与线性正则变换相关的模糊函数

Tian-Wen Che, Bing-Zhao Li* and Tian-Zhou Xu

*通信：li_bingzhao@bit.edu.cn，北京理工大学数学学院，北京 100081，中国

摘要

本文提出了一种与线性正则变换（LCT）相关的新型模糊函数（AF）,这种新型 AF 基于 LCT 和传统 AF。首先，研究了新型 AF 的主要特性和物理意义，结果表明，这种 AF 可以被看作是经典 AF 的一个推广。然后，通过结合经典 Radon 变换，新型 AF 被应用于检测线性调频信号。仿真模拟验证了所得结果的正确性，并讨论了与普通时频分析工具的区别。

关键词：线性正则变换（LCT），模糊函数（AF），Radon 变换（RT）

简介

非平稳信号处理和分析是信号处理界最热门的研究课题之一。人们提出了一系列信号处理理论来分析非平稳信号，比如短时傅里叶变换（STFT）[1]，小波变换（WT）[2]和分数阶傅里叶变换（FRFT）[3], [4]。FRFT 作为经典傅里叶变换（FT）的泛化，因其固有的特殊性而吸引了越来越多的关注。事实证明，FRFT 可以被看作是一个统一的时频变换[4]。1980 年，Namisas 在量子力学中讨论了分数傅里叶算子的想法[5]，并于 1987 年在数学界重新发现了它。Almeida[7]、Santhanam 和 McClellan[8]将它引入了信号处理界。在[9], [10]中提出的 FRFT 的离散和数字计算方法为其在实际情况下的应用打开了大门。随着 FRFT 的进一步衍生，线性正则变换(LCT)被证明在光学和信号处理中发挥着重要作用，许多与 FT 相关的概念已经被推广到 LCT 领域。例如，采样理论[11], [12]、特征函数[13]、卷积定理[14, 15]、以及光谱分析的均匀与非均匀样本，在 LCT 领域被很好地研究。LCT 的有效离散和数字计算算法在[17], [18]中介绍。更多与 LCT 相关的结果可以参考[3], [4]。

同时，线性调频(LFM)信号是一种典型的非平稳信号，被广泛用于通信、雷达和声纳系统中。LFM 信号的处理非常重要，因此已经提出了许多算法和方法。与 FT 相关的模糊函数(AF)是 LFM 信号处理中最重要的时频工具之一[19], [20]。此外，还提出了许多与 LFM 信号参数估计和频谱分析有关的其他重要和有用的方法，如最小均方误差(MMSE)估计[21]，迭代算法[22]。与 de Branges 理论相关

的广义 FT[23]，与 FRFT 相关的 AF[24]，Wigner-Hough 变换(WHT)[25]，Chirp FT[26]，Wiger-Ville 分布(WVD)[27]和 Raton-ambiguity 变换(RAT)[28]。

遵循 AF 的经典定义，Pei 和 Ding[29]首先研究了与 LCT 相关的 AF，并取得了一些重要的特性。最近 Zhao 等人[30]在光信号处理方向上研究了与 LCT 相关 AF 的特性和物理意义。本文提出了一种不同于[29], [30]的新型与（LCT）相关 AF。我们还讨论了它在 LFM 信号处理的主要特性和应用。

本文组织结构如下：在“前言”部分，我们首先回顾了 LCT 的相关理论、经典 AF 以及之前的研究结果。在“与 LCT 相关的模糊函数”部分，我们提出了与 LCT 相关的新型 AF，并介绍了其主要特性和物理意义。在“AFL 的应用”部分，新型 AF 在 LFM 信号处理进行了详细研究。在“讨论”部分，讨论了新型 AF 与其他常见时频工具的区别，如 RWT、RAT 等。在“模拟”部分，给出了模拟结果，以显示所提出技术的合理性和有效性。“总结”部分是结论。

前言

LCT

一个信号 $f(t)$ 的 LCT 可以被定义[3], [4]为：

$$F_{(a,b,c,d)}(u) = L^{(a,b,c,d)}[f(t)](u) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{1}{j2\pi b}} e^{j\frac{d}{2b}u^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\frac{a}{2b}t^2 - j\frac{ut}{b}} f(t)dt & (b \neq 0) \\ \sqrt{d} e^{j\frac{cd}{2}} u^2 f(du) & (b = 0) \end{cases} \tag{1}$$

其中 a,b,c,d 为实数，并满足 $ad - bc = 1$ 。

很容易验证，经典的 FT、FRFT、啁啾操作和缩放操作都是如以下所示的特殊 LCT 案例。当 $(a,b,c,d)=(0,1,-1,0)$ 时，LCT 变成了 FT：

$$L^{(0,1,-1,0)}[f(t)](u) = \sqrt{-j}\mathrm{FT}[f(t)](u) \tag{2}$$

当 $(a,b,c,d)=(\cos\theta,\sin\theta,-\sin\theta,\cos\theta)$ 时，LCT 变成了 FRFT：

$$L^{(\cos\theta,\sin\theta,-\sin\theta,\cos\theta)}[f(t)](u) = \sqrt{e^{-j\alpha}} F^{\alpha}[f(t)](u) \tag{3}$$

当 $(a,b,c,d)=(1,0,\tau,1)$ 时，LCT 变成了啁啾操作：

$$L^{(1,0,\tau,1)}[f(t)](u)=e^{\frac{j}{2}\tau u^2}f(u) \tag{4}$$

当$\left(a,b,c,d\right)=\left(\sigma,0,0,\sigma^{-1}\right)$时，LCT 变成了缩放操作：

$$L^{\left(\sigma,0,0,\sigma^{-1}\right)}[f(t)](u)=\sqrt{\sigma^{-1}}f\left(\sigma^{-1}u\right) \tag{5}$$

许多关于 LCT 的有用特性[3], [4]表明 LCT 是最重要的非平稳信号处理工具之一，以下与 LCT 相关的加法特性和可逆特性将会被用在本文。

（1）加法特性

$$L^{(a_2,b_2,c_2,d_2)}\left[L^{(a_1,b_1,c_1,d_1)}(f(t))\right](u)=L^{(a_3,b_3,c_3,d_3)}[f(t)](u) \tag{6}$$

其中$\begin{pmatrix}a_3 & b_3\\ c_3 & d_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_2 & b_2\\ c_2 & d_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ c_1 & d_1\end{pmatrix}$。

（2）可逆特性

$$L^{(d,-b,-c,a)}\left[L^{(a,b,c,d)}[f(t)](u)\right](t)=f(t) \tag{7}$$

因为 LCT 可以被看作是经典傅里叶和分数 FT 的泛化，所以它可以扩展它们的功能和应用，并解决一些超出这些操作的问题[31]。在不影响通用性的前提下，我们在本文中只考虑$\mathrm{b}\neq 0$的情况，因为当$b=0$时，LCT 只是一个缩放变换操作。关于 LCT 的更多属性和与其他变换的关系，可以参考[3], [4]。

随着现代信号处理技术的快速发展，经典的概念和理论也在不断变化。在 FT 领域中，已经广泛地研究了 LCT 领域，例如，均匀和非均匀的采样理论[32]-[34]，卷积和乘积定理[14], [15]，不确定性原理[35]-[37]在 LCT 领域得到了充分的研究和调查。

模糊函数（AF）

瞬时自相关信号函数$f\left(t\right)$被定义为：

$$R_f(t,\tau)=f\left(t+\frac{\tau}{2}\right)f^*\left(t-\frac{\tau}{2}\right) \tag{8}$$

并且与 FT 相关经典 AF 的$f\left(t\right)$被定义为对 t 的$R_f(t,\tau)$ FT：

$$AF_f(\tau,u)=\int_{-\infty}^{\infty}R_f(t,\tau)e^{-jut}dt \tag{9}$$

或者在 FT 定义域内可以等价地定义为：

$$AF_f(\tau,u)=\int_{-\infty}^{\infty}F\left(p+\frac{u}{2}\right)F^*\left(p-\frac{u}{2}\right)e^{ip\tau}dp \tag{10}$$

其中 $F(p)$ 是信号 $f(t)$ 的 FT。

经典 AF 特性可以列举如下：

$$AF(\tau,u)=AF^*(-\tau,-u) \tag{11}$$

$$AF(0,0)=\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2\,dt \tag{12}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}AF_x(\tau,u)AF_z(\tau,u)d\tau du=|<x,z>|^2 \tag{13}$$

AF 是经典的、重要的时频信号处理工具之一。在[28]中显示，LFM 信号的 AF 通过环境平面 (τ,u) 的原点，而投影线的斜率是信号的频率率。所有这些 AF 的特性可以帮助我们在 LFM 信号必理和参数估计中获得良好的结果。

先前的研究成果

基于 LCT 的特性和与 FT 相关的 AF 的定义，Pei 和 Ding[29]以及 Zhao 等人[30]提出了与 LCT 相关的 AF 的两个不同的定义，具体如下。

定义 1： 假设参数为 (a,b,c,d) 的信号 $f(t)$ 的 LCT 是 $F_{(a,b,c,d)}(u)$，那么与 LCT 相关的 AF 被定义为[29]：

$$AF_{F_{(a,b,c,d)}(\tau,u)=}\int_{-\infty}^{\infty}F_{(a,b,c,d)}\left(v+\frac{\tau}{2}\right)F^*_{(a,b,c,d)}\times\left(v-\frac{\tau}{2}\right)e^{-juv}dv \tag{14}$$

