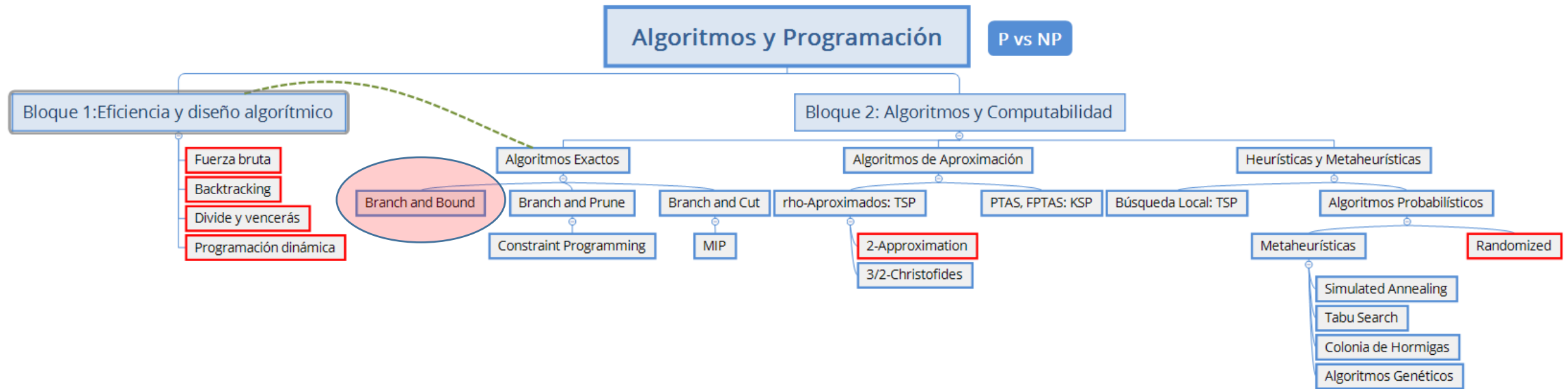
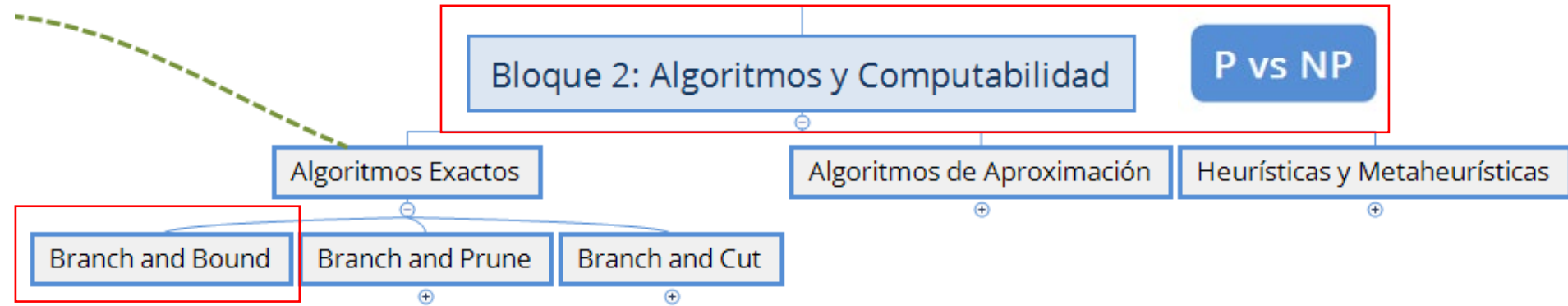


Bloque 2: Algoritmos y Computabilidad

Estrategia de
Ramificación y
Acotación (Branch and
Bound)





Tema 3. Complejidad computacional [4 horas]

3.1 Complejidad computacional de un problema. Problemas P vs NP

3.2 Ramificación y Acotación

Objetivos

- Introducción a la técnica de Ramificación y Acotación (Branch&Bound)
- Valor de la relajación

Formalización de un problema

1. Elegir las **variables de decisión**
2. Expresar las **restricciones** del problema en función de estas variables
3. Determinar la **función objetivo**

En una **formulación declarativa**, se trata no tanto de plantear cómo resolver el problema, sino de especificar cómo representar el problema. Puede existir más de una forma de representar dicho modelo.

Problema de la mochila

- El problema de la mochila, o *knapsack* en inglés (KS), es uno de los 21 problemas NP-Completo de la lista de Richard Karp (1972).
https://es.wikipedia.org/wiki/Problema_de_la_mochila
- Este problema se usó como base de varios criptosistemas asimétricos (Merkle-Hellman, Graham-Shamir).
<http://www.tierradelazaro.com/criptosistema-de-la-mochila>

Dado un conjunto de ítems I , y una mochila de capacidad K , encontrar el subconjunto de ítems en I que maximice el valor de la mochila sin exceder la capacidad de la misma, K

Formalización problema de la mochila

- **Variables de decisión**

x_i , denota si un ítem forma parte de la solución o no

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{si el ítem está en la mochila} \\ 0, & \text{si el ítem no está en la mochila} \end{cases}$$

- **Restricciones**

$$\sum_{i \in I} w_i x_i \leq K$$
$$x_i \in \{0,1\}$$

- **Función objetivo**

$$\text{Maximizar } \sum_{i \in I} v_i x_i$$

Parámetros:

