Контрольная работа №1

Задача 1

$$(A-2B)^2 - D\cdot E\cdot(1F) - 4B^2$$

$$A-2B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(A-2B)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -9 \\ -9 & 13 \end{pmatrix}$$

$$D\cdot E\cdot F = \begin{pmatrix} -4 & -1 & -3 \\ 4 & 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} F = \begin{pmatrix} 12+4-12 \\ -12-16-8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -36 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -72 & 36 \end{pmatrix}$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}; \quad -4B^2 = \begin{pmatrix} -8 & 12 \\ 12 & -20 \end{pmatrix}$$

Рез: $\begin{pmatrix} 10 & -9 \\ -9 & 13 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ +72 & -36 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 & 12 \\ 12 & -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 7 \\ 75 & -43 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 7 \\ 75 & -43 \end{pmatrix}$

Задание 2 (часть 2)

$t_{\varphi} = 34$

$$A = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 & -2 \\ 2 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 & -2 \\ 0 & -4 & -2 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 & -2 \\ 0 & -4 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 & -2 \\ 0 & -4 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\det A = \sum_{k=1}^{4!} (-1)^{t_k} \cdot a_{1j_1(k)} a_{2j_2(k)} a_{3j_3(k)} a_4 = 34$$

Задача 3

$A X B = C$

$A^{-1} A X B B^{-1} = A^{-1} C B^{-1}$

$X = A^{-1} C B^{-1}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\det A = 1$

$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\det B = 1$

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -13 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$$

Задача 4

$\vec{a}(3, 0)$ $|\vec{e}_1| = 3$ $\angle(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = \frac{\pi}{4}$

$\vec{b}(-5, -5)$ $|\vec{e}_2| = 2$

$$(\vec{a}, \vec{b}) = (3\vec{e}_1, -5\vec{e}_1 - 5\vec{e}_2) = (3\vec{e}_1, -5\vec{e}_1) + (3\vec{e}_1, -5\vec{e}_2) = -15(\vec{e}_1, \vec{e}_1) - 15(\vec{e}_1, \vec{e}_2) =$$

$$= -15 \cdot |\vec{e}_1| \cdot |\vec{e}_1| - 15 |\vec{e}_1| \cdot |\vec{e}_2| \cdot \cos\frac{\pi}{4} = -15 \cdot 9 - 15 \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \cancel{-135 - 18\sqrt{2}}$$

$$-135 - 45\sqrt{2}$$

Задача 5

$A(0, -3, 2)$ $\vec{AB}(4, -4, 3)$ $|\vec{AB}| = \sqrt{16+16+9} = \sqrt{41}$

$B(4, -7, 5)$ $\vec{BC}(-8, 20, -22)$ $|\vec{BC}| = \sqrt{344}$

$C(-4, 13, -17)$ $\vec{DC}(-8, +14, -14)$ $|\vec{DC}| = \sqrt{456}$

$D(4, 1, -3)$ $\vec{AD}(4, 2, -5)$ $|\vec{AD}| = \sqrt{16+4+25} = \sqrt{45}$

Т.к. противоп. стороны не равны, то это четырехугольник общего вида

Задача 6.

$A(-5, -2, -1)$ $\qquad \cos\angle ABC = \cos\angle(\vec{BA}, \vec{BC}) = ?$

$B(-1, -3, 3)$ $\qquad \vec{BA}(-4, 1, -4)$

$C(3, -5, 6)$ $\qquad \vec{BC}(4, -2, 3)$

$$\cos\angle(\vec{BA}, \vec{BC}) = \frac{(\vec{BA}, \vec{BC})}{|\vec{BA}|\,|\vec{BC}|} = \frac{-16-2-12}{\sqrt{16+16+1}\cdot\sqrt{16+4+9}} = -\frac{30}{\sqrt{33}\,\sqrt{29}} = -\frac{30}{\sqrt{957}}$$

Задача 7

$\vec{x} - ?$ $\qquad \vec{x} \perp \vec{a}, \ \vec{x} \perp \vec{b}$ $\qquad \vec{a}(3, 0, -2)$

$\vec{b}(3, -1, -1)$

$(\vec{x}, \vec{c}) = 5$ $\qquad \vec{c}(2, -1, -5)$

$\vec{x}(\alpha, \beta, \gamma)$

$(\vec{x}, \vec{c}) =$ Т.к. $\vec{x} \perp \vec{a}$, то $(\vec{x}, \vec{a}) = 0$. Аналогично $(\vec{x}, \vec{b}) = 0$

Имеем

$$\begin{cases} (\vec{x}, \vec{a}) = 0 \\ (\vec{x}, \vec{b}) = 0 \\ (\vec{x}, \vec{c}) = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} 3\alpha - 2\gamma = 0 \\ 3\alpha - \beta - \gamma = 0 \\ 2\alpha - \beta - 5\gamma = 5 \end{cases}$$

Решим сист-му методом Гаусса

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -5 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -5 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -6 & 5 \end{array}\right) \sim$$

да

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -7 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} 3\alpha - 2\gamma = 0 \\ \gamma - \beta = 0 \\ \alpha = -\frac{5}{7} \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = -\frac{5}{7} \\ \gamma = \frac{3}{2}\left(-\frac{5}{7}\right) \\ \gamma = \beta \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = -\frac{5}{7} \\ \beta = -\frac{15}{14} \\ \gamma = -\frac{15}{14} \end{cases}$$

Ответ: $\vec{x}\left(-\frac{5}{17}, -\frac{15}{14}, -\frac{15}{14}\right)$

Задача 1.

$A(-2, 2, -2)$ $\quad \vec{AB}(-2, -3, 2)$

$B(-4, -1, 0)$ $\quad \vec{AC}(-1, 2, 0)$

$C(-3, 4, -2)$ $\quad \vec{AD}(-5, 0, 0)$

$D(-7, 2, -2)$

$$(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}) = \begin{vmatrix} -2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ -5 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -5 \cdot (-1)^4 \cdot (-4) = 20 \neq 0 \Rightarrow \vec{AB}, \vec{AC} \text{ и } \vec{AD}$$

некомпланарны $\Rightarrow$ A, B, C и D лежат в разных плоскостях

$$V_{тетр} = \frac{1}{6}(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}) = \frac{20}{6} = \frac{10}{3}$$

Задача 2 доп-с

k	перестановки	инв.	
1	1, 2, 3, 4	0	$a_{11} a_{22} a_{33} a_{44}$
2	1, 2, 4, 3	1	$-a_{11} \cdot a_{22} a_{34} a_{43}$
3	1, 3, 2, 4	1	$-a_{11} a_{23} a_{32} a_{44}$
4	1, 3, 4, 2	2	$a_{11} a_{23} a_{34} a_{42}$
5	1, 4, 2, 3	2	$a_{11} a_{24} a_{32} a_{43}$
6	1, 4, 3, 2	3	
7	2, 1, 3, 4	1	
8	2, 1, 4, 3	2	
9	2, 3, 1, 4	2	
10	2, 3, 1, 4	2	
11	2, 3, 4, 1	3	
12	2, 4, 3, 1	4	
13	3, 1, 2, 4		

		инв.	
14	3, 1, 4, 2		
15	3, 2, 1, 4		
16	3, 2, 4, 1		
17	3, 4, 1, 2		
18	3, 4, 2, 1		
19	4, 1, 2, 1		
10	4, 1, 3, 3		
21	4, 2, 1, 3		
22	4, 2, 3, 1		
23	4, 3, 1, 2		
24	4, 3, 2, 1		