a SpringerOpen Journal

研究 开放存取

与线性典范变换相关的模糊性函数

车天文，李炳昭*，徐天周

摘要

本文提出了一种与线性经典变换（LCT）相关的新的模糊性函数（AF），这种新的AF是在LCT和经典AF的基础上定义的。首先，研究了新定义的AF的主要属性和物理意义，结果表明，这种AF可以被看作是经典AF的一个概括。然后，新定义的自动增益被应用于检测线性频率调制信号的参数，并与经典的Radon变换相结合。通过模拟来验证所得出的结果的正确性，并讨论了所得出的结果与普通时频分析工具的比较。

关键词线性典型转换(LCT)，模糊函数(AF)，拉登变换(RT)

简介

非稳态信号的处理和分析是信号处理界最热门的研究课题之一。人们提出了一系列新的信号处理理论来分析非平稳信号，如短时傅里叶变换（STFT）[1]、小波变换（WT）[2]和分数傅里叶变换（FRFT）[3,4]。作为经典傅里叶变换（FT）的泛化，FRFT因其固有的特殊性而吸引了越来越多的关注，事实证明，FRFT可以被看作是一种单频变换[4]。1980年，Namias在量子力学中讨论了分数傅里叶运算的想法。

[5]，并于1987年[6]在应用数学界被重新发现。它被Almeida[7]和Santhanam and McCle- lan[8]引入到信号处理领域。在[9,10]中提出的FRFT的离散和数字计算方法为其在实际情况下的应用打开了大门。随着FRFT的进一步衍生，线性典型变换（LCT）被证明在光学和信号处理中发挥着重要作用，许多与FT相关的概念已经被概括到LCT领域。例如，采样理论[11,12]，特征函数[13]，卷积定理[14,15]，以及光谱分析的

*通信：Li bingzhao@bit.edu.cn
北京理工大学数学学院，北京100081，中国

均匀或不均匀的样本[16]，在LCT领域被很好地研究。LCT的effi古离散和数字编译算法在[17,18]中介绍。更多与LCT相关的结果可以参考[3,4]。

同时，线性调频（LFM）信号是一种典型的非稳态信号，被广泛用于通信、雷达和声纳系统中。LFM信号的处理非常重要，因此已经提出了许多算法和方法。与FT相关的模糊函数（AF）是LFM信号处理中最重要的时频工具之一[19,20]。此外，还提出了许多与LFM信号参数估计和频谱分析有关的其他重要和有用的方法，如最小均方误差（MMSE）估计[21]，迭代算法[22]。与de Branges理论相关的广义FT[23]，与FRFT相关的AF[24]，Wigner-Hough 变换（WHT）[25]，Chirp FT[26]，Wiger-Ville distri-bution（WVD）[27]和Raton-ambiguity变换（RAT）[28]。

遵循AF的经典定义，裴文杰和丁文杰

[29] 首先研究了与LCT相关的AF，并获得了一些重要的特性。最近，Zhao et al.

[30] 调查的属性和物理意义的AF相关的LCT在光信号处理- ing社区。与[29,30]中对自动对焦的定义不同，本文提出了一种新的与自动对焦有关的定义。

我们还讨论了LCT的主要特性和新定义的AF在LFM信号处理中的应用。

本文的组织结构如下。在 "前言 "部分，我们首先回顾了LCT的相关理论、经典AF以及之前的研究结果。第二节
"与LCT相关的模糊性功能 "一节，a
我们提出了与LCT相关的AF的新定义。
并介绍了其主要特性和物理意义。

引起的。新定义的AF在LFM信号处理中的应用在 "AFL的应用 "一节中进行了详细研究。讨论 "部分讨论了新定义的AF与其他常见的时间-频率工具的比较，如RWT、RAT等。在 "模拟 "一节中，给出了模拟结果，以显示所提出的技术的合理性和有效性。"结论 "一节是结论。

初步

LCT

一个信号$f(t)$的LCT可以被定义为[3,4]

$$F_{(a,b,c,d)}(u) = L^{(a,b,c,d)}[f(t)](u) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{j2\pi b}} e^{j\frac{d}{2b}u^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\frac{a}{2b}t^2 - j\frac{ut}{b}} f(t)dt & (b \neq 0) \\ \sqrt{d}\, e^{j\frac{cd}{2}u^2} f(du) & (b = 0) \end{cases} \quad (1)$$

其中a，b，c，d为实数，并满足$ad - bc = 1$.

很容易验证，经典的FT、FRFT、啁啾操作和缩放操作都是特殊的
如以下所示，LCT的案例。

当$(a, b, c, d) = (0, 1, -1, 0)$时，LCT成为FT。

$$L^{(0,1,-1,0)}[f(t)](u) = \sqrt{-j}\,FT[f(t)](u) \quad (2)$$

当$(a, b, c, d) = (\cos\theta, \sin\theta, -\sin\theta, \cos\theta)$时，LCT成为FRFT。

$$L^{(\cos\theta, \sin\theta, -\sin\theta, \cos\theta)}[f(t)](u) = \sqrt{e^{-j\alpha}}\, F^{\alpha}[f(t)](u) \quad (3)$$

当$(a, b, c, d) = (1, 0, \tau, 1)$时，LCT变成了啁啾声。
操作。

$$L^{(1,0,\tau,1)}[f(t)](u) = e^{\frac{j}{2}\tau u^2} f(u) \quad (4)$$

当$(a, b, c, d) = (\sigma, 0, 0, \sigma^{-1})$时，LCT成为缩放操作。

$$L^{(\sigma,0,0,\sigma^{-1})}[f(t)](u) = \sqrt{\sigma^{-1}} f(\sigma^{-1}u) \quad (5)$$

许多关于LCT的有用属性[3,4]表明LCT是最重要的非平稳信号处理工具之一，以下是加法性属性和本文将使用与LCT相关的可逆性属性。

(1) 可加性属性

$$L^{(a_2,b_2,c_2,d_2)}[L^{(a_1,b_1,c_1,d_1)}(f(t))](u) = L^{(a_3,b_3,c_3,d_3)}[f(t)](u) \quad (6)$$

其中

$$\begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$$

(2) 可逆性属性

$$L^{(d,-b,-c,a)}[L^{(a,b,c,d)}[f(t)](u)](t) = f(t) \quad (7)$$

因为LCT可以被看作是经典傅里叶和分数FT的泛化，所以它可以扩展它们的功用和应用，并解决一些超出这些操作的问题[31]。在不影响通用性的前提下，我们在本文中只考虑$b \neq 0$的情况，因为当$b = 0$时，LCT只是一个缩放变换操作。关于LCT的更多属性和与其他变换的关系，可以参考[3,4]。

随着现代信号处理技术的快速发展，经典的概念和理论也在不断变化。
在FT领域中，已经广泛地研究了
LCT领域，例如，均匀和非均匀的
采样理论[32-34]，卷积和乘积
定理[14,15]，不确定性原理[35-37]在LCT领域得到了充分的研究和调查。

含糊性功能（AF）。

信号的瞬时自相关函数
$f(t)$被定义为。

$$R_f(t, \tau) = f\left(t + \frac{\tau}{2}\right) f^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \quad (8)$$

而与$f(t)$的FT相关的经典AF被定义为$R_f(t, \tau)$对t的FT。

$$AF_f(\tau, u) = \int_{-\infty}^{\infty} R_f(t, \tau) e^{-jut} dt \quad (9)$$

或者在FT领域可以等价地定义为：。

$$AF_f(\tau, u) = \int_{-\infty}^{\infty} F\left(p + \frac{u}{2}\right)^* F\left(p - \frac{u}{2}\right) e^{jp\tau} dp \quad (10)$$

其中$F(p)$是信号$f(t)$的FT。

经典AF的属性可以列举如下

$$AF(\tau, u) = AF^*(-\tau, -u) \quad (11)$$

$$AF(0, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt \quad (12)$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} AF_x(\tau, u)AF_z(\tau, u)d\tau du = |<x, z>|^2 \quad (13)$$

AF是经典的、重要的时频信号处理工具之一。在[28]中显示，LFM信号的AF通过环境平面（τ，u）的原点，而投影线的斜率是信号的频率率。所有这些AF的特性可以帮助我们在LFM信号处理和参数估计中获得良好的结果。

先前的研究成果

基于LCT的特性和与FT相关的AF的定义，Pei和Ding[29]以及Zhao等[30]提出了与LCT相关的AF的两个不同的定义，具体如下。

定义1：*假设参数为（a，b，c，d）的信号f（t）的LCT是F（a，b，c，d）（u），那么与LCT相关的AF被定义为*[29]。

$$AF_{F_{(a,b,c,d)}}(\tau, u) = \int_{-\infty}^{\infty} F_{(a,b,c,d)}\left(v+\frac{\tau}{2}\right) F^*_{(a,b,c,d)}\left(v-\frac{\tau}{2}\right) e^{-juv}dv \quad (14)$$

