

Indice

I	Statistica	3
1	Definizione astratta di Probabilità	3
1.1	Assiomi	3
1.2	Probabilità congiunta e condizionata	4
1.3	Misure equivalenti	5
1.4	Filtration	5
2	Variabili reali	5
2.1	Valore di aspettazione	6
2.2	Cambio di variabile	6
2.3	Funzione caratteristica	7
2.4	Cumulanti	8
2.5	Teorema del Limite Centrale	8
2.5.1	Polinomi di Chebishev-Hermite	9
2.5.2	Teorema di Berry-Esseen	9
3	Limiti variabile casuale	10
4	Moto Browniano	10
4.1	Diffusione da un punto	11
4.2	Equazione di Langevin	12
5	Equazioni di Lotka-Volterra	13
6	Rumore Shot	14
6.1	Errore sui conteggi	17
7	Processi di Markov	17
7.1	Continuità nei processi di Markov	18
7.2	Equazione differenziale di Chapman-Kolmogorov	19
7.3	Condizioni al contorno	20
7.4	Backward equation	20
7.5	Esempi	20
7.5.1	Processi Jump	20
7.5.2	Equazione di Fokker-Planck	21
7.5.3	Equazione di Neuville	21
7.5.4	Processi di Ornstein-Uhlenbeck	21
8	Random Walk 1-D	23
9	Telegrafo random	24
10	Analisi stocastica	24
11	Integrali alla Ito	26
11.1	Formula di Ito	27
12	Stochastic Differential Equation (SDE)	27
12.1	Legame con la Fokker Planck	28
13	SDE alla Stratonovich	28
13.1	Oscillatore di Kubo	29
13.2	Equazione di Ornstein-Uhlenbeck (Bis) 7.5.4	30

14 Distribuzioni stabili	31
14.1 SDE generalizzate	32
15 Weierstrass Random Walk	32
16 Fokker-Planck (Bis)	34
16.1 Soluzioni stazionarie	35
16.2 Bilancio dettagliato	35
16.3 Relazioni di Onsager	36
16.4 Soluzione agli autovalori della FP	36
17 Tempo di primo passaggio (MFPT)	38
17.1 Metodo delle autofunzioni	40
17.2 Equazioni di Hamilton	40
18 Processi Jump	41
18.1 Reazione chimica	42
18.2 Equazione di Fokker Plank da un processo di Jump	43
18.3 espansione alla Kramers-Moyal	45
18.4 Espansione di Van Kampfen	45
II Chaos	46
19 Espansione attorno al minimo	48
19.1 Cerchio Limite	50
20 Trasformazioni Canoniche	50
21 Equazione di Hamilton-Jacobi	53
21.1 Soluzione di HJ in 1-D	54
21.2 Variabili Azione-Angolo	54
21.3 Teoria Perturbativa	56
22 Visualizzazione del moto	60
22.1 Mappa di Poincarè	60
22.2 Twist Map	62
22.2.1 Lagrangiana discreta	66
22.3 Standard Map	66
22.4 Analisi del punto fisso	66
22.5 Teorema di Poincarè Birchoff	68
22.6 Punti iperbolici	69
23 Esponenti di Lyapunov	71
24 Entropia di Kolmogorov-Sinai	74
25 Chaos Globale	76
25.1 Distanza di Melnikov	76
25.2 Criterio di Chirikov	78
26 Sistemi dissipativi	81
26.1 Biforcazione di Hopf	81
III Econofisica	81

27 Mercato finanziario	83
28 Derivatives	84
28.1 Futures	84
28.2 Forward	84
28.3 Options	84
28.3.1 Put-Call parity	84
28.3.2 Forma adimensionale	86
28.4 Risk-Neutral valuation	86
29 Fatti in disordine	87
A Probabilità e definizioni elementari	89
A.1 Densità spettrale	89
A.2 Densità spettrale	90
A.3 Funzione di Correlazione	90
B Equazioni di Navier-Stokes	91
C Metodo delle caratteristiche	92
D Trasformata di Mellin	93

Parte I

Statistica

1

1 Definizione astratta di Probabilità

Quando si vuole parlare di probabilità di un evento, questo è parte di un insieme più grande, l'insieme di tutti gli eventi possibili.

Uno spazio di probabilità è una tripla $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ dove Ω è il **sample space**, che racchiude i possibili risultati (ad esempio testa/croce per una moneta, posizione per una particella, ecc), \mathcal{F} è l'insieme degli eventi, ovvero i suoi elementi sono sottoinsiemi di Ω che rappresentano l'informazione sul sistema (ad esempio è uscito un numero pari da un dado, oppure il numero di testa è uguale al numero di croce), e μ è una misura che assegna ad ogni $A \in \mathcal{F}$ una probabilità P che rispetta alcuni assiomi.

In particolare \mathcal{F} non è l'insieme delle parti di Ω (è vero solo per Ω finiti o numerabili), ma ad esempio l'algebra di Borel di Ω (perchè è possibile definirci sopra una misura)

1.1 Assiomi

- $P_{(A)} \geq 0$
- $P_{(\Omega)} = 1$
- Se $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ è una collezione di sottoinsiemi di Ω , **al più numerabile** e ogni coppia di insiemi non ha elementi in comune (cioè $\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2 \implies A_i \cap A_j = \emptyset$) allora deve valere:

$$P(\cup_i A_i) = \sum_i P_{(A_i)}$$

¹In gran parte ispirato da: "Stochastic Methods: A Handbook for the Natural and Social, Gardiner"

Ovvero che la probabilità che avvenga uno degli eventi contenuto nei vari insiemi, sia la somma delle probabilità

Una semplice conseguenza di questi assiomi è, considerando un insieme e il suo complementare $\bar{A} = \Omega \setminus A$ (che hanno intersezione vuota, quindi è possibile applicare il terzo assioma):

$$P_{(A)} + P_{(\bar{A})} = P_{(\Omega)} = 1 \implies P_{(\bar{A})} = 1 - P_{(A)}$$

Il motivo per cui il terzo assioma richiede che la probabilità si sommi solo su una collezione numerabile di insiemi è presto giustificato. Ad esempio considerando come eventi i numeri reali

$$x \in [0, 1]$$

con probabilità uniforme, si ha che un singolo punto ha probabilità 0 di essere scelto. Tuttavia, un unione non numerabile di punti, come ad esempio tutto l'intervallo, non ha probabilità nulla di essere scelta (come succederebbe se si sommassero le probabilità nulle dei singoli punti).

Fatto 1. Siano $\{B_i\}_{i \in I}$ dei set di eventi tali che

$$\bigcup_I B_i = \Omega$$

$$B_i \cap B_j = \emptyset$$

Allora vale che

$$P_{(A)} = P_{(A \cup \Omega)} = P_{(A \cup \bigcup_I B_i)} = \sum_I P_{(A, B_i)}$$

In teoria andrebbe controllato che il set I sia numerabile, ma dato che questa proprietà viene usata per lo più sui reali, quando quest'ipotesi viene a cadere, allora si ignora il problema (facendo un opportuno limite ce la si dovrebbe comunque cavare).

1.2 Probabilità congiunta e condizionata

Nel linguaggio della teoria degli insiemi, l'intersezione fra due insiemi va a vedere gli eventi in comune, quindi la probabilità associata all'intersezione (detta **probabilità congiunta**) sarà la probabilità di $A \& B$.

$$P_{(A \& B)} = P_{(A \cap B)}$$

Definizione 1.1 (probabilità condizionata). La probabilità condizionata di $A|B$ è definita come la probabilità di A sapendo che è avvenuto B , quindi restringendo gli eventi possibili a quelli contenuti in B . L'insieme A va quindi ristretto ad $A' = A \cap B$ e le probabilità andranno tutte rinormalizzate dividendole per $P_{(B)}$:

$$P_{(A|B)} = P_{(A')} = \frac{P_{(A \cap B)}}{P_{(B)}}$$

Da questa definizione discende la proprietà

$$P_{(A|B)}P_{(B)} = P_{(B|A)}P_{(A)} = P_{(A \cap B)}$$

Definizione 1.2 (eventi indipendenti). Due eventi (o insiemi di eventi) A e B sono detti indipendenti se il fatto che sia avvenuto B non cambia la probabilità che avvenga A :

$$P_{(A|B)} = P_{(A)} = \frac{P_{(A \cap B)}}{P_{(B)}} \implies P_{(A \cap B)} = P_{(A)}P_{(B)}$$

Detto in altri termini, la probabilità di $A \& B$ si fattorizza.

1.3 Misure equivalenti

due misure $d\mu, d\nu$ sono equivalenti se sono nulle sugli stessi eventi. (abusivamente si può pensare di poter fare il cambio di variabile $\frac{d\mu}{d\nu}$ o il suo inverso solo se numeratore e denominatore sono diversi da 0). Un cambio di misura può essere quello di **Radon-Nikodym**: data $Z : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ positiva quasi ovunque e con $E[Z] = 1$, si può definire una nuova misura E^* :

$$E^*[X] = E[XZ]$$

che rispetta le proprietà di una distribuzione di probabilità. Abusivamente la si può pensare come la derivata

$$\frac{d\mu}{d\nu}$$

in riferimento al discorso fatto su 2.2

1.4 Filtration

Esempio: immagino ci sia un lancio di N dadi, con N osservatori. L'osservatore i -esimo può guardare solo i primi i lanci. Quindi, per lui, lo spazio degli eventi è "ridotto".

Dato un insieme di indici ordinati I , si identifica la filtration

$$\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_i\}_{i \in I} \quad i < j \iff \mathcal{F}_i \subset \mathcal{F}_j$$

Nell'esempio di prima, la filtration \mathcal{F}_i indica il punto di vista dell'osservatore i -esimo, cioè lo spazio degli eventi dei primi i lanci moltiplicato (nel senso cartesiano) per lo spazio completo dei $N - i$ lanci rimanenti. Detto L il risultato del lancio di un dado, si intende

$$\Omega = L^N \quad \mathcal{F} = \mathcal{P}(L^N) \quad \mathcal{F}_i = \{A \times L^{N-i} \mid A \in \mathcal{P}(L^i)\}$$

Introducendo la variabile casuale X_i "lancio del dado i -esimo", si ha che \mathcal{F}_i è la **natural filtration** di X_i , nel senso che per trovare il valore di X_i mi basta guardare agli eventi in \mathcal{F}_i , che contengono quindi "tutta l'informazione necessaria".

2 Variabili reali

Immaginiamo di poter descrivere i nostri eventi con un numero reale $\Omega = \mathbb{R}$ (o con un vettore di numeri reali, nel qual caso i prodotti vanno sostituiti con prodotti scalari).

In questo caso si avrà una distribuzione di probabilità associata ad una misura, che, se sufficientemente regolare, si può scrivere come densità di probabilità:

$$p_{(A)} = \int_A d\mu = \int_A p_{(x)} dx$$

Definizione 2.1 (variabile casuale). Supponendo di identificare gli eventi con x , si possono anche scrivere funzioni della variabile casuale $F_{(x)}$ che sarà a sua volta una variabile casuale. Con la lettera maiuscola $X_{(x)}$ si intende la funzione identità, è un modo comodo per far vedere che si sta campionando lo spazio degli eventi.

Lo spazio degli eventi Ω può spesso contenere molta più informazione di x , come nel caso di un gas dove le posizioni di tutte le molecole andrebbero specificate per un evento, mentre magari noi siamo interessati all'energia totale; in questo caso si scriverà $X_{(\omega)}$ (e la densità di probabilità sarà $X_{(\omega)} p_{(\omega)} d\omega$). Possono essere infatti definite, sullo spazio Ω , più variabili casuali, che saranno una qualche funzione dello spazio dei parametri. Per rifarsi al caso del gas perfetto (nell'approccio canonico), queste possono ad esempio essere energia ed entropia.

Formalmente una variabile casuale è una funzione

$$X : \Omega \rightarrow S$$

dove S è lo spazio degli stati e rappresenta i possibili outcomes

2.1 Valore di aspettazione

Data una qualunque funzione della variabile casuale $F_{(X)}$, si definisce il valore di aspettazione di F e si scrive $E[F]$ la quantità

$$\langle F \rangle = E[F] = \int F_{(X)} p_{(\omega)} d\omega$$

L'operatore "valore di aspettazione" ha l'importantissima proprietà di essere LINEARE (discende dalla linearità degli integrali)

Definizione 2.2 (Momenti di una distribuzione). Si definisce il momento di ordine n di una distribuzione di probabilità reale la quantità

$$E[x^n]$$

Definizione 2.3 (Momenti centrali). Si definisce il momento centrale di ordine n (indicato da μ_n) di una distribuzione di probabilità reale la quantità

$$E[(x - \langle x \rangle)^n]$$

Definizione 2.4 (media). È il momento primo di una distribuzione:

$$\mu = E[X]$$

Definizione 2.5 (varianza). La varianza, indicata con σ^2 , è il secondo momento centrale:

$$\sigma^2 = E[(x - \mu)^2] = E[x^2] - 2E[x]\mu + \mu^2 = E[x^2] - \mu^2$$

La radice della varianza, σ , è detta **deviazione standard**

Definizione 2.6 (Matrice di covarianza). Supponiamo la nostra variabile casuale sia $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$, allora si definisce la matrice di covarianza σ_{ij} (matrice $n \times n$):

$$\sigma_{ij} = E[(X_i - \langle X_i \rangle)(X_j - \langle X_j \rangle)]$$

2.2 Cambio di variabile

Avendo x con associata la distribuzione di probabilità $p_{(x)}$, si vuole trovare la distribuzione di probabilità per $y = g_{(x)}$.

L'intervallo $[x, x + dx]$ ha associata la probabilità $p_{(x)} dx$. Dalla g , questo intervallo viene mappato in

$$[g_{(x)}, g_{(x)} + g' dx]$$

a cui sarà associata la stessa probabilità di prima. Noi però vorremmo la densità di probabilità di y , quindi la probabilità di un'intervallo $[y, y + dy]$ sarà la somma delle probabilità di tutti gli intervalli di x che qui vengono mappati dalla g :

$$q_{(y)} dy = \sum_{x|g_{(x)}=y} p_{(x)} dx$$

Ricordando infine che $dy = g' dx$, si ha

$$q_{(y)} = \sum_{x|g_{(x)}=y} \frac{p_{(x)}}{g'_{(x)}}$$

Nel caso in cui la distribuzione sia di più variabili, ad esempio $p_{(\mathbf{x})}$ $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, imitando il procedimento di prima si ha:

$$q_{(\mathbf{y})} d^n \mathbf{y} = \sum_{\mathbf{x}|g_{(\mathbf{x})}=\mathbf{y}} p_{(\mathbf{x})} d^n \mathbf{x} \implies q_{(\mathbf{y})} = \sum_{\mathbf{x}|g_{(\mathbf{x})}=\mathbf{y}} p_{(\mathbf{x})} \frac{d^n \mathbf{x}}{d^n \mathbf{y}}$$

Dove il rapporto al secondo membro altro non è che il reciproco del determinante dello Jacobiano della trasformazione \mathbf{g} (per vederlo chiaramente basta diagonalizzare lo Jacobiano, in modo tale che localmente valga $dx'_i = \alpha_i dy'_i$, e notare che il prodotto delle α_i è proprio il determinante dello Jacobiano).

Esempio 2.1 (distribuzione della somma). Si supponga di avere due variabili x, y con la loro distribuzione di probabilità $p_{(x,y)} = p_1(x)p_2(y)$, e di voler sapere la distribuzione della somma $z = x + y$. Allora si può fare un cambio di variabile

$$(x, y) \rightarrow (z, x)$$

che è descritto dalla matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Quindi con Jacobiano 1.

$$q_{(z,x)} = p_1(x)p_2(z-x)$$

Per trovare la distribuzione di z bisogna integrare sull'altra variabile (fare la marginale):

$$p(z) = \int q_{(z,x)} dx = \int p_1(x)p_2(z-x) dx$$

Quindi la distribuzione di probabilità della somma di due variabili casuali (indipendenti) è il prodotto di convoluzione delle due distribuzioni di probabilità

2.3 Funzione caratteristica

Allora si definisce **funzione caratteristica** della variabile casuale X la trasformata di Fourier della sua densità di probabilità

$$\phi_{(\omega)} = \int_{\Omega} e^{i\omega x} d\mu = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} p_{(x)} dx$$

Questa gode di varie proprietà:

1.

$$\phi_{(0)} = 1$$

Questa segue dalla condizione di normalizzazione

2.

$$|\phi| \leq 1$$

Infatti

$$|\phi| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} p_{(x)} dx \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |e^{i\omega x} p_{(x)}| dx = \int_{-\infty}^{\infty} |p_{(x)}| dx = 1$$

3. ϕ è continua. Questa proprietà segue dal fatto che la trasformata di Fourier manda funzioni L_1 (insieme che contiene le distribuzioni di probabilità $p_{(x)}$) in funzioni continue

4. Se una sequenza di distribuzioni p_i converge a p , allora la sequenza delle funzioni caratteristiche ϕ_i converge alla caratteristica di p , ϕ

5. Se x_1, x_2, \dots sono variabili casuali indipendenti con distribuzione

$$p(x_1, x_2, \dots) = p_1(x_1)p_2(x_2)\dots$$

allora anche la funzione caratteristica si fattorizza:

$$\phi = \phi_1 \phi_2 \dots$$

6. La funzione caratteristica della somma di due variabili casuali è il prodotto delle caratteristiche delle due variabili:

$$\phi_{x+y}(\omega) = \phi_x(\omega)\phi_y(\omega)$$

Questo segue dal fatto 2.1 per cui la distribuzione della somma è il prodotto di convoluzione delle due distribuzioni e quindi la sua trasformata è il prodotto delle due trasformate

7. L'espansione in Taylor della caratteristica, dà il valore di aspettazione di x^n : infatti:

$$\phi_{(s)} = \langle e^{isx} \rangle = \left\langle \sum_n \frac{s^n x^n}{n!} \right\rangle = \sum_n \frac{s^n}{n!} \langle x^n \rangle$$

2.4 Cumulanti

Immaginiamo una distribuzione di probabilità di un vettore di numeri reali, e troviamone la caratteristica con:

$$\phi(s) = \int e^{isx} d^n x$$

$$\Phi = \log(\phi)$$

A questo punto, espandendo Φ (che è detta **Funzione generatrice dei cumulanti**) in Taylor, si definiscono i cumulanti:

$$\Phi(s) = \sum_r \frac{i^r}{r!} \sum_{\{m_l\} | \sum_{l=1}^n m_l = r} \frac{s_1^{m_1} s_2^{m_2} s_3^{m_3} \dots s_n^{m_n}}{m_1! m_2! m_3! \dots m_n!} \langle \langle X_1^{m_1} X_2^{m_2} X_3^{m_3} \dots X_n^{m_n} \rangle \rangle$$

Questa definizione è un po' brutta ma l'unica davvero semplice. I cumulanti di ordine basso sono noti: quello di ordine 1

$$\langle \langle X_i \rangle \rangle = \langle X_i \rangle$$

è la media, mentre quello di ordine 2

$$\langle \langle X_i X_j \rangle \rangle$$

è la covarianza. I cumulanti che contengono almeno due variabili X_i distinte (quindi tutti quelli **non** del tipo $\langle \langle X_i^r \rangle \rangle$) misurano in qualche modo la correlazione fra le variabili casuali e sono detti **Funzioni di Correlazione**.

Infatti se le variabili sono indipendenti, tutte le funzioni di correlazione sono nulle, questo perché ϕ si può scrivere come prodotto di funzioni che contengono una singola variabile e di conseguenza Φ è scrivibile come somma di funzioni che contengono una variabile alla volta. Pertanto non ci sono termini misti nello sviluppo in Taylor della Φ .

Vediamo i momenti di una gaussiana $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$:

$$\phi = e^{-\frac{s^2 \sigma^2}{2}} \implies \Phi = -\frac{s^2 \sigma^2}{2}$$

Il che vuol dire che tutti i cumulanti oltre il secondo sono nulli per una gaussiana.

Esiste inoltre un teorema che dice che a meno che non si sia nel caso gaussiano (primi due cumulanti diversi da 0 e tutti gli altri nulli) devono esserci infiniti cumulanti non nulli. Indico i cumulanti con: $\langle \langle X_i^r \rangle \rangle = \hat{k}_r$

Fatto 2 (Cumulanti della somma di variabili casuali). Siano X, Y variabili casuali reali e indipendenti. Si è detto che la caratteristica della variabile casuale somma è il prodotto delle caratteristiche, quindi vuol dire che il suo logaritmo, la generating function dei cumulanti, è la somma delle due generating function (e di conseguenza anche il suo sviluppo in Taylor).

Quindi : **i cumulanti di variabili casuali indipendenti si sommano**

Il che ha come corollario il risultato ben noto sul fatto che le varianze e medie si sommano

2.5 Teorema del Limite Centrale

Si supponga di avere una successione di variabili casuali $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ (non per forza convergente!) e se

- Le variabili sono tutte a media nulla

$$\langle X_n \rangle = 0$$

- Siano σ_n^2 le rispettive varianze, allora si definisce

$$s_n^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$$

$$S_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{s_n}$$

Notare che per variabili indipendenti X_i si ha $\text{Var}(S_n) \equiv 1$! (a questo serve dividere per s_n)

- deve valere la **Condizione di Lindeberg** (intuitivamente dice che le distribuzioni X_i non possono diventare troppo larghe per $i \rightarrow \infty$, credo)

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{s_n} \sum_{i=1}^n \int_{|x| > ts_n} x^2 p_i(x) dx = 0$$

- Le varie variabili casuali devono essere **indipendenti**

Allora, la distribuzione S_n tende ad una gaussiana con media nulla e varianza 1, nel senso di 3.4.

2.5.1 Polinomi di Chebishev-Hermite

Danno l'andamento asintotico della convergenza del limite centrale: in particolare, detta S_n la somma delle prime n variabili rinormalizzata per avere varianza 1, e detta $\phi = e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}$:

$$S_n - \phi \sim e^{-\frac{x^2}{2}} \left(\frac{Q_1(x)}{\sqrt{n}} + \frac{Q_2(x)}{n} + \dots \right)$$

Dove i Q_n sono i polinomi di Chebishev-Hermite (che dipendono dai cumulanti della distribuzione S_n , qui torna utile il fatto che i cumulanti si sommano!).

I primi polinomi sono:

$$Q_1 = \frac{\hat{k}_3(x^2 - 1)}{6}$$

$$Q_2 = \frac{\hat{k}_3^2 x^5}{72} + \frac{1}{24} \left(\hat{k}_4 - \frac{10}{3} \hat{k}_3 \right) x^3 + \frac{1}{8} \left(\frac{51}{3} \hat{k}_3 - \hat{k}_4 \right) x$$

2.5.2 Teorema di Berry-Esseen

È un'altra versione che assicura il teorema del limite centrale; assume però che esista il momento terzo (finito e boundato) delle varie distribuzioni.

Definizione 2.7 (Distribuzione Cumulante). Data una distribuzione di probabilità, la sua **Distribuzione cumulante** vale, in x , quanto la probabilità di ottenere un risultato da un campionamento $\leq x$.

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(t) dt$$

Teorema 2.1 (Berry-Esseen). Siano $\{X_i\}$ variabili casuali, con

$$\text{Var}(X_i) = \sigma_i^2 \quad E[X_i] = 0 \quad E[X_i^3] = \rho_i$$

Si definisce la distribuzione somma a varianza normalizzata (s_n ha la definizione di prima)

$$Y_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{s_n}$$

Allora la distribuzione cumulante F_n di Y_n rispetta, detta $\Phi(x)$ la distribuzione cumulante di una gaussiana con varianza 1:

$$\sup \{F_n(x) - \Phi(x)\} \leq C \frac{\sum_{i \leq n} \rho_i}{s_n^{\frac{3}{2}}}$$

Dove C è una costante.

Corollario 2.2. Se esiste una costante che limita **tutti** i momenti terzi ($\rho_i \leq \rho_0$ e $\sigma_i \leq \sigma_0$) allora il membro destro va a 0 come $\frac{1}{\sqrt{n}}$
(è la versione che riporta mannella)

Ci sono teoremi super-recenti che dicono quanto vale al più C , in particolare $C \lesssim 1$ (in realtà 0.56, ottenuta nel 2011, ma vabbè non è importante)

3 Limiti variabile casuale

Consideriamo una successione di densità di probabilità per una variabile $\{X(\omega)_i\}_{i \in \mathbb{N}} \rightarrow X(\omega)$, in particolare si immagina di avere uno spazio degli eventi Ω con distribuzione di probabilità $p(\omega)$ fissata, e varie variabili casuali $X_i(\omega)$ definite su questo spazio.

Definizione 3.1 (Almost-certain limit). Una successione $\{X_i(\omega)\}_{i \in \mathbb{N}}$ è detta convergere quasi-certamente se converge puntualmente, ovvero se :

$$\forall \omega \in \Omega, \forall \epsilon > 0, \exists i_0 \in \mathbb{N} (i \geq i_0 \implies |X_i(\omega) - X(\omega)| \leq \epsilon)$$

Dove il $\forall \omega$ è inteso come un quasi-ovunque, cioè per tutti gli Ω eccetto, al più, un set con misura nulla.

Definizione 3.2 (mean-square limit). È la convergenza di funzioni, viste come vettori con la norma di L^2 . Più formalmente:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_{\Omega} p(\omega) |X_i(\omega) - X(\omega)|^2 d\omega = \langle |X_i - X|^2 \rangle = 0$$

Definizione 3.3 (Stochastic limit). Sia, data una successione di variabili casuali $X_i(x)$:

$$\chi_{\epsilon}(x) \begin{cases} 1 & x \geq \epsilon \\ 0 & x \leq \epsilon \end{cases}$$

Allora la successione è detta convergere sotto limite stocastico se:

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ \lim_{i \rightarrow \infty} \int p(\omega) \chi_{\epsilon}(|X_i(\omega) - X(\omega)|) d\omega = P(|X_i - X| \geq \epsilon) = 0$$

Definizione 3.4 (distribution limit). Questo limite è implicato da tutti i precedenti. Si dice che $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ converge se, per ogni funzione $F_{(X)}$ (immagino "sufficientemente regolare") si ha:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \langle F_{(X_i)} \rangle = \langle F_{(X)} \rangle$$

Le prime due definizioni, inoltre, implicano la terza.

4 Moto Browniano²

Venne scoperto nel 1827 da un botanico, Robert Brown, che osservava il diffondersi del polline nell'acqua. Fu esclusa la possibilità di un'origine biologica del moto quando si osservò che si manifestava in ogni tipo di sospensione in acqua.

Seppur caratterizzato sperimentalmente, per una spiegazione teorica di questo moto bisogna aspettare Einstein che pubblicò, nel 1905, un famoso paper con una giustificazione teorica del processo.

Il lavoro di Einstein si basava su due assunti teorici fondamentali. Supponendo di star studiando il moto del polline in acqua, questi sono:

1. Il movimento del polline è dovuto ad urti con le molecole d'acqua
2. Gli urti del polline con le molecole d'acqua sono numerosi e totalmente scorrelati l'uno dall'altro

Supponiamo di fare delle misure di posizione sul polline ad intervalli di tempo τ ; per fissare le idee consideriamo il movimento del polline 1D (tanto il movimento lungo i tre assi è indipendente). Detta Δ la quantità di cui si è mossa una particella nel tempo τ , si ha che il numero di particelle che si sono mosse di Δ è

$$dn = N \phi_{(\Delta)} d\Delta$$

²tecnicamente il primo argomento del corso

dove N è il numero totale di particelle di polline, e quindi la distribuzione $\phi_{(\Delta)}$ è normalizzata

$$\int \phi_{(\Delta)} d\Delta = 1$$

Supponiamo di conoscere la distribuzione di densità delle particelle al tempo t : il numero di particelle in dx sarà:

$$dn = P_{(x,t)} dx$$

Allora, per quanto detto prima, il numero di particelle in $[x, x+dx]$ al tempo $t+\tau$ sarà dato dalla probabilità che le particelle che si trovavano in $x-\Delta$ al tempo t (che sono $dn = P_{(x-\Delta,t)} d\Delta$) finiscano in x dopo τ , cosa che succede con probabilità $dp = \phi_{(\Delta)} d\Delta$. Quindi:

$$dn = P_{(x,t+\tau)} dx = dx \int_{\Delta} P_{(x-\Delta,t)} \phi_{(\Delta)} d\Delta$$

$$P_{(x,t+\tau)} = \int_{\Delta} P_{(x-\Delta,t)} \phi_{(\Delta)} d\Delta$$

Se prendiamo τ abbastanza piccolo affinché la distribuzione P non cambi di molto ed allo stesso tempo il Δ tipico di spostamento sia pure piccolo rispetto alla scala di variazione della P , ma τ abbastanza grosso da trattare lo spostamento Δ come una roba casuale, possiamo espandere P in Taylor:

$$P_{(x,t)} + \partial_t P_{(x,t)} \tau \approx P_{(x,t+\tau)} = \int_{\Delta} P_{(x-\Delta,t)} \phi_{(\Delta)} d\Delta \approx \int_{\Delta} (P_{(x,t)} + \partial_x P_{(x,t)} \Delta + \partial_x^2 P_{(x,t)} \frac{\Delta^2}{2}) \phi_{(\Delta)} d\Delta$$

Supponendo la $\phi_{(\Delta)}$ simmetrica (cosa vera se il sistema è isotropo), allora il secondo addendo nell'ultimo membro viene 0 (mettere questo termine $\neq 0$ equivale ad aggiungere un termine di **Drift**):

$$\int_{\Delta} \Delta \phi_{(\Delta)} d\Delta = 0$$

(per questo il secondo membro lo si è espanso fino al second'ordine). Inoltre, ricordando che ϕ è normalizzata:

$$\int_{\Delta} P_{(x,t)} \phi_{(\Delta)} d\Delta = P_{(x,t)}$$

Quindi:

$$P_{(x,t)} + \partial_t P_{(x,t)} \tau = \int_{\Delta} (P_{(x,t)} + \partial_x P_{(x,t)} \Delta + \partial_x^2 P_{(x,t)} \frac{\Delta^2}{2}) \phi_{(\Delta)} d\Delta \implies \partial_t P_{(x,t)} \tau = \int_{\Delta} \partial_x^2 P_{(x,t)} \frac{\Delta^2}{2} \phi_{(\Delta)} d\Delta$$

Chiamando $D = \frac{1}{\tau} \int_{\Delta} \frac{\Delta^2}{2} \phi_{(\Delta)} d\Delta$, notiamo di aver ottenuto l'equazione di diffusione:

$$\partial_t P = D \partial_x^2 P$$

4.1 Diffusione da un punto

Questa equazione ha una soluzione esplicita per la condizione iniziale al tempo 0 di diffusione da un singolo punto:

$$P_{(x,0)} = \delta_{(x)}$$

Faccio la trasformata di Fourier nelle x della P :

$$\tilde{P}_{(t,k)} = \int_x P e^{-ikx} dx$$

La mia condizione iniziale diventa molto semplice:

$$\tilde{P}_{t=0,k} = 1$$

e l'equazione differenziale si riscrive notando che la trasformata nelle x manda:

$$\partial_x^2 P \rightarrow -k^2 \tilde{P}$$

Sostituendo nell'equazione differenziale:

$$\frac{\partial_t \tilde{P}}{\tilde{P}} = -D k^2 \implies \partial_t \ln(\tilde{P}) = -D k^2$$

Adesso integro da 0 a t , sostituendo la condizione iniziale:

$$\ln\left(\frac{\tilde{P}_{(t,k)}}{\tilde{P}_{(0,k)}}\right) = \ln(\tilde{P}_{(t,k)}) - \ln(\tilde{P}_{(0,k)}) = -D k^2 t$$

$$\tilde{P} = e^{-D k^2 t}$$

$$P = \frac{1}{2\pi} \int e^{-D k^2 t} e^{ikx} dk$$

L'integrale lo si fa completando il quadrato in k e ricordandosi l'integrale di e^{-x^2} .

$$\boxed{P = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}} \quad (1)$$

La distribuzione è Gaussiana nelle x ! In particolare, la varianza sulla posizione è:

$$\langle x^2 \rangle = 2Dt$$

4.2 Equazione di Langevin

Un approccio alternativo a quello di Einstein venne seguito da Langevin. Questi suppose una legge di forza per le molecole ed un termine d'attrito. La particolarità è nel fatto che il termine di forza è una variabile casuale, perchè deve modellizzare gli urti con le molecole d'acqua.

Detta x la posizione di una molecola:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -6\pi\eta a \frac{dx}{dt} + F_x$$

Dove il termine di forza è stocastico. Moltiplico ambo i membri per x :

$$m x \frac{d^2 x}{dt^2} = m \frac{d^2(x^2)}{dt^2} - m \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = -6\pi\eta a x \frac{dx}{dt} + x F_x = -6\pi\eta a \frac{1}{2} \frac{dx^2}{dt} + x F_x$$

Adesso si fa una media temporale su un tempo molto maggiore dell'intervallo medio fra due urti. Dalla termodinamica si ha che la media dell'energia cinetica è $\frac{1}{2}k_b T$:

$$m \left\langle \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \right\rangle = k_b T$$

Dato che la media sull'ensemble $\langle \rangle$ è lineare, passa dentro le derivate

$$m \frac{d^2 \langle x^2 \rangle}{dt^2} - k_b T = -6\pi\eta a \frac{1}{2} \frac{d \langle x^2 \rangle}{dt} + \langle x F_x \rangle$$

Il termine $\langle x F_x \rangle$ ha media 0 se si assume che gli urti siano indipendenti, ovvero l'urto che manda la particella in x è scorrelato dalla forza esercitata dal prossimo urto.

$$m \frac{d^2 \langle x^2 \rangle}{dt^2} - k_b T = -6\pi\eta a \frac{1}{2} \frac{d \langle x^2 \rangle}{dt}$$

Per risolvere quest'equazione conviene fare un cambio di variabile

$$\frac{d \langle x^2 \rangle}{dt} \rightarrow y e^{-\frac{3\pi\eta a t}{m}}$$

$$m \frac{d(y e^{\frac{-3\pi\eta a t}{m}})}{dt} + 3\pi\eta a y e^{\frac{-3\pi\eta a t}{m}} = k_b T$$

$$m \frac{dy}{dt} = k_b T e^{\frac{3\pi\eta a t}{m}}$$

$$y = \frac{k_b T e^{\frac{3\pi\eta a t}{m}}}{3\pi\eta a} + C$$

$$\frac{d\langle x^2 \rangle}{dt} = \frac{k_b T}{3\pi\eta a} + C e^{\frac{-3\pi\eta a t}{m}}$$

L'esponenziale va a rapidamente a 0 perchè il coefficiente di t è molto grosso, quindi

$$\langle x^2 \rangle - x_0^2 = \frac{k_b T}{3\pi\eta a} t$$

Il membro sinistro è proprio la varianza di x : abbiamo ottenuto un risultato analogo a quello dell'equazione di diffusione ottenuta da Einstein, con la relazione fra D e la temperatura:

$$\frac{k_b T}{6\pi\eta a} = D$$

ovvero che D scala linearmente con la temperatura. Questo risultato l'aveva ottenuto anche Einstein nel suo paper.

5 Equazioni di Lotka-Volterra

Per descrivere un modello biologico con delle prede e dei predatori, si può immaginare che, detto x il numero delle prede(erbivore), y quello dei predatori, la variazione nel tempo delle prede è proporzionale al numero delle prede (perchè ciascuna si può riprodurre) meno una certa costante per il numero dei predatori (perchè ciascuno di questi può uccidere una preda) moltiplicato per il numero delle prede (perchè dà la probabilità che un predatore incontri una preda in qualche modo).

Per i predatori, si può immaginare che il loro numero aumenti ogni volta che mangiano una preda (questa premessa è piuttosto vacillante) e diminuisca di un termine proporzionale ad y per tener conto delle morti per causa naturale:

$$\frac{dx}{dt} = a x - b x y \quad (2)$$

$$\frac{dy}{dt} = b x y - c y \quad (3)$$

La cosa interessante di queste equazioni è che hanno soluzioni con un comportamento oscillante, in accordo con veri dati sperimentali. (per inciso, pare che il grafico di dati sperimentali che si faccia vedere sempre per giustificare queste equazioni sia fatto di dati presi molto male, ma alla fine la cosa da tirar fuori dal modello è il comportamento oscillante della popolazione, non la forma precisa della distribuzione)

Ovviamente il numero esatto di prede e predatori non seguirà esattamente questo andamento ma ci oscillerà intorno, specialmente nel caso di un campione piccolo. Bisogna quindi introdurre una densità di probabilità nell'avere x prede e y predatori:

$$P_{(x,y,t)}$$

Dopo un tempo dt , le probabilità che la popolazione sia cambiata (la si fa cambiare di una unità perchè il cambio di due unità è di ordine dt^2) sono:

$$p_{x \rightarrow x+1} = a x dt$$

$$p_{(x,y) \rightarrow (x-1,y+1)} = b x y dt$$

$$p_{y \rightarrow y-1} = c y dt$$

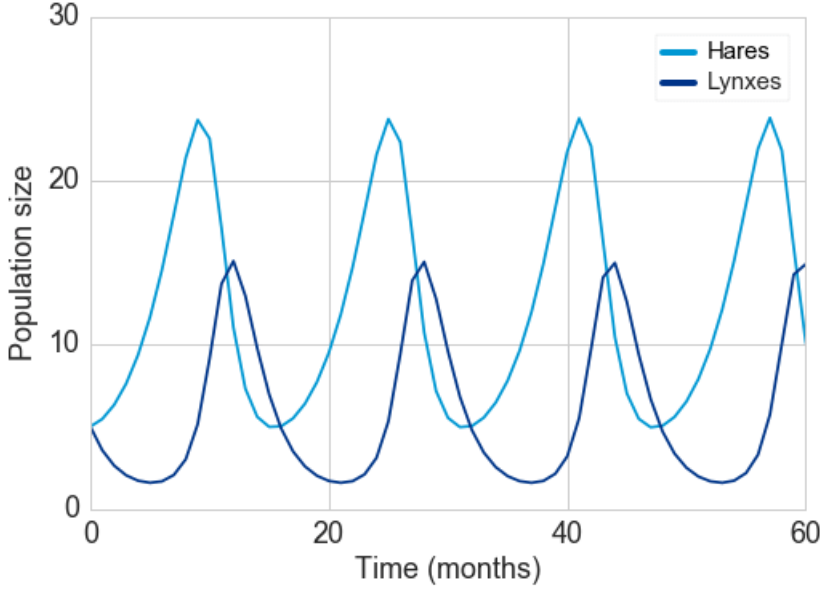


Figura 1: Esempio di soluzione numerica di equazioni di Lotka-Volterra

La probabilità che resti uguale è quindi:

$$p_{(x,y) \rightarrow (x,y)} = 1 - (ax + bxy + cy)dt$$

Questo genere di equazioni, che descrivono singole transizioni, prendono il nome di **birth death master equations**.

Le equazioni precedenti si riscrivono:

$$\begin{aligned} P_{(x,y,t+dt)} &= \partial_t P_{(x,y,t)} dt + P_{(x,y,t)} = \\ &= a(x-1)P_{(x-1,y,t)}dt + b(x+1)(y-1)P_{(x+1,y-1,t)}dt + c(y+1)P_{(x,y+1,t)}dt + P_{(x,y,t)}[1 - (ax + b(xy) + cy)]dt \end{aligned}$$

$$\partial_t P_{(x,y,t)} = a(x-1)P_{(x-1,y,t)} + b(x+1)(y-1)P_{(x+1,y-1,t)} + c(y+1)P_{(x,y+1,t)} - P_{(x,y,t)}(ax + b(xy) + cy) \quad (4)$$

C'è una importante precisazione da fare su questo risultato: abbiamo mandato dt a 0 per poter approssimare con una derivata la P ; questo si riduce a dire che la popolazione di un istante successivo dipende solo dalla popolazione l'istante precedente, così come la posizione nel moto browniano dopo un istante dipende dalla densità di probabilità nell'istante precedente.

Il punto è che, in biologia, possono esserci correlazioni su tempi anche piuttosto lunghi, ad esempio ereditarietà di comportamenti o caratteristiche genetiche.

Rispetto all'equazione di Langevin, che descrive una traiettoria deterministica ma dovuta ad una forza casuale (è come dire che si segue una delle possibili evoluzioni del sistema), si sta resolvendo, in questo caso, un'equazione differenziale che calcola l'effettiva distribuzione di probabilità, e non solo un sample dell'intero ensemble (come è il caso di Langevin).

