

本科生毕业论文（设计）

****

题 目 基于ICFWD对LFM信号的输出

信噪比期望不等式模型

学生姓名 强盛周

学 号 201983160037

学 院 数学与统计学院

专 业 信息与计算科学（嵌入式）

指导教师 李顺杰 副教授

**二Ｏ二三 年 四 月 二十 日**

**声 明**

本人郑重声明：

1、以“求实、创新”的科学精神从事科学研究工作。

2、本论文中除引文外，所有测试、数据和相关材料均为真实有效的。

3、本论文是我个人在指导教师的指导下进行的研究工作和取得的研究成果，请勿用于非法用途。

4、本论文中除引文和致谢的内容外，并未抄袭其他人或其他机构已经发表或撰写过的研究成果。

5、关于其他同志对本研究所做的贡献均已在论文中作了声明并表示了谢意。

作者签名：

日期： 年 月 日

目 录

[1 引言 1](#_Toc132901057)

[1.1 研究背景 1](#_Toc132901058)

[1.2 国内外研究现状 1](#_Toc132901059)

[1.3研究内容和结构安排 2](#_Toc132901060)

[2. 预备知识 2](#_Toc132901061)

[2.1 LCT 2](#_Toc132901062)

[2.2 ICFWD 3](#_Toc132901063)

[3. 数学模型 4](#_Toc132901064)

[3.1 ICFWD的输出信噪比期望 4](#_Toc132901065)

[3.2 ICFWD的不等式模型 5](#_Toc132901066)

[3.3 ICFWD的不等式解 6](#_Toc132901067)

[3.3.1 合成信号 6](#_Toc132901068)

[3.3.2 真实世界信号 6](#_Toc132901069)

[4. 对含噪LFM信号的不等式模型 6](#_Toc132901070)

[4.1 单分量LFM信号的ICFWD 7](#_Toc132901071)

[4.2 双分量LFM信号的ICFWD 7](#_Toc132901072)

[4.3 平稳零期望噪声的ICFWD 9](#_Toc132901073)

[4.4 不等式解 9](#_Toc132901074)

[4.4.1 单分量情形 9](#_Toc132901075)

[4.4.2 双分量情形 10](#_Toc132901076)

[5. 仿真模拟结果和讨论 11](#_Toc132901077)

[6 结论 22](#_Toc132901078)

[附录 22](#_Toc132901079)

[参考文献 24](#_Toc132901082)

[致谢 28](#_Toc132901083)

基于ICFWD对LFM信号的输出信噪比期望不等式模型

强盛周

南京信息工程大学数学与统计学院，江苏 南京 210044

摘要：线性正则变换(Linear Canonical Transform, LCT)是提高传统Wigner分布(Wigner Distribution, WD）检测精度的有力工具。然而，嵌入的LCT自由参数增加了计算复杂性。最近，WD的瞬时互相关函数类型(Instantaneous Cross-correlation Function type of Wigner Distribution, ICFWD)，一种与LCT相关的特定WD，已被证明是检测精度和计算复杂性之间权衡的结果。在本文中，ICFWD通过输出信噪比(Signal-to-Noise Ratio, SNR)不等式建模和相对于ICFWD和WD的求解，应用于检测噪声单分量和双分量线性调频信号(Linear Frequency-Modulated, LFM）。提出了在增添零均值加性高斯白噪声的显性信号上进行ICFWD和WD，这是基于期望的输出信噪比不等式模型。本文通过推导分别得到了零期望噪声的单分量和双分量LFM信号不等式模型的解，并将ICFWD、一种闭型ICFWD(Closed-form Instantaneous Cross-correlation Function type of Wigner Distribution, CICFWD）和仿射Wigner分布(Affine Characteristic Wigner Distribution, ACWD）、核函数Wigner分布(Kernel Function Wigner Distribution, KFWD）、卷积表示Wigner分布(CRWD）等经典的Wigner分布进行了信号检测性能的比较，还将ICFWD的计算速度与CICFWD、ACWD、KFWD和CRWD的进行了比较。

关键词：不等式模型，线性正则变换，检测线性调频信号，线性调频信号

The Expected Inequality Model of Output Signal-to-Noise Ratio of LFM Signal Based on ICFWD

Shengzhou Qiang

School of Mathematics & Statistics, NUIST, Nanjing 210044, China

**Abstract**：Linear canonical transform (LCT) is a powerful tool for improving the detection accuracy of the conventional Wigner distribution (WD). However, the LCT free parameters embedded increase computational complexity. Recently, the instantaneous cross-correlation function type of WD (ICFWD), a specific WD relevant to the LCT, has shown to be an outcome of the tradeoff between detection accuracy and computational complexity. In this paper, the ICFWD is applied to detect noisy single component and bi-component linear frequency-modulated (LFM) signals through the output signal-to-noise ratio (SNR) inequality modeling and solving with respect to the ICFWD and WD. The expectation-based output SNR inequality model between the ICFWD and WD on a pure deterministic signal added with a zero-mean random noise is proposed. The solutions of the inequality model in regard to single component and bi-component LFM signals corrupted with additive zero-mean stationary noise are obtained respectively. The detection accuracy of ICFWD with that of the closed-form ICFWD (CICFWD), the affine characteristic Wigner distribution (ACWD), the kernel function Wigner distribution (KFWD), the convolution representation Wigner distribution (CRWD) and the classical WD is compared. It also compares the computing speed of ICFWD with that of CICFWD, ACWD, KFWD and CRWD.

