Прикладная математика (4 семестр)
Лабораторная работа 4
"Методы численного решения спектральной задачи"

Александров Даниил, Ершов Александр

ITMO UNIVERSITY

1 Описание

Важной и трудной задачей линейной алгебры является нахождение собственных значений матрицы, а также собственных векторов матрицы. Рассматривается проблема устойчивости собственных значений по отношению к малым возмущениям элементов матрицы.

2 Цели

Реализовать метод вращений Якоби для поиска собственных значений.

3 Задачи

Реализовать методы Якоби, протестировать метод на разных матрицах, сравнить количество итераций в зависимоти от обусловленности матрицы при заданной точности.

4 Постановка задачи

Из курса линейной алгебры известно, что множество собственных значений некоторой матрицы A может быть найдено из решения уравнения:

$$A\phi = \lambda\phi \longrightarrow \det(A - \lambda E) = 0$$

В вычислительной практике рассматривается как полная, так и частичная проблемы поиска собственных значений.
Полная проблема - поиск всех собственнх значений A
Частичная проблема - поиск некоторых, например, только минимальных собственнх значений A

4.1 QR-алгоритм

Для решения спектральной задачи в целом используется QR алгоритм. Он основан на представлении матрицы A в виде $A = QR$, где $Q^TQ = E$ - ортогональная и R - верхняя треугольная матрицы.
Строится последовательность:

$$A_0 = Q_1R_1, A_1 = R_1Q_1$$

$$A_1 = Q_2R_2, A_2 = R_2Q_2$$

$$...$$

$$A_{k-1} = Q_kR_k, A_k = R_kQ_k$$

Будем счтитать, что для невырожденной матрицы A выполнено следующее;

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > ... > |\lambda_n|$$

и существует представление:

$$A = T\Lambda T^{-1}, T^{-1} = LU, \Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$$

Тогда последовательность A_k сходится к верхней треугольной матрице, диагональные элементы которой будут сходиться к собственных значениям.

4.2 Метод Якоби

Рассмотрим другой метод решения спектральной задачи: метод вращений Якоби. Для этого введем понятие матрицы вращения $T(ij)$:

$$T(ij) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & c & \dots & s & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & -s & \dots & c & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

где $c^2 + s^2 = 1$ и $diagE = diagT(ij)$. Элементы s и c расположены на пересечении строк и столбцов с индексами i, j.

Заметим, что $T(ij)$ - ортогональная матрица:

$$T(ij)T(ij)^T = E$$

а при умножении вектора на матрицу меня.тся только его координаты i, j местами.

Пусть

$$B = T^*(kl)AT(kl)$$

Определим последовательность матриц $A_0 = A, A_1, A_2, \dots$, каждая из которых получается из предыдущей с помощью преобразования подобия, определяемого матрицей вращения.

На каждом шаге этого процесса обнуляется отдельный внедиагональный элемент (алгоритм обнуления расписан ниже).

Элементы B будут описываться так:

$$b_{kk} = c^2a_{kk} + s^2a_{ll} - 2csa_{kl}$$

$$b_{ll} = s^2 a_{kk} + c^2 a_{ll} - 2csa_{kl}$$
$$b_{kl} = (c^2 - s^2) a_{kl} + cs(a_{kk} - a_{ll})$$
$$b_{ki} = ca_{ki} - sa_{li}, i \neq k, i \neq l$$
$$b_{li} = sa_{ki} + ca_{li}, i \neq k, i \neq l$$

Тогда для обнелуния $b_k l$ требуем:

$$(c^2 - s^2) a_{kl} + cs(a_{kk} - a_{ll}) = 0$$

Введем замену $c = \cos\theta$, $s = \sin\theta$, тогда:

$$(\cos^2\theta - \sin^2\theta) a_{kl} + \cos\theta \sin\theta (a_{kk} - a_{ll}) = 0$$

$$\frac{\cos 2\theta}{\cos\theta \sin\theta} = -\frac{a_{kk} - a_{ll}}{a_{kl}}$$
$$\cot 2\theta = -\frac{a_{kk} - a_{ll}}{2a_{kl}}$$

