Д/з №4

1) $A(2, -8, 1)$ $\qquad \cos\angle ABC - ?$

$B(0, -4, 0)$ $\qquad \angle ABC = \angle(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$

$C(-1, -1, 4)$

$\overrightarrow{BC}\{-1, 3, 4\}$ $\qquad |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{1+9+16} = \sqrt{26}$

$\overrightarrow{BA}\{2, -4, 1\}$ $\qquad |\overrightarrow{BA}| = \sqrt{4+16+1} = \sqrt{21}$

$(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = -1\cdot 2 - 4\cdot 3 + 4\cdot 1 = -2 - 12 + 4 = -10$

$\cos\widehat{ABC} = \dfrac{-10}{\sqrt{26}\cdot\sqrt{21}}$

2) $\vec{a}(-1, 2, 1)$

$\vec{b}(-2, -5, 1)$

$\vec{c}(-4, 4, -3)$

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & -5 & 1 \\ -4 & 4 & -3 \end{vmatrix} = -1(15-4) - 2(6+4) + 1(-8-20) = -11 - 20 - 28 = -59 \neq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ некомпланарны

№3. $\vec{x}(5, -2)$

$\vec{e}_1(1, 1)$ $\qquad \vec{x} = \alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2$

$\vec{e}_2(-1, 0)$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Решим у-е

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} -\beta = 5 \\ \alpha = -2 \end{cases} \begin{cases} \alpha = -2 \\ \beta = -5 \end{cases}$$

$\vec{x} = -2\vec{e}_1 - 5\vec{e}_2$

$\vec{x}\{-2, -5\}$

№4. $\vec{a}(0,-2)$ $\quad |\vec{e}_1| = 2$ $\quad \angle(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = \frac{\pi}{3}$

$\vec{b}(4,2)$ $\quad |\vec{e}_2| = 3$

$\vec{a}(0,-2) = -2\vec{e}_2$

$\vec{b}(4,2) = 4\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$

$(\vec{a}, \vec{b}) = (-2\vec{e}_2, 4\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2) = -8(\vec{e}_1, \vec{e}_2) - 4(\vec{e}_2, \vec{e}_2) =$

$= -8 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} - 4 \cdot 3 \cdot 3 = -24 - 36 = \underline{\underline{-60}}$

№5.

$Пр_{\vec{a}}(4\vec{a} - \vec{b}) = ?$ $\quad |\vec{a}| = 5$ $\quad \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{6}$

$|\vec{b}| = 4\sqrt{3}$

$(\vec{a}, 4\vec{a}-\vec{b}) = |\vec{a}| \cdot \text{Пр}_{\vec{a}}(4\vec{a}-\vec{b})$

$(\vec{a}, 4\vec{a}-\vec{b}) = 4(\vec{a},\vec{a}) - (\vec{a},\vec{b}) = 4\cdot5\cdot5 - 5\cdot4\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} =$

$= 100 - 30 = 70 \Rightarrow \text{Пр}_{\vec{a}}(4\vec{a}-\vec{b}) = \frac{70}{5} = 14$

№6. ABCD - квадрат (решено в другой тетради)

№7.

$A(0, 2, -3)$ $\quad D \in$ биссектрисе $\angle ABC$

$B(2, -1, -2)$ $\quad \vec{BA}(-2, 3, -1)$

$C(1, 0, -7)$ $\quad \vec{BC}(-1, 1, -5)$

Пусть $D(x, y, z)$

$\vec{BD}(x-2, y+1, z+2)$

$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$

10 10

№6

$A(-2, -2, -5)$

$B(-2, 0, -2)$

$C(-2, -3, 0)$

$D(-2, -5, -3)$

A C D

$\vec{AB}(0, 2, 3)$ $\quad \Rightarrow \cancel{AB} = CD$ $\quad |\vec{AB}| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

$\vec{DC}(0, +2, 3)$ $\quad |\vec{DC}| = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$ $\Rightarrow$ ABCD - ромб

$\vec{AB}(0, 2, 3)$ $\quad |\vec{BC}| = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

$\vec{BC}(0, -3, 2)$ $\quad (\vec{AB}, \vec{BC})$ $\quad |\vec{DA}| = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

$\vec{DA}(0, 3, -2)$

$(\vec{AB}, \vec{BC}) = -6+6 = 0 \Rightarrow \vec{AB} \perp \vec{BC} \Rightarrow$ ABCD - квадрат

№7.

$A(0, 2, -3)$ $\quad D(x, y, z)$

$B(2, -1, -2)$ $\quad \vec{BA}(-2, 3, -1)$ $\quad \cos\widehat{AB} = \frac{2\cdot3+3}{\ldots} =$

№8

$|\vec{a}|=3$ $\quad |[2\vec{a}, \vec{a}-2\vec{b}]| - ?$

$|\vec{b}|=4$

$\angle(\vec{a},\vec{b})=\frac{3\pi}{4}$

$|[2\vec{a},\vec{a}-2\vec{b}]| = |2\overset{0}{[\vec{a},\vec{a}]} - 4[\vec{a},\vec{b}]| = 4|[\vec{a},\vec{b}]| =$

$= 4\cdot 3\cdot 4\cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \underline{\underline{24\sqrt{2}}}$

?№9.

