

南京信息工程大学

本科生毕业论文（设计）



题 目

一类混沌系统的线性反馈控制及同步

学生姓名	张瑶康
学 号	20141314054
学 院	数学与统计学院
专 业	信息与计算科学
指导教师	李顺杰

二〇一八年 五月七日

目 录

一、绪论.....	1
二、微分几何控制理论基础.....	2
2.1 向量场.....	2
2.2 李导数和李括号.....	2
2.3 微分同胚.....	4
2.4 分布和对合.....	4
三、基于反馈线性化的多翅膀混沌系统控制问题.....	5
3.1 非线性系统的输入—状态反馈线性化.....	5
3.1.1 非线性系统的单输入-状态反馈线性化.....	5
3.1.2 非线性系统的多输入-状态反馈线性化.....	6
3.2 多翅膀混沌系统的输入-状态反馈线性化.....	7
3.2.1 单输入-状态反馈线性化.....	8
3.2.2 多输入-状态反馈线性化.....	10
3.2.3 基于反馈线性化的多翅膀混沌系统控制问题.....	11
3.3 仿真实验验证和分析.....	12
四、多翅膀混沌系统的同步.....	14
4.1 混沌系统的同步.....	14
4.2 仿真实验验证和分析.....	16
五、结论.....	18
参考文献.....	18
致谢.....	20

一类混沌系统的线性反馈控制及同步

张瑶康

南京信息工程大学数学与统计学院, 江苏 南京 210044

摘要: 本文利用反馈线性化的方法研究了文献[1]提出的多翅膀混沌系统的控制及同步问题。证明了当施加两个控制变量时, 多翅膀混沌控制系统可全局输入-状态反馈线性化, 从而设计线性反馈控制器使得系统从任意初始状态渐近收敛到系统平衡点。其次, 利用反馈线性化的方法, 将驱动系统与响应系统同步问题转化为线性系统渐进稳定问题, 借助于前面的结果, 设计线性反馈控制器, 实现了同步问题, 并利用 MATLAB 进行仿真验证。

关键词: 反馈线性化方法; 混沌控制; 混沌同步

Linear feedback control and synchronization of a class of chaotic systems

Yaokang Zhang

School of Mathematics and Statistics, NUIST, Nanjing 210044, China

Abstract: In this thesis, the control and synchronization of the multi-wing chaotic system proposed in document [1] are studied by the feedback linearization method. It is proved that when two control variables are applied, the multiple-wing chaotic control system can be linearly input-state feedback linearization, so that the linear feedback controller is designed so that the system converges from arbitrary initial state to the equilibrium point of the system. Secondly, by using the feedback Linearization method, the synchronization problem of the drive system and the response system is transformed into the linear system asymptotic stability problem, the linear feedback controller is designed with the help of the previous results, and the synchronization problem is realized by MATLAB.

Key words: Feedback linearization method; Chaos control; Chaos synchronization

一、绪论

混沌系统具有明显的不确定性，而施加控制变量后，选择合适的控制输入，即可实现对混沌系统的控制，使系统轨迹满足实际的需要。混沌同步中，将原混沌系统称为驱动系统，其运行轨迹完全由系统本身决定，施加控制变量后的系统成为响应系统，混沌同步是研究如何选择合适的控制输入，使得响应系统的运行轨迹渐近收敛到驱动系统的运行轨迹。

早些年人们展开研究的有 Chen 系统[6][7]和 Lü系统[8]等。近年来，随着众多学者对混沌系统的研究成果[1-4]的发表，混沌系统、混沌控制及混沌同步问题得到了进一步解决和完善。其中，文献[2][4]给出了解决混沌控制问题的反馈线性化方法，并利用该方法成功地将 Rössler 和 Duffing 系统控制到了平衡点零点，这两篇文献都是基于引入一个控制变量的反馈线性化，对于引入多个控制变量实现反馈线性化的情况并未讨论。文献[3]基于微分几何的方法解决了两个系统的同步、混合同步、反同步解耦问题，文献[10]则是通过合理设计同步控制器，解决了一类具有可变系数的混沌系统的自同步与异结构的同步问题。目前研究混沌系统同步问题通常对每个状态方程都施加控制变量，然后选择合适的控制输入，利用李雅普诺夫直接法[5]证明误差系统渐近收敛。

文献[1]提出了一个新的多翅膀混沌系统，分析了系统的性质，包括耗散性，对称性，平衡点和稳定性等，研究了该系统的多翅膀扩展，并研究了多翅膀系统的混沌同步问题。本课题拟利用反馈线性化方法，研究文献[1]提出的多翅膀混沌系统在控制输入小于状态变量个数时即可解决该混沌系统的控制与同步问题。本文将证明对多翅膀混沌系统的第二和第三个方程分别引入控制变量后，该混沌控制系统可输入-状态线性化，进而通过设计线性反馈控制器使该混沌系统可以由任意初始状态控制到平衡点零点。最后，利用对驱动系统和响应系统做相同的状态变换，将原混沌系统的同步问题转换成新的混沌系统的同步问题，进而给出新的混沌系统的误差系统，利用控制问题所得出的结论使误差系统实现零控，即可实现原混沌系统的同步问题。并利用 MATLAB 仿真分别验证了上述控制方法的有效性和同步方法的可行性。

本论文的结构和安排如下：

第一部分简单介绍了论文工作过程中所需的微分几何控制理论的一些基本概念和性质。

第二部分主要考虑多翅膀混沌系统，分别讨论了施加一个控制变量及施加两个控制变量情况下，相应的混沌控制系统的输入-状态反馈线性化。可以发现，单输入情况下，系统只能满足局部线性化，因此过程中会出现奇点。而施加两个控制变量时，相应的混沌控制系统是可以全部反馈线性化的。此时，我们将利用线性化系统构造线性反馈控制器，使得系统能够从任意初始状态渐近收敛到平衡点零点。

第三部分主要利用反馈线性化方法研究多翅膀混沌系统的同步问题。利用反馈线性化，将同步问题转化为误差系统的零控问题，最后利用第二部分的结果，实现响应系统与驱动系统同步。

二、微分几何控制理论基础

2.1 向量场

设 $f(x)$ 是 n 维向量, 即 $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))^T$, 其中 $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ 。从几何的角度看, 向量空间中的每一个状态都有一个确定的向量与其对应, 也就是说映射 $f: R^n \rightarrow R^n$ 。因此从整体上看就可以假设从每一个状态 x 出发的每一个向量, 形成了一个由向量构成的场, 叫做向量场。即向量函数 $f: R^n \rightarrow R^n$ 是 R^n 空间的向量场。

2.2 李导数和李括号

对于一个光滑标量函数 $h(x)$, 记 h 的梯度为 ∇h , 即

$$\nabla h = \frac{\partial h}{\partial x}$$

梯度是一个行向量且第 j 个元素为 $(\nabla h)_j = \partial h / \partial x_j$ 。同理, 设向量场 $f(x)$, 记 f 的雅可比矩阵为 ∇f , 即

