

南京信息工程大学

本科生毕业论文（设计）



题 目 基于 ICFWD 对 LFM 信号的输出
信噪比期望不等式模型

学生姓名 强盛周

学 号 201983160037

学 院 数学与统计学院

专 业 信息与计算科学（嵌入式）

指导教师 李顺杰 副教授

二〇二三年五月十四日

声 明

本人郑重声明：

- 1、以“求实、创新”的科学精神从事科学研究工作。
- 2、本论文中除引文外，所有测试、数据和相关材料均为真实有效的。
- 3、本论文是我个人在指导教师的指导下进行的研究工作和取得的研究成果，请勿用于非法用途。
- 4、本论文中除引文和致谢的内容外，并未抄袭其他人或其他机构已经发表或撰写过的研究成果。
- 5、关于其他同志对本研究所做的贡献均已在论文中作了声明并表示了谢意。

作者签名：强盛周

日期：2023 年 5 月 14 日

目 录

摘要	I
Abstract	II
符 号 说 明	III
1 引言	1
1.1 研究背景	1
1.2 国内外研究现状	1
1.3 研究内容和结构安排	2
2. 预备知识	3
2.1 LCT	3
2.2 ICFWD	4
3. 数学模型	5
3.1 ICFWD 的输出信噪比期望	5
3.2 ICFWD 的不等式模型	5
3.3 ICFWD 的不等式解	6
3.3.1 合成信号	6
3.3.2 真实世界信号	6
4. 对含噪 LFM 信号的不等式模型	7
4.1 单分量 LFM 信号的 ICFWD	7
4.2 双分量 LFM 信号的 ICFWD	7
4.3 平稳零期望噪声的 ICFWD	10
4.4 不等式解	10
4.4.1 单分量情形	11
4.4.2 双分量情形	12
5. 数值仿真	14
6 结论与展望	24
参考文献	25
致谢	29

基于 ICFWD 对 LFM 信号的输出信噪比期望不等式模型

强盛周

南京信息工程大学数学与统计学院, 江苏 南京 210044

摘要: 线性正则变换(Linear Canonical Transform, LCT)是提高传统 Wigner 分布(Wigner Distribution, WD)检测精度的有力工具。然而, 嵌入的 LCT 自由参数增加了计算复杂性。最近, WD 的瞬时互相关函数类型(Instantaneous Cross-correlation Function type of Wigner Distribution, ICFWD), 一种与 LCT 相关的特定 WD, 已被证明是检测精度和计算复杂性之间权衡的结果。在本文中, ICFWD 通过输出信噪比(Signal-to-Noise Ratio, SNR)不等式建模和相对于 ICFWD 和 WD 的求解, 应用于检测噪声单分量和双分量线性调频信号(Linear Frequency-Modulated, LFM)。提出了在增添零均值加性高斯白噪声的显性信号上进行 ICFWD 和 WD, 这是基于期望的输出信噪比不等式模型。本文通过推导分别得到了零期望噪声的单分量和双分量 LFM 信号不等式模型的解, 并将 ICFWD、一种闭形式的瞬时互相关函数型 Wigner 分布(Closed-form Instantaneous Cross-correlation Function type of Wigner Distribution, CICFWD)和仿射型 Wigner 分布(Affine Characteristic Wigner Distribution, ACWD)、核函数型 Wigner 分布(Kernel Function type of Wigner Distribution, KFWD)、卷积表示型 Wigner 分布(CRWD)等经典的 Wigner 分布进行了信号检测性能的比较, 还将 ICFWD 的计算速度与 CICFWD、ACWD、KFWD 和 CRWD 的进行了比较。

关键词: 不等式模型, 线性正则变换, 检测线性调频信号, 线性调频信号

The Expected Inequality Model of Output Signal-to-Noise Ratio of LFM Signal Based on ICFWD

Shengzhou Qiang

School of Mathematics & Statistics, NUIST, Nanjing 210044, China

Abstract: Linear canonical transform (LCT) is a powerful tool for improving the detection accuracy of the conventional Wigner distribution (WD). However, the LCT free parameters embedded increase computational complexity. Recently, the instantaneous cross-correlation function type of WD (ICFWD), a specific WD relevant to the LCT, has shown to be an outcome of the tradeoff between detection accuracy and computational complexity. In this paper, the ICFWD is applied to detect noisy single component and bi-component linear frequency-modulated (LFM) signals through the output signal-to-noise ratio (SNR) inequality modeling and solving with respect to the ICFWD and WD. The expectation-based output SNR inequality model between the ICFWD and WD on a pure deterministic signal added with a zero-mean random noise is proposed. The solutions of the inequality model in regard to single component and bi-component LFM signals corrupted with additive zero-mean stationary noise are obtained respectively. The detection accuracy of ICFWD with that of the closed-form ICFWD (CICFWD), the affine characteristic Wigner distribution (ACWD), the kernel function Wigner distribution (KFWD), the convolution representation Wigner distribution (CRWD) and the classical WD is compared. It also compares the computing speed of ICFWD with that of CICFWD, ACWD, KFWD and CRWD.

Key words: Inequality Models, Linear Canonical Transforms, Detecting LFM Signals, Linear Frequency Modulated Signals

符号说明

符号	说明与解释
$f, f_1, \hat{g}, \tilde{g}; n$	确定信号；随机噪声
$\mathbf{A} = (a, b; c, d), \mathbf{A}_1 = (a_1, b_1; c_1, d_1),$ $\mathbf{A}_2 = (a_2, b_2; c_2, d_2)$	参数矩阵
$\mathcal{K}_{\mathbf{A}_1} \mathcal{K}_{\mathbf{A}_1}$	线性正则域核函数
$F_{\mathbf{A}}, F_{\mathbf{A}_1}, F_{\mathbf{A}_2}, \hat{G}_{\mathbf{A}_1}, \tilde{G}_{\mathbf{A}_1}$	f 的 LCT; \hat{g} 的 LCT; \tilde{g} 的 LCT
$*$	复共轭
$f\left(t + \frac{\tau}{2}\right) f^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right)$	瞬时自相关函数
W_f, W_n	f, n 的 WD
$W_f^{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}}, W_n^{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}}, W_{f+n}^{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}}$	$f, n, f+n$ 的 CICFWD
$W_f^{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}}, W_{\hat{g}}^{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}}, W_{\tilde{g}}^{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}}, W_n^{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}}, W_{f+n}^{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}}$	$f, \hat{g}, \tilde{g}, n, f+n$ 的 ICFWD
$W_{\hat{g}, \tilde{g}}^{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}}, W_{\tilde{g}, \hat{g}}^{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}}$	\hat{g}, \tilde{g} 的 ICFWD 交叉项
$\text{ESNR}_{\text{WD}}, \text{ESNR}_{\text{ICFWD}}^{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}}, \text{ESNR}_{\text{CICFWD}}^{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}}$	WD, ICFWD, CICFWD 的期望输出信噪比
$\max; \arg \max$	最大值，最大值成立的自变量取值
Mean	算数平均
$E[\cdot]; \text{Var}[\cdot]$	期望算子；方差算子
$\delta(\cdot)$	狄拉克算子
$\alpha, \hat{\alpha}, \tilde{\alpha}; \beta, \hat{\beta}, \tilde{\beta}$	初始频率；频率
$h_1, \hat{h}_1, \tilde{h}_1$	$\frac{1}{2\beta b_1 + a_1}, \frac{1}{2\hat{\beta} b_1 + a_1}, \frac{1}{2\tilde{\beta} b_1 + a_1}$
\tilde{l}, \hat{l}	$\frac{a}{2b} + \frac{d_1 - \hat{h}_1}{8b_1} - \frac{\tilde{\beta}}{4}, \frac{a}{2b} + \frac{d_1 - \tilde{h}_1}{8b_1} - \frac{\hat{\beta}}{4}$
D	噪声的功率谱密度

1 引言

1.1 研究背景

近几十年来, 线性正则变换(Linear Canonical Transform, LCT)因其在光学传播[1]、时频分析[2]和信号处理[3]中的重要性而备受关注。一些著名的积分变换都是 LCT 的特例, 包括傅立叶变换(Fourier Transform, FT)[4]、分数阶傅立叶变换(Fractional Fourier transform, FRFT)[5]-[9]、菲涅尔变换[10]和洛伦兹变换[11]。LCT 的普遍性使其成为具有代表性的积分变换。LCT 具有三个自由参数, 它在非平稳信号分析中优于没有任何自由度的 FT 和只有一个自由度的 FRFT。事实上, LCT 通过所谓的线性正则域超越了普通时域、频域和分数域, 其在信号表示方面表现出更大的灵活性。

Wigner 分布(Wigner Distribution, WD)的定义始于量子统计力学[12], 而后来它在信号处理[13]中被发现有许多应用。众所周知, WD 是一种高效的时频分析工具, 但在处理多分量信号时容易受到交叉项的干扰, 这是 WD 最大弊端。因此, 目前推导出 WD 的大量变体, 包括伪 Wigner 分布(Pseudo Wigner Distribution)[14]、平滑伪 Wigner 分布(Smoothed Pseudo Wigner Distribution)[15]、S 方法(S-method)[16]、扩展 Wigner 分布(General Wigner Distribution)[17]、Li Wigner 分布[18]、Choi-Williams 分布[19]和缩放 Wigner 分布(Scaled Wigner Distribution)[20]。这些都是时频平面上的能量分布。以天波超视距雷达信号检测(Sky-Wave Over-the-Horizon Radar Signal Detection)为例[21], 在没有任何自由度的情况下, 它们无法从极强的噪声背景中提取目标回波信号的主要特征。这是一个弱信号检测问题, 因此, 为了解决该问题[22], 需要一些突破性的研究方法来扩展和突破传统的 WD。

1.2 国内外研究现状

从提高信号表示灵活性的角度来看, 将 LCT 的参数引入传统 WD 似乎是解决弱信号检测问题的可行方法。但存在多种类型的参数嵌入技术, 如台湾大学贝苏章等提出的线性正则域自相关函数替换[2], 北京理工大学李炳照课题组的线性正则域核替换[23]-[25], 南京信息工程大学张志超的线性正则域卷积替换[26]、线性正则域瞬时互相关函数(Instantaneous Cross-correlation Function, ICF)替换[27], 以及线性正则域闭型瞬时互相关函数(Closed-form Instantaneous Cross-correlation Function, CICF)替换[28]。WD 的相应变化分别称为仿射特征型 Wigner 分布(Affine Characteristic Wigner Distribution, ACWD)[2]、核函数型 Wigner 分布(Kernel Function Wigner Distribution, KFWD)[23]、卷积表示型 Wigner 分布(Convolution Representation Wigner Distribution, CRWD)[26]、ICF 型 Wigner 分布(ICFWD)[27]和 CICF 型 Wigner 分布(CICFWD)[28]。

ACWD、KFWD、CRWD、ICFWD、CICFWD 的 LCT 自由参数个数分别为三、三、三、六、九。时频分布的参数个数越多, 信号表示就越灵活, 检测精度会更好。而我们之前的工作主要集中在基于 CICFWD 的弱信号检测上, 具体而言, 我们建立了 CICFWD 的输出信噪比(S

NR)不等式[29] (不等式组[30]) 模型或优化[31] (多目标优化[32]) 模型来解释其检测准确性提高的原因。此外, 我们还解决了含噪线性调频信号(Linear Frequency-Modulated, LFM)的不等式 (不等式组) 模型或优化 (多目标优化) 模型[33]-[35]以验证检测精度的提高。但是, 参数过多会导致两个问题。第一个是 CICFWD 的参数选择并不是唯一的, 因此检测精度是不稳定的[36]。第二个是 CICFWD 的高复杂度和低计算效率使其不适合实时应用[37]。因此, 我们需要在实际应用中使用参数较少的方法, 如 ACWD、KFWD、CRWD、ICFWD。其中, 最后一个 ICFWD 的参数数量最大的, 所以它的检测精度也是最佳的。这也意味着, 它能够在高计算效率与高检测精度中做出一个更好权衡。

在我们的最近的成果中, 我们分别提出了 ICFWD 输出信噪比的优化 [37]和多目标优化[36]模型, 还导出了模型关于含噪单分量 LFM 信号的最优解。其中的关键在于单分量 LFM 信号的目标函数中只能找到一个绝对值项。然后, 对平方目标函数使用拉格朗日乘数法[38], 就可以算出解。该方法在很大程度上依赖于这样一个事实, 即 LFM 信号是单个分量。而对于多分量 LFM 信号, 目标函数中存在不止一个绝对值项, 所以拉格朗日乘数法将会失效。

1.3 研究内容和结构安排

为了克服在多分量 LFM 中拉格朗日乘数法将会失效的缺陷, 用不等式模型代替优化模型是可行的, 因为求解不等式模型不需要使用拉格朗日乘数法。本文的主要目的是通过 ICFWD 的输出信噪比不等式建模和求解来研究弱信号检测问题。本文首先提出了 ICFWD 的输出信噪比不等式模型。然后, 本文针对在零期望平稳噪声背景下的单分量和双分量 LFM 信号求解不等式模型。本文还比较了 ICFWD、CICFWD、ACWD、KFWD、CRWD 和 WD 的检测精度, 以及 ICFWD、CICFWD、ACWD、KFWD 和 CRWD 的计算速度。本文的主要内容如下:

1. 定义了含有零均值加性高斯白噪声中显性信号 ICFWD 基于期望的输出信噪比
2. 建立了含噪信号的 ICFWD 与 WD 的输出信噪比期望不等式模型
3. 分别推导了添加零期望平稳噪声的单分量和双分量 LFM 信号的不等式模型的解
4. 展示了 ICFWD 在保持或者提高检测精度和节省计算时间方面的优势

本文的其余部分的结构如下。第 2 节回顾了 LCT 和 ICFWD 的定义。第 3 节研究了 ICFWD 的基于期望的输出 SNR 不等式建模和求解。第 4 节推导了噪声 LFM 信号的不等式模型的解。第 5 节进行数值实验。第 6 节总结了本文。

2. 预备知识

2.1 LCT

从几何角度看, FT 和 FRFT 分别是时频平面上的角度为 $\frac{\pi}{2}$ 和 α 的旋转变换。LCT 是 FRFT 的推广或称为扩展 FRFT, 可以看作是时频平面上的仿射变换[39]-[42]。与参数矩阵 $\mathbf{A} = (a, b; c, d)$ 相关的信号 $f(t)$ 的 LCT 由[43]-[48]定义:

$$F_A(u) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \mathcal{K}_A(u, t) dt, & b \neq 0 \\ \sqrt{d} e^{\frac{cd}{2}u^2} f(du), & b = 0 \end{cases}, \quad (1)$$

其中,

$$\mathcal{K}_A(u, t) = \frac{1}{\sqrt{j2\pi b}} e^{j\left(\frac{d}{2b}u^2 - \frac{1}{b}ut + \frac{a}{2b}t^2\right)}, \quad (2)$$

表示线性正则域核函数。参数 a, b, c, d 是满足仿射条件 $ad - bc = 1$ 的实数。

这里给出两个 LCT 的特例: 当参数矩阵 $\mathbf{A} = (1, 0; 0, 1)$ 时, 它退化为单位变换, 即

$F_{(1,0;0,1)}(u) = f(u)$; 当参数矩阵 $\mathbf{A} = (0, 1; -1, 0)$ 时, 它退化为带有一个额外常数因子 $\frac{1}{\sqrt{j}}$ 的傅

里叶变换, 即 $F_{(0,1;-1,0)}(u) = \frac{1}{\sqrt{j2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-jut} dt$ 。

另外, 当 LCT 参数 $b = 0$ 时, 它退化为一个缩放操作 $\sqrt{d} f(du)$ 和一个 Chirp 倍增操作 $e^{\frac{cd}{2}u^2}$

的组合。当其参数 $a = 0$ 时, 它退化为一个缩放傅里叶变换操作 $\frac{1}{\sqrt{b}} F_{(0,1;-1,0)}\left(\frac{u}{b}\right)$ 和一个 Chirp

倍增操作 $e^{\frac{d}{2b}u^2}$ 的组合。当其参数分别为 $b = 0$ 和 $a = 0$ 时, 它们的线性正则域分别变成了普通的时域和频率域。因此, 为了不失一般性, 本文仅仅讨论满足参数 $b \neq 0$ 和 $a \neq 0$ 的 LCT。因为可

以由 $ad - bc = 1$ 和 $b \neq 0$ 或者 $a \neq 0$ 推导出: $c = \frac{ad-1}{b}$ 和 $d = \frac{bc+1}{a}$, 所以它的三个参数是

a, b, d 或者 a, b, c 。

2.2 ICFWD

$F_{\mathbf{A}_1}\left(t+\frac{\tau}{2}\right)f^*\left(t-\frac{\tau}{2}\right)$ 表示线性正则域上的 ICF。其中， $F_{\mathbf{A}_1}$ 代表 $f(t)$ 的 LCT，它的参数

矩阵为 $\mathbf{A}_1=(a_1,b_1;c_1,d_1)$ ；上标 $*$ 表示复数共轭。接着， $f(t)$ 的 ICFWD 通过

$F_{\mathbf{A}_1}\left(t+\frac{\tau}{2}\right)f^*\left(t-\frac{\tau}{2}\right)$ 带有参数矩阵 $\mathbf{A}=(a,b,c,d)$ 的 LCT 来定义[27]:

$$\mathbf{W}_f^{\mathbf{A}_1,\mathbf{A}}(t,u)=\int_{-\infty}^{+\infty}F_{\mathbf{A}_1}\left(t+\frac{\tau}{2}\right)f^*\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\mathcal{K}_{\mathbf{A}}(u,\tau)d\tau, \quad (3)$$

两个参数矩阵意味着 ICFWD 含有 6 个 LCT 自由变量。

如果让 $F_{\mathbf{A}_2}$ —— $f(t)$ 带有 $\mathbf{A}_2=(a_2,b_2;c_2,d_2)$ 的 LCT 代替线性正则域上的 ICF，它就变成

了线性正则域上的 CICF—— $F_{\mathbf{A}_1}\left(t+\frac{\tau}{2}\right)F_{\mathbf{A}_2}^*\left(t-\frac{\tau}{2}\right)$ 。 $f(t)$ 的 CICFWD 定义[28]-[32]:

$$\mathbf{W}_f^{\mathbf{A}_1,\mathbf{A}_2,\mathbf{A}}(t,u)=\int_{-\infty}^{+\infty}F_{\mathbf{A}_1}\left(t+\frac{\tau}{2}\right)F_{\mathbf{A}_2}^*\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\mathcal{K}_{\mathbf{A}}(u,\tau)d\tau, \quad (4)$$

它是 $F_{\mathbf{A}_1}\left(t+\frac{\tau}{2}\right)F_{\mathbf{A}_2}^*\left(t-\frac{\tau}{2}\right)$ 带有参数矩阵 $\mathbf{A}=(a,b,c,d)$ 的 LCT，所以它有三个参数矩阵

$\mathbf{A}_1,\mathbf{A}_2,\mathbf{A}$ 。这也就意味着 CICFWD 拥有 9 个 LCT 自由变量。

显然，因为 ICFWD 比 CICFWD 少一个 $F_{\mathbf{A}_2}$ 的计算，所以它的计算复杂度的会更低。这也

是本文采用 ICFWD 来提升弱信号检测效率的原因。另外，由于假设 $b_2 \neq 0$ 的存在，所以 ICF

WD 也不是 CICFWD 的特例，并且两者可能拥有一样的检测精度。

带有参数矩阵 $\mathbf{A}_1=(1,0;0,1)$ 和 $\mathbf{A}=(0,1;-1,0)$ 的 ICFWD 退化为带有一个额外常量因子

$\frac{1}{\sqrt{j2\pi}}$ 的传统 WD[13]:

$$\mathbf{W}_f(t,\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f\left(t+\frac{\tau}{2}\right)f^*\left(t-\frac{\tau}{2}\right)e^{-j\omega\tau}d\tau. \quad (5)$$

将 ICFWD 和 WD 进行对比，不难发现：ICFWD 拥有更高程度的自由度来提升弱信号检测精度。

3. 数学模型

本节定义了对于加入高斯白噪声 $n(t)$ 的显性信号 $f(t)$ 的 ICFWD 基于期望的输出信噪比模型；然后，在 ICFWD 和 WD 之间建立基于期望的输出 SNR 不等式模型；最后，试图解决来源为合成信号和真实世界信号的不等式模型。

3.1 ICFWD 的输出信噪比期望

假设含噪信号为 $f(t) + n(t)$ ，其中 $f(t)$ 是一个纯显性信号， $n(t)$ 是一个高斯白噪声。那么，CICFWD 的输出信噪比期望[32]可以定义为：

$$\text{ESNR}_{\text{CICFWD}}^{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}} = \frac{\max_{(t,u) \in \mathbb{R}^2} |\mathbf{W}_f^{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}}(t, u)|}{\underset{(t,u)}{\text{arg max}} |\mathbf{W}_f^{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}}(t, u)| \left\{ \text{Mean} \left[\left\{ \mathbb{E} \left[\mathbf{W}_n^{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}}(t, u) \right] \right\} \right] \right\}}, \quad (6)$$

其中，当 $\underset{(t,u)}{\text{arg max}} |\mathbf{W}_f^{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}}(t, u)|$ 为可数集时，“Mean” 是算术均值的意思；当前者为不可数集时，后者为积分平均值。

可以注意到，CICFWD 在基于期望的输出信噪比中有一个重要关系式[31]： $\mathbb{E}[\mathbf{W}_{f+n}^{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}}(t, u)] = \mathbf{W}_f^{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}}(t, u) + \mathbb{E}[\mathbf{W}_n^{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}}(t, u)]$ 。类似地，该关系式可以退化为 ICFWD 的： $\mathbb{E}[\mathbf{W}_{f+n}^{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}}(t, u)] = \mathbf{W}_f^{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}}(t, u) + \mathbb{E}[\mathbf{W}_n^{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}}(t, u)]$ 。下面给出 ICFWD 基于期望的输出信噪比定义[36][37]：

$$\text{ESNR}_{\text{ICFWD}}^{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}} = \frac{\max_{(t,u) \in \mathbb{R}^2} |\mathbf{W}_f^{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}}(t, u)|}{\underset{(t,u)}{\text{arg max}} |\mathbf{W}_f^{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}}(t, u)| \left\{ \text{Mean} \left[\left\{ \mathbb{E} \left[\mathbf{W}_n^{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}}(t, u) \right] \right\} \right] \right\}}. \quad (7)$$

3.2 ICFWD 的不等式模型

由于 ICFWD 基于期望输出信噪比的值只依赖于给定信号和噪声的参数矩阵 \mathbf{A}_1, \mathbf{A} 。最新的工作定义了一个优化模型[37]：

$$\max_{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}} \text{ESNR}_{\text{ICFWD}}^{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}}, \quad (8)$$

并且解出了 ICFWD 最优的 LCT 自由参数。然而，解决优化模型似乎非常复杂，因为存在内部优化问题 $\max_{(t,u) \in \mathbb{R}^2} |\mathbf{W}_f^{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}}(t, u)|$ 。事实上，最新的工作表明，多分量 LFM 信号的优化模型的解决方案似乎并不可行，因为在目标函数中发现许多绝对值项需要取偏导数。

由于不用计算内部优化问题，所以不等式模型比优化模型简单。作为 ICFWD 基于期望的

输出信噪比优化模型的替代方案，ICFWD 和 WD 基于期望的输出信噪比不等式模型可能适用于多分量 LFM 信号的情况。

WD 基于期望的输出信噪比可以被定义[29]为：

$$\text{ESNR}_{\text{WD}} = \frac{\max_{(t,\omega) \in \mathbb{R}^2} |\mathbf{W}_f(t, \omega)|}{\underset{\arg \max_{(t,\omega)} |\mathbf{W}_f(t, \omega)|}{\text{Mean}} \left\{ \left| \mathbb{E}[\mathbf{W}_n(t, \omega)] \right| \right\}}, \quad (9)$$

对于给定的信号和噪声，它是一个常数。对于适当的参数矩阵 \mathbf{A}_1, \mathbf{A} ，ICFWD 的基于期望的输出 SNR 的值可以大于 WD 的基于期望的输出 SNR 的值。因此，ICFWD 和 WD 之间基于期望的输出 SNR 不等式模型已经建立：

$$\text{ESNR}_{\text{ICFWD}}^{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}} > \text{ESNR}_{\text{WD}}. \quad (10)$$

3.3 ICFWD 的不等式解

公式(10)可以被改写为：

$$\frac{\max_{(t,u) \in \mathbb{R}^2} |\mathbf{W}_f^{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}}(t, u)|}{\underset{\arg \max_{(t,u)} |\mathbf{W}_f^{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}}(t, u)|}{\text{Mean}} \left\{ \left| \mathbb{E}[\mathbf{W}_n^{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}}(t, u)] \right| \right\}} > \frac{\max_{(t,\omega) \in \mathbb{R}^2} |\mathbf{W}_f(t, \omega)|}{\underset{\arg \max_{(t,\omega)} |\mathbf{W}_f(t, \omega)|}{\text{Mean}} \left\{ \left| \mathbb{E}[\mathbf{W}_n(t, \omega)] \right| \right\}}, \quad (11)$$

$\max_{(t,u) \in \mathbb{R}^2} |\mathbf{W}_f^{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}}(t, u)|$ 和 $\max_{(t,\omega) \in \mathbb{R}^2} |\mathbf{W}_f(t, \omega)|$ ，这两个优化问题需要被首先解决。很显然，对于合成信号和真实世界信号的解法是不同的。

3.3.1 合成信号

对于 ICFWD， $\mathbf{W}_f^{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}}(t, u)$ 可以表示为是一个变量为 t, u 的方程，带有参数 a_1, b_1, d_1, a, b, d 。

