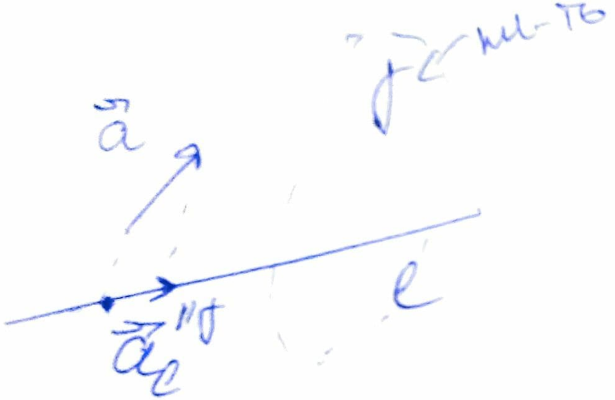
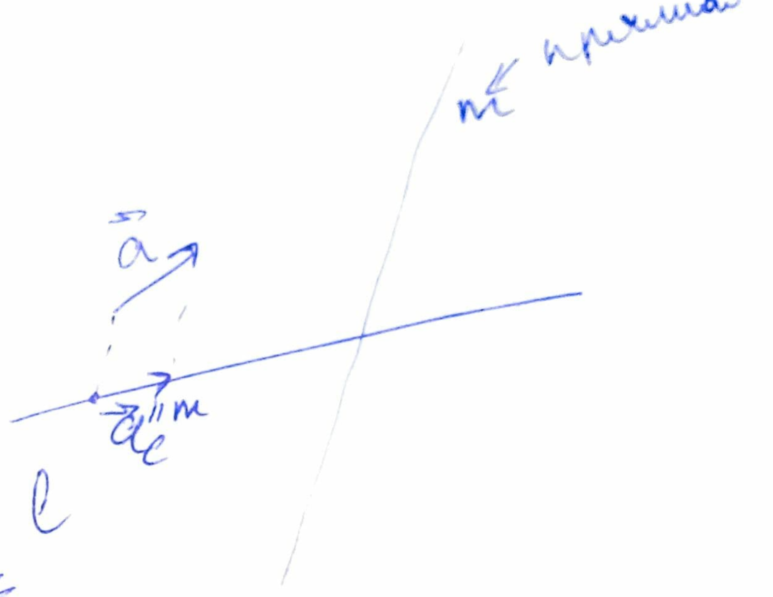
Действия над векторами:

$\exists\ \vec{a}, \vec{b}$ - векторы: α, β - const

- $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$
- $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
- $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} + \vec{b} + c$
- $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$
- $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$
- $\vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{0}$
- $(\alpha \cdot \beta)\vec{a} = \alpha \cdot (\beta\vec{a}) = \beta(\alpha \cdot \vec{a})$

Проекции





вдоль пл-ти

вдоль прямой

Св-ва:

$$(\vec{a}+\vec{b})_l^{\parallel\gamma} = \vec{a}_l^{\parallel\gamma} + \vec{b}_l^{\parallel\gamma}$$

$$(\lambda\cdot\vec{a})_l^{\parallel\gamma} = \lambda\cdot\vec{a}_l^{\parallel\gamma}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\vec{a}_i\right)_l^{\parallel\gamma} = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\cdot(\vec{a}_i)_l^{\parallel\gamma}$$

$\exists$ $\vec{e}$ - орт оси l, тогда $\overset{def}{=}$ величиной проекции $\vec{a}$ на l называ...

$x_a = \Pi p_l^{\parallel\gamma}\vec{a}$: $\vec{a}_l^{\parallel\gamma} = x_a\cdot\vec{e}$

Если $\gamma\perp l$, то проекция - ортогональная $(\vec{a}_l^{\perp})$

~~Лемма~~: $\sum^{n} \lambda_i\cdot(\Pi p_l^{\parallel\gamma}\vec{a})$

Лемма:

$$\text{Пр}_{\ell}^{\parallel v}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{a}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \left(\text{Пр}_{\ell}^{\parallel v}(\vec{a}_i)\right)$$

Алг. структуры:

- Полугруппа

$\exists$ S - мн-во „о" - операция (~~бинарная~~)

Задан ассоц. з-н: $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ $\forall a, b, c \in S$

Ex $(\mathbb{N}, „+")$ - аддитивная полугруппа

- Группа G - мн-во „о" бинарная операция

Задан асс-й з-н $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ $(\forall a, b, c \in G)$

есть нейтральный э-т $a \circ e = e \circ a = a$ $(\exists e \in G\ \forall a \in G)$

есть обратный эл-т $g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = e$ $(\forall g \in G\ \exists g^{-1} \in G)$

NB, если $a \circ b = b \circ a$ $\forall a, b \in G$, то группа - <u>абелева</u>

Ex $(\mathbb{Z}, „+")$ - адд. абелева группа

Док-во единств-и e и g^{-1} см на стр 5

Ex $G = \{\mathbb{Z}^n, „+"\}$ - адд. аб. группа, где

$e = (0, \dots, 0)^T$

$g^{-1} = (-\xi^1, \dots, -\xi^n)^T$

- Кольцо R - мн-во:

$\{R, „+"\}$ - абелева группа

$\{R, „\cdot"\}$ - полугруппа

$\dots x + z \cdot x)$ {согласовано

$\boxtimes$ $(\mathbb{Z}, \text{"+"})$ – аддит. абелева группа

– Кольцо R – мн-во:

$\{R, \text{"+"}\}$ – абелева группа

$\{R, \text{"}\cdot\text{"}\}$ – полугруппа

$$\left.\begin{array}{l} (y+z)\cdot x = y\cdot x + z\cdot x \\ x\cdot(y+z) = x\cdot y + x\cdot z \end{array}\right\} \text{согласованность}$$