Le fluttuazioni in questo tipo di modello sono grosso modo dell'ordine di \sqrt{n} , con n numero di individui (è naturale se si pensa che sono modelli tipo random-walk)

6 Rumore Shot

Questo rumore è dovuto alla natura discreta della carica elettrica. Supponiamo di misurare il segnale ai capi di una certa resistenza, per un tervallo di tempo di misura T_m . Se nella resistenza scorre una corrente I , vuol dire che dalla resistenza è uscita una carica $Q = IT_m = Nq$ dove q è la carica dell'elettrone ed N è il numero di elettroni che sono usciti dalla resistenza.

L'importante assunzione da fare per continuare la trattazione è che gli elettroni siano indipendenti gli uni dagli altri, ovvero in un tempo di osservazione T_m la distribuzione degli elettroni è uniforme; questo può non essere vero per grosse correnti, quando si inizia ad accumulare della carica che impedisce il passaggio di

altri elettroni contemporaneamente.

Sia n , il numero di elettroni passati dopo un tempo t , la nostra variabile casuale. Assumendo una corrente I , si ha che la probabilità che passi un elettrone in un tempo dt è

$$dp = \frac{I}{q} dt$$

Si possono scrivere delle equazioni **birth-death** per n :

$$\text{Prob}_{n \rightarrow n+1} = \frac{I}{q} dt$$

Quindi, introducendo una distribuzione di probabilità per n :

$$P_{(n,t+dt)} = P_{(n,t)} \left(1 - \frac{I}{q} dt\right) + P_{(n-1,t)} \frac{I}{q} dt$$

Da cui si fa la solita approssimazione al prim'ordine:

$$\partial_t P = \left(P_{(n-1,t)} - P_{(n,t)}\right) \frac{I}{q}$$

Per risolvere questo tipo di equazioni, dove l'altro argomento, oltre a t è un indice discreto (che comincia da 0), si introduce la cosiddetta **funzione generatrice** G .

$$G_{(s,t)} = \sum_{n=0}^{\infty} s^n P_{(n,t)}$$

$$\begin{aligned} \partial_t G &= \sum_n s^n \partial_t P = \frac{I}{q} \sum_n s^n (P_{(n-1,t)} - P_{(n,t)}) = \\ &= \frac{I}{q} \sum_n s^n P_{(n-1,t)} - \sum_n s^n P_{(n,t)} = \frac{I}{q} \sum_n s s^{n-1} P_{(n-1,t)} - \sum_n s^n P_{(n,t)} = \end{aligned}$$

Nella prima sommatoria posso cambiare indice da $n-1$ ad n (visto che comunque il primo termine, con $n=0 \implies n-1=-1$ era nullo perchè $P_{(-1,t)}=0$):

$$= \frac{I}{q} \sum_n s^n (s P_{(n,t)} - P_{(n,t)}) = \frac{I}{q} (s-1) G_{(s,t)}$$

Adesso ci siamo ridotti ad un'equazione differenziale:

$$\partial_t G = (s-1) \frac{I}{q} G$$

$$G = A \exp\left(\frac{I(s-1)}{q} t\right)$$

A $t=0, n=0 \implies G=1 \implies A=1$.

Ritornando alla P

$$\begin{aligned} G &= \sum_n \exp\left(-\frac{I}{q} t\right) \left(\frac{I}{q} t\right)^n \frac{s^n}{n!} \\ P &= \exp\left(-\frac{I}{q} t\right) \left(\frac{I}{q} t\right)^n \frac{1}{n!} \end{aligned}$$

Ovvero la P è in ogni istante un Poissoniana con media di elettroni accumulati $N = \frac{I}{q} t$.

Vogliamo trovare un'espressione per la corrente $I_{(t)}$. Sia $N_{(t)}$ la variabile casuale che conta il numero di elettroni misurati in ogni istante.

Questa quantità è discontinua, nel senso che ad ogni passaggio di elettrone aumenta di uno come un gradino; di conseguenza la sua derivata sarà una δ .

$$\mu_{(t)} = \frac{dN}{dt} = \sum_k \delta_{(t-t_k)}$$

Dove i t_k sono i tempi di passaggio dei vari elettroni. Mentre passa un elettrone, la corrente misurata si estende per un certo tempo τ , in particolare si può introdurre la corrente generata da un singolo elettrone F che passa all'istante 0:

$$\int_{t=0}^{+\infty} F dt = q$$

Dove q è la carica dell'elettrone. In questo modo la corrente è, considerando che all'istante t' passano $\mu dt'$ elettroni:

$$I_{(t)} = \int F_{(t-t')} \mu_{(t')} dt'$$

Ad esempio si può prendere

$$F = q\alpha e^{-\alpha t} \Theta_{(t)}$$

Dove Θ è la funzione a gradino.

Derivando l'espressione precedente:

$$\frac{dI}{dt} = \int \frac{dF_{(t-t')}}{dt} \mu_{(t')} dt' = \int (-\alpha F_{(t-t')} + \delta_{(t-t')} \alpha q) \mu_{(t')} dt' = -\alpha I + \mu \alpha q \quad (5)$$

Al momento, μ è ancora una variabile casuale.

Usando l'approccio di Langevin, e mediando ambo i membri:

$$\frac{d\langle I \rangle}{dt} = -\alpha \langle I \rangle + \langle \mu \rangle \alpha q$$

La corrente stazionaria misurata si trova imponendo la derivata = 0:

$$\langle I \rangle = I_{(+\infty)} = q \langle \mu \rangle$$

Dove $\langle \mu \rangle$ è il numero medio di elettroni al secondo.

Vogliamo trovare la varianza della corrente.

È ora conveniente usare una variabile a media nulla, quindi definisco:

$$d\eta = (\mu - \langle \mu \rangle) dt \quad (6)$$

Che ha il significato di oscillazione di numero di elettroni raccolti in un tempo dt . Moltiplicando l'equazione differenziale per $I dt$:

$$I dI = -\alpha I^2 dt + \alpha q \mu I dt \quad (7)$$

A questo punto c'è una sottigliezza notevole: si vorrebbe scrivere $d(I^2) = 2I dI$, ma questa formula è **sbagliata** per I variabile casuale. Il problema sta nel fatto che il termine $(dI)^2$ che di base sarebbe al second'ordine, in realtà è al prim'ordine in dt . Questo perchè $d\eta = dN - \langle \mu \rangle dt$ è una variabile Poissoniana, così come dN .

Facendo la varianza e ricordando che $\langle d\eta \rangle = 0$, e che dN è una variabile Poissoniana (varianza=valor medio):

$$\text{Var}(d\eta) = \langle (d\eta)^2 \rangle = \text{Var}(dN) = \langle dN \rangle = \langle \mu \rangle dt$$

Quindi si vede che la media di $(d\eta)^2$ è al prim'ordine in dt (questa proprietà orribile viene dal fatto che le funzioni a gradino come N sono...poco regolari). Ora vogliamo controllare se il valor medio di $(dI)^2$ è al prim'ordine in t . Moltiplicando l'espressione 5 per dt e usando la definizione 6:

$$dI = -\alpha I dt + \mu \alpha q dt = -\alpha I dt + \langle \mu \rangle \alpha q dt + d\eta \alpha q$$

$$(dI)^2 = (-\alpha I dt + \langle \mu \rangle \alpha q dt + d\eta \alpha q)^2$$

Quando facciamo il quadrato l'unico termine al prim'ordine in dt è $(d\eta)^2$ perchè il pezzo $\langle \mu \rangle \alpha q dt$ è una costante (quindi un pezzo super-regolare) moltiplicato per dt (quindi certamente al second'ordine in dt) e il pezzo $I dt$ è un'integrazione nel tempo di dI e quindi è certamente più regolare di questo rispetto alla variabile t . Dato che noi stiamo guardando la regolarità di dI , questo pezzo sicuramente non può contribuire. Quindi:

$$\langle (dI)^2 \rangle = \alpha (q)^2 \langle \mu \rangle dt$$

Ora abbiamo tutti gli ingredienti per la varianza di I :

$$\langle d(I)^2 \rangle = \langle (I + dI)^2 - I^2 \rangle = \langle (dI)^2 \rangle + 2 \langle IdI \rangle = (\alpha q)^2 \langle \mu \rangle dt + 2 \langle IdI \rangle$$

Inserendo in 7:

$$\frac{1}{2} d(I)^2 = -\alpha I^2 dt + \alpha q \mu I dt + \frac{1}{2} (dI)^2$$

Facendo la media e notando che μ ed I sono scorrelate (μ indica l'arrivo di un elettrone, che è scorrelato dalla corrente dovuta agli elettroni che stavano prima)

$$\frac{1}{2} d \langle I^2 \rangle = -\alpha \langle I^2 \rangle dt + \alpha q \langle \mu I \rangle dt + \frac{1}{2} \langle (dI)^2 \rangle = -\alpha \langle I^2 \rangle dt + \alpha q \langle \mu \rangle \langle I \rangle dt + \frac{1}{2} (\alpha q)^2 \langle \mu \rangle dt$$

Imponendo $d \langle I^2 \rangle = 0$ per andare a guardare il valore stazionario della varianza (ovvero il suo valore per $t \rightarrow +\infty$) si ha:

$$-\alpha \langle I^2 \rangle + \alpha q \langle \mu \rangle \langle I \rangle + \frac{1}{2} (\alpha q)^2 \langle \mu \rangle = 0 \implies \langle I^2 \rangle = q^2 \langle \mu \rangle^2 + \frac{1}{2} \alpha q^2 \langle \mu \rangle$$

$$\text{Var}(I) = \langle I^2 \rangle - \langle I \rangle^2 = \langle I^2 \rangle - q^2 \langle \mu \rangle^2 = \frac{1}{2} \alpha q^2 \langle \mu \rangle = \frac{1}{2} \alpha q \langle I \rangle$$

$$\text{Var}(I) = \frac{1}{2} \alpha q \langle I \rangle$$

(8)

Nella trattazione solita del rumore shot, si considera un tempo di misura finito e l'errore dovuto alla varianza degli elettroni raccolti va a 0 su tempi infiniti. Qui, invece, l'errore trovato è quello a cui tende il sistema in un tempo infinito, ed è dovuto non ad errori sui conteggi (che può essere ammazzato con tempi di campionamento maggiori), ma al fatto che la corrente arriva in pacchetti distinti.

Tanto più sono distinti questi pacchetti (ovvero un elettrone porta una δ di corrente), tanto più è grossa la varianza.

Infatti, nel limite $\alpha \rightarrow \infty$ la corrente di singolo elettrone F tende ad una delta di Dirac e la varianza calcolata diverge.

6.1 Errore sui conteggi

Come accennato, se campioniamo la corrente in un tempo finito T_m compare un altro errore dovuto all'incertezza di elettroni raccolti.

Detta N la variabile casuale Poissoniana di elettroni raccolti nel tempo di misura, e considerando una corrente media $I = \frac{Nq}{T_m}$:

$$I = \frac{Nq}{T_m} \implies \text{Var}(I) = \text{Var}(N) \left(\frac{q}{T_m} \right)^2 = N \left(\frac{q}{T_m} \right)^2 = I \left(\frac{q}{T_m} \right)$$

Questo errore però va a 0 su tempi molto grandi. Come l'errore trovato in precedenza, anche questo è un effetto della discretizzazione della carica (mandando $q \rightarrow 0$ entrambi gli errori vanno a 0).

7 Processi di Markov

Immaginiamo di avere una certa variabile $X(t)$ dipendente dal tempo. Misurandola ai tempi t_1, t_2, \dots si avrà una certa distribuzione di probabilità per le varie misure:

$$p(x_1, t_1; x_2, t_2; x_3, t_3; \dots)$$

Supponendo invece di **aver misurato** la variabile ai tempi τ_1, τ_2, \dots , si altererà la distribuzione di probabilità per le misure successive: bisognerà parlare di probabilità condizionata:

$$p(x_1, t_1; x_2, t_2; x_3, t_3; \dots | y_1, \tau_1; y_2, \tau_2; y_3, \tau_3)$$

Definizione 7.1 (Processo di Markov). Si parlerà di processo di Markov se di una serie di misure, la probabilità condizionata sarà influenzata solo dall'ultima misura compiuta, ovvero se:

$$p(x_1, t_1; x_2, t_2; x_3, t_3; \dots | y_1, \tau_1; y_2, \tau_2; y_3, \tau_3; \dots) = p(x_1, t_1; x_2, t_2; x_3, t_3; \dots | y_1, \tau_1)$$

Con $\tau_1 \geq \tau_2 \geq \tau_3 \dots$

Usando la proprietà 1:

$$p(x_1, t_1) = \int p(x_1, t_1; x_2, t_2) dx_2 = \int p(x_1, t_1 | x_2, t_2) p(x_2, t_2) dx_2$$

Ora invece supponiamo di avere a che fare con un processo di Markov. Riscrivo l'equazione precedente, solo aggiungendo l'ipotesi di aver fatto la misura x_3 al tempo $t_3 \leq t_2 \leq t_1$ (quindi mi basterà aggiungere questa condizione):

$$p(x_1, t_1 | x_3, t_3) = \int p(x_1, t_1 | x_2, t_2; x_3, t_3) p(x_2, t_2 | x_3, t_3) dx_2$$

ma ora, usando l'assunzione di Markov:

$$p(x_1, t_1 | x_2, t_2; x_3, t_3) = p(x_1, t_1 | x_2, t_2)$$

Sostituendo si ottiene l'equazione di Chapman-Kolmogorov:

$$p(x_1, t_1 | x_3, t_3) = \int p(x_1, t_1 | x_2, t_2) p(x_2, t_2 | x_3, t_3) dx_2 \quad (9)$$

Definizione 7.2 (Processi stazionari). Un processo con misure a vari tempi, come quelli descritti prima, è detto **stazionario** se è invariante per traslazioni temporali globali

$$p(x_1, t_1; x_2, t_2; x_3, t_3; \dots) = p(x_1, t_1 + \tau; x_2, t_2 + \tau; x_3, t_3 + \tau; \dots)$$

7.1 Continuità nei processi di Markov

Supponiamo di avere una distribuzione $p(x, t | y, \tau)$ che descriva un processo di Markov: sotto quali ipotesi ci si aspetta che sia continua (nel dominio delle t), ovvero che non ci siano salti?

Fare un salto vuol dire che in ogni istante di tempo (ovvero in ogni intervallino $[t, t + dt]$) c'è una probabilità infinitesima di fare un salto di una quantità non infinitesima, ad esempio

$$p_{\text{salto nell'intervallo}[t, t+dt]} = \lambda dt$$

Un processo di questo tipo porta ad una distribuzione esponenziale se λ è una costante; infatti la probabilità di non aver ancora fatto salti al tempo t è la probabilità di non fare un salto in un intervallino ampio dt elevata al numero di intervallini:

$$p_{\text{no salti al tempo } t} = (1 - \lambda dt)^{\frac{t}{dt}} = e^{-\lambda t}$$

Se invece la probabilità fosse del tipo

$$dp = \lambda (dt)^2$$

chiaramente non si potrebbero avere salti (il limite precedente farebbe sempre 1)

Quindi, la nostra richiesta per la continuità è che

$$\forall \epsilon > 0 \quad \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{p(x + \epsilon, t + dt | x, t)}{dt} = 0 \quad (10)$$

ovvero che la probabilità di avere un salto finito ϵ in un intervallino ampio dt vada a 0 più forte di dt .

Esempio 7.1 (processo di Cauchy). È un esempio di processo non continuo:

$$p(x, t + \Delta t | x_0, t) = \frac{1}{\pi} \frac{\Delta t}{(x - x_0)^2 + (\Delta t)^2}$$

In questo caso la probabilità di fare un salto ampio y al secondo è $\frac{1}{\pi(y^2 + (dt)^2)} dy$

Esempio 7.2 (Diffusione). Utilizzando l'equazione 1, si vede che la probabilità di fare un salto va a 0 come:

$$\sim \frac{1}{\sqrt{dt}} e^{-\frac{A}{dt}}$$

Quindi più forte di qualsiasi potenza. Questo assicura la continuità ma **non** la differenziabilità (che infatti non c'è)

7.2 Equazione differenziale di Chapman-Kolmogorov

Per ridurre l'equazione 9 ad un'equazione differenziale, devono esistere i seguenti tre limiti: il primo ha a che fare con i salti discontinui, le altre due sono collegate con moti continui:

1.

$$\lim_{dt \rightarrow 0} \frac{p(\mathbf{x}, t + dt | \mathbf{z}, t)}{dt} = W(\mathbf{x} | \mathbf{z}, t)$$

2. Questo prende il nome di **vettore di Drift**

$$\lim_{dt \rightarrow 0} \frac{1}{dt} \int_{|\mathbf{x} - \mathbf{z}| < \epsilon} (x_i - z_i) p(\mathbf{x}, t + dt | \mathbf{z}, t) d^n \mathbf{x} = A_i(\mathbf{z}, t) + O(\epsilon)$$

3. Questa è detta **Matrice di diffusione**

$$\lim_{dt \rightarrow 0} \frac{1}{dt} \int_{|\mathbf{x} - \mathbf{z}| < \epsilon} (x_i - z_i)(x_j - z_j) p(\mathbf{x}, t + dt | \mathbf{z}, t) d^n \mathbf{x} = B_{ij}(\mathbf{z}, t) + O(\epsilon)$$

Inoltre tutti i limiti successivi di questo tipo devono essere zero: sia n_i un vettore qualunque di norma unitaria:

$$\begin{aligned} |C_{ijk} n_i n_j n_k| &= \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{1}{dt} \int_{|\mathbf{x} - \mathbf{z}| < \epsilon} (x_i - z_i) n_i [\mathbf{n}(\mathbf{x} - \mathbf{z})]^2 p(\mathbf{x}, t + dt | \mathbf{z}, t) d^n \mathbf{x} \leq \\ &\leq \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{1}{dt} \int_{|\mathbf{x} - \mathbf{z}| < \epsilon} |(x_i - z_i) n_i| [\mathbf{n}(\mathbf{x} - \mathbf{z})]^2 p(\mathbf{x}, t + dt | \mathbf{z}, t) d^n \mathbf{x} \leq \\ &\leq \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{1}{dt} \int_{|\mathbf{x} - \mathbf{z}| < \epsilon} \epsilon \cdot 1 (x_j - z_j)(x_k - z_k) n_k n_k p(\mathbf{x}, t + dt | \mathbf{z}, t) d^n \mathbf{x} = B_{jk} n_j n_k \epsilon = O(\epsilon) \end{aligned}$$

Il motivo per cui questa dimostrazione non funziona per dimostrare che B è $\sim \epsilon A$ è che l'argomento dell'integrale di A non è sempre positivo e quindi non posso portare dentro il valore assoluto (mentre posso farlo con B visto che è quadratico l'argomento).

La prima proprietà indica il rate di salto di ampiezza finita per secondo. Se W è continua, questo rate deve essere 0 (per $x \neq z$). Infatti, la probabilità di fare un salto finito ampio almeno ϵ per un intervallo T è:

$$\int_{t=0}^T \int_{|\mathbf{x} - \mathbf{z}| \geq \epsilon} p(\mathbf{x}, t + dt | \mathbf{z}, t) d^n \mathbf{x} = \int_{t=0}^T \int_{|\mathbf{x} - \mathbf{z}| \geq \epsilon} W(\mathbf{x} | \mathbf{z}, t) dt d^n \mathbf{x}$$

Se questo integrale è nullo per ogni ϵ , vuol dire che non si possono fare salti finiti e che quindi W è nella per $\mathbf{x} \neq \mathbf{z}$.

L'equazione differenziale che si ricava è la seguente (la derivazione è un po' pesante e non particolarmente illuminante, si usa una funzione test che poi si integra per parti)

$$\begin{aligned} \partial_t p(\mathbf{z}, t | \mathbf{y}, t') &= \\ &= -\frac{\partial}{\partial z_i} [A_i(\mathbf{z}, t) p(\mathbf{z}, t | \mathbf{y}, t')] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j} [B_{ij}(\mathbf{z}, t) p(\mathbf{z}, t | \mathbf{y}, t')] + \int d\mathbf{x} [W(\mathbf{z} | \mathbf{x}, t) p(\mathbf{x} | \mathbf{y}, t') - W(\mathbf{x} | \mathbf{z}, t) p(\mathbf{z}, t | \mathbf{y}, t')] \end{aligned} \quad (11)$$

7.3 Condizioni al contorno

La più sensata da prendere è $p(\mathbf{x}, t|\mathbf{y}, t) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$, ovvero che la distribuzione di probabilità al tempo iniziale sia una δ , visto che si conosce esattamente la posizione iniziale.

Per gli esempi successivi si prende $t = 0, \mathbf{y} = \mathbf{x}_0$, quindi posso scrivere $p(\mathbf{x}, t)$ tenendo in mente queste condizioni al contorno.

Riguardo l'esistenza di una soluzione, ci sono varie condizioni. Una di queste è che la matrice B_{ij} sia semidefinita positiva (e che esistano i vari limiti che definiscono A, B, W).

7.4 Backward equation

Volendo si può anche considerare la seguente probabilità

$$p(\mathbf{x}, 0|\mathbf{x}', t) \quad t < 0$$

Dove si considera, però \mathbf{x} fissa e si prendono t, \mathbf{x}' come variabili.

Le condizioni al contorno sono sempre le stesse, visto che

$$p(\mathbf{z}, t|\mathbf{y}, t') = \delta(\mathbf{y} - \mathbf{z})$$

ma stavolta si risolve per $t' < t$.

Con un processo analogo a quello che porta all'equazione differenziale di Chapman-Kolmogorov, si ottiene:

$$\frac{\partial p(\mathbf{z}, t|\mathbf{y}, t')}{\partial t'} = -A_i \frac{\partial p(\mathbf{z}, t|\mathbf{y}, t')}{\partial y_i} - \frac{1}{2} B_{ij} \frac{\partial^2 p(\mathbf{z}, t|\mathbf{y}, t')}{\partial y_i \partial y_j} + \int d\mathbf{x} (W(\mathbf{x}|\mathbf{y}, t') p(\mathbf{z}, t|\mathbf{y}, t') - W(\mathbf{x}|\mathbf{y}, t') p(\mathbf{z}, t|\mathbf{x}, t')) \quad (12)$$

Dato che l'evoluzione temporale è omogenea (le equazioni non dipendono esplicitamente dal tempo), p dipende solo dalla differenza $t - t'$, quindi volendo si può scrivere l'equazione precedente derivando rispetto a t e cambiando il segno della derivata.

In realtà c'è un trucco molto semplice per ricavare questa equazione: sia $t > t' > t''$, allora

$$\frac{\partial p(\mathbf{k}, t|\mathbf{y}, t'')}{\partial t'} = 0 = \frac{\partial}{\partial t'} \int p(\mathbf{k}, t|\mathbf{z}, t') p(\mathbf{z}, t'|\mathbf{y}, t'') d\mathbf{z} = \int \left\{ \frac{\partial p(\mathbf{k}, t|\mathbf{z}, t')}{\partial t'} p(\mathbf{z}, t'|\mathbf{y}, t'') + p(\mathbf{k}, t|\mathbf{z}, t') \frac{\partial p(\mathbf{z}, t'|\mathbf{y}, t'')}{\partial t'} \right\} d\mathbf{z}$$

Per brevità delle formule ometto il pezzo con W , ma è chiara la generalizzazione:

$$= \int \left\{ \frac{\partial p(\mathbf{k}, t|\mathbf{z}, t')}{\partial t'} p(\mathbf{z}, t'|\mathbf{y}, t'') + p(\mathbf{k}, t|\mathbf{z}, t') \left(-\frac{\partial}{\partial z_i} [A_i(\mathbf{z}, t') p(\mathbf{z}, t'|\mathbf{y}, t'')] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j} [B_{ij}(\mathbf{z}, t') p(\mathbf{z}, t'|\mathbf{y}, t'')] \right) \right\} d\mathbf{z}$$

Integrando per parti il secondo addendo si spostano tutte le derivate spaziali su $p(\mathbf{k}, t|\mathbf{z}, t')$. Raccogliendo il fattore $p(\mathbf{z}, t'|\mathbf{y}, t'')$ nei due addendi si ha alla fine un'equazione del tipo

$$\int d\mathbf{z} p(\mathbf{z}, t'|\mathbf{y}, t'') (F(\mathbf{k}, t, \mathbf{z}, t'))$$

Dove F è la backward equation. Ma per l'arbitrarietà dell'estremo t'' , che può essere fatto variare a piacere, si ha che $F = 0$, cioè la backward equation.

7.5 Esempi

7.5.1 Processi Jump

È il caso in cui l'unico termine $\neq 0$ è $W(\mathbf{x}, t)$.

In questo caso i cammini di prova tipici sono costanti a tratti (perchè c'è una probabilità finita di restare nell'origine, grazie al fatto che non si sta derivando la δ) e compie salti random con un'ampiezza determinata dalla distribuzione di W .

Per Δt piccoli, si può scrivere, al prim'ordine

$$p(\mathbf{x}, t + \Delta t) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \left(1 - \Delta t \int d\mathbf{z} W(\mathbf{z}, t|\mathbf{x}_0) \right) + W(\mathbf{x}, t|\mathbf{x}_0)$$

Quindi un cammino nello spazio delle posizioni ha una certa probabilità per unità di tempo di saltare.

7.5.2 Equazione di Fokker-Planck

È il sottocaso più importante, e generale: consiste nel prendere $W = 0$.

Quindi stiamo descrivendo un processo continuo diffusivo, e la motivazione per questa affermazione è la seguente: supponiamo A_i, B_{ij} circa costanti nel range di variazione *spaziale* tipico della p (ad esempio nei primi istanti del moto, quando la probabilità è fortemente piccata in una regione piccola) e costanti temporalmente; questa approssimazione equivale a trascurare le derivate di vettore di drift e matrice di diffusione.

Si ottiene una equazione di diffusione!

$$\partial_t p = -A_i \partial_i p + B_{ij} \partial_{ij}^2 p$$

Che ha come soluzione (sia n il numero di dimensioni)

$$p(\mathbf{x}, t | y = 0, t = 0) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(B)t}} \exp(-(x_i - A_i t) B_{ij} (x_j - A_j t))$$

Cammini di prova sono continui ma non differenziabili (è noto che il moto browniano sia irregolare)

7.5.3 Equazione di Neuville

L'esempio più facile da fare è quello in cui $W, B_{ij} = 0$ e c'è solo il termine con A_i .

Questo termine, da solo, **descrive un moto deterministico**. Il motivo è che il termine rappresenta un drift uniforme della distribuzione, e non ne altera la forma.

Per dimostrarlo esplicitamente: prendo come guess per la soluzione

$$p(\mathbf{x}, t) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{s}(t))$$

dove $\mathbf{s}(t)$ è una qualche funzione del tempo.

$$\partial_t p = -\dot{s}_i \partial_i (\delta(\mathbf{x} - \mathbf{s}(t))) = -\frac{\partial}{\partial x_i} [A_i(\mathbf{x}, t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{s})] = -\frac{\partial}{\partial x_i} [A_i(\mathbf{s}(t), t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{s})] = -A_i(\mathbf{s}(t), t) \frac{\partial}{\partial x_i} [\delta(\mathbf{x} - \mathbf{s})]$$

Che quindi è verificata se

$$\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{A}$$

Il significato intuitivo di \mathbf{A} , quindi, è quello di velocità istantanea di traslazione della distribuzione.

7.5.4 Processi di Ornstein-Uhlenbeck

Si tratta di un caso della Fokker-Planck 1-D, con $A = -kx$, $B = D = \text{const}$.

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial [kxp]}{\partial x} + \frac{1}{2} D \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$

Cerco le soluzioni stazionarie:

$$\frac{\partial}{\partial x} [kx + \frac{1}{2} D \partial_x p] = 0 \implies kxp + \frac{1}{2} D \partial_x p = \text{const}$$

$$\partial_x \ln(p) = -kx^2 + C$$

Quindi p è una gaussiana (la costante è fissata dalla normalizzazione)

In trasformata di Fourier nelle posizioni (uso s come vettore d'onda), si ottiene

$$\partial_t \phi + ks \partial_s \phi = -\frac{D}{2} s^2 \phi$$

oppure, cambiando variabile $g = \ln(\phi)$

$$\frac{\partial g}{\partial t} + ks \frac{\partial g}{\partial s} = -\frac{D}{2} s^2$$

Per risolvere questa equazione, uso il **metodo delle caratteristiche**, descritto in C

$$\frac{dg}{-\frac{D}{2}s^2g} = \frac{ds}{ks}$$

$$u = g + \frac{D}{4k}s^2$$

$$dt = \frac{ds}{ks}$$

$$v = t - \frac{1}{k}\ln(s)$$

La soluzione più generale si ha scrivendo (c'è un mucchio di arbitrarietà che sfrutto):

$$e^u - f(e^{-kv}) = 0$$

$$\phi e^{\frac{Ds^2}{4k}} = f(se^{kt})$$

La soluzione generale è :

$$\phi = e^{-\frac{Ds^2}{4k}} f(se^{-kt})$$

Bisogna imporre le condizioni al contorno, usando le solite, queste si traducono, in trasformata, in:

$$\phi(s, t = 0) = e^{-isx_0}$$

Da cui si trova che la soluzione è

$$\phi(s, t) = \exp\left(-\frac{Ds^2}{4k} + \frac{Ds^2}{4k}e^{-2kt}\right) \exp(-isx_0e^{-kt})$$

che andrebbe antitrasformata.

Visto che ϕ è l'esponentiale di un polinomio quadratico in s , la sua antitrasformata è sempre l'esponentiale di un polinomio quadratico (una **Gaussiana!**), con media (si vede dal termine di traslazione in trasformata $e^{-is\Delta x(t)}$):

$$E[X(t)] = x_0e^{-kt}$$

e varianza (è il doppio del coefficiente del termine quadratico in trasformata)

$$E[X^2] = \frac{D}{2k} (1 - e^{-2kt})$$

Volendo studiare la correlazione del modello, ovvero

$$E[X(t + \tau)X(t)]$$

è conveniente farlo nel caso stazionario, ovvero nel lontano futuro $t \rightarrow \infty$: in questo caso si può approssimare $p(x_1, t|x_0, t = 0)$ con una gaussiana centrata nell'origine con varianza $\frac{D}{k}$, e $p(x_2, t + \tau|x_1, t) = p(x_2, \tau|x_1, 0)$ (per invarianza sotto traslazioni temporali) con una gaussiana centrata in $x_1e^{-k\tau}$, quindi l'integrale in x_2 che è semplicemente il valor medio di x_2 restituisce $x_1e^{-k\tau}$

$$\int dx_2 dx_1 x_2 x_1 p(x_2, \tau|x_1, 0) p(x_1, \infty|x_0, 0) = \int dx_1 x_1^2 e^{-k\tau} e^{-\frac{kx_1^2}{D}} \frac{1}{\sqrt{\frac{D\pi}{k}}} = e^{-k\tau} \frac{D}{2k}$$

Quindi decade esponenzialmente (normale, il sistema tende a restringersi)

8 Random Walk 1-D

Voglio studiare la random walk con un approccio di Master equation. Ci sono due tipi di Random Walk:

1. Dopo un tempo τ fissato si salta in avanti o indietro (con probabilità uguale)

$$P(n, t + \tau) = \frac{1}{2}P(n-1, t) + \frac{1}{2}P(n+1, t)$$

2. Si ha una probabilità per unità di tempo μ di saltare

$$P(n, t + dt) = \mu P(n-1, t)dt + \mu P(n+1, t)dt - (1 - 2\mu dt)P(n, t) \implies$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \mu (P(n-1, t) + P(n+1, t) - 2P(n, t))$$

Cambiando la scala temporale (in modo tale che τ sia molto piccolo), il primo tipo rientra nel secondo, perchè nell'intervallo di misura ci possono essere stati così tanti salti che di quanto si è spostata la particella è una variabile casuale.

Infatti, per τ infinitesimo:

$$P(n, t + \tau) \approx P(n, t) + \tau \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{1}{2}P(n-1, t) + \frac{1}{2}P(n+1, t)$$

Che è il caso 2 con $d = \frac{1}{2\tau}$ (quindi d grosso).

Queste distribuzioni si trovano con il metodo della funzione caratteristica (uso e^{ins} perchè stavolta n prende anche valori negativi):

$$G = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p(n, t) e^{-ins}$$

Moltiplicando il caso 2 per e^{-ins} e sommando su n :

$$\frac{\partial G}{\partial t} = -4\mu \sin^2\left(\frac{s}{2}\right)G \implies G = \exp\left(-4\mu t \sin^2\left(\frac{s}{2}\right)\right)$$

Nell'ultimo passaggio si è utilizzata anche la condizione iniziale $p(n, t=0) = \delta_{n,0}$

Nel caso 1, invece:

$$G_1(s, (N+1)\tau) = \cos(s)G_1(s, N\tau)$$

$$G_1(s, N\tau) = \cos(s)^N$$

$$G_1 \rightarrow (1 + (-1 + \cos(s)))^{\frac{t}{\tau}} = \left(1 - 2\sin^2\left(\frac{s}{2}\right)\right)^{\frac{t}{\tau}}$$

Nel limite in cui anche $\tau \rightarrow 0$, con $\frac{s^2}{\tau}$ che resta finito (equivale a dire che nelle x si ha $\Delta x \propto \frac{1}{s} \sim \frac{1}{\sqrt{\tau}}$ ovvero la distribuzione è molto "broad", quindi con pochi salti non cambia forma):

$$G_1 \rightarrow \exp\left(-\sin^2\left(\frac{s}{2}\right)\frac{2t}{\tau}\right)$$

che è il caso 2 (sempre per s piccolo) con $\mu = \frac{1}{2\tau}$ (tutto ciò ha senso perchè s'è detto che limite caratteristica \implies limite distribuzione).

Fatto 3 (Limite continuo). Corrisponde a prendere la distribuzione delocalizzata in n , ovvero molto "broad". In trasformata, significa avere una distribuzione molto piccata nell'origine, con $s \approx 0$.

L'alternativa, più chiara nei conti, è inserire una scala di lunghezza l di spazio nel reticolo, in modo tale che $s \rightarrow ls$ nella nuova scala (s non è più adimensionale). Mandare l a 0 equivale a mandare il vecchio s adimensionale a 0.

In ogni caso, il risultato è una distribuzione gaussiana nelle s

$$G \rightarrow \exp(-s^2 \mu t)$$

con varianza $2\mu t$ (sempre ricordando che in trasformata $\phi \sim \exp\left(-\frac{s^2\sigma^2}{2}\right)$, o espandendo al second'ordine in s).

Il motivo per cui si ritrova il solito processo diffusivo (**Wiener process** è che, nella definizione 2), si può approssimare il pezzo tra parentesi con una derivata seconda:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial n^2} \approx 2P(n) - P(n-1) - P(n+1)$$

riottenendo l'equazione di diffusione

9 Telegrafo random

È un processo random con una variabile discreta che può prendere solo due valori, a e b , con probabilità di salto λ, μ :

Volendo posso pensare la probabilità come un vettore $2D$:

$$p_0(t) = p(a, t) \quad p_1(t) = p(b, t)$$

$$\frac{\partial \mathbf{p}(t)}{\partial t} = \mathcal{M} \mathbf{p}$$

Con

$$\mathcal{M} \begin{pmatrix} -\lambda & \mu \\ \lambda & -\mu \end{pmatrix}$$

gli autovalori sono 0 e $-\lambda - \mu$, e l'autovalore corrispondente a 0 è la soluzione stazionaria, l'altra rilassa chiaramente con

$$\exp(-[\lambda + \mu]t)$$

La soluzione stazionaria è (il prefattore serve a normalizzare)

$$\mathbf{p} = \frac{1}{\lambda + \mu} \begin{pmatrix} \mu \\ \lambda \end{pmatrix}$$

Da queste espressioni esplicite uno si può trovare tutto, ad es. varianza e correlazione. (la correlazione giustamente va già con l'esponenziale $e^{-(\mu+\lambda)t}$). La varianza che va giù esponenzialmente accomuna questo processo random a quello di Ornstein-Uhlenbeck, ed infatti viene utilizzato spesso come variante più semplice per modellizzare variabili random

10 Analisi stocastica

L'obiettivo è formalizzare l'approccio di Langevin per quanto riguarda differenziali di quantità random, dato che sembra molto semplice e potente da usare.

L'approccio corretto è, più che scrivere equazioni differenziali (visto che le quantità non sono differenziabili), è quello di utilizzare equazioni integrali.

Il primo step è quindi scrivere l'integrale di una quantità random.

Si prende la quantità $\xi(t)$ rapidamente variabile e irregolare, che rispetta

$$\langle \xi \rangle = 0$$

$$\langle \xi(t') \xi(t) \rangle = \delta(t - t')$$

e si utilizza per fare i conti la variabile casuale W (W sta per Wiener)

$$dW = \xi(t)dt \quad W(t) = \int_0^t \xi(s)ds$$

Che descrive un processo di Markov, visto che

$$W(t) = \int_{t'}^t \xi(s) ds + W(t')$$

Dipende solo da $W(t')$ e non da tempi precedenti.

Media e covarianza sono (supponendo a $t = 0$ di partire con $W = 0$):

$$\langle W \rangle = 0$$

$$\langle W(t)W(t') \rangle = \left\langle \int_0^t \int_0^{t'} \xi(s)\xi(s') \right\rangle ds ds' = \int_0^t \int_0^{t'} \delta(s-s') ds ds' = \min(t, t')$$

Ora si può definire l'integrale: si deve dividere l'intervallo di integrazione in N punti $t_i \geq t_{i-1}$.

Siano inoltre $\tau_i \in [t_i, t_{i-1}]$

L'integrale stocastico è definito come:

$$\int G(t) dW(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_i G(\tau_i) [W(t_i) - W(t_{i-1})]$$

potendo prendere

$$\tau_i = t_{i-1} + a(t_i - t_{i-1}) \quad a \in [0, 1]$$

il risultato dipende dalla scelta di a (come si può mostrare facilmente prendendo $G = W$).

Infatti, per $G = W$:

$$\begin{aligned} \left\langle \int W(t) dW(t) \right\rangle &= \sum_i \langle W(\tau_i) [W(t_i) - W(t_{i-1})] \rangle = \\ &= \sum_i \tau_i - t_{i-1} = \sum_i a(t_i - t_{i-1}) = a(t_N - t_0) \end{aligned} \quad (13)$$

che dipende da a .

L'integrale di Ito corrisponde ad una scelta per a di queste possibili definizioni di integrali, ovvero

$$\boxed{a = 0} \quad (14)$$

Inoltre il limite $N \rightarrow \infty$ è inteso come limite mean square 3.2

$$\boxed{\int_{t_0}^{t_M} G(t) dW(t) = \text{ms} - \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_i G(t_{i-1}) [W(t_i) - W(t_{i-1})]} \quad (15)$$

Per inciso, esistono altre scelte di α , ad esempio $\alpha = \frac{1}{2}$ è detto **integrale di Stratonovich**, ed è la scelta più intuitiva fisicamente da fare, mentre l'integrale alla Ito viene usato per descrivere i **martingala** (Li uso dopo in 26.3)

Definizione 10.1 (Martingala). È una sequenza di variabili casuali x_i dove il valore di aspettazione di una variabile casuale è uguale al termine precedente della sequenza $E[x_i] = x_{i-1}$

Il motivo per cui l'integrale di Ito $\int W dW$ viene in media 0, è che si suppone l'incremento di dW indipendente dal valore di W (è questo il significato fisico della scelta di a). Prendere $a = \frac{1}{2}$ vuol dire prendere $W(t_i)$ come media del suo valore "vecchio" (nell'intervallo di tempo precedente) ed del suo valore nuovo dopo l'incremento. Quindi W non è indipendente dal suo incremento ed il valor medio di $W dW$ non è 0.

Definizione 10.2 (Funzione non anticipante). $G(t)$ è detta non anticipante se *non* dipende dal valore dell'incremento di W nel futuro, ovvero dalla quantità

$$W(s) - W(t) \quad \forall s \geq t$$

Esempio 10.1 (Funzioni non anticipanti). Sono funzioni non anticipanti la $W(t)$ e tutte le funzioni $F(W(t))$ di questa quantità, chiaramente.

Inoltre anche funzioni di $W(t')$ dove si prendono vari t' precedenti a t ; questa affermazione è compresa dalla generica quantità :

$$\int_0^t F(W(t')) dt'$$

(che comprende anche le quantità precedenti, a patto di usare delta di Dirac come F)

11 Integrali alla Ito

Nella trattazione si userà sempre una $G(t)$ non-anticipante.

La formula di Ito consiste sostanzialmente nel notare che $[dW]^2 = dt$.