**Key words:** Inequality Models, Linear Canonical Transforms, Detecting LFM Signals, Linear Frequency Modulated Signals

符 号 说 明

|  |  |
| --- | --- |
| 符号 | 说明与解释 |
|  | 确定信号；随机噪声 |
|  | 参数矩阵 |
|  | 线性正则域核函数 |
|  | 的LCT；的LCT；的LCT |
|  | 复共轭 |
|  | 瞬时自相关函数 |
|  | 的WD |
|  | 的CICFWD |
|  | 的ICFWD |
|  | 的ICFWD交叉项 |
|  | WD，ICFWD，CICFWD的期望输出信噪比 |
|  | 最大值，最大值成立的自变量取值 |
|  | 算数平均 |
|  | 期望算子；方差算子 |
|  | 狄拉克算子 |
|  | 初始频率；频率 |
|  |  |
|  |  |
|  | 噪声的功率谱密度 |

# 1 引言

## 1.1 研究背景

近几十年来，线性正则变换(Linear Canonical Transform, LCT)因其在光学传播[1]、时频分析[2]和信号处理[3]中的重要性而备受关注。一些著名的积分变换都是LCT的特例，包括傅立叶变换(Fourier Transform, FT）[4]、分数阶傅立叶变换(Fractional Fourier transform，FRFT）[5]-[9]、菲涅尔变换[10]和洛伦兹变换[11]。LCT的普遍性使其成为具有代表性的积分变换。LCT具有三个自由参数，它在非平稳信号分析中优于没有任何自由度的FT和只有一个自由度的FRFT。事实上，LCT通过所谓的线性正则域超越了普通时域、频域和分数域，其在信号表示方面表现出更大的灵活性。

Wigner分布(Wigner Distribution, WD）的定义始于量子统计力学[12]，而后来它在信号处理[13]中被发现有许多应用。众所周知，WD是一种高效的时频分析工具，但在处理多分量信号时容易受到交叉项的干扰，这是WD最大弊端。因此，目前推导出WD的大量变体，包括伪Wigner分布(Pseudo Wigner Distribution）[14]、平滑伪Wigner分布(Smoothed Pseudo Wigner Distribution）[15]、S方法(S-method）[16]、扩展Wigner分布(General Wigner Distribution）[17]、Li Wigner分布[18]、Choi-Williams分布[19]和缩放Wigner分布(Scaled Wigner Distribution）[20]。这些都是时频平面上的能量分布。以天波超视距雷达信号检测(Sky-Wave Over-the-Horizon Radar Signal Detection)为例[21]，在没有任何自由度的情况下，它们无法从极强的噪声背景中提取目标回波信号的主要特征。这是一个弱信号检测问题，因此，为了解决该问题[22]，需要一些突破性的研究方法来扩展和突破传统的WD。

## 1.2 国内外研究现状

从提高信号表示灵活性的角度来看，将LCT的参数引入传统WD似乎是解决弱信号检测问题的可行方法。但存在多种类型的参数嵌入技术，如台湾大学贝苏章提出的线性正则域自相关函数替换[2]，北京理工大学李炳照课题组的线性正则域核替换[23]-[25]，南京信息工程大学张志超的线性正则域卷积替换[26]、线性正则域瞬时互相关函数(Instantaneous Cross-correlation Function，ICF）替换[27]，以及线性正则域闭型瞬时互相关函数(Closed-form Instantaneous Cross-correlation Function, CICF）替换[28]。WD的相应变化分别称为仿射Wigner分布(Affine Characteristic Wigner Distribution, ACWD）[2]、核函数Wigner分布(Kernel Function Wigner Distribution, KFWD）[23]、卷积Wigner分布(Convolution Representation Wigner Distribution, CRWD）[26]、ICF型Wigner分布(ICFWD）[27]和CICF型Wigner分布(CICFWD）[28]。

ACWD、KFWD、CRWD、ICFWD、CICFWD的LCT自由参数个数分别为三、三、三、六、九。时频分布的参数个数越多，信号表示就越灵活，检测精度会更好。而我们之前的工作主要集中在基于CICFWD的弱信号检测上，具体而言，我们建立了CICFWD的输出信噪比（SNR）不等式[29]（不等式组[30]）模型或优化[31]（多目标优化[32]）模型来解释其检测准确性提高的原因。此外，我们还解决了含噪线性调频信号(Linear Frequency-Modulated, LFM）的不等式（不等式组）模型或优化（多目标优化）模型[33]-[35]以验证检测精度的提高。但是，参数过多会导致两个问题。第一个是CICFWD的参数选择并不是唯一的，因此检测精度是不稳定的[36]。第二个是CICFWD的高复杂度和低计算效率使其不适合实时应用[37]。因此，我们需要在实际应用中使用参数较少的方法，如ACWD、KFWD、CRWD、ICFWD。其中，最后一个ICFWD的参数数量最大的，所以它的检测精度也是最佳的。这也意味着，它能够在高计算效率与高检测精度中做出一个更好权衡。

在我们的最近的成果中，我们分别提出了ICFWD输出信噪比的优化 [37]和多目标优化[36]模型，还导出了模型关于含噪单分量LFM信号的最优解。其中的关键在于单分量LFM信号的目标函数中只能找到一个绝对值项。然后，对平方目标函数使用拉格朗日乘数法[38]，就可以算出解。该方法在很大程度上依赖于这样一个事实，即LFM信号是单个分量。而对于多分量LFM信号，目标函数中存在不止一个绝对值项，所以拉格朗日乘数法将会失效。

## 1.3研究内容和结构安排

为了克服在多分量LFM中拉格朗日乘数法将会失效的缺陷，用不等式模型代替优化模型是可行的，因为求解不等式模型不需要使用拉格朗日乘数法。本文的主要目的是通过ICFWD的输出信噪比不等式建模和求解来研究弱信号检测问题。本文首先提出了ICFWD的输出信噪比不等式模型。然后，本文针对在零期望平稳噪声背景下的单分量和双分量LFM信号求解不等式模型。本文还比较了ICFWD、CICFWD、ACWD、KFWD、CRWD和WD的检测精度，以及ICFWD、CICFWD、ACWD、KFWD和CRWD的计算速度。本文的主要内容如下：

1. 定义了含有零均值加性高斯白噪声中显性信号ICFWD 基于期望的输出信噪比
2. 建立了含噪信号的ICFWD与WD的输出信噪比期望不等式模型
3. 分别推导了添加零期望平稳噪声的单分量和双分量LFM信号的不等式模型的解
4. 展示了 ICFWD 在保持或者提高检测精度和节省计算时间方面的优势