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}$$

这是一个 $n \times n$ 阶矩阵且 $(\nabla f)_{ij} = \partial f_i / \partial x_j$ 。

定义 2.1 设有一个光滑的标量函数 $h(x)$ 和一个光滑的向量场 $f(x)$, $h(x)$ 沿 $f(x)$ 方向的方向导数称为李导数, 也就是 h 对 f 的李导数, 记作 $L_f h$ 。

显然, $h(x)$ 对 $f(x)$ 的李导数可表示为:

$$\begin{aligned} L_f h(x) &= \frac{\partial h(x)}{\partial x} \cdot f(x) = \left(\frac{\partial h(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial h(x)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial h(x)}{\partial x_n} \right) \cdot f(x) \\ &= dh(x) f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial h(x)}{\partial x_i} \cdot f_i(x) \\ &= \nabla h(x) \cdot f(x) \end{aligned}$$

设 $g(x): R^n \rightarrow R^n$ 为 R^n 上的光滑向量场, 那么多重李导数可表示为:

$$L_f^k h(x) = L_f (L_f^{k-1} h(x)) = \frac{\partial (L_f^{k-1} h(x))}{\partial x} \cdot f(x)$$

$$L_g L_f h(x) = L_g (L_f h(x)) = \frac{\partial (L_f h(x))}{\partial x} \cdot g(x)$$

$$L_g L_f^k h(x) = L_g (L_f^k h(x)) = \frac{\partial (L_f^k h(x))}{\partial x} \cdot g(x)$$

零阶李导数可定义为：

$$L_f^0 h(x) = h(x)$$

定义 2.2 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是在 R^n 上的向量场， $g(x)$ 和 $f(x)$ 的李括号定义为：

$$[f, g](x) = \frac{\partial g}{\partial x} \cdot f(x) - \frac{\partial f}{\partial x} \cdot g(x)$$

李括号 $[f, g](x)$ 可以记为 $ad_f g(x)$ ，其中， $\frac{\partial g}{\partial x}$ ， $\frac{\partial f}{\partial x}$ 分别表示 $g(x)$ 和 $f(x)$ 的雅可比矩阵：

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1} & \frac{\partial g_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

多重李括号的定义为：

$$ad_f^k g(x) = [f, ad_f^{k-1} g](x) = \frac{\partial (ad_f^{k-1} g)}{\partial x} \cdot f(x) - \frac{\partial f}{\partial x} \cdot ad_f^{k-1} g(x)$$

显然，我们有

$$ad_f^0 g(x) = g(x)$$

李括号满足下列三个性质：

(1) 双线性性：

$$\begin{aligned} [\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, g] &= \alpha_1 [f_1, g] + \alpha_2 [f_2, g] \\ [f, \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2] &= \alpha_1 [f, g_1] + \alpha_2 [f, g_2] \end{aligned}$$

此处的 f, f_1, f_2, g, g_1 和 g_2 都是光滑向量场， α_1 和 α_2 是常数。

(2) 反对称性：

$$[f, g] = -[g, f]$$

(3) 雅可比恒等式：

$$[f, [g, h]] + [g, [h, f]] + [h, [f, g]] = 0$$

这里的 $h(x)$ 是 x 的一个光滑标量函数。

2.3 微分同胚

定义 2.3 映射 $\phi: R^n \rightarrow R^n$ ，定义域是 Ω ，如果 ϕ 是光滑的， ϕ^{-1} 存在且光滑，则称 ϕ 为微分同胚。注意：定义域为全空间时， $\phi(x)$ 为全局微分同胚。

引理 2.2 映射 $\phi(x)$ 定义在 R^n 中一个区域 Ω 上，如果雅可比矩阵 $\nabla \phi$ 在 Ω 中的一个点 $x = x_0$ 上是非奇异的，则 $\phi(x)$ 是定义在 Ω 中 x_0 的一个邻域上的局部微分同胚。

2.4 分布和对合

定义 2.4 假设有 m 个定义在开子集 $U \subset R^n$ 上的光滑向量场 f_1, f_2, \dots, f_m ，则对于任意 $x \in U$ ，向量 $f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)$ 可张成一个向量空间 $\Delta(x)$ ，即集合

$$\Delta(x) = \text{span}\{f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)\}$$

由于向量场 f_1, f_2, \dots, f_m 是光滑向量场，因此可将所有指派的向量空间视为光滑向量空间。我们称 $\Delta = \text{span}\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ 是 f_1, f_2, \dots, f_m 张成的一个分布，向量空间 $\Delta(x)$ 表示 Δ 在点 x 处的“值”。对于向量场 f ，若对于任意 $x \in U$ ，有 $f(x) \in \Delta(x)$ ，则称向量场 f 属于分布 Δ ，记为 $f \in \Delta$ 。

定义 2.5 如果对于分布 Δ 的任意两个向量场 f 和 g ，且 $[f, g] \in \Delta$ ，即

$$f \in \Delta, g \in \Delta \Rightarrow [f, g] \in \Delta$$

则称分布 Δ 是对合的。

三、基于反馈线性化的多翅膀混沌系统控制问题

3.1 非线性系统的输入—状态反馈线性化

3.1.1 非线性系统的单输入-状态反馈线性化

考虑单输入非线性系统

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (3.1)$$

其中 $x \in R^n$, $u \in R$ 分别是状态变量和控制输入, $f: R^n \rightarrow R^n$ 和 $g: R^n \rightarrow R^n$: 是 R^n 中的光滑向量场。如果存在可逆变换 $z = \phi(x)$ 以及反馈控制律:

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v \quad (3.2)$$

其中 $v \in R$, 使得 $z = \phi(x)$ 和 v 满足关系式:

$$\dot{z} = Az + Bv \quad (3.3)$$

其中

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

则称该系统是输入—状态可线性化的。

下列定理 3.1 给出了单输入非线性系统输入—状态可线性化的充要条件, 具体证明参见文献[5]。

定理 3.1 非线性系统(3.1)可输入—状态线性化当且仅当存在一个区域 Ω 使得下列条件成立:

- (1) 向量场 $g, ad_f g, \dots, ad_f^{n-1} g$ 在 Ω 上线性无关;
- (2) 分布 $\Delta = span\{g, ad_f g, \dots, ad_f^{n-2} g\}$ 在 Ω 上对合。

根据定理 3.1 我们很容易计算出线性化坐标 $z = (z_1, \dots, z_n)$ 满足:

$$\begin{cases} \frac{\partial z_1}{\partial x} ad_f^i g = 0 \\ \frac{\partial z_1}{\partial x} ad_f^{n-1} g \neq 0 \end{cases} \quad i = 0, 1, \dots, n-2 \quad (3.5)$$

及 $z_i = L_f^{i-1} z_1, i = 2, \dots, n$, 反馈变换 (3.2) 的 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 为:

$$\begin{cases} \alpha(x) = -\frac{L_f^n z_1}{L_g L_f^{n-1} z_1} \\ \beta(x) = \frac{1}{L_g L_f^{n-1} z_1} \end{cases} \quad (3.6)$$