在[29]中表明，这种 AF 具有以下特性：

$$AF_{F_{(a,b,c,d)}}(\tau,u)=AF(d\tau-bu,-c\tau+au) \tag{15}$$

$$AF_{F_{(a,b,c,d)}}(a\tau+bu,c\tau+du)=AF(\tau,u) \tag{16}$$

其中 $AF_{(\tau,u)}$ 和 $AF_{F(\tau,u)}$ 分别代表着 $f(t)$ 的 AF 和 $F_{(a,b,c,d)}(v)$。

定义 2： 假设参数为 (a,b,c,d) 的信号 $f(t)$ 的 LCT 是 $F_{(a,b,c,d)}(v)$，那么线性正则 AF（LCAF）被定义为[30]：

$$AF_M(\tau,u)=\int_{-\infty}^{\infty}F_{(a,b,c,d)}\left(v+\frac{\tau}{2}\right)F^*_{(a,b,c,d)}\times\left(v-\frac{\tau}{2}\right)e^{juv}dv \tag{17}$$

在[30][29]中表明，这种 AF 具有以下特性：

$$AF_M(\tau,u)=AF(b\tau+du,-a\tau-cu) \tag{18}$$

$$AF_M(-u,\tau)=AF(d\tau-bu,-c\tau+au) \tag{19}$$

与 LCT 相关的那些种类的 AF 的其他特性和物理意义，也在[29], [30]中进行了详细研究。

很容易看出，这些被公式(14)和公式(17)定义的广义的 AF 是瞬时 FT 的 LCT 信号自相关函数。它们实际上是传统 AF 将线性坐标转换在 FT 坐标。与[29], [30]中的定义不同，我们在本文中定义了一种与 LCT 相关的新型 AF，并且后文也将研究新型 AF 在 LFM 信号中的信号处理应用。

与 LCT 相关的 AF

与 LCT 相关的新型 AF 定义

从数学的角度来看，信号处理界的许多变换可以被看作是信号与核函数的乘积。它们也可以分为两种定义：（1）信号局部形式与核函数的乘积，如 STFT、WVD 等；（2）信号与局部核函数的乘积，如 WT、Gabor 变换等。

不难看出，[29], [30]中的广义 AF 是基于原始信号的局部变换。首先获得原始信号的 LCT，然后应用传统的 AF 定义，这可以被认为是一类定义。与他们的定义不同，我们提出了一个与 LCT 相关的 AF 的新定义，它遵循另一类定义。

定义 3：与 LCT 相关的信号 $f\left(t\right)$ 的 AF，其参数 $A=\left(a,b,c,d\right)$ 被定义为

$$\begin{aligned} AFL[f(t)](\tau,u) &= AF_{(a,b,c,d)}(\tau,u) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} R_f(t,\tau) K_A(t,u)dt \end{aligned} \tag{20}$$

其中 $K_A(t,u)=\sqrt{\frac{1}{j2\pi b}}e^{\frac{d}{2b}u^2}e^{j\frac{\pi}{2b}t^2-j\frac{ut}{b}}$，并且 $R_f(t,\tau)=f\left(t+\frac{\tau}{2}\right)f^*\left(t-\frac{\tau}{2}\right)$。

从 LCT[3], [4]定义和物理意义上来说，这种 AF 可以被解释为瞬时自相关函数 $R_f\left(t,\tau\right)$ 在 $\left(\tau,u\right)$ 平面内的仿射变换。为了使其不同与 LCT 相关的定义，我们将这种信号 $f\left(t\right)$ 的由公式(20)定义 AF，即 $AF_{(a,b,c,d)}(\tau,u)$，在后文中简称为 AFL。

新型 AF 的特性

如果一个信号 $f\left(t\right)$ 的 AFL 表示为 $AF_{(a,b,c,d)}(\tau,u)$，那么不难看出，AFL 具有以下特性：

共轭特性

$f^*(t)$ 的 AFL 是 $\left[AF_{(a,-b,-c,d)}(\tau,u)\right]^*$， $f(-t)$ 的 AFL 是 $\left[AF_{(a,-b,-c,d)}(\tau,-u)\right]^*$，并且 $f^*(-t)$ 的 AFL 是 $AF_{(a,b,c,d)}(\tau,-u)$。

转移特性

$f(t-p)$ 的 AFL 是 $e^{-j\frac{ac}{2}p^2+jcpu}AF_{(a,b,c,d)}(\tau,u-pa)$， $f(t)e^{jwt}$ 的 AFL 是 $e^{jw\tau}AF_{(a,b,c,d)}(\tau,u)$，并且 $f(t)e^{jwt^2}$ 的 AFL 是 $e^{-j2dw^2\tau^2b+j2duw\tau}AF_{(a,b,c,d)}(\tau,u-2w\tau b)$。

受限性

如果 $f(t)=0, t\notin[t_1,t_2]$，那么 $AF_{(a,b,c,d)}(\tau,u)=0, \tau>t_2-t_1$。

不定积分特性

信号 $f(t)$ 可以通过以下公式被表示成 $f(t)$ 的 AFL：

$$f(t)=\frac{1}{f^*(0)}\int_{-\infty}^{\infty}AF_{(a,b,c,d)}(t,u)K_{A^{-1}}\left(\frac{t}{2},u\right)du$$

特例

当 $(a,b,c,d)=(0,1,-1,0)$ 时，AFL 变成了传统 AF[19]

$$AF_{(0,1,-1,0)}(\tau,u)=\sqrt{-j}AF(\tau,u)$$

并且 $(a,b,c,d)=(\cos\theta,\sin\theta,-\sin\theta,\cos\theta)$，AFL 变成了与 FRFT（ $AF^{\alpha}(\tau,u)$ ）相关的 AF

$$AF_{(\cos\theta,\sin\theta,-\sin\theta,\cos\theta)}(\tau,u)=\sqrt{e^{-j\alpha}}AF^{\alpha}(\tau,u)$$

时域能量

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \, dt = \sqrt{j2\pi} AF_{(0,1,-1,0)}(0,0)$$

对称性

$$\left| AF_{(a,b,c,d)}(-\tau,-u) \right| = \left| AF_{(-a,b,c,-d)}(\tau,u) \right|$$

对于 LFM 信号的敏感度

一个 LFM 信号 $f(t) = e^{j\left(w_0 t + m_0 t^2\right)}$ 的 AFL 是

$$AF_{(a,b,c,d)}(\tau,u) = \begin{cases} e^{j\left(\frac{d}{2b}u^2 + w_0\tau\right)} \sqrt{\dfrac{2\pi\,|b|}{j}} \delta\left(u - m_0 \tau b\right) \left(\dfrac{a}{2b} = 0\right) \\ e^{j\left(\frac{d}{2b}u^2 + w_0\tau - \frac{\left(m_0\tau - u/b\right)^2}{2a/b}\right)} \sqrt{\dfrac{1}{a}} \left(\dfrac{a}{2b} \neq 0\right) \end{cases} \tag{21}$$

其中 w_0, m_0 分别代表 $f(t)$ 的初始频率和频率率。

证明：从 AFL 的定义，我们观察到

$$AF_{(a,b,c,d)}(\tau,u) = \sqrt{\frac{1}{j2\pi b}} e^{j\frac{d}{2b}u^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\frac{a}{2b}t^2 - j\frac{ut}{b}} R_f(t,\tau) dt$$

$$= \sqrt{\frac{1}{j2\pi b}} e^{j\frac{d}{2b}u^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\frac{a}{2t^2 - j\frac{ut}{b}}} e^{j\left(a_1\tau + 2a_2\tau t\right)} dt$$

$$= \sqrt{\frac{1}{j2\pi b}} e^{j\left(\frac{d}{2b}u^2 + a_1\tau\right)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\frac{a}{2b}t^2} e^{j\left(2a_2\tau - \frac{u}{b}\right)t} dt$$

$$\frac{a}{2b} = 0, = \sqrt{\frac{1}{j2\pi b}} e^{j\left(\frac{d}{2b}u^2 + a_1\tau\right)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\left(2a_2\tau - \frac{u}{b}\right)t} dt$$

$$= \sqrt{\frac{2\pi b}{j}} e^{j\left(\frac{d}{2b}u^2 + a_1\tau\right)} \delta\left(u - 2a_2\tau\right)$$

$$\frac{a}{2b}\neq 0,=\sqrt{\frac{1}{j2\pi b}}e^{j\left(\frac{d}{2b}u^2+a_1\tau\right)}\int_{-\infty}^{\infty}e^{j\frac{a}{2b}t^2}e^{j\left(2a_2\tau-\frac{u}{b}\right)t}dt$$
$$=\sqrt{\frac{1}{j2\pi b}}e^{j\left(\frac{d}{2b}u^2+a_1\tau\right)}\int_{-\infty}^{\infty}e^{j\frac{a}{2b}\left(t^2+\frac{2a_2\tau-u/b}{a/2b}\right)}dt$$
$$=\sqrt{\frac{1}{j2\pi b}}e^{j\left(\frac{d}{2b}u^2+w_0\tau\right)}e^{-j\frac{a}{2b}\frac{(m_0\tau-u/b)^2}{a^2/b^2}}\times\int_{-\infty}^{\infty}e^{j\frac{a}{2b}\left(t+\frac{m_0\tau-u/b}{a/b}\right)^2}dt$$
$$=\sqrt{\frac{1}{a}}e^{j\left(\frac{d}{2b}u+a_1\tau\right)}e^{-j\frac{a}{2b}\frac{(2a_2\tau-u/b)^2}{a^2/b^2}}$$