本文的其余部分的结构如下。第2节回顾了LCT和ICFWD的定义。第3节研究了ICFWD的基于期望的输出SNR不等式建模和求解。第4节推导了噪声LFM信号的不等式模型的解。第5节进行数值实验。第6节总结了本文。

# 2. 预备知识

## 2.1 LCT

从几何角度看，FT和FRFT分别是时频平面上的角度为和的旋转变换。LCT是FRFT的推广或称为扩展FRFT，可以看作是时频平面上的仿射变换[39]-[42]。与参数矩阵相关的信号的LCT由[43]-[48]定义：



其中，



表示线性正则域核函数。参数是满足仿射条件的实数。

这里给出两个LCT的特例：当参数矩阵时，它坍缩成了单位变换，即；当参数矩阵时，它退化为带有一个额外常数因子的传统傅里叶变换，即。

另外，当LCT参数时，它坍缩成了一个缩放操作和一个啁啾倍增操作的组合。当其参数时，它坍缩成了一个缩放傅里叶变换操作和一个啁啾倍增操作的组合。当其参数分别为和时，它们的线性正则域分别变成了普通的时域和频率域。因此，为了不失一般性，本文仅仅讨论满足参数和的LCT。因为可以由和或者推导出：和，所以它的三个参数是或者。

## 2.2 ICFWD

表示线性正则域上的ICF。其中，代表的LCT，它的参数矩阵为；上标\*表示复数共轭。接着，的ICFWD通过带有参数矩阵的LCT来定义[27]：



两个参数矩阵意味着ICFWD含有6个LCT自由变量。

如果让——带有的LCT代替线性正则域上的ICF，它就变成了线性正则域上的CICF——。的CICFWD定义[28]-[32]：



它是带有参数矩阵的LCT，所以它有三个参数矩阵。这也就意味着CICFWD拥有9个LCT自由变量。

显然，因为ICFWD比CICFWD少一个的计算，所以它的计算复杂度的会更低。这也是本文采用ICFWD来提升弱信号检测效率的原因。另外，由于假设的存在，所以ICFWD也不是CICFWD的特例，并且两者可能拥有一样的检测精度。

带有参数矩阵和的ICFWD退化为带有一个额外常量因子的传统WD[13]：



将ICFWD和WD进行对比，不难发现：ICFWD拥有更高程度的自由度来提升弱信号检测精度。

# 3. 数学模型

本节定义了：对于加入高斯白噪声的显性信号的ICFWD基于期望的输出信噪比模型。然后，我们在 ICFWD 和 WD 之间建立基于期望的输出 SNR 不等式模型。最后我们试图解决来源为合成信号和真实世界信号的不等式模型。

## 3.1 ICFWD的输出信噪比期望

假设含噪信号为，其中是一个纯显性信号，是一个高斯白噪声。那么，CICFWD的输出信噪比期望[32]可以定义为：



其中，当为可数集时，“Mean”是算术均值的意思；当前者为不可数集时，后者为积分平均值。

可以注意到，CICFWD在基于期望的输出信噪比中有一个重要关系式[31]：。类似地，该关系式可以退化为ICFWD的：。下面给出ICFWD基于期望的输出信噪比定义[36][37]：



## 3.2 ICFWD的不等式模型

由于ICFWD基于期望输出信噪比的值只依赖于给定信号和噪声的参数矩阵。最新的工作定义了一个优化模型[37]：



并且解出了ICFWD最优的LCT自由参数。然而，解决优化模型似乎非常复杂，因为存在内部优化问题。事实上，最新的工作表明，多分量 LFM 信号的优化模型的解决方案似乎并不可行，因为在目标函数中发现许多绝对值项需要取偏导数。

由于不用计算内部优化问题，所以不等式模型比优化模型简单。作为ICFWD基于期望的输出信噪比优化模型的替代方案，ICFWD和WD基于期望的输出信噪比不等式模型可能适用于多分量LFM信号的情况。

WD基于期望的输出信噪比可以被定义[29]为：



对于给定的信号和噪声，它是一个常数。对于适当的参数矩阵，ICFWD的基于期望的输出SNR的值可以大于WD的基于期望的输出SNR的值。因此，ICFWD和WD之间基于期望的输出SNR不等式模型已经建立：



## 3.3 ICFWD的不等式解

公式可以被改写为：



和，这两个优化问题需要被首先解决。很显然，对于合成信号和真实世界信号的解法是不同的。

### 3.3.1 合成信号

对于ICFWD，可以表示为是一个变量为的方程，带有参数。对于WD，可以表示为是一个变量为的方程。得益于经典的极值理论[49]，优化问题和都存在解析解。前者是一个具有参数的代数公式，而后者是一个没有任何参数的代数公式。总之，不等式模型的解是合成信号情况下的代数不等式。

### 3.3.2 真实世界信号

由于峰值检测算法[50]，对于给定参数的优化问题存在算术解。类似地，对于优化问题也存在算数解。遍历所有参数并检查不等式，会产生一个参数的点集。为了缩小参数遍历的范围，可以使用均匀设计[51]的技术来获得一组具有代表性的实验点。简而言之，不等式模型的解是真实世界信号情况下的参数点集。

# 4. 对含噪LFM信号的不等式模型

本节重点解决一类重要合成信号的不等式模型，包括LFM 信号单分量和双分量情况。本节首先分别探索了单双分量情况下，优化问题的解决方案；接着解出对于零期望平稳信号的期望问题解；最后分别针对单分量和双分量情况解出不等式模型的解。