在[29]中表明，这种AF的定义具有以下属性

$$AF_{F_{(a,b,c,d)}}(\tau, u) = AF(d\tau - bu, -c\tau + au) \quad (15)$$

$$AF_{F_{(a,b,c,d)}}(a\tau + bu, c\tau + du) = AF(\tau, u) \quad (16)$$

其中$AF(\tau, u)$和$AF_F(\tau, u)$代表$f(t)$的AF和$F_{(a,b,c,d)}(v)$，分别为。

定义2：*假设参数为（a，b，c，d）的信号f（t）的LCT是F（a，b，c，d）（v），那么线性加农炮（LCAF）被定义为*[30]。

$$AF_M(\tau, u) = \int_{-\infty}^{\infty} F_{(a,b,c,d)}\left(v+\frac{\tau}{2}\right) F^*_{(a,b,c,d)}\left(v-\frac{\tau}{2}\right) e^{juv}dv \quad (17)$$

在[30]中表明，这种AF的定义具有以下特性

$$AF_M(\tau, u) = AF(b\tau + du, -a\tau - cu) \quad (18)$$

$$AF_M(-u, \tau) = AF(d\tau - bu, -c\tau + au) \quad (19)$$

与LCT相关的那些种类的AF的其他属性和物理含义，也在[29,30]中进行了详细研究。

很容易看出，广义的AF由以下几个方面来定义方程（14）和（17）是瞬时的FT LCT信号的自相关函数。它们实际上是传统AF的线性坐标转换在在FT领域。与[29,30]中的定义不同，我们在本文中定义了一种与LCT相关的新的AF，以及新定义的AF在LFM信号中的应用。

以下各节也将对加工过程进行调查。

与LCT有关的房颤

与LCT相关的AF的新定义

从数学的角度来看，信号处理界的许多变换可以被看作是信号与核函数的乘积。它们也可以分为两种定义：（1）信号的局部形式与核函数的乘积，如STFT、WVD等；（2）信号与局部核函数的乘积，如WT、Gabor变换等。

不难看出，[29,30]中的广义AF是基于原始信号的局部变换。首先获得原始信号的LCT，然后应用传统的AF定义，这可以被认为是 first种的定义。与他们的定义不同，我们支持提出了一个与LCT相关的AF的新定义遵循第二种定义。

定义3：*与LCT相关的信号f（t）的AF，其参数A=（a，b，c，d）被定义为*

$$AFL[f(t)](\tau, u) = AF_{(a,b,c,d)}(\tau, u) = \int_{-\infty}^{\infty} R_f(t, \tau) K_A(t, u)dt \quad (20)$$

其中$K_A(t, u) = \sqrt{\frac{1}{j2\pi b}}e^{j\frac{d}{2b}u^2}e^{j\frac{a}{2b}t^2-j\frac{ut}{b}}$和$R_f(t, \tau) = f(t+\frac{\tau}{2})f^*(t-\frac{\tau}{2})$。

从定义和物理意义上来说LCT[3,4]，这种AF可以被解释为瞬时自相关函数 $R_f(t, \tau)$在(τ, u)平面内的ayne变换。为了使其具有差异性

从现有的与LCT相关的定义来看，我们表示一个信号$f(t)$的AF，由公式(20)所定义，具有以下特点$AF_{(a,b,c,d)}(\tau, u)$，并简化为AFL，如下所示各科室。

新定义的AFL的属性

如果一个信号$f(t)$的AFL表示为$AF_{(a,b,c,d)}(\tau, u)$，那么很容易表明AFL具有以下特性。

共轭属性

$f^*(t)$的AFL是$[AF_{(a,-b,-c,d)}(\tau, u)]^*$，*$f(-t)$的AFL是*$[AF_{(a,-b,-c,d)}(\tau, -u)]^*$*；并且$f^*(-t)$的AFL是*$AF_{(a,b,c,d)}(\tau, -u)$。

转移财产

$f(t-p)$的AFL是$e^{-jp\tau ac/2 + jcpu}AF_{(a,b,c,d)}(\tau, u-pa)$。

$f(t)e^{jwt}$的AFL是$e^{jw\tau}AF_{(a,b,c,d)}(\tau, u)$，而

$f(t)e^{jwt^2}$ *是*$e^{-j2dw\tau^2 b + j2duw\tau}AF_{(a,b,c,d)}(\tau, u-2w\tau b)$。

有限的支持

如果 $f(t)=0$，$t \notin [t, t]$，$AF_{(a,b,c,d)}(\tau, u)=0, \tau > 2-t.1$

反衍生性财产

信号f(t)可以由f(t)的AFL通过以下公式表示。

$$f(t) = \frac{1}{f^*(0)} \int_{-\infty}^{\infty} AF_{(a,b,c,d)}(t, u) K_{A^{-1}}\left(\frac{\tau}{2}, u\right) du.$$

特殊情况

当(a, b, c, d)=(0, 1, -1, 0)时，AFL就变成了clas---。医学上的房

$$AF_{(0,1,-1,0)}(\tau, u) = \sqrt{-j}\, AF(\tau, u)。$$

当(a, b, c, d) = (cos θ, sin θ, − sin θ, cos θ)时，AFL成为与FRFT(AF (τ, u))相关的AF， $AF_{(\cos\theta,\sin\theta,-\sin\theta,\cos\theta)}(\tau, u) = \sqrt{e^{-j\alpha}}\, AF_\alpha(\tau, u)$。

Energy in time-domain

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \sqrt{j2\pi}\, AF_{(0,1,-1,0)}(0, 0)。$$

对称性

$$|AF_{(a,b,c,d)}(-\tau, -u)| = |AF_{(-a,b,c,-d)}(\tau, u)|。$$

对LFM信号的敏感度

LFM信号f（t）= $e^{j(w_0 t + m_0 t^2)}$ *的AFL是*

$$AF_{(a,b,c,d)}(\tau, u) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{j2\pi b}}\, e^{j\frac{d}{2b}u^2 + w_0\tau} \, 2\pi b\, \delta(u - m_0 \tau b) & \frac{a}{2b} = 0 \\ \sqrt{\frac{1}{a}}\, e^{j\left(\frac{d}{2b}u^2 + w_0\tau - \frac{(m_0\tau - u/b)^2}{2a/b}\right)} & \frac{a}{2b} \neq 0 \end{cases} \tag{21}$$

其中 w_0，m_0 *分别代表f（t）的初始频率和频率率。*

*证明。*从AFL的定义中，我们可以得到

$$\begin{aligned} AF_{(a,b,c,d)}(\tau, u) &= \sqrt{\frac{1}{j2\pi b}}\, e^{j\frac{d}{2b}u^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\frac{a}{2b}t^2 - j\frac{ut}{b}} R_f(t, \tau) dt \\ &= \sqrt{\frac{1}{j2\pi b}}\, e^{j\frac{d}{2b}u^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\frac{a}{2b}t^2 - j\frac{ut}{b}} e^{j(a_1\tau + 2a_2\tau t)} dt \\ &= \sqrt{\frac{1}{j2\pi b}}\, e^{j\frac{d}{2b}u^2 + a_1\tau} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\frac{a}{2b}t^2} e^{j\left(2a_2\tau - \frac{u}{b}\right)t} dt \end{aligned}$$

$$\frac{a}{2b} = 0, \quad \sqrt{\frac{1}{j2\pi b}}\, e^{j\frac{d}{2b}u^2 + a_1\tau} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\left(2a_2\tau - \frac{u}{b}\right)t} dt$$

$$= \sqrt{\frac{2\pi b}{j}}\, e^{j\frac{d}{2b}u^2 + a_1\tau}\, \delta\left(u - 2a_2\tau\right)$$

$$\frac{a}{2b} \neq 0, \quad \sqrt{\frac{1}{j2\pi b}}\, e^{j\frac{d}{2b}u^2 + a_1\tau} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\frac{a}{2b}t^2} e^{j\left(2a_2\tau - \frac{u}{b}\right)t} dt$$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{\frac{1}{j2\pi b}}\, e^{j\frac{d}{2b}u^2 + a_1\tau} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\frac{a}{2b}\left(t^2 + \frac{2a_2\tau - u/b}{a/2b}t\right)} dt \\ &= \sqrt{\frac{1}{j2\pi b}}\, e^{j\frac{d}{2b}u^2 + a_1\tau - j\frac{a}{2b}\frac{(2a_2\tau - u/b)^2}{a^2/b^2}} \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\frac{a}{2b}\left(t + \frac{m_0\tau - u/b}{a/b}\right)^2} dt \\ &= \sqrt{\frac{1}{a}}\, e^{j\frac{d}{2b}u^2 + a_1\tau - j\frac{a}{2b}\frac{(2a_2\tau - u/b)^2}{a^2/b^2}} \end{aligned}$$

从公式（21）中我们可以看出，当参数满足特殊条件时，f（t）的AFL将在（τ，u）平面上产生一个脉冲。当信号是有 限 的， 由于能量的积累，也会有一个波峰。LFM信号的AFL将通过含糊不清的原点
平面(τ, u)，而投影线的斜率为b倍。
频率。 □

AFL和STFT之间的关系

假设信号f（t）的STFT被定义为

$$STFT^w(t, u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(p) w^*(p - t) e^{-ÃÃÃ} dp。$$