K : capacidad de la mochila

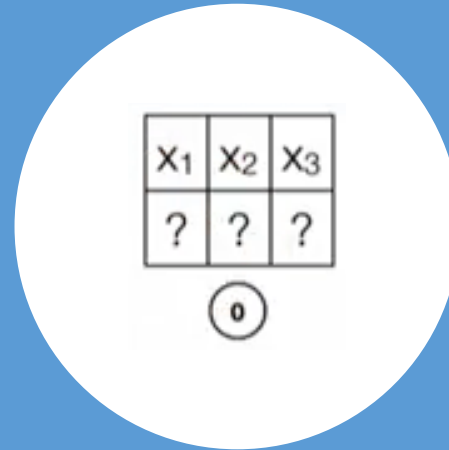
w_i : peso del ítem i

v_i : valor del ítem i

Mochila de
una
dimensión

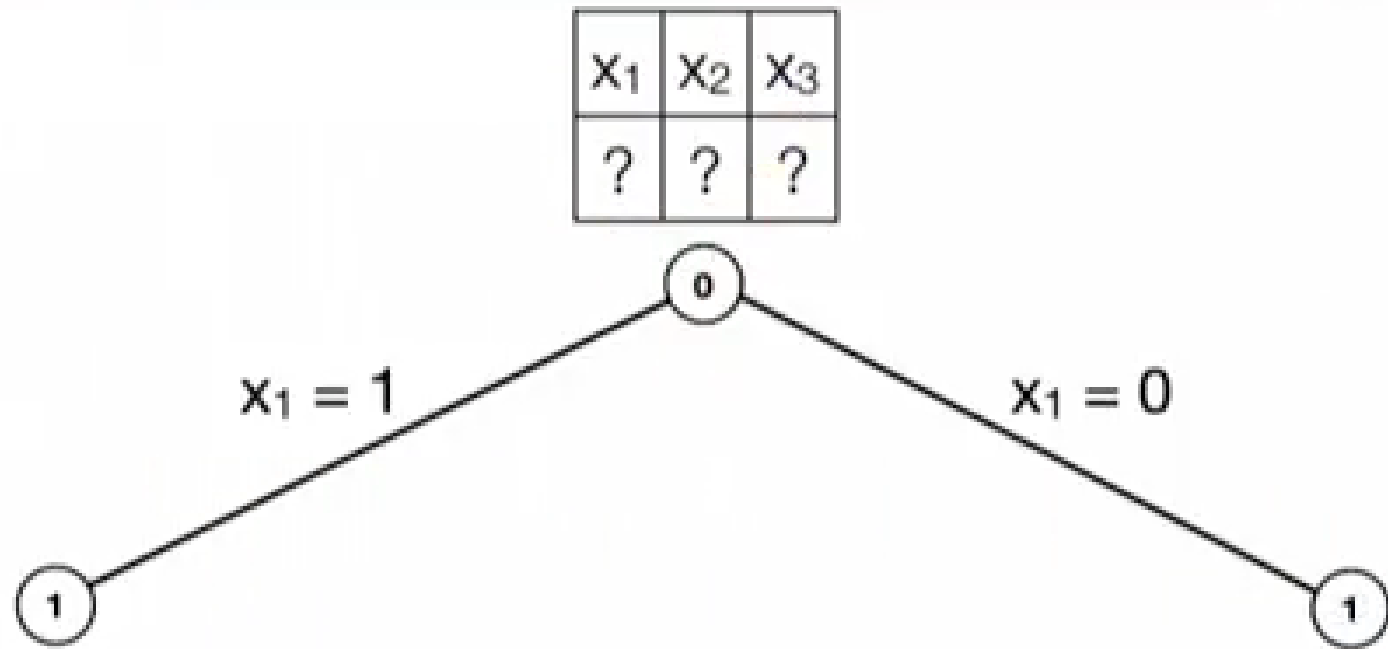
Maximizar $45x_1 + 48x_2 + 35x_3$

Dado, $5x_1 + 8x_2 + 3x_3 \leq 10$
 $x_i \in \{0, 1\} \quad (i \in 1..3)$

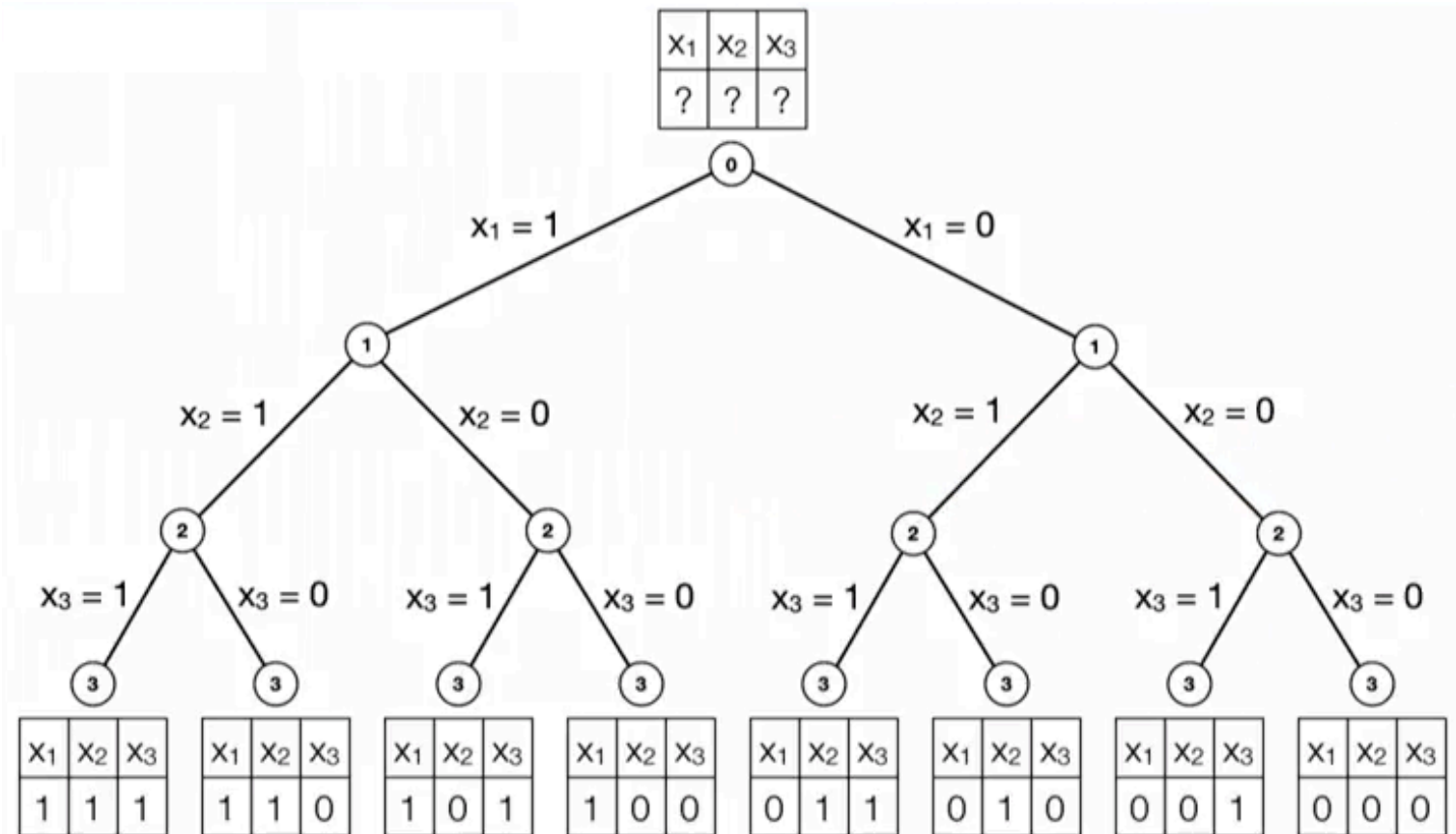


Búsqueda exhaustiva

Búsqueda exhaustiva



Búsqueda exhaustiva



Ramificación y Acotación

- 2 pasos iterativos
 - Ramificación (*Branch*)
 - Acotación (*Bound*)
- Ramificación
 - Divide el problema en subproblemas (al igual que la búsqueda exhaustiva)
- Acotación
 - Busca una estimación óptima de la mejor solución del subproblema
 - Maximizar: límite superior
 - Minimizar: límite inferior
- ¿Cómo encontrar la estimación óptima?