## 4.1 单分量LFM信号的ICFWD

本小节讨论了对于单分量LFM信号的优化问题，该信号被定义为：



其中，初始频率是任意的，而频率。

用表示Diracdelta算子。那么，单分量LFM信号的ICFWD的振幅可以产生一个脉冲：



其中，。这里的LCT自由参数也必须满足两个约束条件：和。

从[37]中可以找到优化问题的解为：



## 4.2 双分量LFM信号的ICFWD

本小节讨论了对于双分量LFM信号的优化问题，该信号被定义为：



其中，和。

ICFWD的双线性性质意味着双分量LFM信号的ICFWD可以被扩展为：



其中，和为两个自动项；和为交叉项，它们分别为：





这其中的和分别表示和带有参数矩阵的LCT。

自动项的振幅和可以产生以下两个脉冲：





其中，和。LCT自由参数必须满足：，，和。

由于，和；那么可以推导出：和。也可以推导出，交叉项和不可能生成脉冲，因为它们的振幅为分别为：





对于结果的证明过程，可以参考附录A. 交叉项和的推导。



将-代入，并对每一项取振幅，得到：



因此，得出该优化问题的解为：



## 4.3 平稳零期望噪声的ICFWD

这一小节讨论了对于零期望平稳噪声的期望问题。噪声的平稳性表明，其中表示噪声的功率谱密度。通过使用Delta函数的筛选特性，零期望平稳噪声的ICFWD期望可以计算为：



由于众所周知的高斯积分公式[52]：



的振幅为：



其中，

噪声在时频面上是一个正态分布，因为有着两个独立变量。那么，这个期望问题的解可以化解为：



## 4.4 不等式解

本小节推导了添加零期望平稳噪声的单分量 LFM 信号不等式模型的解。并在此基础上，得到了双分量情况下不等式模型的解。

### 4.4.1 单分量情形

由于等式，可以推导出。该单分量的证明以及后续双分量的推导详细过程可见附录B. 等式和的推导。那么公式可以被化简[37]成：





其中，。

将公式和公式代入公式中，可以算出ICFWD对于单分量基于期望输出信噪比：



同理，WD对于单分量基于期望输出信噪比[29][30]为：



将公式和公式代入公式中，可以计算出对于单分量的不等式模型解：



其中，这个不等式隐含条件。

### 4.4.2 双分量情形

由于连等式，通过附录B的证明过程可以推导出。那么，公式可以被化解为：



其中，。

将公式和公式代入公式中，可以解出ICFWD对于双分量基于期望输出信噪比：



WD对于双分量基于期望输出信噪比可以在[29]中找到：



通过将公式和公式代入公式中，可以解出对于双分量不等式模型的解：



其中，这个不等式隐含着。

表格 1 含零期望平稳噪声的单/双分量LFM信号不等式模型解是一个对不等式模型解和相关LCT自由变量约束的总结。

表格 1 含零期望平稳噪声的单/双分量LFM信号不等式模型解

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | 单分量 | 双分量 |
| 模型的解 |  |  |
| 参数约束 |  |  |

# 5. 仿真模拟结果和讨论

为了证明ICFWD在噪声LFM信号处理中的实用性和有效性，本节设计了一些仿真来比较ICFWD、CICFWD、ACWD、KFWD、CRWD和WD的检测精度，以及计算ICFWD、CICFWD、ACWD、KFWD和CRWD的速度。

添加高斯白噪声的模拟单分量和双分量LFM信号分别为：





假设观测区间为，对于单分量的采样频率为，对于双分量的采样频率为。设定信号的输入信噪比为，其中噪声等价于噪声功率谱密度与噪声带宽的乘积。在仿真模拟中，对于单分量的输入信噪比被假定为，对于双分量的输入信噪比被假定为。

图1对比了单分量情形下，ICFWD与CICFWD、ACWD、KFWD、CRWD和WD的检测精度。ICFWD的LCT自由参数满足，和它相关的俯视图分别是图1(a）和图1(b）。CICFWD的LCT自由参数根据[29]选择，和它相关的俯视图分别是图1(c）和图1(d）。ACWD的LCT自由参数根据[2]选择，和它相关的俯视图分别是图1(e）和图1(f）。KFWD的LCT自由参数根据[23]选择，和它相关的俯视图分别是图1(g）和图1(h）。CRWD的LCT自由参数根据[26]选择，和它相关的俯视图分别是图1(i）和图1(j）。WD，和它相关的俯视图分别是图1(k）和图1(l）。

|  |  |
| --- | --- |
| (a) | (b) |
| (c) | (d) |
| (e) | (f) |
| (g) | (h) |
| (i) | (j) |
| (k) | (l) |

**图1：**对于单分量，ICFWD，CICFWD，ACWD，KFWD，CRWD和WD的检测精度。(a）ICFWD，参数矩阵为：和；(b）对(a）的俯视图；（c）CICFWD，参数矩阵为：，和；(d）对(c）的俯视图；(e）ACWD，参数矩阵为；(f）对(e）的俯视图；(g）KFWD，参数矩阵为；(h）对(g）的俯视图；(i）CRWD，参数矩阵为；(j）对(i）的俯视图；(k）WD；(l）对(k）的俯视图。

图2对比了双分量情形下，ICFWD与CICFWD、ACWD、KFWD和WD的检测精度。ICFWD的LCT自由参数满足和它相关的俯视图分别是图2(a）和图2(b）。CICFWD的LCT自由参数根据[29]选择，和它相关的俯视图分别是图2(c）和图2(d）。ACWD的LCT自由参数根据[2]选择，和它相关的俯视图分别是图2(e）和图2(f）。KFWD的LCT自由参数根据[23]选择，和它相关的俯视图分别是图2(g）和图2(h）。WD，和它相关的俯视图分别是图2(i）和图2(j）。CRWD无法处理一般的双分量LFM信号，除非这两个分量具有相反的频率[26]。

|  |  |
| --- | --- |
| (a) | (b) |
| (c) | (d) |
| (e) | (f) |
| (g) | (h) |
| (i) | (j) |

**图2：**对于双分量，ICFWD，CICFWD，ACWD，KFWD和WD的检测精度。(a）ICFWD，参数矩阵为：和；(b）对(a）的俯视图；(c）CICFWD，参数矩阵为：，和；(d）对(c）的俯视图；(e）ACWD，参数矩阵为；(f）对(e）的俯视图；(g）KFWD，参数矩阵为；(h）对(g）的俯视图；(i）WD；(j）对(i）的俯视图。