从公式(21)中我们可以看出，当参数满足特殊条件时，$f\left(t\right)$ 的 AFL 将在 $\left(\tau,u\right)$ 平面上产生一个脉冲。当信号是有限的，由于能量的积累，也会有一个波峰。LFM 信号的 AFL 将通过模糊平面 $\left(\tau,u\right)$ 的原点，而投影线的斜率为频率的 b 倍。

AFL 与 STFT 的关系

假设信号的 $f\left(t\right)$ 的 STFT 被定义为：

$$STFT^{w}(t,u)=\int_{-\infty}^{\infty}f(p)w^*(p-t)e^{-jup}dp$$

那么接下来的**定理 1** 反应了信号 $f\left(t\right)$ 的 AFL 和 STFT 关系。

定理 1：参数为 $\left(a,b,c,d\right)$ 信号 $f\left(t\right)$ 的 AFL 可以看作是信号 $f\left(t\right)$ 的 STFT，其中 $w\left(t\right)=f\left(t\right)e^{j\frac{a}{2b}t^2}$。

$$AF_{(a,b,c,d)}(\tau,u)=\sqrt{\frac{1}{j2\pi b}}e^{j\left[\frac{d}{2b}u^2-\frac{a}{2b}\frac{3\tau^2}{4}+\frac{u\tau}{2b}\right]}STFT^{w}\times\left(\tau,\frac{2u-a\tau}{2b}\right)\qquad(22)$$

证明：

$$AF_{(a,b,c,d)}(\tau,u)=\sqrt{\frac{1}{j2\pi b}}e^{j\frac{d}{2b}u^2}\int_{-\infty}^{\infty}f\left(t+\frac{\tau}{2}\right)f^*\times\left(t-\frac{\tau}{2}\right)e^{j\frac{a}{2b}t^2-j\frac{ut}{b}}dt$$
$$=\sqrt{\frac{1}{j2\pi b}}e^{j\frac{d}{2b}u^2}\int_{-\infty}^{\infty}f(p)f^*\times(p-\tau)e^{j\frac{a}{2b}(p-\tau+\tau/2)^2-j\frac{u(p-\tau/2)}{b}}dp$$
$$=\sqrt{\frac{1}{j2\pi b}}e^{j\frac{d}{2b}u^2-\frac{a}{2b}\frac{3\tau^2}{4}+\frac{u\tau}{2b}\Big]}\int_{-\infty}^{\infty}f(p)f^*\times(p-\tau)e^{j\frac{a}{2b}(p-\tau)^2}e^{j\left(\frac{a}{2b}p\tau-\frac{up}{b}\right)}dp$$

$$
\begin{aligned}
&=\sqrt{\frac{1}{j2\pi b}}e^{j\left[\frac{d}{2b}u^2-\frac{a}{2b}\frac{3\tau^2}{4}+\frac{u\tau}{2b}\right]}\int_{-\infty}^{\infty} f(p)f^{*}\times(p-\tau)e^{j\frac{a}{2b}(p-\tau)^2}e^{-j\left(\frac{u}{b}-\frac{a\tau}{2b}\right)p}dp \\
&=\sqrt{\frac{1}{j2\pi b}}e^{j\left[\frac{d}{2b}u^2-\frac{a}{2b}\frac{3\tau^2}{4}+\frac{u\tau}{2b}\right]}STFT^{w}\times\left(\tau,\frac{2u-a\tau}{2b}\right)
\end{aligned}
$$

AFL 的应用

为了显示新定义的 AFL 在以下方面的有效性,在本节中，我们将把 AFL 应用于 LFM 信号的分析和参数检测。遵循经典的 LFM 信号检测方法[26]-[28]，本文提出的检测器是通过结合新型 AFL 和 Radon 变换(RT）获得的，为了使这种方法与传统方法不同，它被称为"AFL 与 RT 相结合"，并被简称为 RAFL。

探测器

RT 通常被用于计算机断层扫描中的图像重建，其定义为：

$$R_{s,\varphi}(f(x,y))=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\delta(x\sin\varphi+y\cos\varphi-s)dxdy$$

对于$-\infty<s<\infty,-\pi/2<\varphi<\pi/2$，其中 delta 函数指定了积分方向，$s$ 是 x - y 平面上原点到一条直线的距离，φ 是这条直线与 x 轴的夹角角度。

从一个 LFM 信号的 AFL 分析中，我们知道，如果我们把 $s=0$ 的 RT 参数设置为公式(20)的无相位 AFL，那么信号的检测就能从二维搜索问题简化为一维搜索问题。由公式(21)可知，AFL 的斜率是 LFM 信号啁啾率的 b 倍，因此，它的关键在于在模糊平面内，为实现能量的累积，首先要计算沿直线的线段积分，其方向由三角函数 $\delta(u-bm\tau)$ 决定。

在[27]中，作者使用 AF 的平方模作为适用于 RT 的函数作为检测器。沿着这个思路，我们使用 AFL 的平方模作为函数。在我们的文章中，将 RT 作为检测器应用于其中。根据上面的讨论，与新型 AFL 相关的检测器被定义为以下形式：

$$
\begin{aligned}
\eta(m)&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left|AF_{(a,b,c,d)}(\tau,u)\right|^2\delta(u-bm\tau)d\tau du \\
&=\int_{-\infty}^{\infty}\left|AF_{(a,b,c,d)}(\tau,bm\tau)\right|^2 d\tau
\end{aligned}
\tag{23}
$$

$\eta(m)$ 可以被用于实现公式(21)中的能量积累。

$$\frac{a}{2b}=0,\eta(m)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\sqrt{\frac{2\pi b}{j}}e^{j\left(\frac{d}{2b}u^2+w_0\tau\right)}\delta\left(u-m_0\tau\right)\right|^2\delta\times(u-bm\tau)d\tau du$$
$$=|2\pi b|\int_{-\infty}^{\infty}\left|e^{j\left(\frac{bd}{2}m^2\tau^2+w_0\tau\right)}\delta\left(bm\tau-bm_0\tau\right)\right|^2 d\tau \tag{24}$$

$$\frac{a}{2b}\neq 0,\eta(m)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\sqrt{\frac{1}{a}}e^{j\left(\frac{d}{2b}u^2+w_0\tau\right)}e^{-j\frac{a}{2b}\frac{(m_0\tau-u/b)^2}{a^2/b^2}}\right|^2\delta\times(u-bm\tau)d\tau du$$
$$=\left|\frac{1}{a}\right|\int_{-\infty}^{\infty}\left|e^{j\left(\frac{bcm+m_0}{2a}bm\right.}e^{j\frac{b}{2a}(m-m_0)m_0+w_0\tau}\right|^2 d\tau \tag{25}$$

从公式(24)和(25)，我们可以看出当$m\to m_0$时，$\eta(m)\to\infty$。因此，可以通过计算$\eta(m)$并与阈值相比较来检测该信号。

检测 LFM 信号

单分量 LFM

假设信号$f\left(t\right)$的模型如下，并具有伴随时间长度T的单位能量：

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{T}}e^{j\left(w_0t+\frac{m_0}{2}t^2\right)}\quad\left(|t|<\frac{T}{2}\right)$$

我们通过 AFL 的定义观察到$f\left(t\right)$的 AFL 的模：

$$\left|AF_{(a,b,c,d)}(\tau,u)\right|=\begin{cases}\dfrac{\sin\left[\left(u/b-m_0\tau\right)T/2\right]}{\left(u/b-m_0\tau\right)T/2}\sqrt{\dfrac{1}{2\pi b}} & (a=0)\\ \left|\sqrt{\dfrac{1}{2\pi b}}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2}e^{j\frac{a}{2b}t^2+j\left(m_0\tau-u/b\right)t}dt\right| & (a\neq 0)\end{cases} \tag{26}$$

当$a=0$时，我们可以得到检测器$\eta(m)$的解析解：

$$\eta(m)=\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left|AF_{(a,b,c,d)}(\tau,u)\right|^2\delta(u-bm\tau)d\tau du$$
$$=\frac{2}{T^3}\int\left|\frac{\sin\left[\left(m-m_0\right)\tau T/2\right]}{\left(m-m_0\right)\tau/2}\sqrt{\frac{j}{2\pi b}}\right|^2 d\tau \tag{27}$$

在公式(27)中的积分前系数是为归一化目的而添加的。当 $m = m_0$ 时，公式(27)得出：

$$\eta\left(m_0\right) = \frac{2}{T}\int_0^T \frac{1}{2\pi b} d\tau = \frac{1}{\pi b} \tag{28}$$

对于 $m > m_0$，让 $\left(m - m_0\right)/2 = p$，因此公式(27)表示为：

$$\begin{aligned}\eta\left(2p + m_0\right) &= \frac{1}{2\pi b}\frac{2}{T^3}\int_0^T \frac{\sin^2[p\tau T]}{(p\tau)^2} d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi b}\left\{\frac{2}{pT^2}\int_0^{\frac{pT^2}{2}} \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx + \frac{2}{T^3}\int_{T/2}^T \frac{\sin^2(p\tau T)}{(p\tau)^2} d\tau\right\}\end{aligned} \tag{29}$$

