Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Álgebra lineal

Tarea examen 1

Elías López Rivera[1] Adolfo Angel Cardoso Vasquez[2]

Fecha: 08/03/2025

Problema 1

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$\text{a)} \quad \begin{cases} 2a-2b-3c=-2 \\ 3a-3b-2c+5d=7 \\ a-b-2c-d=3 \end{cases}$$

$$\text{b)} \quad \begin{cases} 3a-7b+4c=10 \\ a-2b+c=3 \\ 2a-b-2c=6 \end{cases}$$

$$\text{c)} \quad \begin{cases} a+2b-c+d=5 \\ a+4b-3c-3d=6 \\ 2a+3b-c+4d=8 \end{cases}$$

Demostración.

Sea A la matriz de coeficientes de cada sistema de ecuaciones lineales, entonces

$$\text{a)} \quad A=\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -2 & -3 & 0 & 2 \\ 3 & -3 & -2 & 5 & 7 \\ 1 & -1 & -2 & -1 & 3 \end{array}\right) \sim I_{1,3}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & -1 & 3 \\ 3 & -3 & -2 & 5 & 7 \\ 2 & -2 & -3 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim S_{-3,1,2},\, S_{-2,1,3}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 8 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -4 \end{array}\right) \sim M_{1/2,2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -4 \end{array}\right) \sim S_{-1,2,3}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7/2 \end{array}\right)$$

Obtenemos un numero $\neq 0$ igualado a 0. Asi el primer sistema no tiene solución.

$$\text{b)} \quad A = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -7 & 4 & 10 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -2 & 6 \end{array}\right) \sim I_{1,2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & -7 & 4 & 10 \\ 2 & -1 & -2 & 6 \end{array}\right) \sim S_{-3,1,2},\, S_{-2,1,3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & 0 \end{array}\right) \sim M_{-1,2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -4 & 0 \end{array}\right) \sim S_{-3,2,3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right) \sim M_{-1,3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right) \sim S_{1,2,3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right) \sim S_{2,1,2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

Por lo tanto, el segundo sistema tiene solución única y es $a = -2$, $b = -4$ y $c = -3$.

$$\text{c)} \quad A = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & -3 & -3 & 6 \\ 2 & 3 & -1 & 4 & 8 \end{array}\right) \sim S_{-1,1,2},\, S_{-2,1,3}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & -2 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & -2 \end{array}\right) \sim M_{1/2,2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1/2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & -2 \end{array}\right) \sim S_{1,2,3}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3/2 \end{array}\right)$$

Obtenemos un numero $\neq 0$ igualado a 0. Por lo tanto, el tercer sistema no tiene solución. $\square$

Problema 2

Para cada lista de vectores en $\mathbb{R}^3$, determinar si el primer vector puede ser expresado como una combinación lineal de los otros dos.

a) $(-2, 0, 3)$, $(1, 3, 0)$, $(2, 4, -1)$

b) $(1, 2, -3)$, $(-3, 2, 1)$, $(2, -1, -1)$

c) $(3, 4, 1)$, $(1, -2, 1)$, $(-2, -1, 1)$

Demostración.

I. Supongamos que existen $a, b \in \mathbb{R}$ tal que

$$(-2, 0, 3) = a(1, 3, 0) + b(2, 4, -1) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -2 = a + 2b \\ 0 = 3a + 4b \\ 3 = -b \end{cases}$$

Sustituyendo el valor de b en las ecuaciones obtenemos:

$$\begin{aligned} 0 &= 3a + 4(-3) = 3a - 12 \quad \Rightarrow \quad 3a = 12 \quad \Rightarrow \quad a = 4 \\ -2 &= 4 + 2(-3) = 4 - 6 = -2 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $a = 4$ y $b = -3$. Así, el primer vector puede ser expresado como una combinación lineal de los otros dos.