Ramificación y Acotación

Maximizar $45x_1 + 48x_2 + 35x_3$

Dado, $5x_1 + 8x_2 + 3x_3 \leq 10$
 $x_i \in \{0, 1\} \quad (i \in 1..3)$

- ¿Cómo encontrar una estimación óptima?
 - Relajación!
- Optimizar es el arte de relajar las restricciones
- ¿Qué podemos relajar?
 - La restricción de capacidad

Ramificación
y Acotación
(en
profundidad)
LIFO

n = número de elementos, 3

i	V_i	W_i
1	45	5
2	48	8
3	35	3

$K = 10$

\$0
10
\$128

Value
Room
Estimate

Ramificación
y Acotación
(en
profundidad)
LIFO

n= número de elementos, 3

i	V _i	W _i
1	45	5
2	48	8
3	35	3

K = 10

taken = []

\$0
10
\$128

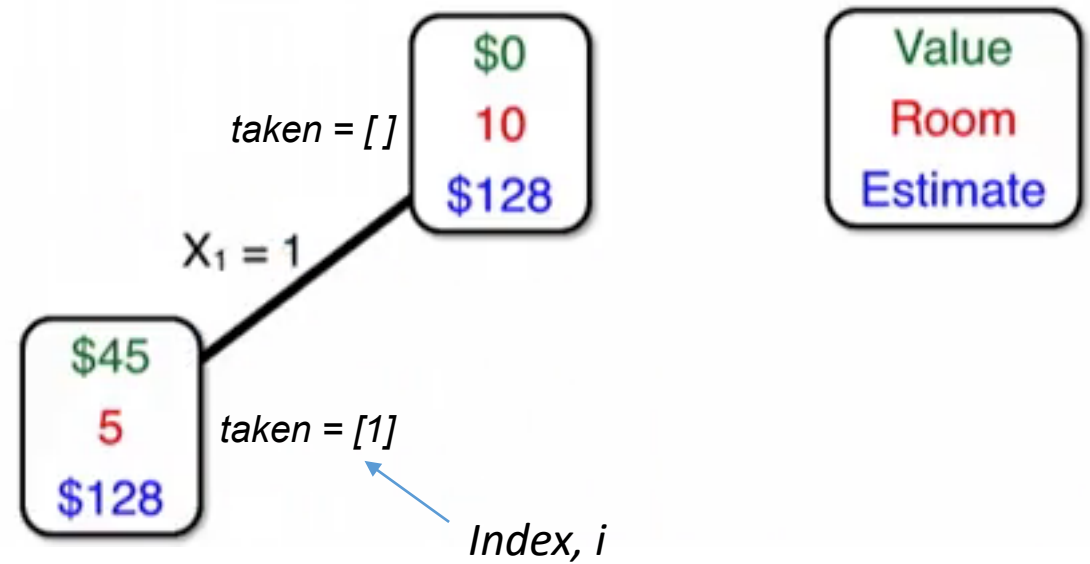
Value
Room
Estimate

$$\sum_{i=1}^n V_i = \$128$$

Ramificación y Acotación (en profundidad)

i	V_i	W_i
1	45	5
2	48	8
3	35	3

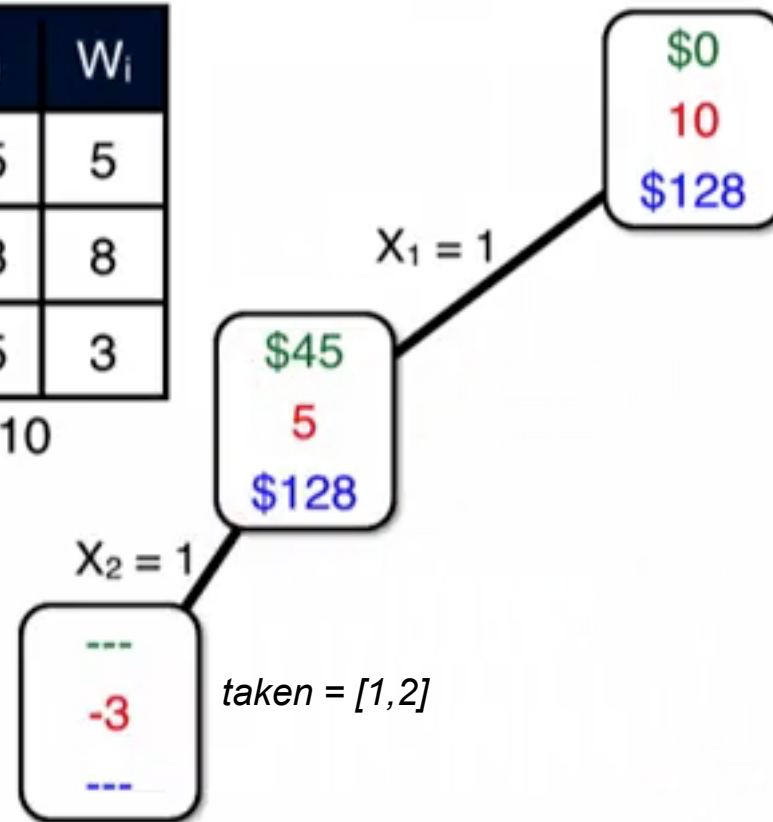
$K = 10$



Ramificación y Acotación (en profundidad)