3.1.2 非线性系统的多输入-状态反馈线性化

考虑多输入仿射非线性系统

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x) u_i \quad (3.7)$$

其中 $x \in R^n$, $u_i \in R^m$, f 和 g_i 为向量场。如果存在可逆变换 $z = \phi(x)$ 以及反馈控制律:

$$u_i = \alpha(x) + \beta(x) v_i \quad i = 1, \dots, m \quad (3.8)$$

其中 $v_i \in R^m$, 使得 $z = \phi(x)$ 和 v_i 满足关系式:

$$\dot{z} = Az + Bv \quad (3.9)$$

其中

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{n \times n}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{n \times m}$$

矩阵 A 和 B 的“前四行”为 $(n-m)$ 行。则称该系统是可输入-状态线性化的。

引理 3.1 对于非线性系统 (3.7), 当 $i = 0, 1, \dots, n-1$ 时, 定义如下分布:

$$\begin{aligned}
G_0 &= \text{span}\{g_1, \dots, g_m\} \\
G_1 &= \text{span}\{g_1, \dots, g_m, \text{ad}_f g_1, \dots, \text{ad}_f g_m\} \\
&\vdots \\
G_i &= \text{span}\{\text{ad}_f^k g_j : 0 \leq k \leq i, 1 \leq j \leq m\} \\
&\vdots \\
G_{n-1} &= \text{span}\{\text{ad}_f^k g_j : 0 \leq k \leq n-1, 1 \leq j \leq m\}
\end{aligned}$$

则该系统在区域 Ω 内可输入-状态反馈线性化当且仅当下列条件成立：

- (1) 对任意 $0 \leq i \leq n-1$ ，分布 G_i 在 Ω 内的维数为常数。
- (2) 分布 G_{n-1} 的维数为 n 。
- (3) 对任意 $0 \leq i \leq n-2$ ，分布 G_i 是对合的。

3.2 多翅膀混沌系统的输入-状态反馈线性化

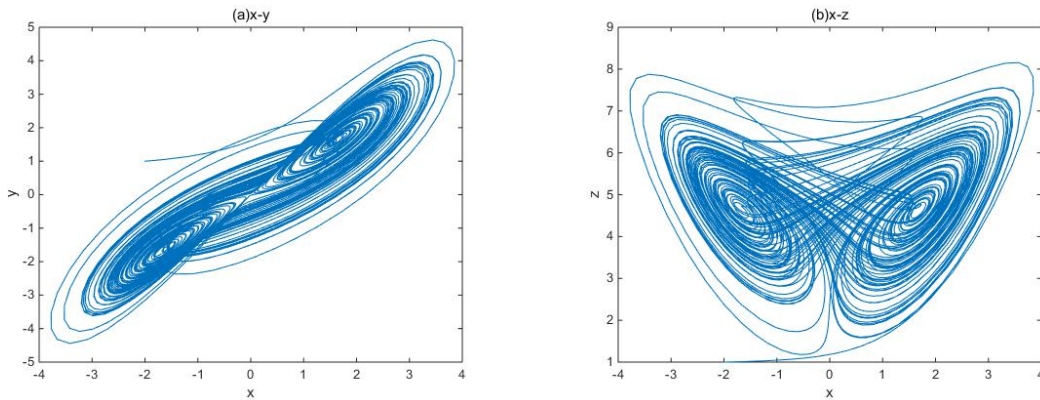
文献[1]提出了一个新的多翅膀混沌系统，分析了系统的性质，包括耗散性，对称性，平衡点和稳定性等，研究了该系统的多翅膀扩展，并研究了多翅膀系统的混沌同步问题。本节我们将利用反馈线性化的方法研究如何将该系统从任意初始状态控制到平衡点零点的问题。

多翅膀混沌系统模型[1]如下：

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a(x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 = -Mx_1x_3 + cx_2 + dx_1 \\ \dot{x}_3 = Nx_2^2 - bx_3 \end{cases} \quad (3.10)$$

其中， x_1, x_2, x_3 表示系统的状态变量，参数取值为： $a = 25$ ， $b = 3$ ， $c = 15$ ， $d = 8$ ， $M = 5$ ，

$N = 5$ 时，出现混沌，其在三个坐标平面上的投影及三维图像如图 1 所示。由混沌系统理论[11]可知，它是混沌系统。



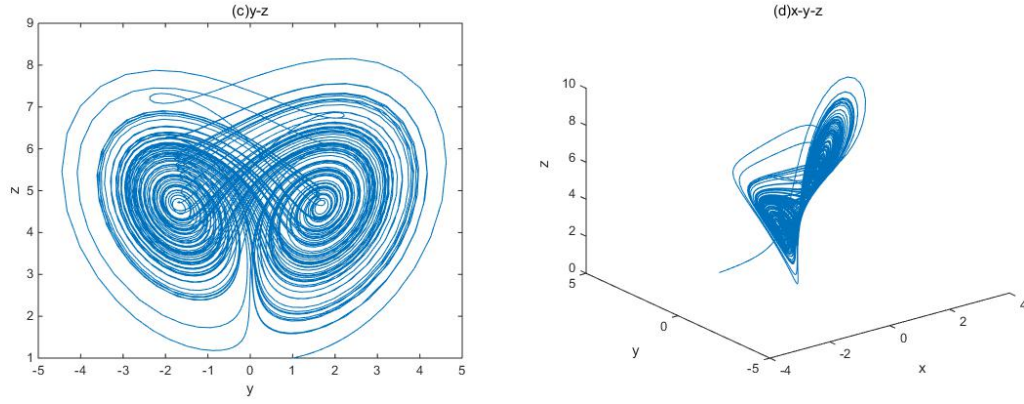


图 1 混沌系统的三个坐标平面投影及三维图像

令系统 (3.10) 右边等于 0，得到平衡状态方程为：

$$\begin{cases} a(x_2 - x_1) = 0 \\ -Mx_1x_3 + cx_2 + dx_1 = 0 \\ Nx_2^2 - bx_3 = 0 \end{cases} \quad (3.11)$$

计算可得方程组 (3.11) 有三个平衡点：

$$\begin{aligned} S_1 &= (0, 0, 0) \\ S_2 &= \left(\sqrt{\frac{b(c+d)}{MN}}, \sqrt{\frac{b(c+d)}{MN}}, \frac{c+d}{M} \right) \\ S_3 &= \left(-\sqrt{\frac{b(c+d)}{MN}}, -\sqrt{\frac{b(c+d)}{MN}}, \frac{c+d}{M} \right) \end{aligned}$$

关于多翅膀混沌系统性质的详细分析可参见文献[1]。下面我们以该系统的一个平衡点 S_1 为例，研究多翅膀混沌系统的零控问题。显然，如果对该系统 (3.10) 每个方程都增加控制变量，系统显然可控，通过选择合适的控制器即可实现系统零控问题。这里我们将讨论施加的控制变量数量小于 3 的情况。