$\boxtimes$ $(\mathbb{Z}, \text{"+"}, \text{"}\cdot\text{"})$ – коммут. кольцо

– Поле K – мн-во

$\{K, \text{"+"}\}$ – аддит. абелева группа

$\{K \setminus \{0\}, \text{"}\cdot\text{"}\}$ – мультипликат. абелева группа

$$\left.\begin{array}{l} x\cdot(y+z) = x\cdot y + x\cdot z \\ (x+y)\cdot z = x\cdot z + y\cdot z \end{array}\right\} \text{согласованность операций}$$

$\boxtimes$ $(\mathbb{R}, \text{"+"}, \text{"}\cdot\text{"})$ – поле веществ. чисел

N3: если в поле $a\cdot b \neq b\cdot a$ $\forall a, b \in K$, то ~~...~~ такая алг. структ-ра есть тело

пр-тело кватернионов

Док-во единств-ти e и g^{-1} см на стр 5

$\boxtimes$ $G = \{\mathbb{Z}^n, \text{"+"}\}$ – адд. аб. группа, где

$e = (0, \dots, 0)^T$

$g^{-1} = (-g^1, \dots, -g^n)^T$

③

№3: g^{-1} - единств.

$\exists\quad g^{-1} = g^{-1}\circ e = g^{-1}\circ(\tilde{g}^{-1}\circ g) = e\circ\tilde{g}^{-1} = \tilde{g}^{-1}$ ч.т.д.

e - единств.

$\exists\quad a\circ e = a$

$a\circ\tilde{e} = a$, тогда $e = e\circ\tilde{e} = \tilde{e} \Rightarrow \tilde{e} = e$

6

группы

ну

- Модуль над кольцом

R-модуль - абелева группа $(G, \text{"}+\text{"})$ с заданной бин. операцией $\circ: R \times G \to G$ $((r, g) \to rg)$ и соглас ~~операций~~ с групповой структурой G:

$\forall r_1, r_2 \in R; \forall g \in G:$ $(r_1 + r_2) g = r_1 g + r_2 g$

$\forall r \in R; \forall g_1, g_2 \in G:$ $r(g_1 + g_2) = r \cdot g_1 + r \cdot g_2$

$\forall r_1, r_2 \in R; \forall g \in G:$ $(r_1 r_2) g = r_1 (r_2 g)$

$\forall (G, \text{"}+\text{"})$ - абелева группа $\Rightarrow$ она есть $\mathbb{Z}$-модуль

$(\forall g \in G: g + g + \ldots + g = \mathbb{Z} \cdot g)$

...во

– Линей...

ЛП X над полем F ($X(F)$) называют модуль над кольцом, имеющий алг. стр-ру поля

аксиомы ЛП:

1) $x+y=y+x$ $(\forall x, y \in X)$

2) $(x+y)+z=x+(y+z)=x+y+z$ $(\forall x, y, z \in X)$

3) $x+0_x=0_x+x=x$ $(\forall x \in X;\ \exists 0_x \in X)$

4) $x+(-x)=(-x)+x=0_x$ $(\forall x \in X;\ \exists -x \in X)$

5) $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x=\beta(\alpha x)$ $(\forall x \in X;\ \forall \alpha, \beta \in F)$

6) $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$ $(\forall x \in X;\ \forall \alpha, \beta \in F)$

7) $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$ $(\forall \alpha \in F;\ \forall x, y \in X)$

8) $1 \cdot x = x$ $(\forall x \in X;\ \exists 1 \in F)$

Пр $X=\{(\xi^1 \ldots \xi^n)^T, \xi^i \in \mathbb{R}\}$ – ЛП над $\mathbb{R}$

$X=\{(\xi^1, \ldots, \xi^n)^T, \xi^i \in \mathbb{C}\}$ – ЛП над $\mathbb{C}$

$X=P^n$ – многочлены степени не выше чем n.

(4)

2)

2 ЛП

док-ва единственности (0_x) и $(-x)$ аналогичны

lemma $\forall x \in X : x \cdot 0 = 0_x \; (0 \in F)$

П $0 \cdot x = 0_x \Rightarrow 0 \cdot x + y = y \quad \forall y \in X$

$0 \cdot x + y = 0 \cdot x + 0_x + y = 0 \cdot x + (x + (-x)) + y =$

$= 0 \cdot x + 1 \cdot x + (-x) + y = (0+1) \cdot x + (-x) + y = x + (-x) + y = 0_x + y = y$

∎

lemma $\alpha \cdot 0_x = 0_x \quad \forall \alpha \in F$

П $\alpha \cdot 0_x = 0_x \Rightarrow \alpha \cdot 0_x + y = y$

$y = 0_x + y = x + (-x) + y = 1 \cdot x + (-x) + y = (\alpha + (-\alpha) + 1) \cdot x + (-x) + y =$

$= \alpha x + (-\alpha) x + 1 \cdot x + (-x) + y = \alpha x + (-1) \cdot \alpha x + \underline{x + (-x)} + y =$

$= \alpha \cdot (x + (-1) \cdot x) + 0_x + y = \alpha \cdot (x + (-x)) + y = \alpha \cdot 0_x = y$

∎

<u>lemma</u>: $-1 \cdot x = -x$

$-1 \cdot x = -1 \cdot x + 0_x = -1 \cdot x + x + (-x) = (-1+1)x + (-x) = 0 \cdot x + (-x) =$

$= 0_x + (-x) = -x$