从图1和图2中能量直线的幅度可以看出，ICFWD保持与CICFWD相同的检测精度水平。此外，它实现了比ACWD、KFWD、CRWD和传统WD更好的检测精度。

众所周知，Radon变换(Radon Transform, RT）[53]可以对直线积分，从而产生时频分布的输出信噪比，这似乎比看能量直线的幅度更直观。图3和图4分别比较了单分量情形和双分量情形下ICFWD与CICFWD、ACWD、KFWD、CRWD和WD的输出信噪比。

|  |  |
| --- | --- |
| (a) | (b) |
| (c) | (d) |
| (e) | (f) |

**图3：**对于单分量，ICFWD，CICFWD，ACWD，KFWD，CRWD和WD的输出信噪比。(a）ICFWD基于RT的k-振幅分布，参数矩阵为：和；(b）CICFWD基于RT的k-振幅分布，参数矩阵为：，和；(c）ACWD基于RT的k-振幅分布，参数矩阵为；(d）KFWD基于RT的k-振幅分布，参数矩阵为；(e）CRWD基于RT的k-振幅分布，参数矩阵为；(f）WD基于RT的k-振幅分布。

对于单分量情形，图3(a）展示了ICFWD基于RT的k-振幅分布，LCT参数满足，，。图3(b）展示了CICFWD[29][30]基于RT的k-振幅分布，根据[29]选择了它的LCT参数。图3(c）展示了ACWD基于RT的k-振幅分布，根据[2]选择了它的LCT参数。图3(d）展示了KFWD基于RT的k-振幅分布，根据[23]选择了它的LCT参数。图3(e）展示了CRWD基于RT的k-振幅分布，根据[26]选择了它的LCT参数。图3(f）展示了WD基于RT的k-振幅分布。

|  |  |
| --- | --- |
| (a) | (b) |
| (c) | (d) |
| (e) | |

**图4：**对于双分量，ICFWD，CICFWD，ACWD，KFWD和WD的输出信噪比。(a）ICFWD基于RT的k-振幅分布，参数矩阵为：和；(b）CICFWD基于RT的k-振幅分布，参数矩阵为：，和；(c）ACWD基于RT的k-振幅分布，参数矩阵为；(d）KFWD基于RT的k-振幅分布，参数矩阵为；(e）WD基于RT的k-振幅分布。

对于双分量情形，图4(a）展示了ICFWD基于RT的k-振幅分布，LCT参数满足，，，，。图4(b）展示了CICFWD[29][30]基于RT的k-振幅分布，根据[29]选择了它的LCT参数。图4(c）展示了ACWD基于RT的k-振幅分布，根据[2]选择了它的LCT参数。图4(d）展示了KFWD基于RT的k-振幅分布，根据[23][23]选择了它的LCT参数。图4(e）展示了WD基于RT的k-振幅分布。

从图3和图4中发现的噪声幅度可以明显看出，ICFWD保持与CICFWD相同的输出信噪比水平。此外，它实现了比ACWD、KFWD、CRWD和传统WD更高的输出信噪比。

表格 2 在采样频率20Hz、40Hz、80Hz、120Hz下，对于单分量情形ICFWD、CICFWD、ACWD、KFWD和CRWD的计算时间

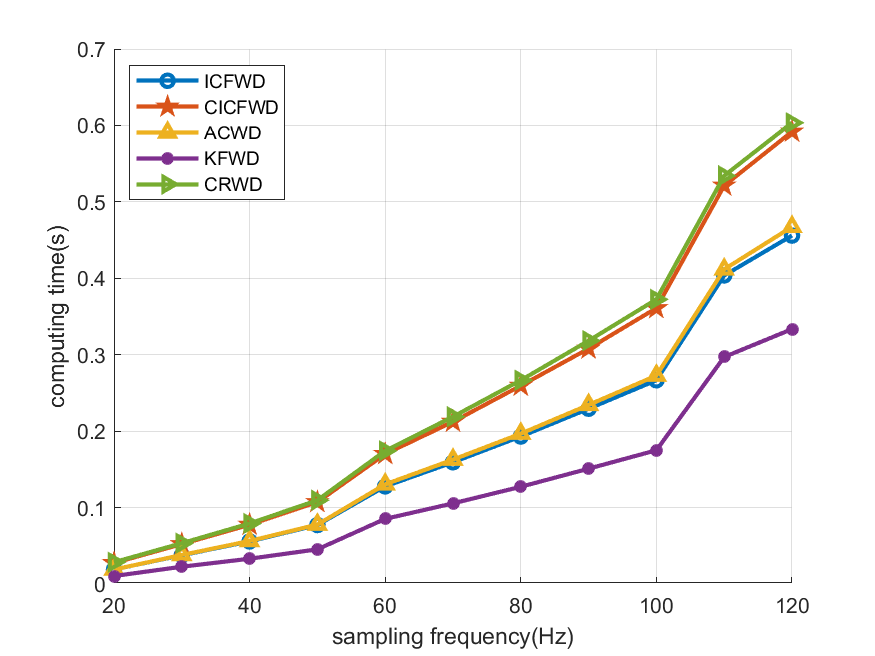
|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 采样频率（Hz） | 计算时间(s） | | | | |
| ICFWD | CICFWD | ACWD | KFWD | CRWD |
| 20 | 0.0190 | 0.0274 | 0.0190 | 0.0104 | 0.0285 |
| 40 | 0.0557 | 0.0775 | 0.0563 | 0.0331 | 0.0792 |
| 80 | 0.1930 | 0.2595 | 0.1967 | 0.1272 | 0.2666 |
| 120 | 0.4559 | 0.5919 | 0.4674 | 0.3335 | 0.6035 |