II. Supongamos que existen $a, b \in \mathbb{R}$ tal que

$$(1,2,-3) = a(-3,2,1) + b(2,-1,-1) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 1 = -3a + 2b \\ 2 = 2a - b \\ -3 = a - b \end{cases}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones, obtenemos:

$$\begin{aligned} -3 &= a - b \quad \Rightarrow \quad a = -3 + b \\ 2 &= 2(-3+b) - b = -6 + 2b - b = -6 + b \quad \Rightarrow \quad b = 8 \\ 1 &= -3(-3+8) + 2(8) = 9 - 24 + 16 = 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $a = -3+8 = 5$ y $b = 8$. Así, el primer vector puede ser expresado como una combinación lineal de los otros dos.

III. Supongamos que existen $a, b \in \mathbb{R}$ tal que

$$(3,4,1) = a(1,-2,1) + b(-2,-1,1) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 3 = a - 2b \\ 4 = -2a - b \\ 1 = a + b \end{cases}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones, obtenemos:

$$\begin{aligned} &1 = a + b \quad \Rightarrow \quad b = 1 - a \\ &4 = -2a - (1-a) = -2a - 1 + a = -a - 1 \quad \Rightarrow \quad a = -5 \\ &3 = -5 - 2(1-(-5)) = -5 - 2(6) = -5 - 12 = -17 \quad \# \end{aligned}$$

Por lo tanto, no existe tal combinación lineal y el primer vector no puede ser expresado como una combinación lineal de los otros dos.

$\square$

Problema 3

Sea $\mathbb{R}_3[x]$ el espacio vectorial de polinomios de grado a lo más 3 y el polinomio cero. De las siguientes listas de elementos de $\mathbb{R}_3[x]$, determina si el primer polinomio puede ser expresado como una combinación lineal de los otros dos.

a) $x^3 - 3x + 5,\ x^3 - 2x^2 - x + 1,\ x^3 + 3x^2 - 1$

b) $4x^3 + 2x^2 - 6,\ x^3 - 2x^2 + 4x + 1,\ 3x^3 - 6x^2 + x + 4$

c) $-2x^3 - 11x^2 + 3x + 2,\ x^3 - 2x^2 + 3x - 1,\ 2x^3 + x^2 + 3x - 2$

Demostración.

I. Supongamos que existen $a, b \in \mathbb{R}$ tales que

$$x^3 - 3x + 5 = a(x^3 - 2x^2 - x + 1) + b(x^3 + 3x^2 - 1)$$

Se obtiene el siguete sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 1 = a + b \\ 0 = -2a + 3b \\ -3 = -a \\ 5 = a - b \end{cases}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones, obtenemos:

$$\begin{aligned} -3 = -a \quad &\Rightarrow \quad a = 3 \\ 1 = 3 + b \quad &\Rightarrow \quad b = -2 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $a = 3$ y $b = -2$. Así, el primer polinomio puede ser expresado como una combinación lineal de los otros dos.

II. Supongamos que existen $a, b \in \mathbb{R}$ tales que

$$4x^3 + 2x^2 - 6 = a(x^3 - 2x^2 + 4x + 1) + b(3x^3 - 6x^2 + x + 4)$$

Se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 4 = a + 3b \\ 2 = -2a - 6b \\ 0 = 4a + b \\ -6 = a + 4b \end{cases}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones, obtenemos:

$$\begin{aligned} & 4 = a + 3b \\ & 2 = -2a - 6b \quad \Rightarrow \quad -1 = a + 3b \\ \Rightarrow \quad & 4 = -1 \quad \# \end{aligned}$$

Por lo tanto, no existe tal combinación lineal y el primer polinomio no puede ser expresado como una combinación lineal de los otros dos.