3.2.1 单输入-状态反馈线性化

在系统 (3.10) 的第三个方程的右端施加控制 u ，可得到单输入混沌控制系统：

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a(x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 = -Mx_1x_3 + cx_2 + dx_1 \\ \dot{x}_3 = Nx_2^2 - bx_3 + u \end{cases} \quad (3.12)$$

定理 3.2 单输入混沌控制系统 (3.12) 在 $Q = R^3 \setminus \{x_1 \neq 0\}$ 内可输入-状态反馈线性化。

证明： 只需证明系统 (3.12) 满足引理 3.1 的条件。显然，我们有

$$f = \begin{pmatrix} ax_2 - ax_1 \\ -Mx_1x_3 + cx_2 + dx_1 \\ Nx_2^2 - bx_3 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

直接计算可得：

$$ad_f g = \begin{pmatrix} 0 \\ Mx_1 \\ b \end{pmatrix}, \quad ad_f^2 g = \begin{pmatrix} -Max_1 \\ Max_2 - Max_1 - Mcx_1 + Mbx_1 \\ b^2 - 2MNx_1x_2 \end{pmatrix}$$

定义分布 $\Delta_0 = span\{g\}$, $\Delta_1 = span\{g, ad_f g\}$, $\Delta_2 = span\{g, ad_f g, ad_f^2 g\}$ ，显然有，
 $rank\Delta_1 = 2, rank\Delta_0 = 1$ ，即条件(1)成立；当 $x_1 \neq 0$ 时， $rank\Delta_2 = 3$ ，即条件(2)成立；直接
 计算可得： $[g, ad_f g] = 0 \in \Delta_1$ ，即分布 Δ_1 是对合的，则条件(3)成立（分布 Δ_0 只含一个向量
 场，所以是对合的）。根据引理 3.1，系统 (3.12) 在 $Q = R^3 \setminus \{x_1 \neq 0\}$ 内可输入-状态线性化。

注：我们可以求出系统 (3.12) 反馈线性化的坐标变换及反馈：

由式 (3.5) 可知 z_1 满足： $\frac{\partial z_1}{\partial x} g = 0, \frac{\partial z_1}{\partial x} ad_f g = 0, \frac{\partial z_1}{\partial x} ad_f^2 g \neq 0$ ，即

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial x_1} & \frac{\partial z_1}{\partial x_2} & \frac{\partial z_1}{\partial x_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial x_1} & \frac{\partial z_1}{\partial x_2} & \frac{\partial z_1}{\partial x_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ Mx_1 \\ b \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial x_1} & \frac{\partial z_1}{\partial x_2} & \frac{\partial z_1}{\partial x_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -Max_1 \\ Max_2 - Max_1 - Mcx_1 + Mbx_1 \\ b^2 - 2MNx_1x_2 \end{pmatrix} \neq 0$$

由此可得： $\frac{\partial z_1}{\partial x_3} = 0, \frac{\partial z_1}{\partial x_2} = 0, \frac{\partial z_1}{\partial x_1} \neq 0$ ，所以 z_1 是关于 x_1 导数不为零的任意一元函数

$z_1 = z_1(x_1)$ ，这里我们选择解 $z_1 = x_1$ ，则有：

$$z_1 = x_1 \tag{3.13}$$

$$z_2 = L_f z_1 = ax_2 - ax_1 \tag{3.14}$$

$$z_3 = L_f^2 z_1 = -a^2 x_2 + a^2 x_1 - Max_1 x_3 + acx_2 + adx_1 \tag{3.15}$$

由式 (3.2)，(3.6) 得：

$$u = \frac{v - L_f^3 z_1}{L_g L_f^2 z_1} \quad (3.16)$$

计算可得

$$L_f^3 z_1 = (a^2 + ad - Max_3)(ax_2 - ax_1) + (-a^2 + ac)(-Mx_1x_3 + cx_2 + dx_1) - Max_1(Nx_2^2 - bx_3)$$

$$L_g L_f^2 z_1 = -Max_1$$

因此有

$$u = \frac{v - [(a^2 + ad - Max_3)(ax_2 - ax_1) + (-a^2 + ac)(-Mx_1x_3 + cx_2 + dx_1) - Max_1(Nx_2^2 - bx_3)]}{-Max_1}.$$

由式 (3.13), (3.14), (3.15) 可得线性化系统:

$$\dot{z}_1 = z_2, \dot{z}_2 = z_3, \dot{z}_3 = v \quad (3.17)$$

尽管系统在 $Q = R^3 \setminus \{x_1 \neq 0\}$ 内可输入-状态反馈线性化, 但是由于状态变换及反馈中都含有奇点 $x_1 = 0$, 因此在实际控制过程中会引起很多问题, 例如当系统坐标 x_1 接近零时, 控制输入会趋向无穷大。

3.2.2 多输入-状态反馈线性化

本节中, 我们在系统 (3.10) 的第二个和第三个方程的右端分别施加输入变量 u_1, u_2 , 即得到如下混沌控制系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a(x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 = -Mx_1x_3 + cx_2 + dx_1 + u_1 \\ \dot{x}_3 = Nx_2^2 - bx_3 + u_2 \end{cases} \quad (3.18)$$

定理 3.3 双输入混沌控制系统 (3.18) 在其定义域内全局可输入-状态反馈线性化。

证明: 只需证明系统 (3.18) 在任意点处满足引理 3.1 的条件。我们有

$$f = \begin{pmatrix} ax_2 - ax_1 \\ -Mx_1x_3 + cx_2 + dx_1 \\ Nx_2^2 - bx_3 \end{pmatrix}, \quad g_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

直接计算可得

$$ad_f g_1 = \begin{pmatrix} -a \\ -c \\ -2Nx_2 \end{pmatrix}, \quad ad_f g_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ Mx_1 \\ b \end{pmatrix}$$

$$ad_f^2 g_1 = \begin{pmatrix} ac - a^2 \\ ad + c^2 - 2MNx_1x_2 - Max_3 \\ 2MNx_1x_3 - 2Ndx_1 - 2Nbx_2 \end{pmatrix}, \quad ad_f^2 g_2 = \begin{pmatrix} -Max_1 \\ Max_2 - Max_1 - Mcx_1 + Mbx_1 \\ b^2 - 2MNx_1x_2 \end{pmatrix}$$

显然，有 $rankG_0 = 2, rankG_1 = rankG_2 = 3$ （注意到 $a \neq 0$ ），即引理 3.1 条件(1)，(2)满足。

因为 $[g_1, g_2] = 0 \in G_0$ ，所以 G_0 对合，又由于 $rankG_1 = 3$ ，则 G_1 对合，即条件(3)满足。因此根据引理 3.1，系统（3.18）在其定义域内全局可状态反馈线性化。

3.2.3 基于反馈线性化的多翅膀混沌系统控制问题

根据定理 3.3，多翅膀混沌系统在施加两个控制变量后可全局输入-状态反馈线性化。这一节我们将利用此结论讨论多翅膀混沌系统基于反馈线性化的控制问题。首先利用式（3.5）