Введем дополнительны обозначения:

$$\phi = \cot 2\theta, t = \tan\theta$$

Тогда наше уравнение можно переписать в виде:

$$t^2 + 2\phi\theta - 1 = 0$$

Откуда:

$$t = -\phi \pm \sqrt{\phi^2 + 1}$$

Выберем меньший по модулю корень, так как он будет порождать более устойчивый алгоритм:

$$t = sign(\phi)(-|\phi| + \sqrt{\phi^2 + 1})$$

При большом значение $|\phi|$ будем брать:

$$t = \frac{sign(\phi)}{|\phi| + \sqrt{\phi^2 + 1}}$$

При очень большом значение $|\phi|$ будем брать:

$$t \approx \frac{1}{2\phi}$$

По значению t находим;

$$c = \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}}, s = tc$$

Теперь перепишум итоговые расчетные формулы для элементов B:

$$b_{kk} = a_{kk} - ta_{kl}$$

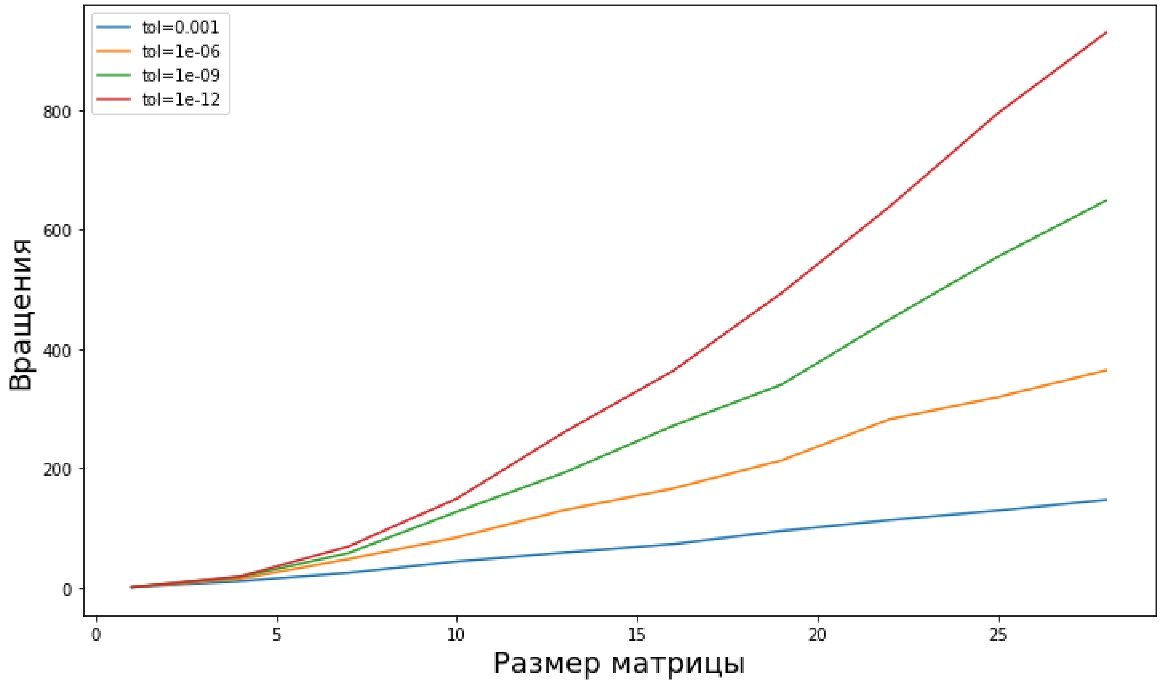
$$b_{ll} = a_{ll} + ta_{kl}$$
$$b_{kl} = 0$$
$$b_{ki} = a_{ki} - s(a_{li} + \tau a_{ki}), i \neq k, i \neq l, \tau = \frac{s}{1 + c}$$
$$b_{li} = a_{li} + s(a_{ki} - \tau a_{li}), i \neq k, i \neq l, \tau = \frac{s}{1 + c}$$