对于 WD， $\mathbf{W}_f(t, \omega)$ 可以表示为是一个变量为 t, ω 的方程。得益于经典的极值理论[49]，优化问题 $\max_{(t,u) \in \mathbb{R}^2} |\mathbf{W}_f^{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}}(t, u)|$ 和 $\max_{(t,\omega) \in \mathbb{R}^2} |\mathbf{W}_f(t, \omega)|$ 都存在解析解。前者是一个具有参数 a_1, b_1, d_1, a, b, d 的代数公式，而后者是一个没有任何参数的代数公式。总之，不等式模型的解是合成信号情况下的代数不等式。

3.3.2 真实世界信号

由于峰值检测算法[50]，对于给定参数 a_1, b_1, d_1, a, b, d 的 $\max_{(t,u) \in \mathbb{R}^2} |\mathbf{W}_f^{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}}(t, u)|$ 优化问题存在算术解。类似地，对于 $\max_{(t,\omega) \in \mathbb{R}^2} |\mathbf{W}_f(t, \omega)|$ 优化问题也存在算术解。遍历所有参数并检查不等式 (11)，会产生一个参数 a_1, b_1, d_1, a, b, d 的点集。为了缩小参数遍历的范围，可以使用均匀设计[51]的技术来获得一组具有代表性的实验点。不等式模型的解是真实世界信号下的参数点集。

4. 对含噪 LFM 信号的不等式模型

本节重点解决一类重要合成信号的不等式模型，包括 LFM 信号单分量和双分量情况。本节首先分别探索了单双分量情况下， $\max_{(t,u) \in \mathbb{R}^2} |\mathbf{W}_f^{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}}(t, u)|$ 优化问题的解决方案；接着解出对于零

期望平稳信号的期望问题 $\arg \max_{(t,u)} \frac{\text{Mean}}{|\mathbf{W}_f^{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}}(t, u)|} \left\{ \left| \mathbb{E} \left[\mathbf{W}_n^{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}}(t, u) \right] \right| \right\}$ 解；最后分别针对单分量和双分量情况解出不等式模型的解。

4.1 单分量 LFM 信号的 ICFWD

本小节讨论了对于单分量 LFM 信号的优化问题 $\max_{(t,u) \in \mathbb{R}^2} |\mathbf{W}_f^{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}}(t, u)|$ ，该信号被定义为：

$$f(t) = e^{j(\alpha t + \beta t^2)}, \quad (12)$$

其中，初始频率 α 是任意的，而频率 $\beta \neq 0$ 。

用 δ 表示 Diracdelta 算子。那么，单分量 LFM 信号 $f(t)$ 的 ICFWD 的振幅可以产生一个脉冲：

$$\sqrt{2\pi |bh_1|} \delta \left[u - b \left(\frac{d_1 - h_1}{2b_1} + \beta \right) t - \frac{\alpha}{2} b(h_1 + 1) \right], \quad (13)$$

其中， $h_1 = \frac{1}{2\beta b_1 + a_1}$ 。这里的 LCT 自由参数也必须满足两个约束条件： $2\beta b_1 + a_1 \neq 0$ 和

$$\frac{a}{2b} + \frac{d_1 - h_1}{8b_1} - \frac{\beta}{4} = 0.$$

从[37]中可以找到优化问题的解为：

$$\max_{(t,u) \in \mathbb{R}^2} |\mathbf{W}_f^{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}}(t, u)| = \sqrt{2\pi |bh_1|}. \quad (14)$$

4.2 双分量 LFM 信号的 ICFWD

本小节讨论了对于双分量 LFM 信号的优化问题 $\max_{(t,u) \in \mathbb{R}^2} |\mathbf{W}_f^{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}}(t, u)|$ ，该信号被定义为：

$$f(t) = \hat{g}(t) + \tilde{g}(t) = e^{j(\hat{\alpha}t + \hat{\beta}t^2)} + e^{j(\tilde{\alpha}t + \tilde{\beta}t^2)}, \quad (15)$$

其中， $\hat{\beta}, \tilde{\beta} \neq 0$ 和 $\hat{\beta} \neq \tilde{\beta}$ 。

ICFWD 的双线性性质意味着双分量 LFM 信号 $f(t)$ 的 ICFWD 可以被扩展为:

$$\mathbf{W}_{\hat{g}}^{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}}(t, u) + \mathbf{W}_{\tilde{g}}^{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}}(t, u) + \mathbf{W}_{\hat{g}, \tilde{g}}^{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}}(t, u) + \mathbf{W}_{\tilde{g}, \hat{g}}^{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}}(t, u), \quad (16)$$

其中, $\mathbf{W}_{\hat{g}}^{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}}(t, u)$ 和 $\mathbf{W}_{\tilde{g}}^{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}}(t, u)$ 为两个自动项; $\mathbf{W}_{\hat{g}, \tilde{g}}^{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}}(t, u)$ 和 $\mathbf{W}_{\tilde{g}, \hat{g}}^{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}}(t, u)$ 为交叉项, 它们分别为:

$$\mathbf{W}_{\hat{g}, \tilde{g}}^{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}}(t, u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{G}_{\mathbf{A}_1} \left(t + \frac{\pi}{2} \right) \tilde{g}^* \left(t - \frac{\pi}{2} \right) \mathcal{K}_{\mathbf{A}}(u, \tau) d\tau, \quad (17)$$

$$\mathbf{W}_{\tilde{g}, \hat{g}}^{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}}(t, u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{G}_{\mathbf{A}_1} \left(t + \frac{\pi}{2} \right) \hat{g}^* \left(t - \frac{\pi}{2} \right) \mathcal{K}_{\mathbf{A}}(u, \tau) d\tau, \quad (18)$$

这其中的 $\hat{G}_{\mathbf{A}_1}$ 和 $\tilde{G}_{\mathbf{A}_1}$ 分别表示 \hat{g} 和 \tilde{g} 带有参数矩阵 \mathbf{A}_1 的 LCT。

自动项的振幅 $\mathbf{W}_{\hat{g}}^{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}}(t, u)$ 和 $\mathbf{W}_{\tilde{g}}^{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}}(t, u)$ 可以产生以下两个脉冲:

$$\sqrt{2\pi |b\hat{h}_1|} \delta \left[u - b \left(\frac{d_1 - \hat{h}_1}{2b_1} + \hat{\beta} \right) t - \frac{\hat{\alpha}}{2} b (\hat{h}_1 + 1) \right], \quad (19)$$

$$\sqrt{2\pi |b\tilde{h}_1|} \delta \left[u - b \left(\frac{d_1 - \tilde{h}_1}{2b_1} + \tilde{\beta} \right) t - \frac{\tilde{\alpha}}{2} b (\tilde{h}_1 + 1) \right], \quad (20)$$

其中, $\hat{h}_1 = \frac{1}{2\hat{\beta}b_1 + a_1}$ 和 $\tilde{h}_1 = \frac{1}{2\tilde{\beta}b_1 + a_1}$ 。LCT 自由参数必须满足: $2\hat{\beta}b_1 + a_1 \neq 0$, $2\tilde{\beta}b_1 + a_1 \neq 0$,

$$\frac{a}{2b} + \frac{d_1 - \hat{h}_1}{8b_1} - \frac{\hat{\beta}}{4} = 0 \text{ 和 } \frac{a}{2b} + \frac{d_1 - \tilde{h}_1}{8b_1} - \frac{\tilde{\beta}}{4} = 0.$$

由于 $\hat{\beta} \neq \tilde{\beta}$, $\frac{a}{2b} + \frac{d_1 - \hat{h}_1}{8b_1} - \frac{\hat{\beta}}{4} = 0$ 和 $\frac{a}{2b} + \frac{d_1 - \tilde{h}_1}{8b_1} - \frac{\tilde{\beta}}{4} = 0$; 那么可以推导出:

$$\tilde{l} \triangleq \frac{a}{2b} + \frac{d_1 - \hat{h}_1}{8b_1} - \frac{\tilde{\beta}}{4} \neq 0 \text{ 和 } \hat{l} \triangleq \frac{a}{2b} + \frac{d_1 - \tilde{h}_1}{8b_1} - \frac{\hat{\beta}}{4} \neq 0. \text{ 也可以推导出, 交叉项 } \mathbf{W}_{\hat{g}, \tilde{g}}^{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}}(t, u) \text{ 和}$$

$\mathbf{W}_{\tilde{g}, \hat{g}}^{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}}(t, u)$ 不可能生成脉冲, 因为它们的振幅为分别为:

$$\sqrt{\frac{|\hat{h}_1|}{2|b\tilde{l}|}}, \quad (21)$$

$$\sqrt{\frac{|\hat{h}_1|}{2|\hat{b}\hat{l}|}}, \quad (22)$$

对于结果的证明过程，可以参考以下过程。

交叉项 $\mathbf{W}_{\hat{g}, \hat{g}}^{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}}(t, u)$ 被定义成如下：

$$\mathbf{W}_{\hat{g}, \hat{g}}^{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}}(t, u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{G}_{\mathbf{A}_1} \left(t + \frac{\pi}{2} \right) \tilde{g}^* \left(t - \frac{\pi}{2} \right) \mathcal{K}_{\mathbf{A}}(u, \tau) d\tau, \quad (23)$$

其中

$$\hat{G}_{\mathbf{A}_1} \left(t + \frac{\pi}{2} \right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}(\rho) \mathcal{K}_{\mathbf{A}_1} \left(t + \frac{\pi}{2}, \rho \right) d\rho, \quad (24)$$

由于(31)，将 $\hat{g}(t) = e^{j(\hat{\alpha}t + \hat{\beta}t^2)}$ 和 $\tilde{g}(t) = e^{j(\tilde{\alpha}t + \tilde{\beta}t^2)}$ 代入(23)可以推导出：

$$\left| \mathbf{W}_{\hat{g}, \hat{g}}^{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}}(t, u) \right| = \sqrt{\frac{|\hat{h}_1|}{2\pi|\hat{b}|}} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\left(\frac{a}{2b} + \frac{d_1 - \hat{h}_1}{8b_1} \frac{\tilde{\beta}}{4}\right)\tau^2} e^{-j\left[\frac{u}{b} \left(\frac{d_1 - \hat{h}_1}{2b_1} + \tilde{\beta}\right)t - \frac{\tilde{\alpha}}{2}(\hat{h}_1 + 1)\right]\tau} d\tau \right|, \quad (25)$$

对于 $\frac{1}{\hat{h}_1} = 2\hat{\beta}b_1 + a_1 \neq 0$ ，并且令 $\tilde{l} = \frac{a}{2b} + \frac{d_1 - \hat{h}_1}{8b_1} - \frac{\tilde{\beta}}{4} \neq 0$ 随后可以推出：

$$\left| \mathbf{W}_{\hat{g}, \hat{g}}^{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}}(t, u) \right| = \sqrt{\frac{|\hat{h}_1|}{2|\hat{b}\hat{l}|}}. \quad (26)$$

类似的，可以推出：

$$\left| \mathbf{W}_{\tilde{g}, \tilde{g}}^{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}}(t, u) \right| = \sqrt{\frac{|\tilde{h}_1|}{2|\tilde{b}\tilde{l}|}}, \quad (27)$$

其中， $\frac{1}{\tilde{h}_1} = 2\tilde{\beta}b_1 + a_1 \neq 0$ 和 $\hat{l} \triangleq \frac{a}{2b} + \frac{d_1 - \tilde{h}_1}{8b_1} - \frac{\hat{\beta}}{4} \neq 0$ 。

将(19)-(22)代入(16)，并对每一项取振幅，得到：

$$\begin{aligned} & \sqrt{2\pi|\hat{b}\hat{h}_1|} \delta \left[u - b \left(\frac{d_1 - \hat{h}_1}{2b_1} + \hat{\beta} \right) t - \frac{\hat{\alpha}}{2} b (\hat{h}_1 + 1) \right] \\ & + \sqrt{2\pi|\tilde{b}\tilde{h}_1|} \delta \left[u - b \left(\frac{d_1 - \tilde{h}_1}{2b_1} + \tilde{\beta} \right) t - \frac{\tilde{\alpha}}{2} b (\tilde{h}_1 + 1) \right] + \sqrt{\frac{|\hat{h}_1|}{2|\hat{b}\hat{l}|}} + \sqrt{\frac{|\tilde{h}_1|}{2|\tilde{b}\tilde{l}|}}, \end{aligned} \quad (28)$$

因此，得出该优化问题的解为：

$$\max_{(t,u) \in \mathbb{R}^2} |\mathbf{W}_f^{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}}(t, u)| = \sqrt{2\pi |b\hat{h}_1|} + \sqrt{2\pi |b\tilde{h}_1|}. \quad (29)$$

4.3 平稳零期望噪声的 ICFWD

这一小节讨论了对于零期望平稳噪声的期望问题 $\underset{(t,u)}{\operatorname{arg\,max}} |\mathbf{W}_f^{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}}(t, u)| \left\{ \left| \mathbb{E} \left[\mathbf{W}_n^{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}}(t, u) \right] \right| \right\}$ 。噪声