Anzitutto voglio trovare (suppongo $t \geq t'$)

$$\langle (W(t') - W(t))^2 \rangle = \left\langle \left[\int_{t'}^t \xi(s) ds \right]^2 \right\rangle = t - t'$$

che traduce l'affermazione intuitiva di prima. L'altro ingrediente che serve è

$$\langle [(W(t') - W(t))^2 - (t - t')]^2 \rangle$$

Che si può trovare in modo analogo a prima, oppure notando che

$$W(t') - W(t) = \int_{t'}^t \xi ds$$

è la somma di tante variabili casuali ($\xi(s)$) indipendenti. Quindi è una variabile gaussiana, con media nulla (perchè la media delle ξ è 0). La varianza la si è calcolata prima

$$\left\langle \left[\int_{t'}^t \xi ds \right]^2 \right\rangle = t - t'$$

E usando il fatto che, per una variabile gaussiana ϕ vale

$$\langle (\phi^2 - \sigma^2)^2 \rangle = 2\sigma^4$$

Si trova

$$\langle [(W(t') - W(t))^2 - (t - t')]^2 \rangle = 2(t - t')^2$$

La formula generale è

$$\int G(t)[dW(t)]^2 = \int G(t)dt$$

Dimostrarla equivale a far vedere che

$$\text{ms} - \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_i G(t_{i-1})[(W(t_i) - W(t_{i-1}))^2 - (t_i - t_{i-1})] = 0$$

Cioè, ricordando la definizione del limite

$$\begin{aligned} & \left\langle \left\{ \sum_i G(t_{i-1})[(W(t_i) - W(t_{i-1}))^2 - (t_i - t_{i-1})] \right\}^2 \right\rangle = \\ & = \left\langle \sum_i G^2(t_{i-1})[\Delta W_i^2 - \Delta t_i]^2 \right\rangle + 2 \sum_{i>j} \langle G(t_{i-1})G(t_{j-1})[\Delta W_j^2 - \Delta t_j]^2[\Delta W_i^2 - \Delta t_i]^2 \rangle = \end{aligned}$$

Il fatto che G sia nonanticipante, ci dice che ΔW_i e $G(t_i)$ sono indipendenti, quindi ad esempio nel primo addendo, posso fare i valor medi separatamente dei due fattori, e sfruttare le formule date prima. Per il secondo addendo, l'ultimo fattore è indipendente dagli altri 3 per lo stesso motivo, ma il suo valore di aspettazione è 0, quindi annulla tutto l'addendo

$$= 2 \sum_i \langle G^2(t_{i-1}) \rangle (\Delta t_i)^2$$

Ma questa quantità, se G non fa troppo schifo, (ad esempio è limitata da una costante A) è 0, perchè $(\Delta t_i)^2$ è un differenziale (di una quantità NON stocastica) al quadrato. Esplicitamente, con N divisioni dell'intervallo T :

$$\Delta t \sim \frac{T}{N} \implies \sum_i (\Delta t_i)^2 \sim N \frac{T^2}{N^2} \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_i (\Delta t_i)^2 = 0$$

Quindi si è mostrata la seguente formula per **integrali alla Ito**

$$\boxed{\int G(t)[dW(t)]^2 = \int G(t)dt} \quad (16)$$

Per inciso, i differenziali di ordine successivo $[dW]^{2+N}$, sono tutti di ordine trascurabile nell'integrale. Questo mostra anche la scelta di $a = 0$ nell'integrale di Ito, che serve per l'indipendenza della $G(t)$ dal differenziale che la moltiplica; la formula infatti non vale per l'integrale di Stratonovich.

11.1 Formula di Ito

Quando si fa il differenziale di una funzione

$$df(W, t)$$

bisogna stare attenti agli ordini che si tengono. In particolare, bisogna mantenere il second'ordine in W (la regola generale è pensare dW di ordine $\frac{1}{2}$).

$$df = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial W}dW + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial W^2}[dW]^2$$

Ma il differenziale $[dW]^2$ converge con probabilità uno a dt , quindi si ottiene la cosiddetta **formula di Ito** (sostituisco dt)

$$df(W, t) = \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial W^2} \right]dt + \frac{\partial f}{\partial W}dW$$

Esempio 11.1 (cambio di variabile). Se invece si ha una variabile casuale generica, del tipo

$$dx = Adt + BdW$$

e si vuole cambiare variabile, passando a $f(x, t)$, allora il nuovo differenziale è

$$df = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}B^2 \right)dt + \frac{\partial f}{\partial x}AdW$$

Esempio 11.2 ("Esempio Importante"). Come esempio, guardo il seguente integrale (che si era usato come esempio per mostrare come tipi diversi di integrazione portano risultati diversi)

$$\int_{t_0}^t W dW = \frac{1}{2} \left[\int dW^2 - (dW)^2 \right] = \frac{1}{2} (W^2(t) - W^2(0) - (t - t_0))$$

Che, prendendo il valor medio (ricordando che $\langle \Delta W^2 \rangle = \Delta t$), coincide con il valore per $a = 0$ in 13, cioè 0. L'integrale alla Stratonovich elimina l'ultimo addendo (per integrali alla stratonovich valgono le solite regole del calcolo differenziale).

12 Stochastic Differential Equation (SDE)

In generale, uno si tova ad integrare una roba di questo tipo

$$dx = f(x)ds + g(x)dW$$

Il problema di questa equazione è che, per colpa di dW , x è essa stessa una variabile stocastica, quindi anche $g(x)$ conterrà dei termini in W stocastici, ad esempio.

Per capire che una soluzione esiste ed è unica, almeno per scelte di f e g abbastanza regolari (ad esempio limitate e continue), l'ideale è pensare come integrare l'equazione numericamente.

L'idea è di andare a piccoli step, con incrementi ds deterministici, mentre si prende dW come una variabile casuale a media nulla e varianza ds . In particolare, quello che si fa è prendere dW con varianza 1 e moltiplicarla per \sqrt{dt} . Il teorema del limite centrale assicura che i vari incrementi di dW , se sono abbastanza densi, alla fine possono essere presi gaussiani, se uno va a guardare una scala di tempi $\Delta t \gg dt$ (quindi è

conveniente prenderli gaussiani dall'inizio).

Per una soluzione "analitica", si può andare di approssimazioni successive dell'equazione integrale associata

$$x^{n+1}(t) = \int_0^t f(x^n(s))ds + g(x^n(s))dW$$

$$x^0(t) = x_0$$

$$x^1(t) = \int f(x_0, t)dt + g(x_0, t)dW = F(x_0, t) + g(x_0, t)W(t)$$

$$x^2(t) \approx \int f(x_0, t)dt + \frac{\partial f}{\partial x}(x^1 - x^0)dt + g(x_0, t) \int dW + \int \frac{\partial g}{\partial x}(F(x_0, t) + g(x_0, t)W(t) - x_0)dW$$

Quindi si vede che compaiono integrali del tipo $\int WdW$, che possono essere risolti nei vari tipi di integrazione (Ito, Stratonovich, ...).

12.1 Legame con la Fokker Planck

L'approccio del calcolo differenziale stocastico è completamente equivalente al campionamento di una variabile casuale con una distribuzione $p(x, t)$ che rispetta una certa equazione di Fokker-Planck; per dimostrarlo, si consideri x variabile casuale

$$dx = a(x, t)dt + b(x, t)dW$$

Si vuole mostrare che x è uguale, (nel senso stocastico 3.4) ad una distribuzione di probabilità che rispetta la Fokker planck; quindi bisogna prendere una funzione $f(x)$ generica e valutarne il valor medio:

$$\left\langle \frac{df(x(t))}{dt} \right\rangle = \frac{1}{dt} \langle df \rangle = \frac{1}{dt} \left\langle \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} [dx]^2 \right\rangle = \frac{1}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial x} a dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} b^2 dt \right) = a \frac{\partial f}{\partial x} + b^2 \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

Per $\frac{\partial f}{\partial x}$ si intende chiaramente $\left\langle \frac{\partial f}{\partial x} \right\rangle$, si è usato che l'incremento di x è scorrelato dal valore di x in cui si calcola la derivata (cosa vera per SDE alla Ito, questo procedimento non vale, ad esempio, per SDE alla stratonovich).

In generale x avrà una distribuzione di variabile casuale $p(x, t)$, quindi

$$\left\langle a \frac{\partial f}{\partial x} + b^2 \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right\rangle = \int \left(a \frac{\partial f}{\partial x} + b^2 \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) p(x, t) dx = \int \left(-f \frac{\partial [ap(x, t)]}{\partial x} + f \frac{1}{2} \frac{\partial^2 [b^2 p(x, t)]}{\partial x^2} \right) dx$$

L'ultimo passaggio è un'integrazione per party, che *corrisponde al valore per la derivata di x dato dall'equazione di Fokker Planck!*

È tutto più chiaro scrivendo

$$\left\langle \frac{df}{dt} \right\rangle = \frac{d}{dt} \left[\int f(x) p(x, t) dx \right] = \int f \partial_t p(x, t) dx$$

e a questo punto si sostituisce p dall'equazione di Fokker-Planck con $a = A$, $b^2 = B$

$$\boxed{dx = a(x, t)dt + b(x, t)dW \iff \partial_t p(x, t) = -\frac{\partial a(x, t)p}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 b(x, t)p}{\partial x^2}} \quad (17)$$

Si sottintende che la variabile x è definita tramite un'integrazione alla Ito, altrimenti la formula di Ito usata nella derivazione non è valida.

13 SDE alla Stratonovich

Si indica con $S \int$ l'integrale alla Stratonovich. In particolare, si valuta un integrale del tipo $S \int G(W(t), t)dW$ con

$$S \int G(W(t), t)dW \equiv \text{ms} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_i G(W(\frac{t_i + t_{i-1}}{2}), t_{i-1})(W(t_i) - W(t_{i-1}))$$

L'equazione integrale da risolvere per Stratonovich è

$$x(t) - x_0 = \int_0^t \alpha(x(t'), t') dt' + S \int_0^t \beta(x, t) dW$$

Suppongo esista un differenziale per x , alla Ito, del tipo

$$dx = a(x, t)dt + b(x, t)dW$$

Ci si vuole ricondurre all'integrale di Ito per il termine dell'equazione integrale

$$S \int_0^t \beta(x, t) dW = \sum_i \beta\left(\frac{x(t_i) + x(t_{i-1})}{2}, t_{i-1}\right) (W(t_i) - W_{t_{i-1}}) = \sum_i \left(\beta(x(t_{i-1}), t_{i-1}) + \frac{1}{2} \frac{\partial \beta}{\partial x} dx \right) (W(t_i) - W_{t_{i-1}}) =$$

Sostituendo il differenziale di x , supposta alla Ito, che quindi è $dx = x(t_i) - x(t_{i-1})$:

$$\sum_i (\beta(x(t_{i-1}), t_{i-1})) (W(t_i) - W_{t_{i-1}}) + \frac{1}{2} \frac{\partial \beta}{\partial x} b [\Delta W_{i-1}]^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial \beta}{\partial x} a \Delta W_{i-1} \Delta t =$$

L'ultimo addendo è trascurabile (è di ordine $dt^{\frac{3}{2}}$), mentre nel penultimo va fatta la sostituzione $[\Delta W]^2 = \Delta t$

$$= \int_0^t \beta(x, t) dW + \int_0^t \frac{1}{2} b \frac{\partial \beta}{\partial x} dt$$

Ora si eguaglia questo differenziale a quello supposto per ito, ottenendo

$$\beta = b \quad a = \alpha + \frac{1}{2} b \frac{\partial \beta}{\partial x}$$

Quindi ci si può ricondurre ad una SDE alla ito con (stavolta chiamo a, b i parametri di entrambe le equazioni differenziali):

$$\boxed{a_{ITO} = a_{STR} + \frac{1}{2} b_{STR} \frac{\partial b_{STR}}{\partial x} \quad b_{ITO} = b_{STR}} \quad (18)$$

Inoltre, nel caso di SDE alla Stratonovich, si possono usare le solite regole del calcolo differenziale per il cambio di variabile, per dimostrarlo basta sostituire nella formula di ito i corrispondenti coefficienti di Stratonovich prima e dopo il cambio di variabile.

13.1 Oscillatore di Kubo

L'equazione differenziale è

$$dz = i\omega z dt + i\sqrt{2\gamma} z dW$$

Interpretata alla Stratonovich, si può integrare direttamente³ con

$$z = \exp(i\omega t + i\sqrt{2\gamma} W(t))$$

Il valor medio di z è

$$\langle z \rangle = z_0 e^{i\omega t} \left\langle \exp(i\sqrt{2\gamma} W(t)) \right\rangle$$

$W(t)$ è gaussiana.

In generale vale, per definizione di funzione caratteristica $\phi_X(s) \equiv \langle e^{iXs} \rangle$:

$$\langle e^X \rangle = \phi_X(-i)$$

Data una variabile gaussiana X a media nulla, si ha:

$$\phi_X(s) = e^{-\frac{s^2 \sigma^2}{2}} \implies \langle e^{\alpha X} \rangle = \exp\left(\alpha^2 \frac{\langle X^2 \rangle}{2}\right)$$

³formalmente sto dividendo per z e facendo un cambio di variabile che mi elimina il differenziale nel tempo, tanto valgono le regole ordinarie del calcolo

Quindi, ricordando la varianza di W :

$$\langle z \rangle = e^{i\omega t - \gamma t} z_0$$

Procedendo in maniera analoga si mostra

$$\langle z(t)z(s) \rangle = \exp[i\omega(t-s) - \gamma(t+s) - 2\gamma s] \quad t > s$$

Più interessante l'andamento del modulo di z : lo calcolo.

Sia $t = \tau + s$, allora, detto $W_2 = W(t) - W(s)$ (indipendente da $z(s)$, quindi media separata)

$$z(t) = z(s)e^{i\omega\tau + i\sqrt{2\gamma}W_2}$$

$$\langle z^*(t)z(s) \rangle = \langle z^*(s)e^{-i\omega\tau - i\sqrt{2\gamma}W_2}z(s) \rangle = \langle |z(s)|^2 \rangle e^{-i\omega\tau - \gamma\tau}$$

$|z(s)|^2$ viene 1! (anche senza dal valor medio, è l'esponenziale di un numero immaginario puro)

$$\langle z^*(t)z(s) \rangle = e^{(i\omega - \gamma)\tau}$$

Quindi la correlazione ha un tempo di decadimento γ

13.2 Equazione di Ornstein-Uhlenbeck (Bis) 7.5.4

$$dx = -kxdt + \sqrt{D}dW$$

Non c'è differenza fra approccio di Ito/Stratonovich, perchè il coefficiente del termine stocastico non dipende da x ; inoltre i coefficienti sono presi in modo tale da coincidere con l'approccio alla Fokker-Planck precedente. La soluzione dell'equazione differenziale (che può considerarsi ordinaria nell'approccio di Stratonovich) è

$$x(t) = x_0 e^{-kt} + \sqrt{D} \int_0^t dW$$

La sua media è

$$\langle x \rangle = \langle x_0 \rangle e^{-kt}$$

La varianza è

$$\langle (x - \langle x_0 \rangle e^{-kt})^2 \rangle = \langle [x_0 - \langle x_0 \rangle] e^{-kt} + \sqrt{D} \int_0^t e^{-kt} dW \rangle = \text{Var}(x_0) e^{-2kt} + D \left\langle \left(\int_0^t e^{-kt} dW \right)^2 \right\rangle$$

(il doppio prodotto si annulla perchè i fattori sono indipendenti e $\langle dW \rangle = 0$)

$$\left\langle \left(\int_0^t e^{-kt} dW \right)^2 \right\rangle = \left\langle \int_0^t \int_0^t ds dr \xi(r) \xi(s) e^{-k(s+t)} \right\rangle = \int_0^t \int_0^t ds dr \delta(r-s) e^{-k(s+t)} = \int_0^t ds e^{-2ks} = \frac{1}{2k} (1 - e^{-2kt})$$

Quindi

$$\text{Var}(x) = \frac{D}{2k} (1 - e^{-2kt}) + \text{Var}(x_0) e^{-2kt}$$

Che torna col risultato ottenuto dall'equazione differenziale iniziale.

Il risultato si può anche generalizzare con $k(t)$; in questo caso basta sostanzialmente sostituire

$$kt \rightarrow \int_0^t k(s) ds$$

e

$$D \rightarrow D(t)$$

14 Distribuzioni stabili

Definizione 14.1 (Distribuzioni stabili). Data $p(x)$ distribuzione di probabilità, si dice che p è stabile se (\star) è il prodotto di convoluzione) dati a_1, b_1, a_2, b_2 , allora $\exists a_b$:

$$a_1 a_2 p(a_1 x + b_1) \star p(a_2 x + b_2) = a p(ax + b)$$

Il significato del prendere $p(ax + b)$ è che si sta stiracchiando e traslando la distribuzione $p(x)$. Quello che si sta dicendo è che la somma della variabile casuale X (magari stiracchiata e traslata, cioè $\frac{1}{a}X - b$) con una copia di sè stessa X_2 indipendente, ma distribuita allo stesso modo, è uguale alla distribuzione di partenza opportunamente riscalata.

Naturalmente ha molto più senso studiare questa proprietà in trasformata, dove i prodotti di convoluzione diventano prodotti semplici.

Esiste infatti il teorema di **Wiener Khintchine** che caratterizza tutte queste distribuzioni:

Teorema 14.1 (Wiener Khintchine). *Una distribuzione è stabile se e solo se la sua caratteristica è della forma:*

$$\ln(\phi_{\alpha, \beta}(k)) = -i\mu k - \gamma|k|^\alpha \left[1 - i\beta \frac{k}{|k|} \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \right]$$

Con i parametri **reali** e che rispettano:

$$\alpha \in]0, 2] \quad |\beta| \leq 1$$

Quella che mi sembra una giustificazione intuitiva (prendere con le pinze! magari prima o poi guardo la dim):

1. chiaramente il primo addendo è la traslazione della media, e non conta
2. γ è collegata con il riscaldamento $k \rightarrow \gamma k$ e chiaramente anche questo non conta
3. In generale la forma del logaritmo di ϕ deve essere stabile per somma. I termini più generali scrivibili sono

$$\sum_i k^{\alpha_i} \beta_i$$

Ma si vede che riscaldando k , i coefficienti β cambiano il loro rapporto relativo, quindi le funzioni possono avere solo un $\beta_i \neq 0$ alla volta.

Quindi le funzioni più generali stabili per somma sono k^α ; tuttavia α in generale è complesso, quindi ci sono due gradi di libertà, ed infatti il teorema precedente ha due gradi di libertà come parametri che definiscono queste funzioni.

La parte non scontata sta nel vedere che queste sono effettivamente distribuzioni di probabilità, e aggiustare il fatto che sto facendo un elevamento a potenza per un numero complesso...

Si può studiare l'andamento asintotico della $p_{\alpha\beta}(x)$ associata, (prendo $\beta = 0$, visto che l'andamento asintotico in modulo è dato da α):

$$p(x) = \int e^{-|k|^\alpha + ikx} \frac{dk}{2\pi} =$$

Espando in Taylor il primo fattore

$$= \int \sum_n \frac{-n}{n!} |k|^{n\alpha} e^{ikx} \frac{dk}{2\pi} = \sum_n \frac{1}{|x|^{n\alpha+1}} \int \frac{-n}{n!} |k|^{n\alpha} e^{ik} \frac{dk}{2\pi} \propto \sum_n a_n \frac{1}{x^{n\alpha+1}}$$

Il termine $n = 0$ dà una delta di dirac $\delta(x)$, che non conta per l'andamento asintotico.

I coefficienti, in realtà, hanno un'espressione esplicita (rispetto alla definizione solita di Γ bisogna fare qualche passaggio per far sparire la i in e^{ik} , cosa che fa saltar fuori il seno):

$$a_n = \frac{(-)^n}{n! \pi} \Gamma(n\alpha + 1) \sin\left(\frac{\pi\alpha n}{2}\right)$$

Asintoticamente, quindi, il termine dominante ha $n = 1$:

$$p(x) \propto \frac{1}{|x|^{\alpha+1}}$$

Questa distribuzione ha momenti finiti solo di ordine δ solo se $\alpha + 1 - \delta > 1$, ovvero $\delta < \alpha$. Dato che, tranne per distribuzioni gaussiane, $\alpha < 2$, queste distribuzioni non hanno varianza finita (ma ce lo si aspetta dal fatto che non vale il limite centrale, visto che queste distribuzioni "non cambiano forma")

Venendo al ruolo di β : si controlla la "simmetria" della funzione. Ad esempio, si vede che il termine in β cambia solo al cambiare del segno di k ; in particolare, sicuramente $\beta = 0$ vuol dire distribuzione simmetrica $p(x)$ (perchè ϕ è reale, modulo traslare la media).

Si potrebbe pensare quindi di generalizzare il teorema del limite centrale, includendo la possibilità che la media di una distribuzione p converga ad una di queste distribuzioni $p_{\alpha\beta}$.

Teorema 14.2. $p(x)$ converge a $p_{\alpha\beta}$ se e solo se il suo andamento asintotico è

$$p(x) \approx \frac{\alpha a^\alpha c_\pm}{|x|^{1+\alpha}}$$

Dove i coefficienti c_\pm cambiano per $x \rightarrow \pm\infty$, e sono determinati da relazioni esplicite con γ, β .

$$\beta = \frac{c_+ - c_-}{c_+ + c_-}$$

Questo ci dice sostanzialmente che se $p(x) \rightarrow \frac{1}{x^{3+\epsilon}}$, allora converge ad una gaussiana. Si chiama **Distribuzione di Levy** il caso di $p_{\alpha=0.5}$.

14.1 SDE generalizzate

In generale, si possono prendere i termini dW nelle SDE che rispettano una distribuzione $L_{\alpha\beta}$ anzichè una gaussiana (in questo modo viene meno l'argomento che W è per forza gaussiana, perchè somma di tante ξ random).

Il problema è che integrare numericamente queste SDE è complicato, non avendo algoritmi efficienti per valutare queste distribuzioni.

Questo problema è risolto dall'algoritmo di Janicki-Weron (non lo scrivo tanto non serve a niente)

15 Weierstrass Random Walk

Disclaimer: Parte superconfusa perchè non l'ho trovata sui libri

Supponiamo di avere un sistema $1D$ di siti adiacenti, e di definire la probabilità di fare un salto lungo l in questo modo ($b \in \mathbb{N}, M \in \mathbb{R}$):

$$\forall j \in \mathbb{N} : p(l = \pm b^j) = \frac{1}{M^j} N$$

Dove N è la costante di rinormalizzazione

$$N^{-1} = 2 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{M^j} = \frac{2}{M-1}$$

Quindi la probabilità di un salto di $\pm b^j$ è

$$\frac{1}{M^j} \frac{M-1}{2M}$$

Il motivo per cui si prendono salti di b^j è che si vuole dare la possibilità di saltare "molto lontano" e da qui dei salti che scalano esponenzialmente.

Un cammino di prova sarà fatto da tanti cluster separati da salti "lunghi" fatti dalla particella, che danno origine ad una struttura autosimilare

Guardando la varianza della distribuzione di probabilità di fare un salto lungo l :

$$\langle l^2 \rangle = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{b^{2j}}{M^j} \frac{M-1}{2M} = \frac{M-1}{M-b^2}$$

Che diverge per $b^2 \geq M$, in questo caso si ha una **invarianza di scala!** (zoomando all'indietro il sistema resta autosimilare).

Guardando la caratteristica

$$G(k) = \left\langle e^{ikb^j} \right\rangle = \frac{M-1}{M} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\cos(kb^j)}{M^j}$$

Questa somma non è fattibile, andrebbe rinvoltita in serie geometrica, ed è quello che si fa con la **trasformata di Mellin D**.

Usando la formula di inversione, rispetto alla funzione $\cos(x)$ (chiamo F la sua trasformata):

$$G(k) = \frac{1}{2\pi i} \sum_j \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{1}{(kb^j)^p M^j} F(p) dp =$$

A questo punto, *pregando di poter scambiare somma e integrale*:

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \sum_j \frac{1}{(Mb^p)^j k^p} F(p) dp = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{b^p M}{b^p M - 1} \frac{F(p)}{k^p} dp =$$

Per inciso, la trasformata del coseno è (il che fa domandare, data la bellezza del risultato, perchè non si usino più spesso queste trasformate):

$$F(p) = \cos\left(\frac{\pi p}{2}\right) \Gamma(p)$$

Rendendo più precisa la *preghiera* di cui sopra, si richiede che $\forall p$ la serie in j sia convergente, il che si traduce nella richiesta

$$Mb^p \geq 1 \implies \Re p \geq -\frac{\ln(M)}{\ln(b)}$$

e questo si traduce in $\Re p \geq -\frac{\ln(M)}{\ln(b)}$, visto che è lei a settare la parte reale di p

Per fare l'integrale, a questo punto, si usano i residui.

In realtà $p(k)$ è detta **funzione di Weierstrass** ed è estremamente irregolare (continua ma mai differenziabile), irregolarità che deriva dal fatto che la probabilità va a 0 lentamente (funzioni che vanno a 0 lentamente hanno variazioni brusche nella trasformata). Un modo per mostrarlo consiste nel notare che

$$G(kb) = MG(k) - (M-1)\cos(k)$$

Essendo una condizione lineare, la soluzione più generale sarà una soluzione particolare più la soluzione generale dell'omogenea associata.

Una soluzione particolare la si può trovare espandendo in serie di k G ed andando ad eguagliare i vari ordini del coseno:

$$G(k) = 1 + \sum_{j=1} \frac{M-1}{M} \frac{(-1)^j (ka)^{2j}}{(2j)! \left(1 - \frac{b^{2j}}{M}\right)}$$

L'omogenea associata è un'equazione di scala! La soluzione è infatti una legge a potenza: scrivendo

$$G(k) = Q(k)S(k) \quad Q(kb) = Q(k) \quad S(k) = \frac{1}{M} S(kb)$$

La soluzione per S è una legge a potenza:

$$S \propto k^\alpha$$

Il che implica

$$\alpha = \log_b(M) = \frac{\ln(M)}{\ln(b)}$$

Mentre una Q generale è una funzione del $\ln(k)$ con periodo $\ln(b)$

$$Q = f\left(\exp\left(2\pi i \frac{\ln(k)}{\ln(b)}\right)\right)$$

dove f è una funzione generica. (ed infatti è la forma che si trova facendo i residui nell'approccio precedente).
Tutta questa storia per notare che esiste un termine

$$k^\alpha$$

Nell'espansione, che domina sulle potenze $2j$ della soluzione particolare (se $\alpha < 2$) per $k \rightarrow 0$.
Quindi, per $k \rightarrow 0$ si trova al leading order (ricordando $G(k=0) = 1$)

$$G \sim 1 - Ck^\alpha \implies \ln(G) \sim -Ck^\alpha$$

e quindi rientra nel gruppo di distribuzioni stabili che si sono viste (con $\beta = 0$).

Per inciso, il caso $\alpha < 2$ equivale alla condizione che si era vista per far divergere la varianza: $b^2 > M$

16 Fokker-Planck (Bis)

Qualche altra considerazione sul caso particolare della Fokker Planck ($W = 0$)

Ansitutto la si può interpretare come un'equazione di Continuità (visto che si sono proibiti salti istantanei, ponendo $W = 0$, intuitivamente torna). Nel nostro caso la "densità di particelle" è una densità di probabilità p :

$$\partial_t p = -\nabla \cdot \mathbf{J} \quad J_i = A_i p - \frac{1}{2} \frac{\partial [B_{ij} p]}{\partial x_j}$$

Le condizioni iniziali temporali prese vanno bene a patto che la variabile casuale \mathbf{x} possa prendere tutti i valori in \mathbb{R}^N , cosa in generale non vera (si può prendere $\mathbf{x} \in \Omega$). Si devono quindi prendere condizioni sul bordo spaziale (=non basta dire si annulla all'infinito!).

L'equazione di continuità offre una semplice catalogazione delle alternative possibili, notando:

$$\partial_t P_{tot} = \int_{\mathbf{x} \in \Omega} \partial_t p d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} \hat{n} \cdot \mathbf{J} dS$$

\hat{n} è la normale esterna alla superficie

Le opzioni disponibili sono quindi le seguenti:

- **Condizioni riflettenti**, che hanno l'interpretazione fisica di "particella che viene fatta rimbalzare indietro" e naturalmente conservano la probabilità totale:

$$\hat{n} \cdot \mathbf{J}|_{\mathbf{x} \in \partial\Omega} = 0$$

- **Condizioni assorbenti**: vogliono dire che una particella che raggiunge il bordo viene automaticamente distrutta (ovvero non si può avere una particella sul bordo).

$$p(\mathbf{x})|_{\mathbf{x} \in \partial\Omega} = 0$$

Per inciso: queste condizioni potrebbero causare una diminuzione di P_{tot} nel tempo, visto che eliminano particelle (non si impone niente su \mathbf{J} , quindi può benissimo essere $\neq 0$)

- **Condizioni periodiche** (ad esempio se si sta su un anello o qualcosa che si richiude su sè stesso): Consistono nel dire che il limite della probabilità e della corrente avvicinandosi al bordo dai due punti coincidenti (ad esempio nel caso di sfera periodica in \mathbf{x} e $-\mathbf{x}$, o per un segmento periodico in a e b i punti coincidenti sono il bordo a e b) sono **uguali**.
- **Condizioni all'infinito**: quelle "solite": corrente e probabilità vanno a 0 per $\mathbf{x} \rightarrow \infty$
- **"Prescribed Boundary"**: è il caso che si ha se $B_{ij} = 0$ al bordo.
Questa condizione automaticamente implica una serie di comportamenti diversi a seconda di A

In generale si richiede nel dominio di esistenza che la corrente sia continua; per questo, anche in caso di discontinuità di A e B attraverso una superficie, si risolve il problema nelle due superfici separatamente, unendo le soluzioni con la condizione che la componente \perp alla superficie di \mathbf{J} sia continua.

Per concentrarsi sul caso di **Prescribed Boundaries**: il comportamento è determinato dal coefficiente di drift A (suppongo il bordo sia $x > 0$): se è $A > 0$ allora le particelle tendono automaticamente ad allontanarsi dal bordo e restano nel sistema; è il caso di **entrance boundary**

il caso $A < 0$ è detto **exit boundary** ed in questo caso il sistema tende a perdere particelle; per trovare soluzioni stazionarie, ad esempio, ci vogliono condizioni riflettenti

Natural Boundary $A=0$ in questo caso non ci sono problemi al bordo, perchè le particelle non tendono nè ad entrare, nè ad uscire.

16.1 Soluzioni stazionarie

Molto spesso non si è interessati a risolvere l'intera equazione di Fokker-Planck, ma si cerca solo la distribuzione di equilibrio del sistema dopo che è rilassato per un tempo molto lungo. Questa in generale può non esistere (ad esempio, in un processo di diffusione, dopo un tempo infinito $p \rightarrow 0$ ovunque). Tuttavia, nel caso di sistemi limitati si hanno spesso distribuzioni interessanti.

L'equazione di Fokker Planck, con $\partial_t p = 0$, è, assumendo anche $\mathbf{J} = 0$ (questa è un'assunzione più forte di probabilità costante, che darebbe semplicemente divergenza nulla):

$$\mathbf{J} = 0$$

$$\frac{\partial B_{ij}}{\partial x_j} p + \frac{\partial p}{\partial x_j} B_{ij} = 2A_i p \implies \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial x_j} = B_{ik}^{-1} \left(-\frac{\partial B_{kj}}{\partial x_j} + 2A_k \right)$$

Ma il primo membro dell'equazione è un gradiente:

$$\frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial x_j} = \frac{\partial \ln(p)}{\partial x_i}$$

Quindi anche il secondo membro è un gradiente (il suo rotore è 0).

In generale, se si ha $f_i = \frac{\partial g}{\partial x_i}$, si può integrare indipendentemente dal percorso (a meno di "buchi" nel dominio):

$$g(x) = \int^x f_i(t) d\gamma_i$$

Qui γ è una curva, cioè un percorso di integrazione. Nel caso di Fokker Planck stazionaria, si può integrare direttamente il gradiente di $\ln(p)$:

$$\ln(p(x)) + c \equiv -\phi(x) = \int^x B_{ik}^{-1} \left(-\frac{\partial B_{kj}}{\partial x_j} + 2A_k \right) \Big|_{z_i} dz_i$$

c è fissata dalla rinormalizzazione.

Il fatto di avere $p = e^{-\phi}$ dà il nome di **condizione potenziale**, perchè ϕ è una sorta di potenziale per le particelle: dove è più intenso, è più difficile trovarle.

16.2 Bilancio dettagliato

La richiesta che si è fatta di $\mathbf{J} = 0$ per avere una p stazionaria, in realtà, equivale a richiedere che p rispetti il principio del **bilancio dettagliato**.

Supponiamo di avere una distribuzione di probabilità $p(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ dove \mathbf{v} è una velocità e \mathbf{r} una posizione.

La "differenza" tra posizioni e velocità sta nel segno meno che quest'ultime prendono per inversione temporale.

In particolare, si usa ϵ_i per indicare il segno sotto inversione temporale della variabile generalizzata x_i .

Ora, il principio del bilancio dettagliato afferma

$$p(x_i, t \rightarrow x'_i, t + \tau) = p(\epsilon_i x'_i, t \rightarrow \epsilon_i x_i, t + \tau)$$

Dove questa p (al primo membro) indica la probabilità di avere il sistema in x_i a t e il sistema in x'_i dopo un tempo τ .

Se una distribuzione di probabilità p_0 rispetta questa proprietà, la sua J media è nulla.

Infatti, la J cambia segno per inversione temporale (basta guardare l'equazione di continuità); ma si può mostrare che, per una quantità x_i con $\epsilon_i = -1$, il valor medio stazionario è 0:

$$p(x_i, t \rightarrow x'_i, t + \tau) = p_s(x)p(x', \tau|x, 0) = p_s(-x')p(-x, \tau|-x', 0)$$

Ma, per $\tau = 0$ si ha $p(x', \tau|x, 0) = \delta(x - x')$, quindi:

$$p_s(x) = p_s(-x) \implies \langle x \rangle = \int xp(x)dx = 0$$

Si può mostrare che ci sono condizioni necessarie e sufficienti perchè p ammetta il bilancio dettagliato; detti i coefficienti di drift irreversibile e reversibile:

$$D_i^{irr}(x_j) = A_i(x_j) - \epsilon_i A_i(\epsilon_j x_j) \quad D_i^{rev} = A_i(1 + \epsilon_i)$$

si devono avere le seguenti relazioni per la distribuzione di equilibrio:

$$D_i^{irr} p_s = \frac{1}{2} \sum_j \frac{\partial B_{ij} p_s}{\partial x_i} \quad \epsilon_i \epsilon_j B_{ij}(\epsilon_k x_k) = B_{ij}(x_k)$$

Mostrare che sono necessarie è semplice, basta verificarle per tempi infinitesimi; più complicato mostrare che sono sufficienti. **NEED FIXING** Ad esempio, per una particella soggetta ad una forza random, una forza di attrito ed un potenziale

$$dx = v dt \quad dv = -V' dt - \beta v dt + \sqrt{k_b T 2\beta} dW$$

Imporre il bilancio dettagliato fa trovare la distribuzione di Boltzmann per le velocità

$$p(v) = \exp\left(-\frac{V + \frac{v^2}{2m}}{k_b T}\right)$$

16.3 Relazioni di Onsager

16.4 Soluzione agli autovalori della FP

Si vuole risolvere l'equazione di Fokker Planck (che è lineare) con un approccio analogo alla MQ, cioè cercandone gli autovalori:

$$-\partial_i [A_i P_\lambda] + \frac{1}{2} \partial_{ij}^2 [B_{ij} P_\lambda] = -\lambda P_\lambda$$

In modo tale da avere $p_\lambda(t) = e^{-\lambda t} p_\lambda$.

Essendo il problema lineare, ci si aspetta un set completo di autofunzioni.

Analogamente si cercano le $Q_{\lambda'}$ che risolvono l'equazione di Fokker Planck reversed 12 (stavolta l'esponenziale deve essere del tipo $e^{-\lambda(t-t')}$, dove $t' < t$ è lo stesso della notazione usata in 12).

$$A_i \partial_i [Q_{\lambda'}] + \frac{1}{2} B_{ij} \partial_{ij}^2 [Q_{\lambda'}] = -\lambda Q_{\lambda'}$$

In realtà, detta $q(x, t)$ una soluzione della FP reversed, $p(x, t)$ una soluzione della FP (con condizioni riflettenti al bordo) e $p_s(x)$ soluzione stazionaria, vale

$$p(x, t) = q(x, t) p_s(x)$$

Infatti, inserendo la p nella FP e sostituendo:

$$\partial_t p = p_s(\mathbf{x}) \partial_t q(\mathbf{x}, t) = -q \partial_i (A_i p_s) - A_i p_s \partial_i q + \frac{1}{2} \partial_{ij}^2 (B_{ij} p_s) q + \partial_i (B_{ij} p_s) \partial_j q + \frac{1}{2} B_{ij} p_s \partial_{ij}^2 q =$$

$$= -A_i p_s \partial_i q + \partial_i (B_{ij} p_s) \partial_j q + \frac{1}{2} B_{ij} p_s \partial_{ij}^2 q$$

(ho levato i pezzi corrispondenti all'equazione di FP soddisfatta da p_s).

Visto che p_s è stazionaria, $\mathbf{J} = \text{const}$; avendo imposto condizioni riflettenti, $\mathbf{J}_s = 0$ ai bordi, allora $\mathbf{J} = 0$

$$A_i p_s - \frac{1}{2} \partial_j (B_{ij} p_s) = 0 \implies \partial_j (B_{ij} p_s) = 2A_i p_s$$

sostituendo nell'equazione precedente, si ha

$$p_s \partial_t q = A_i p_s \partial_i q + \frac{1}{2} B_{ij} p_s \partial_{ij}^2 q$$

ovvero q rispetta la Fokker-Plank reversed (nella variabile t , quindi ha il segno della derivata opposto rispetto all'equazione 12. Prendendo la prima equazione moltiplicata per $Q_{\lambda'}$

$$- \int Q \partial_i [A_i P_\lambda] d\mathbf{x} + \int Q_{\lambda'} \frac{1}{2} \partial_{ij}^2 [B_{ij} P_\lambda] d\mathbf{x} =$$

$$= - \int \lambda Q_{\lambda'} P_\lambda d\mathbf{x} = \int \partial_i (Q) A_i P_\lambda d\mathbf{x} + \int \partial_{ij}^2 [Q_{\lambda'}] \frac{1}{2} B_{ij} P_\lambda d\mathbf{x} = - \int \lambda' Q_{\lambda'} P_\lambda d\mathbf{x} \implies \int (\lambda - \lambda') Q_{\lambda'} P_\lambda d\mathbf{x} = 0$$

Il che vuol dire che le Q_λ e le P_λ sono un insieme "biortogonale". (supponiamo anche siano normalizzate, quindi $\int P_\lambda Q_{\lambda'} d\mathbf{x} = \delta_{\lambda\lambda'}$)

L'integrazione per parti è lecita sono nel caso in cui si hanno le corrette condizioni al bordo; in particolare, si devono avere condizioni al bordo **riflettenti** per P_λ .

I pezzi da integrare sul bordo sono questi tre

$$\int_{\partial\Omega} \left(A_i Q_{\lambda'} P_\lambda - \frac{1}{2} \partial_j [Q_{\lambda'}] B_{ij} P_\lambda + \frac{1}{2} Q_{\lambda'} \partial_j [P_\lambda B_{ij}] \right) dS_i$$

Il primo e il terzo addendo si cancellano ricordando che sul bordo la corrente di P_λ fa 0, quello centrale si annulla perchè, in generale

$$\partial_j [q] B_{ij} p_s = -\partial_j [p_s] B_{ij} q + \partial_j [q p_s] B_{ij} = -2q A_i p_s + \partial_j [p] B_{ij} = -2q A_i p_s + 2A_i p = 0$$

Dove si è usato ripetutamente il fatto che sul bordo la corrente di p e di p_s si annullano.

Fatto 4. Le condizioni al bordo di q implicate dalla definizione $q p_s = p$ con condizioni assorbenti, discendono dall'ultimo conto fatto, ovvero

$$B_{ij} \partial_j Q = 0$$

Fatto 5. I termini di bordo si cancellano anche prendendo condizioni **assorbenti** sulle p . Vale sempre $q p_s = p$, solo che p_s è la soluzione stazionaria con condizioni riflettenti al bordo (non esistono soluzioni stazionarie con condizioni assorbenti). Di conseguenza, anche q risolve la backward FP con condizioni assorbenti (si annulla al bordo).