表格 3在采样频率20Hz、40Hz、80Hz、120Hz下，对于双分量情形ICFWD、CICFWD、ACWD和KFWD的计算时间

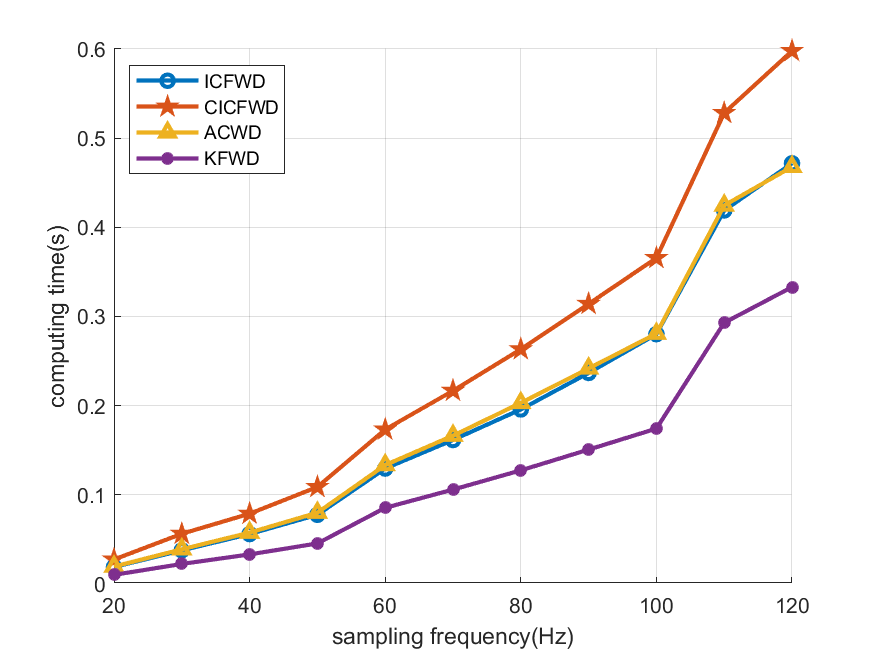
|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 采样频率（Hz） | 计算时间(s） | | | |
| ICFWD | CICFWD | ACWD | KFWD |
| 20 | 0.0190 | 0.0275 | 0.0196 | 0.0102 |
| 40 | 0.0560 | 0.0788 | 0.0576 | 0.0332 |
| 80 | 0.1958 | 0.2632 | 0.2031 | 0.1274 |
| 120 | 0.4718 | 0.5978 | 0.4679 | 0.3330 |

表格2和表格3分别记录了：对于单分量情形和双分量情形，ICFWD、CICIFWD、ACWD、KFWD和CRWD在4个不同采样频率20Hz、40Hz、80Hz和120Hz的计算时间。这是基于台式主机上Intel(R) Core(TM)i5-9400F CPU@2.90GHz，和MATLAB语言。这个计算时间是通过运行超过1000次后算平均值得到的。图5和图6分别画了ICFWD、CICIFWD、ACWD、KFWD和CRWD计算速度的对比。

如图所见，ICFWD保持与ACWD相同的计算效率水平。此外，它比CICFWD和CRWD具有更高的计算效率，而比KFWD具有更低的计算效率。



**图5：**对于单分量情形，ICFWD、CICFWD、ACWD、KFWD和CRWD的计算速度



**图6：**对于双分量情形，ICFWD、CICFWD、ACWD和KFWD的计算速度

# 6 结论

在所有线性正则域WD中，ICFWD具有权衡检测精度和计算复杂度的显著优势。因此，本文研究了ICFWD在检测多分量弱LFM信号中的应用，建模和求解了ICFWD和WD之间基于期望的输出信噪比不等式，推导出了单分量和双分量情形下ICFWD的LCT自由参数选择方法，并且通过大量的数值实验证明了理论结果的正确性。结果表明，ICFWD的检测精度与CICFWD相近，优于ACWD、KFWD、CRWD和常规WD的检测精度。此外，ICFWD的计算效率与ACWD相当，在高计算效率上优于CICFWD和CRWD，但不如KFWD。

