

Задача 1

Найти базис суммы подпространств, натянутых на системы векторов

$$L_1: v_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \\ 8 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 5 \\ -16 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$L_2: u_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \\ -17 \end{bmatrix}$$

базис $L_1 + L_2$

v_1, v_2, u_1

$$\cdot (-1) \left(\begin{array}{ccc|cc} -2 & 4 & -1 & -2 & 5 \\ 2 & -4 & 1 & 1 & -2 \\ -2 & 5 & -2 & -1 & 3 \\ 8 & -16 & 4 & 7 & -17 \end{array} \right) \xrightarrow{L_1 + L_2} \left(\begin{array}{ccc|cc} 2 & -4 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{array} \right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 2 & -4 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \text{базис образуют}$$

$v_1; v_2; u_1$ | Ответ: например, $v_1; v_2$ и u_1

Задача 2

Найти размерность линейной оболочки натянутой на векторы

$$e_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, e_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 5 \\ -8 \\ -7 \end{bmatrix}, e_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ -5 \\ 8 \\ 7 \end{bmatrix}, e_4 = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \\ -6 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$\dim L = ?$

$$\left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & -2 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 & -4 & 5 \\ -2 & 0 & 5 & -5 & 4 \\ 3 & 0 & -8 & 8 & -6 \\ 3 & 0 & -7 & 7 & -6 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dim L = 3, e_3 \cup e_4 - \text{ЛЗ},$$

$$e_{0..2} - \text{ЛЗ}$$

Задача 3

Найти базис пересечения подпространств, натянутых на системы векторов

$$L_1: v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 9 \\ -14 \end{bmatrix}$$

$$L_2: w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, w_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\dim(L_1 \cap L_2) = ?$$

$$\Rightarrow \dim L_1 = 2 \Rightarrow \dim L_2 = 2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} -1 & 2 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 9 & 6 & 3 \\ 3 & -5 & -14 & -2 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} -1 & 2 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right) \Rightarrow \dim(L_1 + L_2) = 4$$

$$\begin{aligned} \text{По теореме: } \dim L_1 + \dim L_2 &= \\ &= \dim(L_1 + L_2) + \dim(L_1 \cap L_2) \\ \text{и т.к. } \dim(L_1 + L_2) &= 4 \\ \text{и т.к. } \dim L_1 + \dim L_2 &= 4 \\ \text{и т.к. } \dim(L_1 \cap L_2) &= 0 \end{aligned}$$

Задача 4

Найти размерность линейной оболочки натянутой на векторы

$$e_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \\ 9 \end{bmatrix}, e_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 2 \\ -6 \\ -22 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \\ -4 \\ -18 \end{bmatrix}, e_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ -10 \\ -4 \\ 12 \\ 44 \end{bmatrix}, e_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ -7 \\ -2 \\ 10 \\ 30 \end{bmatrix}.$$

$$\left(\begin{array}{ccccc} 1 & -2 & -2 & 4 & 2 \\ -1 & 5 & 4 & -10 & -7 \\ -1 & 2 & 2 & -4 & -2 \\ 2 & -6 & -4 & 12 & 10 \\ 9 & -22 & -18 & 44 & 30 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc} 1 & -2 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dim L = 2$$