那么下面的定理1反映了AFL和信号f（t）的STFT之间的关系。

定理1. *参数为（a，b，c，d）的信号f（t）的AFL可以看作是信号f（t）的STFT，w（t）=f（t）* $e^{j\frac{a}{2b}t^2}$。

$$AF_{(a,b,c,d)}(\tau, u) = \sqrt{\frac{1}{j2\pi b}}\, e^{j\left[\frac{d}{2b}u^2 - \frac{a}{2b}\frac{3\tau^2}{4} + \frac{u\tau}{2b}\right]} STFT^w \times \left(\tau, \frac{2u - a\tau}{2b}\right) \tag{22}$$

证明 ，

$$\begin{aligned} AF_{(a,b,c,d)}(\tau, u) &= \sqrt{\frac{1}{j2\pi b}}\, e^{j\frac{d}{2b}u^2} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(t + \frac{\tau}{2}\right) f^* \\ &\quad \times \left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{j\frac{a}{2b}t^2 - j\frac{ut}{b}} dt \\ &= \sqrt{\frac{1}{j2\pi b}}\, e^{j\frac{d}{2b}u^2} \int_{-\infty}^{\infty} f(p) f^* \\ &\quad \times (p - \tau) e^{j\frac{a}{2b}(p - \tau + \tau/2)^2 - j\frac{u(p - \tau/2)}{b}} dp \\ &= \sqrt{\frac{1}{j2\pi b}}\, e^{j\left[\frac{d}{2b}u^2 - \frac{a}{2b}\frac{3\tau^2}{4} + \frac{u\tau}{2b}\right]} \int_{-\infty}^{\infty} f(p) f^* \\ &\quad \times (p - \tau) e^{j\frac{a}{2b}(p - \tau)^2} e^{-j\left(\frac{a}{2b}p\tau - \frac{up}{b}\right)} dp \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{j2\pi b}} e^{j\left[\frac{d u^2}{2b} - \frac{a^3\tau^2}{2b\,4} + \frac{u\tau}{2b}\right]} \int_{-\infty}^{\infty} f(p) f^*(p-\tau) e^{j\frac{a}{2b}(p-\tau)^2} e^{-j\left(\frac{u}{b} - \frac{a\tau}{2b}\right)p} dp$$

$$= \frac{1}{\sqrt{j2\pi b}} e^{j\left[\frac{d u^2}{2b} - \frac{a^3\tau^2}{2b\,4} + \frac{u\tau}{2b}\right]} \mathrm{STFT}^{w}\left(\tau, \frac{2u - a\tau}{2b}\right)$$

□

AFL的应用

为了显示新定义的AFL在以下方面的有效性

在本节中，我们将把AFL应用于LFM信号的分析和参数检测。遵循经典的LFM信号检测方法[26-28]。

本文提出的检测器是通过结合新定义的AFL和拉登变换（RT）获得的，以便
为了使这种方法与传统方法不同，它被称为 "AFL与RT相结合"，并被简化为RAFL。

探测器

RT通常用于计算机断层扫描中的图像重建，其定义为

$$R_{s,\phi}(f(x,y)) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\delta(x\sin j + y\cos j - s)dxdy$$

对于$-\infty < s < \infty$，$-\pi/2 < j < \pi/2$，其中delta函数
指明整合的方向，s是原点与X-Y平面内某条线的距离，j是X-Y平面内某条线的角度。
线和X轴。
从对LFM信号的AFL分析中，我们知道
感兴趣的方向通过环境的原点。
如果我们把$s = 0$的RT的参数设置为
phase-free AFL of Equation (20), then the detection of signal
可以从二维搜索问题减少到一维搜索
问题。由公式（21）可知，AFL的斜率值是LFM信号嗍啾率的b倍，因此，它的关键在于
在模糊平面内，为了实现能量的累积，首先要计算沿直线的线段积分，其方向由三角函数$\delta(u - bm\tau)$来规定。

在[27]中，作者使用AF的平方模作为适用于RT的函数，作为检测器。沿着这个思路，我们使用AFL的平方模数作为函数。
在我们的文章中，将RT作为检测器应用于其中。根据上面的讨论，和 "RT "相关的检测器是指
新定义的AFL被定义为以下形式。

$$\eta(m) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |AF_{(a,b,c,d)}(\tau,u)|^2 \delta(u - bm\tau)d\tau du \tag{23}$$

探测器$\eta(m)$可以用来实现能量的积累。
从方程（21）中可以看出

$$\frac{a}{2b} \equiv 0,\ \eta(m) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{1}{\sqrt{j2\pi b}} e^{j\left(\frac{d u^2}{2b} + w_0\tau\right)}\delta(u - m_0\tau)\right|^2 \times \delta(u - bm\tau)d\tau du = \frac{1}{|2\pi b|}\int_{-\infty}^{\infty} \left|e^{j\left(\frac{bd m^2\tau^2}{2} + w_0\tau\right)}\delta(bm\tau - bm_0\tau)\right|^2 d\tau \tag{24}$$

$$\frac{a}{2b} \neq 0,\ \eta(m) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{1}{a} e^{j\left(\frac{d u^2}{2b} + w_0\tau\right)} e^{-j\frac{a(m_0\tau - u/b)^2}{2b\,a^2/b^2}}\right|^2 \times \delta(u - bm\tau)d\tau du = \int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{1}{a} e^{j\left(\frac{bcm}{2a}+m_0 bm\right)} e^{j\frac{b}{2a}(m-m_0)m + w_0\tau}\right|^2 d\tau \tag{25}$$

从公式（24）和（25）可以看出，当$m \to m_0$，$\eta(m) \to \infty$。因此，可以通过计算$\eta(m)$并与阈值相比较来检测信号。

检测LFM信号

一个组件LFM

假设信号$f(t)$的模型如下，并具有单位
伴随着时间长度T的能量。

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{j\left(w_0 t + \frac{m_0 t^2}{2}\right)} \quad |t| < \frac{T}{2}$$

我们可以通过AFL的定义得到$f(t)$的AFL模数

$$|AF_{(a,b,c,d)}(\tau,u)| = \begin{cases} \left|\frac{\sin[(u/b - m_0\tau)T/2]}{(u/b - m_0\tau)T/2}\frac{1}{\sqrt{2\pi b}}\right| & (a = 0) \\ \left|\frac{1}{\sqrt{2\pi b}}\int_{-T/2}^{T/2} e^{j\frac{a}{2b}t^2 - j(m_0\tau - u/b)t}dt\right| & (a \neq 0) \end{cases} \tag{26}$$

当a=0时，我们可以得到检测器的解析解
$\eta(m)$,

$$\eta(m) = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |AF_{(a,b,c,d)}(\tau,u)|^2 \delta(u - bm\tau)d\tau du$$

$$= \frac{2}{T^3}\int \left|\frac{\sin[(m - m_0)\tau T/2]}{(m - m_0)\tau/2}\frac{1}{\sqrt{j2\pi b}}\right|^2 d\tau \tag{27}$$

方程（27）中积分前面的系数fficient是为归一化目的而添加的。当$m = m_0$，方程
(27) 得出

$$\frac{2}{1} \qquad 1$$

$$= \int_{-\infty} |AF_{(a,b,c,d)}(\tau, bm\tau)| \, d\tau$$

$$\eta(m_0) = \frac{T}{T_0} \quad 2 \quad = \pi b \qquad (28)$$

对于$m > m_0$，让$(m - m_0)/2 = p$，因此，方程（27）表示为

$$\eta(2p + m_0) = \frac{1}{2\pi b T}\int_0^T \frac{2\sin^2[p\tau T]}{(p\tau)^2}d\tau$$
$$= \frac{1}{2\pi b}\left\{\frac{2}{pT^2}\int_0^{pT^2}\frac{\sin^2(x)}{x^2}dx + \frac{2}{T^3}\int_{T/2}^{T}\frac{\sin^2(p\tau T)}{(p\tau)^2}d\tau\right\} \quad (29)$$

它在[38]中表明，以下特性成立。

$$\int\frac{\sin^2(x)}{x^2}dx = si(2x) - \frac{\sin^2(x)}{x} \quad (30)$$

其中

$$si(x) = \int_0^x \frac{\sin(t)}{t}dt.$$

将公式（30）代入公式（29），并使用以下不等式

$$\int_{T/2}^{T}\frac{\sin^2(p\tau T)}{(p\tau)^2}d\tau < \frac{1}{p^2}\int_{T/2}^{T}\frac{1}{\tau^2}d\tau = \frac{1}{p^2 T}$$

方程（29）可以被改写为

$$\eta(2p+m_0) < \frac{1}{2\pi b}\frac{2}{pT}\left[si(pT^2) - \frac{2}{pT}\sin^2\frac{pT^2}{2} + \frac{1}{pT}\right].$$

By letting $2p + m_0 = m$, we obtain

$$\eta(m) < \frac{2}{\pi b(m - m_0)T^2}\left[si\left(\frac{(m - m_0)T^2}{2}\right) + \frac{2}{(m - m_0)T^2}\cos\left(\frac{(m - m_0)T^2}{2}\right)\right] \quad (31)$$

