dominio ni siquiera es continua. De tal modo que $g''(0)$ NO está definido (mucho menos $g'''(0)$). Por lo tanto $P_{3,g,0}$ no existe. Así que hay que tener mucho cuidado con este detalle.

Una última cosa en la que vale la pena reflexionar del Ejemplo 6 es la relación clave que usamos para demostrar que

$$P(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$$

era el $(2n+1)$-ésimo polinomio de Taylor de $\arctan(x)$ en 0. Ésta fue la igualdad

$$\arctan(x) - P(x) = (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt$$

Llamemos

$$R(x) = (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt$$

De acuerdo con lo que pudimos probar, se cumple que

$$\lim_{x \to 0} \frac{R(x)}{x^{2n+1}} = 0$$

Lo que nos dice que la función $R(x)$ se va a 0 muy rápidamente. En general, para una función f a la que le podamos calcular $P_{n,f,a}$, podemos definir

$$R_{n,f,a}(x) = f(x) - P_{n,f,a}(x)$$

y con esta función podemos reescribir la conclusión del Teorema de Taylor como:

$$\lim_{x \to a} \frac{R_{n,f,a}(x)}{(x-a)^n} = 0$$

La función $R_{n,f,a}$ es tan importante que recibe un nombre especial:

Definición 7 *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función n-veces derivable en $a \in I$. Definimos el* ***residuo de f de orden n alrededor de*** *a, como la función $R_{n,f,a} : I \to \mathbb{R}$ dada por*

$$R_{n,f,a}(x) = f(x) - P_{n,f,a}(x)$$

Conocer al residuo de una función de manera explícita es lo que permite analizar con mayor precisión qué tan buena es la aproximación que provee el polinomio de Taylor.

Para no perder de vista lo importante que es $R_{n,f,a}(x)$, vamos a dejar plasmadas algunas propiedades que posee (ninguna necesita prueba).

Proposición 8 *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función n-veces derivable en $a \in I$. Entonces:*

1) $R_{n,f,a}(a) = 0$.

2) $R_{n,f,a}$ *es una función n-veces derivable en a.*

3) $\lim\limits_{x \to a} \frac{R_{n,f,a}(x)}{(x-a)^n} = 0$

El residuo será objeto de nuestro estudio en futuras clases, por el momento, y para finalizar la sesión de hoy, vamos a dar una última aplicación del Teorema de Taylor en la cual involucremos al residuo.

Estamos acostumbrados a que, en la presencia de un límite de la forma $\frac{0}{0}$, inmediatamente pensemos en L'Hopital, y vaya, esto es porque realmente no tenemos otra herramienta a nuestra disposición. Bueno, eso se acabó. Ahora que tenemos a los polinomios de Taylor, podemos utilizarlos para atacar este tipo de límites. Declaremos esta aplicación como el enfrentamiento: Taylor vs L'Hopital.

Vamos a calcular tres límites utilizando únicamente polinomios de Taylor. Dejaremos como ejercicio que ustedes calculen los mismos límites usando L'Hopital y al final decidan cuál método les resultó más eficiente. A la hora de decidir al ganador, tomen en cuenta que la solución ofrecida aquí va acompañada de su respectiva explicación (de ahí que naturalmente se sienta más extensa). Un dominio pleno de la técnica, hace verdaderamente eficaz el proceso.

Ejemplo 9 *Calcular*

$$\lim_{x \to 0} \frac{2x^3 + x^5}{(\log(1+x))^3}$$

Esta claro que el límite es de la forma $\frac{0}{0}$. La idea detrás de querer usar polinomios de Taylor tiene que ver con la facilidad con la que podemos manipularlos.

La estrategia consiste en identificar a la función (o funciones) a la que podamos sustituir por un polinomio de Taylor adecuado. En nuestro caso podemos tomar

$$f(x) = \log(1+x)$$

Nota: A fin de no cargar con muchos cálculos, siempre es mejor tomar funciones "no tan complicadas". Por eso no tomamos $(\log(1+x))^3$, aunque elegirla también funcionaría.

Ya que tenemos elegida la función, debemos definir el punto "a" alrededor del cual queremos nuestro polinomio de Taylor. Este paso es simple, ***siempre*** *hay que elegir "a" como el valor hacia el cual estamos haciendo tender a nuestra variable x en el límite. En nuestro caso $a = 0$.*

Lo siguiente es determinar una "n" adecuada para el polinomio de Taylor y utilizar la relación

$$R_{n,f,a}(x) = f(x) - P_{n,f,a}(x)$$

o equivalentemente

$$f(x) = P_{n,f,a}(x) + R_{n,f,a}(x)$$

Será esta última igualdad la que sustituiremos dentro del límite que nos interesa.