的平稳性表明 $\mathbb{E}[n(t_1)n^*(t_2)] = D\delta(t_1 - t_2)$ ，其中 D 表示噪声的功率谱密度。通过使用 Delta 函

数的筛选特性，零期望平稳噪声 $n(t)$ 的 ICFWD 期望可以计算为：

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\mathbf{W}_n^{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}}(t, u)] &= \int \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{E} \left[n(\varepsilon) n^* \left(t - \frac{\tau}{2} \right) \right] \mathcal{K}_{\mathbf{A}_1} \left(t + \frac{\tau}{2}, \varepsilon \right) \mathcal{K}_{\mathbf{A}}(u, \tau) d\varepsilon d\tau \\ &= \frac{D}{2\pi \sqrt{j b_1} \sqrt{j b}} e^{j \frac{d}{2b} u^2} e^{j \frac{a_1 + d_1 - 2}{2b_1} t^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j \left(\frac{a_1 + d_1 + 2}{8b_1} + \frac{a}{2b} \right) \tau^2} e^{j \left(\frac{d_1 - a_1}{2b_1} t - \frac{u}{b} \right) \tau} d\tau, \end{aligned} \quad (30)$$

由于众所周知的高斯积分公式[52]：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{pt^2 + qt} dt = \sqrt{\frac{\pi}{-p}} e^{-\frac{q^2}{4p}} \quad (p \neq 0, \operatorname{Re}(p) \leq 0), \quad (31)$$

$\mathbb{E}[\mathbf{W}_n^{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}}(t, u)]$ 的振幅为：

$$D \sqrt{\frac{2}{\pi |b(a_1 + d_1 + 2) + 4ab_1|}}, \quad (32)$$

其中， $b(a_1 + d_1 + 2) + 4ab_1 \neq 0$ 。

噪声在时频面上是一个正态分布，因为 $\left| \mathbb{E}[\mathbf{W}_n^{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}}(t, u)] \right|$ 有着两个独立变量 t, u 。那么，这个期望问题的解可以化解为：

$$\underset{(t,u)}{\operatorname{arg\,max}} |\mathbf{W}_f^{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}}(t, u)| \left\{ \left| \mathbb{E}[\mathbf{W}_n^{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}}(t, u)] \right| \right\} = D \sqrt{\frac{2}{\pi |b(a_1 + d_1 + 2) + 4ab_1|}}. \quad (33)$$

4.4 不等式解

本小节推导了添加零期望平稳噪声的单分量 LFM 信号不等式模型的解。并在此基础上，得到了双分量情况下不等式模型的解。

4.4.1 单分量情形

由于等式 $\frac{a}{2b} + \frac{d_1 - h_1}{8b_1} - \frac{\beta}{4} = 0$ ，可以推导出 $b(a_1 + d_1 + 2) + 4ab_1 = b \frac{(h_1 + 1)^2}{h_1}$ 。该单分量的

的证明以及后续双分量的推导详细过程可见以下过程：

从等式：

$$\frac{a}{2b} + \frac{d_1 - h_1}{8b_1} - \frac{\beta}{4} = 0, \quad (34)$$

可以推出：

$$a = \left(\frac{\beta}{2} - \frac{d_1 - h_1}{4b_1} \right) b, \quad (35)$$

将它代入 $b(a_1 + d_1 + 2) + 4ab_1$ 可以进一步推出：

$$b(a_1 + d_1 + 2) + 4ab_1 = b(2\beta b_1 + a_1 + h_1 + 2), \quad (36)$$

并且由于 $2\beta b_1 + a_1 = \frac{1}{h_1}$ 还可以推出：

$$\begin{aligned} b(a_1 + d_1 + 2) + 4ab_1 &= b \left(\frac{1}{h_1} + h_1 + 2 \right) \\ &= b \frac{(h_1 + 1)^2}{h_1}. \end{aligned} \quad (37)$$

类似的，从连等式 $\frac{a}{2b} + \frac{d_1 - \hat{h}_1}{8b_1} - \frac{\hat{\beta}}{4} = \frac{a}{2b} + \frac{d_1 - \tilde{h}_1}{8b_1} - \frac{\tilde{\beta}}{4} = 0$ ，和 $2\hat{\beta}b_1 + a_1 = \frac{1}{\hat{h}_1}$ ，

$2\tilde{\beta}b_1 + a_1 = \frac{1}{\tilde{h}_1}$ ，可以推出两个等式：

$$b(a_1 + d_1 + 2) + 4ab_1 = b \frac{(\hat{h}_1 + 1)^2}{\hat{h}_1}, \quad (38)$$

$$b(a_1 + d_1 + 2) + 4ab_1 = b \frac{(\tilde{h}_1 + 1)^2}{\tilde{h}_1}, \quad (39)$$

那么公式(33)可以被化简[37]成：

$$\text{Mean}_{\arg \max_{(t,u)} |\mathbf{W}_f^{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}}(t,u)|} \left\{ \left| \mathbb{E} \left[\mathbf{W}_n^{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}}(t,u) \right] \right| \right\} = \frac{D}{|h_1 + 1|} \sqrt{\frac{2}{\pi} \left| \frac{h_1}{b} \right|}, \quad (40)$$

其中, $h_1 + 1 \neq 0$ 。

将公式(14)和公式(40)代入公式(7)中, 可以算出 ICFWD 对于单分量基于期望输出信噪比:

$$\text{ESNR}_{\text{ICFWD}}^{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}} = \frac{\pi}{D} |b(h_1 + 1)|, \quad (41)$$

同理, WD 对于单分量基于期望输出信噪比[29][30]为:

$$\text{ESNR}_{\text{WD}} = \frac{2\pi}{D}, \quad (42)$$

将公式(41)和公式(42)代入公式(10)中, 可以计算出对于单分量的不等式模型解:

$$\frac{|b(h_1 + 1)|}{2} > 1, \quad (43)$$

其中, 这个不等式隐含条件 $h_1 + 1 \neq 0$ 。

4.4.2 双分量情形

由于连等式 $\frac{a}{2b} + \frac{d_1 - \hat{h}_1}{8b_1} - \frac{\hat{\beta}}{4} = \frac{a}{2b} + \frac{d_1 - \tilde{h}_1}{8b_1} - \frac{\tilde{\beta}}{4} = 0$, 通过附录 B 的证明过程可以推导出

$$b(a_1 + d_1 + 2) + 4ab_1 = b \frac{(\hat{h}_1 + 1)^2}{\hat{h}_1} = b \frac{(\tilde{h}_1 + 1)^2}{\tilde{h}_1}。那么, 公式(33)可以被化解为:$$

$$\underset{(t,u)}{\text{arg max}} \left| \text{Mean}_{\mathbf{W}_f^{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}}(t,u)} \left\{ \left| \mathbb{E} \left[\mathbf{W}_n^{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}}(t,u) \right] \right| \right\} \right| = \frac{D}{|\hat{h}_1 + 1|} \sqrt{\frac{2}{\pi} \frac{\hat{h}_1}{b}} = \frac{D}{|\tilde{h}_1 + 1|} \sqrt{\frac{2}{\pi} \frac{\tilde{h}_1}{b}}, \quad (44)$$

其中, $\hat{h}_1 + 1 \neq 0, \tilde{h}_1 + 1 \neq 0$ 。

将公式(29)和公式(44)代入公式(7)中, 可以解出 ICFWD 对于双分量基于期望输出信噪比:

$$\begin{aligned} \text{ESNR}_{\text{ICFWD}}^{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}} &= \frac{\sqrt{2\pi |b\hat{h}_1|}}{\underset{(t,u)}{\text{arg max}} \left| \text{Mean}_{\mathbf{W}_f^{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}}(t,u)} \left\{ \left| \mathbb{E} \left[\mathbf{W}_n^{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}}(t,u) \right] \right| \right\} \right|} + \frac{\sqrt{2\pi |b\tilde{h}_1|}}{\underset{(t,u)}{\text{arg max}} \left| \text{Mean}_{\mathbf{W}_f^{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}}(t,u)} \left\{ \left| \mathbb{E} \left[\mathbf{W}_n^{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}}(t,u) \right] \right| \right\} \right|} \\ &= \frac{\sqrt{2\pi |b\hat{h}_1|}}{\frac{D}{|\hat{h}_1 + 1|} \sqrt{\frac{2}{\pi} \frac{\hat{h}_1}{b}}} + \frac{\sqrt{2\pi |b\tilde{h}_1|}}{\frac{D}{|\tilde{h}_1 + 1|} \sqrt{\frac{2}{\pi} \frac{\tilde{h}_1}{b}}} \\ &= \frac{\pi}{D} \left[|b(\hat{h}_1 + 1)| + |b(\tilde{h}_1 + 1)| \right], \end{aligned} \quad (45)$$

WD 对于双分量基于期望输出信噪比可以在[29]中找到:

$$\text{ESNR}_{\text{WD}} = \frac{4\pi}{D}, \quad (46)$$

通过将公式(45)和公式(46)代入公式(10)中，可以解出对于双分量不等式模型的解：

$$\frac{\left|b(\hat{h}_1+1)\right|+\left|b(\tilde{h}_1+1)\right|}{4} > 1, \quad (47)$$

其中，这个不等式隐含着 $\hat{h}_1+1 \neq 0, \tilde{h}_1+1 \neq 0$ 。

表格 1 含零期望平稳噪声的单/双分量 LFM 信号不等式模型解是一个对不等式模型解和相关 LCT 自由变量约束的总结。

表格 1 含零期望平稳噪声的单/双分量 LFM 信号不等式模型解

	单分量	双分量
模型的解	$\frac{\left b(h_1+1)\right }{2} > 1$	$\frac{\left b(\hat{h}_1+1)\right +\left b(\tilde{h}_1+1)\right }{4} > 1$
参数约束	$2\beta b_1 + a_1 \neq 0,$ $\frac{a}{2b} + \frac{d_1 - h_1}{8b_1} - \frac{\beta}{4} = 0$	$2\hat{\beta}b_1 + a_1 \neq 0, 2\tilde{\beta}b_1 + a_1 \neq 0,$ $\frac{a}{2b} + \frac{d_1 - \hat{h}_1}{8b_1} - \frac{\hat{\beta}}{4} = 0, \frac{a}{2b} + \frac{d_1 - \tilde{h}_1}{8b_1} - \frac{\tilde{\beta}}{4} = 0$

5. 数值仿真

为了证明 ICFWD 在噪声 LFM 信号处理中的实用性和有效性，本节设计了一些仿真来比较 ICFWD、CICFWD、ACWD、KFWD、CRWD 和 WD 的检测精度，以及计算 ICFWD、CICFWD、ACWD、KFWD 和 CRWD 的速度。

添加高斯白噪声 $n(t)$ 的模拟单分量和双分量 LFM 信号分别为：

$$f(t) = f_1(t) + n(t) = e^{j(t+0.5t^2)} + n(t), \quad (48)$$

$$f(t) = f_1(t) + n(t) = e^{j(0.5t+0.3t^2)} + e^{j(0.5t+0.6t^2)} + n(t). \quad (49)$$

假设观测区间为 $[-5s, 5s]$ ，对于单分量的采样频率为 20Hz ，对于双分量的采样频率为

40Hz 。设定信号 $f(t)$ 的输入信噪比为 $10\log_{10} \frac{\int_{-5}^5 |f_1(t)|^2 dt}{\text{Var}[n(t)]}$ ，其中噪声 $\text{Var}[n(t)]$ 等价于噪声

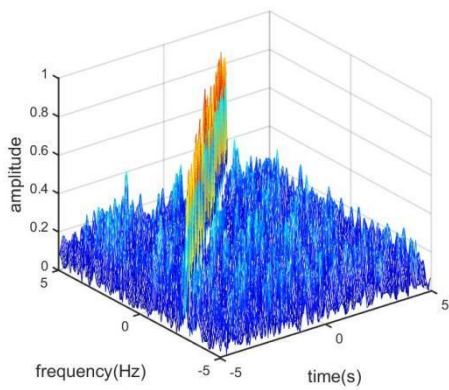
功率谱密度与噪声带宽的乘积。在仿真模拟中，对于单分量的输入信噪比被假定为 -10dB ，对于双分量的输入信噪比被假定为 -8dB 。

图 1 对比了单分量情形下，ICFWD 与 CICFWD、ACWD、KFWD、CRWD 和 WD 的检测

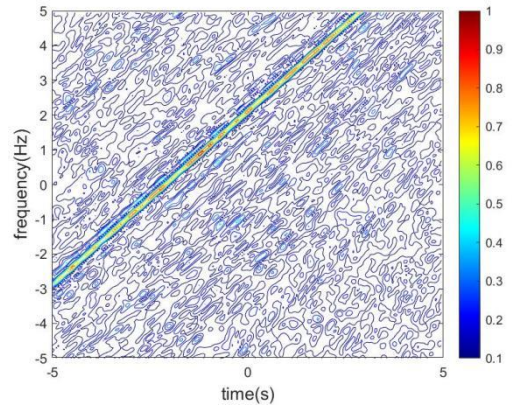
精度。ICFWD 的 LCT 自由参数满足 $\frac{|b(h_1+1)|}{2} = 1.9 > 1$, $2\beta b_1 + a_1 = 1.1111 \neq 0$,