因此，一个分量信号的检测器$\eta(m)$已经被得出，方程（31）给出了检测结果的上界。

tor为$m \geq m_0$，而$\eta(m + m_0)$可通过以下方式估计$\eta(m) = \eta(2m_0 - m)$对于$m < m_0$。然而，当$a \neq 0$时，我们可以

不再期待$\eta(m)$的解析解，必须使用数值方法。

基于这些结果，我们可以通过计算检测器$\eta(m)$来检测LFM信号。拟议的检测器在LFM信号的啁啾率上产生最大值。当T是有限的。

$\eta(m)$有一个波峰，否则$\eta(m)$就会变成delta函数，即以前讨论过。

多组份LFM

双分量信号被建模为

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{T}}e^{j\left(w_0 t + \frac{m_0 t^2}{2}\right)} + \frac{1}{\sqrt{T}}e^{j\left(w_1 t + \frac{m_1 t^2}{2}\right)} \quad \left(|t| < \frac{T}{2}\right)$$

为简单起见，假设$w_0 = w_1$，$m_0 > m_1$。$f(t)$的AFL可以被推导为

$$AF_{(a,b,c,d)}(\tau, u) = \begin{cases} \frac{\sin[(m_0\tau - u/b)T/2]}{(m_0\tau - u/b)T/2} + \frac{\sin[(m_1\tau - u/b)T/2]}{(m_1\tau - u/b)T/2} \\ \times \sqrt{\frac{j}{2\pi b}} + \frac{2}{T}\sqrt{\frac{j}{2\pi b}}\sqrt{\frac{\pi}{m_0 - m_1}} & (|\tau| \leq T) \\ \{[C(X_0) + C(X_1)]\cos(a\tau)_m^2 \\ + [S(X_0) + S(X_1)]\sin(a\tau_m^2)\}\ (a = 0) \\ 0 & (|\tau| > T) \end{cases} \quad (32)$$

where $C(x) = \int_0^x \cos(\frac{\pi t^2}{2})dt$ and $S(x) = \int_0^x \sin(\frac{\pi t^2}{2})dt$ are Fresnel积分，以及其他参数，如X_0, X_1与[28]中相同。

方程（32）中的前两个条款代表了自动条款。

的信号，而其余的是交叉项。当$a \neq 0$时。

我们无法得到AFL的解析解。与[28]中的情况类似，我们不能再期待一个分析解了

的$\eta(m)$，因为AFL的方程相当复杂，例如，包括$C(X_0), C(X_1), S(X_0), S(X_1)$。在模拟

仿真部分，我们将给出检测器的性能。

用数字方法来验证LFM信号的检测。

检测二次调频（QFM）信号

非线性调频信号在自然界和人类应用中得到了广泛的应用。

例如，三次和四次调频信号是

应用于定位蝙蝠声纳系统中的回声。由于非

线性调频信号被用于各种学科，必须要有

通过新定义的AFL对他们进行调查。

QFM信号被定义为$f(t) = Ae^{j(a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3)}$，$f(t)$的AFL得到的是

$$AF_{(a,b,c,d)}(\tau, u) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{j}}A e^{j\frac{d}{2b}u^2} 2\pi\delta\left(\frac{a_3}{4}\tau^3 + a_1\tau - u/b + 2a_2\tau b\right) \\ \times (3a_3\tau + \frac{a}{2b} = 0) \\ \sqrt{\frac{1}{6a_3 b\tau + a}}A^2 e^{j\left(\frac{d}{2b}u^2 + a_1\tau + \frac{a_3}{4}\tau^3\right) - j\frac{(2a_2\tau - u/b)^2}{2(6a_3\tau + a/b)}} \\ \times (3a_3\tau + \frac{a}{2b} \neq 0) \end{cases} \quad (33)$$

证明

$$AF_{(a,b,c,d)}(\tau, u) = \sqrt{\frac{1}{j2\pi b}}A e^{j\frac{d}{2b}u^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j[a_1\tau + \frac{a_3}{4}\tau^3 + 2a_2\tau t + 3a_3\tau t^2]}$$
$$\times e^{j\frac{a}{2b}t^2 - j\frac{u}{b}t}dt = \sqrt{\frac{1}{j2\pi b}}A e^{j\frac{d}{2b}u^2}$$

dt $\times$ $j\,3a3\tau + \frac{}{2b}t + j\,2a2\,\tau - \frac{}{b}t + j\,a1\,\tau + a3\ 4$

0 $(|t| > \frac{\tau}{2})$ $-\infty$

$$3a_3\tau + \frac{a}{2b} = 0,\ AF_{(a,b,c,d)}(\tau, u) = \sqrt{\frac{1}{j2\pi b}}\, A e^{j\frac{d}{2b}u^2} \times \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\left(2a_2\tau - \frac{u}{b}\right)t + j\left(a_1\tau + a_3\frac{\tau^3}{4}\right)} dt$$

$$= \sqrt{\frac{1}{j2\pi b}}\, A e^{j\frac{d}{2b}u^2 + j a_1\tau + a_3\frac{\tau^3}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\left(2a_2\tau - \frac{u}{b}\right)t} dt$$

$$= \sqrt{\frac{2\pi b}{j}}\, A e^{j\left(\frac{d}{2b}u^2 + a_1\tau + a_3\frac{\tau^3}{4}\right)} \delta(u - 2a_2 b\tau)$$

$$3a_3\tau + \frac{a}{2b} \neq 0,\ AF_{(a,b,c,d)}(\tau, u) = \sqrt{\frac{1}{j2\pi b}}\, A e^{j\frac{d}{2b}u^2 + a\tau + a_3\frac{\tau^3}{4}} \times \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\left(3a_3\tau + \frac{a}{2b}\right)t^2 + \left(2a_2\tau - \frac{u}{b}\right)t} dt$$

$$= \sqrt{\frac{1}{j2\pi b}}\, A e^{j\frac{d}{2b}u^2 + a_1\tau + a_3\frac{\tau^3}{4} - j\frac{\left(2a_2\tau - u/b\right)^2}{2\left(6a_3\tau + \frac{a}{b}\right)}} \times \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\left(3a_3\tau + \frac{a}{2b}\right)\left(t + \frac{(2a_2\tau - u/b)}{2\left(3a_3\tau + \frac{a}{2b}\right)}\right)^2} dt$$

$$= \sqrt{\frac{1}{a + 6a_3\tau b}}\, A e^{j\frac{d}{2b}u^2 + a_1\tau + a_3\frac{\tau^3}{4} - j\frac{(2a_2\tau - u/b)^2}{2\left(6a_3\tau + \frac{a}{b}\right)}}$$

从方程（33）中，当我们选择特殊参数时满足$3a_3\tau + \frac{a}{2b} = 0$，QFM信号的AFL可以产生在$(\tau, u)$平面的一个脉冲。与对多分量LFM信号的$\eta(m)$的讨论类似，我们无法得到这种情况的解析解。

事实上，立方相位参数可以被看作是我们想要获得的信息，而其他相位参数可以被看作是检测信号的噪声。从公式（33）中可以得出结论，AFL具有时间-频率焦点。因此，QFM信号的立方相位信息可以通过这种方式来检测。我们将在模拟部分应用关于这种信号的检测器的数值方法。 □

讨论

上一节显示，AFL可用于LFM信号的检测，在前几节中，AFL结合RT（RAFL）被证明对LFM信号的检测是有效的。在本节中，我们将把RAFL与其他常见的时频方法进行比较，包括RAT、Radon-WVD变换（RWT）、WVD-Hough变换（WHT）。首先，我们表明RAT和RWT可以被看作是等价的，然后我们在下面的部分将RAFL与RAT、WHT、FRFT进行比较。

RAT和Radon-WVD变换（RWT）。

LFM信号$f(t) = e^{j(w_0 t + mt^2/2)}$的WVD由以下公式给出

$$\mathrm{WVD}(t, w) = \delta(w - w_0 - mt) \tag{34}$$

从公式（34）可以看出，一个分量的LFM信号的WVD是一个沿直线的脉冲谱线$w = w_0 - mt$。换句话说，WVD有满足的时间-频率焦点。然而，多组的WVD潜在的LFM信号将产生交叉项，这将模糊特别是在低信噪比环境下。Radon-WVD（RWT）是对时频平面上所有可能的线路进行WVD的整合，它可以在时频平面上进行反演形成信号检测问题到二维搜索问题。

在经典的FT意义上，$f(t)$的AF由以下公式给出

$$AF(\tau, u) = e^{jw_0\tau}\delta(u - m\tau) \tag{35}$$

AF也通过了模糊平面的原点并满足时频聚焦特性。RT的线整数是在所有经过的线上进行的。

歧义平面的原点，以得到RAT。RAT从二维搜索问题减少到一维搜索问题。lem[28]。显然，一个信号的AF和WVD是二维FT对，AF可以通过对二维FT的应用得到WVD

根据上述讨论，RWT和RAT是相等的。在LFM信号检测中借出。

RAFL和RAT

信号$f(t)$的AF和AFL为

$$AF(\tau, u) = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(t + \frac{\tau}{2}\right) f^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-jut} dt \tag{36}$$

$$AF_{(a,b,c,d)}(\tau, u) = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(t + \frac{\tau}{2}\right) f^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) K_A(t, u) dt \tag{37}$$