i	V_i	W_i
1	45	5
2	48	8
3	35	3

$K = 10$

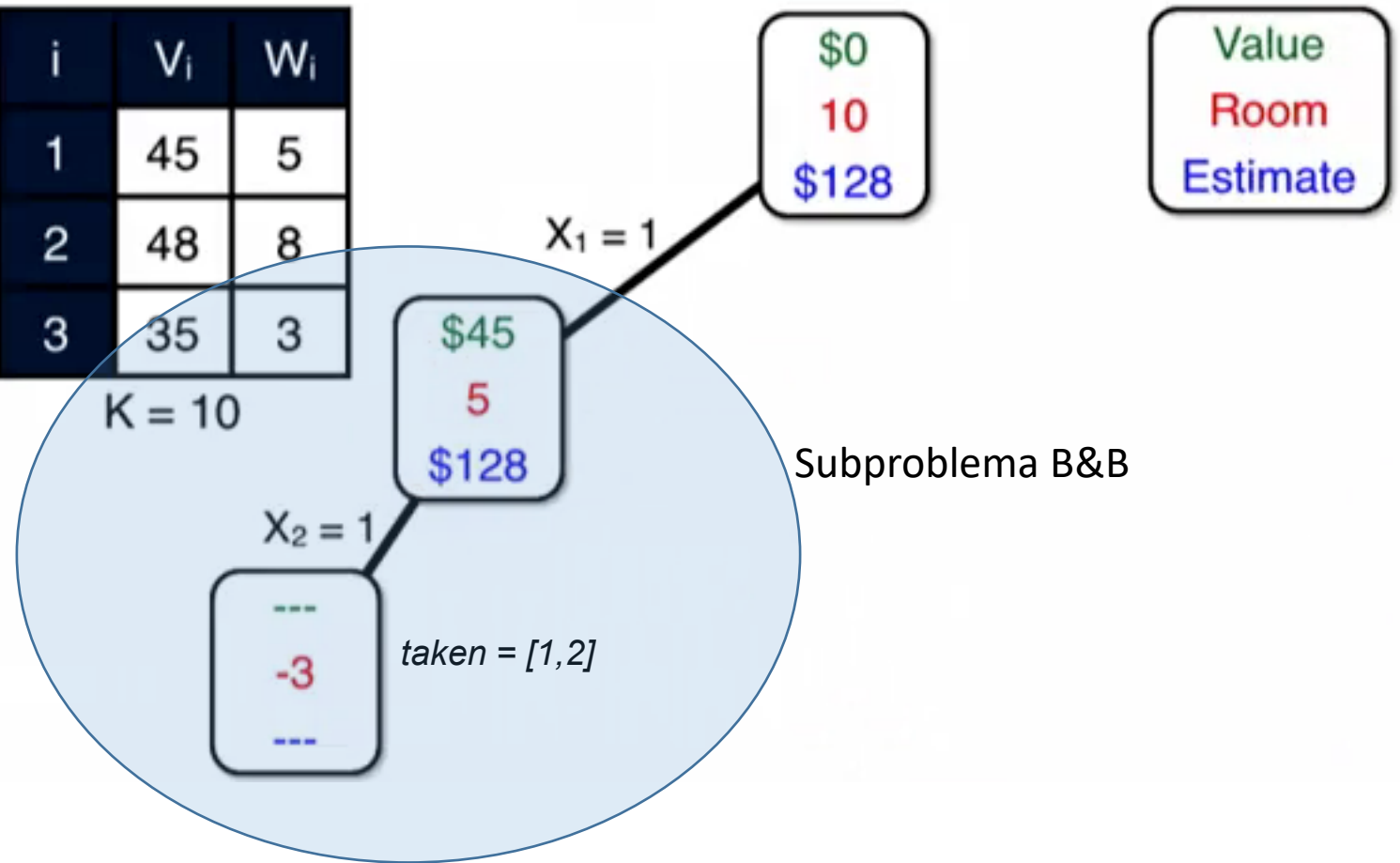


Value
Room
Estimate

Ramificación y Acotación (en profundidad)

i	V_i	W_i
1	45	5
2	48	8
3	35	3

$K = 10$

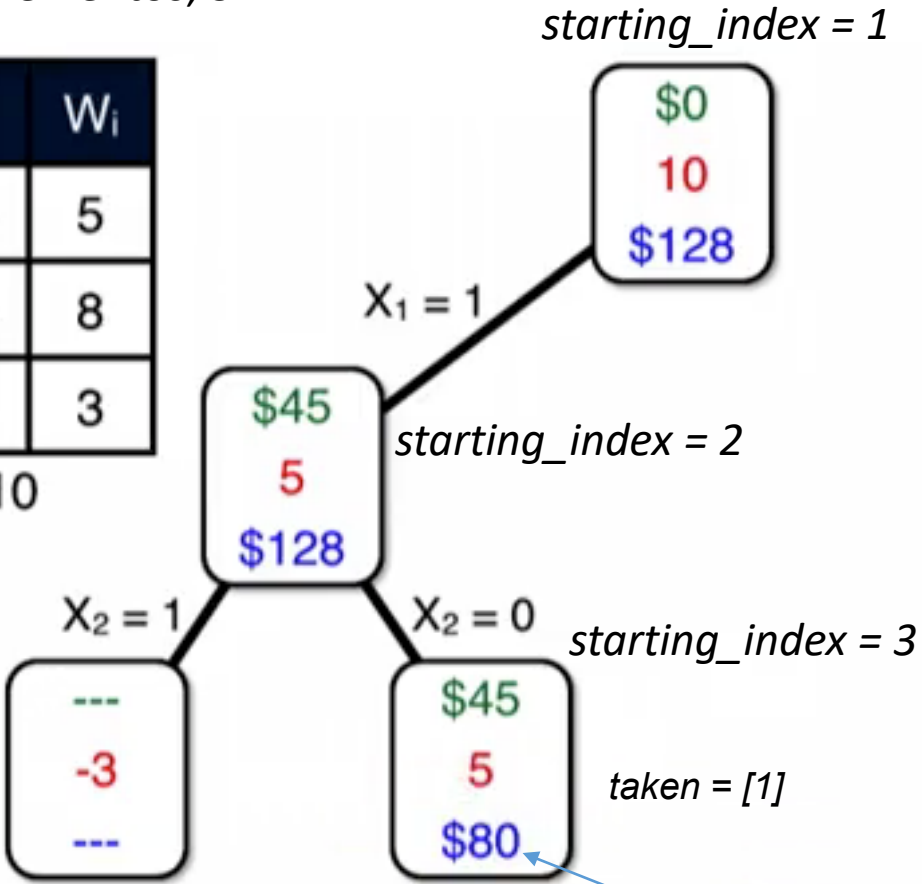


Ramificación y Acotación (en profundidad)