与（3.6）可得状态变换 $z = z(x)$ 为：

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 \\ z_2 &= a(x_2 - x_1) \\ z_3 &= x_3 \end{aligned} \quad (3.19)$$

及反馈变换

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{a}v_1 + Mx_1x_3 - cx_2 - dx_1 + ax_2 - ax_1 \\ u_2 &= v_2 - Nx_2^2 + bx_3 \end{aligned} \quad (3.20)$$

原混沌控制系统（3.18）转化为

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= v_1 \\ \dot{z}_3 &= v_2 \end{aligned} \quad (3.21)$$

这样便完成了输入-状态线性化。这样选择合适的 u_1, u_2 控制系统（3.18）渐近收敛到平衡点 $(0,0,0)$ 的问题就转化为选择合适的 v_1, v_2 控制系统（3.21）渐近收敛到 $(0,0,0)$ 的问题。对系统（3.21）选择线性状态反馈控制律：

$$v_1 = k_1z_1 + k_2z_2 + k_3z_3 \quad (3.22)$$

$$v_2 = k_4z_1 + k_5z_2 + k_6z_3 \quad (3.23)$$

根据线性控制理论[13]，系统式（3.21）是稳定的当且仅当所有极点均有负实部。选择三个极点均配置在-2处，将（3.22）式和（3.23）式代入（3.21）式得：

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = k_1 z_1 + k_2 z_2 + k_3 z_3 \\ \dot{z}_3 = k_4 z_1 + k_5 z_2 + k_6 z_3 \end{cases} \quad (3.24)$$

即 $\dot{z} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ k_1 & k_2 & k_3 \\ k_4 & k_5 & k_6 \end{pmatrix} z$ ，线性化后系统矩阵为： $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ k_1 & k_2 & k_3 \\ k_4 & k_5 & k_6 \end{pmatrix}$ ，这样我们可以得到线性

化后的系统特征方程：

$$|\lambda E - A| = \lambda^3 - (k_2 + k_6)\lambda^2 + (k_2 k_6 - k_3 k_5 - k_1)\lambda + k_1 k_6 - k_3 k_4 \quad (3.25)$$

因为三个极点的值均为-2，可以得到等价特征方程：

$$(\lambda - (-2))^3 = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 12\lambda + 8 \quad (3.26)$$

特征方程（3.25）与（3.26）对应系数相等可得：

$$\begin{cases} k_2 + k_6 = 6 \\ k_2 k_6 - k_3 k_5 - k_1 = 12 \\ k_1 k_6 - k_3 k_4 = 8 \end{cases} \quad (3.27)$$

当 $k_i, i=1, \dots, 6$ 取值为： $k_1 = -4, k_2 = -3, k_3 = -1, k_4 = -4, k_5 = -1, k_6 = -3$ 时，满足（3.27）

式。此时，三个极点均为-2 即具有负实部，所以线性化后的系统（3.24）是稳定的。并且，由式（3.22）和（3.23）得：

$$v_1 = -4z_1 - 3z_2 - z_3 \quad (3.28)$$

$$v_2 = -4z_1 - z_2 - 3z_3 \quad (3.29)$$

将式（3.28）和（3.29）代入到式（3.20）得：

$$u_1 = \frac{1}{a}(-4z_1 - 3z_2 - z_3 + Max_1 x_3 - acx_2 - adx_1 + a^2 x_2 - a^2 x_1)$$

$$u_2 = -4z_1 - z_2 - 3z_3 - Nx_2^2 + bx_3$$

3.3 仿真实验验证和分析

本节将利用 MATLAB 仿真来验证 3.2 节的理论结果。我们的目的是将多翅膀混沌系统从任意初始状态控制到系统平衡点 $S_1 = (0,0,0)$ 。经过上述输入-状态反馈线性化方法以及计算分析可得到外部输入为 $v_1 = -4z_1 - 3z_2 - z_3, v_2 = -4z_1 - z_2 - 3z_3$ 时，系统（3.20）的三个极点均为-2，由文献[12]可得系统是渐近稳定的。此时， u_1, u_2 使该混沌系统渐近收敛到平衡点。实

验结果如图 2 所示。

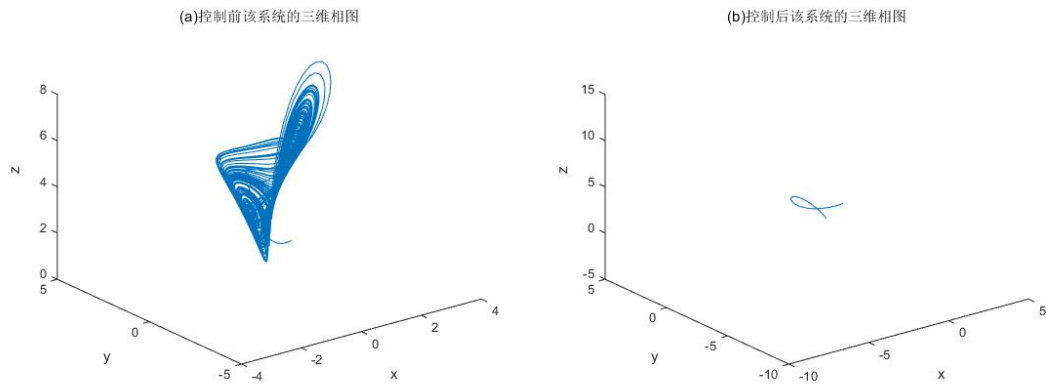


图 2 混沌系统自治和受控的三维图像

上述实验中, x 的初始值是 $(-0.5, -2, 3)$ 。图像显示受控的混沌系统达到了平衡点 $(0, 0, 0)$, 仿真验证不仅对计算结果的准确性做出了验证, 同时也验证了反馈线性化方法的有效性。

其次, 还对初始值远离平衡点的情况进行了仿真验证, 图 3 是初始值 $x = (10, 8, -7)$ 时, 受控系统 x_1, x_2, x_3 的时间响应曲线。从数值仿真结果来看, 系统很快就被控制到平衡点 $(0, 0, 0)$ 。