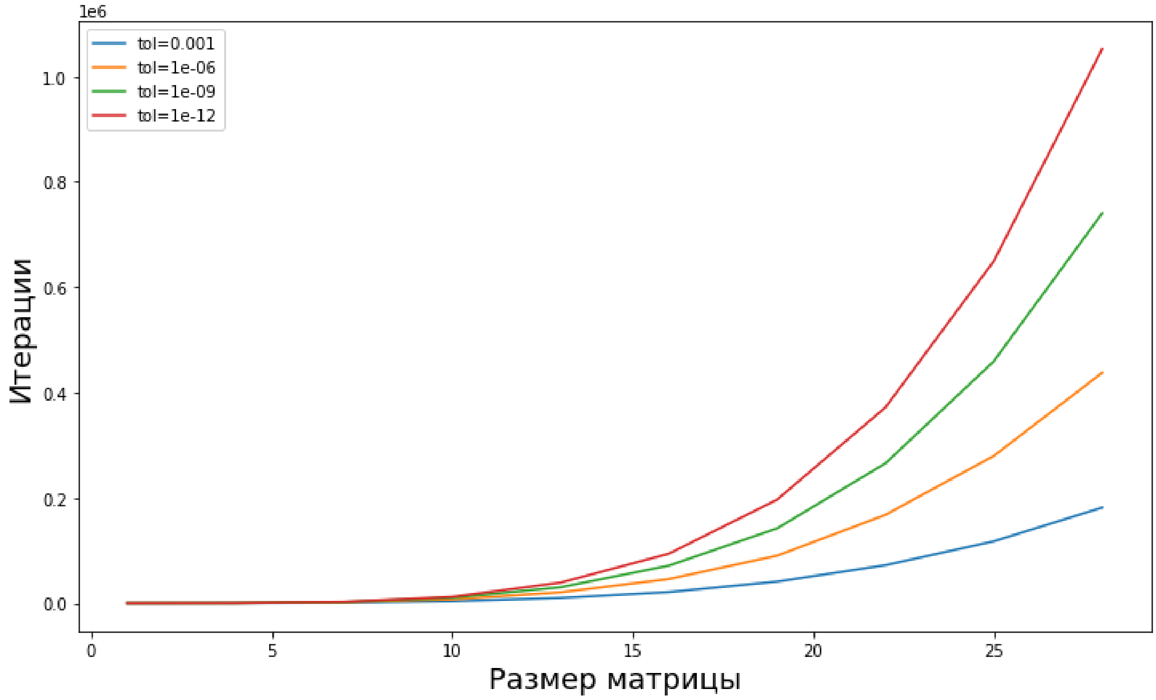
При таком преобразовании сумма квадратов внедиагональных элементов убывает. Последовательность матриц A_k сходится к диагональной матрице, причем ее диагональные элементы сходятся к собственным значениям матрицы A.

Оптимизация будет достигаться за счет выбора максимального для "уничтожения"элемента на каждом шаге.

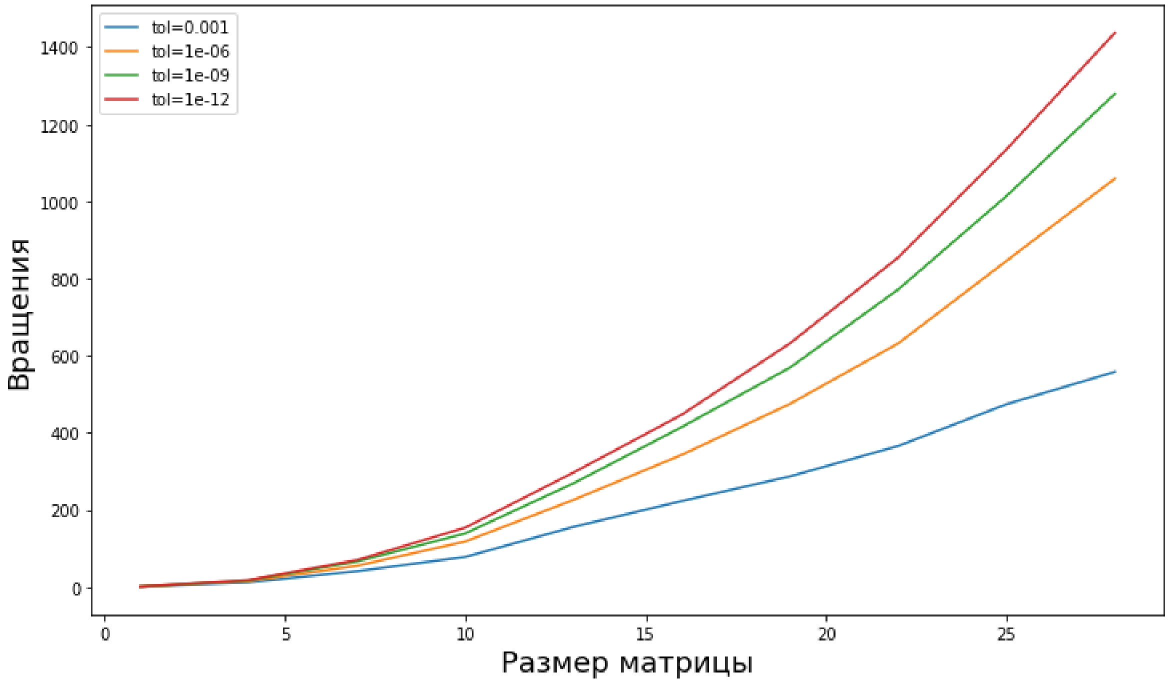
5 Результат работы алгоритма на разных матрицах