III. Supongamos que existen $a, b \in \mathbb{R}$ tales que

$$-2x^3 - 11x^2 + 3x + 2 = a(x^3 - 2x^2 + 3x - 1) + b(2x^3 + x^2 + 3x - 2)$$

Se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} -2 = a + 2b \\ -11 = -2a + b \\ 3 = 3a + 3b \\ 2 = -a - 2b \end{cases}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones, obtenemos:

$$\begin{aligned} 3 = 3a + 3b \quad &\Rightarrow \quad 1 = a + b \\ 2 = -a - 2b \quad &\Rightarrow \quad 2 = -a - 2(1 - a) = -a - 2 + 2a = a - 2 \quad \Rightarrow \quad a = 4 \\ -2 = 4 + 2b \quad &\Rightarrow \quad -6 = 2b \quad \Rightarrow \quad b = -3 \\ -11 = -2(4) - 3 &= -8 - 3 = -11 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $a = 4$ y $b = -3$. Así el polinomio puede ser expresado como una combinación lineal de los otros dos.

$\square$

Problema 4

Demuestra que $\langle\{x\}\rangle = \{ax : a \in F\}$, para cualquier vector x de un F- espacio vectorial. Interpretar el resultado geometricamente en $\mathbb{R}^3$

Demostración.

Recordando la definición de generado por un conjunto tenemos que:

$$\langle\{x\}\rangle := \cap\{K < F|\{x\} \subset K\}$$

Por tanto debemos demostrar una igualdad a nivel de conjuntos:

$\subseteq$):
Tenemos que como $\{ax : a \in F\}$ es el conjunto de múltiplos de un vector este es un subespacio que cumple con $x \in \{ax : a \in F\}$, por tanto $\{ax : a \in F\} \subset \langle\{x\}\rangle$

$\supseteq$):

Como $\langle\{x\}\rangle$ es un subespacio vectorial (intersección de subespacios es subespacio) que contiene a x, este becesariamente debe contener a todas sus combinaciones lineales por tanto $\langle\{x\}\rangle \subset \{ax : a \in F\}$

De ambas contenciones se concluye que $\langle\{x\}\rangle = \{ax : a \in F\}$ $\square$

Problema 5

Demuestra que si W es un subconjunto de un espacio vectorial V entonces:

$$W \leq V \iff \langle W \rangle = W$$

Demostración.

$\Leftarrow$)

Esta implicación es fácil pues por definición $W = \langle W \rangle < V$

$\Rightarrow$)

Como W ya es subespacio de V tenemos que $W \in \{K < F | W \subset K\}$, por tanto $\langle W \rangle \subset W$, luego por definición $W \subset \langle W \rangle$, por tanto $\langle W \rangle = W$ $\square$

Problema 6

Demuestra que si S_1 y S_2 son subconjuntos de un espacio vectorial V tales que $S_1 \subset S_2$ entonces $\langle S_1 \rangle \subset \langle S_2 \rangle$. En particular si $\langle S_1 \rangle = V$ entonces $\langle S_2 \rangle = V$

Demostración.

Tenemos que $S_1 \subset S_2 \subset \langle S_2 \rangle$, como este último es subespacio vectorial de V se tiene que $\langle S_1 \rangle \subset \langle S_2 \rangle$, luego tenemos que como V es un espacio vectorial que contiene a S_2 entonces $\langle S_2 \rangle \subset V$, luego si $\langle S_1 \rangle = V$ entonces $V \subset \langle S_1 \rangle \subset V$ y por tanto $V = \langle S_2 \rangle$ $\square$

Problema 7

Demuestra que si S_1 y S_2 son subconjuntos de un espacio vectorial V, entonces $\langle S_1\rangle + \langle S_2\rangle = \langle S_1 \cup S_2\rangle$

Demostración.