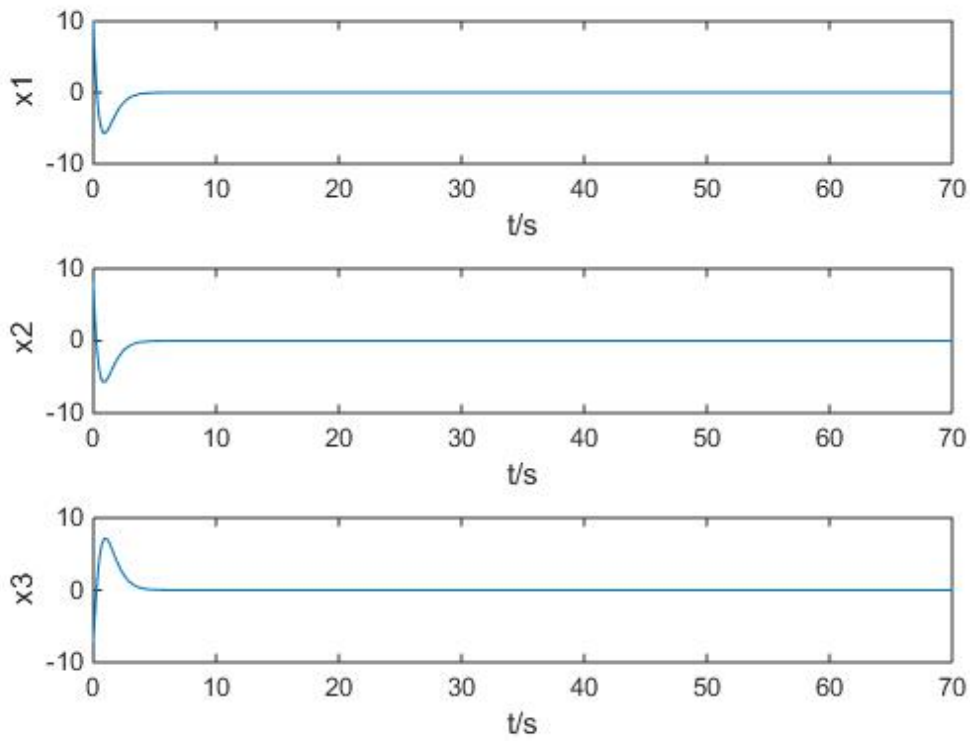


图 3 受控系统 x_1, x_2, x_3 的时间响应曲线

四、多翅膀混沌系统的同步

4.1 混沌系统的同步

将多翅膀混沌系统 (3.10) 作为驱动系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a(x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 = -Mx_1x_3 + cx_2 + dx_1 \\ \dot{x}_3 = Nx_2^2 - bx_3 \end{cases} \quad (4.1)$$

施加控制后的混沌控制系统作为响应系统:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = a(y_2 - y_1) \\ \dot{y}_2 = -My_1y_3 + cy_2 + dy_1 + u_{c1} \\ \dot{y}_3 = Ny_2^2 - by_3 + u_{c2} \end{cases} \quad (4.2)$$

同步问题即研究如何选择合适的控制输入 u_{c1}, u_{c2} , 使得响应系统的运动轨迹能够渐近逼近驱动系统的运动轨迹, 直至重合。本节我们将利用反馈线性化解决多翅膀混沌系统的同步问题。根据 3.2 节, 响应系统 (4.2) 在可逆坐标变换

$$\begin{cases} w_1 = y_1 \\ w_2 = a(y_2 - y_1) \\ w_3 = y_3 \end{cases} \quad (4.3)$$

和反馈变换输入变换

$$\begin{aligned} u_{c1} &= \frac{1}{a}v_{c1} + My_1y_3 - cy_2 - dy_1 + ay_2 - ay_1 \\ u_{c2} &= v_{c2} - Ny_2^2 + by_3 \end{aligned} \quad (4.4)$$

作用下, 反馈等价于:

$$\begin{aligned} \dot{w}_1 &= w_2 \\ \dot{w}_2 &= v_{c1} \\ \dot{w}_3 &= v_{c2} \end{aligned} \quad (4.5)$$

讨论同步问题时, 驱动系统与响应系统必须在同一坐标系, 因此对驱动系统 (4.1) 做相同可逆坐标变换, 即

$$\begin{cases} z_1 = x_1 \\ z_2 = a(x_2 - x_1) \\ z_3 = x_3 \end{cases} \quad (4.6)$$

此时驱动系统变换为:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = -Maz_1z_3 + (c-a)z_2 + a(c+d)z_1 \\ \dot{z}_3 = \frac{N}{a^2}z_2^2 + \frac{2N}{a}z_1z_2 + Nz_1^2 - bz_3 \end{cases} \quad (4.7)$$

因为坐标变换是可逆的，驱动系统（4.1）与响应系统（4.2）的同步问题就转化为系统（4.5）与系统（4.7）的同步问题。定义误差状态：

$$\begin{cases} e_1(t) = w_1(t) - z_1(t) \\ e_2(t) = w_2(t) - z_2(t) \\ e_3(t) = w_3(t) - z_3(t) \end{cases} \quad (4.8)$$

即误差系统方程记为：

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2 \\ \dot{e}_2 = v_{c1} + Maz_1z_3 - (c-a)z_2 - a(c+d)z_1 \\ \dot{e}_3 = v_{c2} - \frac{N}{a^2}z_2^2 - \frac{2N}{a}z_1z_2 - Nz_1^2 + bz_3 \end{cases} \quad (4.9)$$

定义反馈变换

$$\tilde{v}_{c1} = v_{c1} + Maz_1z_3 - (c-a)z_2 - a(c+d)z_1 \quad (4.10)$$

$$\tilde{v}_{c2} = v_{c2} - \frac{N}{a^2}z_2^2 - \frac{2N}{a}z_1z_2 - Nz_1^2 + bz_3 \quad (4.11)$$

可得误差系统（4.9）反馈等价于线性系统

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2 \\ \dot{e}_2 = \tilde{v}_{c1} \\ \dot{e}_3 = \tilde{v}_{c2} \end{cases} \quad (4.12)$$

显然系统（4.5）与系统（4.7）的同步问题等价于线性误差系统（4.12）渐近收敛到零点的问题。利用 3.2.3 节的结果，选择线性反馈控制器

$$\tilde{v}_{c1} = -4e_1 - 3e_2 - e_3 \quad (4.13)$$

$$\tilde{v}_{c2} = -4e_1 - e_2 - 3e_3 \quad (4.14)$$

将（4.13）和（4.14）式代入到系统（4.12）可得：

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2 \\ \dot{e}_2 = -4e_1 - 3e_2 - e_3 \\ \dot{e}_3 = -4e_1 - e_2 - 3e_3 \end{cases} \quad (4.15)$$

可得 e_1, e_2, e_3 均收敛于零，即可实现系统（4.1）与系统（4.2）同步。

最后利用式（4.4）、（4.10）及（4.11）可得到使系统（4.1）与系统（4.2）实现同步的反馈控制器：

$$u_{c1} = \frac{(-4e_1 - 3e_2 - e_3) + (-Maz_1z_3 + (c-a)z_2 + a(c+d)z_1) - (-Maw_1w_3 + (c-a)w_2 + a(c+d)w_1)}{a}$$

$$u_{c2} = (-4e_1 - e_2 - 3e_3) + \left(\frac{N}{a^2} z_2^2 + \frac{2N}{a} z_1z_2 + Nz_1^2 - bz_3 \right) - \left(\frac{N}{a^2} w_2^2 + \frac{2N}{a} w_1w_2 + Nw_1^2 - bw_3 \right)$$

