§4. Элементарные преобразования. Разложение определителя по строке (столбцу). Вычисление определителей

Элементарными преобразованиями данной совокупности строк называются преобразования трех видов:

1) перестановка строк (строки меняются местами);
2) умножение строки на отличное от нуля число;
3) прибавление к строке строки, пропорциональной другой строке.

Аналогично определяются элементарные преобразования совокупности столбцов. В частности, можно говорить об элементарных преобразованиях строк (столбцов) данной прямоугольной матрицы и определителя данной квадратной матрицы.

Установленные в предыдущем параграфе свойства 4°, 2° и 5° определителей показывают, как изменяется определитель при элементарных преобразованиях его строк (столбцов). Мы уже видели (см. замечания в конце предыдущего параграфа по поводу решений примера 12 из §2 и примера 6 из §3), что элементарные преобразования определителей могут оказаться полезными при их вычислении. Однако наибольшая эффективность при использовании элементарных преобразований достигается, если они применяются в комбинации с так называемой теоремой о разложении определителя по строке (столбцу). Доказательству этой теоремы, а также ее применению при практическом вычислении определителей, и посвящен настоящий параграф. Начнем мы, впрочем, с рассмотрения несколько более сложных, чем рассмотренные в §3, примеров определителей, для вычисления которых достаточно использования одних только элементарных преобразований.

Пример 1. Вычислите определитель

$$D=\begin{vmatrix} x & a & b & 0 & c \\ 0 & y & 0 & 0 & d \\ 0 & e & z & 0 & f \\ g & h & k & u & l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v \end{vmatrix}.$$

▲ Если $u=0$, то $D=0$ (определитель содержит столбец из нулей). Пусть $u\neq 0$. Умножим четвертый столбец последовательно на $-\frac{g}{u}$, $-\frac{h}{u}$, $-\frac{k}{u}$ и прибавим к первому, второму и третьему столбцам определителя D соответственно. Получим

$$D=\begin{vmatrix} x & a & b & 0 & c \\ 0 & y & 0 & 0 & d \\ 0 & e & z & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & u & l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v \end{vmatrix}. \qquad (1)$$

Если $z=0$, то, переставив второй и третий столбцы, получим, что

$$D=\begin{vmatrix} x & b & a & 0 & c \\ 0 & 0 & y & 0 & d \\ 0 & 0 & e & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & u & l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v \end{vmatrix} = x\cdot 0\cdot e\cdot u\cdot v = 0$$

в силу результата примера 6 из §2.

Если же $z \neq 0$, то прибавим ко второму столбцу определителя (1) третий, умноженный на $-\dfrac{e}{z}$:

$$D=\begin{vmatrix} x & a-\dfrac{be}{z} & b & 0 & c \\ 0 & y & 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & z & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & u & l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v \end{vmatrix} = xyzuv.$$

Следовательно, при всех значениях переменных $x, a, b, ..., u, l, v$ имеем $D=xyzuv$. ▼

Пример 2. Вычислите определитель

$$D=\begin{vmatrix} \alpha^2 & (\alpha+1)^2 & (\alpha+2)^2 & (\alpha+3)^2 \\ \beta^2 & (\beta+1)^2 & (\beta+2)^2 & (\beta+3)^2 \\ \gamma^2 & (\gamma+1)^2 & (\gamma+2)^2 & (\gamma+3)^2 \\ \delta^2 & (\delta+1)^2 & (\delta+2)^2 & (\delta+3)^2 \end{vmatrix}.$$

▲ Вычтем первый столбец из второго, третьего и четвертого столбцов, получим, используя свойство 2°:

$$D=\begin{vmatrix}\alpha^2 & 2\alpha+1 & 4\alpha+4 & 6\alpha+9\\ \beta^2 & 2\beta+1 & 4\beta+4 & 6\beta+9\\ \gamma^2 & 2\gamma+1 & 4\gamma+4 & 6\gamma+9\\ \delta^2 & 2\delta+1 & 4\delta+4 & 6\delta+9\end{vmatrix}=3\cdot\begin{vmatrix}\alpha^2 & 2\alpha+1 & 4\alpha+4 & 2\alpha+3\\ \beta^2 & 2\beta+1 & 4\beta+4 & 2\beta+3\\ \gamma^2 & 2\gamma+1 & 4\gamma+4 & 2\gamma+3\\ \delta^2 & 2\delta+1 & 4\delta+4 & 2\delta+3\end{vmatrix}=0,$$

поскольку в последнем определителе четвертый столбец является разностью третьего и второго столбцов. ▼

Пример 3. Вычислите определитель

$$D=\begin{vmatrix}a & b & c & d\\ b & a & d & c\\ c & d & a & b\\ d & c & b & a\end{vmatrix}.$$

▲ Прибавив к первой строке сумму остальных трех строк, найдем:

$$D=\begin{vmatrix}a+b+c+d & a+b+c+d & a+b+c+d & a+b+c+d\\ b & a & d & c\\ c & d & a & b\\ d & c & b & a\end{vmatrix}=$$

$$=(a+b+c+d)\cdot\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ b & a & d & c\\ c & d & a & b\\ d & c & b & a\end{vmatrix}=(a+b+c+d)D_1,$$

где определитель D_1 определяется очевидным образом.