Como $S_1 \cup S_2 \subset \langle S_1\rangle + \langle S_2\rangle$, tenemos que $\langle S_1 \cup S_2\rangle \subseteq \langle S_1\rangle + \langle S_2\rangle$ como $S_1, S_2 \subseteq S_1 \cup S_2$ entonces $\langle S_1\rangle, \langle S_2\rangle \subseteq \langle S_1 \cup S_2\rangle$, por tanto si tomammos $u \in \langle S_1\rangle + \langle S_2\rangle$, entonces existen $z \in \langle S_1\rangle \subset \langle S_1 \cup S_2\rangle$ $l \in \langle S_2\rangle \subset \langle S_1 \cup S_2\rangle$ tal que $u = z + l$ por tanto $\langle S_1\rangle + \langle S_2\rangle \subset \langle S_1 \cup S_2\rangle$, por tanto $\langle S_1\rangle + \langle S_2\rangle = \langle S_1 \cup S_2\rangle$ ☐

Problema 8

Sea $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\} \subset \mathbb{R}^3$, demostrar que S es linealmente independiente

Demostración.

Tomamos una combinación líneal igualada a 0 de los vectores del conjunto:

$$\lambda_1 (1,0,0) + \lambda_2 (0,1,0) + \lambda_3 (0,0,1) = (0,0,0)$$

Aplicando el producto por escalar y la suma de $\mathbb{R}^3$

$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0,0,0)$$

Como dos vectores son iguales si y solo si son iguales entrada por entrada

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 = 0$$

Como la combinación líneal fue arbritaria se sigue que $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ es linealmente independiente ☐

Problema 9

Sean $\vec{u}, \vec{v}$ dos vectores distintos de un espacio vectorial, demostrar que $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ es linealmente independiente si y solo si un vector es múltiplo escalar del otro

Demostración.

$\Rightarrow$)

si $\{u, v\}$ es linealmende dependiente entonces existe una combinación lineal igualada a cero tal que alguno de sus coeficientes no es cero

$$\lambda_1 u + \lambda_2 v = 0$$

sin perdida de generalidad supongamos que $\lambda_1 \neq 0$ entonces:

$$\lambda_1 u + \lambda_2 v = 0 \implies \lambda_1 u = -\lambda_2 v \implies u = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} v$$

$\Leftarrow$)

si u es tal que existe $k \in \mathbb{R}$ con $u = kv$ si tomamos la siguiente combinación lineal:

$$1\, u - kv = 0$$

veremos que esta es igual a 0 sin embargo uno de sus coeficientes $1 \neq 0$, por tanto el conjunto no puede ser linealmente independiendiente $\square$

Problema 10

Demostrar que un conjunto S de vectores es lineamente independiente si y solo si cada subconjunto finito de S es linealmente dependiente

Demostración.

Por contrapuesta:

$\Rightarrow$)

Supongamos que $\exists T \subseteq S$ un conjunto finito l.d.

Como T es l.d. entonces $\exists x \in T$ tal que $x \in \mathfrak{L}(T \setminus \{x\})$. Además $T \subset S \Rightarrow \mathfrak{L}(T \setminus \{x\}) \subseteq \mathfrak{L}(S \setminus \{x\})$. De modo que $x \in S$ y $x \in \mathfrak{L}(S \setminus \{x\})$. Por lo tanto S es linealmente dependiente.

$\Leftarrow$)

Supongamos que S es l.d.
Como S es l.d entonces $\exists x \in S$ tal que $x \in \mathfrak{L}(S \setminus \{x\})$.
Como $x \in \mathfrak{L}(S \setminus \{x\}) = \bigcup_{\substack{Y \subseteq S \setminus \{x\} \\ Y \text{ finito}}} \mathfrak{L}(Y)$. Entonces $x \in \mathfrak{L}(Y)$ para algún $Y \subseteq S \setminus \{x\}$, Y finito.

De modo que $T = Y \cup \{x\} \Rightarrow x \in T$ y $x \in \mathfrak{L}(T \setminus \{x\})$, es decir T es finito y l.d. □

Problema 11

Suponga que $S = \{v_1, v_2, \cdots, v_r\}$ contiene un subconjunto linealmente dependiente, digamos $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ demostrar que S también es linealmente dependiente

Demostración.