n= número de elementos, 3

i	V _i	W _i
1	45	5
2	48	8
3	35	3

K = 10



Value
Room
Estimate

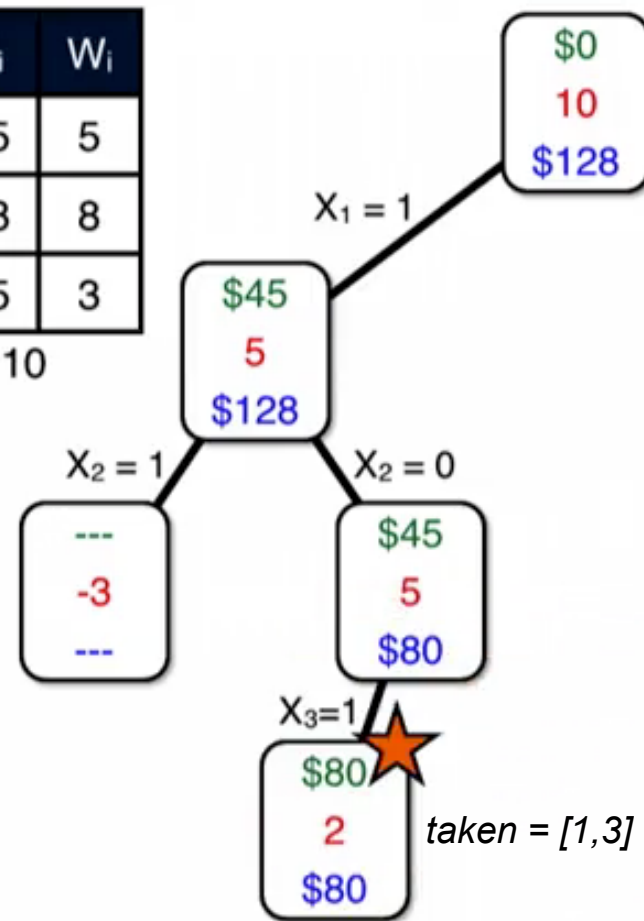
$$\sum_{i=starting_index}^n V_i = \$35$$

estimate = value + bound
\$80 \$45 \$35

Ramificación y Acotación (en profundidad)

i	V_i	W_i
1	45	5
2	48	8
3	35	3

$K = 10$

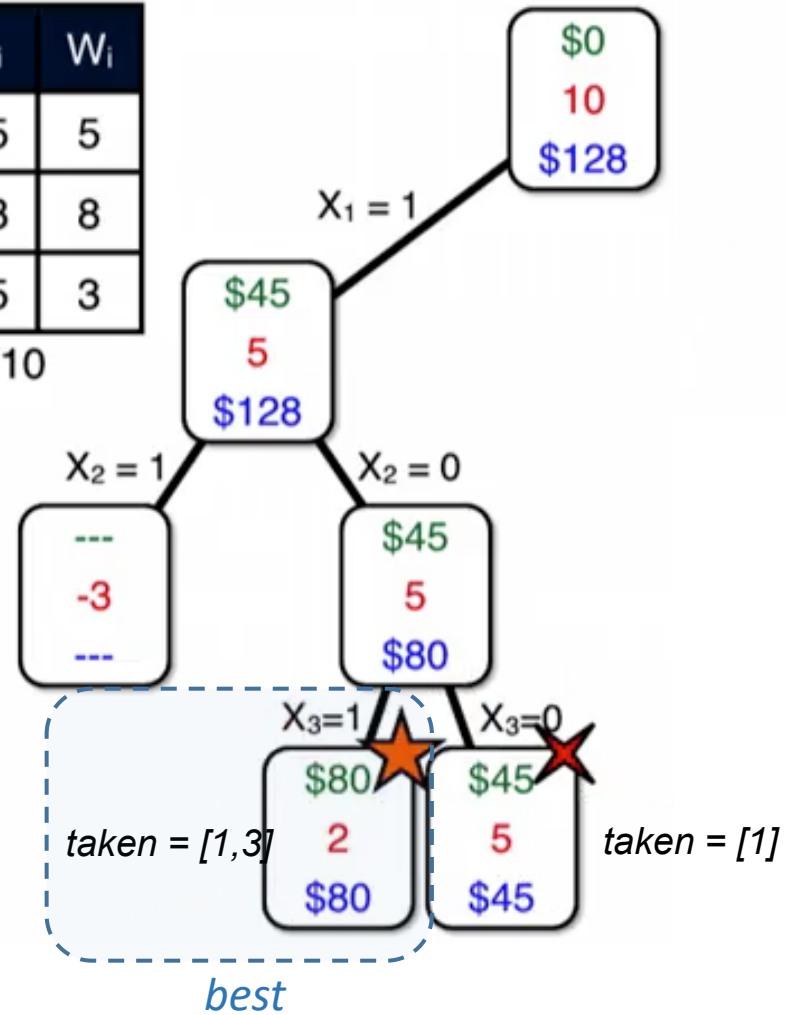


Value
Room
Estimate

Ramificación y Acotación (en profundidad)