Sul bordo, i termini

$$A_i Q_\lambda P_\lambda - \frac{1}{2} \partial_j [Q_{\lambda'}] B_{ij} P_\lambda + \frac{1}{2} Q_{\lambda'} \partial_j [P_\lambda B_{ij}]$$

sono nulli

Ora si può scrivere la soluzione più generale (forward) come combinazione lineare delle P_λ :

$$p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, 0) = \sum_{\lambda} P_\lambda \alpha_\lambda e^{-\lambda t}$$

Dalle relazioni di completezza:

$$p(\mathbf{x}, t=0) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \sum_{\lambda} \alpha_{\lambda} P_{\lambda} \implies \alpha_{\lambda} = \int Q_{\lambda}(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) d\mathbf{x} = Q_{\lambda}(\mathbf{x}_0)$$

Quindi

$$p(\mathbf{x}, t) = p(\mathbf{x}, t|\mathbf{x}_0, 0) = \sum_{\lambda} P_{\lambda}(\mathbf{x}) Q_{\lambda}(\mathbf{x}_0) e^{-\lambda t}$$

Esempio 16.1 (Processo di Wiener 1-D). Studio la diffusione su un segmento $[0, L]$, con $A = 0$, $B = 2b^2$: avere B costante e $A = 0$ mi rende assolutamente identiche Q e P

$$\lambda P_{\lambda} = -b^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \implies P_{\lambda} = K \cos\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{b} x\right) + T \sin\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{b} x\right)$$

Con condizioni assorbenti:

$$p(0, t) = 0 \implies K = 0 \quad p(L, t) = 0 \implies \frac{\lambda_n}{b^2} = \left(\frac{\pi n}{L}\right)^2$$

La soluzione è

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{L} \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) \sin\left(\frac{\pi n x_0}{L}\right) \exp\left(-\left(\frac{\pi n b x}{L}\right)^2 t\right)$$

Un processo che decade esponenzialmente è utile per simulare il rumore, infatti la sua trasformata di Fourier è del tipo

$$S(\omega) \propto \frac{1}{\omega^2 \tau^2 + 1}$$

che è la forma solita del potere spettrale del rumore.

17 Tempo di primo passaggio (MFPT)

Dato un processo di Markov $p(\mathbf{x}, t|\mathbf{x}', 0)$ ed una sottoregione R , si definisce la probabilità di essere in R al tempo t :

$$G(t, \mathbf{x}') = \int_{\mathbf{x} \in R} p(\mathbf{x}, t|\mathbf{x}', 0) d\mathbf{x}$$

Se il processo è invariante per traslazioni temporali:

$$p(\mathbf{x}, t|\mathbf{x}', 0) = p(\mathbf{x}, 0|\mathbf{x}', -t)$$

Quindi $p(\mathbf{x}, t|\mathbf{x}', 0)$ nelle variabili (\mathbf{x}', t) obbedisce alla Fokker Planck reversed 12, dove però si è mandato $t \rightarrow -t$ (basta cambiare il segno della derivata temporale). Se p rispetta quest'equazione, lo stesso è vero anche G (l'integrazione è nell'altra variabile, \mathbf{x}):

$$A_i \partial_i G(\mathbf{x}', t) + \frac{1}{2} B_{ij} \partial_{ij}^2 G(\mathbf{x}', t) = \partial_t G(\mathbf{x}', t) \quad (19)$$

Le condizioni al contorno sono date l'integrazione della delta di dirac (che è la condizione iniziale della p) su R

$$G(t=0, \mathbf{x}) = \chi[\mathbf{x} \in R]$$

Inoltre, **si prendono condizioni al bordo assorbenti** sul bordo di R , in modo tale che una particella, una volta raggiunto il bordo, sia disintegrata: questo è fondamentale, altrimenti si conterebbero particelle che entrano ed escono varie volte da R .

La probabilità di uscire dalla regione R in un tempo superiore a T è data dalla probabilità di essere in R in T , ovvero (assumendo di essere in \mathbf{x} a $t=0$)

$$\text{Prob}(\text{uscire dopo un tempo } T) = G(\mathbf{x}, T)$$

Qual è, invece, la probabilità di uscire dalla regione nell'intervallo di tempo $[t, t + dt]$? È data dalla diminuzione di $G(t, \mathbf{x})$, visto che le particelle che escono in questo intervallo non potranno più uscire in tempi superiori a $t + dt$;

$$d\text{Prob} = -dG = -\frac{\partial G}{\partial t}dt$$

La densità di probabilità è quindi $-\frac{\partial G}{\partial t}$.

È una corretta densità di probabilità nel tempo, infatti:

$$\int_0^\infty -G(t)dt = G(t=0) - G(t=\infty) = \chi[\mathbf{x} \in R]$$

e dato che si prende $\mathbf{x} \in R$ (al tempo iniziale si misura la particella in R , è la premessa!) questa quantità fa 1.

Il **tempo medio di uscita da R** è

$$T(\mathbf{x}) = \langle t \rangle_{\mathbf{x}} = \int -t \frac{\partial G}{\partial t} dt = \int G(t) dt$$

In generale, si possono definire le quantità

$$T^n(\mathbf{x}) = \langle t^n \rangle = \int nt^{n-1}Gdt$$

(l'integrazione per parti assume $G \rightarrow 0$ per $t \rightarrow \infty$ abbastanza velocemente)

Si può scrivere un'equazione differenziale per T integrando nel tempo da $0 \rightarrow \infty$ ambo i membri dell'equazione 19

$$\boxed{A_i \partial_i T + \frac{1}{2} B_{ij} \partial_{ij}^2 T = -1} \quad (20)$$

Le condizioni al contorno (spaziali) consistono nell'imporre un tempo di passaggio nullo sul bordo (la particella è già uscita!)

$$T(\mathbf{x})|_{\mathbf{x} \in \partial R} = 0$$

Esempio 17.1 (caso unidimensionale). Si può risolvere esattamente quest'equazione in 1D perchè diventa un'equazione differenziale ordinaria lineare.

Sia $R = [a, b]$; definito il fattore integrante

$$\phi = \exp\left(\int_a^x \frac{2A(s)}{B(s)} ds\right)$$

Si ottiene

$$\frac{dT'\phi}{dx} = -\frac{2}{B(x)}\phi(x)$$

Che si risolve integrando entrambi i membri in x .

Si può generalizzare questo modello con un bordo ∂R che in parte riflette ed in parte assorbe. In questo modo si cambiano le condizioni al bordo della G : nei punti in cui il bordo assorbe

$$G(\mathbf{x}) = 0$$

Nei punti in cui si riflette (in 1D)⁴ $\frac{\partial G}{\partial x} = 0 \implies \frac{dT}{dx} = 0$

Se integro l'equazione dell'esempio precedente su un segmento $[a, b]$, immaginando di riflettere in a :

$$T'(x)\phi(x) - T'(a)\phi(a) = T'(x)\phi(x) = -\int_a^x \frac{2}{B(s)}\phi(s)ds \implies T(x) = -\int_x^b \frac{1}{\phi(q)} \int_a^q \frac{2}{B(s)}\phi(s)dsdq$$

⁴questo si può vedere ricordando che in 4 si è trovato che, per bordi riflettenti, le condizioni al bordo per la backward fokker plank sono $\partial_x Q = 0$, integrando nella posizione finale su tutto R questa condizione resta valida anche per G . Un modo intuitivo di vederla è che si può immaginare una particella che anzichè andare a sbattere nel bordo in a , entra in un'altra regione uguale a quella precedente ma specchiata (è come vedere la particella rimbalzata all'indietro ma attraverso lo specchio), quindi per parità del problema rispetto ad a , si ha che la derivata spaziale dev'essere nulla

Esempio 17.2 (Potenziale). Come nel caso precedente in 1D, ma stavolta il drift è dovuto ad un potenziale $A = -U'$ e la diffusione ad un coefficiente $B = 2D$ costante.

Sempre in un segmento $[a, b]$, con $a \rightarrow \infty$ riflettente e b assorbente:

$$\phi = \exp\left(-\frac{U(x)}{D}\right) \implies T(x) = \frac{1}{D} \int_x^b e^{\frac{U(q)}{D}} \int_{-\infty}^q e^{-\frac{U(s)}{D}} ds dq$$

Si vuole calcolare $T(x)$ intorno ad x_0 , che prendo come minimo del potenziale, mentre b è un massimo locale: si sta calcolando il tempo medio di uscita da una buca di potenziale a "sinistra" del muro che ha un massimo in b .

Bisogna fare la seguente approssimazione: il fattore nel primo integrale $e^{\frac{U(q)}{D}}$ è grosso solo per $q \approx b$, visto che in b c'è un massimo locale, quindi posso approssimare anche l'altro fattore in $q \int_{-\infty}^q e^{-\frac{U(s)}{D}}$ per $q \approx b$ (questa è una sovrastima per $q \neq b$, ma tanto il peso di quei valori di q è esponenzialmente soppresso)

$$T(x) = \frac{1}{D} \int_x^b e^{\frac{U(q)}{D}} dq \int_{-\infty}^b e^{-\frac{U(s)}{D}} ds$$

Inoltre la soluzione stazionaria dell'**intero sistema** (quindi ignorando momentaneamente le condizioni assorbenti su $[a, b]$ e considerando l'intera retta reale) è la soluzione potenziale 16.1

$$p_s(x) = e^{-\frac{U(x)}{D}}$$

E allora il fattore $\int_{-\infty}^b e^{-\frac{U(s)}{D}} ds$ posso interpretarlo come la probabilità di avere il sistema a sinistra del muro all'equilibrio.

Si possono fare gli integrali col metodo del punto sella, (prendendo b abbastanza a destra dal massimo del potenziale x_{max} per poter prolungare l'integrale su tutta la retta: nota che questa assunzione non cambia l'approssimazione precedente su q , visto che è ancora vero $q \gg x_0$ e il contributo al secondo integrale viene da x_0)

$$T(x_0) = \frac{2\pi}{\sqrt{-U''(x_0)U''(x_{max})}} e^{\frac{U(x_{max})-U(x_0)}{D}}$$

Sostituendo alla diffusione $D = k_b T$ (è la scelta giusta, infatti la distribuzione di equilibrio così diventa la formula di Boltzmann) si ottiene l'**equazione di Arrhenius**.

$$T \propto e^{\frac{\Delta E}{k_b T}}$$

17.1 Metodo delle autofunzioni

Dato che G rispetta l'equazione di Fokker-Planck reversed, ci si possa espandere nel set di soluzioni completo Q_λ . Al tempo $t = 0$ si ha $Q = \chi_{x \in R}$, quindi usando la biortogonalità delle funzioni:

$$G(t=0) = \sum_\lambda \alpha_\lambda Q_\lambda = \chi_{x \in R} \implies \alpha_\lambda = \int_{x \in R} P_\lambda(x) dx$$

La soluzione a tutti i tempi è

$$G(t, x) = \sum_\lambda e^{-\lambda t} Q_\lambda \int_{x' \in R} P_\lambda(x') dx'$$

$$T(x) = \int_0^\infty G(t, x) dt = \sum_\lambda \frac{Q_\lambda(x)}{\lambda} \int_{x' \in R} P_\lambda(x') dx'$$

17.2 Equazioni di Hamilton

non trovata sul libro, non troppo chiara

Suppongo di avere un moto deterministico, con il tempo discretizzato in intervalli ampi dt .

Avere un moto deterministico vuol dire una legge del tipo

$$x_{i+1} = F(x_i)$$

dove x_i è la variabile che mi descrive il moto allo step i -esimo.
 Aggiungere una fluttuazione ξ ad ogni step equivale a dire

$$x_{i+1} = F(x_i) + \xi_i$$

Dove ξ_i è una variabile casuale (gaussiana) a media 0 e varianza dt .

Ora ci si chiede: qual'è la probabilità di finire in x_f partendo da x_0 ?

In generale, dato un percorso $\{x_i\}_{i=0,1,2,\dots}$ la probabilità associata si trova calcolando gli ξ_i che sono gaussiani:

$$P(\{x_i\}) \propto \exp\left(-\sum_i \frac{\xi_i^2}{2dt}\right) = \exp\left(-\sum_i \frac{(F(x_i) - x_{i+1})^2}{2dt}\right)$$

Si vuole trovare il percorso che massimizza questa probabilità mantenendo gli estremi fissati.
 Conviene utilizzare i moltiplicatori di lagrange e reintrodurre le ξ_i . I vincoli sono

$$\xi_i = x_{i+1} - F(x_i)$$

Quindi la quantità da minimizzare è (definisco i moltiplicatori $\frac{\lambda_i}{dt}$ in modo tale che $\frac{1}{dt}$ stia a moltiplicare tutto e quindi sia irrilevante per la minimizzazione)

$$\sum_i \frac{\xi_i^2}{2} - \lambda_i(\xi_i - x_{i+1} + F(x_i))$$

Dove ora si hanno il doppio delle variabili di prima, cioè $\{\xi_i\}$ e $\{x_i\}$. Le derivate rispetto a questi due set di variabili portano alle due equazioni

$$\lambda_i = \lambda_{i+1}F'(x_{i+1}) \quad \xi_i = \lambda_i \implies x_{i+1} - F(x_i) = \lambda_i$$

Per l'evoluzione al limite continuo si ha

$$F(x_i) = x_i + f(x_i)dt$$

Inoltre ridefinisco $\lambda_i \rightarrow \lambda_i dt$; la prima equazione diventa

$$\lambda_{i+1} - \frac{\lambda_i}{1 + f'(x_{i+1})dt} = 0 \implies \lambda_{i+1} - \lambda_i = -\lambda_i f' dt \implies \dot{\lambda} = -\lambda f'(x)$$

Mentre la seconda equazione diventa

$$x_{i+1} - x_i = f(x_i)dt + \lambda_i dt \implies \dot{x} = f(x) + \lambda$$

Queste sono delle equazioni alla Hamilton introducendo

$$\boxed{H(x, \lambda) = f(x)\lambda + \frac{\lambda^2}{2}} \quad (21)$$

e prendendo λ come la variabile coniugata ad x . Risolvendo le equazioni si trova la traiettoria che massimizza la probabilità (che il prof dice proporzionale al MFPT).

18 Processi Jump

Si torna a sistemi discreti, indicizzati da n ; sono permessi salti

$$n \rightarrow n \pm 1$$

con un rispettivi rate $t_{\pm}(n)$.

$$\partial_t P(n, t|n_0, 0) = t_+(n-1)P(n+1, t|n_0, 0) + t_-(n+1)P(n-1, t|n_0, 0) - [t_-(n) + t_+(n)]P(n, t|n_0, 0)$$

Con una $t(n)$ generica non è più così semplice trovare la soluzione generica con la funzione generatrice; tuttavia si trova un'espressione semplice per la distribuzione stazionaria.

Imporre la derivata temporale nulla implica

$$t_+(n-1)P(n+1, t|n_0, 0) + t_-(n+1)P(n-1, t|n_0, 0) - [t_-(n) + t_+(n)]P(n, t|n_0, 0) = J(n+1) - J(n) = 0$$

$$J(n) \equiv t_+(n-1)P(n-1) - t_-(n)P(n)$$

Dove si è definita una sorta di corrente J che permette di scrivere la condizione di stazionarietà in modo analogo a quello di una divergenza di corrente = 0.

Se n è una variabile che indica una quantità positiva $n \in \mathbb{N}$, allora per definizione

$$P(i < 0) = 0 \implies J(i < 0) = 0$$

ma questo implica $J(0) = 0$, ad esempio (andando a prendere $J(0) - J(-1) = 0$). Sommando le equazioni

$$\sum_{i=0}^n J(i) - J(i-1) = 0 \implies J(n) - J(0) = J(n) = 0$$

quindi si ottiene una condizione di corrente nulla per il sistema, che immediatamente fa trovare la distribuzione di probabilità stazionaria in modo induttivo

$$P(n+1) = \frac{t_-(n)}{t_+(n)} P(n)$$

chiaramente c'è bisogno che questa distribuzione sia poi normalizzabile (ad esempio prendere tutti gli t costanti non permette una distribuzione stazionaria, perchè si tenderebbe ad una distribuzione costante spalmata su un numero infinito di n)

18.1 Reazione chimica

Un esempio di processo Jump può essere dato da una reazione chimica: c'è un reservoir di particelle A molto grosso che ha un rate $k_2 a$ costante di produrre una particella B tramite la reazione $A \rightarrow B$.

Viceversa, ogni particella B creata ha un rate k_1 di tornare in A , quindi, detto n il numero di particelle B presenti nel sistema, i rate di transizione sono

$$t_-(n \rightarrow n-1) = k_1 n \quad t_+(n) = \text{const} = k_2 a$$

queste espressioni per i rate sono abbastanza semplici da rendere fattibile la soluzione via funzione generatrice G .

Ricordando la def

$$G(s) = \langle s^n \rangle \quad \partial_t G = k_2 a (s-1) G(s, t) - k_1 (s-1) \partial_s G(s, t)$$

(la tecnica per ottenere questa espressione è la solita: si moltiplica per s^n l'espressione e si somma su n , cercando di riarrangare per ottenere la definizione di $G(s)$)

Questa equazione ⁵ si risolve anzitutto sbarazzandosi del pezzo senza derivate, cosa che si fa con la sostituzione del solito esponenziale

$$G \rightarrow e^{\frac{ak_2}{k_1}s} \Phi(s, t)$$

ottenendo

$$\partial_t \Phi = -k_1 (s-1) \partial_s \Phi(s, t) \implies \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -k_1 \frac{\partial \Phi}{\partial \log(s-1)}$$

che ha la soluzione semplice

$$\Phi = f(k_1 t - \log(s-1))$$

⁵si potrebbe anche risolvere col metodo delle caratteristiche, ma, data la semplicità delle equazioni, ne basta uno più "artigianale"

con f funzione generica, oppure

$$\Phi = f(e^{-k_1 t}(s-1)) \implies G = f(e^{-k_1 t}(s-1))e^{\frac{k_2 a}{k_1} s}$$

con la condizione di normalizzazione $G(1, t) = 1 \implies f(0) = e^{-\frac{k_2 a}{k_1}}$ Ci vogliono le condizioni iniziali: suppongo di avere N particelle all'inizio:

$$P(n, t=0) = \delta_{n,N} \implies G(s) = s^N \implies f(s-1)e^{\frac{k_2 a}{k_1} s} = s^N \implies f(x) = (x+1)^N e^{-\frac{k_2 a}{k_1}(x+1)}$$

$$G(s, t) = (e^{-k_1 t}(s-1) + 1)^N \exp\left\{-\frac{k_2 a}{k_1}(e^{-k_1 t} - 1)(s-1)\right\}$$

Dalla funzione generatrice si tira fuori il valor medio di n con

$$\langle n \rangle = \frac{d}{dn} \langle s^n \rangle|_{s=1}$$

Il valor medio tende in un tempo esponenziale al valore di equilibrio

$$\langle n \rangle = \frac{k_2 a}{k_1}(1 - e^{-k_1 t}) + N e^{-k_1 t}$$

Prendendo una condizione iniziale Poissoniana, con media a_0 , invece si ha

$$G(s, t=0) = e^{a_0(s-1)} \implies G(s, t) = e^{(s-1)\frac{k_2 a}{k_1}} \exp\left\{(s-1)e^{-k_1 t}\left(a_0 - \frac{k_2 a}{k_1}\right)\right\}$$

Quindi **resta una distribuzione Poissoniana**

18.2 Equazione di Fokker Plank da un processo di Jump

Nel limite di salti "molto piccoli" e "frequentissimi", il processo di salto diventa continuo (per avere dei salti molto piccoli basta ingrandire la scala delle lunghezze, in modo da far sembrare infinitesimi i salti).

In questo limite si può costruire un'equazione di Fokker-Planck: la master equation dei salti è la seguente (un caso particolare della Fokker Planck)

$$\partial_t P(\mathbf{x}, t) = \int d\mathbf{x}' [W(\mathbf{x}|\mathbf{x}')P(\mathbf{x}', t) - W(\mathbf{x}'|\mathbf{x})P(\mathbf{x}, t)]$$

ora suppongo di prendere il seguente limite per fare "salti infinitesimi"; data una funzione di salto di partenza $\Phi(y, x)$, dove y è l'ampiezza del salto, voglio riscalarle le lunghezze in modo tale che la varianza del salto sia δ (vuol dire mandare $x \rightarrow \frac{x}{\sqrt{\delta}}$); inoltre immagino che un salto abbia in media un drift $A(x)$ (cioè un valor medio di spostamento) che vada sempre come δ , quindi $x \rightarrow x - A(x)\delta$.

Quindi, immaginando che Φ abbia di per sé drift in media nullo, ovvero (y è l'ampiezza del salto, non la posizione finale)

$$\int dy y \Phi(y, x) = 0$$

si ha che la nuova distribuzione è

$$W'(x'|x) = W(x \rightarrow x') = \Phi\left(\frac{x' - x - A(x)\delta}{\sqrt{\delta}}|x\right) \frac{1}{\delta^{\frac{3}{2}}} \quad (22)$$

Due parole sul fattore $\frac{1}{\sqrt{\delta^3}}$: sicuramente un fattore $\frac{1}{\sqrt{\delta}}$ viene dal cambio di variabile sulle lunghezze (è il solito cambio di variabile in distribuzioni di probabilità). Il restante fattore $\frac{1}{\delta}$ viene dal riscaldamento dei tempi, $t \rightarrow \delta \cdot t$; dato che W è un rate (evento per unità di tempo), questo dà un fattore $\frac{1}{\delta}$.

Supponendo questa forma per la Φ , si ottiene un'equazione di Fokker Planck espandendo nel limite $\delta \rightarrow 0$ (il procedimento è analogo a quello per ottenere l'equazione differenziale di Chapman-Kolmogorov). Questo

pone un vincolo però sui momenti della probabilità di salto W : detto $\mu = \int dy W(y, x)$ il rate di salto "vecchio", cioè senza riscaldamento, e W' il nuovo rate di salto:

$$\int W'(y|x) dy = \frac{\mu}{\delta}$$

6

$$\int (y - x) W'(y|x) dy = A(x) \mu = \alpha_1$$

Detto $\alpha_2 = \int dy y^2 \Phi(y, x) dy$:

$$\int dy y^2 \Phi(y, x) dy = \int (y - x - \delta A(x))^2 W'(y|x) dy \approx \int (y - x)^2 W'(y|x) dy = \alpha_2 = \text{const}$$

L'equazione di FP emergente (nelle variabili riscalate) è

$$\partial_t p = -\partial_x (\alpha_1 p) + \frac{1}{2} \partial_x^2 L(\alpha_2 p)$$

Esempio 18.1 (Random Walk). Nel caso di Random Walk discreto, dove cioè, detto R il rate di salto e l la lunghezza di cui si può saltare

$$\Phi(y) = R [\delta(x - l) + \delta(x + l)]$$

la Φ ha supporto compatto, quindi va a 0 abbastanza velocemente; i valori dei momenti del salto sono

$$\alpha_0 = 2R \quad \alpha_1 = 0 \quad \alpha_2 = 2Rl^2$$

Quindi, con un riscaldamento

$$R \rightarrow \frac{1}{\delta} R \quad D = 2l^2 R = \text{const}$$

(che consiste nel prendere $l^2 \rightarrow \delta l^2$) i momenti hanno l'andamento giusto e si ottiene un'equazione di Fokker-Plank

$$\partial_t P = 2Rl^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}$$

Esempio 18.2 (Processo di Poisson). È l'esempio di prima, solo che stavolta i salti sono permessi solo in avanti

$$\alpha_0 = R \quad \alpha_1 = Rl \quad \alpha_2 = Rl^2$$

Se si prendesse la parametrizzazione di prima, si avrebbe

$$\alpha_1 \rightarrow \alpha_1 \frac{1}{\sqrt{\delta}}$$

ovvero il drift tenderebbe ad essere infinito, quindi non è possibile avere una Fokker Planck da questo processo.

⁶quest'equazione dice che il rate totale di salto deve divergere, quindi non sembra una buona condizione. In realtà serve che W vada a 0 abbastanza in fretta per $y - x \rightarrow \infty$ (più forte una potenza terza), in modo che

$$\lim_{y-x \rightarrow \infty} (y - x)^3 W(y|x) = 0 = \lim_{\delta \rightarrow 0} (y' - x')^3 \delta^{-\frac{3}{2}} W(y'|x') \delta^{\frac{3}{2}}$$

Nell'ultimo passaggio si è cambiato il limite perchè

$$y = \frac{y'}{\delta^{\frac{3}{2}}}$$

quindi fare il limite di $\delta \rightarrow 0$ con y' fisso è uguale a mandare $y \rightarrow \infty$. Si mostra così che $W'(x'|x)$ è trascurabile per $x' \neq x$

18.3 espansione alla Kramers-Moyal

È un modo per ricavarsi la Fokker Planck dalla master equation, generalizzazione del ragionamento di Einstein 4:

$$\partial_t P(\mathbf{x}, t) = \int d\mathbf{x}' [W(\mathbf{x}|\mathbf{x}')P(\mathbf{x}') - W(\mathbf{x}'|\mathbf{x})P(\mathbf{x})]$$

Supponendo che le probabilità di saltare siano sensibilmente diverse da 0 soltanto per $\mathbf{x}' \approx \mathbf{x}$, e che $W(\mathbf{x}|\mathbf{x}') = t(x - x', x)$ sia la probabilità di fare un salto di ampiezza $x - x' = y$ partendo da x' , si può espandere in Taylor il tutto (nel secondo addendo $y = x' - x$, ma non è importante visto che si integra su y):

$$\partial_t P(\mathbf{x}, t) = \int d\mathbf{y} [t(\mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{y})P(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - t(\mathbf{y}, \mathbf{x})P(\mathbf{x})]$$

$$\partial_t P(\mathbf{x}, t) = \int d\mathbf{y} [t(\mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{y})P(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - t(\mathbf{y}, \mathbf{x})P(\mathbf{x})]$$

essendo $\mathbf{y} \approx 0$ si espande $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ intorno a \mathbf{x} per \mathbf{y} piccolo :

$$t(\mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{y})P(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - t(\mathbf{y}, \mathbf{x})P(\mathbf{x}) \approx \sum_n \frac{(-y)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x^n} [t(\mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{y})P(\mathbf{x} - \mathbf{y})]$$

Fermando l'espansione al second'ordine e portando le derivate in \mathbf{x} fuori dall'integrale si ottiene l'equazione di Fokker-Planck:

siano $\alpha_{ni_1, i_2, \dots} = \int d\mathbf{y} y_{i_1} y_{i_2} \dots y_{i_n} t(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ i "momenti della distribuzione di salto" (usati anche prima)

$$\partial_t P = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} [\alpha_1(\mathbf{x})P(\mathbf{x})] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}_i \partial \mathbf{x}_j} [\alpha_{2ij}(\mathbf{x})P(\mathbf{x})]$$

Il punto critico di questa dimostrazione è: perchè bisogna fermarsi al second'ordine? non si è fatta nessun limite su cosa è "piccolo" (ad esempio la forma della t può essere tale per cui il momento secondo è grande quanto il momento terzo, ecc..)

Il contributo di Moyal è stato nel dare dei vincoli ai momenti perchè quest'espansione sia valida, che si traducono nelle condizioni riportate prima, sostanzialmente (i momenti sono proporzionali, usando la forma della Φ 22, a $\delta^{\frac{n}{2}-1}$, ma il momento di ordine 0 ha supporto in un intervallo di ampiezza δ , anche se in questo intervallo diverge, i momenti di ordine superiore a 2 vanno a 0).

18.4 Espansione di Van Kampfen

Ancora un'altro tipo di espansione per passare alla Fokker Planck da una master equation.

Il caso in cui la Fokker Planck fallisce nelle espansioni precedenti è quando il salto assume valori discreti, diventando dell'ordine della varianza (processo di Poisson).

Si immagina di avere un sistema descritto da una variabile casuale estensiva a , immerso in un volume Ω molto grande.

In questo caso, la variabile rilevante del sistema è $\frac{a}{\Omega}$, ovvero la "concentrazione" intensiva.

Invece l'ampiezza di probabilità del salto per unità di volume la si deve lasciare estensiva, perchè localmente (cioè per volume unitario) i salti restano discreti, anche se la grandezza totale del sistema è grossa $\Omega \rightarrow \infty$. Il rate di salto "totale" sarà dato dal rate "locale" (che localmente vede solo la concentrazione media) per il volume del sistema⁷.

$$W = \Omega \psi\left(\frac{a}{\Omega}, \Delta a\right)$$

Per espandere in potenze si cambia variabile

$$a = \phi(t)\Omega + \Omega^{0.5}z$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{a=const} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial t} \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial t} - \Omega^{0.5} \phi'(t) \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial a} \right|_{t=const} = \frac{\partial}{\partial z} \Omega^{0.5}$$

⁷per rendere questo discorso intuitivo guarda l'esempio successivo

Ora si usano i momenti di $W(\Delta a, \frac{a}{\Omega}, \Omega)$, chiamati sempre $\alpha_i = \int W(\Delta a, \frac{a}{\Omega})(\Delta a)^i d(\Delta a)$, l'espansione è sempre fatta in a , però poi cambio variabile $(a, t) \rightarrow (z, t)$: n derivate in a portano un fattore $\Omega^{-\frac{n}{2}}$ quando passo a z

$$\partial_t P - \Omega^{0.5} \phi'(t) \frac{\partial P}{\partial z} = \sum_n \Omega^{1-\frac{n}{2}} \left(-\frac{\partial}{\partial z} \right)^n [P \alpha_n(\phi(t) + \Omega^{-0.5} z)]$$

Ora espando in potenze di $\Omega^{-0.5}$, voglio solo ordini 0 in Ω o superiori (questo si riduce a prendere $n = 1, 2$)

$$\partial_t P - \Omega^{0.5} \phi'(t) \frac{\partial P}{\partial z} = -\Omega^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial P}{\partial z} \alpha_1(\phi(t)) - \frac{\partial}{\partial z} [z \alpha_1'(\phi(t)) P] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} [\alpha(\phi(t)) P]$$

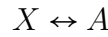
E qui c'è una cancellazione prendendo

$$\phi'(t) = \alpha_1(\phi(t))$$

Ottenendo la solita Fokker-Plank

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z} [z \alpha_1'(\phi(t)) P] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} [\alpha(\phi(t)) P]$$

Esempio 18.3. Riprendendo l'esempio 18.1, con la reazione chimica



si hanno le concentrazioni $x_0 = \frac{x}{V}$ e $a_0 = \frac{a}{V}$.

Questo rientra proprio nelle ipotesi di Van Kampfen, perchè il rate di salto per unità di volume ora è proporzionale alle concentrazioni di X e A , mentre l'ampiezza del salto è discreta e dipende da Δx .

$$\frac{W(x_0, \Delta x)}{V} = k_1 x_0 \delta_{\Delta x, -1} + k_2 a_0 \delta_{\Delta x, 1}$$

È immediato calcolarsi i momenti del rate di salto $\alpha_{1,2}$, fissate le concentrazioni:

$$\alpha_1(x) = \sum_{\Delta x} \Delta x W(x + \Delta x, x) = k_2 a - k_1 x \quad \alpha_2(x_0) = \sum_{\Delta x} (\Delta x)^2 W(x + \Delta x, x) = k_2 a + k_1 x$$

Ora risolvo l'equazione per la ϕ

$$\phi' = \alpha_1(\phi) = k_2 a - k_1 \phi \implies \phi(t) \implies \phi = \frac{k_2}{k_1} a + A \exp(-k_1 t)$$

Da cui si ottiene la Fokker Planck per questo processo:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z} [-k_1 z P] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} [k_2 a P + P k_2 a + A \exp(-k_1 t) P] = \frac{\partial}{\partial z} [k_1 z P] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} [2 P k_2 a + A \exp(-k_1 t) P]$$

Questa è un'equazione del tipo Ornstein-Uhlenbeck, se non fosse che il termine diffusivo è time dependent, e si può risolvere passando in trasformata e usando il metodo delle caratteristiche, in modo analogo a quanto fatto in 7.5.4. Tuttavia, nel limite $t \rightarrow \infty$, l'equazione diventa time-independent e si possono usare i risultati in 7.5.4:

$$\langle z \rangle \rightarrow 0 \quad \text{Var}(z) \rightarrow \frac{2k_2 a_0}{k_1}$$

Parte II

Chaos

Un sistema Hamiltoniano ha le sue coordinate descritte dalle equazioni canoniche:

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}$$

$$\dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}$$

Ad esempio, per un oscillatore 1-D,

$$H = \frac{m}{2}\omega^2 x^2 + \frac{1}{2m}p^2$$

Le "linee di flusso" (tangenti in ogni punto al vettore (dx, dp) nello spazio delle fasi) sono tante ellissi corrispondenti ai punti di energia costante 2.

Considero un pendolo 1-D con $m = 1$:

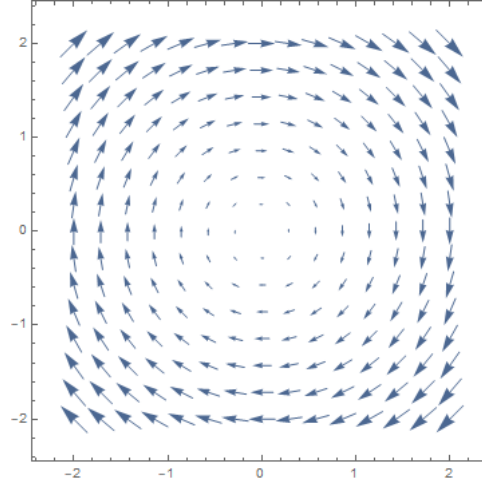


Figura 2: x è sulle ascisse e p sulle ordinate, le frecce hanno per componenti \dot{x} e \dot{p}

$$H = \frac{p^2}{2} - g \cos(x)$$

Da cui le linee di flusso sono date dalla curva parametrica $\gamma = \frac{1}{dt}(dx, dp) = (\dot{x}, \dot{p})$:

$$\dot{x} = p$$

$$\dot{p} = -g \sin(x)$$

Si vede che i vari punti di minimo (di H) sono $x = 2k\pi$, $p = 0$, attorno a cui le linee di flusso sembrano

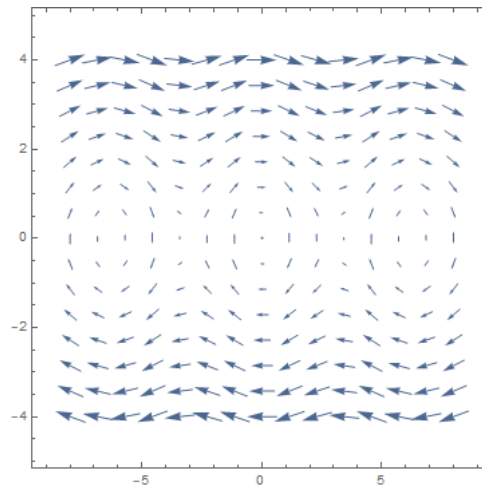


Figura 3: Linee di Flusso per pendolo semplice

quasi quelle di un oscillatore armonico. I punti di minimo sono caratterizzati da $\dot{x} = \dot{p} = 0$, visto che tutte le componenti del gradiente di H si annullano in quel punto.

19 Espansione attorno al minimo

Si vuole studiare il comportamento del sistema attorno ai punti di minimo, espandendo in Taylor e linearizzando.

Suppongo $\dot{x} = f_{(x,p)}$ e $\dot{p} = g_{(x,p)}$ e che queste funzioni si annullino entrambe in x_0, p_0

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{p} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \partial_x f & \partial_p f \\ \partial_x g & \partial_p g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ p - p_0 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta p \end{pmatrix}$$

Supponendo di diagonalizzare H , e detti $\lambda_{1,2}$ i suoi autovalori, si individuano vari casi:

1. $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq 0$ punto di stabilità, i due modi normali decadono esponenzialmente (si hanno delle equazioni del tipo $\delta \dot{z} = \lambda \delta z$)
2. $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq 0$ punto instabile, tutti i vettori appena fuori dal minimo scappano via
3. Nel caso di autovalori complessi si creano spirali:

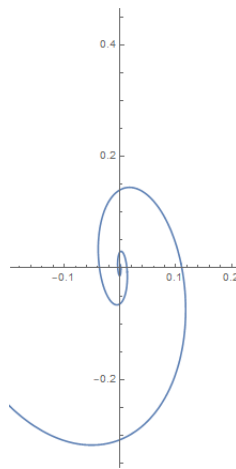


Figura 4: esempio di spirale stabile

$\lambda_1 = \alpha + i\beta$ e $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, con $\alpha < 0$.

Questi due modi normali ruotano in senso opposto attorno al punto e ci cadono esponenzialmente dentro (**spirale stabile**)

4. Nel caso precedente, ma con $\alpha = 0$ si hanno delle rotazioni attorno al punto detto **ellittico** senza mai caderci dentro (è il caso del pendolo semplice senza attrito o dell'oscillatore armonico)
5. Analogamente ci possono essere **spirali instabili** con $\alpha > 0$

Sono dette **mooncline** sono dette le rette che hanno $\dot{p} = 0$ o $\dot{x} = 0$.

Esempio 19.1 (pendolo con attrito). Sia $m = 1$; le equazioni per il pendolo con attrito sono:

$$\dot{x} = p \quad \text{e} \quad \dot{p} = -\frac{g}{l} \sin(x) - \gamma p$$

Quindi le mooncline sono

$$p = 0 \quad \text{e} \quad p = -\frac{g}{l\gamma} \sin(x)$$

Queste traiettorie sono importanti perchè (ad esempio quella con $\dot{p} = 0$) separano le due regioni con il segno di \dot{p} positivo o negativo, e quindi la direzione di spostamento di p .

Analizzando la dinamica di un pendolo, si ha che, ad esempio per alte p iniziali, il decadimento dell'energia (e delle p) è esponenziale, e dovuto al termine dominante γp , per la posizione invece

$$x = \int p dt \propto \frac{1}{\gamma} e^{-\gamma t}$$

Quindi l'andamento a grandi p nello spazio delle fasi sarà una retta di pendenza γ (visto che il rapporto fra p e x non dipende dal tempo in questa approssimazione).

Dal grafico 5 si vede chiaramente cosa succede quando il sistema (in blu) entra dentro una mooncline con $p = 0$ (in rosso): il segno di \dot{p} cambia ed infatti la p risale, per poi ricominciare a scendere non appena il sistema esce dalla regione $\dot{p} \geq 0$, intersecando, cioè, un'altra volta la mooncline.

Quando viene dissipata abbastanza energia, si riesce ad avere $p = 0$ (la traiettoria interseca l'asse delle x), ed il sistema interseca l'altra mooncline, con $\dot{x} = 0$.

Attraversando questa regione, la componente x inverte il moto, cioè il pendolo inizia a girare su se' stesso e il moto tende ad una spirale stabile, come si può di nuovo vedere in figura 5

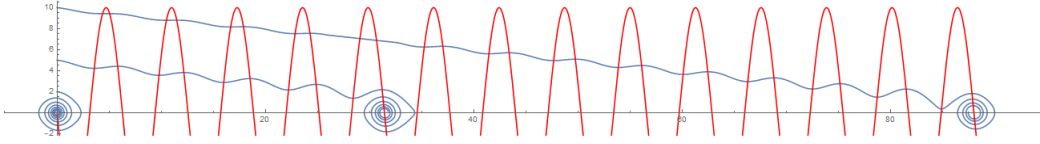


Figura 5: Grafico ottenuto per diversi valori di p iniziali, ovvero $p = 10, 5, 2$, $\gamma = 0.1$ e tutti gli altri parametri pari a 1. In rosso si può vedere disegnata la mooncline (è un seno). Notare che quando il sistema è dentro la mooncline, la p sale, quando è fuori, la p scende; non appena il sistema tocca l'asse delle x resta intrappolato

Esempio 19.2 (equazioni di Lotka-Volterra). Guardo i punti di stabilità delle equazioni di Lotka-Volterra 3:

$$\frac{dx}{dt} = x - xy \quad \frac{dy}{dt} = xy - y$$

Ce ne sono almeno 2, $(0, 0)$ e $(1, 1)$ Espandendo intorno allo 0, si trova la matrice di stabilità

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Quindi si ha un punto di sella: il sistema fugge nella direzione dell'autovettore \hat{x} , che ha autovalore ≥ 0 . Espandendo intorno all'altro minimo in $(1, 1)$:

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Che ha autovalori $\pm i$ (se la si moltiplica per i si ottiene una matrice di Pauli σ_y), quindi si ha un punto ellittico (spirale stabile).

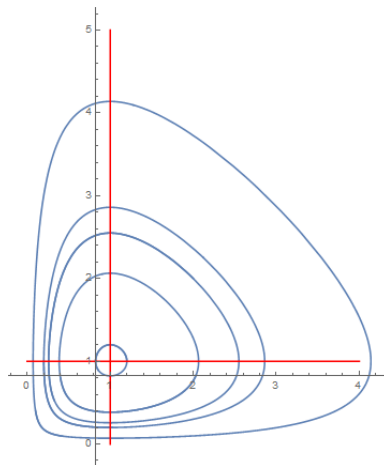


Figura 6: Equazioni di Lotka-Volterra, con le mooncline in rosso e vari valori del parametro iniziale

19.1 Cerchio Limite

L'analisi precedente è valida fino al prim'ordine, il che pone limiti ben precisi.