Como $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ es linealmente dependiente tenemos que existe un v_k con $k \in \{1, 2, \cdots, n\}$ tal que

$$v_k = \sum_{i=1 \ i \neq k}^{n} \lambda_i \, v_i$$

Ahora definimos el conjunto $I := \{l \in \mathbb{N} | v_i \in S / \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}\}$, tenemos que:

$$v_k = \sum_{i=1 \ i \neq k}^{n} \lambda_i \, v_i + 0 = \sum_{i=1 \ i \neq k}^{n} \lambda_i \, v_i + + \sum_{i \in I} 0 \, v_i$$

Por tanto $v_k \in S$ se puede escribir como combinación lineal de los elementos restantes de S, es decir S es linealmente dependiente □

Problema 12

Demostrar que el conjunto $\{e^x, e^{2x}\}$ es un conjunto linealmente independiendente en el espacio $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, el espacio de las funciones de variable real

Demostración.

Si el conjunto fuera linealmente dependiente entonces existe $k \in \mathbb{R}$ tal que:

$$e^{2x} = k\, e^{x}$$

Como $e^{2x} \neq 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$ podemos definir la función $\frac{e^{x}}{e^{2x}} = \frac{1}{e^{x}}$, se tiene enonces que:

$$\frac{1}{e^{x}} = k \implies e^{x} = \frac{1}{k}$$

Una contradicción, ya que e^{x} no es constante, por tanto $\{e^{x}, e^{2x}\}$ es linealmente independiendente $\square$

Problema 13

Demuestra que el conjunto $\{e^{nx} : n \in \mathbb{N}\}$ *es linealmente independiente en* $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

Demostración.

Prodecemos por inducción sobre n.
Caso base:

Para $n = 0$, el conjunto $\{1\}$ es linealmente independiente.

Hipótesis de inducción:

Supongamos que el conjunto $\{1, e^{x}, \ldots, e^{nx}\}$ es linealmente independiente para algún $n \in \mathbb{N}$.

Paso inductivo:

Sea $n + 1$, entonces sean $a_0, a_1, \ldots, a_{n+1} \in \mathbb{R}$ tales que

$$\sum_{i=0}^{n+1} a_i e^{ix} = 0$$

Entonces

$$a_{n+1} e^{(n+1)x} = -\sum_{i=0}^{n} a_i e^{ix}.$$

Derivando ambos lados de la ecuación anterior, obtenemos

$$(n+1) a_{n+1} e^{(n+1)x} = -\sum_{i=0}^{n} a_i i e^{ix}.$$

Por lo que

$$
\begin{aligned}
(n+1)(-\sum_{i=0}^{n} a_i e^{ix}) &= -\sum_{i=0}^{n} a_i i e^{ix}. \\
\Rightarrow \quad \sum_{i=0}^{n}(n+1)a_i e^{ix} - \sum_{i=0}^{n} a_i i e^{ix} &= 0 \\
\Rightarrow \quad \sum_{i=0}^{n}(n+1-i)a_i e^{ix} &= 0.
\end{aligned}
$$

Una combinación lineal de $\{1, e^x, \ldots, e^{nx}\}$ que es igual a 0. Por hipótesis de inducción.

$$a_i(n+1-i) = 0 \quad \forall i \in \{0, 1, \ldots, n\}.$$

Como

$$(n+1-i) \neq 0 \quad \forall i \in \{0, 1, \ldots, n\},$$

entonces

$$a_i = 0 \quad \forall i \in \{0, 1, \ldots, n\}.$$

De modo que

$$
\begin{aligned}
a_{n+1}e^{(n+1)x} &= 0 \\
\Rightarrow \quad a_{n+1} &= 0.
\end{aligned}
$$