它在[38]中表明有以下特性成立：

$$\int \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx = si(2x) - \frac{\sin^2(x)}{x} \tag{30}$$

其中 $si(x) = \int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt$。将公式(30)代入公式(29)，并使用以下不等式

$$\int_{T/2}^T \frac{\sin^2(p\tau T)}{(p\tau)^2} d\tau < \frac{1}{p^2}\int_{T/2}^T \frac{1}{\tau^2} d\tau = \frac{1}{p^2 T}$$

公式(29)可被改写为：

$$\eta\left(2p + m_0\right) < \frac{1}{2\pi b}\left\{\frac{2}{pT^2}\left[si\left(pT^2\right) - \frac{2}{pT^2}\sin^2\left(\frac{pT^2}{2}\right) + \frac{1}{pT^2}\right]\right\}$$

通过让 $2p + m_0 = m$，我们得到

$$\eta(m) < \frac{2}{\pi b\left(m - m_0\right)T^2}\left[\mathrm{si}\left(\frac{\left(m - m_0\right)T^2}{2}\right) + \frac{2}{\left(m - m_0\right)T^2}\cos\left(\frac{\left(m - m_0\right)T^2}{2}\right)\right] \tag{31}$$

因此，得出了单分量信号的检测器 $\eta(m)$；并且公式(31)给出了，对于 $m \geq m_0$ 检测结果的上界；对于 $m < m_0$，$\eta\left(m + m_0\right)$ 可以用 $\eta\left(m\right) = \eta\left(2m_0 - m\right)$ 来估计。然而，当 $a \neq 0$ 时，我们不再期待 $\eta\left(m\right)$ 的解析解，必须使用数值解。

基于这些结果，我们可以通过计算检测器 $\eta\left(m\right)$ 来检测 LFM 信号。拟议的检测器在 LFM 信号的啁啾率上产生最大值。当 T 是有限的，$\eta\left(m\right)$ 有一个波峰，否则 $\eta\left(m\right)$ 就会变成此前讨论过的 delta 函数。

多变量 LFM

双分量信号被定义为：

$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{T}}e^{j\left(w_0t+\frac{m_0}{2}t^2\right)}+\dfrac{1}{\sqrt{T}}e^{j\left(w_1t+\frac{m_1}{2}t^2\right)} & \left(|t|<\dfrac{T}{2}\right)\\ 0 & \left(|t|>\dfrac{T}{2}\right)\end{cases}$$

简单起见，假设 $w_0=w_1, m_0>m_1$。 $f(t)$ 的 AFL 可以被推导为：

$$AF_{(a,b,c,d)}(\tau,u)=\begin{cases}\dfrac{\sin\left[\left(m_0\tau-u/b\right)T/2\right]}{\left(m_0\tau-u/b\right)T/2}\sqrt{\dfrac{j}{2\pi b}}+\dfrac{\sin\left[\left(m_1\tau-u/b\right)T/2\right]}{\left(m_1\tau-u/b\right)T/2}\\ \times\sqrt{\dfrac{j}{2\pi b}}+\dfrac{2}{T}\sqrt{\dfrac{j}{2\pi b}}\sqrt{\dfrac{\pi}{m_0-m_1}} \quad (|\tau|\le T)\\ \left\{\left[C\left(X_0\right)+C\left(X_1\right)\right]\cos\left(a_m\tau^2\right)\right.\\ \left.+\left[S\left(X_0\right)+S\left(X_1\right)\right]\sin\left(a_m\tau^2\right)\right\} \quad (a=0)\\ 0 \quad (|\tau|>T)\end{cases} \tag{32}$$

其中 $C(x)=\int_0^x\cos\left(\dfrac{\pi t^2}{2}\right)dt, S(x)=\int_0^x\sin\left(\dfrac{\pi t^2}{2}\right)dt$ 是 Fresnel 积分，并且其他参数，比如 X_0,X_1 与[28]中一致。

公式(32)中的前两项代表了信号的自相关项，然而其余是交叉项。当 $a\neq0$ 时。我们无法得到 AFL 的解析解。与[28]中的情况类似，我们不能再期待一个解析解的 $\eta(m)$，因为 AFL 的方程相当复杂，例如，包括 $C\left(X_0\right),C\left(X_1\right),S\left(X_0\right),S\left(X_1\right)$。在模拟仿真部分，我们将通过数字方法验证检测 LFM 信号给出检测器的性能。

检测二次调频（QFM）信号

$$AF_{(a,b,c,d)}(\tau,u)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{2\pi|b|}{j}}A^2e^{j\left(\frac{d}{2b}u^2+a_1\tau+\frac{a_3}{4}\tau^3\right)}\delta\left(u-2a_2\tau b\right) & \left(3a_3\tau+\dfrac{a}{2b}=0\right)\\ \sqrt{\dfrac{1}{6a_3b\tau+a}}A^2e^{j\left(\frac{d}{2b}u^2+a_1\tau+\frac{a_3}{4}\tau^3\right)-j\frac{\left(2a_2\tau-u/b\right)^2}{2\left(6a_3\tau+a/b\right)}} & \left(3a_3\tau+\dfrac{a}{2b}\neq0\right)\end{cases} \tag{33}$$

证明：

$$AF_{(a,b,c,d)}(\tau,u)=\sqrt{\frac{1}{j2\pi b}}A^2e^{j\frac{d}{2b}u^2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{j\left[a_1\tau+\frac{a_3\tau^3}{4}+2a_2\tau t+3a_3\tau t^2\right]}\times e^{j\frac{a}{2b}t^2-j\frac{ut}{b}}dt$$

$$=\sqrt{\frac{1}{j2\pi b}}A^2e^{j\frac{d}{2b}u^2}\times\int_{-\infty}^{\infty}e^{j\left(3a_3\tau+\frac{a}{2b}\right)t^2+j\left(2a_2\tau-\frac{u}{b}\right)t+j\left(a_1\tau+a_3\frac{\tau^3}{4}\right)}dt$$

$$3a_3\tau+\frac{a}{2b}=0,AF_{(a,b,c,d)}(\tau,u)=\sqrt{\frac{1}{j2\pi b}}A^2e^{j\frac{d}{2b}u^2}\times\int_{-\infty}^{\infty}e^{j\left[\left(2a_2\tau-\frac{u}{b}\right)\tau+\left(a_1\tau+a_3\frac{\tau^3}{4}\right)\right]}dt$$

$$=\sqrt{\frac{1}{j2\pi b}}A^2e^{j\frac{d}{2b}u^2+j\left(a_1\tau+a_3\frac{\tau^3}{4}\right)}\int_{-\infty}^{\infty}e^{j\left[\left(2a_2\tau-\frac{u}{b}\right)\tau\right.}dt$$

$$=\sqrt{\frac{2\pi b}{j}}A^2e^{j\left(\frac{d}{2b}u^2+a_1\tau+a_3\frac{\tau^3}{4}\right)}\delta\left(u-2a_2b\tau\right)$$

$$3a_3\tau+\frac{a}{2b}\neq 0,AF_{(a,b,c,d)}(\tau,u)=\sqrt{\frac{1}{j2\pi b}}A^{2j}e^{j\left(\frac{d}{2b}u^2+a_1\tau+a_3\frac{\tau^3}{4}\right)}$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}e^{j\left(3a_3\tau+\frac{a}{2b}\right)\left(t^2+\frac{(2a_2\tau-u/b)}{3a_3\tau+\frac{a}{2b}}\right)}dt$$

$$=\sqrt{\frac{1}{j2\pi b}}A^2e^{j\left(\frac{d}{2b}u^2+a_1\tau+a_3\frac{\tau^3}{4}\right)-j\frac{(2a_2\tau-u/b)^2}{2\left(6a_3\tau+\frac{a}{b}\right)}}$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}e^{j\left(3a_3\tau+\frac{a}{2b}\right)\left(t+\frac{(2a_2\tau-u/b)}{3a_3\tau+\frac{a}{2b}}\right)^2}dt$$

$$=\sqrt{\frac{1}{a+6a_3\tau b}}A^2e^{j\left(\frac{d}{2b}u^2+a_1\tau+a_3\frac{\tau^3}{4}\right)-j\frac{(2a_2\tau-u/b)^2}{2\left(6a_3\tau+\frac{a}{b}\right)}}$$

从公式(33)中，当我们选择满足$3a_3\tau+\frac{a}{2b}=0$特殊参数时，QFM 信号的 AFL 可以产生在(τ,u)平面的一个脉冲。与对多分量 LFM 信号的$\eta(m)$的讨论类似，我们无法得到这种情况的解析解。

事实上，立方相位参数可以被看作是我们想要获得的信息，而其他相位参数可以被看作是检测信号的噪声。从公式中(33)可以得出结论，AFL 具有时间-频率焦点，因此，QFM 信号的立方相位信息可以通过这种方式来检测。我们将在模拟部分应用关于这种信号的检测器的数值方法。

讨论

上一节显示，AFL 可用于 LFM 信号的检测，在前几节中，AFL 结合 RT（RAFL）被证明对 LFM 信号的检测是有效的。在本节中，我们将把 RAFL 与其他常见的时频方法进行比较，包括 RAT、Radon-WVD 变换（RWT）、WVD-Hough 变换（WHT）。首先，我们表明 RAT 和 RWT 可以被看作是等价的，然后我们在下面的部分将 RAFL 与-RAT、WHT、FRFT 进行比较。