从公式(36)和(37)来看，经典的自动对焦可以被认为是AFL的特例。AFL有三个额外的自由，即表征LCT的参数，这使得AFL对信号处理更有吸引力。在AFL平面上，我们可以通过调整参数来分离信号项和交叉项，交叉项的抑制也可以通过AFL有效地实现，这可以从模拟中看出。

在这个意义上，RAFL可以被看作是RAT的一个概括，在非静止信号检测和参数估计方面，我们使用RAFL比RAT有更多的自由。

RAFL和WVD-Hough变换（WHT）。

Hough变换最初是为获取直线而提出的，但后来被推广到任何图形。尽管WVD产生了交叉项，但WVD与HT相结合的方法已被应用于啁啾信号的检测和参数估计，包括多分量信号。WHT可以解释为[17]中WVD的线积分。

$$\mathrm{WHT}(f,g) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{WVD}(t,v)\delta(v-f-gt)dtdv$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{WVD}(t,f+gt)dt \quad (38)$$

或者说，一个信号的WHT可以被看作是其AF的FT。

$$\mathrm{WHT}(f,g) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{AF}(\tau, g\tau)e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (39)$$

事实上，我们很容易发现，WHT等同于
RWT和RAT，所以RAFL可以被看作是WHT的一个概括。信号的WHT会在终域产生峰值，其坐标为相位参数f_0 和g_0。在平面（f，g）上，如果有一个峰值超过阈值，就决定了啁啾声的存在。WHT是一个很好的信号检测工具，即使在嵌入噪声的环境中。

WVD与HT相结合，为信号和图像处理提供了一座桥梁。然而，与AFL相比，
WHT需要大量的计算。

FRFT

FRFT实际上是一种单一的时频变换。随着阶数从0增加到1，FRFT可以揭示出
逐渐变化的信号的特征，从时间
频域。与通常的二次元时间不同
它以单一变量揭示了时间-频率特征，并且不受交叉术语的影响。与传统的FT相比，FRFT在非平稳信号的处理中表现得更好，特别是在类似啁啾的信号处理中。此外，一个额外的自由度（阶）有时可能有助于获得比通常的时频分布或FT更好的性能。而其开发的快速算法导致计算负荷小，性能好。

信号$f(t)$的FRFT是。

$$F^{\alpha}[f(t)] = F_f(\alpha,u) = \int_{-\infty}^{\infty} K_\alpha(t,u)f(t)dt \quad (40)$$

与

$$K_\alpha(t,u) = \sqrt{\frac{1-\cot\alpha}{2\pi}}\, e^{j(u^2/2\cot\alpha - ut\csc\alpha + t^2/2\cot\alpha)} \quad (\alpha \neq 0)$$

正如我们所知，在二维F_f（α，u）中会有最大值，其坐标（α，u）对应于初始频率和啁啾率。

$$m = -\cot\alpha$$
$$w_0 = u/\sin\alpha \quad (41)$$

RWT可以通过去啁啾来计算。

$$\mathrm{RWT}(u,\alpha) = \left|\frac{1}{|\sin\alpha|}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j(w_0 t+mt^2/2)}dt\right|^2_{m=-\cot\alpha,\ w_0=u/\sin\alpha} \quad (42)$$

以及FRFT的平方。

$$|F_x(\alpha,u)|^2 = \left|\frac{1}{2\pi\sin\alpha}\right|\left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{j(-ut\csc\alpha + t^2/2\cot\alpha)}dt\right|^2 \quad (43)$$

从公式（42）和公式（43），我们得到

$$\mathrm{RWT}(u,\alpha) = a\pi\,|F_x(\alpha,u)|^2 \quad (44)$$

这就是说，FRFT等同于RWT。

模拟

为了验证本文的推导结果，并显示AFL在LFM信号检测中的优势，模拟了
本节中进行了模拟。从这些模拟中不难看出，AFL在检测LFM信号方面比传统的有更好的性能。

LFM信号的检测 *单分量LFM信号的检测* 单

分量LFM信号被定义为

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{T}}e^{j\left(w_0 t + \frac{m_0 t^2}{2}\right)} \qquad |t| < \frac{T}{2}。$$

参数选择为：$T = 40s$，$w_0 = 0.1rad/s$。
$m_0 = 0.4rad/s^2$。$f(t)$的|AFL|可以计算为

$$|\mathrm{AF}_{(a,b,c,d)}(\tau,u)| = \begin{cases} \left|\frac{\sin[(u/b-m_0\tau)T/2]}{(u/b-m_0\tau)T/2}\right|\frac{1}{2\pi b} & (a=0) \\ \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-T/2}^{T} e^{j\frac{a}{2b}t^2 + j(m_0\tau - u/b)t}dt\right| & (a \neq 0) \end{cases}$$

对（a, b, c, d）=（0, 2, -1/2, 1）的单分量LFM信号进行检测。$_{(a,b,c,d)}$（τ，u)的轮廓部分和检测器η(m)分别绘制在图1a,b中。

从图1a可以看出，AFL通过AFL平面的原点，投影线的斜度为$b * m_0$，这与前面讨论的相同。图1b显示了检测器η（m）的值和上界。在啁啾率m_0 附近有一个峰值，如前文所述。因此，我们可以根据RAFL来检测LFM信号。

多分量LFM信号的检测

假设*p分量*的信号定义如下

$$f(t) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{p} \frac{1}{\sqrt{T}} e^{j\left(w_i t + \frac{m_i}{2}t^2\right)} & (|t| < \frac{T}{2}) \\ 0 & (|t| > \frac{T}{2}) \end{cases} \quad (45)$$

图2显示了T=40s和不同参数的多分量LFM信号的检测器η(m)。从图2中可以看出，该检测器可用于检测多组分LFM信号。
对不等幅的LFM信号进行处理。

多分量LFM信号的检测 多分量LFM信号的时频分析将产生交叉项。抑制交叉项是一个重要的

在信号处理中的问题。人们提出了两种方法来解决这个问题：核函数filter和AF中的filter。
域。前者是根据目标得出的一些约束条件设计一个内核函数，后者是利用

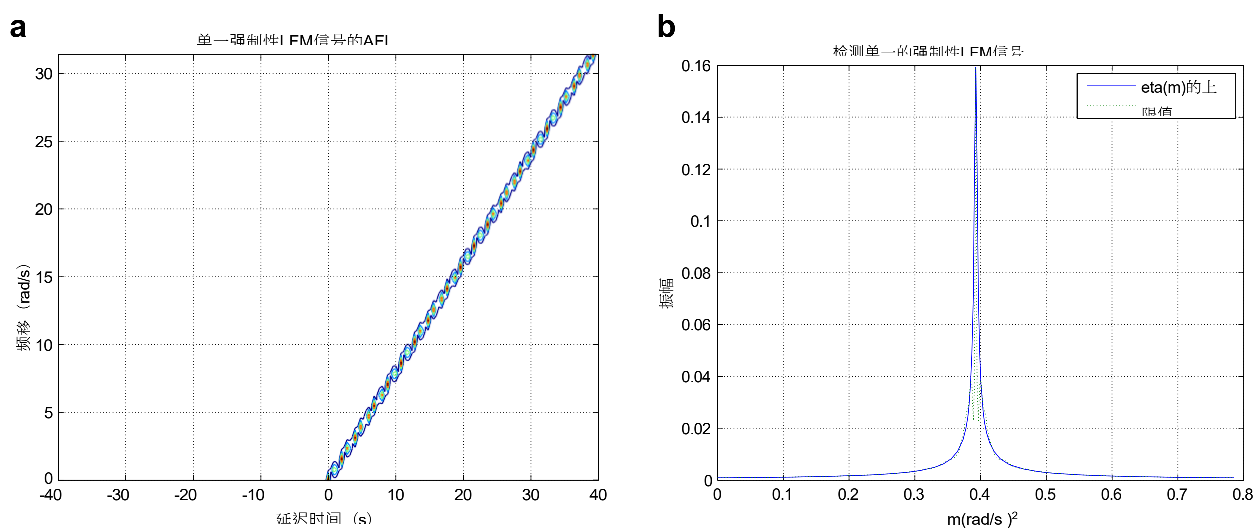

图1 对单分量LFM信号的检测， ***(a, b, c, d)*** **=（0, 2, -1/2, 1）。**

AF的独特属性。本文提出的AFL有三个额外的自由，即表征LCT的参数，这将使AFL在分析信号和交叉项抑制方面更具吸引力。

图3显示了在T=40s的情况下，非常接近啁啾率的LFM信号的检测结果。分辨率，这是一个测量分离两个啁啾信号能力的参数。在这个模拟中，分辨率被定义为在无噪音环境下解决两个同样强的LFM信号的最小啁啾率分离。通过计算机模拟，试验信号的长度T范围从10到100。

60s，我们得到的分辨率约为b/T^2。

图3显示了T=40s的η*(m)的*临界分辨率情况。它揭示了分辨率与信号长度*T*的平方成正比。如前所述，RAFL是RAT的一个概括，啁啾率分辨率与[28]中的RAT一致，即$1/T^2$ 级。信号长度必须大于$b/.6.$才能达到啁啾率分辨率$.6.$。