Por tanto

$$a_i = 0 \quad \forall i \in \{0, 1, \ldots, n+1\}$$

Por tanto el conjunto $\{1, e^x, \ldots, e^{nx}, e^{(n+1)x}\}$ es linealmente independiente.
Por inducción, el conjunto $\{e^{nx} \mid n \in \mathbb{N}\}$ es linealmente independiente en $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, pues cualuqier subconjunto finito de este es linealmente independiente. $\square$

Problema 14

Demuestra que son equivalentes para un conjunto de vectores $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \cdots, \vec{v_n}$:

I. *El conjunto $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \cdots, \vec{v_n}\}$ es linealmente independiendiente*

II. *El conjunto $\{\vec{v_1}, \cdots, c\,\vec{v_i}, \cdots, \vec{v_n}\}$ es linealmente independiendiente para todo $c \in F/\{0\}$*

III. *El conjunto $\{c_1\,\vec{v_1}, c_2\,\vec{v_2}, \cdots, c_i\,\vec{v_i}, \cdots, c_n\,\vec{v_n}\}$ es linealmente independiente para todo $\{c_i : i \in I_n\} \subset F/\{0\}$*

IV. *El conjunto $\{\vec{v_1} + c\vec{v_j}, \vec{v_2}, \cdots, \vec{v_j}, \cdots, \vec{v_n}\}$ es linealmente independiente para todo $c \in F$ si $1 \neq j$*

Demostración.

$I \implies II$

Tomamos una combinación lineal de $\{\vec{v_1}, \cdots, c\,\vec{v_i}, \cdots, \vec{v_n}\}$ igualada a cero

$$\sum_{l=1\ \ i\neq i}^{n} \lambda_l v_l + \lambda_i\, c v_i = 0$$

hacemos $\epsilon_i = \lambda_i\, c$, por tanto:

$$\sum_{l=1\ \ i\neq i}^{n} \lambda_l v_l + \epsilon_i\, v_i = 0$$

Como tenemos una combinación lineal de $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \cdots, \vec{v_n}\}$ y es es linealmente independiente se tiene que $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \epsilon_i = \cdots = \lambda_n = 0$ si $\epsilon_i = \lambda_i c = 0$ entonces $\lambda_i = 0$ pues $c \neq 0$, como la combinacioón lineal fue arbitraria se tiene que $\{\vec{v_1}, \cdots, c\,\vec{v_i}, \cdots, \vec{v_n}\}$ linealmente independiente

$II \implies III$

Tomamos una combinación lineal $\{c_1\,\vec{v_1}, c_2\,\vec{v_2}, \cdots, c_i\,\vec{v_i}, \cdots, c_n\,\vec{v_n}\}$ igualada a 0

$$\sum_{l=1}^{n} \lambda_l\, c_l v_l = 0$$

Para $l \neq i$ definimos $\epsilon_k = \lambda_k c_k$ y reescribimos

$$\sum_{l=1\ \ l\neq i}^{n} \epsilon_l v_l + \lambda_i c_i v_i = 0$$

Como esta es una combinación lineal del conjunto $\{\vec{v_1}, \cdots, c\,\vec{v_i}, \cdots, \vec{v_n}\}$ y este es linealmente independiente tenemos que $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \cdots = \lambda_i c = \cdots = \epsilon_n$, como $c \in F/\{0\}$, entonces tenemos que $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_i = \cdots = \lambda_n = 0$, por tanto $\{c_1\,\vec{v_1}, c_2\,\vec{v_2}, \cdots, c_i\,\vec{v_i}, \cdots, c_n\,\vec{v_n}\}$ es linealmente independiente

$III \implies I$

si tomamos $c_l = 1$ para toda $l \in \{1, 2, \cdots, n\}$ tenemos que $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \cdots, \vec{v_n}\}$ es linealmente independiente