4.2 仿真实验验证和分析

利用 MATLAB 对上述结果进行验证，选择驱动系统的初值为： $(x_{10}, x_{20}, x_{30}) = (2, 2, 3)$ ，

响应系统的初值为： $(y_{10}, y_{20}, y_{30}) = (4, 5, 6)$ 。实验结果如图 4 所示。从图中，我们可以直观的看到 20 秒左右两系统的误差几乎为零，运动轨迹几乎重合，经过 25 秒后运动轨迹完全重合。这也就是说系统实现追踪，达到同步。

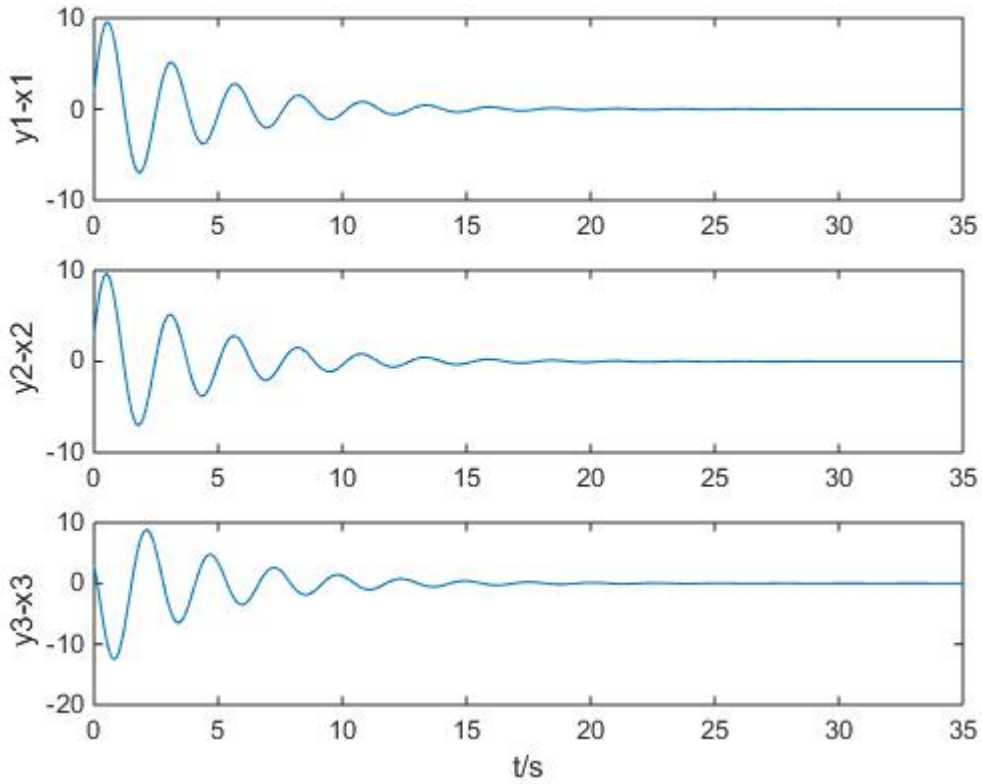


图 4 响应系统与驱动系统的误差曲线图

其次，还对各对应状态变量的逼近图进行了仿真验证，如图 5、图 6、图 7 所示。从这三个图中，我们可以看到 y_1, y_2, y_3 的曲线分别逐渐逼近 x_1, x_2, x_3 的曲线，在 20 秒左右各对应变量的曲线几乎重合，25 秒后完全重合。