i	V_i	W_i
1	45	5
2	48	8
3	35	3

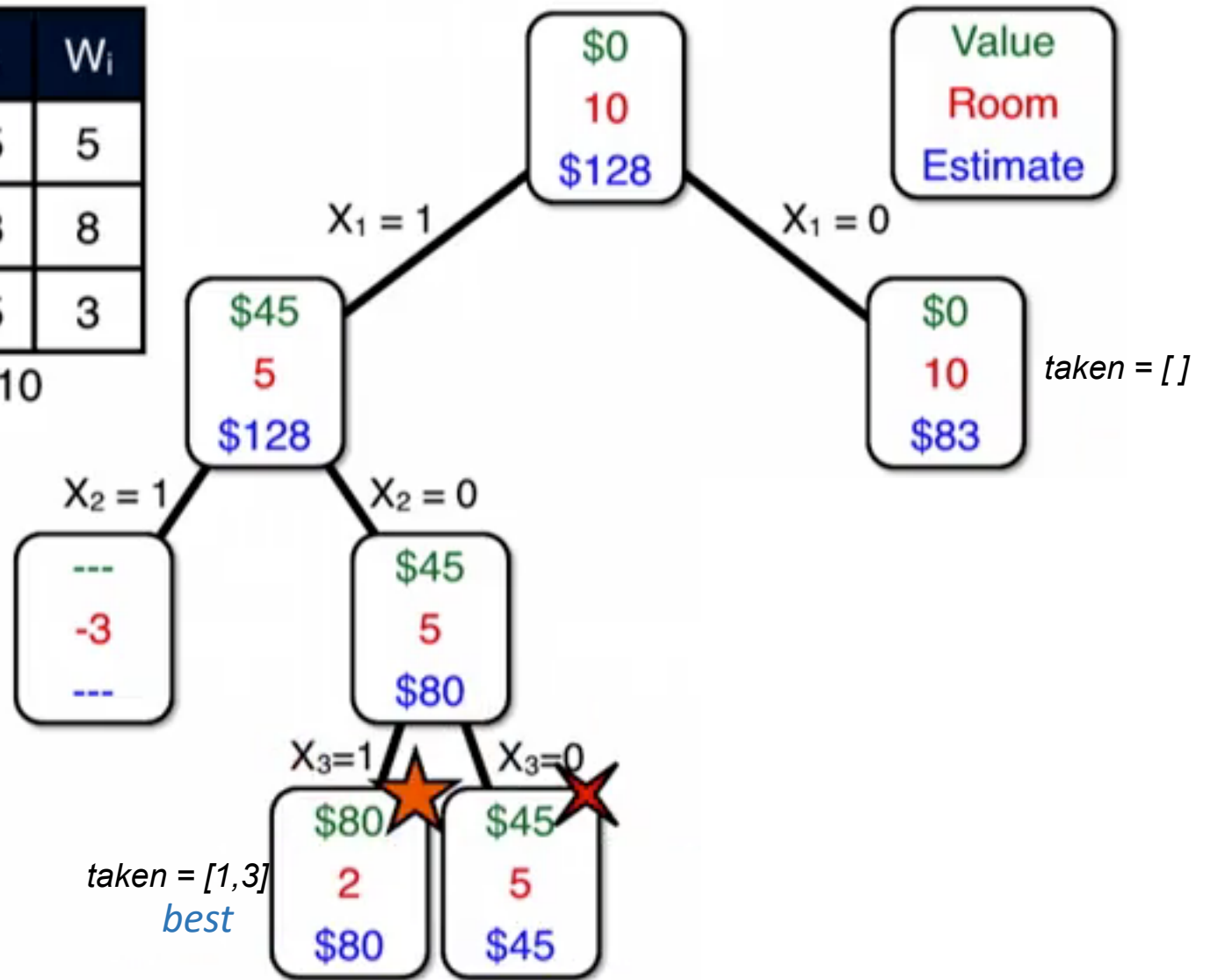
$K = 10$



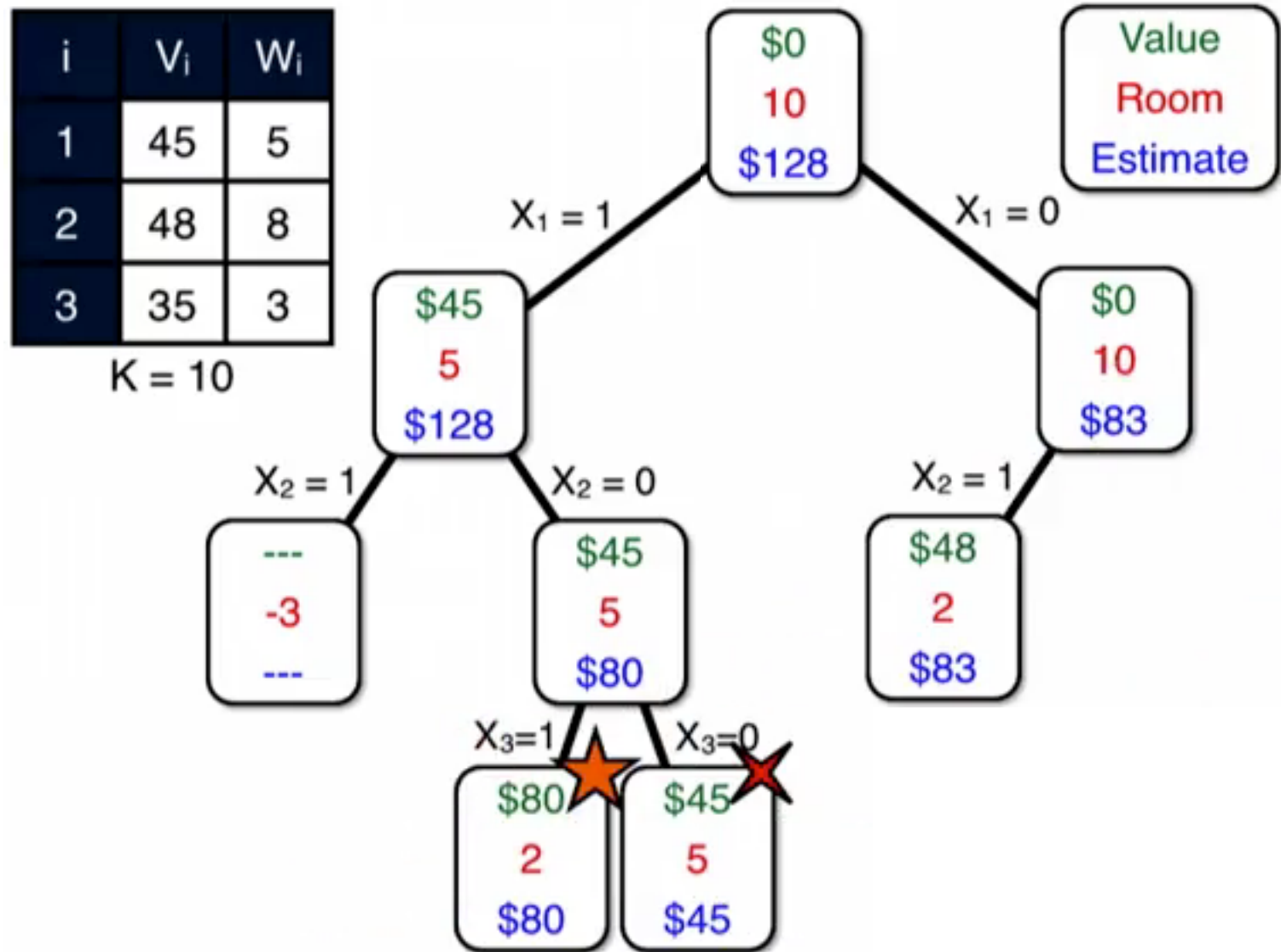
Ramificación y Acotación (en profundidad)