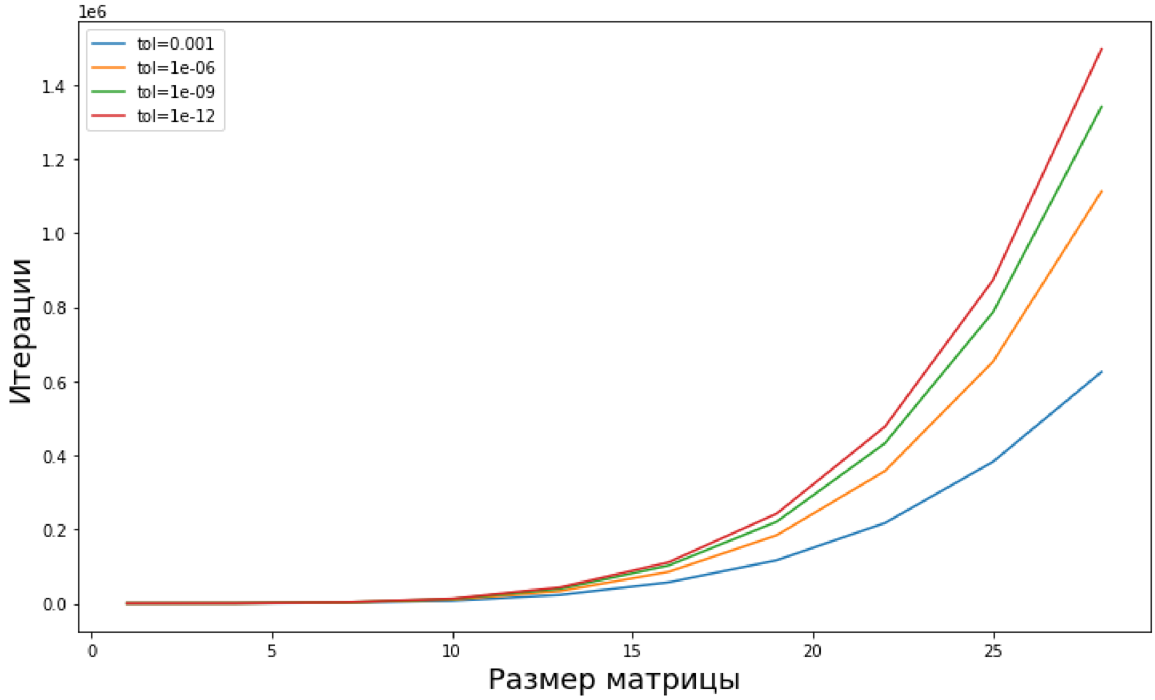
5.1 Матрица Гильберта



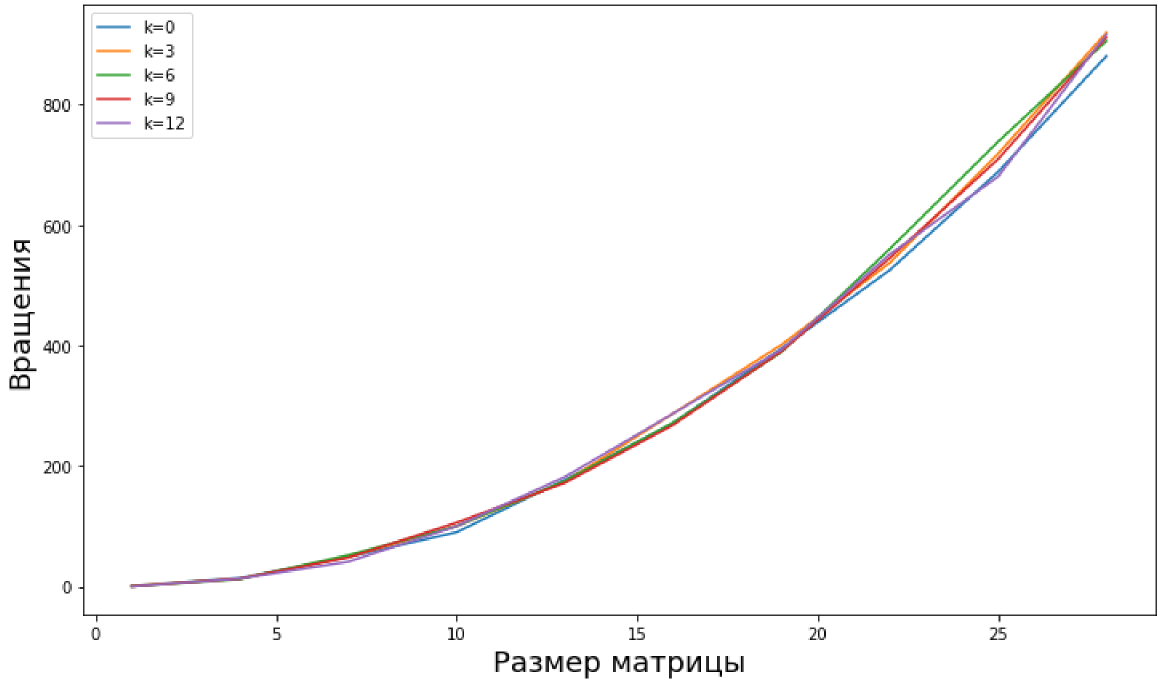


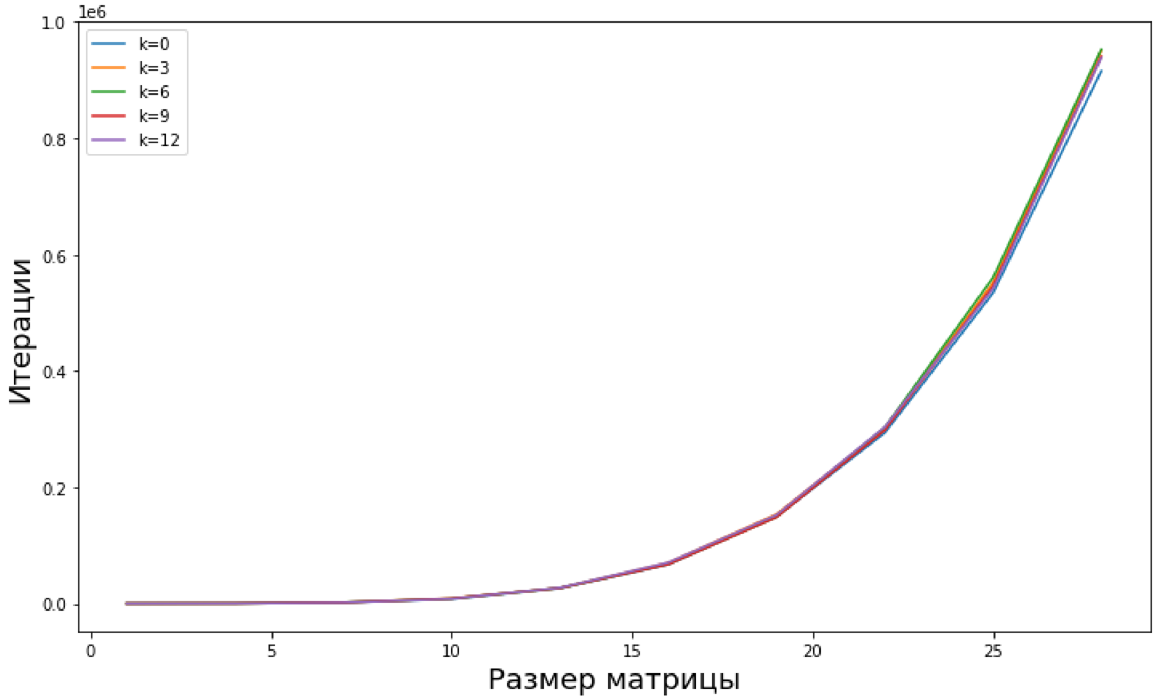
5.2 Матрица Лемера





5.3 Матрица с разным чилом обусловленности





6 Выводы.

В ходе работы получены следующие результаты:

1. Реализован алгоритм вращений Якоби
2. Наблюдается нелилейная зависимость общего числа итераций от точности
3. Наблюдается линейная зависимость числа вращений матрицы от точности
4. Наблюдается нелинейная зависимоть общего числа итераций с ростом обусловленности
5. Наблюдается нелинейная зависимоть числа поворотов с ростом обусловленности
6. Изменение параметра k не сильно влияет на число как итераций, так и количества поворотов