RAT 和 Radon-WVD 变换（RWT）

LFM 信号 $f(t)=e^{j\left(w_0t+mt^2/2\right)}$WVD 由一下公式给出：

$$\mathrm{WVD}(t,w)=\delta\left(w-w_0-mt\right) \tag{34}$$

从公式(34)可以看出，一个分量的 LFM 信号的 WVD 是一个沿直线的脉冲谱线 $w{=}w_0-mt$。换句话说，WVD 有满足的时间-频率焦点。然而，多分量 LFM 信号的 WVD 将产生交叉项，这将模糊时频平面，特别是在低信噪比环境下。Radon-WVD（RWT）是对时频平面上所有可能的线路进行 WVD 的积分，它可以将时频检测问题转化为二维搜索问题。

在经典的 FT 意义上，$f\left(t\right)$的 AF 由以下公式给出：

$$AF(\tau,u)=e^{jw_0\tau}\delta(u-m\tau) \tag{35}$$

AF 也通过了模糊平面的原点并满足时频焦点特性。RT 是对所有经过模糊平面的原点的线进行直线积分，以得到 RAT。RAT 将二维搜索问题减化为一维搜索问题。显然，一个信号的 AF 和 WVD 是二维 FT 对，AF 可以通过对二维 FT 的应用得到 WVD。

根据上述讨论，RWT 和 RAT 是相等的。在 LFM 信号检测中得出。

RAFL 和 RAT

一个信号 $f\left(t\right)$的 AF 和 AFL 是：

$$AF(\tau,u)=\int_{-\infty}^{\infty} f\left(t+\frac{\tau}{2}\right) f^*\left(t-\frac{\tau}{2}\right)e^{-jut}dt \tag{36}$$

$$AF_{(a,b,c,d)}(\tau,u)=\int_{-\infty}^{\infty} f\left(t+\frac{\tau}{2}\right) f^{*}\left(t-\frac{\tau}{2}\right) K_{A}(t,u)dt \tag{37}$$

从公式(36)和(37)来看，经典的 AF 可以被认为是 AFL 的特例。AFL 有三个额外的自由参数，即表征 LCT 的参数，这使得 AFL 对信号处理更有吸引力。在 AFL 平面上，我们可以通过调整参数来分离信号项和交叉项，交叉项的抑制也可以通过 AFL 有效地实现，这可以从模拟中看出。

在这个意义上，RAFL 可以被看作是 RAT 的一个推广，在非静止信号检测和参数估计方面，我们使用 RAFL 比 RAT 有更多的自由参数。

RAFL 和 WVD-Hough 变换（WHT）

Hough 变换最初是为获取直线而提出的，但后来被推广到任何图形。尽管 WVD 产生了交叉项，但 WVD 与 HT 相结合的方法已被应用于啁啾信号的检测和参数估计，包括多分量信号。WHT 可以解释为[17]中 WVD 的线积分：

$$\begin{aligned}\mathrm{WHT}(f,g)&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{-\infty}\mathrm{WVD}(t,v)\delta(v-f-gt)dtdv\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{WVD}(t,f+gt)dt\end{aligned} \tag{38}$$

或者说，一个信号的 WHT 可以被看做是其 AF 的 FT。

$$\mathrm{WHT}(f,g)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{AF}(\tau,g\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau \tag{39}$$

事实上，我们很容易发现，WHT 等同于 RWT 和 RAT，所以 RAFL 可以被看作是 WHT 的一个推广。信号的 WHT 会在终域产生峰值，其坐标为相位参数 f_0, g_0。在平面(f,g)上，如果有一个峰值超过阈值，就决定了啁啾声的存在。WHT 是一个很好的信号检测工具，即使在嵌入噪声的环境中。

WVD 与 HT 相结合，为信号和图像处理提供了一座桥梁。然而，与 AFL 相比，WHT 需要大量的计算。

FRFT

FRFT 实际上是一种单一的时频变换。随着阶数从 0 增加到 1，FRFT 可以从时间频域揭示出逐渐变化的信号的特征。与通常的二次元时间不同，它以单一变量揭示了时间-频率特征，并且不受交叉项的影响。与传统的 FT 相比，FRFT 在非平稳信号的处理中表现得更好，特别是在类似啁啾的信号处理中。此外，一个额外的自由度（阶）有时可能有助于获得比通常的时频分布或 FT 更好的性能。而其开发的快速算法导致计算负荷小，性能好。

信号 $f(t)$ 的 FRFT 是：

$$F^{\alpha}[f(t)] = F_f(\alpha,u) = \int_{-\infty}^{\infty} K_{\alpha}(t,u) f(t) dt \tag{40}$$

其中

$$K_{\alpha}(t,u) = \sqrt{\frac{1-\cot\alpha}{2\pi}} e^{j\left(u^2/2\cot\alpha - ut\csc\alpha + t^2/2\cot\alpha\right)} \quad (\alpha \neq 0)$$

正如我们所知，在二维 $F_f(\alpha,u)$ 中会有最大值，其坐标 (α,u) 对应于初始频率和啁啾率。

$$\begin{cases} m = -\cot\alpha \\ w_0 = u/\sin\alpha \end{cases} \tag{41}$$

RWT 可以通过啁啾来计算：

$$\mathrm{RWT}(u,\alpha) = \left| \frac{1}{|\sin\alpha|} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\left(w_0 t + mt^2/2\right)} dt \right|^2_{\substack{m=-\cot\alpha \\ w_0 = u/\sin\alpha}} \tag{42}$$

以及 FRFT 的平方：

$$\left|F_x(\alpha,u)\right|^2 = \left|\frac{1}{2\pi\sin\alpha}\right| \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\left(-ut\csc\alpha + t^2/2\cot\alpha\right)} dt \right|^2 \tag{43}$$

从公式(42)和(43)，我们得到：

$$\mathrm{RWT}(u,\alpha) = a\pi \left|F_x(\alpha,u)\right|^2 \tag{44}$$

这也就是说，FRFT 等同于 RWT。

模拟

为了验证本文的推导结果，并显示 AFL 在 LFM 信号检测中的优势，本节中进行了模拟仿真。从这些模拟中不难看出，AFL 在检测 LFM 信号方面比传统的有更好的性能。

LFM 信号的检测

单分量 LFM 信号的检测

单分量 LFM 信号被定义为：

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{T}}e^{j\left(w_0t+\frac{m_0}{2}t^2\right)}\quad\left(|t|<\frac{T}{2}\right)$$

参数选择为：$T=40s, w_0=0.1rad/s, m_0=0.4rad/s^2$。$f(t)$ 的 $|AFL|$ 可以被计算为：

$$\left|AF_{(a,b,c,d)}(\tau,u)\right|=\begin{cases}\dfrac{\sin\left[\left(u/b-m_0\tau\right)T/2\right]}{\left(u/b-m_0\tau\right)T/2}\sqrt{\dfrac{1}{2\pi b}} & (a=0)\\ \left|\sqrt{\dfrac{1}{2\pi b}}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2}e^{j\frac{a}{2t^2}t^2+j\left(m_0\tau-u/b\right)t}dt\right| & (a\neq 0)\end{cases}$$

对 $(a,b,c,d)=(0,2,-1/2,1)$ 的单分量 LFM 信号进行检测。$AF_{(a,b,c,d)}(\tau,u)$ 的轮廓部分和检测器 $\eta(m)$ 分别绘制在图 1a,b 中。

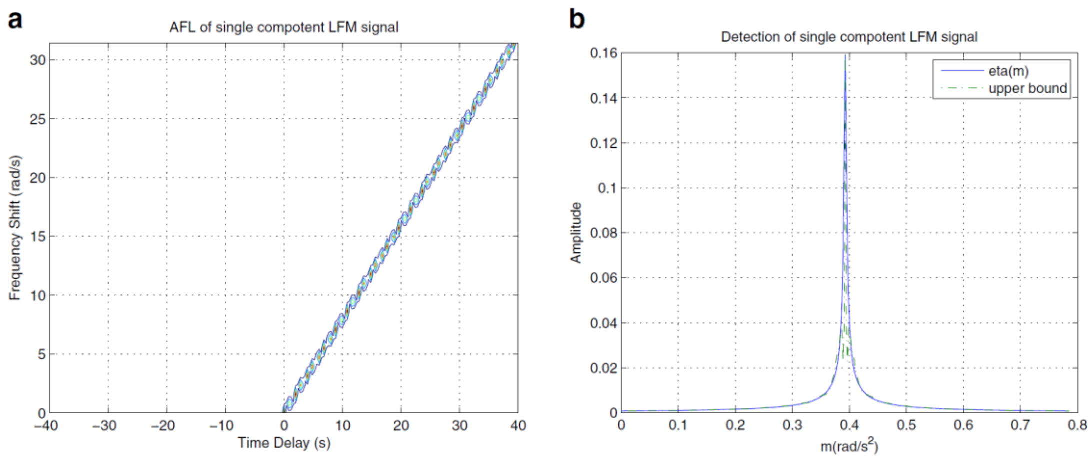

图 1 对参数 $(a,b,c,d)=(0,2,-1/2,1)$ 的单分量 LFM 信号检测

从图 1a 可以看出，AFL 通过 AFL 平面的原点，投影线的斜度为 $b*m_0$，这与前面讨论相同。图 1b 显示了检测器 $\eta(m)$ 的值和上界。如前文所述在啁啾率 m_0 附近有一个峰值。因此，我们可以根据 RAFL 来检测 LFM 信号。