i	V _i	W _i
1	45	5
2	48	8
3	35	3

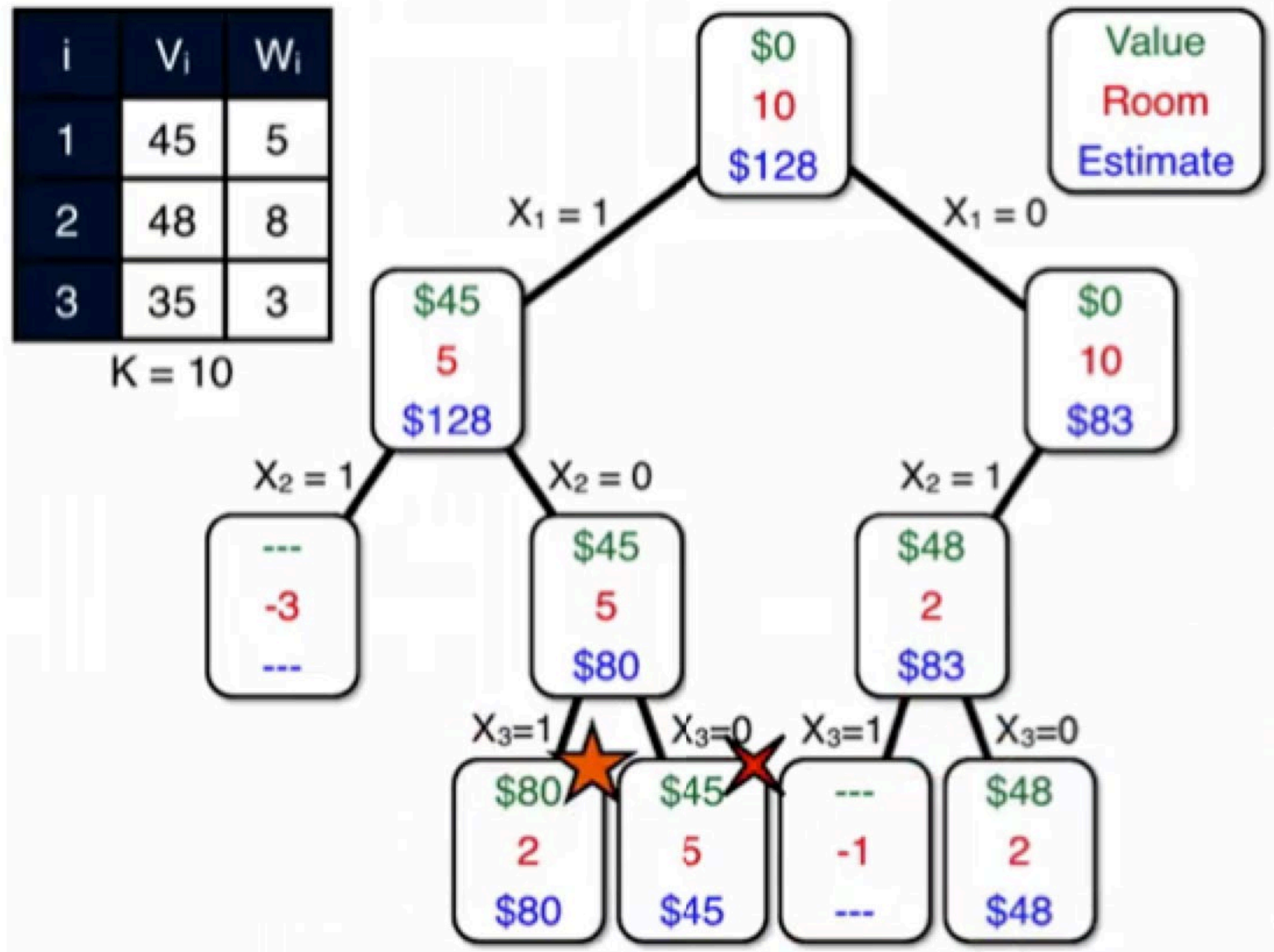
K = 10



Ramificación y Acotación (en profundidad)



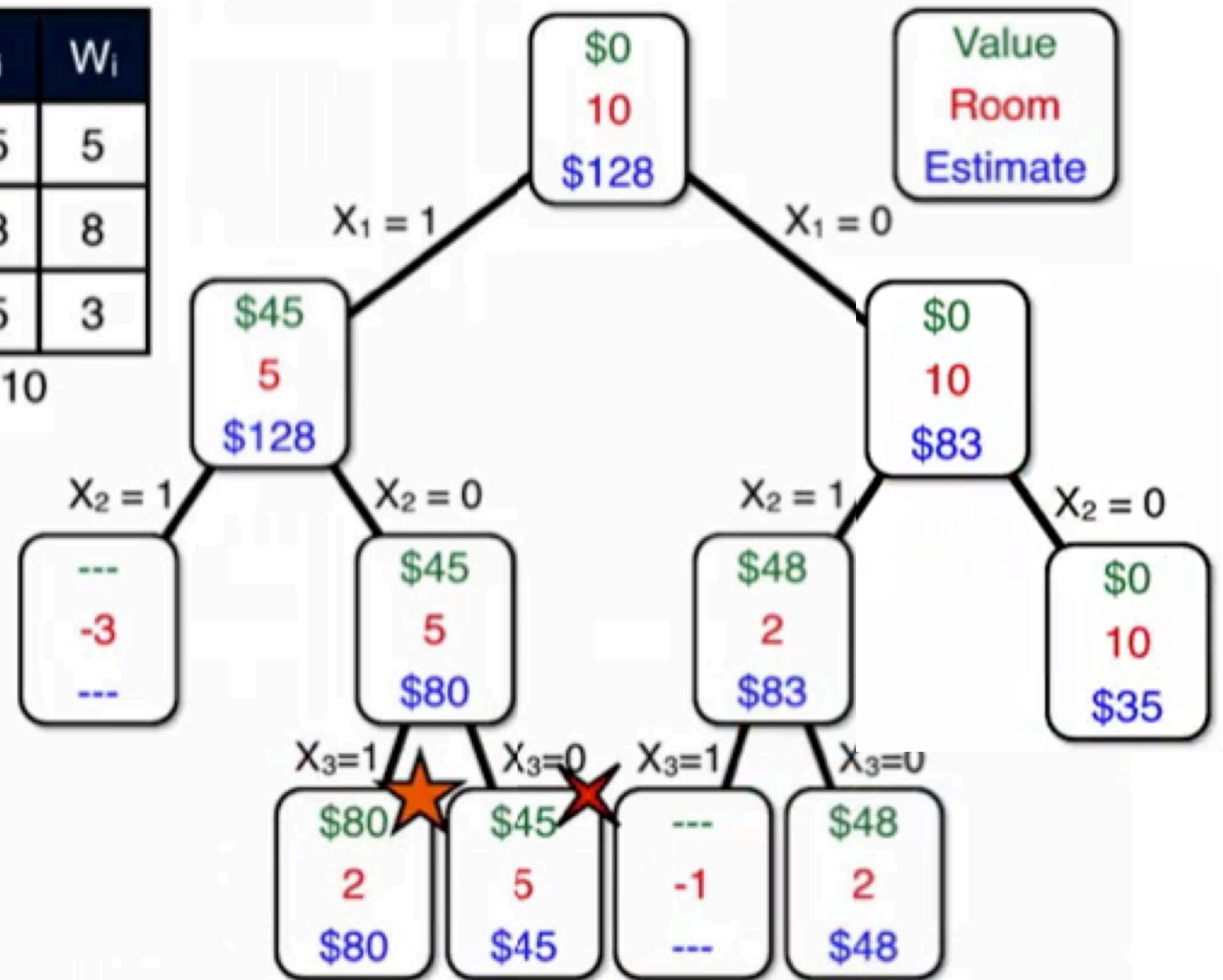
Ramificación y Acotación (en profundidad)