# 附录

## A. 交叉项和的推导

交叉项被定义成如下：



其中



由于，将和代入可以推导出：



对于，并且令随后可以推出：



类似的，可以推出：



其中，和。

## B. 等式和的推导

从等式：



可以推出：



将它代入可以进一步推出：



并且由于还可以推出：



类似的，从连等式，和，，可以推出两个等式：





# 参考文献

1. A. Yelashetty, N. Gupta, D. Dhirhe, and U. Gopinathan, “Linear canonical transform as a tool to analyze coherence properties of electromagnetic beams propagating in a quadratic phase system,” *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 37, no. 8, pp. 1350--1360, Aug. 2020.
2. S. C. Pei and J. J. Ding, “Relations between fractional operations and time-frequency distributions and their applications,” *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 49, no. 8, pp. 1638--1655, Aug. 2001.
3. A. Stern, “Sampling of linear canonical transformed signals,” *Signal Process.*, vol. 86, no. 7, pp. 1421--1425, Jul. 2006.
4. R. N. Bracewell, *The Fourier Transform and Its Applications.*Boston, MA, USA: McGraw-Hill, 2000.
5. H. M. Ozaktas, M. A. Kutay, and Z. Zalevsky, *The Fractional Fourier Transform With Applications in Optics and Signal Processing.* New York, NY, USA: Wiley, 2001.
6. R. Tao, B. Deng, and Y. Wang, *Fractional Fourier Transform and Its Applications.* Beijing, China: Tisinghua Univ. Press, 2009.
7. J. Shi, Y. N. Zhao, W. Xiang, V. Monga, X. P. Liu, and R. Tao, “Deep scattering network with fractional wavelet transform,” *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 69, pp. 4740--4757, Jul. 2021.
8. C. Gao, R. Tao, and X. J. Kang, “Weak target detection in the presence of sea clutter using Radon-fractional Fourier transform canceller,” *IEEE J. Sel. Topics Appl. Earth Observ. Remote Sens.*, vol. 14, pp. 5818--5830, May 2021.
9. Y. Liu, F. Zhang, H. X. Miao, and R. Tao, “The hopping discrete fractional Fourier transform,” *Signal Process.*, vol. 178, Article No. 107763, Jan. 2021.
10. H. Oberst, D. Kouznetsov, K. Shimizu, J.-I. Fujita, and F. Shimizu, “Fresnel diffraction mirror for an atomic wave,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 94, Article No. 013203, Jan. 2005.
11. S. Abe and J. T. Sheridan, “Optical operations on wave functions as the Abelian subgroups of the special affine Fourier transformation,” *Opt. Lett.*, vol. 19, no. 22, pp. 1801--1803, Nov. 1994.
12. K. Imre and E. Ozizmir, “Wigner method in quantum statistical mechanics,” *J. Math. Phys.*, vol. 8, no. 5, pp. 1097--1108, May 1967.
13. B. Boashash, “Note on the use of the Wigner distribution for time-frequency signal analysis,” *IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process.*, vol. 36, no. 9, pp. 1518--1521, Sep. 1988.
14. P. Goncalves and R. G. Baraniuk, “Pseudo affine Wigner distributions: Definition and kernel formulation,” *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 46, no. 6, pp. 1505--1516, Jun. 1998.
15. W. Martin and P. Flandrin, “Wigner-Ville spectral analysis of nonstationary processes,” *IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process.*, vol. 33, no. 6, pp. 1461--1470, Dec. 1985.
16. L. Stankovic, “A method for time-frequency analysis,” *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 42, no. 1, pp. 225--229, Jan. 1994.
17. L. J. Stankovic and S. Stankovic, “An analysis of instantaneous frequency representation using time-frequency distributions-generalized Wigner distribution,” *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 43, no. 2, pp. 549--552, Feb. 1995.
18. B. Boashash and P. O'Shea, “Polynomial Wigner-Ville distributions and their relationship to time-varying higher order spectra,” *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 42, no. 1, pp. 216--220, Jan. 1994.
19. H. I. Choi and W. J. Williams, “Improved time-frequency representation of multicomponent signals using exponential kernels,” *IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process.*, vol. 37, no. 6, pp. 862--871, Jun. 1989.
20. Z. C. Zhang, X. Jiang, S. Z. Qiang, A. Sun, Z. Y. Liang, X. Y. Shi, and A. Y. Wu, “Scaled Wigner distribution using fractional instantaneous autocorrelation,” *Optik*, vol. 237, Article No. 166691, Jul. 2021.
21. T. Thayaparan, J. Marchioni, A. Kelsall, and R. Riddolls, “Improved frequency monitoring system for sky-wave over-the-horizon radar in Canada,” *IEEE Geosci. Remote. Sens. Lett.*, vol. 17, no. 4, pp. 606--610, Apr. 2020.
22. F. B. Duan, F. Chapeau-Blondeau, and D. Abbott, “Weak signal detection: Condition for noise induced enhancement,” *Digit. Signal Process.*, vol. 23, no. 5, pp. 1585--1591, Sep. 2013.
23. R. F. Bai, B. Z. Li, and Q. Y. Cheng, “Wigner-Ville distribution associated with the linear canonical transform,” *J. Appl. Math.*, vol. 2012, Article No. 740161, Jul. 2012.
24. T. W. Che, B. Z. Li, and T. Z. Xu, “The ambiguity function associated with the linear canonical transform,” *EURASIP J. Adv. Signal Process.*, vol. 2012, Article No. 138, Jul. 2012.
25. R. Tao, Y. E. Song, Z. J. Wang, and Y. Wang, “Ambiguity function based on the linear canonical transform,” *IET Signal Process.*, vol. 6, no. 6, pp. 568--576, Aug. 2012.
26. Z. C. Zhang, “New Wigner distribution and ambiguity function based on the generalized translation in the linear canonical transform domain,” *Signal Process.*, vol. 118, pp. 51--61, Jan. 2016.
27. Z. C. Zhang, “Unified Wigner-Ville distribution and ambiguity function in the linear canonical transform domain,” *Signal Process.*, vol. 114, pp. 45--60, Sep. 2015.
28. Z. C. Zhang and M. K. Luo, “New integral transforms for generalizing the Wigner distribution and ambiguity function,” *IEEE Signal Process. Lett.*, vol. 22, no. 4, pp. 460--464, Apr. 2015.
29. Z. C. Zhang, “Linear canonical Wigner distribution based noisy LFM signals detection through the output SNR improvement analysis,” *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 67, no. 21, pp. 5527--5542, Nov. 2019.
30. Z. C. Zhang, S. Z. Qiang, X. Jiang, P. Y. Han, X. Y. Shi, and A. Y. Wu, “Linear canonical Wigner distribution of noisy LFM signals via variance-SNR based inequalities system analysis,” *Optik*, vol. 237, Art. No. 166712, Jul. 2021.
31. Z. C. Zhang, “The optimal linear canonical Wigner distribution of noisy linear frequency-modulated signals,” *IEEE Signal Process. Lett.*, vol. 26, no. 8, pp. 1127--1131, Aug. 2019.
32. Z. C. Zhang, D. Li, Y. J. Chen, and J. W. Zhang, “Linear canonical Wigner distribution of noisy LFM signals via multiobjective optimization analysis involving variance-SNR,” *IEEE Commun. Lett.*, vol. 25, no. 2, pp. 546--550, Feb. 2021.
33. D. M. J. Cowell and S. Freear, “Separation of overlapping linear frequency modulated (LFM) signals using the fractional fourier transform,” *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control*, vol. 57, no. 10, pp. 2324--2333, Oct. 2020.
34. M. A. B. Othman, J. Belz, and B. Farhang-Boroujeny, “Performance analysis of matched filter bank for detection of linear frequency modulated chirp signals,” *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, vol. 53, no. 1, pp. 41--54, Feb. 2017.
35. X. Y. Peng, Y. Zhang, W. Wang, and S. Q. Yang, “Broadband mismatch calibration for time-interleaved ADC based on linear frequency modulated signal,” *IEEE Trans. Circuits Syst. I Reg. Papers*, vol. 68, no. 9, pp. 3621--3630, Sep. 2021.
36. X. Y. Shi, A. Y. Wu, Y. Sun, S. Z. Qiang, X. Jiang, P. Y. Han, Y. J. Chen, and Z. C. Zhang, “Unique parameters selection strategy of linear canonical Wigner distribution via multiobjective optimization modeling,” Submitted.
37. Y. Wu, X. Y. Shi, Y. Sun, X. Jiang, S. Z. Qiang, P. Y. Han, and Z. C. Zhang, “A computationally efficient optimal Wigner distribution in LCT domains for detecting noisy LFM signals,” Submitted.
38. D. P. Bertsekas, *Constrained Optimization and Lagrange Multiplier Methods.* New York, NY, USA: Academic, 1982.
39. S. A. Collins, “Lens-system diffraction integral written in terms of matrix optics,” *J. Opt. Soc. Amer.*, vol. 60, no. 9, pp. 1168--1177, Sep. 1970.
40. M. Moshinsky and C. Quesne, “Linear canonical transformations and their unitary representations,” *J. Math. Phys.*, vol. 12, no. 8, pp. 1772--1783, Aug. 1971.
41. J. J. Healy, M. A. Kutay, H. M. Ozaktas, and J. T. Sheridan, Eds., *Linear Canonical Transforms: Theory and Applications.* New York, NY, USA: Springer, 2016.
42. T. Z. Xu and B. Z. Li, *Linear Canonical Transforms and its Applications.* Beijing, China: Science Press, 2013.
43. J. Shi, X. P. Liu, Y. N. Zhao, S. Shi, X. J. Sha, and Q. Y. Zhang, “Filter design for constrained signal reconstruction in linear canonical transform domain,” *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 66, no. 24, pp. 6534--6548, Dec. 2018.
44. J. Shi, X. P. Liu, F. G. Yan, and W. B. Song, “Error analysis of reconstruction from linear canonical transform based sampling,” *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 66, no. 7, pp. 1748--1760, Apr. 2018.
45. D. Y. Wei and Y. M. Li, “Convolution and multichannel sampling for the offset linear canonical transform and their applications,” *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 67, no. 23, pp. 6009--6024, Dec. 2019.
46. D. Y. Wei and H. M. Hu, “Theory and applications of short-time linear canonical transform,” *Digit. Signal Process.*, In Press.
47. Q. Feng, B. Z. Li, and J. M. Rassias, “Weighted Heisenberg-Pauli-Weyl uncertainty principles for the linear canonical transform,” *Signal Process.*, vol. 165, pp. 209--221, Dec. 2019.
48. W. B. Gao and B. Z. Li, “Uncertainty principles for the short-time linear canonical transform of complex signals,” *Digit. Signal Process.*, vol. 111, Art. No. 102953, Apr. 2021.
49. L. de Haan and A. Ferreira, *Extreme Value Theory: An Introduction.* New York, NY, USA: Springer Science+Business Media LLC, 2006.
50. T. Maka, “Influence of adaptive thresholding on peaks detection in audio data,” *Digit. Signal Process.*, *Multimed. Tools Appl.*, vol. 79, pp. 19329--19348, Jul. 2020.
51. Y. W. Leung and Y. P. Wang, “Multiobjective programming using uniform design and genetic algorithm,” *IEEE Trans. Syst. Man Cybern. C*, vol. 30, no. 3, pp. 293--304, Aug. 2000.
52. A. Papoulis, *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes.* Third Edition. New York, NY, USA: McGraw-Hill, pp. 48, 1991.
53. X. L. Chen, J. Guan, Y. Huang, N. B. Liu, and Y. He, “Radon-linear canonical ambiguity function-based detection and estimation method for marine target with micromotion,” *IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.*, vol. 53, no. 4, pp. 2225--2240, Apr. 2015.

