Задача 10.

Случайная величина имеет распределение Коши с плотностью

$$f(x) = \frac{a}{1+x^2}, \quad \text{при} \ -\infty < x < \infty.$$

Найти: а) коэффициент a;

б) функцию распределения $F(x)$;

в) моду $\mathrm{mod}(X)$ и медиану $\mathrm{med}(X)$;

г) вероятность $\mathbf{P}\{X \in [-1, 1]\}$;

д) выяснить, существует ли $\mathbf{E}X$.

Задача 10.

$f(x) = \frac{a}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$

$f(x)$ - плотность распред.

а) a - ?

б) $F(x)$ - ?

в) $\mathrm{mod}(X)$, $\mathrm{med}(X)$ - ?

г) $P(X \in [-1;1])$ - ?

д) $\exists$? EX

Восп. нормировкой св-ти для нахожд. a:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1 \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{1+x^2}\,dx = 1 \qquad a\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 1$$

$$a \cdot tg^{-1}x \Big|_{-\infty}^{\infty} = 1 \Rightarrow a \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{\pi} \Leftrightarrow$$

↳ здесь arctg x! $\Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2}$

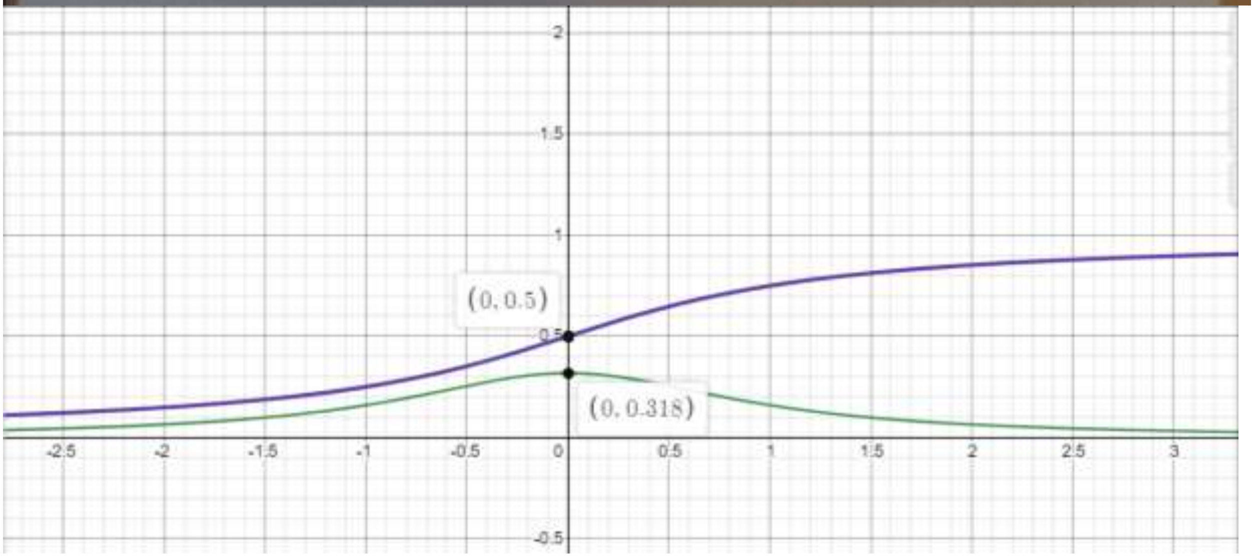
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{x}\frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{\pi}\,\cancel{\lim}\cdot \operatorname{arctg} t\Big|_{-\infty}^{x} = \frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{2}\right) =$$

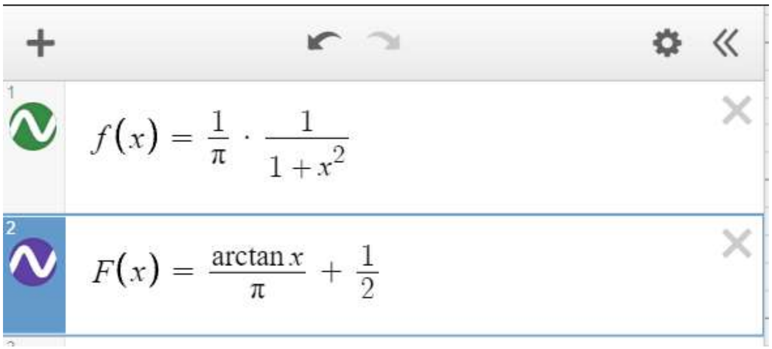
$$= \underline{\underline{\frac{\operatorname{arctg} x}{\pi} + \frac{1}{2}}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Найдём $med(X)$: $F(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\operatorname{arctg} x}{\pi} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 0$

$med(X) = 0$

$mod(X) = 0$, т.к. в этой точке $f(x)$ достигает абсолютн. максимума





Найдем $P(X\in[-1;1])$ $\qquad F(x)=\dfrac{\operatorname{arctg}x}{\pi}+\dfrac{1}{2}$

$$P(X\in[-1;1])=P(-1\le X\le 1)=F(1)-F(-1)=$$

$$=\left(\frac{\cancel{\pi}\,1}{4\cdot\cancel{\pi}}+\frac{1}{2}-\left(-\frac{\cancel{\pi}\,1}{4\cdot\cancel{\pi}}+\frac{1}{2}\right)\right)=\frac{1}{4}+\cancel{\frac{1}{2}}+\frac{1}{4}-\cancel{\frac{1}{2}}=\underline{\underline{0,5}}$$

Проверим $\exists$? EX:

$$\int_{-\infty}^{\infty}x\,f(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\,dx}{\pi(1+x^2)}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d(x^2+1)}{1+x^2}=\frac{1}{\pi}\ln(1+x^2)\Big|_{-\infty}^{\infty}\ldots$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}|x\,f(x)|\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|x|\,dx}{\pi|1+x^2|}=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{x\,dx}{1+x^2}=\frac{1}{\pi}\ln(1+x^2)\Big|_{0}^{\infty}=$$

$$=\lim_{\alpha\to\infty}\frac{1}{\pi}(1+\alpha^2)\Rightarrow \text{расх-ся абсолютно}\Rightarrow EX\nexists\ (\text{не существ.})$$