Specialmente il caso di punto ellittico, dove le traiettorie dovrebbero essere stabili, è molto soggetto, su lunghi tempi, all'influenza degli altri ordini perturbativi (mentre invece, stando sufficientemente vicini al punto, i punti stabili e instabili restano tali anche in presenza di altri ordini perturbativi, essendo definiti da una disuguaglianza, quindi con un certo "margine di errore").

Ad esempio, il sistema :

$$\dot{x} = x + y - x(x^2 + y^2) \quad (23)$$

$$\dot{y} = -x + y - y(x^2 + y^2) \quad (24)$$

ha un comportamento che non si può estrarre da un'analisi perturbativa: la matrice di stabilità per questo sistema intorno all'origine è

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

cioè ha autovalori $1 \pm i$, quindi l'origine è un punto instabile.

Passando a variabili polari si riesce a risolvere il sistema in modo esatto:

$$\begin{aligned} \rho^2 = x^2 + y^2 &\implies \dot{\rho}\rho = x^2 + yx - x^2(x^2 + y^2) - xy + y^2 - y^2(x^2 + y^2) = \\ &= x^2 + y^2 - x^4 - y^2 - 2x^2y^2 = \rho^2 - \rho^4 \implies \frac{d\rho^2}{dt} = 2\rho^2 - 2\rho^4 \end{aligned}$$

Questa equazione si può integrare:

$$\int \frac{d\rho^2}{\rho^2(1 - \rho^2)} = \int d\rho^2 \left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{1 - \rho^2} \right) = 2(t - t_0)$$

$$\ln\left(\frac{\rho^2}{1 - \rho^2}\right) = 2(t - t_0)$$

$$\rho^2 = \frac{e^{2(t-t_0)}}{1 + e^{2(t-t_0)}}$$

Il che vuol dire che il sistema si avvicina esponenzialmente al cerchio di raggio 1 centrato nell'origine: si ha un **cerchio limite**. Il fatto che la regione di equilibrio non sia stavolta un punto, ma un intero cerchio, non è chiaramente ottenibile da un'espansione in Taylor

20 Trasformazioni Canoniche

Supponiamo di avere un sistema Hamiltoniano n-dimensionale, che obbedisce cioè alle equazioni di Hamilton:

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}$$

$$\dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}$$

Che possono essere riscritte utilizzando un'unico vettore 2n-dimensionale:

$$\begin{cases} z_i = x_i & i \leq n \\ z_i = p_i & i > n \end{cases}$$

Introducendo la seguente matrice $n \times n$

$$\zeta = \begin{pmatrix} 0 & \text{Id} \\ -\text{Id} & 0 \end{pmatrix}$$

Le equazioni si riducono a

$$\dot{z}_i = \zeta_{ij} \frac{\partial H}{\partial z_j}$$

Vale inoltre $\zeta^2 = \text{Id}$, quindi, moltiplicando ambo i membri per ζ

$$\zeta_{li} \dot{z}_i = \frac{\partial H}{\partial z_j}$$

Definizione 20.1 (flusso Hamiltoniano). Dato un vettore z_i nello spazio delle fasi, questo si muove nella direzione $J_i = \dot{z}_i$, dove \mathbf{J} è definito come flusso Hamiltoniano.

$$\mathbf{J} = \zeta \nabla_z H(\mathbf{z})$$

In generale, il flusso si può definire per una qualunque funzione scalare delle coordinate:

$$J_A = \zeta \nabla_z A(\mathbf{z})$$

Definizione 20.2 (parentesi di Poisson). Date due funzioni delle coordinate, f e g , si definiscono le parentesi di Poisson:

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} = \frac{\partial f}{\partial z_i} \frac{\partial g}{\partial z_j} \zeta_{ij}$$

Le parentesi di Poisson sono antisimmetriche (lo si vede scambiando gli indici i, j e notando che ζ è antisimmetrica), inoltre l'evoluto temporale di una quantità è:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial z_i} \dot{z}_i = \frac{\partial f}{\partial z_i} \frac{\partial H}{\partial z_j} \zeta_{ij} = \{f, H\}$$

Definizione 20.3 (trasformazioni canoniche). Sono quei cambi di coordinate $z_i \rightarrow Z_i(\mathbf{z})$ che preservano le equazioni di Hamilton, quindi tali che valga ancora:

$$\dot{Z}_i = \zeta_{ij} \frac{\partial H}{\partial Z_j}$$

Sia $J_{lm}^{-1} = \frac{\partial z_l}{\partial Z_m}$ lo Jacobiano della trasformazione di coordinate, se vogliamo che la trasformazione sia canonica deve valere:

$$\dot{Z}_i = \zeta_{ij} \frac{\partial H}{\partial Z_j} = \zeta_{ij} \frac{\partial H}{\partial z_l} \frac{\partial z_l}{\partial Z_j} = \zeta_{ij} J_{lj}^{-1} \zeta_{lm} \dot{z}_m$$

Ma vale anche:

$$\dot{Z}_i = \frac{\partial Z_i}{\partial z_j} \dot{z}_j = J_{ij} \dot{z}_j$$

Da cui si ha l'identità fra matrici:

$$\zeta (J^{-1})^t \zeta = J$$

Detta altrimenti la condizione di canonicità è

$$\boxed{J \zeta J^t = \zeta} \quad (25)$$

Le matrici J che rispettano questa proprietà sono dette matrici **simplettiche**, e formano un gruppo. Facendo il determinante di ambo i membri e notando che $\text{Det}(\zeta) = 1$:

$$\text{Det}(J)^2 = 1$$

In realtà si può dimostrare che vale per matrici simplettiche la condizione più forte

$$\text{Det}(J) = 1$$

Teorema 20.1 (autovalori matrici simplettiche). *Gli autovalori di una matrice simplettica soddisfano la relazione:*

$$\lambda_i = \lambda_j^{-1}$$

5 ovvero dato un qualunque autovalore, anche l'inverso di quell'autovalore è un autovalore

Dimostrazione. Notiamo anzitutto che vale $\zeta = \zeta^{-1}$, quindi la condizione di matrice simplettica diventa:

$$\zeta^{-1} J \zeta = (J^{-1})^t$$

Il membro sinistro è una trasformazione di similitudine su J , significa che lascia il suo spettro invariato; quindi gli autovalori di J sono gli stessi di $\zeta J \zeta = (J^{-1})^t$.

Anche fare la trasposta di una matrice non cambia lo spettro, quindi gli autovalori di J sono gli stessi di J^{-1} e quindi per ogni autovalore λ ci deve essere anche l'autovalore λ^{-1}

□

Fatto 6. questo teorema implica che per ogni autovalore ce n'è un'altro distinto che è il suo reciproco, tranne che nei casi $\lambda = \pm 1$. Si possono eliminare i casi $\lambda = -1$ con trasformazioni di parità, ed infine notare che le trasformazioni di parità permesse cambiano contemporaneamente il segno di x_i e di p_i , quindi hanno autovalori -1 a coppie. (questa non è una dim formale ma dà un'idea del perchè $\det(J) = 1$)

Una implicazione del fatto che le matrici simplettiche hanno determinante unitario è che **preservano il volume dello spazio delle fasi**.

Ovvero, usando la notazione \mathbf{p} e \mathbf{q} per indicare coordinate e impulsi coniugati si ha:

$$\int d^n \mathbf{p} d^n \mathbf{q} = \int d^n \mathbf{P} d^n \mathbf{Q} \det(J) = \int d^n \mathbf{P} d^n \mathbf{Q}$$

Si può dimostrare che le trasformazioni canoniche sono indotte da funzioni generatrici (che possono essere di 4 tipi diversi, a seconda di cosa prendono per argomento), la più usata è la F_2 . Indicando con indici piccoli le vecchie variabili e con quelli grandi le nuove variabili:

$$F_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t) \quad \mathbf{p} = \frac{\partial F_2}{\partial \mathbf{q}} \quad \mathbf{Q} = \frac{\partial F_2}{\partial \mathbf{P}} \quad H'(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) = H(\mathbf{q}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}), \mathbf{p}(\mathbf{Q}, \mathbf{P})) + \frac{\partial F_2}{\partial t}$$

L'identità come cambio di variabili si ottiene ad esempio scegliendo $F_2 = \mathbf{qP}$

Esempio 20.1 (evoluzione temporale). L'evoluzione temporale è una trasformazione canonica; discende dal fatto che le equazioni canoniche sono rispettate a tutti i tempi, quindi se valgono per $\mathbf{z}(t)$, allora varranno per $\mathbf{z}(T+t)$ cioè per le coordinate generalizzate traslate (o evolute) di un tempo T .

Più esplicitamente, basta notare che l'evoluzione temporale per dt è generata da $F_2 = \mathbf{qP} + H(\mathbf{q}, \mathbf{P})dt$.

Esempio 20.2. Dimostriamo che l'evoluzione temporale lascia invariato l'integrale della forma

$$\oint p_i dq_i - H dt$$

uso la notazione per coordinate e momenti unificate $\begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} = \mathbf{z}$. Il mio spazio di integrazione è lo spazio delle fasi "esteso" con anche il tempo t come variabile.

$$\oint p_i dq_i - H dt = \oint \left(\frac{1}{2} p_i dq_i - \frac{1}{2} q_i dp_i \right) - \oint H dt = \oint \frac{1}{2} \zeta_{ij} z_i dz_j - H dt$$

Calcolo la variazione δ sotto traslazione temporale per un tempo δt

$$\delta \oint \frac{1}{2} \zeta_{ij} z_i dz_j - H dt = \delta t \oint \frac{1}{2} \zeta_{ij} \dot{z}_i dz_j + \frac{1}{2} \zeta_{ij} z_i d\delta z_j - \delta t \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

Integro per parti il secondo addendo: (tutti i differenziali totali integrati fanno zero perchè il cammino è chiuso)

$$\oint \zeta_{ij} z_i d\delta z_j = \oint \zeta_{ij} d(z_i \delta z_j) - \oint \zeta_{ij} \delta z_j dz_i = - \oint \zeta_{ij} \delta z_j dz_i = \oint \zeta_{ij} \delta z_i dz_j =$$

Nell'ultimo passaggio si è sfruttata l'antisimmetria di ζ .

$$= \delta t \oint \zeta_{ij} \dot{z}_i dz_j = \delta t \oint \zeta_{ij} \frac{\partial H}{\partial z_l} \zeta_{il} dz_j$$

Ora ritorniamo all'equazione iniziale, ricordo che $\zeta_{il}^2 = \zeta_{ij} \zeta_{jl} = \delta_{il}$:

$$\begin{aligned} \delta \oint \frac{1}{2} \zeta_{ij} z_i dz_j - H dt &= \oint \delta t \zeta_{ij} \dot{z}_i dz_j - \delta t \frac{\partial H}{\partial t} dt = \\ &= \oint \delta t \zeta_{ij} \dot{z}_i dz_j - \delta t \frac{\partial H}{\partial t} dt = \delta t \oint \zeta_{ij} \frac{\partial H}{\partial z_l} \zeta_{il} dz_j - \delta t \frac{\partial H}{\partial t} dt = -\delta t \oint \frac{\partial H}{\partial z_l} \delta_{jl} dz_j - \delta t \frac{\partial H}{\partial t} dt = \\ &= -\delta t \oint \left(\frac{\partial H}{\partial z_j} dz_j + \frac{\partial H}{\partial t} dt \right) = \delta t \oint (dH) = 0 \end{aligned}$$

Quindi si ha che la forma

$$p_i dq_i - H dt$$

rimane costante nel tempo.

21 Equazione di Hamilton-Jacobi

Un cambio di variabili che permette di risolvere l'equazione del moto è ad esempio un cambio di variabile che elimini la dipendenza dell'Hamiltoniana da una variabile, il che corrisponde a dire che il suo impulso coniugato si conserva.

Chiamando $S = F_2$ la funzione generatrice che descrive questo cambio di coordinate e detti α i nuovi momenti coniugati: la nuova Hamiltoniana deve dipendere solo da questi

$$\boxed{H\left(\mathbf{q}, \frac{\partial S(\mathbf{q}, \alpha)}{\partial \mathbf{q}}\right) = H'(\alpha)} \quad (26)$$

Che prende il nome di **Equazione time-independent di Hamilton-Jacobi**.⁸

La solita equazione di Hamilton Jacobi si ottiene imponendo un cambio di variabili dipendente dal tempo che annulli in ogni istante l'Hamiltoniana nelle nuove variabili (questo non si può fare in generale con un cambio di variabili time independent perchè si ha $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = H(\boldsymbol{\beta}_{(\mathbf{q}, \mathbf{p})}, \boldsymbol{\alpha}_{(\mathbf{q}, \mathbf{p})}) \neq 0$)

Imponendo che la nuova hamiltoniana sia nulla:

$$0 = H' = \frac{\partial S}{\partial t} + H\left(\mathbf{q}, \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}\right)$$

Che è l'equazione di Hamilton-Jacobi solita.

Ritornando all'equazione time-independent, supponiamo di voler scrivere

$$S(\mathbf{q}_{(t)}, \boldsymbol{\alpha}_{(t)}) \implies dS = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}} d\mathbf{q}$$

Dove si è usato il fatto che gli α_i non variano nel tempo.

$$dS = \sum_i \frac{\partial S}{\partial q_i} dq_i = \sum_i p_i(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}) dq_i \implies S = \sum_i \int_{t_0}^t p_i(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}) dq_i$$

e l'integrale è fatto sulla traiettoria classica.

$$\boxed{S = \sum_i \int_{t_0}^t p_i dq_i} \quad (27)$$

⁸Il fatto che $H(q, J)$ non dipende da q vuol dire che anche $H(q, (\phi, J), J)$ non dipende da ϕ

21.1 Soluzione di HJ in 1-D

Supponiamo di avere un solo grado di libertà, quindi solo una coordinata e un impulso coniugato.

C'è un grado di libertà nella scelta di $H(\alpha)$ perchè, prendendo come nuovo impulso $\alpha \rightarrow \alpha'(\alpha)$ (che è una trasformazione canonica se cambio consistentemente le coordinate), ho che anche il nuovo impulso è conservato perchè funzione di una quantità costante nel tempo. Quindi posso scegliere $H(\alpha)$ come generica funzione (l'importante è che sia non-nulla).

La scelta più semplice è

$$H(\alpha) = \alpha$$

A questo punto risolvo l'equazione 26; usando l'equazione Hamilton per la nuova coordinata:

$$\dot{\beta} = \frac{\partial H}{\partial \alpha} = 1 \implies \beta(t) = t - t_0$$

Uso l'equazione 27:

$$t - t_0 = \beta = \frac{\partial S}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{t_0}^t p dq$$

Immaginando l'Hamiltoniana della solita forma

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(q) = \alpha \implies p = \sqrt{2m(\alpha - V(q))}$$

Rimettendo tutto insieme:

$$t - t_0 = \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{t_0}^t \sqrt{2m(\alpha - V(q))} dq = \int_{t_0}^t \sqrt{\frac{m}{2(\alpha - V(q))}} dq(t)$$

α è fissata dalle condizioni iniziali (è l'energia): integrando in q ed invertendo si trova $q(t)$.

21.2 Variabili Azione-Angolo

In una dimensione, se il moto è limitato, allora è periodico, perchè esiste almeno un integrale del moto, H , che forza il moto su di una traiettoria. Vorremmo un cambio di variabili tale che la nuova coordinata θ esprima una quantità analoga all'angolo percorso sulla traiettoria chiusa, tale che dopo ogni giro aumenti di 2π e che aumenti linearmente nel tempo ($\frac{\partial H}{\partial I} = \text{const}$ quindi l'impulso coniugato I si deve conservare: $H = H(I)$).

$$2\pi = \oint d\theta$$

Usando la funzione generatrice:

$$\theta = \frac{\partial S(q, I)}{\partial I}$$

$$2\pi = \oint d\theta(q, I) = \oint \frac{\partial \theta}{\partial q} dq + \frac{\partial \theta}{\partial I} dI =$$

Dato che l'impulso coniugato a θ è conservato sulla traiettoria, $dI = 0$

$$= \oint \frac{\partial \theta}{\partial q} dq = \oint \frac{\partial^2 S(q, I)}{\partial q \partial I} dq = \frac{\partial}{\partial I} \oint \frac{\partial \theta(q, I)}{\partial q} dq = \frac{\partial}{\partial I} \oint p(q, I) dq$$

Da cui si ottiene:

$$2\pi = \frac{\partial}{\partial I} \oint p dq \implies$$

$$\boxed{2\pi I = \oint p dq}$$

(28)

Fatto 7. La variabile angolo sembra molto analoga alla coordinata tempo fatta imponendo $H(\alpha) = \alpha$, perchè aumentano entrambe linearmente, il rapporto è, dato un periodo T :

$$\frac{\Delta\alpha}{\Delta\theta} = \frac{T}{2\pi} = \frac{1}{\omega(I)}$$

Il punto è che la frequenza $\omega(I)$ dipende dall'energia, quindi il rapporto fra le due variabili non è costante (se lo fosse sarebbero praticamente la stessa variabile)

Il procedimento per passare alla variabile angolo è fare l'integrale 28 sfruttando l'integrale del moto $H(p, q) = E$:

$$\oint p(E, q) dq$$

Esempio 21.1 (oscillatore armonico). Nel caso dell'oscillatore armonico, con periodo costante ω , si trova che θ non dipende dalle vecchie variabili, mentre vale

$$I = \frac{1}{2\pi} \sqrt{2mE} \oint \sqrt{1 - \frac{m}{2E} \omega^2 q^2} dq$$

Cambio variabile⁹:

$$q = \sqrt{\frac{2E}{m}} \frac{1}{\omega} x \implies I = \frac{E}{\pi\omega} \oint \sqrt{1 - x^2} dx = \frac{E}{\omega\pi} 2 \int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2} dx = \frac{E}{\omega}$$

In sostanza si ha :

$$\begin{aligned} \theta &= \omega t + \delta \\ I &= \frac{E}{\omega} \end{aligned}$$

Volendo esprimere le vecchie variabili in funzione delle nuove:

$$\begin{aligned} q &= \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{2E}{m}} \cos(\theta - \delta) = \sqrt{\frac{2I}{m\omega}} \cos(\theta - \delta) \\ p &= \sqrt{2Em} \sin(\theta - \delta) = \sqrt{2I\omega m} \sin(\theta - \delta) \end{aligned}$$

Definizione 21.1 (Hamiltoniana Separabile). Un'Hamiltoniana del tipo $H(q_1, q_2, p_1, p_2, \dots)$ è detta separabile se vale:

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2, \dots) = H_1(q_1, p_1) + H_2(q_2, p_2) + \dots$$

Ovviamente la nozione di separabilità dipende anche dalla scelta delle variabili

Nel caso in cui un'Hamiltoniana sia separabile in sistemi 1-D, si può fare il cambio di variabile angolo-azione per tutti i sottosistemi.

In generale, un sistema n dimensionale è detto **totalmente integrabile** se esistono n integrali del moto G^l indipendenti (non posso scrivere un integrale del moto come funzione di altri integrali del moto) che sono involuti l'un l'altro, ovvero tali che le loro parentesi di Poisson si annullino:

$$\{G^l, G^m\} = 0$$

Se il sistema ha n vincoli, si muoverà su una varietà n dimensionale (dei $2n$ gradi di libertà iniziali gliene restano solo n).

In particolare, la varietà sarà punto per punto perpendicolare ai gradienti dei vari integrali del moto (fatti nelle coordinate generalizzate); infatti, dato che il vettore \dot{z}_i è per ipotesi tangente alla varietà dove si svolge il moto

$$\dot{z}_i \frac{\partial G^l}{\partial z_i} = \frac{dG^l}{dt} = 0$$

⁹l'integrale lo faccio con un cambio di variabili $x = \sin(t)$, inoltre su un mezzo periodo posso scambiare $\sin^2 \rightarrow \frac{1}{2}$

Siano $\xi_i^l = \zeta_{ij} \frac{\partial G^l}{\partial z_j}$ n vettori indipendenti ricavati dagli integrali del moto (sono indipendenti perchè i gradienti dei vari integrali del moto devono essere indipendenti fra loro per ipotesi).

Allora si ha che tutti i vettori ξ^l giacciono lungo la varietà n -dimensionale. Per dimostrarlo, basta far vedere che sono ortogonali ai gradienti di tutti gli invarianti del moto G^m .

$$\xi_i^l \frac{\partial G^m}{\partial z_i} = \partial_i G^m \partial_j G^l \zeta_{ij} = \{G^m, G^l\} = 0$$

Quindi si ha, punto per punto della varietà su cui si svolge il moto, definito un campo vettoriale con n vettori indipendenti. La varietà deve quindi essere, per il teorema della palla pelosa¹⁰, un toro.

Supponiamo quindi di aver trovato gli n integrali del moto e di averli usati per passare alle variabili azione-angolo θ_i, I_i : si può fare una specie di serie di Fourier delle coordinate iniziali, questo si può fare perchè le vecchie coordinate $q_{i\theta, I}$ sono periodiche nei θ_i con periodo 2π (per definizione di variabili angolo):

$$a_j(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} d\theta_1 \int_0^{2\pi} d\theta_2 \int_0^{2\pi} d\theta_3 \dots q_j e^{-i\mathbf{k}\boldsymbol{\theta}}$$

Dove \mathbf{k} è un vettore di numeri **INTERI**.

Questi sono i coefficienti della serie di Fourier. Vale quindi:

$$q_j = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n} a_j(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\boldsymbol{\theta}}$$

Ma usando questa decomposizione, si può sostituire l'evoluzione nel tempo dei vari θ :

$$\theta_i(t) = \omega_i t + \delta_i$$

Quindi si ottiene

$$q_j(t) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n} a_j(\mathbf{k}) e^{i(k_1 \omega_1 t + k_l \delta_l)} \quad (29)$$

Da questa forma è chiaro che, affinchè il moto sia periodico, deve esistere un t tale che

$$\omega_i t = 2\pi n \quad \forall i$$

Detto in altri termini, i rapporti di tutte le frequenze devono essere razionali, altrimenti il moto sul toro non è periodico

21.3 Teoria Perturbativa

Supponiamo di avere un'Hamiltoniana integrabile H_0 a cui si aggiunge un'altra piccola Hamiltoniana ϵH_1 perturbativamente ($\epsilon \ll 1$). Supponendo di essere passati alle variabili azione angolo, si ha:

$$H = H_0(I) + \epsilon H_1(\theta, I)$$

Vogliamo un cambio di variabili $(\theta, I) \rightarrow (\phi, J)$ che, al prim'ordine, risolva la nuova Hamiltoniana, ovvero $H = H(J) + o(\epsilon)$.

Sia S la funzione generatrice; all'ordine 0 deve essere l'identità:

$$S(\theta, J) = \theta J + \epsilon S_1$$

Ora impongo l'equazione 26 (chiamo $K(J)$ la nuova Hamiltoniana in funzione di solo J per evitare casini, però essendo il cambio di variabili time independent, è proprio la vecchia Hamiltoniana totale $H_0 + \epsilon H_1$ con le nuove variabili):

$$K(J) = H_0 \left(\frac{\partial S(\theta, J)}{\partial \theta} \right) + \epsilon H_1 \left(\theta, \frac{\partial S(\theta, J)}{\partial \theta} \right)$$

¹⁰Detto anche teorema di Poincarè Hopf, dice che se posso costruire n campi vettoriali linearmente indipendenti tangenti ad una varietà n dimensionale, allora questa ha la topologia di un toro

Usando l'espansione in serie di $S = S_0 + \epsilon S_1$:

$$K(J) = H_0(J + \epsilon \frac{\partial S_1}{\partial \theta}) + \epsilon H_1(\theta, \frac{\partial S_0}{\partial \theta})$$

Supponiamo di poter espandere H_0 in serie di ϵ :

$$K(J) = H_0(J) + \epsilon \frac{\partial S_1}{\partial \theta} \frac{\partial H_0}{\partial I} \Big|_{I=J} + \epsilon H_1(\theta, \frac{\partial S}{\partial \theta})$$

Adesso faccio due cose: espando $K(J) = K_0 + \epsilon K_1$ in potenze di ϵ e ricordo che, all'ordine 0 $\dot{\theta} = \omega_0(I) = \frac{\partial H_0}{\partial I}$: inserendo queste due cose, e notando che gli ordini 0 si cancellano ($H_0(I)|_{I=J} = K_0(J)$), rimane, all'ordine ϵ

$$K_1 = \omega_0(J) \frac{\partial S_1}{\partial \theta} + H_1(\theta, J)$$

Ho anche sostituito in H_1 $I = J$, visto che quel pezzo era già al prim'ordine.

Adesso è l'ora del truccaccio, fin'ora si trattava solo di applicare l'equazione 26; infatti abbiamo due funzioni sconosciute K_1 ed S_1 , quindi il problema non è ancora risolvibile. Il truccaccio sta nel fatto che H_1 è periodico in θ . Questo perchè si ha $H_1(q, p)$ ma q e p sono periodiche in θ , quindi anche H_1 lo sarà. Ma se H_1 è periodica, visto che è l'unico dato del problema che abbiamo, tutto il problema deve essere periodico in θ , quindi anche S_1 e K_1 : integro ambi i membri da 0 a 2π

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} K_1(J) d\theta &= 2\pi K_1(J) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial \theta} [\omega_0(J) S_1(\theta, J)] d\theta + \int_0^{2\pi} H_1(\theta, J) d\theta = \\ &= \omega_0(J) S_1(2\pi, J) - \omega_0(J) S_1(0, J) + \int_0^{2\pi} H_1(\theta, J) d\theta = \int_0^{2\pi} H_1(\theta, J) d\theta \end{aligned}$$

Usando la periodicità di S_1 . Da cui

$$\boxed{K_1(J) = \bar{H}_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H_1(\theta, J) d\theta \quad \omega'(J) = \omega_0(J) + \frac{\epsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial H_1(\theta, I=J)}{\partial J} d\theta} \quad (30)$$

Questo permette di chiudere il problema per quadratura, ora risolvo per trovare S_1

$$S_1 = \int \frac{1}{\omega_0(J)} (\bar{H}_1(J) - H_1(\theta, J)) d\theta + \psi(J)$$

Dove ψ è una generica funzione di J .

Visto che le cose sono periodiche, conviene espandere tutto in serie di Fourier:

$$H_1 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k(J) e^{ik\theta}$$

Da cui si ha anzitutto che

$$\bar{H} = A_0$$

Si può scrivere, tenendo conto di questo fatto e dell'integrale in θ

$$S_1(\theta, J) = \frac{1}{\omega_0(J)} \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus 0} \frac{iA_k}{k} e^{ik\theta} + \psi(J)$$

Ora si può ricavare la nuova variabile angolo ϕ

$$\phi = \theta + \frac{\partial S_1(\theta, J)}{\partial J}$$

La componente a $k = 0$ di S_1 , ovvero $\psi(J)$, non fa altro che dare uno sfasamento nel cambio di variabile variabile $\theta \rightarrow \phi$:

$$\delta_\phi = \frac{\partial \psi}{\partial J}$$

Quindi la si può riassorbire nella definizione di ϕ e porre $= 0$.

Esempio 21.2 (oscillatore anarmonico). Supponiamo di avere

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}q^2m\omega^2 + \epsilon\lambda q^4$$

In variabili azione angolo, prende la forma (uso 21.1):

$$H = \omega I + \epsilon\lambda \left(\frac{2I}{m\omega} \right)^2 \sin^4(\theta)$$

Usando il risultato precedente:

$$K_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lambda \left(\frac{2J}{m\omega} \right)^2 \sin^4(\theta) d\theta$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^4(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} \sin^2(\theta)(1 - \cos^2(\theta)) d\theta = \int_0^{2\pi} \sin^2(\theta) - \frac{1}{4} \sin^2(2\theta) d\theta =$$

Usando il fatto che il valor medio del seno quadro è $\frac{1}{2}$:

$$= \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi$$

Da cui

$$K_1 = \frac{3}{8}\lambda \left(\frac{2J}{m\omega} \right)^2$$

Ricordando che K è l'Hamiltoniana nelle nuove variabili:

$$\dot{\phi}(J) = \omega(J) = \frac{\partial K}{\partial J} = \theta + \epsilon \frac{\partial K_1}{\partial J} = \omega + 3\epsilon\lambda \frac{J}{\omega^2}$$

Per esprimere la nuova frequenza in funzione dell'energia bisogna invertire la relazione $K_1(J) = E(J)$ (basta farlo al prim'ordine):

$$E(J) = \omega J + \frac{3}{2}\lambda \left(\frac{J}{m\omega} \right)^2 \approx \omega J + \frac{3}{2}\lambda \left(\frac{E\omega}{m\omega} \right)^2 \implies J(E) = \frac{E}{\omega} - \frac{3\lambda}{2\omega} \left(\frac{E}{m} \right)^2$$

E reinserire tutto nella frequenza per avere $\omega(E)$.

In 1-D è tutto integrabile, quindi questi risultati non sono una novità, è interessante generalizzare il tutto in n dimensioni.

$$H = H_0(\mathbf{I}) + \epsilon H_1(\boldsymbol{\theta} + \mathbf{I})$$

Il termine perturbativo deve essere periodico in ogni componente del vettore $\boldsymbol{\theta}$, quindi si può decomporre in serie di Fourier:

$$H = H_0 + \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n} A_{\mathbf{k}}(\mathbf{J}) e^{i\mathbf{k}\boldsymbol{\theta}}$$

Procedendo come prima (siano ω_{0i} le frequenze all'ordine 0 per le varie componenti di $\boldsymbol{\theta}$):

$$K_1(\mathbf{J}) = \omega_{0i}(\mathbf{J}) \frac{\partial S_1}{\partial \theta_i} + \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n} A_{\mathbf{k}}(\mathbf{J}) e^{i\mathbf{k}\boldsymbol{\theta}}$$

$$K_1(\mathbf{J}) = A_{\mathbf{0}}$$

Scompongo S_1 in fourier:

$$S_1 = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n} g_{\mathbf{k}}(\mathbf{J}) e^{i\mathbf{k}\boldsymbol{\theta}} \implies \frac{\partial S_1}{\partial \theta_i} \omega_{0i} = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n} g_{\mathbf{k}}(\mathbf{J}) i k_i \omega_{0i} e^{i\mathbf{k}\boldsymbol{\theta}}$$

$$\frac{\partial S_1}{\partial \boldsymbol{\theta}} \boldsymbol{\omega}_0 = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n} i \mathbf{k} \boldsymbol{\omega}_0 g_{\mathbf{k}}(\mathbf{J}) e^{i\mathbf{k}\boldsymbol{\theta}}$$

Inserendo tutto nell'equazione con K_1 , si vede che :

$$\sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n} i \mathbf{k} \boldsymbol{\omega}_0 g_{\mathbf{k}}(\mathbf{J}) e^{i\mathbf{k}\boldsymbol{\theta}} + \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n \setminus \mathbf{0}} A_{\mathbf{k}}(\mathbf{J}) e^{i\mathbf{k}\boldsymbol{\theta}} = 0 \implies g_{\mathbf{k}} = -\frac{A_{\mathbf{k}}}{i \mathbf{k} \boldsymbol{\omega}_0}$$

Da cui

$$I_i = J_i + \epsilon \frac{\partial S_1}{\partial \theta_i} = J_i - \epsilon \sum_{k \in \mathbb{Z}^n \setminus \mathbf{0}} k_i \frac{A_k}{\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega}_0}(\mathbf{J}) e^{i\mathbf{k}\boldsymbol{\theta}}$$

Scrivendo tutto in forma vettoriale (l'equazione di prima era scritta a una componente i):

$$\boxed{\mathbf{I} = \mathbf{J} - \epsilon \sum_{k \in \mathbb{Z}^n \setminus \mathbf{0}} \mathbf{k} \frac{A_k(\mathbf{J})}{\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega}_0} e^{i\mathbf{k}\boldsymbol{\theta}}} \quad (31)$$

E inoltre

$$S_1 = - \sum_{k \in \mathbb{Z}^n \setminus \mathbf{0}} \frac{A_k(\mathbf{J})}{i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega}_0} e^{i\mathbf{k}\boldsymbol{\theta}}$$

Ora è importante notare che il denominatore $i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega}_0$ si annulla se le frequenze sono in rapporto commensurabile fra loro (basta che almeno 2 lo siano), il che annulla tutto l'approccio perturbativo, visto che c'è una divergenza. Tuttavia, anche nel caso di frequenze irrazionali (termine che si adotta per dire incommensurabili fra loro), può capitare che esista un \mathbf{k} per cui

$$\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega} \approx 0$$

ovvero che le frequenze siano sì incommensurabili, ma di poco, ed esistono numeri razionali che approssimano "bene" il loro rapporto. In questi casi, il denominatore nella formula 31, pur non annullandosi, può diventare molto piccolo per certi \mathbf{k} , e se per quel \mathbf{k} si ha A_k non abbastanza piccolo per compensare, ci può essere un'esplosione del termine corrispondente, vanificando tutto l'approccio perturbativo.

Come stabilire quanto bene un rapporto può essere approssimato da un numero razionale? Il trucco sta nell'espansione in frazioni continue.

In generale per ogni $\sigma \in \mathbb{R}$ esiste un'espansione del tipo:

$$\sigma = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}}$$

dove la sequenza termina solo per numeri razionali e con $a_n \in \mathbb{N} \setminus 0$.

In particolare la serie per un numero razionale sarà del tipo $[a_0, a_1, \dots, \infty]$, questo perchè l'infinito rende trascurabili tutti i termini successivi nelle frazioni.

Per numeri irrazionali ben approssimati da frazioni, si ha che ad un certo punto nell'espansione comparirà un numero molto grosso, che renderà trascurabili tutti i termini successivi; viceversa un numero con termini nella sua espansione tutti molto piccoli sarà "molto" irrazionale.

Alla peggio, si possono avere tutti i termini uguali ad 1 (0 non va bene, fa esplodere tutto):

$$\phi = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}}$$

in particolare si ha la relazione di ricorrenza

$$\phi = \frac{1}{1 + \phi} \implies \phi + \phi^2 = 1 \implies \phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

questa costante è detta sezione aurea.

Il problema di avere termini esplosivi nell'espansione 31 prende il nome di **problema dei piccoli divisori**

ed è seriamente grave perchè i numeri $\omega_0(\mathbf{J})$, sono arbitrariamente vicini a numeri razionali, al variare del punto \mathbf{J} dell'espansione, quindi l'approccio perturbativo non sembra continuo in \mathbf{J} , cosa che si era assunta all'inizio.

Tuttavia, rendere la serie esplosiva quasi sempre, farebbe concludere che quasi tutti i sistemi sono ergodici (cioè caotici), cosa non vera.

Il problema venne risolto in definitiva dal seguente

Teorema 21.1 (KAM-Kolmogorov, Arnold, Moser). *Dice sostanzialmente che, dato il toro invariante del sistema imperturbato, se le frequenze di questo sono incommensurabili, allora esiste un certo ϵ_0 abbastanza piccolo per cui c'è un nuovo toro invariante "vicino" a quello di partenza (detto in altri termini, che si può fare teoria perturbativa se le frequenze sono incommensurabili). Questo è vero per "quasi tutte" le frequenze incommensurabili, ovvero l'insieme delle frequenze incommensurabili per cui è falso ha misura nulla (queste frequenze non saranno abbastanza irrazionali).*

Inoltre si richiede che l'Hamiltoniana sia analitica nello spazio delle fasi e che il moto imperturbato di H_0 sia non degenerare:

$$\det\left(\frac{\partial\omega_i}{\partial I_j}\right) \neq 0$$

22 Visualizzazione del moto

Quando si ha a che fare con un moto anche solo 2-D, lo spazio delle fasi diventa quadridimensionale, rendendone difficile la visualizzazione. Fortunatamente, esiste una serie di tecniche di rappresentazione utili ad ovviare a questo problema.

Il motivo per cui è utile visualizzare lo spazio delle fasi è che si vede a botta se esiste un qualche integrale del moto, perchè i punti non sono distribuiti a caso ma su delle varietà ben precise.

22.1 Mappa di Poincarè

Supponiamo di essere in 2-D, e che esistano 2 integrali del moto. Date delle condizioni iniziali, il moto si svolgerà in una varietà bidimensionale immersa nello spazio delle fasi e si può scrivere, ad esempio (invertendo le definizioni di $C_{1,2}$, gli integrali del moto):

$$C_{1/2}(q_1, q_2, p_1, p_2) = \text{const} \implies p_1 = p_1(q_1, q_2, C_1, C_2) \quad p_2 = p_2(q_1, q_2, C_1, C_2)$$

La superficie di Poincarè ¹¹ corrisponde a plottare i punti (q_1, p_1) presi a $q_2 = 0$. Se il sistema descritto ammette due integrali del moto, si starà disegnando una curva (l'intersezione della 2-varietà dove si svolge il moto con la 3-superficie $q_2 = 0$):

$$p_1 = f(q_1) = p_1(q_1, 0, C_1, C_2)$$

Se invece non ci fosse il secondo integrale del moto (uno c'è sempre, è l'Hamiltoniana), i punti dovrebbero essere sparsi più o meno nella regione permessa dall'energia.

In ogni caso, anche in assenza di un secondo integrale, dato un punto (q_1, p_1) nella mappa di Poincarè, è definito il punto successivo:

un punto sulla mappa di Poincarè corrisponde univocamente ad un punto nello spazio delle fasi $(q_1, p_1) \rightarrow (q_1, q_2 = 0, p_1, p_2[q_1, q_2 = 0, p_1, C_1])$, dato dall'intersezione della varietà ad $H = E$ costante, con la 3-superficie $q_2 = 0$.

Quindi, dato un punto (q_1, p_1) , lo si mappa nel corrispettivo dello spazio delle fasi, che si fa evolvere nel tempo finchè non interseca di nuovo la 3-superficie $q_2 = 0$: questo determina il punto successivo della mappa di Poincarè.

Uno alla volta, si ricostruiscono tutti i punti sulla mappa di Poincarè, per vedere se si distribuiscono su una curva o no.

¹¹ notare che questa superficie è sfruttabile solo per moti 2-D, è comunque un gran risultato, permette di disegnare in 2-D moti in uno spazio delle fasi quadridimensionale

Esempio 22.1 (Hamiltoniana di Henon e Heiles). Questi due tipi volevano modellizzare il comportamento di una stella in una galassia con un asse di simmetria. La stella ha tre gradi di libertà (le 3 coordinate spaziali) e 2 integrali del moto (l'energia totale e il momento angolare lungo l'asse di simmetria della galassia, ovvero del potenziale medio a cui la stella è sottoposta). Eliminando il grado di libertà del momento angolare, si resta con un sistema 2-D (che modella la velocità lungo l'asse e quella che punta verso l'asse).

Idealmente, per un sistema ergodico, le velocità nelle due direzioni dovrebbero avere uguale dispersione (frase un po' oscura del Tabor), invece si osservava che queste erano in rapporto 1:2. Henon e Heiles scrissero la seguente Hamiltoniana per modellizzare il moto:

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2 + 2q_1^2q_2 - \frac{2}{3}q_2^3)$$

Il plot alla Poincaré di questa Hamiltoniana mostra come, in effetti, pare ci sia un altro integrale del moto per energie abbastanza basse. Aumentando l'energia, questo integrale viene distrutto.

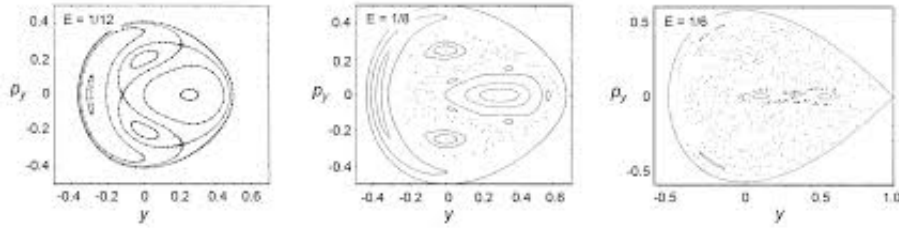


Figura 7: Plot alla Poincaré dell'Hamiltoniana di Henon e Heiles per valori di energia crescenti

La mappa di Poincaré preserva le aree per sistemi 2-dimensionali; questo vuol dire che

$$\oint p_1 dq_1 = \oint p'_1 dq'_1$$

Dove $(q_1, p_1) \rightarrow (q'_1, p'_1)$ i punti vengono mappati nel loro punto successivo (dettato dall'evoluzione temporale di H) nella mappa di Poincaré.