检测有噪音的LFM信号

带有噪声的单组分LFM信号被定义为

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{j(w_0 t + \frac{m_0}{2} t^2)} + n(t) \qquad |t| < \frac{T}{2}$$

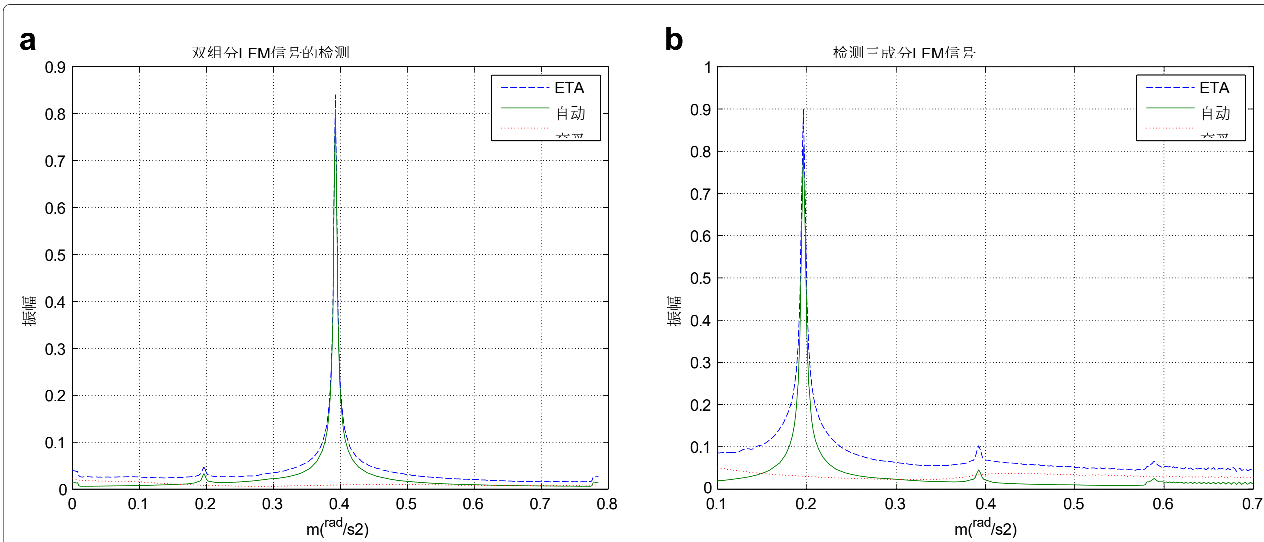

图2 多分量LFM信号的检测器η*(m)*，*T=40s*，不同的参数。**(a)** 双分量LFM信号的η*(m)*信号，一个分量的振幅是另一个分量的十分之一。*(a, b, c, d)* = *(1/32*, 16,-1/32, 16*)*, $w_0 = w_1 = 0.1$ *rad/s*, $m_0 = 0.4$ *rad/s*^{2}, $m_1 = 0.2$ *rad/s*^{2}。**(b)** 具有不同振幅的三分量信号的η*(m)*。*(a, b, c, d)* = *(1/32*, 32, -1/*64*, 16*)*, $w_0 = w_1 = w_2 = 0.1$ rad/s, $m_0 = 0.2$ *rad/s*^{2}, $m_1 = 0.4$ *rad/s*^{2}, $m_2 = 0.6$ rad/s^2

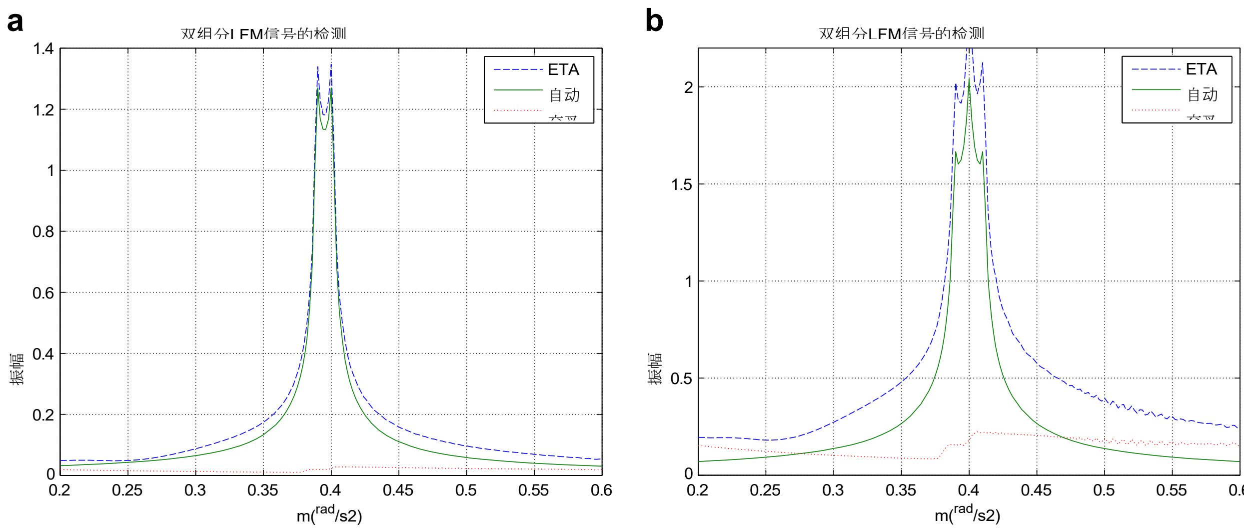

图3 非常接近啁啾率的LFM信号的检测结果。(a) $w_0 = w_1 = 0.1$ *rad/s*, $m_0 = 0.4$ *rad/s*^{2}, $m_1 = 0.39$ rad/s^2. **(b)** $w_0 = w_1 = w_2 = 0.1$ *rad/s*, $m_0 = 0.41$ *rad/s*^{2}, $m_1 = 0.4$ *rad/s*^{2}, $m_2 = 0.39$ rad/s^2

其中t 噪声$n(t)$被假定为零均值的白高斯噪声，方差σ^2 。

Of course, the p-component LFM signal embedded in noise is defined as

$$f(t) = \sum_{i=0}^{p} \frac{1}{\sqrt{T}} e^{j(w_i t + \frac{m_i t^2}{2})} + n(t) \qquad |t| < \frac{T}{2}$$

检测器的输出如图4所示，信噪比分别为∞、-10和-20dB。从图4可以看出，在强噪声背景下，检测器显示了三分量LFM信号的存在，其中m_1 和m_2 非常接近。这些模拟验证了所提出的检测器的eff效性。

不同时频工具检测器的比较 在本节中，我们将以铪长度的LFM信号为例，对不同的检测器进行比较。
时间-频率工具。图5绘制了比较结果

在公式（42）中，LFM信号的普通探测器中，$T = 40s$，$w_0 = w_1 = 0.1$ *rad*/s，$m_0 = 0.2$ rad/s^2 ,$m_1 =$ 0.4 *rad*/s^2 .

从图5a中可以看出，RWT可以检测到啁啾率附近的两个峰值的LFM信号。RWT的结果是通过将RWT应用于LFM信号，然后计算沿直线的线段积分，其方向由delta函数δ $(u - bm\tau - w_0)$确定。

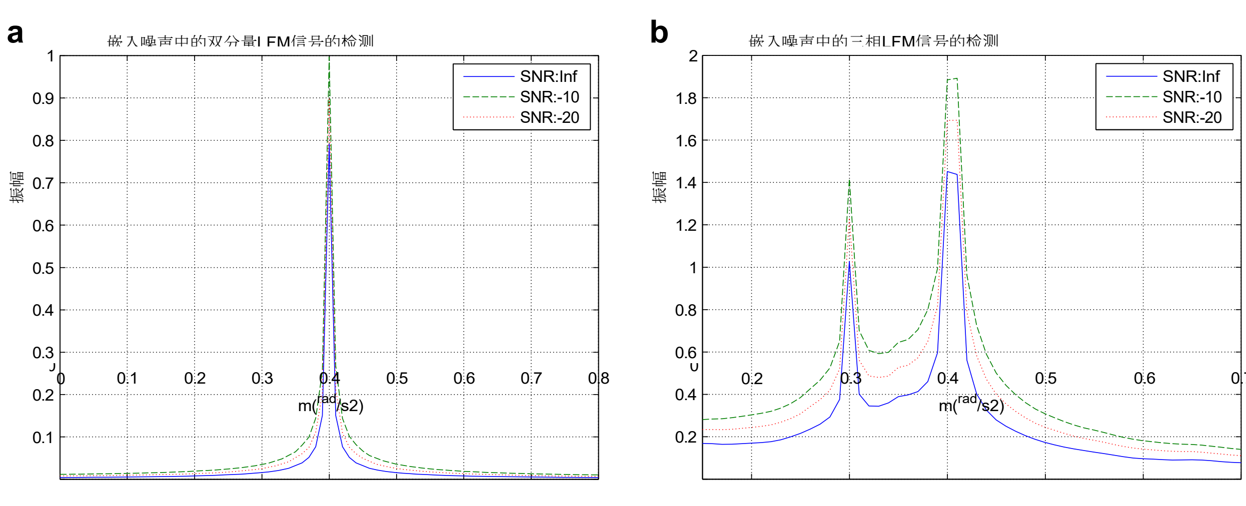

图4 嵌入高斯噪声中的LFM信号的检测。(a) 一个单分量的LFM信号，$w_0 = 0.1$ *rad/s*, $m_0 = 0.4$ rad/s^2 。
(b) t 三分量LFM信号，$w_0 = 0.1$ *rad/s*, $m_0 = 0.3$ rad/s^2, $w_1 = 0.2$ *rad/s*, $m_1 = 0.4$ rad/s^2, $w_2 = 0.3$ *rad/s*^{2}, $m_2 = 0.41$ rad/s^2 。
$T = 40s$