$\frac{a}{2b} + \frac{d_1 - h_1}{8b_1} - \frac{\beta}{4} = 0$ ，和它相关的俯视图分别是图 1(a)和图 1(b)。CICFWD 的 LCT 自由参数

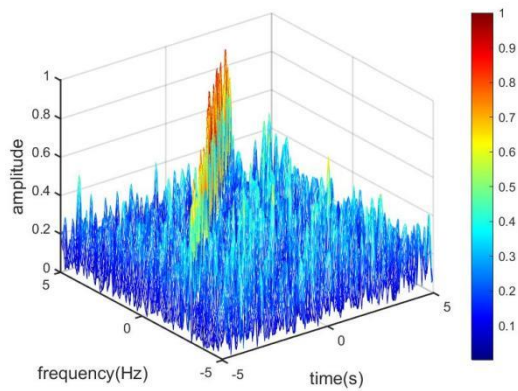
根据[29]选择，和它相关的俯视图分别是图 1(c)和图 1(d)。ACWD 的 LCT 自由参数根据[2]选择，和它相关的俯视图分别是图 1(e)和图 1(f)。KFWD 的 LCT 自由参数根据[23]选择，和它相关的俯视图分别是图 1(g)和图 1(h)。CRWD 的 LCT 自由参数根据[26]选择，和它相关的俯视图分别是图 1(i)和图 1(j)。WD，和它相关的俯视图分别是图 1(k)和图 1(l)。



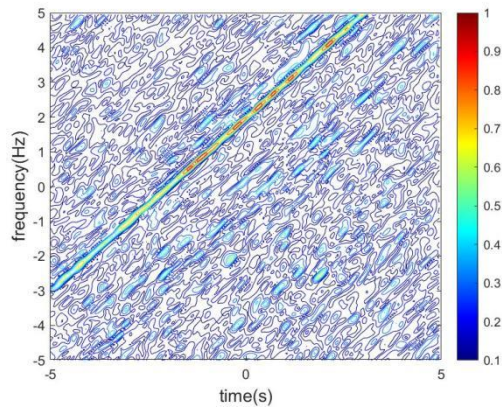
(a)



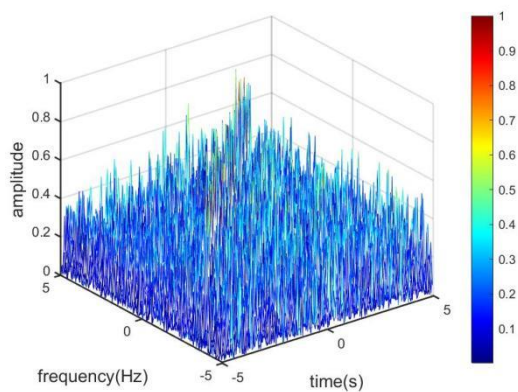
(b)



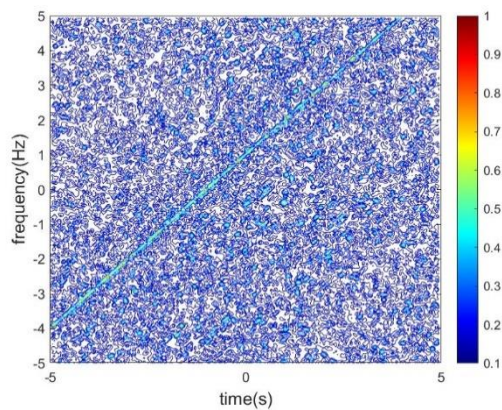
(c)



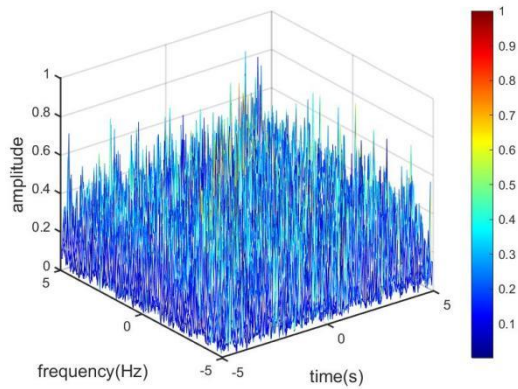
(d)



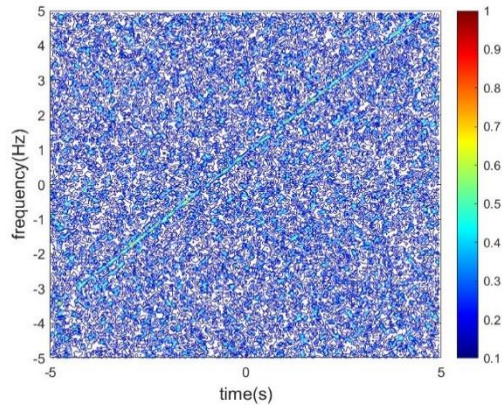
(e)



(f)



(g)



(h)

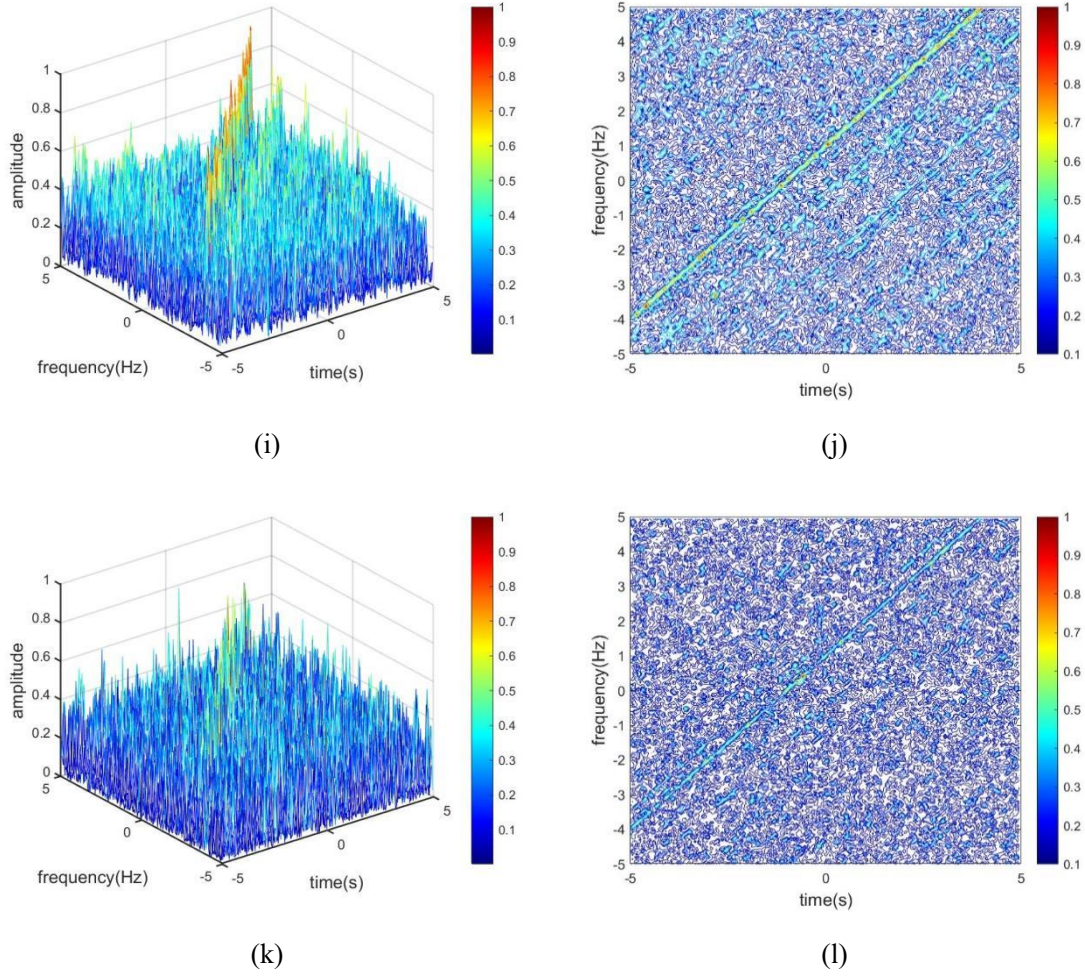


图 1: 对于单分量, ICFWD, CICFWD, ACWD, KFWD, CRWD 和 WD 的检测精度。(a)IC FWD, 参数矩阵为: $\mathbf{A}_1 = (0.2111, 0.9; -0.9, 0.9)$ 和 $\mathbf{A} = (0.5, 2; 0, 2)$; (b)对(a)的俯视图; (c) CICFWD, 参数矩阵为: $\mathbf{A}_1 = (-1, 2; -0.5, 0)$, $\mathbf{A}_2 = (2, -1; 2, -0.5)$ 和 $\mathbf{A} = (1, 2; 0, 1)$; (d)对(c)的俯视图; (e)ACWD, 参数矩阵为 $\mathbf{A}_1 = (0.5, 0.5; -0.5, 1.5)$; (f)对(e)的俯视图; (g)KFWD, 参数矩阵为 $\mathbf{A}_1 = (0.5, 0.5; -0.5, 1.5)$; (h)对(g)的俯视图; (i)CRWD, 参数矩阵为 $\mathbf{A}_1 = (1.4142, -1; -3, 2.8284)$; (j)对(i)的俯视图; (k)WD; (l)对(k)的俯视图。

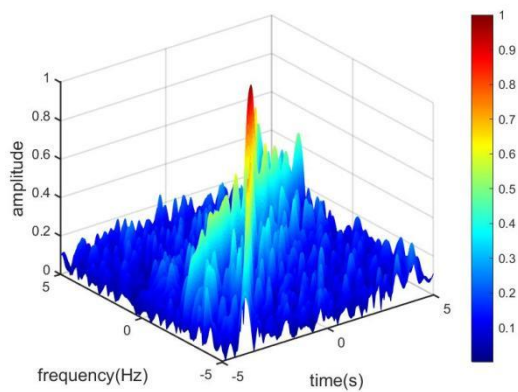
图 2 对比了双分量情形下, ICFWD 与 CICFWD、ACWD、KFWD 和 WD 的检测精度。I

CFWD 的 LCT 自由参数满足 $\frac{|b(\hat{h}_1+1)| + |b(\tilde{h}_1+1)|}{4} = 1.3125 > 1$, $2\hat{\beta}b_1 + a_1 = 2 \neq 0$,

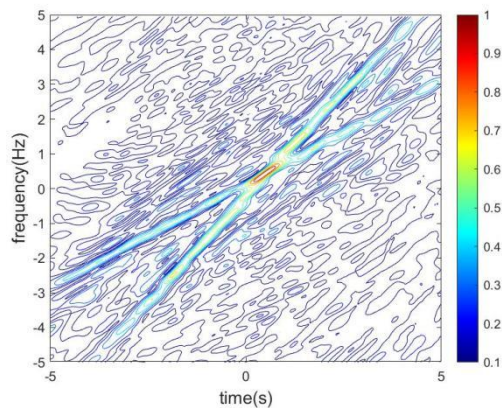
$2\tilde{\beta}b_1 + a_1 = 0.5 \neq 0$, $\frac{a}{2b} + \frac{d_1 - \hat{h}_1}{8b_1} - \frac{\hat{\beta}}{4} = 0$, $\frac{a}{2b} + \frac{d_1 - \tilde{h}_1}{8b_1} - \frac{\tilde{\beta}}{4} = 0$ 和它相关的俯视图分别是图

2(a)和图 2(b)。CICFWD 的 LCT 自由参数根据[29]选择, 和它相关的俯视图分别是图 2(c)和图

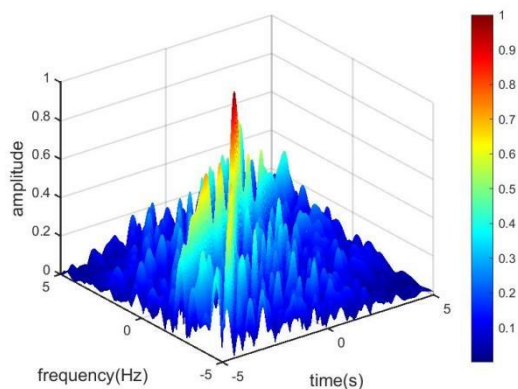
2(d)。ACWD 的 LCT 自由参数根据[2]选择, 和它相关的俯视图分别是图 2(e)和图 2(f)。KFD 的 LCT 自由参数根据[23]选择, 和它相关的俯视图分别是图 2(g)和图 2(h)。WD, 和它相关的俯视图分别是图 2(i)和图 2(j)。CRWD 无法处理一般的双分量 LFM 信号, 除非这两个分量具有相反的频率[26]。