多分量 LFM 信号的检测

假设 p 分量的信号定义如下：

$$f(t)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{i=0}^{p}\frac{1}{\sqrt{T}}e^{j\left(w_it+\frac{m_i}{2}t^2\right)} & \left(|t|<\dfrac{T}{2}\right)\\ 0 & \left(|t|>\dfrac{T}{2}\right)\end{cases}\tag{45}$$

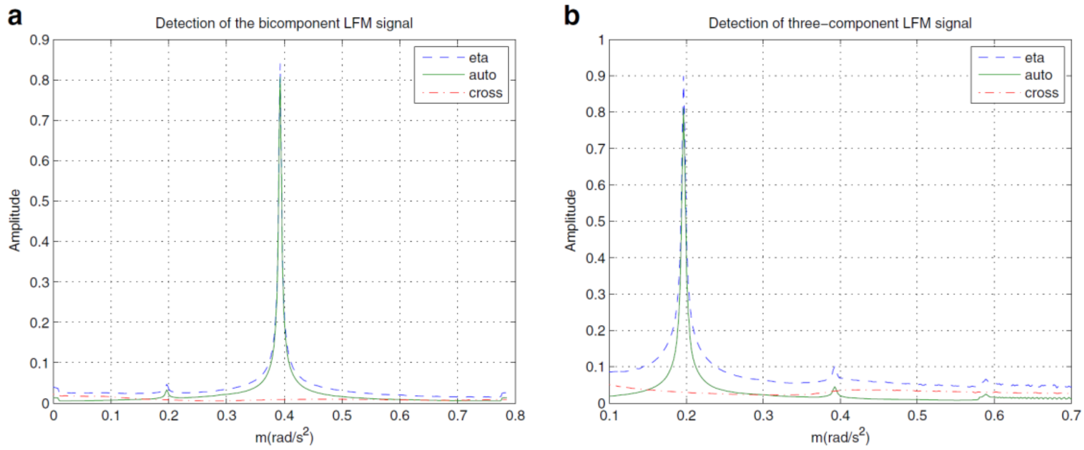

图 2 多分量 LFM 信号的检测器 $\eta(m)$**，** $T=40s$ **，不同参数。(a) 双分量 LFM 信号的** $\eta(m)$**，一个分量的振幅是另一个的十分之一。** $(a,b,c,d)=(1/32,16,-1/32,16)$ **，** $w_0=w_1=0.1\text{rad}/\text{s}^2$**，** $m_0=0.4\text{rad}/\text{s}^2$**，** $m_1=0.2\text{rad}/\text{s}^2$ **。(b) 具有不同振幅的三分量信号的** $\eta(m)$ $(a,b,c,d)=(1/32,32,-1/64,16)$ **，** $w_0=w_1=w_2=0.1\text{rad}/s^2$**，** $m_0=0.2\text{rad}/\text{s}^2$**，** $m_1=0.4\text{rad}/\text{s}^2$**，** $m_2=0.6\text{rad}/\text{s}^2$ **。**

图 2 显示了 $T=40s$ 和不同参数的多分量 LFM 信号的检测器 $\eta(m)$。从图 2 中可以看出，该检测器可用于检测对不等幅的 LFM 信号 LFM 信号。

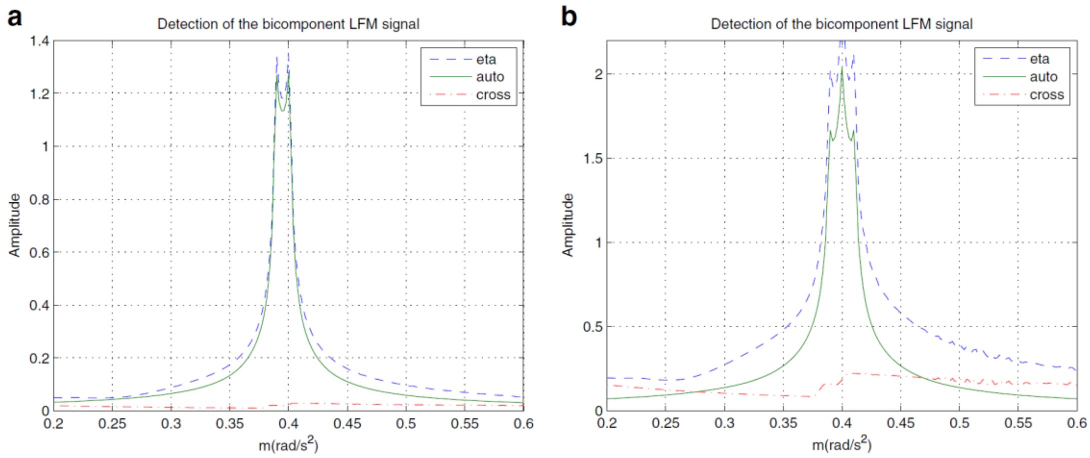

图 3 非常接近啁啾率的 LFM 信号的检测结果。(a) $w_0=w_1=0.1rad/s$ **,** $m_0=0.4rad/s^2$ **,** $m_1=0.39rad/s^2$ **。(b)** $w_0=w_1=w_2=0.1rad/s$ **,** $m_0=0.41rad/s^2$ **,** $m_2=0.39rad/s^2$ **。**

多分量 LFM 信号的时频分析将产生交叉项。抑制交叉项是一个在信号处理

中重要的问题。人们提出了两种方法来解决这个问题：核函数过滤器和 AF 范围内的过滤器。前者是根据目标得出的一些约束条件设计一个内核函数，后者是利用 AF 的独特属性。本文提出的 AFL 有三个额外的自由参数，即表征 LCT 的参数，这将使 AFL 在分析信号和交叉项抑制方面更具吸引力。

图 3 显示了在 $T=40s$ 的情况下，非常接近啁啾率的 LFM 信号的检测结果。分辨率是一个测量分离两个啁啾信号能力的参数。在这个模拟中，分辨率被定义为在无噪音环境下解决两个同样强的 LFM 信号的最小啁啾率分离。通过计算机模拟，试验信号的长度 T 范围从 10 到 60s，我们得到的分辨率约为 b/T^2。

图 3 显示了 $T=40s$ 的 $\eta(m)$ 的临界分辨率情况。它揭示了分辨率与信号长度 T 的平方成正比。如前所述，RAFL 是 RAT 的一个推广，啁啾率分辨率与[28]中的 RAT 一致，即 $1/T^2$ 水平。信号长度必须大于 $\sqrt{b/\Delta}$ 才能达到啁啾率分辨率 Δ。

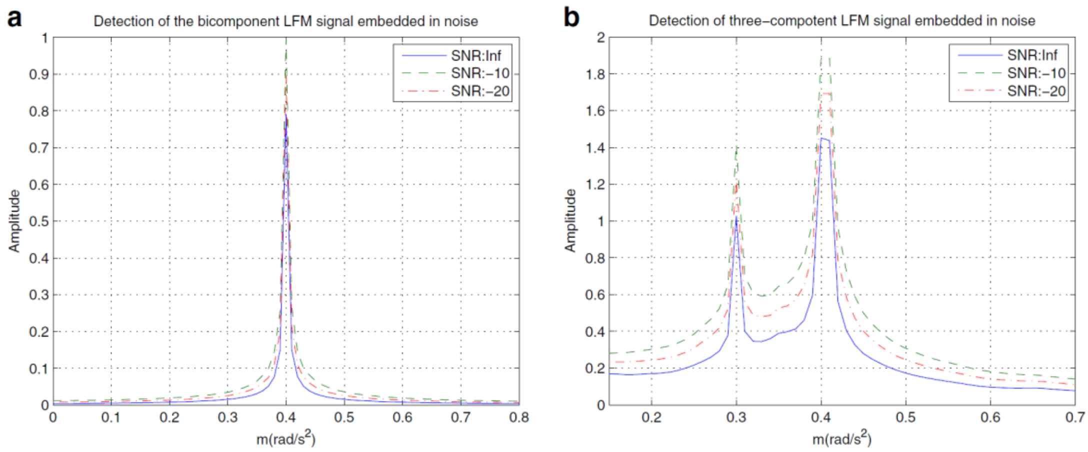

图 4 含高斯噪声的 LFM 信号检测。（a）单分量 LFM 信号， $w_0=0.1rad/s$，$m_0=0.4rad/s^2$。**（b）三分量 LFM 信号，** $w_0=0.1rad/s$，$m_0=0.3rad/s^2$，$w_2=0.3rad/s^2$，$m_2=0.41rad/s^2, T=40s$。

检测有噪音的 LFM 信号

带有噪声的单组分 LFM 信号被定义为

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{T}}e^{j\left(w_0t+\frac{m_0}{2}t^2\right)}+n(t)\quad\left(|t|<\frac{T}{2}\right)$$