Para nuestro ejemplo basta tomar $n = 1$. La clase pasada ya calculamos $P_{n,f,0}(x)$ en general:

$$P_{n,f,0}(x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$$

De manera que

$$P_{1,f,0}(x) = x$$

Y por lo tanto

$$\log(1+x) = x + R_{1,f,0}(x)$$

Es importante no olvidar que

$$\lim_{x\to 0}\frac{R_{1,f,0}(x)}{x} = 0$$

Ahora llevamos a cabo la sustitución en el límite deseado:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x^3+x^5}{(\log(1+x))^3} = \lim_{x\to 0}\frac{2x^3+x^5}{(x+R_{1,f,0}(x))^3}$$

Si factorizamos x^3 en el denominador:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x^3+x^5}{(x+R_{1,f,0}(x))^3} = \lim_{x\to 0}\frac{2x^3+x^5}{x^3\left(1+\frac{R_{1,f,0}(x)}{x}\right)^3} = \lim_{x\to 0}\frac{2+x^2}{\left(1+\frac{R_{1,f,0}(x)}{x}\right)^3}$$

Notemos que tanto el numerador como el denominador tienen límite en 0 y ambos son no nulos:

$$\lim_{x\to 0}\left(2+x^2\right) = 2$$

mientras que

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{R_{1,f,0}(x)}{x}\right)^3 = \left(\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{R_{1,f,0}(x)}{x}\right)\right)^3 = 1$$

Como lo habíamos anticipado, en el último límite hemos usado el importante dato de

$$\lim_{x\to 0}\frac{R_{1,f,0}(x)}{x} = 0$$

De esta manera conseguimos:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x^3+x^5}{(\log(1+x))^3} = \lim_{x\to 0}\frac{2+x^2}{\left(1+\frac{R_{1,f,0}(x)}{x}\right)^3} = 2$$

Y por lo tanto

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x^3+x^5}{(\log(1+x))^3} = 2.$$

Es importante comentar que la elección de $n = 1$ en el Ejemplo 9 está motivada en la expresión a la que nos estamos enfrentando

$$\frac{2x^3+x^5}{(\log(1+x))^3}$$

junto con el conocimiento previo del n-ésimo polinomio de Taylor de $\log(1+x)$. Digamos que lo que hicimos fue "adelantarnos" al escenario al que nos podría llevar la sustitución del polinomio de Taylor en el límite y de ahí más o menos predecir la n adecuada. Por supuesto que esto no causa mucha certidumbre en el método que estamos desarrollando, sin embargo, como en muchas cosas, es la práctica la que a la larga nos llevará a desarrollar la intuición para que la elección de la n se sienta lo más sencilla posible. Por ahora hay mucha "prueba y error" en el procedimiento.

Cabe mencionar que no hay una única n que funcione, al contrario, si una n nos sirve, entonces cualquier $m > n$ también nos va a servir. De manera que no hay problema si no eligen la n más chica, la única diferencia es que las cuentas se pueden poner un poco más largas.

Ejemplo 10 *Calcular*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x) - x\cos(x)}{x(1-\cos(x))}$$

Una vez más estamos en la presencia de un límite de la forma $\frac{0}{0}$. *En este ejemplo será necesario aplicar polinomios de Taylor a más de una función. La base de nuestra estrategia es tratar de mantener el cálculo lo más sencillo posible.*

Podríamos estar tentados en querer calcular los polinomios de Taylor tanto del numerador como de todo el denominador pero eso puede extender mucho las cuentas. En lugar de eso, sólo nos apoyaremos de los polinomios de Taylor de $\operatorname{sen}(x)$ *y* $\cos(x)$.

Llamemos $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ *y* $g(x) = \cos(x)$. *La clase pasada encontramos que*

$$P_{2n+1,f,0}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

y

$$P_{2n,g,0}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

En este ejemplo usaremos $P_{3,f,0}(x)$ *y* $P_{2,g,0}(x)$. *Es decir,*

$$P_{3,f,0}(x) = x - \frac{x^3}{3!} \qquad y \qquad P_{2,g,0}(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$$

De esta manera obtenemos

$$f(x) = x - \frac{x^3}{3!} + R_{3,f,0}(x) \qquad y \qquad g(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + R_{2,g,0}(x)$$

Sustituimos en el límite deseado:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x) - x\cos(x)}{x(1-\cos(x))} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(x - \frac{x^3}{3!} + R_{3,f,0}(x)\right) - x\left(1 - \frac{x^2}{2} + R_{2,g,0}(x)\right)}{x\left(1 - \left(1 - \frac{x^2}{2} + R_{2,g,0}(x)\right)\right)}$$