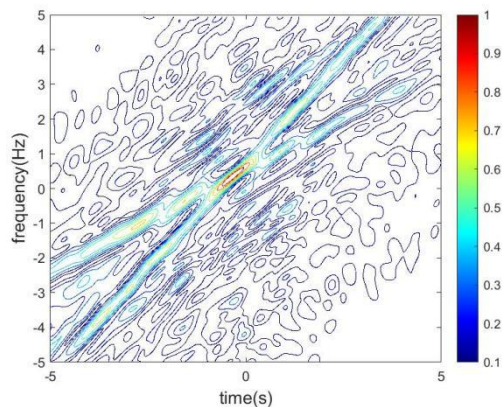
(a)



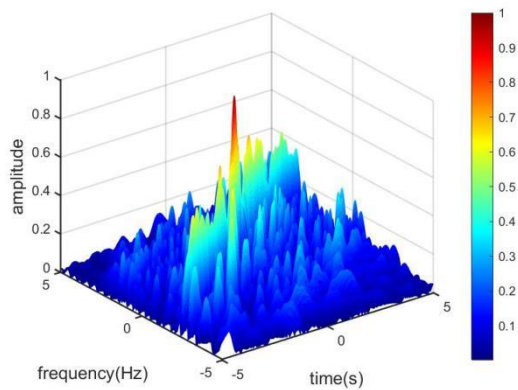
(b)



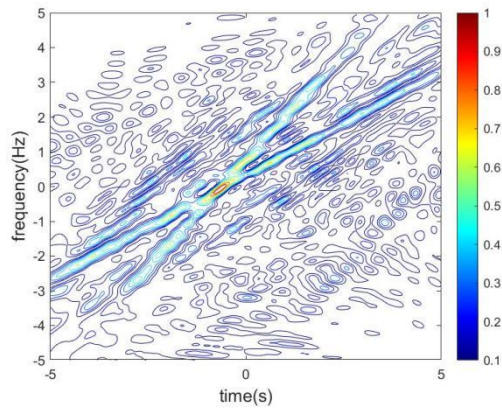
(c)



(d)



(e)



(f)

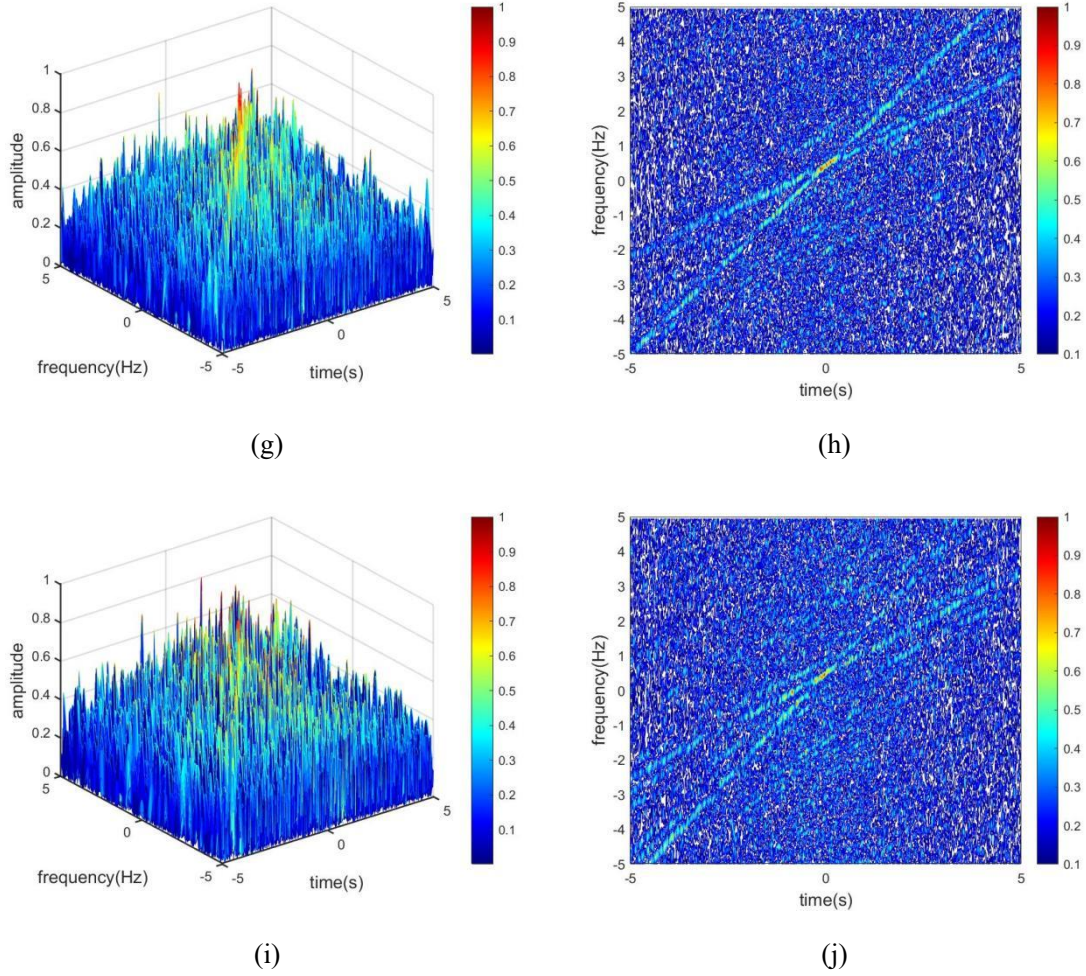


图 2：对于双分量，ICFWD，CICFWD，ACWD，KFWD 和 WD 的检测精度。(a)ICFWD，参数矩阵为： $\mathbf{A}_1 = (3.5, -2.5; 1.2, -0.5714)$ 和 $\mathbf{A} = (0.05, 1.1667; 0, 20)$ ；(b)对(a)的俯视图；(c)CICFWD，参数矩阵为： $\mathbf{A}_1 = (0.4, 1; -0.2, 2)$ ， $\mathbf{A}_2 = (3.2, -2; -1.1, 1)$ 和 $\mathbf{A} = (-0.5, 1.6; 0, -2)$ ；(d)对(c)的俯视图；(e)ACWD，参数矩阵为 $\mathbf{A}_1 = (2.3333, -1.3889; 1, -0.1667)$ ；(f)对(e)的俯视图；(g)KFWD，参数矩阵为 $\mathbf{A} = (0, 0.9; -1.1111, 1)$ ；(h)对(g)的俯视图；(i)WD；(j)对(i)的俯视图。

从图 1 和图 2 中能量直线的幅度可以看出，ICFWD 保持与 CICFWD 相同的检测精度水平。此外，它实现了比 ACWD、KFWD、CRWD 和传统 WD 更好的检测精度。

众所周知，Radon 变换(Radon Transform, RT)[53]可以对直线积分，从而产生时频分布的输出信噪比，这似乎比看能量直线的幅度更直观。图 3 和图 4 分别比较了单分量情形和双分量情形下 ICFWD 与 CICFWD、ACWD、KFWD、CRWD 和 WD 的输出信噪比。

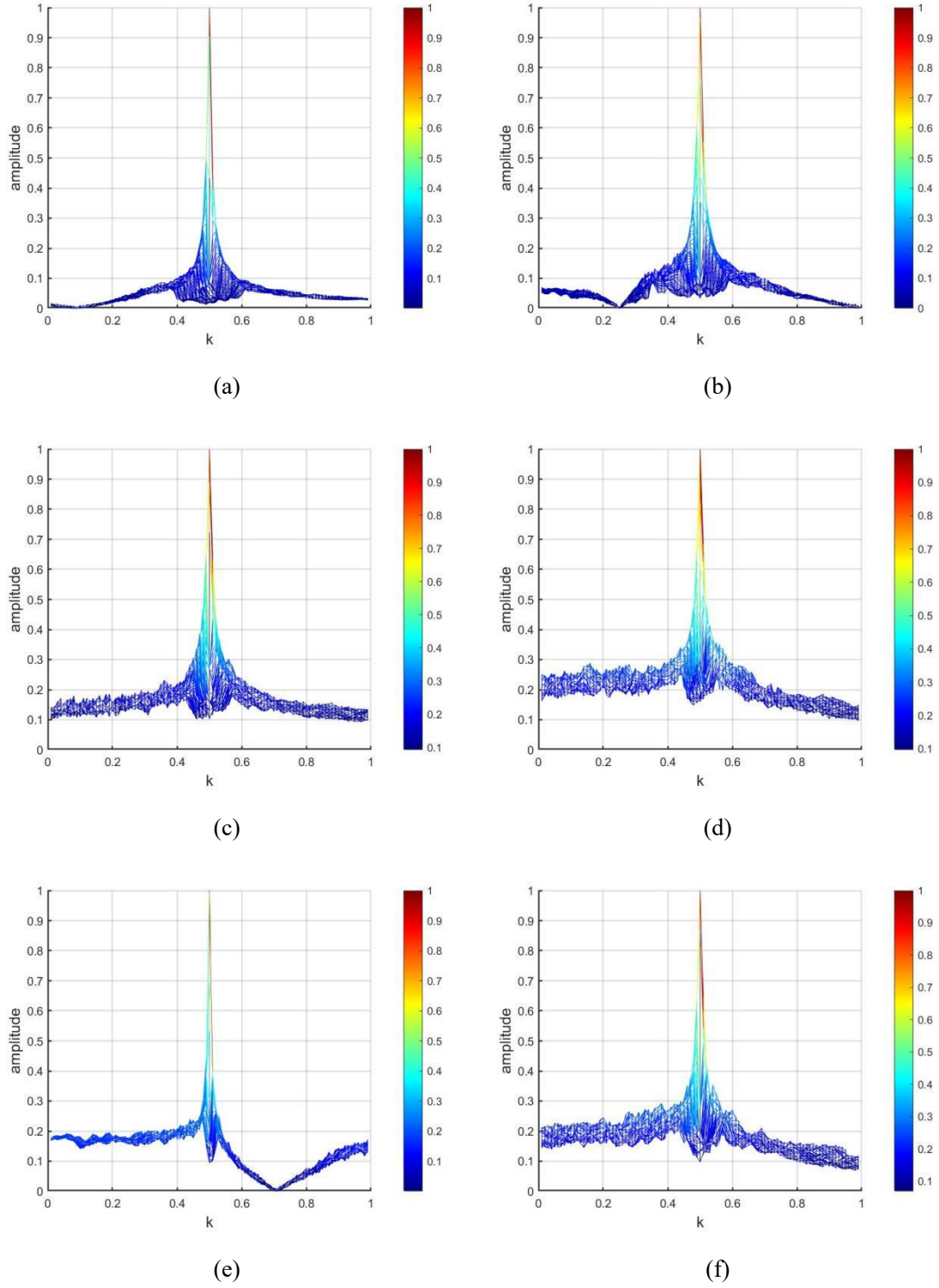
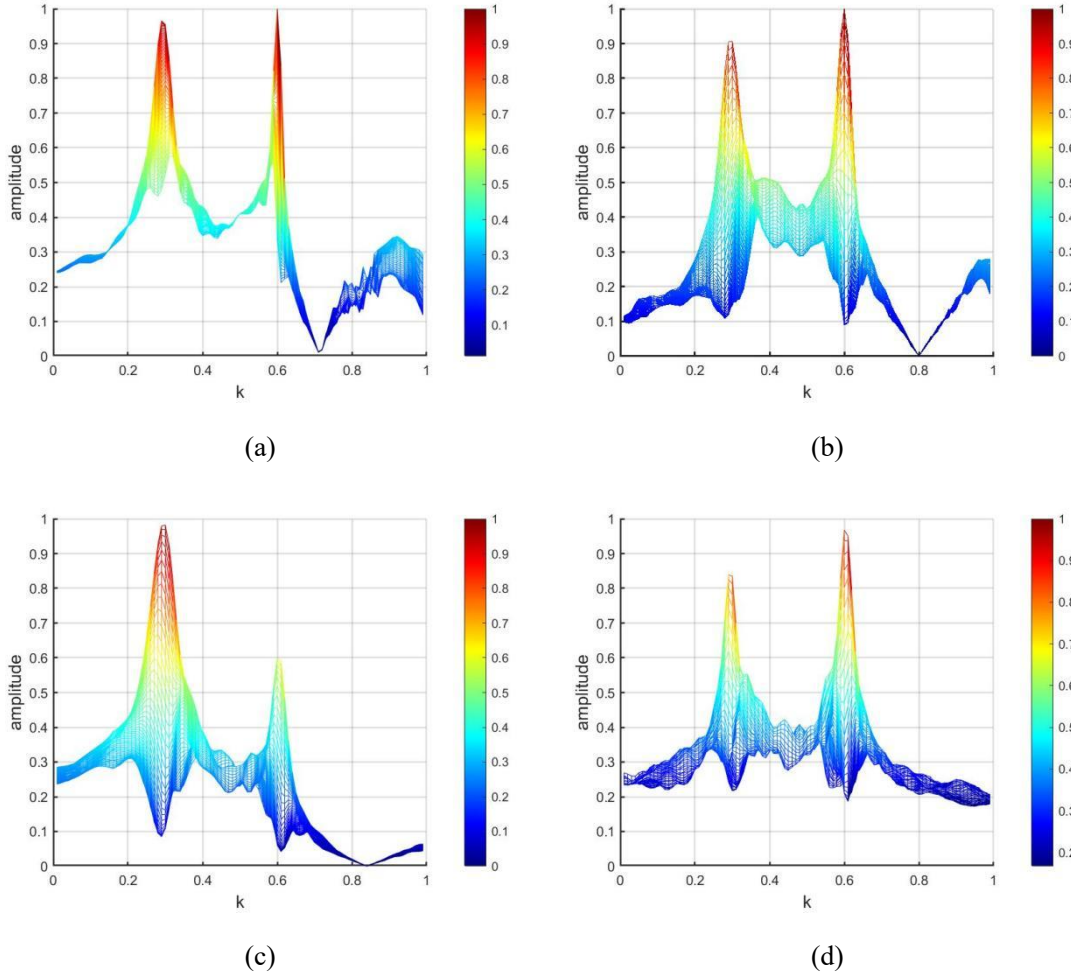
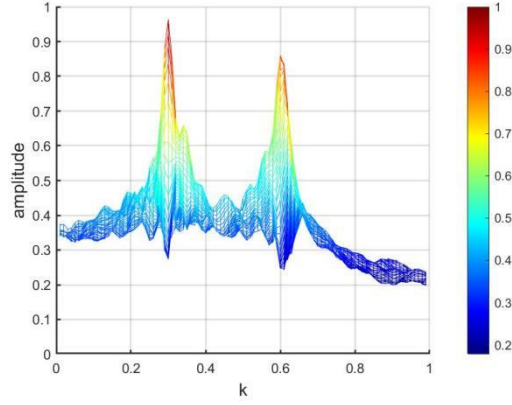