$I \implies IV$

Tomamos una combinación líneal $\{\vec{v_1} + c\vec{v_j}, \vec{v_2}, \cdots, \vec{v_j}, \cdots, \vec{v_n}\}$ igualada a 0

$$\lambda_1(v_1 + cv_j) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, v_i = 0$$

Reescribiendo

$$\sum_{i=1 \ i\neq j}^{n} \lambda_i v_i + (\lambda_j + c\lambda_1)v_j = 0$$

Como esta es una combinación lineal de $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \cdots, \vec{v_n}\}$ y este es linealmente independiente tenemos que $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{j-1} = \lambda_{j+1} = \cdots = \lambda_n$ $\lambda_j + c\lambda_1 = 0$, como $\lambda_1 = 0$ necesariamente $\lambda_j = 0$, por tanto $\{\vec{v_1} + c\vec{v_j}, \vec{v_2}, \cdots, \vec{v_j}, \cdots, \vec{v_n}\}$ es linealmente independiente

$IV \implies I$

Simplememnte tomamos $c = 0 \in F$ tendriamos que el conjunto $\{\vec{v_1} + 0\vec{v_j}, \vec{v_2}, \cdots, \vec{v_j}, \cdots, \vec{v_n}\}$ que es el mismo que $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \cdots, \vec{v_j}, \cdots, \vec{v_n}\}$ es linealmente independiente ☐

Problema 15

El conjunto $\{\int_0^1, \int_0^2, \cdots, \int_0^n\}$ *es linealmente independiendente en el espacio* $lin(C(\mathbb{R}), \mathbb{R})$*, donde* $C(\mathbb{R})$ *es el espacio de funciones continuas de variable real*

Demostración.

Procedemos por inducción sobre n.

Caso base:

Para $n = 1$, el conjunto $\left\{\int_0^1\right\}$ es linealmente independiente. Pues si sucede que $\exists a_1 \in \mathbb{R}$ tal que

$$a_1 \int_0^1 = 0$$

Basta con tomar la función constante $f(x) = 1$ para obtener

$$0 = a_1 \int_0^1 1\, dx = a_1(1)$$

Por lo tanto, $a_1 = 0$ y el conjunto $\left\{\int_0^1\right\}$ es linealmente independiente.

Hipótesis de inducción:

Supongamos que el conjunto $\left\{\int_0^1, \int_0^2, \ldots, \int_0^n\right\}$ es linealmente independiente para algún $n \in \mathbb{N}$.

Paso inductivo:

Sea $n + 1$, entonces sean $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1} \in \mathbb{R}$ tales que

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_i \int_0^i f(x)\, dx = 0$$

para toda $f \in C(\mathbb{R})$. Queremos demostrar que $a_i = 0 \quad \forall i \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$.

Consideremos la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq n \\ x - n & n \leq x \end{cases}$$

Claramente $f \in C(\mathbb{R})$, por tanto

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^{n+1} a_i \int_0^i f(x)\,dx \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i \int_0^i 0\ dx + a_{n+1} \int_0^{n+1} f(x)\,dx \\ &= 0 + a_{n+1} \left[\int_0^n 0\,dx + \int_n^{n+1} (x-n)\,dx \right] \\ &= a_{n+1} \left[0 + \frac{1}{2} \right] \end{aligned}$$

Se sigue que $a_{n+1} = 0$. Es decir

$$0 = \sum_{i=1}^{n+1} a_i \int_0^i f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} a_i \int_0^i f(x)\,dx$$

Obtenemos una combinación lineal de $\left\{ \int_0^1, \int_0^2, \ldots, \int_0^n \right\}$ que es igual a 0. Por hipótesis de inducción, esto implica que $a_i = 0 \quad \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Por lo tanto, $a_i = 0 \quad \forall i \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$. Por inducción, el conjunto $\left\{ \int_0^1, \int_0^2, \ldots, \int_0^n \right\}$ es linealmente independiente para todo $n \in \mathbb{N}$. $\square$