其中噪声 $n(t)$ 被假定为零期望，方差为 σ^2 的高斯白噪声。

当然，带有噪声的 p 分量 LFM 信号被定义为：

$$f(t)=\sum_{i=0}^{p}\frac{1}{\sqrt{T}}e^{j\left(w_i t+\frac{m_i}{2}t^2\right)}+n(t)\quad\left(|t|<\frac{T}{2}\right)$$

检测器的输出如图 4 所示，信噪比分别为∞,-10,-20dB。从图 4 可以看出，在强噪声背景下，检测器显示了三分量 LFM 信号的存在，其中 m_1 和 m_2 非常接近。这些模拟验证了所提出的检测器的有效性。

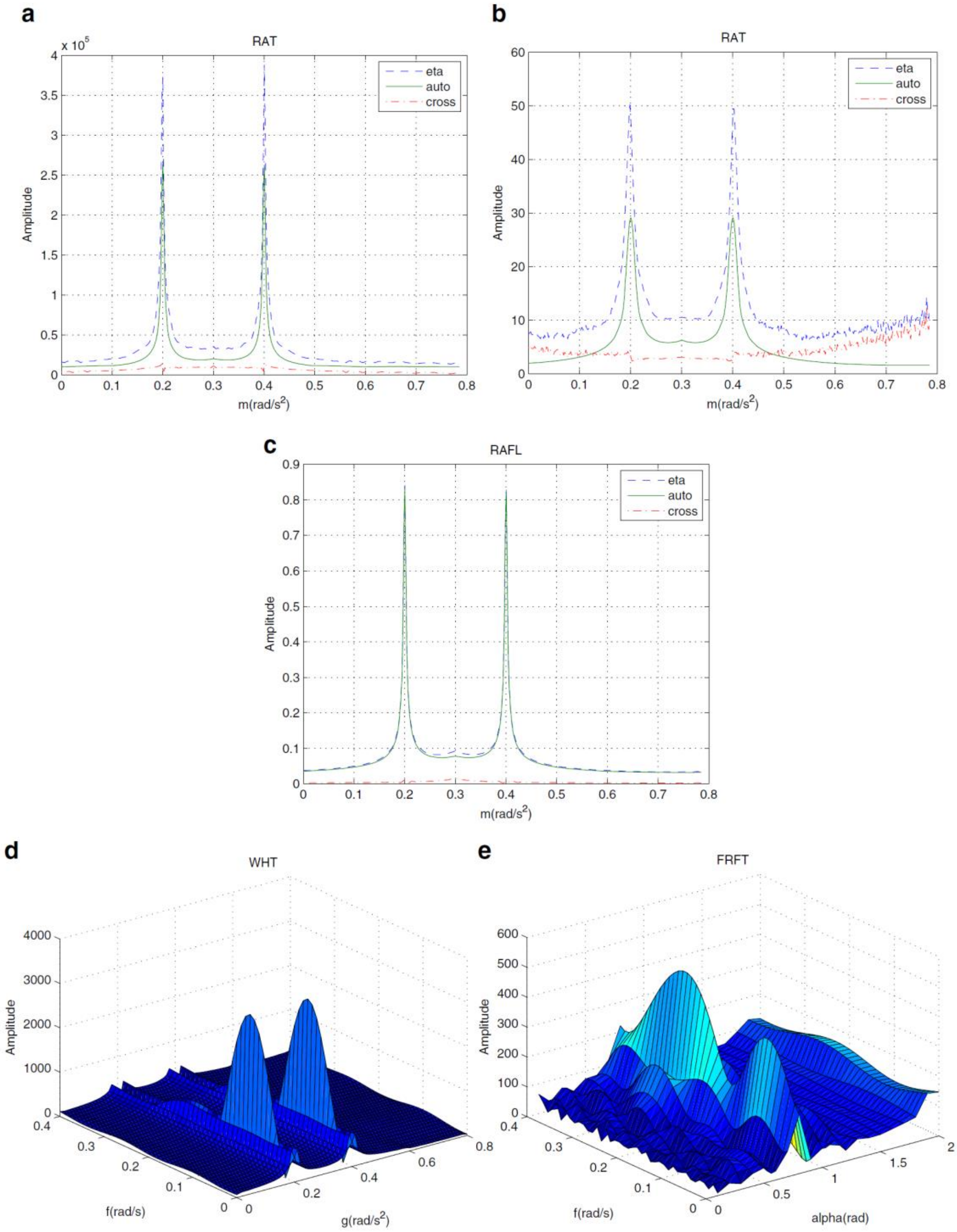

图 5 对比 LFM 信号的普通检测器。（**a**）RWT。（**b**）RAT。（**c**）RAFL。（**d**）WHT。（**e**）FRTT。

不同时频工具检测器的比较

在本节中，我们将以给定长度的 LFM 信号为例，对不同时间-频率工具的检测器进行比较。图 5 绘制了比较 LFM 信号在公式(42)中普通探测器中的结果，$T=40s, w_0=w_1=0.1rad/s, m_0=0.2rad/s^2, m_1=0.4rad/s^2$。

从图 5a 中可以看出，RWT 可以检测到啁啾率附近的两个峰值的 LFM 信号。RWT 的结果是通过将 RWT 应用于 LFM 信号，然后计算沿直线的线段积分，其方向由 delta 函数 $\delta\left(u-bm\tau-w_0\right)$ 确定。然而,当 $w_0 \neq w_1$，问题将是一个二维搜索问题。

从图 5b 中我们可以看出，RAT 是一个好的时频工具，但是，交叉项仍然很严重，交叉项甚至会干扰自动项。在图 5d 中，LFM 信号的 WHT 可以在平面上形成峰值，而峰值的坐标对应于参数。但计算量非常大，而且它不是很明显来发现尖锐的峰值，这是 WHT 的缺陷。LFM 信号的 FRFT 显示了在特殊阶的时间频率焦点。LFM 信号的探测和参数测定可以通过 FRFT 的二维搜索获得。然而，有一些问题需要解决，如计算量等。而从图 5e 中可以看出，多分量 LFM 信号的 FRFT 在有限的时间内检测出的信号可能并不合人心意。最后，从图 5c 中不难发现，手稿中提出的 RAFL 可以检测到多成分的 LFM 信号，而且性能是一维搜索，并且效果更好。

上面的比较和描述只是从模拟中看到的。现在，我们可以确定一个定量指标来研究检测器的有效性。众所周知，交叉项的抑制是多分量 LFM 信号处理的一个重要问题，因此我们将定量指标定义为

$$r=\frac{|cro|^2}{|tf|^2} \tag{46}$$

其中 cro 和 tf 分别为交叉项值和时间频率值。它表示交叉项相对于总体值的比率，可以看作是交叉项抑制的有效性。RWT、RAT 和 RAFL 的指数分别为 3.31、14.28、0.31%。从定量指标来看，我们可以发现本文提出的 RAFL 可以有效地抑制交叉项。

检测 QFM 信号

QFM 信号被定义为 $f(t)=\frac{1}{\sqrt{T}}Ae^{j\left(a_1t+a_2t^2+a_3t^3\right)}\left(|t|<\frac{T}{2}\right)$，其中

$T=10, a_1=0.1, a_2=1, a_3=0.01$， $f(t)$ 的 AFL 是：

$$AF_{(a,b,c,d)}(\tau,u)=\begin{cases}\sqrt{\frac{2\pi|b|}{j}}A^2 e^{j\left(\frac{d}{2b}u^2+a_1\tau+\frac{a_3}{4}\tau^3\right)}\delta(u-2a_2\tau b) \\ \quad\times\left(3a_3\tau+\frac{a}{2b}=0\right) \\ \sqrt{\frac{1}{6a_3b\tau+a}}A^2 e^{j\left(\frac{d}{2b}u^2+a_1\tau+\frac{a_3}{4}\tau^3\right)-j\frac{(2a_2\tau-u/b)^2}{2(6a_3\tau+a/b)}} \\ \quad\times\left(3a_3\tau+\frac{a}{2b}\neq 0\right)\end{cases} \tag{47}$$

图 6 描绘了这个二次调频信号的 AF 和 AFL，$T=10s, a_1=0.1, a_2=1, a_3=0.01$。从图 6a 中我们知道，经典的 AF 很难检测到立方体项。然而，在图 6b 中，a_3 的表现更为突出。

事实上，QFM 信号的主要信息是由其立方项显示的。也就是说，立方项位参数可以被看作是我们想要得到的信息。由于第二项的系数大约是立方项的 100 倍，可以认为 a_3，如果第二项被看作是相噪声对于立体的 SNR 是-40dB。

QFM 信号的 AFL 也通过 AFL 平面的原点。因此我们用同样的方法来检测 QFM 信号。从公式(33)可知，对于功率信号，如果我们选择特殊参数，AFL 可以产生一个脉冲，而对于有一定时间的能量信号，会有能量积累的波峰。