图 3: 对于单分量, ICFWD, CICFWD, ACWD, KFWD, CRWD 和 WD 的输出信噪比。(a)ICFWD 基于 RT 的 k -振幅分布, 参数矩阵为: $\mathbf{A}_1 = (0.2111, 0.9; -0.9, 0.9)$ 和 $\mathbf{A} = (0.5, 2; 0, 2)$; (b)CICFWD 基于 RT 的 k 振幅分布, 参数矩阵为: $\mathbf{A}_1 = (-1, 2; -0.5, 0)$, $\mathbf{A}_2 = (2, -1; 2, -0.5)$ 和 $\mathbf{A} = (1, 2; 0, 1)$; (c)ACWD 基于 RT 的 k -振幅分布, 参数矩阵为 $\mathbf{A}_1 = (0.5, 0.5; -0.5, 1.5)$;

(d)KFWD 基于 RT 的 k -振幅分布, 参数矩阵为 $\mathbf{A}_1 = (0.5, 0.5; -0.5, 1.5)$; (e)CRWD 基于 RT 的 k -振幅分布, 参数矩阵为 $\mathbf{A}_1 = (1.4142, -1; -3, 2.8284)$; (f)WD 基于 RT 的 k -振幅分布。

对于单分量情形, 图 3(a)展示了 ICFWD 基于 RT 的 k -振幅分布, LCT 参数满足 $\frac{|b(h_1+1)|}{2} = 1.9 > 1$, $2\beta b_1 + a_1 = 1.1111 \neq 0$, $\frac{a}{2b} + \frac{d_1 - h_1}{8b_1} - \frac{\beta}{4} = 0$ 。图 3(b)展示了 CICFW D[29][30]基于 RT 的 k -振幅分布, 根据[29]选择了它的 LCT 参数。图 3(c)展示了 ACWD 基于 RT 的 k -振幅分布, 根据[2]选择了它的 LCT 参数。图 3(d)展示了 KFWD 基于 RT 的 k -振幅分布, 根据[23]选择了它的 LCT 参数。图 3(e)展示了 CRWD 基于 RT 的 k -振幅分布, 根据[26]选择了它的 LCT 参数。图 3(f)展示了 WD 基于 RT 的 k -振幅分布。





(c)

图 4: 对于双分量, ICFWD, CICFWD, ACWD, KFWD 和 WD 的输出信噪比。(a)ICFWD 基于 RT 的 k -振幅分布, 参数矩阵为: $\mathbf{A}_1 = (3.5, -2.5; 1.2, -0.5714)$ 和 $\mathbf{A} = (0.05, 1.1667; 0, 20)$; (b)CICFWD 基于 RT 的 k -振幅分布, 参数矩阵为: $\mathbf{A}_1 = (0.4, 1; -0.2, 2)$, $\mathbf{A}_2 = (3.2, -2; -1.1, 1)$ 和 $\mathbf{A} = (-0.5, 1.6; 0, -2)$; (c)ACWD 基于 RT 的 k -振幅分布, 参数矩阵为 $\mathbf{A}_1 = (2.3333, -1.3889; 1, -0.1667)$; (d)KFWD 基于 RT 的 k -振幅分布, 参数矩阵为 $\mathbf{A} = (0, 0.9; -1.1111, 1)$; (e)WD 基于 RT 的 k -振幅分布。

对于双分量情形, 图 4(a)展示了 ICFWD 基于 RT 的 k -振幅分布, LCT 参数满足 $\frac{|b(\hat{h}_1 + 1)| + |b(\tilde{h}_1 + 1)|}{4} = 1.3125 > 1$, $2\hat{\beta}b_1 + a_1 = 2 \neq 0$, $2\tilde{\beta}b_1 + a_1 = 0.5 \neq 0$, $\frac{a}{2b} + \frac{d_1 - \hat{h}_1}{8b_1} - \frac{\hat{\beta}}{4} = 0$, $\frac{a}{2b} + \frac{d_1 - \tilde{h}_1}{8b_1} - \frac{\tilde{\beta}}{4} = 0$ 。图 4(b)展示了 CICFWD[29][30]基于 RT 的 k -振幅分布, 根据[29]选择了它的 LCT 参数。图 4(c)展示了 ACWD 基于 RT 的 k -振幅分布, 根据[2]选择了它的 LCT 参数。图 4(d)展示了 KFWD 基于 RT 的 k -振幅分布, 根据[23][23]选择了它的 LCT 参数。图 4(e)展示了 WD 基于 RT 的 k -振幅分布。

从图 3 和图 4 中发现的噪声幅度可以明显看出, ICFWD 保持与 CICFWD 相同的输出信噪比水平。此外, 它实现了比 ACWD、KFWD、CRWD 和传统 WD 更高的输出信噪比。

表格 2 在采样频率 20Hz、40Hz、80Hz、120Hz 下，对于单分量情形 ICFWD、CICFWD、ACWD、KFWD 和 CRWD 的计算时间

采样频率 (Hz)	计算时间(s)				
	ICFWD	CICFWD	ACWD	KFWD	CRWD
20	0.0190	0.0274	0.0190	0.0104	0.0285
40	0.0557	0.0775	0.0563	0.0331	0.0792
80	0.1930	0.2595	0.1967	0.1272	0.2666
120	0.4559	0.5919	0.4674	0.3335	0.6035

表格 3 在采样频率 20Hz、40Hz、80Hz、120Hz 下，对于双分量情形 ICFWD、CICFWD、ACWD 和 KFWD 的计算时间

采样频率 (Hz)	计算时间(s)			
	ICFWD	CICFWD	ACWD	KFWD
20	0.0190	0.0275	0.0196	0.0102
40	0.0560	0.0788	0.0576	0.0332
80	0.1958	0.2632	0.2031	0.1274
120	0.4718	0.5978	0.4679	0.3330

表格 2 和表格 3 分别记录了：对于单分量情形和双分量情形，ICFWD、CICFWD、ACWD、KFWD 和 CRWD 在 4 个不同采样频率 20Hz、40Hz、80Hz 和 120Hz 的计算时间。这是基于台式主机上 Intel(R) Core(TM)i5-9400F CPU@2.90GHz，和 MATLAB 语言。这个计算时间是通过运行超过 1000 次后算平均值得到的。图 5 和图 6 分别画了 ICFWD、CICFWD、ACWD、KFWD 和 CRWD 计算速度的对比。

如图所见，ICFWD 保持与 ACWD 相同的计算效率水平。此外，它比 CICFWD 和 CRWD 具有更高的计算效率，而比 KFWD 具有更低的计算效率。

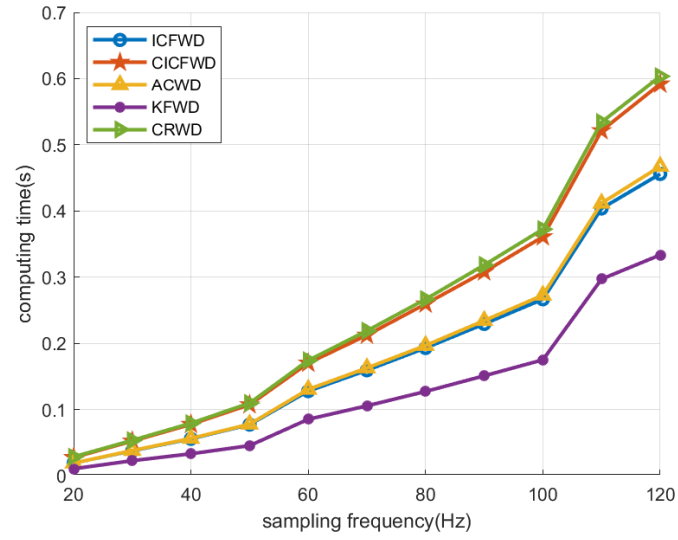


图 5: 对于单分量情形, ICFWD、CICFWD、ACWD、KFWD 和 CRWD 的计算速度

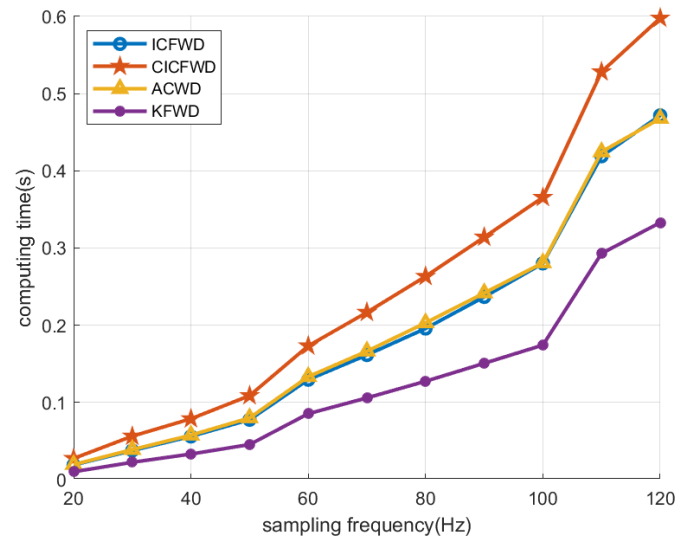


图 6: 对于双分量情形, ICFWD、CICFWD、ACWD 和 KFWD 的计算速度

6 结论与展望

在所有线性正则域 WD 中, ICFWD 具有权衡检测精度和计算复杂度的显著优势。因此, 本文研究了 ICFWD 在检测多分量弱 LFM 信号中的应用, 建模和求解了 ICFWD 和 WD 之间基于期望的输出信噪比不等式, 推导出了单分量和双分量情形下 ICFWD 的 LCT 自由参数选择方法, 并且通过大量的数值实验证明了理论结果的正确性。结果表明, ICFWD 的检测精度与 CICFWD 相近, 优于 ACWD、KFWD、CRWD 和常规 WD 的检测精度。此外, ICFWD 的计算效率与 ACWD 相当, 在高计算效率上优于 CICFWD 和 CRWD, 但不如 KFW D。

ICFWD 可以被应用于多个领域, 具有广泛的应用前景。在 LFM 信号处理领域中, ICFWD 期望不等式模型是一种重要的技术手段, 它可以被应用于海洋勘探、海洋监测、水声通信等领域; 使用该模型可以提高信号的抗干扰和检测性能, 从而实现在真实有噪声环境中目标的精确探测和定位。此外, 在无线通信领域中, ICFWD 期望不等式模型可以为无线通信系统的设计和 optimization 提供一种新的思路 and 工具。ICFWD 期望不等式模型可以帮助提高信道估计和均衡算法性能, 总而实现更好的信号传输质量和数据传输速率。