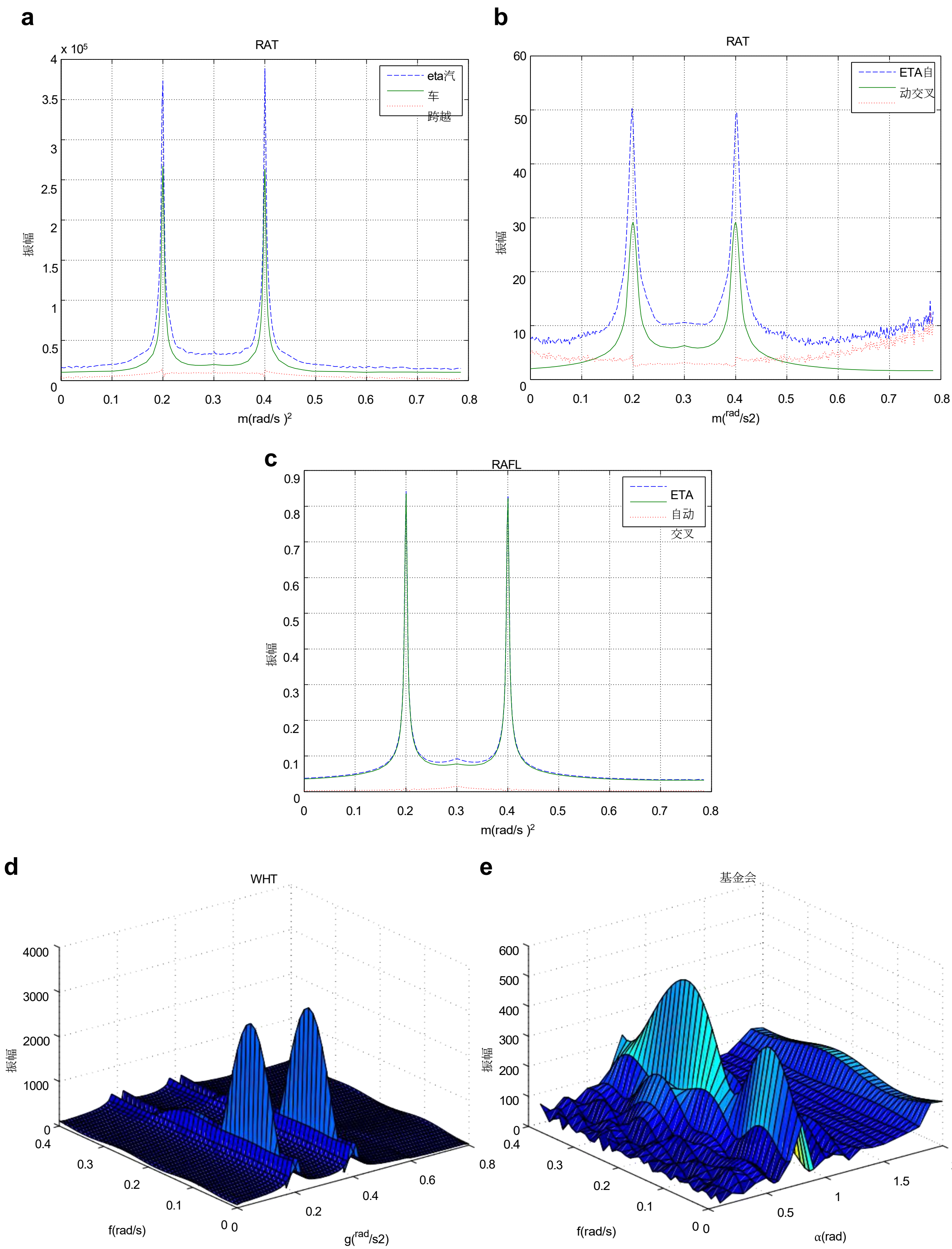

图5 LFMf信号的常用检测器之间的比较。(a) RWT。**(b)** RAT。**(c)** RAFL。**(d)** WHT。**(e)** FRTT。

然而，当$w_0 /= w_1$，问题将是一个二维搜索问题。

从图5b中我们可以看到，RAT是一个好的但是，交叉项仍然很严重，而且交叉项会干扰自动项。在图5d中，LFM信号的WHT可以在平面上形成峰值，而峰值的坐标对应于参数。但计算量非常大，而且它不是

因此，明显发现尖锐的峰值，这是WHT的缺陷。LFM信号的FRFT显示了时间频率的变化。焦点在特殊订单。探测和参数测定通过FRFT的二维搜索，可以获得LFM信号的信息。

域。然而，有一些问题需要解决，如计算等。而多分量LFM信号的FRFT

从图5e中可以看出，在有限的时间内检测出的信号可能并不令人满意。最后，从图5c中不难发现，手稿中提出的RAFL可以检测到多成分的LFM信号，而且性能是一维搜索，effect更好。

上面的比较和描述只是从模拟中看到的。现在，我们可以确定一个定量指标来研究检测器的有效性。众所周知，交叉项的抑制是多分量LFM信号处理的一个重要问题，因此我们将定量指标定义为

$$r = \frac{|cro|^2}{|tf|^2} \qquad (46)$$

其中*cro*和*tf*分别为交叉项值和时间频率值。它表示交叉项相对于总体值的比率，可以看作是交叉项抑制的有效性。RWT、RAT和RAFL的指数分别为3.31、14.28、0.31%。从定量指标来看，我们可以发现本文提出的RAFL可以有效地抑制交叉项。

检测QFM信号

QFM信号被定义为$f(t) = \sqrt{\tfrac{1}{T}}\, A e^{j(a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3)}$ $(|t| < \tfrac{T}{2})$，其中$T = 10$，$a_1 = 0.1$，$a_2 = 1$，$a_3 = 0.01$，AFL $f(t)$的值是

$$AF_{(a,b,c,d)}(\tau, u) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2\pi b}{j}}\, A\, e^{j\frac{d}{2b}u^2 + a_1\tau + \frac{a_3}{4}\tau^3}\, \delta(u - 2a_2\tau b) & \times(3a_3\tau + \frac{a}{2b} = 0) \\ \frac{1}{6a_3 b\tau + a} A^2 e^{j\frac{d}{2b}u^2 + a_1\tau + \frac{a_3}{4}\tau^3 - j\frac{(2a_2\tau - u/b)^2}{2(6a_3\tau + a/b)}} & \times(3a_3\tau + \frac{a}{2b} /= 0) \end{cases} \qquad (47)$$

图6描绘了这个二次调频信号的自动对焦和自动增益，$T = 10s$，$a_1 = 0.1\ rad/s$，$a_2 = 1\ rad/s^2$，$a_3 = 0.01\ rad/s^3$。从图6a中我们知道，经典的自动对焦系统很难检测到立方体相位。然而，在图6b中，$_3$的表现更为突出。

事实上，QFM信号的主要信息是由其立方相位显示的。也就是说，立方相位参数可以被看作是我们想要得到的信息。由于第二相的系数fficient大约是立方相的100倍，可以认为$_3$，如果第二相被看作是相对于噪声的SNR是-40dB。立体。

QFM信号的AFL也通过AFL平面的原点。因此我们用同样的方法来检测QFM信号。从公式（33）可知，对于功率信号，如果我们选择特殊参数，AFL可以产生一个脉冲，而对于有一定时间的能量信号，会有能量积累的波峰。