Ramificación y Acotación (en profundidad)

i	V_i	W_i
1	45	5
2	48	8
3	35	3

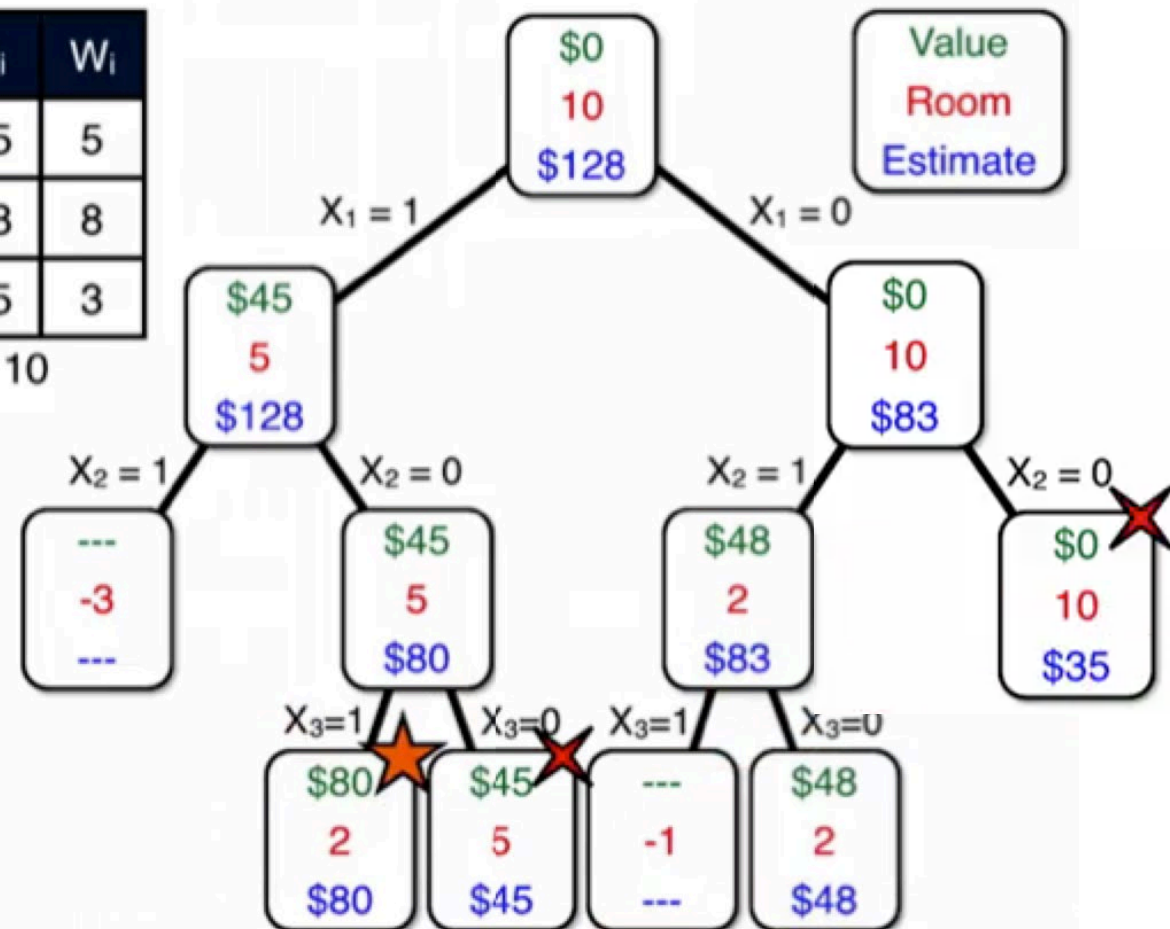
$K = 10$



Ramificación y Acotación (en profundidad) LIFO

i	V_i	W_i
1	45	5
2	48	8
3	35	3

$K = 10$



Branch and Bound, DFS

- Empezamos con el nodo raíz y lo metemos en una lista (*append*) de nodos vivos
- Mientras haya nodos en la lista de nodos vivos, hacemos un pop de la lista
 - Comprobamos si en el nodo actual hay espacio libre en la mochila
 - Comprobamos si la mejor estimación (*bound*) podría mejorar la solución incumbente (el mejor valor obtenido hasta el momento)
 - Si el valor obtenido en el nodo actual mejora la mejor solución hasta el momento, **actualizamos** el **valor** de la mejor solución, **y los ítems elegidos** para obtener esa solución (*taken*)
- **Si no hemos llegado al final** del árbol:
 - Ramificamos (*branch*) por la derecha (*append*)
 - Ramificamos (*branch*) por la izquierda (*append*)

node

index

taken

value

room

estimate

De esta forma, cuando hagamos el *pop* empezaremos a ramificar por la izquierda

Modelo de la mochila

$$\text{Maximizar} \quad 45x_1 + 48x_2 + 35x_3$$

$$\begin{aligned} \text{Dado,} \quad & 5x_1 + 8x_2 + 3x_3 \leq 10 \\ & x_i \in \{0, 1\} \quad (i \in 1..3) \end{aligned}$$

¿Podríamos relajar algo más?

- Si los objetos fueran fraccionables

$$\text{Maximizar} \quad 45x_1 + 48x_2 + 35x_3$$

$$\begin{aligned} \text{Dado,} \quad & 5x_1 + 8x_2 + 3x_3 \leq 10 \\ & 0 \leq x_i \leq 1 \quad (i \in 1..3) \end{aligned}$$

Relajación lineal

Modelo de la mochila

- ¿Qué implicación tiene la relajación lineal en el problema de la mochila?
 - Podemos ordenar en orden decreciente por la 'densidad' V_i / W_i
- ¿Cómo se resuelve ahora la relajación lineal?
 - Seleccionar ítems mientras quepan en la mochila
 - Seleccionar una fracción del último ítem
- En este ejemplo
 - $V_1 / W_1 = 9, V_2 / W_2 = 6, V_3 / W_3 = 11.7$
 - Orden 3,1,2
 - Seleccionamos ítems 3 y 1
 - Seleccionamos $\frac{1}{4}$ del ítem 2
 - Estimación: 92

$$45x_1 + 48x_2 + 35x_3$$

$$5x_1 + 8x_2 + 3x_3 \leq 10$$

$$0 \leq x_i \leq 1 \quad (i \in 1..3)$$

Ramificación y Acotación (en profundidad)

i	V_i	W_i
1	45	5
2	48	8
3	35	3

$K = 10$

\$0
10
\$92

Value
Room
Estimate