参考文献

- [1] A. Yelashetty, N. Gupta, D. Dhirhe, and U. Gopinathan, "Linear canonical transform as a tool to analyze coherence properties of electromagnetic beams propagating in a quadratic phase system," *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 37, no. 8, pp. 1350--1360, Aug. 2020.
- [2] S. C. Pei and J. J. Ding, "Relations between fractional operations and time-frequency distributions and their applications," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 49, no. 8, pp. 1638--1655, Aug. 2001.
- [3] A. Stern, "Sampling of linear canonical transformed signals," *Signal Process.*, vol. 86, no. 7, pp. 1421--1425, Jul. 2006.
- [4] R. N. Bracewell, *The Fourier Transform and Its Applications*. Boston, MA, USA: McGraw-Hill, 2000.
- [5] H. M. Ozaktas, M. A. Kutay, and Z. Zalevsky, *The Fractional Fourier Transform With Applications in Optics and Signal Processing*. New York, NY, USA: Wiley, 2001.
- [6] R. Tao, B. Deng, and Y. Wang, *Fractional Fourier Transform and Its Applications*. Beijing, China: Tisinghua Univ. Press, 2009.
- [7] J. Shi, Y. N. Zhao, W. Xiang, V. Monga, X. P. Liu, and R. Tao, "Deep scattering network with fractional wavelet transform," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 69, pp. 4740--4757, Jul. 2021.
- [8] C. Gao, R. Tao, and X. J. Kang, "Weak target detection in the presence of sea clutter using Radon-fractional Fourier transform canceller," *IEEE J. Sel. Topics Appl. Earth Observ. Remote Sens.*, vol. 14, pp. 5818--5830, May 2021.
- [9] Y. Liu, F. Zhang, H. X. Miao, and R. Tao, "The hopping discrete fractional Fourier transform," *Signal Process.*, vol. 178, Article No. 107763, Jan. 2021.
- [10] H. Oberst, D. Kouznetsov, K. Shimizu, J.-I. Fujita, and F. Shimizu, "Fresnel diffraction mirror for an atomic wave," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 94, Article No. 013203, Jan. 2005.
- [11] S. Abe and J. T. Sheridan, "Optical operations on wave functions as the Abelian subgroups of the special affine Fourier transformation," *Opt. Lett.*, vol. 19, no. 22, pp. 1801--1803, Nov. 1994.
- [12] K. Imre and E. Ozizmir, "Wigner method in quantum statistical mechanics," *J. Math. Phys.*, vol. 8, no. 5, pp. 1097--1108, May 1967.
- [13] B. Boashash, "Note on the use of the Wigner distribution for time-frequency signal analysis," *IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process.*, vol. 36, no. 9, pp. 1518--1521, Sep. 1988.
- [14] P. Goncalves and R. G. Baraniuk, "Pseudo affine Wigner distributions: Definition and kernel formulation," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 46, no. 6, pp. 1505--1516, Jun. 1998.
- [15] W. Martin and P. Flandrin, "Wigner-Ville spectral analysis of nonstationary processes," *IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process.*, vol. 33, no. 6, pp. 1461--1470, Dec. 1985.
- [16] L. Stankovic, "A method for time-frequency analysis," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 42, no. 1, pp. 225--229, Jan. 1994.

- [17] L. J. Stankovic and S. Stankovic, "An analysis of instantaneous frequency representation using time-frequency distributions-generalized Wigner distribution," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 43, no. 2, pp. 549--552, Feb. 1995.
- [18] B. Boashash and P. O'Shea, "Polynomial Wigner-Ville distributions and their relationship to time-varying higher order spectra," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 42, no. 1, pp. 216--220, Jan. 1994.
- [19] H. I. Choi and W. J. Williams, "Improved time-frequency representation of multicomponent signals using exponential kernels," *IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process.*, vol. 37, no. 6, pp. 862--871, Jun. 1989.
- [20] Z. C. Zhang, X. Jiang, S. Z. Qiang, A. Sun, Z. Y. Liang, X. Y. Shi, and A. Y. Wu, "Scaled Wigner distribution using fractional instantaneous autocorrelation," *Optik*, vol. 237, Article No. 166691, Jul. 2021.
- [21] T. Thayaparan, J. Marchioni, A. Kelsall, and R. Riddolls, "Improved frequency monitoring system for sky-wave over-the-horizon radar in Canada," *IEEE Geosci. Remote. Sens. Lett.*, vol. 17, no. 4, pp. 606--610, Apr. 2020.
- [22] F. B. Duan, F. Chapeau-Blondeau, and D. Abbott, "Weak signal detection: Condition for noise induced enhancement," *Digit. Signal Process.*, vol. 23, no. 5, pp. 1585--1591, Sep. 2013.
- [23] R. F. Bai, B. Z. Li, and Q. Y. Cheng, "Wigner-Ville distribution associated with the linear canonical transform," *J. Appl. Math.*, vol. 2012, Article No. 740161, Jul. 2012.
- [24] T. W. Che, B. Z. Li, and T. Z. Xu, "The ambiguity function associated with the linear canonical transform," *EURASIP J. Adv. Signal Process.*, vol. 2012, Article No. 138, Jul. 2012.
- [25] R. Tao, Y. E. Song, Z. J. Wang, and Y. Wang, "Ambiguity function based on the linear canonical transform," *IET Signal Process.*, vol. 6, no. 6, pp. 568--576, Aug. 2012.
- [26] Z. C. Zhang, "New Wigner distribution and ambiguity function based on the generalized translation in the linear canonical transform domain," *Signal Process.*, vol. 118, pp. 51--61, Jan. 2016.
- [27] Z. C. Zhang, "Unified Wigner-Ville distribution and ambiguity function in the linear canonical transform domain," *Signal Process.*, vol. 114, pp. 45--60, Sep. 2015.
- [28] Z. C. Zhang and M. K. Luo, "New integral transforms for generalizing the Wigner distribution and ambiguity function," *IEEE Signal Process. Lett.*, vol. 22, no. 4, pp. 460--464, Apr. 2015.
- [29] Z. C. Zhang, "Linear canonical Wigner distribution based noisy LFM signals detection through the output SNR improvement analysis," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 67, no. 21, pp. 5527--5542, Nov. 2019.
- [30] Z. C. Zhang, S. Z. Qiang, X. Jiang, P. Y. Han, X. Y. Shi, and A. Y. Wu, "Linear canonical Wigner distribution of noisy LFM signals via variance-SNR based inequalities system analysis," *Optik*, vol. 237, Art. No. 166712, Jul. 2021.
- [31] Z. C. Zhang, "The optimal linear canonical Wigner distribution of noisy linear frequency-modulated signals," *IEEE Signal Process. Lett.*, vol. 26, no. 8, pp. 1127--1131, Aug. 2019.

- [32] Z. C. Zhang, D. Li, Y. J. Chen, and J. W. Zhang, "Linear canonical Wigner distribution of noisy LFM signals via multiobjective optimization analysis involving variance-SNR," *IEEE Commun. Lett.*, vol. 25, no. 2, pp. 546--550, Feb. 2021.
- [33] D. M. J. Cowell and S. Freear, "Separation of overlapping linear frequency modulated (LFM) signals using the fractional fourier transform," *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control*, vol. 57, no. 10, pp. 2324--2333, Oct. 2020.
- [34] M. A. B. Othman, J. Belz, and B. Farhang-Boroujeny, "Performance analysis of matched filter bank for detection of linear frequency modulated chirp signals," *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, vol. 53, no. 1, pp. 41--54, Feb. 2017.
- [35] X. Y. Peng, Y. Zhang, W. Wang, and S. Q. Yang, "Broadband mismatch calibration for time-interleaved ADC based on linear frequency modulated signal," *IEEE Trans. Circuits Syst. I Reg. Papers*, vol. 68, no. 9, pp. 3621--3630, Sep. 2021.
- [36] X. Y. Shi, A. Y. Wu, Y. Sun, S. Z. Qiang, X. Jiang, P. Y. Han, Y. J. Chen, and Z. C. Zhang, "Unique parameters selection strategy of linear canonical Wigner distribution via multiobjective optimization modeling," Submitted.
- [37] Y. Wu, X. Y. Shi, Y. Sun, X. Jiang, S. Z. Qiang, P. Y. Han, and Z. C. Zhang, "A computationally efficient optimal Wigner distribution in LCT domains for detecting noisy LFM signals," Submitted.
- [38] D. P. Bertsekas, *Constrained Optimization and Lagrange Multiplier Methods*. New York, NY, USA: Academic, 1982.
- [39] S. A. Collins, "Lens-system diffraction integral written in terms of matrix optics," *J. Opt. Soc. Amer.*, vol. 60, no. 9, pp. 1168--1177, Sep. 1970.
- [40] M. Moshinsky and C. Quesne, "Linear canonical transformations and their unitary representations," *J. Math. Phys.*, vol. 12, no. 8, pp. 1772--1783, Aug. 1971.
- [41] J. J. Healy, M. A. Kutay, H. M. Ozaktas, and J. T. Sheridan, Eds., *Linear Canonical Transforms: Theory and Applications*. New York, NY, USA: Springer, 2016.
- [42] T. Z. Xu and B. Z. Li, *Linear Canonical Transforms and its Applications*. Beijing, China: Science Press, 2013.
- [43] J. Shi, X. P. Liu, Y. N. Zhao, S. Shi, X. J. Sha, and Q. Y. Zhang, "Filter design for constrained signal reconstruction in linear canonical transform domain," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 66, no. 24, pp. 6534--6548, Dec. 2018.
- [44] J. Shi, X. P. Liu, F. G. Yan, and W. B. Song, "Error analysis of reconstruction from linear canonical transform based sampling," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 66, no. 7, pp. 1748--1760, Apr. 2018.
- [45] D. Y. Wei and Y. M. Li, "Convolution and multichannel sampling for the offset linear canonical transform and their applications," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 67, no. 23, pp. 6009--6024, Dec. 2019.
- [46] D. Y. Wei and H. M. Hu, "Theory and applications of short-time linear canonical transform," *Digit. Signal Process.*, In Press.

- [47] Q. Feng, B. Z. Li, and J. M. Rassias, "Weighted Heisenberg-Pauli-Weyl uncertainty principles for the linear canonical transform," *Signal Process.*, vol. 165, pp. 209--221, Dec. 2019.
- [48] W. B. Gao and B. Z. Li, "Uncertainty principles for the short-time linear canonical transform of complex signals," *Digit. Signal Process.*, vol. 111, Art. No. 102953, Apr. 2021.
- [49] L. de Haan and A. Ferreira, *Extreme Value Theory: An Introduction*. New York, NY, USA: Springer Science+Business Media LLC, 2006.
- [50] T. Maka, "Influence of adaptive thresholding on peaks detection in audio data," *Digit. Signal Process., Multimed. Tools Appl.*, vol. 79, pp. 19329--19348, Jul. 2020.
- [51] Y. W. Leung and Y. P. Wang, "Multiobjective programming using uniform design and genetic algorithm," *IEEE Trans. Syst. Man Cybern. C*, vol. 30, no. 3, pp. 293--304, Aug. 2000.
- [52] A. Papoulis, *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*. Third Edition. New York, NY, USA: McGraw-Hill, pp. 48, 1991.
- [53] X. L. Chen, J. Guan, Y. Huang, N. B. Liu, and Y. He, "Radon-linear canonical ambiguity function-based detection and estimation method for marine target with micromotion," *IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.*, vol. 53, no. 4, pp. 2225--2240, Apr. 2015.

致谢

在我本科毕业论文的写作过程中，受到了许多人的关心和帮助，在此我要向所有帮助过我的人表示由衷的感谢。

首先，我要感谢张志超老师和我的导师李顺杰老师。在本论文的选题、研究过程中，老师给了我非常多的指导和建议，不断帮助我排除困难和障碍。我从老师那里学到了很多傅里叶变换和信号处理专业知识和学术方法，受益匪浅。另外，我想感谢李金花老师，使我有机会接触到物理学的科研，开阔了我的眼界和训练了我的科研能力；我想感谢卢长娜老师和来鹏老师，他们指导了我数学建模竞赛并取得了优异成绩；我想感谢黄学平老师、张玉清老师分别在实变函数和分布式系统 Hadoop 课程上对我的指导；我想感谢我的辅导员邵福生老师和心理辅导武凯老师在生活上给我的鼓励。老师们都分享了许多生活知识和留学经验，他们的帮助和鼓励对我意义重大，并对我的未来规划和学术生涯产生了深远的影响。

同时，我也要感谢课题组的各位同学：蒋贤、韩普宇、杜奕宁、陈正龙等等，和研究生学长学姐：吴安阳、史晞雅、朱志超、张钰婉等等，他们在我的实验和研究中给了我非常多的帮助和支持。课题组的学习和研究氛围让我深刻体会到了科研工作的快乐和乐趣。我还要感谢我的家人和朋友们，他们在我学习和生活中一直给我鼓励和支持，让我在前行的路上一直充满信心和勇气。

最后，我还要感谢南京信息工程大学，为我提供了良好的学习和生活环境，培养了我扎实的学术基础和独立思考能力。学校提供了各种丰富的学术资源和社会活动，让我在学习之余，也拓展了自己的兴趣爱好和社交圈子。在这里，我还结交了一些非常优秀的同学和老师，他们在我学习和生活中给予了我很多启示和帮助。

在这里，我再次感谢所有支持和帮助过我的人，你们的帮助让我有信心和勇气迎接未来的挑战。