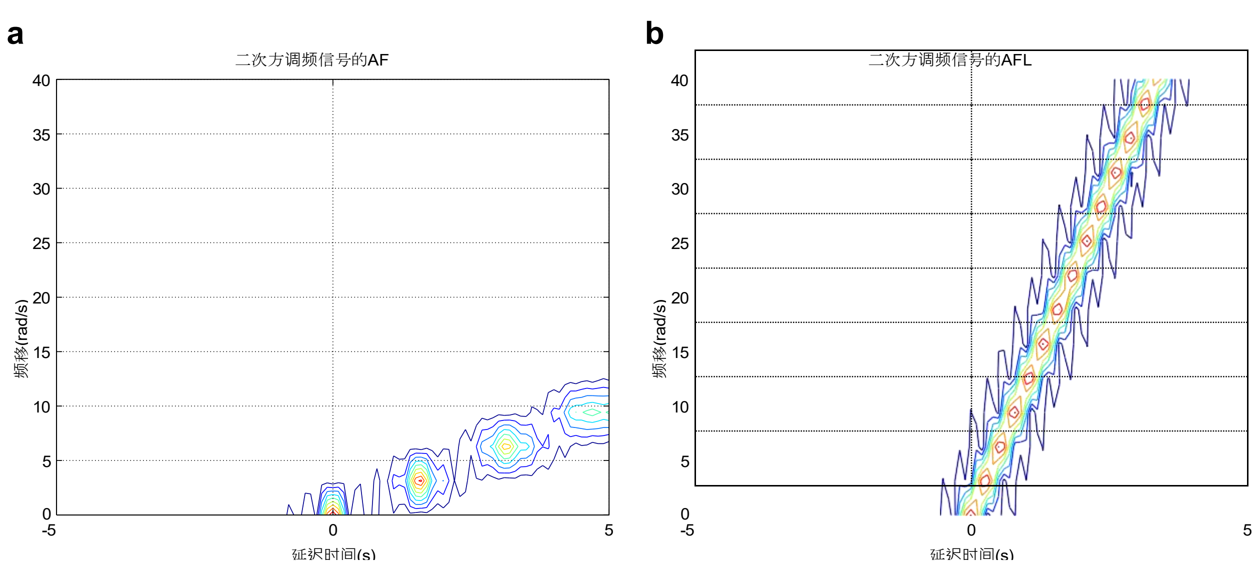

图6 在$T = 10s$的二次调频信号的AF和AFL。（**a**）AF。(**b**) AFL，$(a, b, c, d) = (1, 6, 1/2, 4)$。

总结

在经典AF和局部变换理论的基础上，本文提出了一种与LCT相关的AF的新定义（我们将其命名为AFL），它可以被视为经典AF的概括之一。我们详细研究了AFL的主要属性。AFL有三个额外的自由，即LCT的参数，这使得AFL对LFM信号的分析更有吸引力。通过结合AFL和RT得到的RAFL被用于检测LFM信号。它可以在RAFL平面上产生围绕啁啾率的尖锐峰值，并且可以有效地抑制交叉项，这可以从仿真和比较结果中得到验证。沿着这个方向的未来工作是探索AFL在非稳态信号处理中的应用，以及AFL与[29,30]中提出的其他类型的AF在LFM信号检测和参数估计中的比较。

方法

手稿中使用的所有信号都是由Mat- lab软件产生的，模拟部分的算法是根据 "AFL的应用 "部分提出的主要结果提出的。

竞争性利益

作者声明，他们没有竞争性利益。

鸣谢

作者要感谢处理编辑和匿名审稿人的宝贵意见和建议。这对我们大幅改进稿件有很大的帮助。作者还要感谢北京理工大学的金海博士的多次讨论和对稿件的校对。这项工作得到了国家自然科学基金（编号60901058和61171195）的支持，也得到了北京市自然科学基金（编号1102029）的部分支持。

收到。2011年11月14日 接受：2012年5月27日 发表：2012年7月11日

参考文献

1. L Cohen, Time-frequency distribution-a review.Proc. IEEE.**77**(7), 941-981 (1989)
2. I Daubechies, *Ten Lectures on Wavelets*.(Philadelpha, PA: SIAM, 1992)
3. HM Ozaktas, MA Kutay, Z Zalevsky, *The Fractional Fourier Transform with Applications in Optics and Signal Processing*.(New York: Wiley, 2001)
4. R Tao, B Deng, Y Wang, *Fractional Fourier Transform and its Applications*.(北京: 清华大学出版社, 2009)
5. V Namias, 分数阶傅里叶变换及其在量子力学中的应用.IMA J. Appl. Math.**25**(3), 241-265 (1980)
6. AC McBride, FH Kerr, On Namias's fractional Fourier transforms.IMA J. Appl. Math.**39**(2), 59-175 (1987)
7. LB Almeida, 分数傅里叶变换和时频表示.IEEE Trans.Signal Process.**42**, 3084-3091 (1994)
8. B Santhanam, JH McClellan, 离散旋转傅里叶变换.IEEE Trans.Signal Process.**44**(4), 994-998 (1996)
9. HM Ozaktas, O Ankan, MA Kutay, G Bozdaki, 分数傅里叶变换的数字计算.IEEE Trans.Signal Process.**44**(9), 2141-2150 (1996)
10. S-C Pei, J-J Ding, Closed-form discrete fractional and affine Fourier transforms.IEEE Trans.Signal Process.**48**(5), 1338-1353 (2000)
11. C-P Li, B-Z Li, T-Z Xu, 从未知位置的非均匀样本中逼近与LCT域相关的带限信号.Signal Process.**92**(7), 1658-1664 (2012)
12. R Tao, B-Z Li, Y Wang, 与线性典范变换相关的带限信号的采样问题.IEEE Trans.Signal Process.**56**(11), 5454-5464 (2008)
13. S-C Pei, J-J Ding, Eigenfunctions of linear canonical transform.IEEE Trans.Signal Process.**50**(1), 11-26 (2002)
14. D Bing, T Ran, W Yue, 线性典型变换的卷积定理及其应用.Sci. China-Inf.Sci. **49**(4), 592-603 (2006)
15. D Wei, Y Li, A convolution product theorem for the linear canonical transform.IEEE Signal Process.Lett.**16**(10), 853-856 (2009)
16. B-Z Li, T-Z Xu, 线性典型变换域中采样信号的光谱分析.Math.Math. Probl.Eng. **2012**, 19 (2012)
17. FS Oktem, HM Ozaktas, 连续和离散线性典范变换的精确关系.IEEE Signal Process.Lett.**16**(8), 727-730 (2009)
18. A Koc, HM Ozaktas, C Candan, MA Kutay, 线性典范变换的数字计算.IEEE Trans.Signal Process.**56**(6), 2383-2394 (2008)
19. G Kutyniok, LCA群的模糊函数、Wigner分布和Cohen类.J. Math.Anal.Appl. **277**(2), 589-608 (2003)
20. RG Shenoy, TW Parks, 宽带模糊函数和Affine Wigner分布.Signal Process.**41**(3), 339-363 (1995)
21. HT Li, PM Djuric, 多重线性/二次方啁啾的非线性参数的MMSE估计.IEEE Trans.Signal Process.**46**(3), 796-801 (1998)
22. CD Luigi, E Moreau, 线性频率调制信号参数估计的迭代算法.IEEE Signal Process.Lett.**9**(4), 127-129 (2002)
23. M Mboup, T Adalai, A generalization of the Fourier transform and its application to spectral analysis of chirp-like signals.Appl. Comput.Harmon.分析。**32**(2), 305-312 (2012)
24. C Zhe, W Hongyu, Q Tianshuang, 与分数傅里叶三段式相关的模糊函数研究(中文).Signal Process.**19**(6), 499-502 (2003)
25. S Barbarossa, 用Winger-Hough组合变换分析多成分LFM信号.IEEE Trans.Signal Process.**43**(6), 1511-1515 (1995)
26. X-G Xia, 离散啁啾-傅里叶变换及其在啁啾率估计中的应用.IEEE Trans.Signal Process.**48**(11), 3122-3133 (2006)
27. Wigner-Ville分布的钥石变换用于多分量LFM信号的分析.Signal Process.**89**(5), 791-806 (2009)
28. M Wang, AK Chan, CK Chui, 使用Radon-Ambiguity变换的线性频率调制信号检测.IEEE Trans.Signal Process.**46**(3), 571-587 (1998)
29. S-C Pei, J-J Ding, 分数运算与分母之间的关系 时间-频率分布及其应用。IEEE Trans.Signal Process.**49**(8), 1638-1655 (2001)
30. H Zhao, Q-W Ran, J MA, L-Y Tan, 线性典范模糊函数和线性典范变换时刻.Optik.**122**(6), 540-543 (2011)
31. JJ Healy, JT Sheridan, 信号的线性典范变换具有紧凑支持或带状限制的情况。Opt.Lett.**33**(3), 228-230 (2008)
32. C Candan, HM Ozaktas, 分数傅里叶和其他变换的采样和序列扩展定理.Signal Process.**83**(11), 2455-2457 (2003)
33. B-Z Li, R Tao, Y Wang, 与线性典范变换有关的新采样公式.Signal Process.**87**(5), 983-990 (2007)
34. JJ Healy, JT Sheridan, 线性典范变换的采样和离散化.Signal Process.**89**(4), 641-648 (2009)
35. J Zhao, R Tao, Y-L Li, Y Wang, 线性典范变换的不确定性原则.IEEE Trans.Signal Process.**57**(7), 2856-2858 (2009)

36. KK Sharma, SD Joshi, 线性典范变换域中真实信号的不确定性原则.IEEE Trans.Signal Process.**56**(7), 2677-2683 (2008)

37. A Stern, 线性典范变换域中的不确定性原则及其在光学中的一些影响。J. Opt.Soc. Am. **25**(3), 647-652 (2008)

38. I Gradshteyn, I Ryzhik, *积分、数列和产品表*.(San Diego, CA: Academic, 1980)

doi:10.1186/1687-6180-2012-138
将这篇文章引用为: Che *et al.*:与线性典范变换相关的模糊性函数。*EURASIP Journal on Advances in Signal Processing* 2012 **2012**:138.