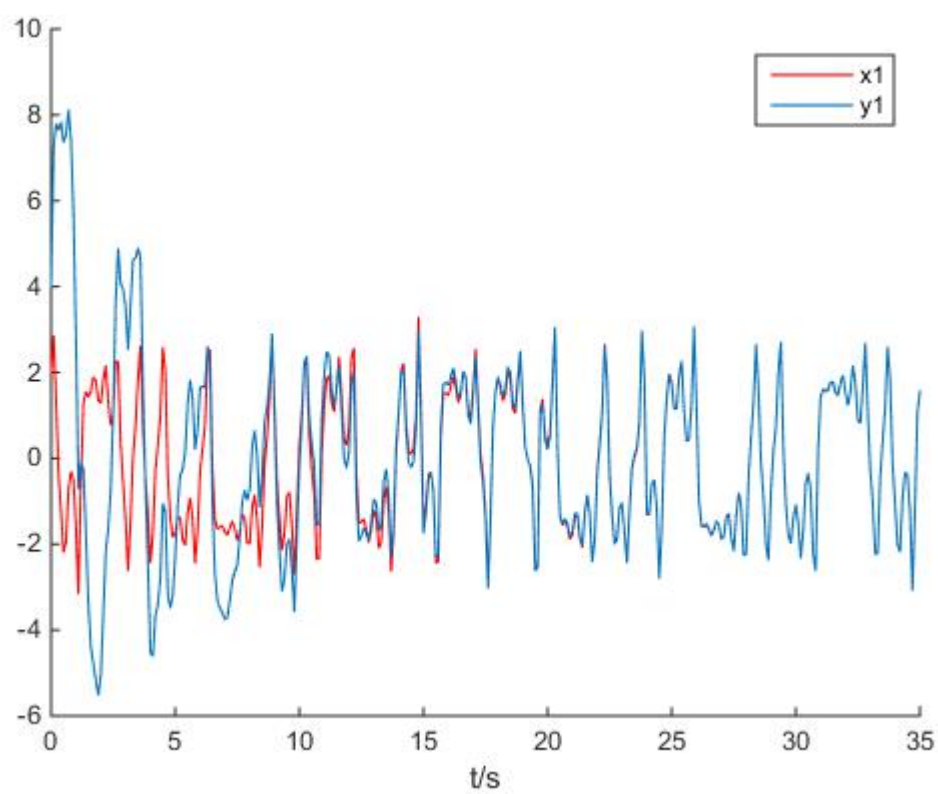


图 5 状态变量 x_1 和 y_1 的时间响应曲线

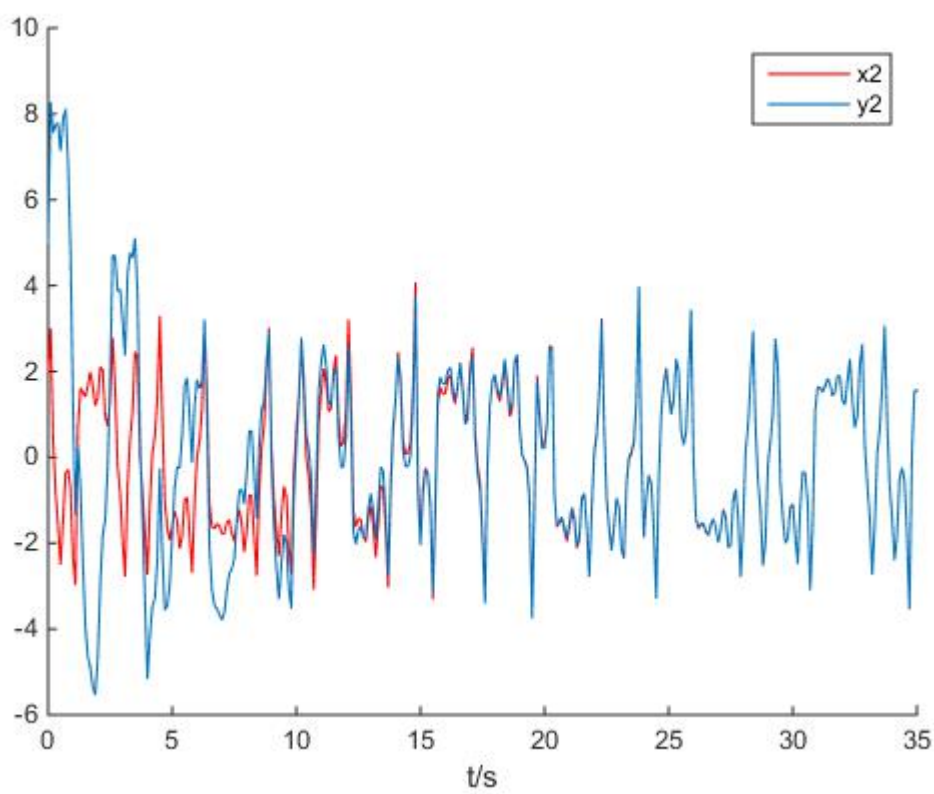


图 6 状态变量 x_2 和 y_2 的时间响应曲线

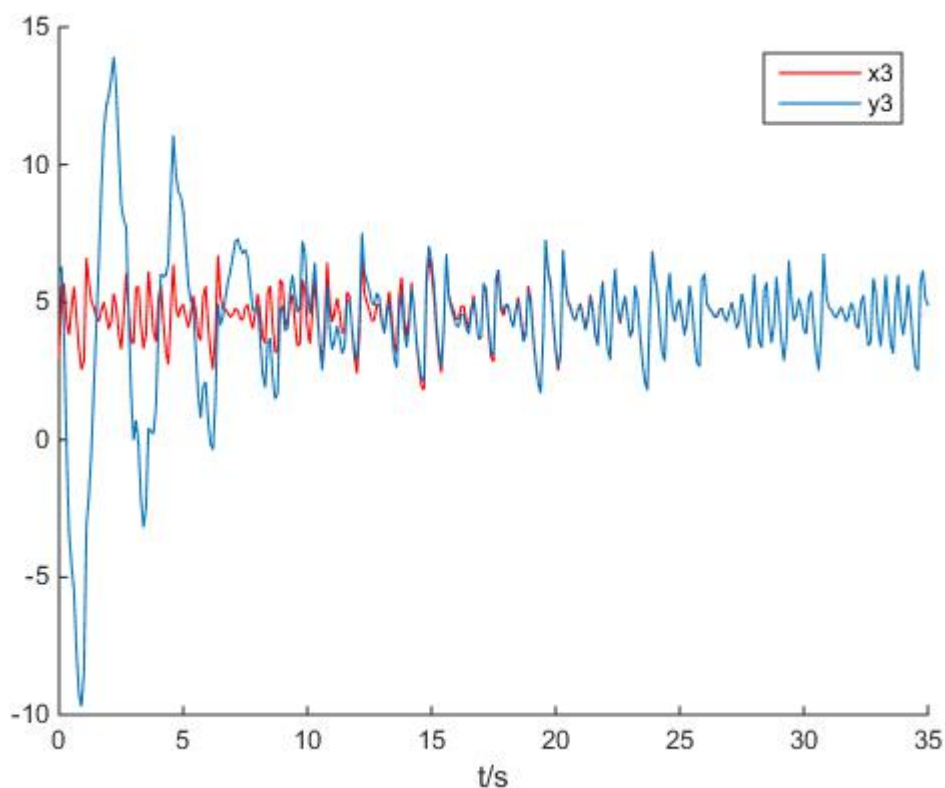


图 7 状态变量 x_3 和 y_3 的时间响应曲线

五、结论

本文讨论了文献[1]提出的一个新的多翅膀混沌系统基于反馈线性化的控制及同步问题。当对该混沌系统施加两个控制变量时，证明了其混沌控制系统可全局输入-状态反馈线性化，因此可以设计线性反馈控制器使得系统从任意初始状态渐近收敛到平衡点 $(0,0,0)$ 。然后，利用反馈线性化的方法，将驱动系统与响应系统同步问题转化为线性系统渐近稳定问题，利用前面的结果，设计线性反馈控制器，解决了同步问题，并利用 MATLAB 仿真做出了验证。

参考文献

- [1] 张国山, 胡雪兰. 一类新的多翅膀混沌系统分析与同步[J]. 信息与控制, 2016, 45(1): 86-93.
- [2] 韩萍. 基于反馈线性化的 Rössler 混沌系统控制[J]. 渤海大学学报(自然科学版), 2011, 32(2): 120-123.

- [3] 王平. 基于微分几何方法的混沌系统同步解耦控制[D]. 辽宁: 辽宁师范大学, 2016.
- [4] 周群立, 张绍德. 基于反馈线性化的 Duffing 混沌系统控制[J]. 安徽工业大学学报, 2007, 24(1): 58-66.
- [5] J. E. Slotine, W. L. i. 应用非线性控制[M]. 程代展, 译. 北京: 机械工业出版社, 2006.
- [6] Chen G R, Ueta T. Yet another chaotic attractor[J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 1999, 9(7): 1465-1466.
- [7] Ueta T, Chen G R. Bifurcation analysis of Chen's equation[J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2000, 10(8): 1917-1931.
- [8] Lü J H, Chen G R. A new chaotic attractor coined[J]. International Journal of Bifurcation and chaos, 2002, 12(3): 659-661.
- [9] 李殿璞. 非线性控制系统理论基础[M]. 2 版. 北京: 清华大学出版社, 2014.
- [10] 牛弘, 张国山. 一类具有可变系数的混沌系统的同步[J]. 物理学报, 2013, 62(13): 130502-130513.
- [11] 杨晓松, 李清都. 混沌系统与混沌电路[M]. 北京: 科学出版社, 2007: 5-11.
- [12] 韩京清, 李清都. 线性控制系统理论[M]. 科学出版社, 2001: 81-94.

致谢

本论文是在李顺杰导师悉心指导下完成的，从选题到定稿的这段时间里，导师倾注了大量心血，每当我遇到难题做不下去的时候，导师都会耐心了解并且开导我，为我指明了前进的方向，使得论文研究得以进一步开展，最终完成论文，在此我对我的导师表示深切的谢意以及最真挚的祝福！

感谢大学四年老师和同学们对我的帮助，很荣幸你们能出现在我的生命中，陪伴我成长这重要的四年时光。

同时也要感谢陶亮和吴冲冲，在我遇到困难进行不下去的时候，是他们的鼓励和支持让我坚持下来，并顺利地完成了论文。

最后感谢我的父母对我学业的极大支持，你们的支持和付出是我前进的动力，未来日子里，我一定会加倍努力。