Per dimostrarlo facciamo uso di 20.2; la nostra superficie di interesse ha $q_2 = 0 = \text{cost}$ e supponiamo H indipendente dal tempo: questo vuol dire che

$$\oint H dt = E \oint dt = 0$$

L'esempio 20.2 dice allora che la quantità (ricordo $dq_2 = 0$)

$$\oint_{\partial B} p_1 dq_1 + \oint_{\partial B} p_2 dq_2 = \oint_{\partial B} p_1 dq_1 = \int_B dp_1 dq_1$$

è conservata (nell'ultimo passaggio si è usato il teorema di Gauss) ed è proprio l'area di una superficie nella mappa di Poincaré (presa a $q_2 = 0$)

Esempio 22.2 (sistemi con una risonanza). Consideriamo l'Hamiltoniana perturbata:

$$H = I_1 + I_2 - I_1^2 + I_2^2 + I_1 I_2 (\epsilon \cos(2\theta_1 - 2\theta_2) - 3)$$

Sicuramente si può almeno fare un cambio nelle coordinate

$$\theta_1, \theta_2 \rightarrow (\theta_1 - \theta_2, \theta_2)$$

per eliminare la dipendenza, dentro il coseno, da entrambe le coordinate.

Il cambio delle coordinate si fa con la funzione generatrice $F_2 = \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}(\mathbf{q})$, dove $\mathbf{Q}(\mathbf{q})$ indica le nuove coordinate in funzione delle vecchie. Nel nostro caso passiamo da $(\theta_i, I_i) \rightarrow (\phi, J_i)$.

$$F_2 = J_1(\theta_1 - \theta_2) + J_2(\theta_2)$$

$$I_1 = \frac{\partial F_2}{\partial \theta_1} = J_1 \quad I_2 = \frac{\partial F_2}{\partial \theta_2} = J_2 - J_1 = J_2 - I_1 \implies J_2 = I_1 + I_2 \quad \phi_1 = \theta_1 - \theta_2 \quad \phi_2 = \theta_2$$

Ora sostituiamo e si trova:

$$H = J_2 + J_2(J_2 - 2J_1) + J_1(J_2 - J_1)(\epsilon \cos(2\phi_1) - 3) = J_2 + J_2^2 - 5J_1J_2 + 3J_1^2 + \epsilon J_1(J_2 - J_1) \cos(2\phi_1)$$

Stavolta però J_2 è un integrale del moto e la variabile corrispondente ruota con velocità

$$\omega_2 = 2J_2 + 1 - 5J_1 + \epsilon J_1 \cos(\phi_1)$$

C'è un altro integrale del moto, e cioè H che permette di risolvere per quadratura l'Hamiltoniana restante in ϕ_1, θ_1 .

La cosa da imparare da questo sistema è che, finchè c'è una sola risonanza, la si può eliminare con un cambio di variabili, se ce ne fossero state due, il trucco non avrebbe funzionato: è quello che succede con 22.1 (lì ci sono 4 risonanze).

22.2 Twist Map

Un altro esempio di mappa che preserva le aree sotto evoluzione temporale: supponiamo di avere variabili azioni angolo per un sistema 2D $(\theta_1, I_1, \theta_2, I_2)$, e di mandare un punto del piano (θ_1, I_1) nel punto in cui viene mandato quando θ_2 completa un periodo.

Ovvero, dette $\omega_{1,2}(I_1, I_2)$ le due frequenze del sistema, prendo un punto (θ_1, I_1) e vedo dove viene mandato dopo un periodo di θ_2 ovvero dopo un tempo $t_2 = \frac{2\pi}{\omega_2}$.

$$\theta_1 \xrightarrow{t_2} \theta_1 + \omega_1 t_2 = \theta_1 + 2\pi \frac{\omega_1}{\omega_2}$$

Mentre I_1 resta invariato. Rappresentiamo questi punti in coordinate polari (ad esempio in figura 8), dove θ è l'angolo e I è il raggio e sia $\alpha(I_1, I_2) = \frac{\omega_1}{\omega_2}(I_1, I_2)$; dato che l'energia è costante nel tempo, allora $H(I_1, I_2) = E \implies I_2 = I_2(I_1, E)$, quindi si ha dipendenza solo da I_1 .

Dato che questa mappa è, alla fine, una rotazione di θ_1 (dipendente dal raggio), è chiaro che lascia le aree invariate. È detta twist perchè una retta a $\theta_1 = \theta_0 = \text{const}$ viene "piegata": parametrizzando la retta al variare di I_1

$$(\theta_0, I_1) \rightarrow (\theta_0 + 2\pi\alpha(I_1), I_1)$$

Se $\frac{\partial \alpha}{\partial I_1} > 0$ la retta diventerà una specie di spirale in senso antiorario, e viceversa

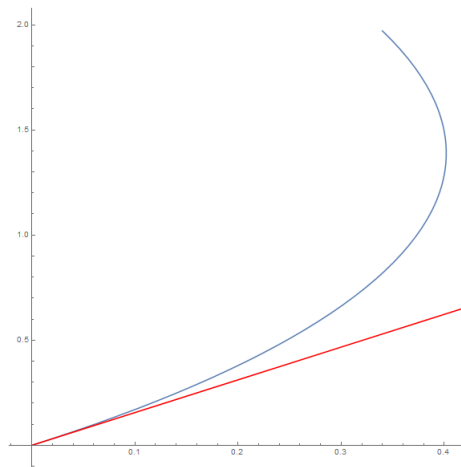


Figura 8: Esempio di Twist map con $\frac{\partial \alpha}{\partial I_1} > 0$

Nel caso di rapporti razionali fra le frequenze, cioè $\alpha \in \mathbb{Q}$, si avrà che un punto sarà mappato, dopo un certo numero di volte, di nuovo in sè stesso, mentre altrimenti ricoprirebbe ergodicamente tutta la circonferenza.

Esempio 22.3 (mappa di Henon). Proviamo a costruire la mappa di Poincaré per un certo sistema di cui non conosciamo l'Hamiltoniana.

Tuttavia, è nota la legge che manda un punto nel piano q_1, p_1 nel successivo secondo la mappa di Poincaré, quindi, prendendo un punto iniziale e reiterando il procedimento, si riescono a ricostruire le traiettorie.

La mappa è la composizione di uno stiramento non lineare (ma che preserva l'area) seguito da una rotazione di un angolo fissato.

Lo stiramento è il seguente:

$$\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -x_i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$$

La rotazione è naturalmente del tipo:

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Le due operazioni lasciano entrambe le aree invariate, perchè i determinanti delle due matrici sono 1.

Ad esempio, su un'ellisse, l'effetto delle due operazioni è riportato nella figura 9. È molto semplice scrivere

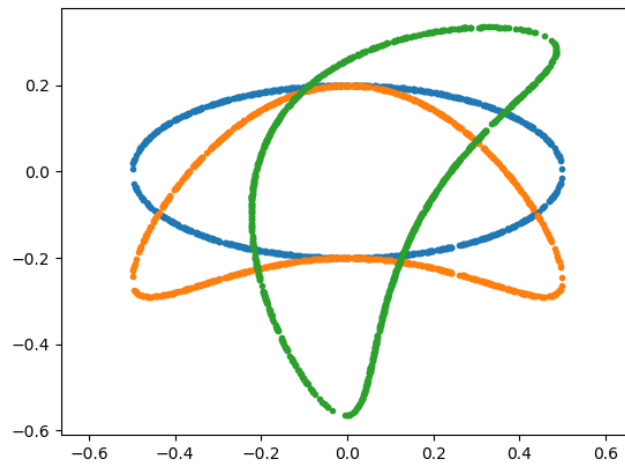


Figura 9: L'ellisse iniziale(blu) viene prima stirata (arancio) e poi ruotata (verde)

un programma che, presi vari punti iniziali, li mandi nel loro successivo varie volte per vedere se si muovono su un toro invariante o in modo ergodico. Un esempio è riportato nella seguente figura 10 (a colori diversi corrispondono condizioni iniziali diverse). Al variare dell'angolo di rotazione tuttavia le figure possono cambiare di molto (il fatto che abbiamo circa 5 tori invarianti a stella che si scambiano fra loro è dovuto ad esempio al fatto che l'angolo α di rotazione è $\approx \frac{2\pi}{5}$, credo.)

Questo sistema è interpretabile come una twist map perturbata: la perturbazione consiste nello stiracchiamento, mentre la rotazione è quella standard delle twist map.

Vorremmo ora trovare un qualche tipo di Hamiltoniana che implichi la mappa di Henon 22.3; ad esempio uno può provare ad integrare le equazioni del moto con intervalli discreti di tempo.

Prendendo un'Hamiltoniana generica della forma $H = \frac{p^2}{2} + V(q)$, le equazioni di Hamilton sono:

$$\dot{p} = -\frac{\partial V}{\partial q} \quad \dot{q} = p$$

Integrando per tempi discreti si ha la mappa:

$$p_{i+1} = p_i - V'(q_i)\Delta t \quad q_{i+1} = q_i + p_i\Delta t$$

Tuttavia, questa non può essere una mappa di Poincaré perchè non preserva le aree, dato che lo Jacobiano della trasformazione è:

$$J = \begin{pmatrix} 1 & \Delta t \\ -V''(q_i)\Delta t & 1 \end{pmatrix} \implies \det(J) = 1 + V''(\Delta t)^2$$

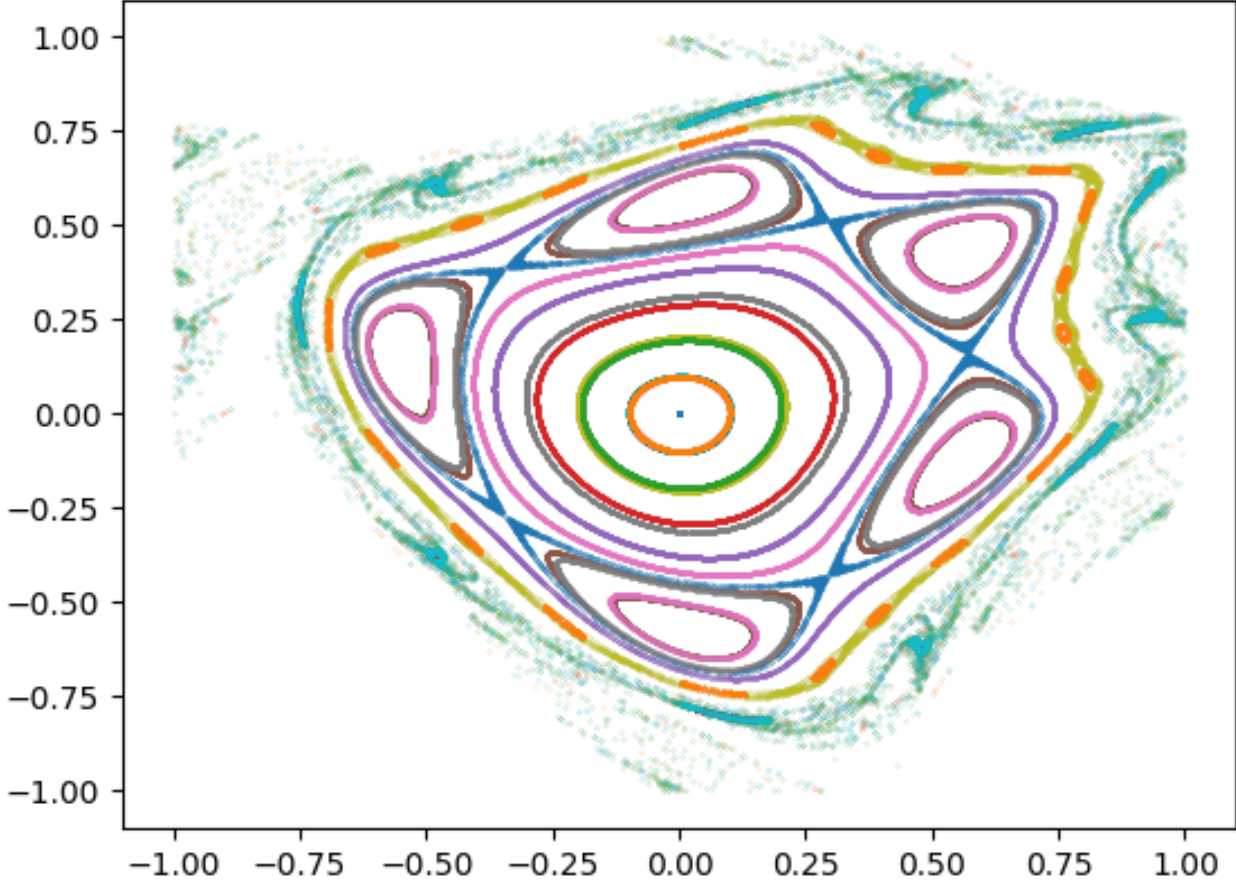


Figura 10: esempio di mappa di Poincaré secondo la legge riportata in precedenza. Si osservano vari tori invarianti, in particolare intorno al centro che è un punto fisso. La periodicità è 2 (i punti sono in $[-1, 1]$) zone di caos e tori invarianti sono alternati nella regione più esterna. L'angolo α è scelto pari a $0.2114 \cdot 2\pi$ (per riprodurre la figura riportata nel Reichl). La zona blu è di caos, ma è circondata da tori invarianti. Anche la zona giallo-verde è caotica ma all'interno presenta dei mini tori invarianti in arancione. Al centro è presente un punto fisso circondato da tori invarianti.

La proprietà di conservazione delle aree ci dice, ad esempio, che le aree dei tori in viola sono tutte uguali (assumendo che un toro sia mappato nel successivo, ma questo è vero se la mappa è continua, come è)

Una scelta migliore consiste invece nel prendere

$$p_{i+1} = p_i - V'(q_{i+1})\Delta t$$

e q_{i+1} come prima.

In questo caso lo Jacobiano viene:

$$p_{i+1} = p_i - V'(q_i + p_i\Delta t) \implies \frac{\partial p_{i+1}}{\partial q_i} = -V''(q_i + p_i\Delta t) \quad \frac{\partial p_{i+1}}{\partial p_i} = 1 - \Delta t V''(q_i + p_i\Delta t)$$

Da cui il nuovo determinante è:

$$J = \begin{pmatrix} 1 & \Delta t \\ -V''(q_{i+1}) & 1 - V''(q_{i+1})\Delta t \end{pmatrix} \implies \det(J) = 1$$

Questa mappa preserva quindi le aree. In realtà lo si poteva vedere dal fatto che questa è una trasformazione canonica con la

$$F_4(q_{i+1}, p_i) = H\Delta t + q_{i+1}p_i$$

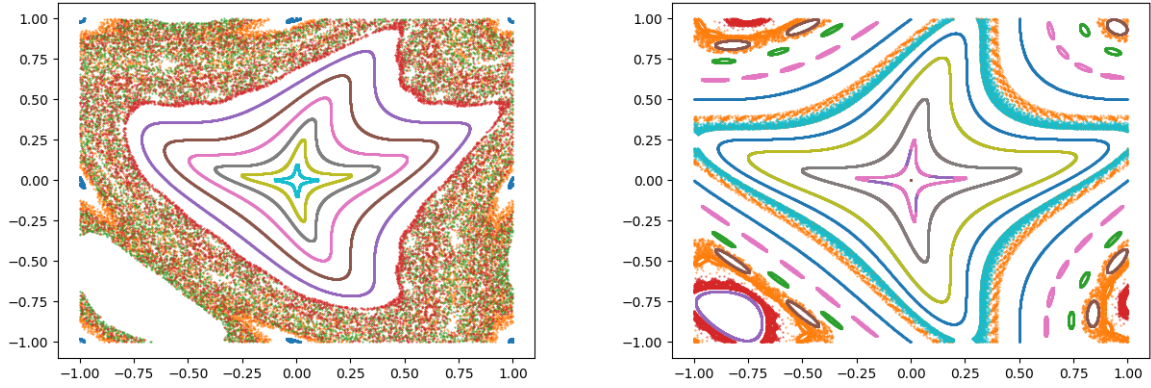


Figura 11: altro esempio di mappa twist per $\alpha = \frac{2\pi}{4}$, nella seconda immagine il termine quadratico della trasformazione è stato soppresso per un fattore $\frac{1}{2}$ il che porta ad aree di caos molto più contenute

Voglio trovare un'Hamiltoniana che implichi questa evoluzione (ad intervalli di tempo fissati). Anzitutto devo fare evolvere le q_i per un tempo $\Delta t = T$, e questo si può fare imponendo che

$$H_{(t,q,p)} = \frac{p^2}{2} \quad 0 < t < T$$

Avendo fatto evolvere la q , posso fare lo stesso con la p : "fisso" le q , imponendo che ora l'Hamiltoniana dipenda solo da q per un altro intervallo Δt :

$$H = V_{(q)} \quad T < t < 2T$$

Se voglio che T corrisponda anche all'intervallo di tempo in cui si ha tutta l'evoluzione (in questo caso mi era venuto $2T$), basta moltiplicare tutta l'Hamiltoniana per 2:

$$H_{(t,q,p)} = \begin{cases} p^2 & 0 < t < \frac{T}{2} \\ 2V_{(q)} & \frac{T}{2} < t < T \end{cases}$$

Fatto 8. Ci sono un mucchio di altre Hamiltoniane che hanno la stessa evoluzione, ad esempio si può scegliere di far evolvere la p per un tempo γT , $\gamma \in [0, 1[$ e q per un tempo $(1 - \gamma)T$, nel qual caso:

$$H_{(t,q,p)} = \begin{cases} \frac{p^2}{2\gamma} & 0 < t < \gamma T \\ \frac{V_{(q)}}{1-\gamma} & (1 - \gamma)T < t < T \end{cases}$$

Una scelta più carina, che permette di scrivere l'Hamiltoniana in modo più compatto, è quella di dare la botta alle p in modo istantaneo (moralmente è il caso precedente facendo tendere γ ad 1). In tal caso la V si trova a moltiplicare una δ di Dirac:

$$H = \frac{p^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} V_{(q)} \delta(t - nT)$$

Dove si è prolungata l'Hamiltoniana in modo periodico per tutti i tempi.

C'è un trucco per eliminare la dipendenza temporale esplicita dell'Hamiltoniana, aggiungendo un nuovo grado di libertà s al sistema:

$$H = \frac{p^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} V_{(q)} \delta(s - nT) + p_s$$

dove p_s è il suo momento coniugato.

Fatto 9. Ci si può chiedere cosa succede se si inverte l'ordine di evoluzione, ovvero si lascia evolvere prima p e dopo q ; nel linguaggio di prima, questo corrisponde alla mappa:

$$p_{i+1} = p_i - V'(q_i)T \quad q_{i+1} = q_i + p_{i+1}T$$

22.2.1 Lagrangiana discreta

Lo schema 9 riemerge anche considerando una Lagrangiana discreta del tipo:

$$\mathcal{L}_i = \frac{(q_i - q_{i-1})^2}{2} - V(q_i)$$

Il principio di minima azione si traduce nel voler minimizzare:

$$S = \sum_n \mathcal{L}_n$$

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = 0 \implies 2q_i - q_{i+1} - q_{i-1} - V'(q_i) = 0 \implies q_{i+1} = 2q_i - q_{i-1} - V'(q_i)$$

Volendo identificare l'impulso con $p_i = q_i - q_{i-1}$, si ha:

$$q_{i+1} = q_i + p_i - V'(q_i) \implies q_{i+1} - q_i = p_{i+1} = p_i - V'(q_i) \implies q_{i+1} = q_i + p_{i+1}$$

Si sono riottenute le equazioni 9 (con $T = 1$).

Il fatto di evolvere prima le p o le q dipende dalla scelta della definizione di $p_i = q_i - q_{i-1}$ oppure $p_i = q_{i+1} - q_i$

22.3 Standard Map

È una mappa che evolve come la 9 con il potenziale

$$V(q) = -\frac{k}{(2\pi)^2} \cos(2\pi q)$$

Il nome standard deriva dal fatto che è molto studiata a livello teorico; una cosa interessante da notare è che alcuni tori invarianti sembrano essere fatti a trattini, in realtà zoomando sui trattini, si scopre che questi sono a loro volta piccoli tori; in realtà queste curve invarianti prendono il nome di **cantori** ed hanno proprietà in comune con il set di Cantor. Un esempio è riportato in figura 12

22.4 Analisi del punto fisso

Supponiamo di avere un punto (q, p) che viene mappato in sè stesso. Come nel caso 19, è molto semplice e fruttuoso studiare l'andamento dei punti intorno al punto fisso. A meno di traslazioni, possiamo considerare il punto fisso in $(0, 0)$, ed espandere in Taylor la mappa nel suo intorno. Sia T la mappa che manda un punto nel suo successivo (in generale non è una mappa lineare);

per punti abbastanza vicini, tuttavia, basta un'espansione al prim'ordine, e la mappa sarà una matrice \mathcal{M} . Questo tipo di mappa linearizzata è detta **mappa tangente**, perchè funziona in un intorno del punto.

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$$

L'equazione agli autovalori diventa:

$$\lambda^2 - (m_{11} + m_{22})\lambda + m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21} = \lambda^2 - \text{Tr}(\mathcal{M})\lambda + 1 = 0$$

Dove si è usato il fatto che $m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21} = \det(\mathcal{M}) = 1$ perchè la mappa è una trasformazione canonica. La matrice avrà sempre 2 autovalori diversi e quindi sarà diagonalizzabile se $\Delta \neq 0 \implies |\text{Tr}(\mathcal{M})| \neq 2$; analizzo prima questo caso:

Il prodotto degli autovalori è 1(=determinante), quindi la matrice diagonale sarà del tipo:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}$$

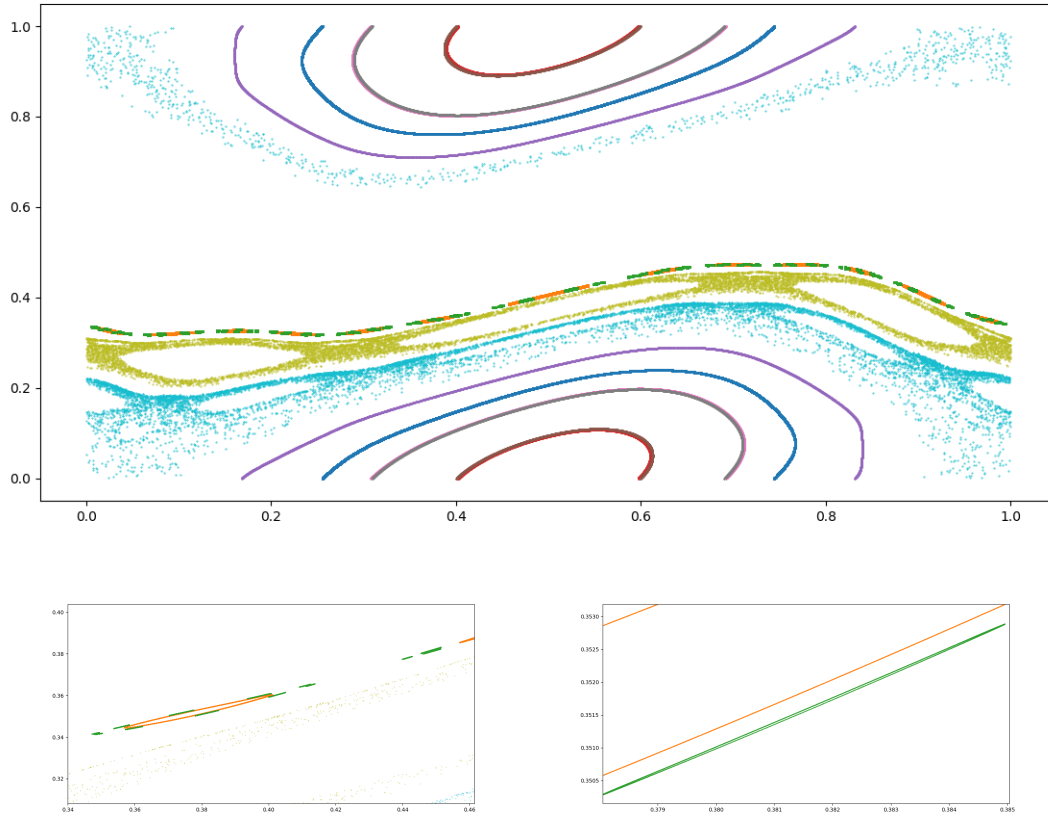


Figura 12: esempio di standard map con $k = 1$, si può notare come le strutture verdi e arancioni al centro siano in realtà ellissi molto schiacciate, come si vede dagli zoom successivi

- Nel caso $|\text{tr}(\mathcal{M})| < 2$ e $|\lambda| = 1$, i punti vicini ruoteranno intorno al punto fisso (punto **ellittico**).
- Nel caso $\text{tr}(\mathcal{M}) > 0$ (autovalori > 0), si ha che i punti in una direzione (quella dell'autovettore corrispondente all'autovalore > 1) si allontanano esponenzialmente, quelli nell'altra decadono esponenzialmente (come $\frac{1}{\lambda^n}$); il punto è detto **iperbolico**.
- Il caso di autovalori < 0 ($\text{tr}(\mathcal{M}) < 0$) è analogo al precedente; l'unica differenza è che c'è simmetria centrale ad ogni iterata a causa del segno meno: $x \rightarrow (-\lambda)^n x$; si parla **punto iperbolico con riflessione**.
- Il caso rimasto è quello di autovalori degeneri; ci sono i casi $\lambda = \pm 1$. In realtà non siamo certi la matrice sia diagonalizzabile; se lo è allora è $\mathcal{M} = \pm \text{Id}$, quindi o i punti intorno sono tutti fissi (al prim'ordine) o vengono ogni volta specchiati dal centro. In generale, si può porre la matrice in forma triangolare superiore ¹² del tipo

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & c \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$$

Supponendo di aver scelto le q, p in modo tale da avere la matrice in questa forma, si ha che questa matrice corrisponde ad una traslazione (più un'eventuale riflessione nel caso di segno meno) di q di una quantità cp , mentre le p restano invariate; si ha quindi un'intera retta invariante (al prim'ordine) parallela all'asse delle q .

Questi punti sono detti **parabolici**

¹²caso particolare della forma canonica di Jordan, che forza gli elementi sulla diagonale ad essere uguali, altrimenti la matrice sarebbe diagonalizzabile

22.5 Teorema di Poincarè Birchoff

Supponiamo di avere una twist map imperturbata: ha la forma

$$\theta \rightarrow \theta + 2\pi\alpha(I) \quad I \rightarrow I$$

con $\alpha = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ nel caso derivi da una mappa di Poincarè o in generale $\alpha = \frac{\partial F_0}{\partial I}$ nel caso di generica trasformazione canonica (F è la generatrice); supponiamo di aggiungere una piccola perturbazione, quindi $F_0 \rightarrow F = F_0(I) + \epsilon F_1(I, \theta)$: per il teorema KAM, la maggior parte dei tori invarianti sopravvive (si richiede il fatto che $\frac{\partial^2 F_0}{\partial I_i \partial I_j}$ sia non degenere ma in 1D è scontato), tranne quelli che hanno $\alpha(I)$ razionale. Sia T_0 la mappa imperturbata che porta un punto nel successivo e supponiamo di scegliere un raggio I_0 tale che $\alpha(I_0) = \frac{r}{s}$; applicando a questa circonferenza T^s , i suoi punti sono mandati in loro stessi. Supponiamo ora che $\alpha(I)$ sia, ad esempio, una funzione crescente. Questo vuol dire che i punti che stanno poco sopra I_0 saranno ruotati in senso antiorario di poco perchè

$$T_{0(I+dI)}^s \theta = \theta + s \left(\frac{r}{s} + \frac{\partial \alpha}{\partial I} dI \right) \gtrsim \theta + 2\pi r = \theta$$

e viceversa quelli al di sotto di I_0 saranno ruotati in senso orario; inoltre le circonferenze poco sopra e poco sotto ($I = I_0 \pm dI$), sotto l'effetto della perturbazione, avranno delle curve "vicine" invarianti per il teorema KAM, dato che non sono curve razionali.

Se prendo la perturbazione abbastanza piccola (rispetto a dI_0), posso supporre **aggiungendo la perturbazione** che la coordinata angolare della curva più esterna $I + dI_0$ come nel caso imperturbato aumenti con l'applicazione di T^s e viceversa per quella a $I - dI_0$; quindi, per ogni coordinata angolare θ posso trovare l' $I(\theta) \in [I_0 - dI, I_0 + dI]$ corrispondente per cui la coordinata angolare viene mandata in sè stessa (per continuità della funzione $\alpha(I)$ perturbata). Unendo tutti questi punti con la coordinata angolare preservata, costruisco la curva $R: (\theta, I[\theta])$.

Applicando ad R la mappa (perturbata) T^s ho che la curva non viene mandata in sè stessa (anche se le coordinate angolari restano invariate, le I cambiano all'ordine ϵ), ma in R' ; si ha che R ed R' hanno un numero pari di punti di intersezione (perchè le curve devono chiudersi: se parto da un punto di R' che sta sopra R , per tornarci dopo un giro di R' , devo risalire ogni volta che scendo sotto R).

I punti di intersezione sono dei punti fissi per T^s , per il fatto che la loro coordinata angolare non cambia. Ci deve sempre essere almeno un punto fisso perchè la mappa preserva le aree; se per ipotesi R non si intersecasse con R' , si avrebbe che una delle curve dovrebbe essere contenuta nell'altra (perchè contengono una curva invariante a $I_0 - dI$, quindi hanno dei punti interni in comune), ma allora una avrebbe aree più piccola dell'altra, assurdo.

Inoltre i punti devono anche essere multipli di s perchè, preso un punto fisso x e applicandoci T^t con $t < s$, non lo mando in sè stesso visto che all'ordine 0 i punti vengono ruotati di $2\pi \frac{tr}{s}$ (che non è un multiplo intero di 2π). Tuttavia

$$T^t x = T^t T^s x = T^s T^t x$$

quindi anche $T^t x$ è un punto fisso. Se ne deduce che ci sono $2ks$ punti fissi, $k \in \mathbb{N}$ (in teoria così sto dimostrando che sono almeno ks , ma la parte restante del teorema implica che k deve essere pari, visto che li posso dividere in due famiglie grandi uguali di punti stabili e instabili).

Ora voglio far vedere che questi punti sono, alternativamente, stabili e instabili. Concentriamoci sul punto di intersezione in verde in figura 13; dopo l'applicazione della mappa T^s , i punti a destra dell'intersezione salgono su R' , ma se sono sopra R , vuol dire che dopo l'applicazione di T^s ruoteranno in senso antiorario¹³, e la loro coordinata angolare aumenterà, tendendoli a riavvicinare al punto di intersezione in verde: il punto è di tipo ellittico (stabile). Viceversa il punto di intersezione successivo, che immagino trovarsi a $\theta = \theta_0$, ha che i punti con $\theta < \theta_0$ "scendono" (il loro raggio diminuisce); dato che sono scesi dentro R , vuol dire che altre applicazioni di T^s li allontaneranno ancora di più (ruotano in senso orario diminuendo ancora di più θ e quindi allontanandosi da θ_0): si ha un punto iperbolico instabile.

Ripetendo il ragionamento, si dimostra che ci sono alternativamente punti stabili ed instabili. Inoltre T

¹³si è presa per ipotesi $\alpha(I)$ crescente nell'intorno della nostra curva, quindi all'aumentare di I (il raggio), l'angolo di rotazione aumenta(=ruotare in senso antiorario) dopo l'applicazione di T^s

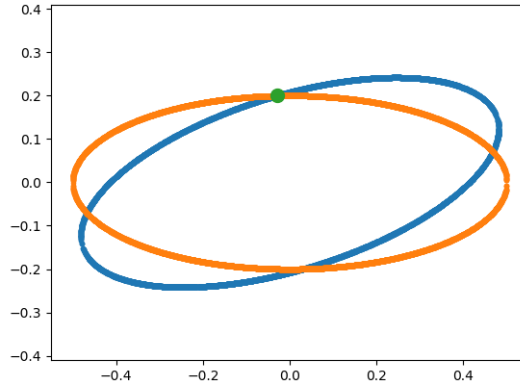


Figura 13: esempio di figura di R (in arancio) ed R' in blu

mappa un punto di equilibrio stabile in un punto stabile. Infatti, preso x vicino ad x_0 che è stabile, si ha che $T^s x$ è vicino ad x ; se T è continua $T^t T^s x = T^s T^t x$ è vicino a $T^t x$, quindi i punti intorno a $T^t x$ restano vicini sotto applicazione di T^s , questo vuol dire che i punti del tipo $T^t x_0$ sono tutti stabili (e sono s punti). Dato che per ogni punto stabile ce ne deve essere uno instabile, ci sono $2ks$ punti fissi.

In definitiva, il nostro toro razionale di partenza, sotto T^s , si spezza in ks punti ellittici (con intorno dei tori invarianti) ed altrettante zone caotiche intorno ai punti fissi iperbolici¹⁴.

Ma fra questi tori invarianti ci saranno ancora dei tori razionali che si spezzeranno a loro volta in altri tori (rispetto alla mappa $(T^s)^q$, visto che stavolta si parte da T^s), e così via, creando una struttura auto-similare. Ad ogni spezzettamento dovuto al teorema si ha un passaggio dall'applicare T all'applicare T^s , quindi la struttura frattale si vede facendo effettivamente infinite reiterazioni della mappa (altrimenti si vedrebbe ovunque nelle simulazioni numeriche, dato che le frequenze sono tutte razionali, essendo i punti discreti.).

22.6 Punti iperbolici

Nell'intorno di un punto iperbolico instabile si ha un comportamento molto peculiare; anzitutto si ha che i due autovalori nell'intorno sono λ e $\frac{1}{\lambda}$; il comportamento dei punti nelle due direzioni corrispondenti è:

$$x_n = x_0 \lambda^n \quad \text{oppure} \quad x_n = x_0 \left(\frac{1}{\lambda} \right)^n$$

supponendo $|\lambda| > 1$, la soluzione stabile è quella lungo l'autovettore di $\frac{1}{\lambda}$. Possiamo prolungare le curve che partono dal punto fisso nelle direzioni dei due autovalori: chiamiamole H_0^+ per la traiettoria stabile e H_0^- per quella instabile.

Fatto 10. Bisogna fare qui due importanti precisazioni; (spero di averla imbroggiata giusta, però) le traiettorie di cui stiamo parlando, del tipo H_0^\pm non sarebbero di base ben definite se non grazie al fatto che partiamo da un punto fisso, e, iterando T su un segmento infinitesimo che parte da lì nella direzione di partenza desiderata, si riesce a costruire una curva (varietà 1D), questo perchè i punti vengono sempre mappati nell'intorno del punto fisso, quindi, si riesce ad ogni mappa a prolungare la curva. Se invece la trasformazione fosse, ad esempio, una rotazione di $\frac{\pi}{2}$ (la butto lì), un segmentino sarebbe mappato a caso da un'altra parte e non sarebbe connesso col pezzo di partenza. Seconda precisazione: qui come mappa non stiamo necessariamente prendendo T , ma in generale possiamo decidere di mappare secondo T^3 o altro; ad ogni scelta corrisponderanno traiettorie diverse (cambiano i punti fissi).

Queste due traiettorie H_0^\pm possono poi, ad esempio intersecarsi; un esempio semplice è quello del pendolo, per il particolare valore dell'energia $E = mgl$. L'Hamiltoniana è:

¹⁴Si intende tori invarianti rispetto a T^s , non T , il cui toro invariante è $I = \text{const} = I_0$ e si frantuma sotto la perturbazione, avendo per ipotesi una $\alpha = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ razionale

$$H = \frac{p^2}{2m} - mgl \cos(x) = mgl$$

Da cui :

$$p = m\sqrt{2lg}\sqrt{1 + \cos(x)} = \pm 2m\sqrt{lg} \cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

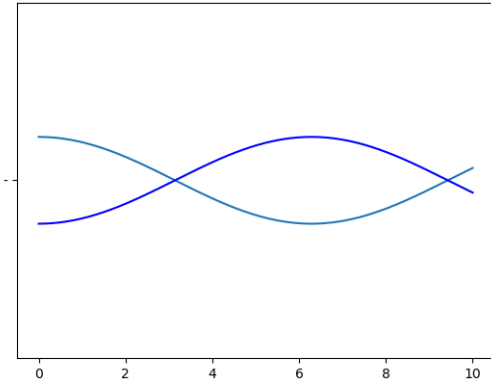


Figura 14: linee su cui si svolge il moto nel pendolo semplice. Le intersezioni sono punti iperbolici e le due varietà si intersecano più volte

Si introduce una nomenclatura per indicare le varie tipologie di intersezioni.

- Si può avere un' **orbita omoclina** quando H_0^+ e H_0^- non sono altro che le estremità di un "nodo" di una singola curva che si auto-interseca.
- Si chiamano invece **punti omoclini** le intersezioni di due varietà che provengono dalla stessa **famiglia**, che è un modo per dire che sono generati dalla mappa T^s con s uguale per le due traiettorie.
- Il caso uguale al precedente, ma con le due traiettorie generate da T_1^s e T_2^s diversi, dà origine a **punti eteroclini**.

Ora supponiamo di avere un punto omoclino X , intersezione di H_0^\pm : mappando questo punto con la T che genera le due curve si ha, dato che il punto appartiene sia ad H_0^+ che ad H_0^- , che anche la sua immagine TX deve appartenere ad entrambe le curve.

Inoltre, la curva stabile H_0^+ si avvicina, ad ogni interazione, al punto iperbolico X_0 , questo vuol dire che TX si avvicinerà ad X_0 (questo forza la sua mappa a stare dal lato "giusto" della curva), un esempio di questo andamento è riportato in figura 15.

Continuando a mappare con la T le intersezioni si ha che ci si avvicina sempre di più ad X_0 e di conseguenza la distanza fra le $T^n X$ si riduce sempre di più (ricordo che, dato che i punti stanno anche su H_0^+ , si devono avvicinare al punto come $\frac{1}{\lambda^n}$).

Inoltre, considerando il percorso chiuso \mathcal{C}_n creato dai pezzi di H_0^\pm compresi fra $T^n X$ e $T^{n+1} X$, si ha che viene mappato dal percorso successivo dalla T , perchè i suoi estremi sono mappati negli estremi del circoletto successivo per ipotesi.

$$T\mathcal{C}_n = \mathcal{C}_{n+1}$$

ma l'area racchiusa da \mathcal{C}_n deve essere la stessa per ogni n per il teorema di Liouville, questo vuol dire che le oscillazioni di H_0^- diventano sempre più intense. Si genera alla fine una figura del tipo 16.

È chiaro che un sistema del genere si sfascia alla minima perturbazione ed è estremamente instabile a seconda delle condizioni iniziali: è un sistema caotico.

Un'ultima notazione: il tabor segnala che questa struttura ad oscillazioni sempre più fitte ed intense prende il nome di **Tendril** e si ottiene continuando a mappare un segmento con la mappa T vicino ad un punto iperbolico (cioè a disegnare H^-); tentando di fare la stessa cosa vicino un punto ellittico porta ad una roba del tipo quella riportata in 17, questa struttura prende il nome di **whorl**.

Infine, riguardo ai punti eteroclini, questi si manifestano quando il caos è già parecchio sviluppato e si sono rotti anche i tori più irrazionali, dato che ora il sistema può passare facilmente da curve invarianti di un certo T^n a quelle con un altro esponente, rimescolando di molto tutti i punti.

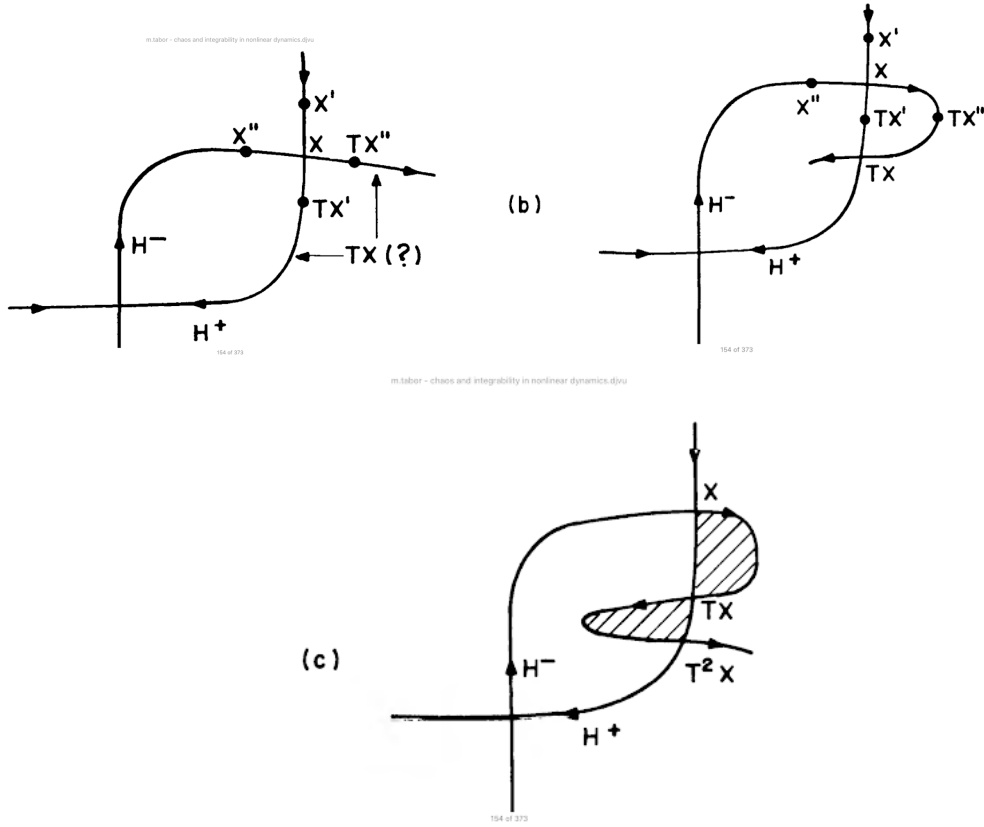


Figura 15: esempio di mappatura di punti omoclini in successive intersezioni delle due curve, immagine presa dal Tabor, "chaos and integrability in nonlinear dynamics"

23 Esponenti di Lyapunov

Sono dei numeretti che identificano il livello di "caoticità" del sistema; in particolare, ci si aspetta che per un sistema caotico due punti "vicini" si allontanino rapidamente nel tempo.