Simplificamos un poco:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x) - x\cos(x)}{x(1-\cos(x))} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{3} + R_{3,f,0}(x) - xR_{2,g,0}(x)}{\frac{x^3}{2} - xR_{2,g,0}(x)}$$

Ahora vamos a factorizar x^3 *tanto en el numerador como en el denominador*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{3} + R_{3,f,0}(x) - xR_{2,g,0}(x)}{\frac{x^3}{2} - xR_{2,g,0}(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{3} + \frac{R_{3,f,0}(x)}{x^3} - \frac{R_{2,g,0}(x)}{x^2}}{\frac{1}{2} - \frac{R_{2,g,0}(x)}{x^2}}$$

Usando la propiedad del residuo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{R_{3,f,0}(x)}{x^3} = 0 \qquad y \qquad \lim_{x\to 0} \frac{R_{2,g,0}(x)}{x^2} = 0$$

concluimos que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}+\frac{R_{3,f,0}(x)}{x^3}-\frac{R_{2,g,0}(x)}{x^2}}{\frac{1}{2}-\frac{R_{2,g,0}(x)}{x^2}}=\frac{\frac{1}{3}+0-0}{\frac{1}{2}-0}=\frac{2}{3}$$

Y por lo tanto

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)-x\cos(x)}{x(1-\cos(x))}=\frac{2}{3}.$$

Un buen ejercicio es que traten de verificar que en el Ejemplo 10, elegir un grado menor que 3 para el polinomio de $\operatorname{sen}(x)$ y un grado menor que 2 para $\cos(x)$ no nos habría llevado a la solución. Una vez más, es cuestión de práctica el poder intuir adecuadamente los grados.

Ejemplo 11 *Calcular*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\pi x\arctan\left(\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{sen}^2(2x)+\operatorname{sen}^2(x)}$$

Nuevamente tenemos un límite de la forma $\frac{0}{0}$. Esta vez vamos a calcular los polinomios de Taylor para tres funciones

$$f(x)=\arctan\left(\tfrac{x}{2}\right)$$

$$g(x)=\operatorname{sen}(2x)$$

$$h(x)=\operatorname{sen}(x)$$

No hace falta calcular polinomios de grado muy alto, de hecho en los tres casos basta únicamente con el polinomio de grado 1.

$$P_{1,f,0}(x)=\tfrac{x}{2}$$

$$P_{1,g,0}(x)=2x$$

$$P_{1,h,0}(x)=x$$

*(*Como los polinomios son muy simples, dejamos como ejercicio la verificación de que son los correctos*)*

De esta manera tenemos:

$$\arctan\left(\tfrac{x}{2}\right)=\tfrac{x}{2}+R_{1,f,0}(x)$$

$$\operatorname{sen}(2x)=2x+R_{1,g,0}(x)$$

$$\operatorname{sen}(x)=x+R_{1,h,0}(x)$$

Hacemos las sustituciones correspondientes en el límite y calculamos su valor:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\pi x\arctan\left(\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{sen}^2(2x)+\operatorname{sen}^2(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\pi x\left(\frac{x}{2}+R_{1,f,0}(x)\right)}{\left(2x+R_{1,g,0}(x)\right)^2+\left(x+R_{1,h,0}(x)\right)^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\pi x^2\left(\frac{1}{2}+\frac{R_{1,f,0}(x)}{x}\right)}{x^2\left(2+\frac{R_{1,g,0}(x)}{x}\right)^2+x^2\left(1+\frac{R_{1,h,0}(x)}{x}\right)^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\pi\left(\frac{1}{2}+\frac{R_{1,f,0}(x)}{x}\right)}{\left(2+\frac{R_{1,g,0}(x)}{x}\right)^2+\left(1+\frac{R_{1,h,0}(x)}{x}\right)^2}=\frac{\frac{\pi}{2}}{4+1}=\frac{\pi}{10}$$

Por lo tanto

$$\lim_{x\to 0}\frac{\pi x \arctan\left(\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{sen}^2(2x)+\operatorname{sen}^2(x)}=\frac{\pi}{10}.$$

¿Quién ganó la batalla?

Como comentario final hay que mencionar que esta técnica para calcular límites usando Taylor no es exclusiva de los límites indeterminados $\frac{0}{0}$, puede usarse en cualquier tipo de indeterminación.

También quisiera insistir en que para optimizar esta método, la práctica es la clave. Y es importante tener un buen dominio de al menos los polinomios de Taylor más tradicionales para que no se tengan que estar calculando cada vez que se necesiten. Bien dominada la técnica, de verdad que se pueden hacer maravillas.

Parece que dejo ver mi preferencia por Taylor sobre L'Hopital, pero sólo lo hago para promocionar el tema. En la práctica real mantengo una posición neutral entre ambos métodos, aunque reconozco que estoy más acostumbrado a usar L'Hopital.