$A(4,2,-4)$ $\quad V=52 \quad A_1(x,y,z) - ?$ (Прямо-угольный)

$B(7,-1,-3)$ $\quad \vec{BA}(-3,3,-1)$

$C(11,1,-7)$ $\quad \vec{BC}(4,2,-4)$

$\vec{BA}+\vec{BC}=\vec{BD}$

$\vec{BD}(1,5,-5) \Rightarrow D(8,4,-8)$

$\vec{AD}(4,2,-4)$

$\vec{AB}(3,-3,1)$

$\vec{AA_1}(x-4, y-2, z+4)$

$(\vec{AD},\vec{AB}) = 12-6-4=2 \quad (\vec{AD} \not\perp \vec{AB})$

$4 \quad 5 \quad 6 \quad \ldots \quad 10$ ← строка 1 ...

$$(\vec{AB}, \vec{AA_1}) = 3(x-4) - 3(y-2) + z+4 = 3x - 3y + z - 2 = 0$$

$$(\vec{AD}, \vec{AA_1}) = 4(x-4) + 2(y-2) - 4(z+4) = 4x + 2y - 4z - 36 = 0$$

$$(\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AA_1}) = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 3 & -3 & 1 \\ x-4 & y-2 & z+4 \end{vmatrix} = 4(-3z-12-y+2) - 2(3z+12-x+4) - 4(3y-6+3x-12) =$$

$$= -12z - 4y - 40 - 6z + 2x - 32 - 12y - 12x + 72 =$$

$$= -10x - 16y - 18z = 52$$

Имеем:

$$\begin{cases} 3x - 3y + z = 2 \\ 2x + y - 2z = 18 \\ 5x + 8y + 9z = -26 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 5 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 3\cdot(9+16) + 3(18+10) + 1(16-5) =$$

$$= 3\cdot(\overset{25}{\cancel{-7}}) + 3\cdot 28 + 11 = \overset{75+60+24+11}{\cancel{35} \; \cancel{21}} = \cancel{\ldots}$$

$$= 170$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & 18 \\ 5 & 8 & 9 & -26 \end{array}\right)$$

$$\Delta A_1 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 18 & 1 & -2 \\ -26 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \cancel{2\cdot(9-16)} + \cancel{3(18\cdot 9 - 26\cdot 2)} + \cancel{1(18\cdot 8 + 26)} =$$

$$= \cancel{7\ldots}\; 550$$

$$\Delta A_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 18 & -2 \\ 5 & -26 & 9 \end{vmatrix} = \overset{132}{\cancel{784}} \qquad \Delta A_3 = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 18 \\ 5 & 8 & -26 \end{vmatrix} = -914$$

$$\cancel{\begin{cases} x = \dfrac{798}{14} = 57 \\ y = \dfrac{484}{14} = \dfrac{242}{7} \\ z = -\dfrac{814}{14} = -\dfrac{457}{7} \end{cases}}$$

$\dfrac{55}{17}$ 3,24

$\dfrac{66}{85}$ 0,78

$-\dfrac{457}{85}$ −5,38

$$\begin{cases} x = \dfrac{55}{17} \\ y = \dfrac{66}{85} \\ z = -\dfrac{457}{85} \end{cases}$$

$\overrightarrow{AA_1^*}\left(\dfrac{55}{17}-4,\ \dfrac{66}{85}-2,\ -\dfrac{457}{85}+4\right)$ (не тот вектор) получилась другая прямая я [illegible]

$\overrightarrow{AA_1^*}\left(-\dfrac{13}{17},\ -\dfrac{104}{85},\ -\dfrac{117}{85}\right)$

$-\overrightarrow{AA_1^*} = \overrightarrow{AA_1} = \left(\dfrac{13}{17},\ \dfrac{104}{85},\ \dfrac{117}{85}\right)$

$\overrightarrow{AA_1}\,(x-4,\ y-2,\ z+4)$

$$\begin{cases} x = 4\dfrac{13}{17} & (4,76) \\ y = 2\dfrac{104}{85} & (3,22) \\ z = \dfrac{117}{85}-4 & (-2,62) \end{cases}$$ ← Ответ.

№7.

Очевидно, что вершина угла, для которого проведена биссектриса, лежит на ней и задача решена :). Т.к. это слишком просто (жаль я и открыл этот ответ), решим задачу по-другому.

$A(0, 2, -3)$

$B(2, -1, -2)$

$C(1, 0, -7)$

$\overrightarrow{BA}(-2, 3, -1)$

$\overrightarrow{BC}(-1, 1, -5)$

$\exists D(x, y, z)$

$|\overrightarrow{BA}| = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14}$

$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{1+1+25} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$

$\vec{a}_1\left(-\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}, -\frac{1}{\sqrt{14}}\right)$

$\vec{a}_2\left(-\frac{1}{3\sqrt{3}}, \frac{1}{3\sqrt{3}}, -\frac{5}{3\sqrt{3}}\right)$

$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = \overrightarrow{BD}$, где $\overrightarrow{BD}(x-2, y+1, z+2)$

$$\begin{cases} x-2 = -\frac{2}{\sqrt{14}} - \frac{1}{3\sqrt{3}} \\ y+1 = \frac{3}{\sqrt{14}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} \\ z+2 = -\frac{1}{\sqrt{14}} - \frac{5}{3\sqrt{3}} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2 - \frac{2}{\sqrt{14}} - \frac{1}{3\sqrt{3}} \\ y = -1 + \frac{3}{\sqrt{14}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} \\ z = -2 - \frac{1}{\sqrt{14}} - \frac{5}{3\sqrt{3}} \end{cases}$$