Naturalmente non si possono allontanare in eterno, essendo il sistema (sperabilmente) limitato. Presa una mappa T tale che

$$\mathbf{x}^{i+1} = T\mathbf{x}^i = \mathbf{F}(\mathbf{x}^i)$$

l'andamento di punti vicini distanti $\delta\mathbf{x}^i$ si ottiene facendo la variazione rispetto \mathbf{x} dell'equazione precedente;

$$\delta\mathbf{x}^{i+1} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}_j} \bigg|_{\mathbf{x}^i} \delta\mathbf{x}_j^i$$

in pratica si guarda la mappa tangente calcolata in \mathbf{x}^i . Se si assume che la distanza fra punti vicini aumenti esponenzialmente, del tipo $|\delta\mathbf{x}^i| = e^{\sigma i} |\delta\mathbf{x}^0|$, allora si ha che il parametro di allontanamento σ è pari a :

$$\sigma = \ln \left(\lim_{i \rightarrow \infty} \left(\frac{\delta\mathbf{x}^i}{\delta\mathbf{x}^0} \right)^{\frac{1}{i}} \right)$$

Se invece dell'andamento della distanza, si vuole guardare il caos nelle varie direzioni, si guardano i vari autovalori della matrice che determina l'allontanamento.

Detta $M(\mathbf{x})$ la mappa tangente calcolata nel punto \mathbf{x} , si ha che

$$\delta\mathbf{x}^n = \prod_{i=0}^{n-1} M(\mathbf{x}^i) \delta\mathbf{x}^0$$

Diagonalizzando la matrice $\prod_{i=0}^{n-1} M(\mathbf{x}^i)$ ci si aspetta di trovare come autovalori gli stretching nelle varie direzioni λ_j^n elevati al numero di interazioni; volendo l'allontanamento medio si ha che gli esponenti di

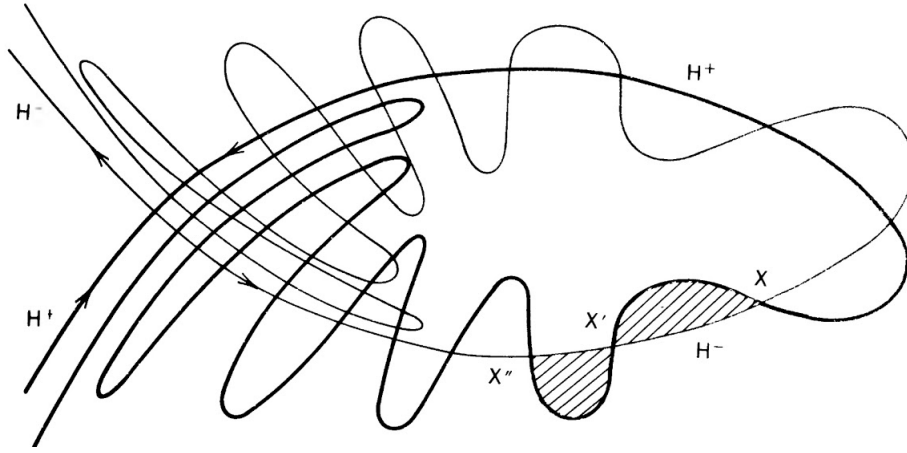


Figura 16: esempio dell'evoluzione di un punto omoclinico

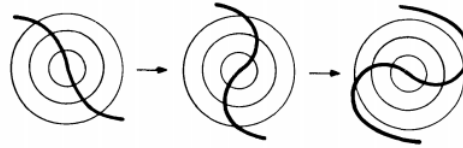


Figura 17: Iterate di un segmento vicino un punto ellittico; i cerchi sono le curve invarianti

Lyapunov sono il logaritmo degli autovalori della seguente matrice ($\mathbf{x}_i = T^i \mathbf{x}_0$):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\prod_{i=0}^{n-1} \mathcal{M}(\mathbf{x}^i) \right)^{\frac{1}{n}}$$

oppure gli autovalori della matrice

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln(\mathcal{M}(\mathbf{x}^i))$$

il che rende più chiaro il processo di media sulle n interazioni (l'ordine del processo "faccio il logaritmo" \rightarrow "calcolo gli autovalori" o viceversa chiaramente non conta).

Questo limite non dovrebbe dipendere dalla scelta delle condizioni iniziali, eccetto che per un set di condizioni iniziali che ha misura nulla. Intuitivamente questo si giustifica col fatto che sistemi caotici (cioè che hanno esponenti di Lyapunov $\neq 0$) visitano più o meno tutto lo spazio delle fasi, eccetto che "piccole" zone

Esempio 23.1. Calcolo l'esponente di Lyapunov con la mappa 1D (con periodo 1, perchè vogliamo le x limitate):

$$x_{i+1} = 2x_i$$

La mappa tangente è uguale alla mappa vera e propria (perchè questa è lineare), e la matrice è semplicemente la moltiplicazione per 2.

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln(2) = \ln(2)$$

Questo è l'esponente di Lyapunov

Assumiamo ora una dinamica continua:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

Volendo guardare punti vicini, si fa sempre la mappa tangente calcolata sulla traiettoria:

$$\frac{d\delta x_i}{dt} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \bigg|_{\mathbf{x}(t)} \delta x_j = \mathcal{M}(\mathbf{x}(t)) \delta \mathbf{x}$$

Rispetto a prima, però, vogliamo fare step infinitesimi. Dato che l'equazione per l'evoluzione temporale è lineare, posso definire una matrice Λ per l'evoluzione temporale:

$$\delta \mathbf{x}(t) = \Lambda(t) \delta \mathbf{x}(0)$$

Dove naturalmente $\Lambda(0) = \text{Id}$. Inserendo tutto nell'equazione per l'evoluzione temporale, si trova:

$$\dot{\Lambda} = \mathcal{M}(\mathbf{x}(t)) \Lambda$$

Quindi gli esponenti di Lyapunov saranno gli autovalori di:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln(\Lambda(t))}{t}$$

Esistono particolari simmetrie per quanto riguarda gli esponenti di Lyapunov, nel caso si guardi ad un'evoluzione Hamiltoniana.

•

$$\sum_i \sigma_i = 0$$

Questo segue dal fatto che la matrice Λ che manda $\delta \mathbf{z}(0) \rightarrow \delta \mathbf{z}(t)$ è lo Jacobiano $J(t) = \frac{\partial \mathbf{z}(t)}{\partial \mathbf{z}(0)}$ dell'evoluzione temporale, che è una trasformazione canonica, quindi ha determinante 1:

$$1 = \det(J) = \prod_{i=0}^{2n} \lambda_i \sim \exp\left(\sum_{i=0}^{2n} \sigma_i t\right) \implies \sum_{i=0}^{2n} \sigma_i = 0$$

- gli esponenti di Lyapunov, a coppie, hanno la proprietà che :

$$\sigma_i = -\sigma_j$$

Questo discende dal Teorema 20.1 ricordando che $\lambda_i \sim e^{\sigma_i t}$

- Supponendo l'Hamiltoniana indipendente dal tempo, si ha che c'è almeno un integrale del moto, e quindi una direzione in cui la \mathbf{z} non si espande (presi due punti distanti $\delta \mathbf{z}$ restano sui due rispettivi tori invarianti, quindi non si possono allontanare troppo). Di conseguenza c'è almeno un $\sigma_i = 0$ e, per la proprietà precedente, ce ne sono almeno 2.

Il calcolo di questi esponenti è comunque molto complesso (bisogna risolvere un'equazione differenziale con le matrici e diagonalizzare il risultato), oppure risolvere il moto, cosa non pensabile per sistemi caotici, che sono il caso in cui gli esponenti sono diversi da 0.

Esistono comunque algoritmi semplici per trovare il massimo degli autovalori. Intuitivamente, se Λ diverge esponenzialmente, il suo autovalore che esplode più in fretta dominerà la matrice (gli altri saranno trascurabili), e la matrice sarà quasi un proiettore sull'autovalore corrispondente.

L'algoritmo corrispondente (Bennettin et al.) è il seguente: parto con un vettore $\delta \mathbf{z}_0$ iniziale e ad ogni step lo faccio evolvere per un tempo τ . A questo punto definisco

$$\delta \mathbf{z}_1 = \frac{\delta \mathbf{z}_0(\tau)}{|\delta \mathbf{z}_0|}$$

che poi faccio evolvere per un tempo τ , ottenendo $\delta \mathbf{z}_2$, e così via per costruire una sequenza. L'idea è che ad ogni step il mio vettore iniziale viene proiettato sempre di più verso la direzione di massima dilatazione, idealmente si dovrebbe avere che $e^{\sigma \tau} = \frac{|\delta \mathbf{z}_i(\tau)|}{|\delta \mathbf{z}_i(0)|} = |\delta \mathbf{z}_i(\tau)|$, ricordando che ad ogni step i vettori partono normalizzati.

Quindi facendo la media di una dilatazione ad ogni step, ottengo la dilatazione massima:

$$\sigma = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{\tau N} \ln(|\delta \mathbf{z}_i(\tau)|)$$

Le seguenti proprietà sono state dimostrate formalmente:

- Esiste il limite

$$\sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{\tau N} \ln(|\delta \mathbf{z}_i(\tau)|)$$

- Il limite è indipendente dalla scelta di τ
- se il punto iniziale è scelto nella zona non caotica (con un qualche integrale del moto, cioè) dello spazio delle fasi, il limite è 0
- se il punto iniziale è scelto nella zona caotica dello spazio delle fasi, il limite è > 0 ed indipendente dal punto iniziale

24 Entropia di Kolmogorov-Sinai

La definizione è un po' complicata, quindi prima definisco:

Definizione 24.1 (Partizione). Dato lo spazio delle fasi \mathcal{S} , si definisce una partizione Q , come l'insieme di dei sottoinsiemi Q_i di \mathcal{S} tali che

$$\bigcup_i Q_i = \mathcal{S}$$

$$\forall(i, j) : Q_i \cap Q_j = \emptyset$$

Supponiamo ora di avere una mappa T che manda un punto nel successivo.

Fatta la partizione, si immagina, dato un punto iniziale x che rappresenta il sistema, di poter misurare, ad ogni iterata di una mappa T che definisce la dinamica, in quale delle Q_i si trova x nello step n -esimo. Supponendo ad esempio di misurare inizialmente x in Q_j e Tx in Q_i , si scopre che la nostra x iniziale si trova in effetti in un punto contenuto in $Q_j \cap T^{-1}Q_i$ ($T^{-1}Q_i$ è la controimmagine di Q_i , ovvero l'insieme dei punti che vengono mandati in Q_i dalla T). Quindi, andando a vedere il passato ed il presente, è come se avessimo fatto una partizione più fine con elementi Q^2 contenente come elementi

$$Q_{ij}^2 = Q_i \cap T^{-1}Q_j$$

Andando a fare altre misure, dopo l'applicazione di T^2, T^3, \dots , si costruisce una partizione ancora più fine $Q^3 = \{Q_i \cap T^{-1}Q_j \cap T^{-2}Q_k\}$, e così via.

Data una partizione Q , si definisce la sua entropia:

$$S(Q) = - \sum_i \mu(Q_i) \ln(\mu(Q_i))$$

Dove

$$\mu(Q_i) = \int_{Q_i} d\mu$$

è la misura del sottoinsieme dello spazio delle fasi. A questo punto, data una partizione iniziale Q , si definisce la sua entropia di Kolmogorov-Sinai, la quantità:

$$S_{KS}(Q) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S(Q^n)}{n}$$

Dove il Q^n indica la partizione costruita nel modo indicato sopra con n steps.

Questa quantità dice essenzialmente la minima entropia (cioè la massima informazione) che si riesce ad estrarre dal sistema data una partizione di misura.

La "vera" entropia del nostro sistema dinamico è il sup delle entropie di tutte le partizioni, rispetto alla scelta della partizione iniziale:

$$S_{KS} = \sup_Q S_{KS}(Q)$$

La presenza di questo sup rende l'entropia praticamente impossibile da calcolare in pratica, se non fosse per un teorema che dice che il sup delle possibili partizioni è raggiunto se, come partizione iniziale, si prende una generatrice.

Definizione 24.2 (generatrice). È una particolare partizione G dello spazio delle fasi, tale per cui andando a vedere in quale G_i si trova $T^n x$, per ogni n , si riesce a risalire in modo univoco ad x .

Detto in altri termini, data x , la sequenza di "indici" $\{w_n\}$ che indica in quale elemento della partizione G si trova x allo step T^n è:

$$w(x) = \{w_n \in I | n \in \mathbb{Z}, T^n x \in G_{w_n}\}$$

Allora la partizione G è detta generatrice se esiste una relazione biunivoca $x \leftrightarrow w(x)$, ovvero se dalla sua sequenza si riesce a risalire ad x .

Esempio 24.1 (Baker's map). Consideriamo la seguente mappa, per $q, p \in [0, 1]^2$:

$$T(q, p) = \begin{cases} (2q, \frac{p}{2}) & q \in [0, \frac{1}{2}] \\ (2q - 1, \frac{p+1}{2}) & q \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

La mappa consiste sostanzialmente nel dividere in due fettine il quadrato, schiacciarle, e riattaccarle una sopra l'altra (è per questo rimescolamento che si chiama mappa del panettiere).

Si vuole calcolare l'entropia KS di questa mappa.

Bisogna fare anzitutto un'osservazione: data una partizione Q , che spezzetta lo spazio delle fasi in N regioni con misura $\mu(Q_i)$ (la cui somma è fissata), la quantità

$$\sum_i \mu(Q_i) \ln(\mu(Q_i))$$

è massima se $\mu(Q_i) = \frac{\mu(Q)}{N}$ cioè se tutte le regioni hanno area uguale.

Ciò detto, prendo come partizione iniziale

$$Q = \{[0, \frac{1}{2}] \times [0, 1], [\frac{1}{2}, 1] \times [0, 1]\}$$

che divide il piano lungo $q = \frac{1}{2}$ in due strisce uguali. Andiamo a vedere $Q^2 = \{Q_i \cap T^{-1}Q_j\}$: questa partizione divide anche le p a metà. Continuando il processo, si vede che ad ogni partizione, le p vengono divise in pezzetti sempre più piccoli (dimezzati ad ogni interazione). Quindi, ad ogni iterazione, lo spazio delle fasi

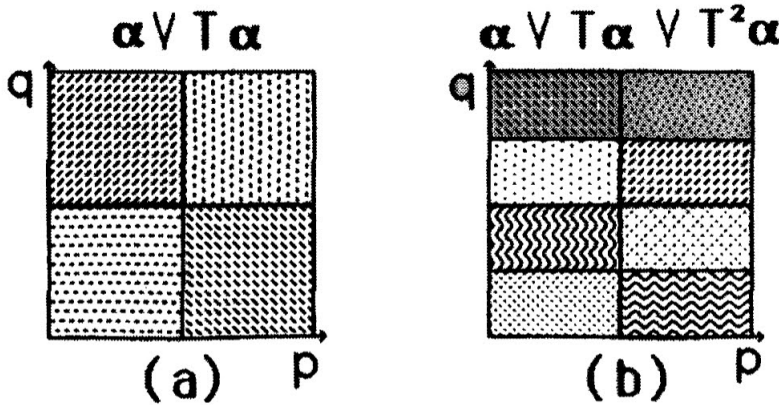


Figura 18: evoluzione della partizione alla prima e seconda iterazione della T

è diviso in 2^n regioni di area uguale. Grazie all'osservazione precedente, in questo modo si massimizza l'entropia, quindi si ottiene il sup della formula di S_{KS} .

$$S_{KS} = \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{2^n} \frac{1}{2^n} \ln\left(\frac{1}{2^n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{2^n} n \frac{1}{2^n} \ln(2) = \ln(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{2^n} \frac{1}{2^n} = \ln(2)$$

Questa quantità è anche pari agli esponenti di Lyapunov, dato che c'è uno stretching di 2 lungo le q , quindi i due esponenti saranno

$$\sigma_{1,2} = \pm \ln(2)$$

25 Chaos Globale

25.1 Distanza di Melnikov

Serve a capire se le due varietà, quella stabile ed instabile, che partono da un punto iperbolico, si intersecano o meno (nel qual caso si avrebbe Chaos). Si parte da un'orbita omoclina, che si chiude in sè stessa. Questa si rompe nel caso di una perturbazione

$$H = H_0 + \epsilon V$$

che causa la separazione di H_0^\pm in due varietà. Se queste due varietà si intersecano creando un punto omoclino, si genera chaos, come visto nella sezione precedente. Si definisce la **distanza di Melnikov** la distanza fra le due varietà rotte in caso di piccola perturbazione (prende il nome del tizio il quale per primo trovò un modo analitico di calcolarla).

Si parte da un punto $\mathbf{r}_0(0)$ sulla traiettoria imperturbata. Si ha quindi che $\mathbf{r}_0(\infty)$ tende ad avvicinarsi al punto iperbolico da cui si generano le due varietà, lungo H_0^+ , mentre $\mathbf{r}_0(-\infty)$ tende sempre al punto iperbolico, ma dal "lato" di H_0^- , da cui il sistema è "scappato".

In presenza della perturbazione la varietà H_0^\pm si rompe in H^+ e in H^- ; queste all'ordine più basso mantengono la stessa forma¹⁵, quindi per misurarne la distanza basta prendere la proiezione su due punti appartenente uno ad H^+ ed uno ad H^- lungo la direzione perpendicolare (che è comune, visto che all'ordine 0 la "forma" delle varietà è invariata) alla traiettoria.

Il vettore (non normalizzato) tangente alla traiettoria, in un punto \mathbf{r}_0 è, supponendo un sistema Hamiltoniano (q, p) :

$$\mathbf{t} \propto \dot{\mathbf{r}}_0 = \left(\frac{\partial H_0}{\partial p} \quad -\frac{\partial H_0}{\partial q} \right)$$

Da cui il vettore perpendicolare è

$$\mathbf{n} \propto \left(\frac{\partial H_0}{\partial q} \quad \frac{\partial H_0}{\partial p} \right) = \nabla H_0$$

(la cosa era ovvia perchè il moto si svolge lungo H costante, quindi il suo gradiente è ortogonale alla traiettoria).

Il fatto che non guardo alla normalizzazione di \mathbf{n} mi farà avere il risultato finale sbagliato di un certo fattore; io però sono interessato ai punti di intersezione, dove cioè la distanza vale $D = 0$, per quello posso ignorare la normalizzazione.

Adesso bisogna vedere dove viene mandato \mathbf{r}_0 quando si spezza nei due punti sulle due diverse varietà H^{pm} (in seguito alla perturbazione). In particolare, sia $\Delta \mathbf{r}^+(t) = \mathbf{r}^+(t) - \mathbf{r}_0(t)$ la distanza dei punti della nuova varietà stabile perturbata da quelli della vecchia orbita omoclina, e analogamente per $\Delta \mathbf{r}^-(t)$ rispetto alla varietà instabile.

$$\Delta \dot{\mathbf{r}}^+(t) = \left(\frac{\partial H}{\partial p} \quad -\frac{\partial H}{\partial q} \right) \Big|_{\mathbf{r}^+(t)} - \left(\frac{\partial H_0}{\partial p} \quad -\frac{\partial H_0}{\partial q} \right) \Big|_{\mathbf{r}_0(t)}$$

Al prim'ordine, si ha che

$$\left(\frac{\partial H}{\partial p} \quad -\frac{\partial H}{\partial q} \right) \Big|_{\mathbf{r}^+(t)} \approx \left(\frac{\partial H}{\partial p} \quad -\frac{\partial H}{\partial q} \right) \Big|_{\mathbf{r}_0(t)} + \Delta \mathbf{r}_i^+(t) \left(\partial_i \left(\frac{\partial H}{\partial p} \quad -\frac{\partial H}{\partial q} \right) \Big|_{\mathbf{r}_0(t)} \right) =$$

nel secondo membro, visto che $\Delta \mathbf{r}$ è già al prim'ordine, posso usare l'Hamiltoniana imperturbata

$$\approx \left(\frac{\partial H}{\partial p} \quad -\frac{\partial H}{\partial q} \right) \Big|_{\mathbf{r}_0(t)} + \Delta \mathbf{r}_i^+(t) \left(\partial_i \left(\frac{\partial H_0}{\partial p} \quad -\frac{\partial H_0}{\partial q} \right) \Big|_{\mathbf{r}_0(t)} \right)$$

Sostituendo tutto nell'equazione precedente:

$$\begin{aligned} \Delta \dot{\mathbf{r}}^+(t) &= \left(\frac{\partial H}{\partial p} \quad -\frac{\partial H}{\partial q} \right) \Big|_{\mathbf{r}_0(t)} + \Delta \mathbf{r}_i^+(t) \left(\partial_i \left(\frac{\partial H_0}{\partial p} \quad -\frac{\partial H_0}{\partial q} \right) \Big|_{\mathbf{r}_0(t)} \right) - \left(\frac{\partial H_0}{\partial p} \quad -\frac{\partial H_0}{\partial q} \right) \Big|_{\mathbf{r}_0(t)} = \\ &= \epsilon \left(\frac{\partial V}{\partial p} \quad -\frac{\partial V}{\partial q} \right) \Big|_{\mathbf{r}_0(t)} + \Delta \mathbf{r}_i^+(t) \left(\partial_i \left(\frac{\partial H_0}{\partial p} \quad -\frac{\partial H_0}{\partial q} \right) \Big|_{\mathbf{r}_0(t)} \right) \end{aligned}$$

La quantità che vogliamo è

$$D(t) = [\mathbf{r}^+(t) - \mathbf{r}^-(t)] \cdot \mathbf{n}(t) = [\Delta \mathbf{r}^+(t) - \Delta \mathbf{r}^-(t)] \cdot \mathbf{n}(t) = D^+(t) - D^-(t)$$

¹⁵è difficile da spiegare senza un disegno, diciamo che è come se ci fossero due copie del "nodo" (dell'orbita omoclina, un esempio di figura è 19) che sono leggermente spostate una rispetto all'altra a causa della perturbazione, altrimenti si sovrapporrebbero

dove si è definito

$$D^\pm = \Delta \mathbf{r}^\pm(t) \mathbf{n}(t)$$

L'ultimo ingrediente che resta da calcolare è:

$$(\dot{\mathbf{n}})_i = \frac{d\partial_i H_0}{dt} = (\partial_{ij} H_0) \dot{r}_j = (\partial_{ij} H_0) \zeta_{jl} \partial_l H_0$$

Calcoliamo ora \dot{D}^+ , si tenga bene a mente sempre che $\mathbf{r} = (q, p)$, che $n_i(t) = \partial_i H_0(\mathbf{r}_0(t))$ e che, per le equazioni di Hamilton, $\dot{r}_i = \zeta_{ij} \partial_j H_0$:

$$\begin{aligned} \dot{D}^+ &= \Delta \dot{\mathbf{r}}^+(t) \mathbf{n}(t) + \Delta \mathbf{r}^+(t) \dot{\mathbf{n}}(t) = \epsilon \left(\frac{\partial V}{\partial p} \quad -\frac{\partial V}{\partial q} \right) \Big|_{\mathbf{r}_0(t)} \cdot \mathbf{n}(t) + \Delta r_i^+(t) \left(\partial_{il} H_0 \Big|_{\mathbf{r}_0(t)} \zeta_{jl} \right) n_j(t) + \Delta \mathbf{r}^+(t) \dot{\mathbf{n}}(t) = \\ &= \epsilon (\partial_i V) \zeta_{ji} (\partial_j H_0) + \Delta r_i^+(t) \left(\partial_{il} H_0 \Big|_{\mathbf{r}_0(t)} \zeta_{jl} \right) (\partial_j H_0) + \Delta r_i^+(t) (\partial_{ij} H_0) \zeta_{jl} \partial_l H_0 = \end{aligned}$$

Gli ultimi due addendi si sommano a 0, considerando l'antisimmetria della matrice ζ

$$= \epsilon (\partial_i V) \zeta_{ji} (\partial_j H_0)$$

In questa formula, tutto va calcolato lungo $\mathbf{r}_0(t)$. Integrando, e messo al tempo $t = 0$ il punto $\mathbf{r}_0(0)$ che ci interessa, si ha:

$$D^+(0) = D^+(+\infty) + \int_{+\infty}^0 \epsilon (\partial_i V) \zeta_{ji} (\partial_j H_0) dt = D^+(\infty) - \int_0^{\infty} \epsilon (\partial_i V) \zeta_{ji} (\partial_j H_0) dt$$

Rifacendo i conti in modo identico per D^- si ha che:

$$D^-(0) = D^-(-\infty) + \int_{-\infty}^0 \epsilon (\partial_i V) \zeta_{ji} (\partial_j H_0) dt$$

La formula finale si trova ricordando che $\mathbf{r}^-(-\infty) = \mathbf{r}^+(\infty)$ perchè sono entrambi pari alla distanza fra il **nuovo** punto iperbolico (da cui partono le varietà H^\pm) ed il vecchio (da cui partono H_0^\pm), pertanto $D^+(\infty) = D^-(-\infty)$:

$$D(0) = D^+(0) - D^-(0) = - \int_{-\infty}^{+\infty} \epsilon (\partial_i V) \zeta_{ji} (\partial_j H_0) dt$$

Infine, si può scrivere l'equazione in modo più carino (facendo sparire il meno globale) usando l'antisimmetria di ζ :

$$D = \int_{-\infty}^{+\infty} \epsilon (\partial_i V(\mathbf{r}(t))) \zeta_{ij} (\partial_j H_0(\mathbf{r}(t))) dt \quad (32)$$

Fatto 11. Dall'equazione scritta sembra non ci sia dipendenza di D dal punto \mathbf{r}_0 in cui voglio calcolare la distanza fra H^+ e H^- ; questo è implicito in $\mathbf{r}(t)$, che va trovata risolvendo le equazioni del moto imperturbate con la condizione iniziale $\mathbf{r}(t=0) = 0$, infatti D è la distanza al tempo $t=0$, ovvero nel punto della traiettoria $\mathbf{r}(t=0)$

Esempio 25.1 (Duffin System). Faccio un esempio di calcolo della distanza di Melnikov: la nostra Hamiltoniana è quella detta di Duffin (doppia buca)

$$H = \frac{p^2}{4} - 2q^2 + q^4$$

Il punto iperbolico lo si ha per la traiettoria che passa per $(0,0)$, quindi per $E = 0$. La traiettoria imperturbata è quindi:

$$\begin{aligned} \frac{dq}{dt} &= \frac{p}{2} = \sqrt{2q^2 - q^4} \\ t - t_0 &= \int \frac{1}{\sqrt{2q^2 - q^4}} dq \end{aligned}$$

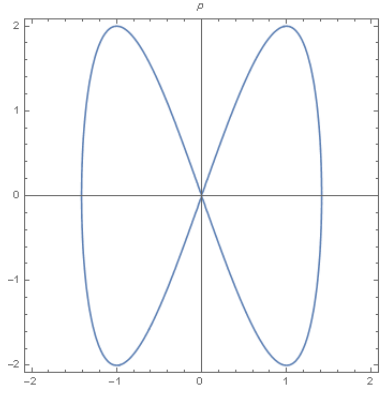


Figura 19: Traiettorie nello spazio delle fasi per $E = 0$

Adesso sostituisco $q \rightarrow \sqrt{2} \sin(k)$:

$$\begin{aligned} t - t_0 &= \int \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\sin(k)^2 - \sin(k)^4}} \sqrt{2} \cos(k) dk = \int \frac{1}{\sqrt{2} \sin(k)} dk = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{\sin^2\left(\frac{k}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{k}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{k}{2}\right) \cos\left(\frac{k}{2}\right)} = \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} \int \tan\left(\frac{k}{2}\right) + \cot\left(\frac{k}{2}\right) dk \implies \end{aligned}$$

Ora uso un po' di trigonometria per riesprimere tutto in funzione di q :

$$t - t_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \tan\left(\frac{k}{2}\right) \right| = \ln \left| \frac{-1 - \sqrt{1 - \left(\frac{q}{\sqrt{2}}\right)^2}}{\frac{q}{\sqrt{2}}} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{sech}\left(\frac{q}{\sqrt{2}}\right)$$

Infine

$$q = \sqrt{2} \text{sech}\left(\sqrt{2}(t - t_0)\right)$$

e

$$p = 2\sqrt{2q^2 - q^4} = 4\sqrt{\left(\frac{1}{\cosh(\sqrt{2}(t - t_0))}\right)^2 - \left(\frac{1}{\cosh(\sqrt{2}(t - t_0))}\right)^4} = 4 \text{sech}^2\left(\sqrt{2}(t - t_0)\right) \sinh\left(\sqrt{2}(t - t_0)\right)$$

La perturbazione che voglio mettere è

$$V = q \cos(\omega_0 t)$$

Quindi si ha, applicando la formula 32 :

$$D = \epsilon \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega_0 t) \frac{p(t)}{2} dt = \epsilon \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega_0 t) 2 \text{sech}^2\left(\sqrt{2}(t - t_0)\right) \sinh\left(\sqrt{2}(t - t_0)\right) dt$$

Questo schifo si fa con i residui (più incasinati del solito, visto che sech^2 ne porta un numero infinito, quindi c'è una serie geometrica da risommare, credo), però non ho voglia di fare i passaggi, quindi riporto il risultato che è :

$$D = \epsilon \pi \omega_0 \sin(\omega_0 t_0) \sin(\omega_0 t_0) \text{sech}\left(\frac{\pi \omega_0}{2^{\frac{3}{2}}}\right)$$

Come predetto, ci sono infinite intersezioni al variare di t_0 , cioè del punto in cui calcolo la distanza di Melnikov, ad esempio per $t \rightarrow \infty$, che consiste nell'avvicinarsi all'origine lungo H^+ .

25.2 Criterio di Chirikov

Questo non mi è troppo chiaro, e anche la letteratura pare dire che sia un po' abusivo: prendo l'Hamiltoniana della standard map e la scompongo in Fourier

$$H = \frac{I^2}{2} + K \cos(\theta) \sum_{m=0}^{\infty} \delta(t - 2\pi m) =$$

$$H = \frac{I^2}{2} + K \cos(\theta) \sum_{n=0}^{\infty} \cos(nt) =$$

A questo punto K la vedo come perturbazione e guardo solo una risonanza, quella con $n = 0$.

Nell'Hamiltoniana imperturbata, le frequenze erano $\omega = I$, quindi le risonanze si hanno per $I = n$. Dato che sto guardando la risonanza con $n = 0$, mi concentro sulla traiettoria che ha $I = 0$ (in $\theta = 0$).

$$H = \text{const} = H(I = 0, \theta = 0) = K = \frac{I^2}{2} + K \cos(\theta)$$

Da cui si ha che I varia da 0 a $2\sqrt{K}$ in una traiettoria (il fatto che I non sia costante è dovuto unicamente all'aggiunta della perturbazione ed infatti va a 0 per $K = 0$). Il problema sorge quando il K diventa così grosso che questa traiettoria va a toccarsi con quella dell'altra risonanza, che ha $I = 1$; lo spessore di quanto varia l'altra I lungo una traiettoria è sempre circa $2\sqrt{K}$, quindi si toccano quando la somma dei due spessori è la pari alla distanza fra le due I di risonanza, cioè 1. In definitiva, ottengo:

$$1 = 2 \cdot 2\sqrt{K} \implies K = \frac{1}{16}$$

Voglio generalizzare quest'idea per trattare un generico oscillatore e capire quando si genera il Chaos. L'unica richiesta è che l'oscillatore non sia lineare, in modo tale che la frequenza vari con l'ampiezza del moto (se non ho una dipendenza da I non posso avere più risonanze).

Supponiamo quindi di avere un oscillatore sotto l'effetto di una forzante.

Il pezzo perturbativo, nelle variabili azione-angolo, va scomposto alla Fourier in θ . Supponiamo inoltre che sia periodico nel tempo con frequenza Ω ; quindi si può scomporre in Fourier anche la parte temporale in termini del tipo $e^{ik\Omega t}$

$$H = H_0 + \sum_{a,b \in \mathbb{Z}^2} V_{a,b}(I) e^{ia\theta + ib\Omega t}$$

Voglio studiare una risonanza. La frequenza di θ è

$$\omega(I) = \left. \frac{\partial H_0}{\partial I} \right|_{I=I_r}$$

(calcolata nel punto $I = I_r$). La condizione di risonanza è

$$\frac{\omega(I)}{\Omega} \in \mathbb{Q} \quad \frac{\omega}{\Omega} = \frac{k}{l} \quad k, l \in \mathbb{N}$$

E supponiamo sia verificata per una certa $\omega(I_r), k, l$, con l, k presi **coprime**.

Faccio un cambio di variabili che rende la variabile angolo costante all'ordine 0 e trasla il suo impulso coniugato in modo che sia nullo nel punto della risonanza. (cioè il nuovo impulso deve essere $J = \alpha(I - I_r)$). Inoltre voglio riscalarlo ω in modo tale che $\omega' = \omega l$, in modo da semplificare il valore del suo rapporto con Ω . Dato che $\omega' = \frac{\partial H_0}{\partial J}$, basta riscalarlo $J = \frac{I - I_r}{l} \implies I = lJ + I_r$. Dette ψ, J le nuove variabili, la generatrice che fa queste trasformazioni sarà della forma

$$F(\theta, J) = \theta(lJ + I_r) + f(J)$$

in modo che

$$I = \frac{\partial F}{\partial \theta} = lJ + I_r$$

Per quanto riguarda la trasformazioni sugli angoli, si vuole il nuovo angolo ψ costante del tempo (all'ordine H_0), quindi

$$\psi = l\theta - k\Omega t$$

Questa trasformazione fa il lavoro, ricordando che $\theta(t) = \omega t$ e $l\theta - k\Omega = 0$.

Con quest'ulteriore richiesta si trova f e quindi la generatrice F :

$$F = (l\theta - k\Omega t)J + \theta I_r$$

Il cambiamento nell'Hamiltoniana è

$$\psi = l\theta - k\Omega t \quad J = \frac{I - I_r}{l} \quad H(J, \psi, t) = H_0(J) + V + \frac{\partial F}{\partial t} = H_0 + \sum_{a,b \in \mathbb{Z}^2} V_{a,b}(I) e^{\frac{i}{l}[a\psi + ka\Omega t + bl\Omega t]} - k\Omega J$$

ψ varia molto poco durante un periodo di Ω (Le variazioni sono all'ordine di V), di conseguenza si può fare la media temporale dell'Hamiltoniana in un tempo $t = \frac{2\pi}{\Omega}$, che fa sparire tutti i termini di Fourier in Ω tranne quelli con coefficiente di Ω pari a 0 $\implies ka = -lb$. Se $ka = -lb$ e k, l sono coprimi, vuol dire che devo guardare tutti le a, b per cui, preso p intero, $a = lp$ e $b = -kp$. Dato che il potenziale di partenza era reale, $V_{a,b} = V_{-a,-b}$ (ogni volta che inverte a o b prendo un coniugato, se li inverte entrambi ritorno a V), quindi posso sommare le coppie $\pm p$ nella sommatoria e considerare solo i $p \geq 0$. Non c'è nessun termine per $p = 0$, perchè dipenderebbe solo da J e potrebbe essere riassorbito nella definizione di H_0 .

$$\bar{H} = H_0 + 2 \sum_{p=1}^{\infty} V_{lp, -kp}(I) \cos(ip\psi) - k\Omega J$$

Di questa serie faccio un'approssimazione brutale e prendo solo $p = 1$, inoltre dato che J varia solo al prim'ordine in V (in realtà si vedrà che varia come \sqrt{V} , ma l'importante è che la variazione vada a 0 per $V \rightarrow 0$), posso espandere H_0 (visto che V è già al prim'ordine) in Taylor intorno allo 0 di J (è dove sta la risonanza), ottenendo l'equazione del pendolo.

$$H \approx H_0(I = I_r) + \left. \frac{\partial H_0(I)}{\partial \frac{I - I_r}{l}} \right|_{I=I_r} J + \left. \frac{\partial^2 H_0(I)}{\partial \frac{I - I_r}{l}^2} \right|_{I=I_r} \frac{J^2}{2} + 2V_{l, -k}(I = I_r) \cos(ip\psi) - k\Omega J =$$

Ignoro il termine costante $H_0(I_r)$ che non cambia il moto e ricordo che $\omega = \frac{\partial H_0}{\partial I}$:

$$H \approx l\omega J + l^2 \left. \frac{\partial^2 H_0(I)}{\partial I^2} \right|_{I=I_r} \frac{J^2}{2} + 2V_{l, -k}(I = I_r) \cos(ip\psi) - k\Omega J$$

Nell'ultimo passaggio uso la condizione di risonanza

$$\frac{\omega}{\Omega} = \frac{k}{l}$$

$$H \approx l^2 \left. \frac{\partial^2 H_0(I)}{\partial I^2} \right|_{I=I_r} \frac{J^2}{2} + 2V_{l, -k}(I = I_r) \cos(ip\psi)$$

Che è proprio l'equazione di un simil-pendolo, la cui separatrice (che individua la regione di tori invarianti, cioè di moti limitati) è

$$H = 2V_{l, -k} \implies J = \sqrt{\frac{8V_{l, -k}}{l^2 \frac{\partial^2 H_0}{\partial I^2}}} \cos\left(\frac{\psi}{2}\right)$$

Da cui la variazione di J è, in generale (uso $H = const = 0$, $J = 0 + \Delta J$):

$$\Delta J = \frac{2}{l} \sqrt{\frac{2V_{l, -k}}{\frac{\partial^2 H_0}{\partial I^2}}} \implies \Delta I = 2 \sqrt{\frac{2V_{l, -k}}{\frac{\partial^2 H_0}{\partial I^2}}}$$

La formula che volevo era per la variazione della frequenza in un periodo, che si ottiene con $\Delta\omega \approx \frac{\partial\omega}{\partial I} \Delta I$. Ricordo inoltre che $\omega = \frac{\partial H_0}{\partial I}$:

$$\boxed{\Delta\omega = 2 \sqrt{2V_{l, -k} \frac{\partial\omega}{\partial I}}} \quad (33)$$

La condizione di Chirikov è semplicemente che le ω di due diverse risonanze si "tocchino"; avendo fatte trentamila approssimazioni, questo risultato sarà solo indicativo.

26 Sistemi dissipativi

Sono sistemi in cui non si conserva l'energia e lo spazio delle fasi si contrae. Detto in altri termini, essendo J lo Jacobiano della trasformazione temporale ad un certo tempo t , si ha:

$$\det(J) < 1$$

Il fatto che si sia una contrazione del sistema, non impedisce certamente la formazione di Chaos. Per fare un esempio, in un sistema $3D$, una certa palla di condizioni iniziali può essere contratta fino a diventare una retta (nel migliore dei casi, il sistema può anche tendere a un frattale), a cui poi uno può far fare ogni tipo di "caotica" traiettoria.

Definizione 26.1 (attrattori). Un qualunque set di punti a cui tende la dinamica del sistema, ad esempio nel caso 19.1, l'attrattore è il cerchio limite.

Notare che per avere un attrattore lo spazio delle fasi deve intuitivamente contrarsi, quindi è necessario avere un sistema dissipativo.

26.1 Biforcazione di Hopf

Qualitativamente è un fenomeno che si trova studiando un punto stabile al variare di un parametro. Supponiamo il moto del tipo:

$$\frac{dz}{dt} = F(z, R)$$

Ad esempio, il moto di un fluido al variare del numero di Reynolds. Studiando un punto fisso per ogni R , può capitare che i suoi autovalori, supposti quelli di una spirale stabile, cioè del tipo

$$\lambda_{\pm}(R) = \alpha \pm i\beta \quad \alpha < 0$$

al variare di R , abbiano che la loro parte reale (che decreta la stabilità del punto) ruoti nel piano complesso, passando da $\alpha < 0$ ad $\alpha > 0$, rendendo il punto instabile.

