Прикладная математика (4 семестр)
Лабораторная работа 3
"Методы численного решения СЛАУ"

Александров Даниил, Ершов Александр

ITMO UNIVERSITY

1 Описание

Реализация метода численного решения СЛАУ

2 Цели

Реализовать LU-разложение, реализовать один из методов итерационного решения СЛАУ (в нашем случае был реализован метод Зейделя), при этом ипользовать оптимальные методы хранения разреженных матриц большого размера

3 Задачи

Реализовать методы хранения разреженных матриц, построить LU-разложение методом Гаусса, протестировать полученную программу, реализовать метод Зейделя на различных матрицах, сравнить результаты, построить отчёт

4 LU - разложение

В сущности это есть представление матрицы A в виде произведения нижнетреугольной матрицы L и верхнетреугольной матрицы U, необходимо, чтобы все главные миноры данной квадратной матрицы отличны от нуля. Причём на диагонали матрицы L стоят единицы($l_{ii} = 1, \forall i$), а на диагонали матрицы U стоят диагональные элементы матрицы A($u_{ii} = a_{ii}$). Данное разложение позволяет простым образом посчитать определитель матрицы:

$$|A| = |L \cdot U| = |L| \cdot |U| = 1 \cdot |U| = \prod_{i=1}^{n} u_{ii}$$

Так же оно значительно упрощает процесс решения систем линейных уравнений. Асимптотическая сложность LU - разложения: $\frac{2}{3} \cdot n^3 + O(n^2)$, а решения систем: $n^2 + O(n)$

5 Решение СЛАУ

5.1 Прямой метод. Метод LU-разложения.

Метод LU-разложения = один из способов решения СЛАУ. Алгоритм которого схож с алгоритмом метода Гаусса.
Пусть дана СЛАУ:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_1 \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_1 \end{cases}$$

или $A \cdot x = b$
Если известно LU - разложение матрицы A ($A = L \cdot U$), то для решения СЛАУ нужно ввести вектор $y = (y_1, y_2, ...y_3) = Ux$ и решить систему:

$$\begin{cases} Ly = b \\ Ux = y \end{cases}$$

На первом этапе решается система $Ly = b$. Т.к. L - нижняя треугольная матрица, система решается прямой подстановкой:

$$\begin{cases} y_1 = b_1 \\ l_{21}y_1 + y_2 = b_2 \\ l_{31}y_1 + l_{32}y_2 + y_3 = b_3 \\ .... \\ l_{n1}y_1 + l_{n2}y_2 + ... + y_n = b_n \end{cases}$$

Общая формула:

$$y_i = b_i - \sum_{p=1}^{i-1} l_{ip}y_p, i = 1, 2, ..., n$$

На втором этапе решается система $Ux = y$. Т.к. U - верхняя треугольная матрица, система решается обратной подстановкой:

$$\begin{cases} u_{11}x_1 + l_{12}x_2 + ... + u_{1n}x_n = y_1 \\ u_{22}x_2 + ... + u_{2n}x_n = y_2 \\ .... \\ u_{nn}x_n = y_n \end{cases}$$

Общая формула:

$$x_{n-i} = \frac{1}{u_{n-i,\ n-i}} \left(y_{n-i} - \sum_{p=0}^{i-1} u_{n-i,\ n-p} x_{n-p} \right)$$

5.2 Итерационный метод. Метод Зейделя.

Проблемы прямых методов:
1) При большом числе уравнений становятся труднореализуемыми на ЭВМ прежде всего из-за сложности хранения и обработки матриц большой размерности.
2) На практике часто встречаются разреженные матрицы.
Для решения таких СЛАУ предпочтительнее использовать итерационные методы.

Итерационные методы - методы последовательных приближений, в которых при вычислении последующего приближения решения используются предыдущие, уже известные приближенные решения.

Рассмотрим СЛАУ:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_1 \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_1 \end{cases}$$

Приведем систему к виду:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \beta_1 + \alpha_{12}x_2^{(0)} + \alpha_{13}x_3^{(0)} + ... + \alpha_{1n}x_n^{(0)} \\ x_2^{(1)} = \beta_2 + \alpha_{21}x_1^{(1)} + \alpha_{23}x_3^{(0)} + ... + \alpha_{1n}x_n^{(0)} \\ .... \\ x_n^{(1)} = \beta_n + \alpha_{n1}x_1^{(1)} + \alpha_{n2}x_2^{(1)} + ... + \alpha_{n,\ (n-1)}x_{(n-1)}^{(1)} \end{cases}$$

За нулевое приближение $x^{(0)}$ можно взять столбец свободных членов b.

В отличие от метода простых итераций в методе Зейделя при вычислении компонента $x_i^{(k+1)}$ вектора неизвестных на (k+1)-й итерации используются значения, уже вычесленные до этого.

Из этой системы можно заметить, что $x^{k+1} = \beta + Bx^{k+1} + Cx^k$, где B - нижняя треугольная матрица с диагональными элементами, равными нулю, а C - верхняя треугольная матрица с диагональными элементами, отличными от нуля, $\alpha = B + C$

$(E - B)x^{k+1} = \beta + Cx^k$
$x^{k+1} = (E - B)^{-1}\beta + (E - B)^{-1}Cx^k$

Таким образом, метод Зейделя является методом простых итераций с матрицей правых частей $a = (E - B)^{-1}C$ и вектором правых частей $(E - B)^{-1}\beta$ и, следовательно, сходимость и погрешность метода Зейделя можно исследовать с помощью формул, выведенных для метода простых итераций (Для сходимости итерационного процесса необходимо и достаточно, чтобы спектр матрицы a эквивалентной системы лежал внутри круга с радиусом, равным единице)

$||a|| < 1$
$\varepsilon^{(k)} = ||x^{(k)} - x^{(k-1)}||$

6 Выводы

В ходе исследования алгоритмов были получены следующие результаты:

1. С помощью LU-разложения можно ускорить сходимость поиска решения СЛАУ
2. Реализован посик обратной матрицы с использаванием LU-разложения
3. Сходимость методов с долей погрешности совпадает с теоретической оценкой сложности вычисления алгоритмов
4. Сходимость метода Зейделя зависит от ряда характеристик данных: обусловленность матрицы коэффициентов и точность, задаваемая пользователем