# 致谢

在我本科毕业论文的写作过程中，受到了许多人的关心和帮助，在此我要向所有帮助过我的人表示由衷的感谢。

首先，我要感谢张志超老师和我的导师李顺杰老师。在本论文的选题、研究过程中，老师们给了我非常多的指导和建议，不断帮助我排除困难和障碍。我从老师那里学到了很多傅里叶变换和信号处理专业知识和学术方法，受益匪浅。另外，我想感谢李金花老师，使我有机会接触到物理学的科研，开阔了我的眼界和训练了我的科研能力；我想感谢卢长娜老师和来鹏老师，他们指导了我数学建模竞赛并取得了优异成绩；我想感谢黄学平老师、张玉清老师分别在实变函数和分布式系统Hadoop课程上对我的指导；我想感谢我的辅导员邵福生老师和心理辅导武凯老师在生活上给我的鼓励。老师们都分享了许多生活知识和留学经验，他们的帮助和鼓励对我意义重大，并对我的未来规划和学术生涯产生了深远的影响。

同时，我也要感谢课题组的各位同学：蒋贤、韩普宇、杜奕宁、陈正龙等等，和研究生学长学姐：吴安阳、史晞雅、朱志超、张钰婉等等，他们在我的实验和研究中给了我非常多的帮助和支持。课题组的学习和研究氛围让我深刻体会到了科研工作的快乐和乐趣。我还要感谢我的家人和朋友们，他们在我学习和生活中一直给我鼓励和支持，让我在前行的路上一直充满信心和勇气。

最后，我还要感谢南京信息工程大学，为我提供了良好的学习和生活环境，培养了我扎实的学术基础和独立思考能力。学校提供了各种丰富的学术资源和社会活动，让我在学习之余，也拓展了自己的兴趣爱好和社交圈子。在这里，我还结交了一些非常优秀的同学和老师，他们在我学习和生活中给予了我很多启示和帮助。

在这里，我再次感谢所有支持和帮助过我的人，你们的帮助让我有信心和勇气迎接未来的挑战。