Sotto alcune condizioni può infine capitare che le orbite intorno al punto, ormai diventate instabili, tendano invece ad un cerchio limite intorno al punto. Visivamente si può immaginare questo fatto come la dinamica di una doppia buca in $3D$ generata dalla rotazione intorno all'asse y della funzione:

$$y = -\lambda x^2 + x^4$$

Per $\lambda < 0$, l'origine è un punto stabile, mentre, quando λ diventa > 0 , i punti di minimo si rompono in $\pm\sqrt{\lambda}$ (che ruotati intorno all'asse y lungo il piano $x-z$ formano un cerchio limite) e l'origine diventa instabile.

Parte III

Econofisica

Definizione 26.2 (arbitraggio). Si dice che in un mercato è presente **arbitraggio** se è possibile guadagnare istantaneamente denaro (ad esempio comprando e rivendendo beni in posti diversi).

L'assenza di arbitraggio è un'ipotesi fondamentale di tutta la teoria matematica per l'economia; questa può venire violata, ad esempio, se qualcuno si mette a fare insider-trading (ovvero nasconde delle informazioni per guadagnarci); non a caso la pena per questo reato è in genere pesantissima.

Definizione 26.3 (Martingale). Una sequenza di variabili casuali è detta **Martingale** se il valore di aspettazione dell'ultimo variabile è pari al valore della precedente.

Un esempio è il moto Browniano: ad ogni step posso muovermi in ogni direzione con uguale probabilità, quindi il valore di aspettazione della mia posizione è pari alla posizione allo step precedente.

Definizione 26.4 (Mercato efficiente). . Il **Mercato efficiente** è un tipo di mercato che rispetta le seguenti proprietà

- Informazione libera (tutti gli operatori hanno le stesse informazioni → NO insider trading)
- Liquidità infinita : si può vendere e acquistare senza problemi
- Poco attrito, ovvero trascurabili costi per le transazioni

Sulla base di queste ipotesi, Samuelson dimostrò, nel 1965 che i prezzi seguono una martingale; come conseguenza, questi sono un processo di Markov. L'idea è mostrare che il prezzo attuale, con tutte le informazioni più recenti, contiene tutta l'informazione necessaria a predire la forma della distribuzione dei prezzi allo step successivo.

Se il prezzo è un processo di Markov, deve poter essere descritto da un'equazione del tipo Langevin. Empiricamente si osserva che i prezzi seguono, in media, una distribuzione esponenziale, del tipo $e^{\mu t}$; questo è anche dovuto al fatto che le banche offrono investimenti sicuri (senza perdite) con tasso di interesse μ ; quindi dopo un tempo t , il prezzo S di un'azione aumenterà di

$$dS = \mu S dt$$

Questa è la parte deterministica di incremento; va aggiunto un pezzo randomico alla Langevin:

$$dS = \mu S dt + \sigma S d\omega$$

Dove $d\omega = \omega(t + dt) - \omega(t)$ è una variabile casuale con media 0 e varianza dt . Il fatto che l'aumento è proporzionale ad S , rende conveniente passare alla variabile $\ln S$. Per cambiare i differenziali bisogna ricorrere alla **Formula di Ito** 11

$$d \ln(S) = \frac{1}{S} dS - \frac{1}{S^2} (dS)^2 = \mu dt + \sigma d\omega - \frac{1}{S^2} (2\sigma S)^2 dt = \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \frac{1}{2} \sigma d\omega$$

Questa roba è facile da integrare: è proprio l'equazione 4 (con un termine di drift che trasla il valor medio di $(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2) t$).

Rifaccio i passaggi visto che non me li ricordo; sia $R = \ln(S) + (\mu - \frac{1}{2} \sigma^2) t$ la variabile casuale con distribuzione $P(R, t)$: per tempi piccoli di salto dt posso espandere in Taylor la P , sia $\phi(\omega, t)$ la distribuzione di probabilità del saltino di ω :

$$P(R, t + dt) = \int \left(P(R - \omega, t) \frac{1}{2} \sigma^2 \phi(\omega) \right) d\omega \approx \int \left(P(R, t) - \frac{\partial P}{\partial R} \omega + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial R^2} \omega^2 \right) \phi(\omega) d\omega =$$

Per ipotesi ϕ ha media nulla e varianza pari a dt , quindi:

$$P(R, t + dt) = P(R, t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial R^2} dt$$

$$\partial_t P = \frac{1}{2} \sigma^2 \partial_R^2 P$$

Che implica che la P ha distribuzione (la condizione iniziale è una δ in $R = 0$)

$$P = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma t}} e^{-\frac{R^2}{2\sigma t}}$$

Da questa si vuole passare alla distribuzione per $S = e^{R + (\frac{1}{2} \sigma^2 - \mu)t}$:

$$P(S, t) = \frac{1}{S} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma t}} e^{-\frac{\ln(S) + (\mu - \frac{1}{2} \sigma^2)t^2}{2\sigma t}} \quad (34)$$

Dove si è assunto che al tempo 0 S valga 1. In generale, se la condizione iniziale è $S = S_0$ al tempo t' basta sostituire

$$S \rightarrow \frac{S}{S_0} \quad t \rightarrow t - t' \quad P \rightarrow \frac{P}{S_0}$$

(cambio di variabile)

$$P(S, t) = \frac{1}{S} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(t-t')} e^{-\frac{\ln\left(\frac{S}{S_0}\right) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(t-t')^2}{2\sigma(t-t')}}}$$

La σ prende il nome di **rischio** o **volatilità** ed è legata alla larghezza della distribuzione.

Questa distribuzione è detta **log-normale**, il moto che ne deriva (da un sampling) è detto moto geometrico-Browniano.

27 Mercato finanziario

Qua bisogna dare un mucchio di definizioni:

Definizione 27.1 (Spot Price). È il prezzo di un bene (asset) $S(t)$, determinato dalla domanda e dall'offerta nel determinato istante di tempo che si va a guardare.

Definizione 27.2 (Financial Market). Luogo dove si scambia o investe denaro secondo alcune regole, in pratica è un mercato dove il bene è il denaro stesso

Ci sono due tipi di transazione nel mercato finanziario:

Definizione 27.3 (Stock Exchange (SE)). Transazione dove si comprano/vendono titoli (azionari o obbligazionari) oppure valute straniere. È molto regolamentato → poca libertà → basso rischio/guadagno

Definizione 27.4 (Over The Counter (OTC)). È un tipo di transazione con regole molto più libere fissate da dei contratti vincolanti, che possono portare a guadagni (ma anche perdite) molto grossi.

Per evitare grosse perdite nelle transazioni OTC, ci sono varie strategie; per prima cosa vanno definiti i vari tipi di rischi:

- **Credit Risk** nel caso in cui un contratto non riesca a venire rispettato da una delle due controparti per mancanza di liquidità; tendenzialmente questa cosa non accade per transazioni sullo Stock exchange grazie alle stringenti regolamentazioni che ci sono
- **Operational Risk** Rischio di un qualche errore umano (o di un computer) in una transazione; è circa imprevedibile. Rientrano in questa categoria anche i casi di mancato controllo che portano a delle transazioni non autorizzate (e quindi magari non supportate da abbastanza liquidità)
- **Market Risk** Fluttuazioni degli Asset price dovuti ad eventi imprevedibili (politica, crisi, etc.). Può essere **specifico** se riguarda solo alcuni tipi di asset (ad esempio l'immobiliare) o non specifico interessa più o meno tutti i settori del mercato.

Per ridurre il market risk specifico, si possono investire in tanti settori fra loro scorrelati; è noto come la varianza della media di tante variabili casuali va giù come $\sim \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Per gestire i rischi globali del mercato, si introducono nuovi beni detti **derivatives**, che sono fortemente anti-correlati con tutti gli altri beni (quindi, se questi scendono, il loro valore sale). Questa strategia prende il nome di **hedging**.

28 Derivatives

28.1 Futures

Sono dei tipi di contratto in cui ci sono due parti (che assumono i ruoli rispettivamente di **Short** e **Long Position**) che si mettono d'accordo in modo tale che, ad un tempo fissato T detto **Delivery date**, la persona che ha la short position deve vendere un asset (che in questo contesto prende anche il nome di **underlying**) all'altra persona, ad un prezzo fissato. Questo prezzo è detto **delivery price**. In pratica l'idea è che se il prezzo dell' underlying corrispondente al future scende, la persona che ha la short position potrà guadagnarci un po' di soldi perchè potrà venderla ad un prezzo più alto di quello di mercato, e quindi il valore del future salirà. In questo senso questo tipo di contratto è anticorrelato al valore dell'asset.

I future sono molto ben regolamentati e, in realtà, servono perlopiù a regolarizzare il mercato; ad esempio la long position è tenuta a depositare una frazione del denaro che serve per pagare il contratto, detta **margin** (che varia nel tempo con regole fissate, a seconda di quanto sale il prezzo dell'asset nel tempo) in modo tale da eliminare qualsiasi tipo di Credit Risk. I prezzi di questi contratto sono fissati dallo stock exchange

28.2 Forward

È un tipo di contratto analogo al future, però meno regolamentato e, di conseguenza, lascia molto più spazio di manovra (e speculazione)

28.3 Options

Sono un tipo di contratto ancora più libero dei future; anche qui c'è un contratto venduto da una persona ad un'altra. Il contratto prevede il diritto, per chi lo compra (detto **holder**, perchè mantiene l'opzione), di vendere (**put option**) o comprare (**call option**) un certo underlying ad un tempo T (**expiry date**). Il prezzo per questo asset è detto **strike price** (o **exercise**).

In realtà, esistono millemila varianti di opzioni, questa qui, la più semplice di tutte, prende il nome di **European option** (ed è stata la maggior responsabile della crisi in olanda a causa della bolla dei tulipani nel 1637, per questo venne abbandonata per qualche secolo).

La teoria di Black-scholes formula un'equazione differenziale per dare un prezzo sensato alle opzioni, e in realtà funziona per molte derivative che soddisfino certe ipotesi.

Bisogna anzitutto definire alcune quantità matematiche con cui lavorare. Si chiama **Portfolio** la quantità di denaro che è necessario investire per fare alcune operazioni (ovvero un bilancio fra il comprare/vendere asset o opzioni al tempo t) e lo si indica con $\Pi(t)$. Sia invece $C(t)$ il costo di un contratto di call option venduto al tempo t che scada dopo un'expiry date fissata T con exercise K . Invece $S(t)$ è il valore istantaneo dell'underlying (lo spot price) e $P(t)$ è il costo di un contratto di put option.

28.3.1 Put-Call parity

C'è una relazione fra S , C e P : supponiamo di fare la seguente operazione: al tempo t compriamo un underlying ed un contratto di call option e vendiamo a qualcuno il diritto di put option (entrambi con lo stesso strike price K).

Il portfolio necessario a queste operazioni è

$$\Pi = S + P - C$$

All'expiry date $T + t$, ci sono vari casi:

1. Se il valore dell'asset è $S < K$ allora sarà conveniente comprare un underlying dal mercato per un prezzo S , e venderlo prezzo K , a chi ci ha dato il diritto di put option, con un ricavo

$$K - S$$

mentre il tizio a cui abbiamo venduto la call option non farà niente, sennò ci perderebbe. In questo caso al tempo $t + T$ avremo un denaro:

$$S + K - S - (0) = K$$

2. Nel caso opposto, cioè $S > K$, non eserciteremo il diritto di put, ma dovremo vendere la nostra azione S comprata all'inizio a chi ha comprato la nostra call per un valore K , quindi alla fine ci ritroveremo in mano K soldi.

Quindi, in entrambi i casi, il portfolio Π si trasforma in K soldi alla fine. Questa quantità deve essere esattamente uguale a quanto ci frutterebbe depositare quel denaro in banca, cioè

$$\Pi \rightarrow \Pi e^{(T-t)\mu} = K \implies \Pi = K e^{\mu(t-T)}$$

Se questa roba non fosse vera, ci sarebbe arbitraggio. La relazione prende quindi la forma:

$$S(t) + P(t) - C(t) = K e^{\mu(t-T)}$$

Adesso è ora di ricavare la generica equazione di Black-Sholes. Indichiamo il prezzo di un'opzione generica (cioè che può essere sia di tipo put che call) venduta al tempo t con $O(S, t)$. Ovvero questo prezzo dipenderà in generale dal tempo t e poi dal valore dell'underlying (che è una variabile casuale!) a quel tempo.

Si ha, dalla formula di Ito:

$$dO = \frac{\partial O}{\partial t} dt + \frac{\partial O}{\partial S} dS + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 O}{\partial S^2} dS^2 = \left(\frac{\partial O}{\partial t} + \frac{\partial^2 O}{\partial S^2} S^2 \sigma^2 \right) dt + \frac{\partial O}{\partial S} dS$$

Per ottenere le equazioni generica di Black e Sholes supponiamo di avere un contratto O il cui valore deve essere in ogni istante uguale a quello di un'altro generico investimento sul mercato con lo stesso valore. Il più generico investimento ha la forma:

$$\Pi(t) + \Delta(t)S(t)$$

dove Π sono soldi investiti in un fondo sicuro (con rate di crescita assicurato r e $\Delta \in [0, 1]$ è una frazione dell'asset S (dato che il contratto $O(S, t)$ riguarda un singolo asset, Δ non può essere più di uno, altrimenti i due valori non potrebbero mai essere uguali). Si deve avere quindi in ogni istante

$$O = \Pi + S\Delta$$

Supponiamo che ad intervalli infinitesimi di tempo δt il valore dei titoli cambi secondo le leggi del mercato, l'aumento infinitesimo di Π , visto che è un fondo sicuro, è $\Pi r dt$, mentre l'aumento di S è dS .

$$dO = \Pi r dt + \Delta dS = \left(\frac{\partial O}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 O}{\partial S^2} S^2 \sigma^2 \right) dt + \frac{\partial O}{\partial S} dS$$

Da cui

$$\Pi = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial O}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 O}{\partial S^2} S^2 \sigma^2 \right) \quad \Delta = \frac{\partial O}{\partial S}$$

Questa è la condizione che, **in modo deterministico**, ad ogni istante di tempo il valore di O e di un certo denaro investito inizialmente restino uguali.

Il significato di questo ragionamento è che chi vende O può usare il denaro ottenuto per comprare il portfolio $\Pi + \Delta S$ e azzerando il rischio (ma anche il guadagno! altrimenti ci sarebbe arbitraggio). Rimettendo tutto nella prima equazione:

$$O = S \frac{\partial O}{\partial S} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial O}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 O}{\partial S^2} S^2 \sigma^2 \right) \quad (35)$$

La differenza nelle varie opzioni sta nelle condizioni al contorno (ne servono 2); una di queste è fissata allo scadere del contratto, quando è noto il valore di O , l'altra la si trova dall'andamento asintotico.

Fatto 12. L'algoritmo di investire i soldi di O per non perdere soldi funziona, ma è inutile perchè alla fine della giornata nessuno ci guadagnerebbe; realisticamente ci si discosta un pochino dall'algoritmo (quindi dal $\Delta = \frac{\partial O}{\partial S}$) aumentando in modo infinitesimo il rischio e generando un possibile margine di guadagno

28.3.2 Forma adimensionale

Vogliamo risolvere l'equazione 35 nel caso di call option.

Per questo contratto le condizioni al bordo, all'expiry date (che fissiamo in $t = 0$) sono:

$$O = C = \max(S - K, 0)$$

Questo perchè, se S vale più di K , uso la call per comprarlo ad un prezzo K e rivenderlo ad S , altrimenti non uso il mio diritto. Le altre condizioni asintotiche, per $S = 0$ sono $C = 0$ (se $S = 0$, allora resta 0 e il mio contratto di call non vale niente) e $C = S - K \sim S$ per $S \rightarrow \infty$ (dove per infinito si intende grosso rispetto K).

A questo punto ho una scala di prezzo, K (quindi $S \rightarrow Ks$), mentre per la scala di tempo uso $\frac{\sigma^2}{2} \propto \frac{1}{t}$, inoltre inverte la direzione del tempo $t \rightarrow -t$ in modo tale da risolvere l'equazione per $t \geq 0$:

$$rO = rs \frac{\partial O}{\partial s} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial O}{\partial \tau} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 O}{\partial s^2} s^2$$

Inoltre come al solito conviene passare da $s \rightarrow x = \ln(s)$:

$$\frac{2r}{\sigma^2} O = \frac{2r}{\sigma^2} \frac{\partial O}{\partial x} - \frac{\partial O}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 O}{\partial x^2} - \frac{\partial O}{\partial x}$$

L'unico parametro che ho è quindi l'adimensionale $\kappa = \frac{2r}{\sigma^2}$

$$\kappa O + \frac{\partial O}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 O}{\partial x^2} + \frac{\partial O}{\partial x} = 0$$

con le condizioni al bordo:

$$O(x \rightarrow \infty) \sim e^x \quad O(t = 0) = \max(e^x - 1, 0) \quad O(x \rightarrow -\infty) = 0$$

L'equazione si può trasforma in un'equazione di diffusione con la sostituzione:

$$O = e^{\frac{1-\kappa}{2}x - (\frac{1+\kappa}{2})^2 \tau} g(x, \tau)$$

$$\frac{\partial g}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$$

28.4 Risk-Neutral valuation

Si può verificare per sostituzione che vale

$$\frac{C(t)}{e^{rt}} = E^* \left[\frac{C(T)}{e^{rT}} \right]$$

dove la media E^* è fatta con una geometrica-Gaussiana a drift nullo (il valore di aspettazione di $C(T)$ è determinato da quello di $S(T)$, che è una variabile casuale).

In realtà questo risultato è frutto di un teorema generale che afferma che il prezzo giusto per una derivative è dato dal valore di aspettazione del suo valore scontato nel tempo calcolato sotto una martingale equivalente. Prendere un prezzo scontato vuol dire dividerlo per l'incremento certo che si avrebbe usando un portfolio a rischio nullo (in questo senso r è universale, sennò ci sarebbe arbitraggio) e prendere una martingale equivalente vuol dire cambiare la misura di probabilità con una equivalente in modo tale che il processo scontato diventi una martingale. In questo caso il valore di \tilde{C} cioè della call option scontata, rispetta la martingale equivalente $d\tilde{C} = \sigma \tilde{C}(t) dW^*$.

Il teorema di Girsanov dà la forma della nuova misura di probabilità da usare, tramite derivata di Radon-Nikodym.

$$dW^* = \gamma(t) + dW$$

Sia μ la nuova misura e ν la vecchia (secondo cui dW è di Wiener).

Allora la derivata è

$$\frac{\partial \mu}{\partial \nu} = \exp\left(-\int_0^t \gamma(x) dW(x) - \frac{1}{2} \int_0^t \gamma(x)^2 dx\right) = L(t)$$

(notare che giustamente $\langle L \rangle = 1$)

L'ipotesi del problema è solo che L sia rinormalizzabile, cioè $\exp(\frac{1}{2} \int_0^t \gamma(x)^2 dx)$ sia finito.

Infine, $B(t) = e^{rt}$ (cioè il processo di guadagno deterministico) è detto numeraire. L'ipotesi del teorema è che non ci sia arbitraggio.

29 Fatti in disordine

Per piccoli intervalli di tempo S è costante, la variazione di prezzo è gaussiana.

Volatility smile La volatilità varia nel tempo, come la misuro? (non posso fare medie se varia).

Dal prezzo delle Option: varia a seconda dello strike price e dell'asset value! In particolare supponendo il prezzo dell'asset circa costante nell'intervallo di tempo considerato, cioè $dS = S_0 \sigma dW$ e supponendo la dW non gaussiana, ma somma di N distribuzioni con curtosi $\neq 0$, posso calcolarmi la variazione del prezzo delle call usando i polinomi di Chebishev Q_2 (suppongo Q_1 nullo se la distribuzione dW è pari, come mi aspetto) e la curtosi diversa da 0. Si trova una correzione che va come

$$\Delta C(t) \propto \frac{\hat{k}_4 (K - S(t_0))^2}{\sqrt{T} \sigma^2 S(t_0)^2} e^{-\frac{(K - S(t_0))^2}{2\sigma^2 S^2(t_0)T}}$$

Cioè va giù per tempi lunghi. Posso quindi trovare la nuova volatilità calcolata col "vecchio" prezzo della call:

$$\Delta C = \delta \sigma \frac{\partial C}{\partial \sigma}$$

Si trova il volatility smile:

$$\delta \sigma \propto \hat{k}_4 \frac{(K - S(t_0))^2}{T}$$

ovvero la volatilità cresce all'aumentare della differenza fra strike price e spot price e va giù con l'expiry date T .

Scala dei prezzi Variazione di prezzo dovuta a tante cause, moneta che varia, crescita economica, fluttuazioni random.

Si possono considerare varie variabili per tempi brevi sono più o meno equivalenti: differenza di prezzi, cambiamento di prezzi scontato (moltiplico per la deflazione che tiene conto della variazione della moneta), ritorno (variazione in rapporto al valore del prezzo) [+ = variazione percentuale; - = se cambio l'intervallo di tempo guardato cambia], logaritmo del ritorno più uno (incremento del logaritmo) [qui se cambio il tempo mi aspetto cambi linearmente, ma non è una relazione lineare]. Per tempi lunghi le cose cambiano.

scala dei tempi tempo fisico, del mercato (cioè tiene conto solo di quando sono aperti i mercati, all'apertura e chiusura fa casini), numero di transazioni.

correlazioni, processi stazionari, asintoticamente staz o di ordine N: nei mercati finanziari le correlazioni sono solo a tempi brevi, tempi lunghi = gaussiana ma la volatilità varia

legge di scala della varianza: du vase wigner per tempi da un giorno a 3 mesi, sotto i trent minuti $\sigma \propto t^{0.8}$ regime superdiffusivo

Si studia la variazione nel tempo della volatilità, visto che il decadimento della correlazione a due punti non è così utile in processi non lineari (cioè varianza non lineare nei tempi), la varianza è correlata anche a tempi lunghi come $t^{-0.3}$ circa

processi infinitamente divisibili: requisito come modello per i prezzi (distr uniforme non lo è, la Γ sì, ad es), voglio distr leptocurtiche, t student, truncated levy, somma di gaussiane, Levy normale con $\alpha = 1.4$, Levy non ha varianza, student cambia con la scala e non è stabile, somma di gaussiane non ha una legge di scala (il processo è diretto dalla $P(\Omega)$ che dà la distribuzione del volume delle transazioni. Cosa vuol dire legge di scala? so che la varianza varia linearmente nel tempo, a varianza fissa posso trovare $P(0)$, la probabilità di tornare nell'origine e vedo come dipende dal tempo di osservazione.

Truncated Levy non è stabile ma tende dopo un po' ad una gaussiana, il numero critico da distribuzioni da

sommare è $N \propto \hat{k}_4 \propto \lambda^{-\alpha} \frac{1}{1-\alpha}$, perchè il polinomio di chebishev Q_2 ha come prefattore $\frac{k_4}{N}$
 Per intervalli di tempo piccoli lo scaling è di Levy:

$$P(0) \propto t^{-\frac{1}{\alpha}}$$

compatibile con $\alpha = 1.4$.

Unico problema del modello è che i parametri α, γ, l variano nel tempo (l credo sia il cutoff, γ è l'andamento della correlazione per la volatilità $\frac{1}{t^\gamma}$)

Detto in altri termini, ci sono più eventi rari del previsto.

Modelli per volatilità variabile: garch e arch

Garch (1,1) e Arch(1) possono aggiustare curtosi e varianza della distribuzioni, inoltre la correlazione sulla varianza decade su un tempo caratteristico $\tau^{-1} = \ln(\alpha + \beta)$ che può essere reso arbitrariamente lungo. In realtà si ha un decadimento a potenza di solito (con $\gamma \approx 0.3$), quindi τ lo si prende lungo (due mesi circa) per simulare questo fatto. Per un ARCH semplice si ha che $\sigma^2 \propto \frac{1}{1-3\alpha_1^2}$, quindi τ Non lo si può prendere arbitrariamente lungo

La legge di scaling non è buona (scala come una gaussiana) ma ci becca sia per il limite gaussiano, sia cambiando scala dei prezzi (cioè il volume delle azioni scambiate). Tuttavia, andando a guardare Δt sopra il minuto, scazza.

Correlazioni nel portfolio e rischio: voglio minimizzare la volatilità, scrivo la volatilità come una forma quadratica dei vari prezzi

$$\sigma^2 t = Cov S_i, S_j$$

e cerco gli autovalori minimi, gli autovettori corrispondenti minimizzano il rischio

$$\Pi = \sum_i w_i S_i$$

$$R^2 = \sum_i w_i \sigma_i w_j \sigma_j C_{ij}$$

dove C_{ij} è la correlazione, quindi in pratica è $w_i w_j Cov_{ij}$. ho il vincolo di avere una quantità di soldi limitata.

C_{ij} è una matrice random? dalla distribuzione di autovalori di $C = \frac{1}{L} G G^T$ (in generale G_{ij} è $N \times L$ che contiene il valore dell'incremento del logaritmo prezzo i al giorno j , L è il numero di giorni osservati) si vedono degli outliers, in particolare la RMT predice

$$Q = \frac{L}{N} \quad \lambda_{\pm} = \left(1 \pm \sqrt{\frac{1}{Q}} \right)^2 \quad P(\lambda) = \frac{Q}{2\pi} \frac{\sqrt{(\lambda_+ - \lambda)(\lambda - \lambda_-)}}{\lambda}$$

Mischiando fra loro i dati (cioè per ogni S_i scambio a caso i valori nel tempo in modo diverso, in modo tale da aggiungere randomicità) si ha accordo perfetto, quindi c'è dinamica nascosta. (il fit lo faccio al variare di λ_{\pm})

Posso anche studiare la distanza media fra gli autovalori con il GOE, (distribuzione $\Gamma_0(x)$) o la Brody ($\propto s^\beta \exp(-Bs^{1+\beta})$) La matrice di correlazione $P(\rho_{ij})$ ha media positiva, legata all'indice della borsa, cioè al fatto che i prezzi sono racchiusi in pochi indicatori

Spazi ultrametrici: introduco una distanza $d_{ij}^2 = \langle (\tilde{S}_i - \tilde{S}_j)^2 \rangle = 2(1 - \langle \rho_{ij} \rangle)$ (il tilde serve solo a dire che ho traslato S_i per ottenere media nulla e varianza unitaria; S_i è sempre l'incremento del logaritmo). Spazio ultrametrico = distanza triangolare più forte

$$d_{ij} \leq \max\{d_{ik}, d_{kj}\}$$

Posso costruirci il Minimal spanning tree (def albero che minimizza la somma di tutti gli archi): algoritmo di Kruskal, ho tanti punti e tante connessioni possibili d_{ij} , ogni volta aggiungo la più piccola possibile di quelle rimanenti, a patto che non crei loops, finchè il grafo non diventa un albero: struttura a clusters

Crash finanziari: il **drawdown** è la diminuzione percentuale fra un max locale e il successivo minimo locale. Empiricamente, questi seguono una distribuzione esponenziale, tuttavia le code scazzano: i tre crash dell'ultimo secolo dovrebbero avvenire con probabilità mille volte più bassa.

La struttura generale che si osserva è a gradini (più oscillazioni): gradini sempre più stretti: non sono statistiche (tutti vendono)

SOrnette: considero l'Hazard rate $h(t)$ cioè la probabilità di fare un crash per unità di tempo, e lo scrivo in modo analogo ad una transizione di fase

$$h = \frac{1}{(t - t_c)^\gamma} (B_0 + B_1 \cos(\omega \ln(t - t_c) + \phi))$$

Inoltre assumo che $\mu \propto h$ quindi posso ricavarne la distribuzione della media dei prezzi, e da lì controllo con i dati: c'è buon accordo, ma il tempo t_c è sovrastimato, gli esponenti $\beta = 1 - \gamma$ e ω non sono universali, e ci sono troppi parametri da fittare e non è detto che il crash ci sia davvero

A Probabilità e definizioni elementari

A.1 Densità spettrale

Definizione A.1 (ensemble). Quando si ha una variabile casuale reale dipendente dal tempo x , conviene introdurre il concetto di **ensemble**. Un ensemble è un insieme di tante copie del nostro sistema casuale. Supponendo di avere, ad esempio, N copie; se la probabilità di avere il sistema nello stato x al tempo t è $p(x)$, allora $n(x) = p(x)N$ di queste copie al tempo t saranno proprio x_i , ovvero la probabilità di avere il sistema in un certo stato si traduce, con l'ensemble, nell'avere un certo numero di copie del sistema in quello stato. Indicizzo le varie copie del sistema con x_i . Ciascuna di queste copie ha una certa evoluzione temporale $x_i(t)$ che è **fissata**, perchè una copia del sistema nell'ensemble corrisponde, in pratica, ad una **possibile evoluzione del sistema**.

Nell'esempio pratico di un segnale casuale (ad esempio del rumore), supponendo di osservare il segnale nel tempo N volte, si avranno tanti campionamenti, ciascuno dei quali sarà indicato con $x_i(t)$.

In questo linguaggio, per avere il valor medio della variabile x al tempo t , bisognerà fare una media **sull'ensemble** al tempo t :

$$\langle x(t) \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i(t)$$

Per indicare la media sull'ensemble si userà il simbolo $\langle \bullet \rangle$

Fatto 13. Il fatto che ogni elemento dell'ensemble dipenda da t non ha nulla a che fare con la stazionarietà del processo; ovvero parlando di ensemble nel caso di processo stazionario si avrà comunque per il singolo elemento dell'ensemble (ovvero un singolo campionamento) dipendenza da t , il punto è che questa dipendenza sparisce ogni volta che si fa la media sull'ensemble.

Un'altra importante considerazione da fare nel caso di processo stazionario è che fare la media sull'ensemble (non importa l'istante di tempo in cui la si fa, il processo è stazionario) e fare la media temporale di un **singolo elemento dell'ensemble** è equivalente per sistemi ergodici. Un sistema ergodico è un sistema che, dopo abbastanza tempo, "visita" tutte le sue possibili configurazioni. Nel caso di un sistema ergodico, quindi, basta avere anche solo **una** copia del sistema, che mediata per abbastanza tempo sarà equivalente ad avere un ensemble.

Esempio A.1. Ora conviene dare un esempio pratico di ensemble nel caso di processo stazionario.

Il nostro ensemble sarà indicizzato da un parametro continuo (nel limite in cui si ha un ensemble infinito questa è una buona modellizzazione) $\phi \in [0, 2\pi]$; ogni singolo elemento dell'ensemble sarà quindi pesato con $\frac{d\phi}{2\pi}$.

L'elemento ϕ dell'ensemble sarà x_ϕ definito da:

$$x_\phi(t) = \cos(\omega t + \phi)$$

Questo ensemble è stazionario perchè, campionando ad un istante di tempo t fissato, la distribuzione di probabilità per x è indipendente dal tempo.

Mostriamolo con i conti: la probabilità è associata al peso nell'ensemble, cioè $|d\phi| \frac{1}{2\pi}$

$$x = \cos(\omega t + \phi) \implies dx = -\sin(\omega t + \phi) d\phi = \sqrt{1 - x^2} d\phi$$

$$dp_{(x)} = \frac{|d\phi|}{2\pi} = \frac{|dx|}{2\pi\sqrt{1-x^2}} \implies W_{(x)} = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-x^2}}$$

Una volta campionato il segnale in un istante di tempo, misura che seguirà la distribuzione appena ottenuta, il segnale successivo sarà determinato univocamente.

A.2 Densità spettrale

Supponiamo ora di avere un processo stazionario e di considerare un elemento dell'ensemble $x_{(t)}$. Si possono definire media quadratica temporale e distribuzione spettrale per questo processo. Facendo la media quadratica su un intervallo di tempo $2T$ bisogna poi dividere per l'ampiezza dell'intervallo. Dato che si immagina di avere oscillazioni molto più rapide del tempo di misura, si prende il limite $T \rightarrow \infty$; la notazione per le medie temporali (diverse da quelle sull'ensemble) è $\bar{\cdot}$:

$$\bar{x}^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x_{(t)}^2 dt$$

Se il sistema è ergodico è equivalente fare medie temporali o su ensemble, e si ha:

$$\bar{x}^2 = \langle x^2 \rangle$$

Vorremmo trovare come l'energia (che si suppone proporzionale a x^2) è distribuita in frequenza. Per farlo, vorrei usare il teorema di Parseval su $x_{(t)}$: il problema è che questa funzione non è a quadrato integrabile; per sistemare le cose definisco

$$x_T(t) = x_{(t)} \chi_{[-T, T]}(t)$$

dove χ è la funzione caratteristica. Allora x_T è a quadrato integrabile, perchè a supporto compatto, quindi vale il teorema di Parseval:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x_T^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{x}_T(\omega)|^2 d\omega$$

dove $\tilde{x}_T(\omega)$ è la trasformata di Fourier.

$$\tilde{x}_T(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_T e^{i\omega t} dt$$

Si ha allora:

$$\bar{x}^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x_{(t)}^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{+\infty} x_T^2(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{x}_T(\omega)|^2 d\omega$$

Ed è naturale a questo punto definire la densità spettrale in potenza $S_{(\omega)}$ in modo tale che $\int_{-\infty}^{+\infty} S_{(\omega)} d\omega = \langle \bar{x}^2 \rangle$:

$$S_{(\omega)} = \left\langle \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T(2\pi)} |\tilde{x}_T(\omega)|^2 \right\rangle \quad (36)$$

A.3 Funzione di Correlazione

Definizione A.2. Date due funzioni a quadrato integrabile si definisce la correlazione su un tempo τ :

$$G_{fg}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt f(t) g(t + \tau)$$

che è sostanzialmente il prodotto di convoluzione di $f_{(-t)}$ con $g_{(t)}$.

Dato che il la trasformata di Fourier del prodotto di convoluzione è il prodotto delle trasformate di Fourier delle due funzioni e che la trasformata di Fourier per funzioni f reali ha la proprietà

$$\mathcal{F}[f_{(-t)}](\omega) = \mathcal{F}[f_{(t)}]^*(\omega)$$

Si può scrivere allora:

$$\tilde{G}_{fg} = \mathcal{F} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} dt f(t) g(t + \tau) \right) = \mathcal{F} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} dt f(-(-t)) g(t + \tau) \right) = \quad (37)$$

L'argomento della trasformata di Fourier è la convoluzione di $f_{(-t)}$ e $g(t)$, quindi la sua trasformata è il prodotto delle trasformate.

$$= \mathcal{F}[f_{(-t)}](\omega) \mathcal{F}[g(t)](\omega) = \tilde{f}^* \tilde{g} \quad (38)$$

L'autocorrelazione di una funzione è definita come la funzione di correlazione della funzione f con se stessa.

Si vuole ora definire la funzione di autocorrelazione per il nostro elemento dell'ensemble; come prima c'è il problema che $x_{(t)}$ non è a quadrato integrabile; pertanto si passa alle medie temporali:

$$G_{(\tau)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T dt x_{(t)} x_{(t+\tau)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{+\infty} dt x_{T(t)} x_{T(t+\tau)}$$

Da cui utilizzando il fatto 38 si ottiene:

$$\tilde{G} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \tilde{x}_T^*(\omega) \tilde{x}_T(\omega) = 2\pi S_{(\omega)}$$

Esplicitando l'antitrasformata di Fourier si ha l'importante relazione:

$$G_{(\tau)} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{(\omega)} e^{-i\omega\tau} d\omega \quad (39)$$

e viceversa

$$S_{(\omega)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G_{(\tau)} e^{i\omega\tau} d\tau$$

Esempio A.2 (rumore bianco). Una variabile casuale del tipo di Wiener ha potere spettrale costante a tutte le frequenze

$$\frac{dW(t)}{ddt} = \xi(t) \\ \langle \xi(t) \xi(t + \tau) \rangle = \delta(\tau) \implies |\tilde{\xi}(\omega)|^2 = 1$$

Esempio A.3 (rumore marrone). è il rumore prodotto da un segnale casuale che è l'integrale di un processo di Wiener

$$A(t) = \int_{t_0}^t dW(x) \quad \xi = \frac{dA}{ddt} \quad \xi(\omega) = -i\omega A(\omega)$$

in trasformata si ha

$$\langle \xi(\omega) \xi \Omega \rangle = \langle \omega^2 A(\omega) A^*(\omega) \rangle = 1 \implies \langle |A(\omega)|^2 \rangle = \frac{1}{f^2}$$

Quindi va giù come $\frac{1}{f^2}$

Esempio A.4 (rumore rosa). detto anche rumore $\frac{1}{f}$, ha l'andamento tipico $\frac{1}{f}$

Un processo è correlato a tempi lunghi se l'integrale della sua correlazione sul tempo diverge. In questo caso, il valore di aspettazione di $\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_i x_i$ divergerebbe (perchè i doppi prodotti, che sono determinati dalla correlazione, divergono)

B Equazioni di Navier-Stokes

L'equazione $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ per un fluido è:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^2 \mathbf{v}$$

Per un fluido incompressibile, vale inoltre:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

C Metodo delle caratteristiche

Supponiamo di avere un'equazione **lineare** alle derivate parziali in due variabili (il caso più semplice, ma generalizzabile)

$$\frac{\partial z}{\partial x}a(x, y, z) + \frac{\partial z}{\partial y}b(x, y, z) = c(x, y, z)$$

La soluzione è una superficie in \mathbb{R}^3 , parametrizzata da x, y :

$$(x, y, z(x, y))$$

I vettori tangenti a questa superficie si trovano differenziando rispetto ad x o y , ad esempio

$$\left(dx, 0, \frac{\partial z}{\partial x}dx\right) \propto \left(1, 0, \frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

Da cui si vede che il vettore normale ad entrambi ai vettori tangenti, e quindi alla superficie, è

$$\mathbf{t} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, -1\right)$$

Questo vettore è perpendicolare a

$$(a(x, y, z), b(x, y, z), c(x, y, z))$$

perchè, facendo il prodotto scalare con il vettore normale, si ritrova l'equazione differenziale iniziale (e quindi viene 0).

Usando questa osservazione, si può trovare una soluzione particolare dell'equazione differenziale cercando una curva punto per punto parallela al vettore dato:

$$d\gamma = (dx, dy, dz) \quad \frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{dz}{c} \quad (40)$$

parametrizzando la curva, ad esempio con t , si hanno le equazioni di **Lagrange-Charpit**.

$$\frac{dx}{dt} = a \quad \frac{dy}{dt} = b \quad \frac{dz}{dt} = c$$

Come fa uno a trovare la soluzione generale? Beh si parte da una condizione iniziale, che geometricamente è una curva che sta nella superficie della soluzione (in caso di \mathbb{R}^n è una $n - 2$ varietà). Poi ciascun punto iniziale di questa curva fa parte di una diversa curva γ definita prima, che è soluzione dell'equazione differenziale; il risultato è la superficie della soluzione.

Algebricamente il modo di procedere è il seguente: si risolvono le due equazioni 40, ad esempio

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b}$$

chiamando u la costante di integrazione¹⁶, si ottiene qualcosa del tipo

$$u = \int \frac{dx}{a} - \int \frac{dy}{b}$$

analogamente

$$v(x, y, z) = \int \frac{dz}{c} - \int \frac{dy}{b}$$

Muovendosi sulla curva γ , sia u che v sono costanti (perchè rispettano le equazioni di Charpit), quindi viene rispettata l'equazione:

$$f(u, v) = 0$$

¹⁶La costante di integrazione descrive le varie condizioni iniziali da cui partono le curve, quindi variarla vuol dire andare a cercare le varie curve al variare del punto iniziale

o, equivalentemente

$$u = f(v)$$

con f **arbitraria**. (dato che u, v sono costanti sulla curva γ è chiaro che si può imporre una condizione del genere). Questa f viene trovata imponendo le condizioni iniziali:

$$f(u(z(x, y_0), x, y_0), v(z(x, y_0), x, y_0)) = 0$$

Dato che si ha una soluzione che rispetta le condizioni iniziali e anche il movimento lungo γ , per definizione si ha la soluzione dell'equazione differenziale.

Per un esempio esplicito, guarda 7.5.4.

D Trasformata di Mellin

Data una funzione $f(x)$:

$$F(p) = \int_0^\infty f(x)x^{p-1}dx$$

(questa cosa è lecita se questo integrale converge assolutamente)

Come ogni trasformata, esiste l'inversa:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{1}{x^p} F(p) dp$$

Dove c è un numero complesso che si trova in una fascia del piano complesso del tipo $\Re z \in [a, b]$, in cui $F(p)$ è analitica.