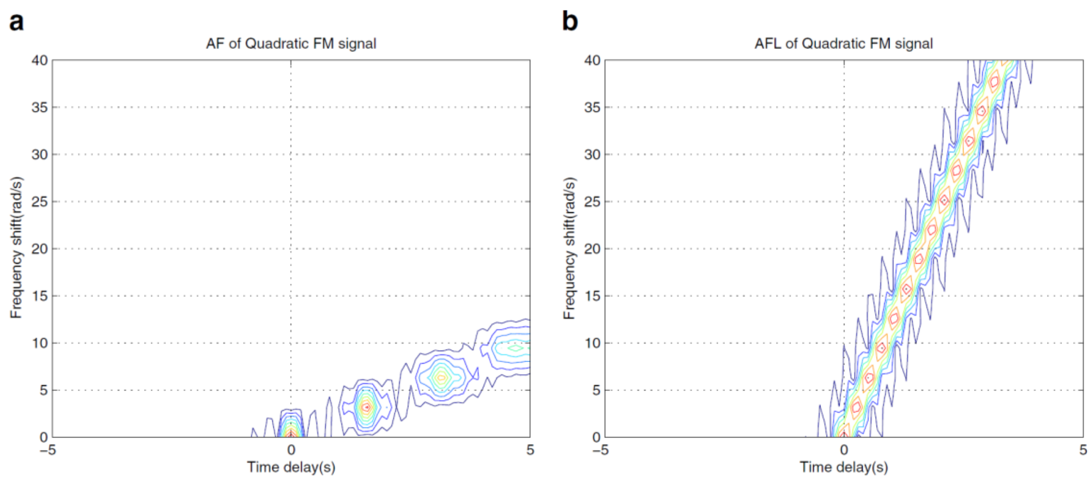

图 6 平方 FM 信号的 AF 和 AFL，$T=10s$。(**a**)AF。(**b**)AFL，$(a,b,c,d)=(1,6,1/2,4)$。

总结

在经典 AF 和局部变换理论的基础上，本文提出了一种与 LCT 相关的新型 AF（我们将其命名为 AFL），它可以被视为经典 AF 的推广之一。我们详细研究了 AFL 的主要属性。AFL 有三个额外的自由参数，即 LCT 的参数，这使得 AFL 对 LFM 信号的分析更有吸引力。通过结合 AFL 和 RT 得到的 RAFL 被用于检测 LFM 信号。它可以在 RAFL 平面上产生围绕啁啾率的尖锐峰值，并且可以有效地抑制交叉项，这可以从仿真模拟和比较结果中得到验证。沿着这个方向的未来工作是探索 AFL 在非平稳信号处理中的应用，以及 AFL 与[29], [30]中提出的其他类型的 AF 在 LFM 信号检测和参数估计中的比较。

方法

手稿中使用的所有信号都是由 Matlab 软件产生的，模拟部分的算法是根据“AFL 的应用”中主要结果提出的。

竞争性利益

作者声明，他们没有竞争性利益。

鸣谢

作者要感谢处理编辑和匿名审稿人的宝贵意见和建议。这对我们大幅改进稿件有很大的帮助。作者还要感谢北京理工大学的金海博士的多次讨论和对稿件的校对。这项工作得到了国家自然科学基金（编号 60901058 和 61171195）的支持，也得到了北京市自然科学基金（编号 1102029）的部分支持。

收到：2011 年 11 月 14 日　接受:2012 年 5 月 27 日　发表:2012 年 7 月 11 日

参考文献

[1]. L Cohen, Time-frequency distribution—a review. Proc. IEEE. **77**(7),941–981 (1989)

[2]. I Daubechies, *Ten Lectures on Wavelets*. (Philadelpha, PA: SIAM, 1992)

[3]. HM Ozaktas, MA Kutay, Z Zalevsky, *The Fractional Fourier Transform with Applications in Optics and Signal Processing*. (New York: Wiley, 2001)

[4]. R Tao, B Deng, Y Wang, *Fractional Fourier Transform and its Applications*. (Beijing: Tsinghua Univ. Press, 2009)

[5]. V Namias, The fractional order Fourier transform and its application to quantum mechanics. IMA J. Appl. Math. **25**(3), 241–265 (1980)

[6]. AC McBride, FH Kerr, On Namias's fractional Fourier transforms. IMA J. Appl. Math. **39**(2), 59–175 (1987)

[7]. LB Almeida, The fractional Fourier transform and time-frequency representation. IEEE Trans. Signal Process. **42**, 3084–3091 (1994)

[8]. B Santhanam, JH McClellan, The discrete rotational Fourier transform. IEEE Trans. Signal Process. **44**(4), 994–998 (1996)

[9]. HM Ozaktas, O Ankan, MA Kutay, G Bozdaki, Digital computation of the fractional Fourier transform. IEEE Trans. Signal Process. **44**(9), 2141–2150(1996)

[10]. S-C Pei, J-J Ding, Closed-form discrete fractional and affine Fourier transforms. IEEE Trans. Signal Process. **48**(5), 1338–1353 (2000)

[11]. C-P Li, B-Z Li, T-Z Xu, Approximating bandlimited signals associated with the LCT domain from nonuniform samples at unknown locations. Signal Process. **92**(7), 1658–1664 (2012)

[12]. R Tao, B-Z Li, Y Wang, On sampling of bandlimited signals associated with the linear canonical transform. IEEE Trans. Signal Process. **56**(11), 5454–5464 (2008)

[13]. S-C Pei, J-J Ding, Eigenfunctions of linear canonical transform. IEEE Trans. Signal Process. **50**(1), 11–26 (2002)

[14]. D Bing, T Ran, W Yue, Convolution theorems for the linear canonical transform and their applications. Sci. China-Inf. Sci. **49**(4), 592–603 (2006)

[15]. D Wei, Y Li, A convolution product theorem for the linear canonical transform. IEEE Signal Process. Lett. **16**(10), 853–856 (2009)

[16]. B-Z Li, T-Z Xu, Spectral analysis of sampled signals in the linear canonical transform domain. Math. Probl. Eng. **2012**, 19 (2012)

[17]. FS Oktem, HM Ozaktas, Exact relation between continuous and discrete linear canonical transforms. IEEE Signal Process. Lett. **16**(8), 727–730 (2009)

[18]. A Koc, HM Ozaktas, C Candan, MA Kutay, Digital computation of linears canonical transforms. IEEE Trans. Signal Process. **56**(6), 2383–2394 (2008)

[19]. G Kutyniok, Ambiguity functions, Wigner distributions and Cohen's class for LCA groups. J. Math. Anal. Appl. **277**(2), 589–608 (2003)

[20]. RG Shenoy, TW Parks, Wide-band ambiguity functions and affine Wigner distributions. Signal Process. **41**(3), 339–363 (1995)

[21]. HT Li, PM Djuric, MMSE estimation of nonlinear parameters of multiple linear/quadratic chirps. IEEE Trans. Signal Process. **46**(3), 796–801 (1998)

[22]. CD Luigi, E Moreau, An iterative algorithm for estimation of linear frequency modulated

signal parameters. IEEE Signal Process. Lett. **9**(4), 127–129 (2002)

[23]. M Mboup, T Adalai, A generalization of the Fourier transform and its application to spectral analysis of chirp-like signals. Appl. Comput. Harmon. Anal. **32**(2), 305–312 (2012)

[24]. C Zhe, W Hongyu, Q Tianshuang, Research of ambiguity function associated with the fractional Fourier trandform (in Chinese). Signal Process. **19**(6), 499–502 (2003)

[25]. S Barbarossa, Analysis of multicomponent LFM signals by a combined Winger-Hough transform. IEEE Trans. Signal Process. **43**(6), 1511–1515 (1995)

[26]. X-G Xia, Discrete chirp-Fourier transform and its application to chirp rate estimation. IEEE Trans. Signal Process. **48**(11), 3122–3133 (2006)

[27]. XM Lv, M Xing, Z Zhang, Z Bao, Keystone transformation of the Wigner–Ville distribution for analysis of multicomponent LFM signals. Signal Process. **89**(5), 791–806 (2009)

[28]. M Wang, AK Chan, CK Chui, Linear frequency-modulated signal detection using Radon-Ambiguity transform. IEEE Trans. Signal Process. **46**(3), 571–587 (1998)

[29]. S-C Pei, J-J Ding, Relations between fractional operations and time-frequency distributions and their applications. IEEE Trans. Signal Process. **49**(8), 1638–1655 (2001)

[30]. H Zhao, Q-W Ran, J MA, L-Y Tan, Linear canonical ambiguity function and linear canonical transform moments. Optik. **122**(6), 540–543 (2011)

[31]. JJ Healy, JT Sheridan, Cases where the linear canonical transform of a signal has compact support or is band-limited. Opt. Lett. **33**(3), 228–230 (2008)

[32]. C Candan, HM Ozaktas, Sampling and series expansion theorems for fractional Fourier and other transforms. Signal Process. **83**(11), 2455–2457 (2003)

[33]. B-Z Li, R Tao, Y Wang, New sampling formulae related to linear canonical transform. Signal Process. **87**(5), 983–990 (2007)

[34]. JJ Healy, JT Sheridan, Sampling and discretization of the linear canonical transform. Signal Process. **89**(4), 641–648 (2009)

[35]. J Zhao, R Tao, Y-L Li, Y Wang, Uncertainty principles for linear canonical transform. IEEE Trans. Signal Process. **57**(7), 2856–2858 (2009)

[36]. KK Sharma, SD Joshi, Uncertainty principles for real signals in linear canonical transform domains. IEEE Trans. Signal Process. **56**(7), 2677–2683 (2008)

[37]. A Stern, Uncertainty principles in linear canonical transformdomains and some of their implications in optics. J. Opt. Soc. Am. **25**(3), 647–652 (2008)

[38]. I Gradshteyn, I Ryzhik, Table of Integrals, Series, and Products. (San Diego, CA: Academic, 1980)