Задача 1.

1 Симм. ПЛФ и Антисимм ПЛФ

Sym и Asym.

] $\mathcal{U} \in \Omega_0^p$, тогда если $\forall$ перестановки $(j_1, .., j_n)$

Справедливо:

$\mathcal{U}(x_1, .., x_n) = \mathcal{U}(x_{j_1}, .., x_{j_n})$, то $\mathcal{U}$ - симм ПЛФ

] $\mathcal{U} \in \Omega_0^p$, тогда если $\forall$ перестановки $(j_1, .., j_n)$

справедливо:

$\mathcal{U}(x_1, .., x_n) = (-1)^{[j_1, .., j_n]} \cdot \mathcal{U}(x_{j_1}, .., x_{j_n})$, то

$\mathcal{U}$ - антисимм ПЛФ

Утв: мн-во всех симм ПЛФ образует

ЛП Σ^p п/п Ω^p

Утв: мн-во всех антисимм ПЛФ образует

ЛП Λ^p п/п Ω^p

$\triangleright$ проверяем аксиомы ЛП $\triangleleft$

1

Т.к. задание ПЛФ экв-но заданию её тензора, то

для $U \in \Sigma^p \Leftrightarrow U \leftrightarrow U_{i_p}$

и $U_{i_1, \ldots, i_p} = U_{\tau(i_1), \ldots, \tau(i_p)}$

Аналогично для $U \in \Lambda^p$: (τ-перестановка)

$U_{i_1, \ldots, i_p} = (-1)^{[\tau]} \cdot U_{\tau(i_1), \ldots, \tau(i_p)}$

Th: $V \in \Lambda^p \Leftrightarrow V(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_i, \ldots, x_p) = 0$

„$\Rightarrow$"] $V \in \Lambda^p$, тогда

$V(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_i, \ldots, x_p) = -V(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_i, \ldots, x_p) \Rightarrow$

$\Rightarrow V(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_i, \ldots, x_p) = 0$

„$\Leftarrow$"] $V(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_i, \ldots, x_p) = 0$

] $x_i = x_i' + x_i''$, тогда

$V(\ldots) = V(x_1, \ldots, x_i', \ldots, x_i', \ldots, x_p) + V(x_1, \ldots, x_i', \ldots, x_i'', \ldots, x_p)$
$+ V(x_1, \ldots, x_i'', \ldots, x_i', \ldots, x_p) + V(x_1, \ldots, x_i'', \ldots, x_i'', \ldots, x_p) =$

$\Rightarrow V \in \Lambda^p$

2

(13) Значение антисимм. ПЛФ на ЛЗ наборе равно 0

(13) при $p > n$ ($n = \dim X$) пр-во $\Lambda^p = \{\Theta\}$ - тривиально

Симметризация: $W \in \Omega^p$

$$U(x_1, \dots, x_p) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma} W(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)})$$

$U = \mathrm{Sym}\, W$

Альтернирование $W \in \Omega^p$

$$U(x_1, \dots, x_p) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma} (-1)^{[\sigma]} W(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)})$$

$U = \mathrm{Asym}\, W$

множитель $\frac{1}{p!}$ нужен для того, чтобы $\mathrm{Sym}\, U = U \in \Sigma^p$

Св-ва:

1) линейность $\mathrm{Sym}(\alpha U + \beta V) = \alpha \mathrm{Sym}\, U + \beta \mathrm{Sym}\, V$

2) $\mathrm{Sym}(\mathrm{Sym}\, U \cdot V) = \mathrm{Sym}(U \cdot \mathrm{Sym}\, V) = \mathrm{Sym}(U \cdot V)$

3) $\mathrm{Sym}\,\mathrm{Sym} = \mathrm{Sym}$; $\mathrm{Sym}\,\mathrm{Asym} = 0$

Задача 2.

Тензором p раз ковариантным и q раз контр-вариантным называют набор n^{p+q} чисел, который преобразуется при смене базиса по з-ну:

$$\tilde{\omega}^{j_1 \ldots j_q}_{i_1 \ldots i_p} = \tau^{t_1}_{i_1} \cdot \ldots \cdot \tau^{t_p}_{i_p} \cdot \sigma^{j_1}_{s_1} \cdot \ldots \cdot \sigma^{j_q}_{s_q} \cdot \omega^{s_1 \ldots s_q}_{t_1 \ldots t_p}$$

τ^{s}_{i} - эл-ты матрицы T

σ^{i}_{s} - эл-ты матрицы S

$\exists$ α и β - тензоры ранга (p,q):

$$\gamma = \alpha + \beta \Leftrightarrow \gamma^{j_1 \ldots j_q}_{i_1 \ldots i_p} = \alpha^{j_1 \ldots j_q}_{i_1 \ldots i_p} + \beta^{j_1 \ldots j_q}_{i_1 \ldots i_p}$$

$$\delta = \lambda \cdot \alpha \Leftrightarrow \delta^{j_1 \ldots j_q}_{i_1 \ldots i_p} = \lambda \cdot \alpha^{j_1 \ldots j_q}_{i_1 \ldots i_p} \quad (\lambda \in K)$$

Т.о. мн-во тензоров T^p_q образует ЛП