Теперь прибавим к первому столбцу определителя D_1 его второй столбец и вычтем сумму третьего и четвертого столбцов, получим:

$$D_1=\begin{vmatrix}0 & 1 & 1 & 1\\ a+b-c-d & a & d & c\\ -a-b+c+d & d & a & b\\ -a-b+c+d & c & b & a\end{vmatrix}=(a+b-c-d)\cdot\begin{vmatrix}0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & a & d & c\\ -1 & d & a & b\\ -1 & c & b & a\end{vmatrix}=$$

$$=(a+b-c-d)D_2.$$

Прибавим вторую строку определителя D_2 к его третьей и четвертой строкам:

$$D_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & d & c \\ 0 & a+d & a+d & b+c \\ 0 & a+c & b+d & a+c \end{vmatrix}.$$

Вычитая из третьей строки получившегося определителя его первую строку, умноженную на $b+c$, и из четвертой строки — первую, умноженную на $b+d$, находим, что

$$D_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & d & c \\ 0 & a-b-c+d & a-b-c+d & 0 \\ 0 & a-b+c-d & 0 & a-b+c-d \end{vmatrix} = (a-b-c+d)\times$$

$$\times(a-b+c-d)\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & d & c \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Остается вычислить определитель

$$d = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & d & c \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Вычитая из первой строки последнюю, а затем из второго, третьего и четвертого столбцов первый, умноженный соответственно на a, d, c, получаем:

$$d = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

(мы сначала из третьей строки вычли первую, а затем из четвертой — *получившуюся при этом* третью строку). Последний определитель равен 1: двумя перестановками строк он сводится к определителю единичной матрицы четвертого порядка.

Окончательно имеем:

$$D = (a+b+c+d)(a+b-c-d)(a-b-c+d)(a-b+c-d). ▼$$

Замечание. В процессе решения последнего примера мы довольно смело составляли линейные комбинации строк и столбцов определителя. Однако при этом нужно следить за тем, чтобы не прибавлять в неизмененном виде строку или столбец, изменившиеся в процессе предыдущих преобразований. Иначе можно, например, "доказать", что любой определитель равен нулю. Действительно, пусть дан некоторый определитель. Прибавим первую строку ко второй и вторую к первой. Получим определитель с двумя одинаковыми строками, а он равен нулю. Ошибка в этом "доказательстве" состоит именно в том, что вторая строка уже изменилась после прибавления к ней первой строки, и прибавлять ее к первой можно только в этом измененном виде — только тогда можно говорить о сохранении величины определителя.

Подчеркнем, что при вычислении определителя d в примере 3 мы так и поступили: из его четвертой строки мы вычли не исходную, а преобразованную к этому моменту третью строку.

Пример 4. Вычислите определитель

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a_2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & a_3 & \dots & 1 \\ . & . & . & . & . \\ 1 & 1 & 1 & \dots & a_n \end{vmatrix}.$$

▲ Вычтем из каждой строки (кроме, разумеется, первой) первую строку. Получим, что

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & a_2-1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_3-1 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n-1 \end{vmatrix}=(a_2-1)(a_3-1)\dots(a_n-1). \ ▼$$

Пример 5. Вычислите определитель порядка n

$$D_n=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ . & . & . & . & . \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

▲ Прибавим все строки к первой. Получим

$$D_n = \begin{vmatrix} n-1 & n-1 & n-1 & \dots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix} = (n-1)D,$$

где D — определитель, вычисленный в примере 4 при $a_2 = a_3 = \dots = a_n = 0$, т.е. $D = (-1)^{n-1}$. Следовательно, $D_n = (-1)^{n-1}(n-1)$. ▼

Пусть дан определитель

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i1} & \dots & a_{ik} & \dots & a_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{2.13}$$

Рассмотрим определитель

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & 0 & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \tag{2.14}$$

матрица которого получается из матрицы определителя D путем замены элемента a_{ik} на 1, а всех остальных элементов i-й строки и k-го столбца на нули. Так построенный определитель называется *алгебраическим дополнением элемента* a_{ik} и обозначается A_{ik}. Заметим, что A_{ik} не зависит от элементов i-й строки и k-го столбца. Имеет место следующее свойство определителя, которое и составляет содержание теоремы о разложении определителя по элементам строки (столбца).

6°. *Определитель равен сумме произведений элементов какой-либо строки (столбца) на их алгебраические дополнения.*

□ Достаточно, очевидно, доказать утверждение 6° для строк. Представим i-ю строку определителя D из (2.13) в виде суммы следующих n строк:

$(a_{i1}\ 0 \dots 0 \dots 0)$, $(0\ a_{i2} \dots 0 \dots 0)$, ..., $(0\ 0 \dots a_{ik} \dots 0)$, ..., $(0\ 0 \dots 0 \dots a_{in})$

(в k-й строке все элементы равны нулю, кроме k-го, равного a_{ik}). Тогда в силу свойства линейности имеем

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i1} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}+\dots+\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & a_{ik} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}+\dots+\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & 0 & \dots & a_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}=$$

$$=a_{i1}\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}+\dots+a_{ik}\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}+\dots+a_{in}\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (2.15)$$

Рассмотрим первый из определителей в получившейся сумме. Вычтем из его первой строки i-ю, умноженную на a_{11}, из второй — i-ю, умноженную на $a_{21}, \dots$, из n-й вычтем i-ю, умноженную на a_{n1}. Тогда все элементы этого определителя, кроме элементов первого столбца, не изменятся, а все элементы первого столбца заменятся на нули, кроме элемента с номером i, который останется равным 1. Следовательно, рассматриваемый определитель равен

$$\begin{vmatrix} 0 & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}=A_{i1}.$$

Аналогично получаем, что все остальные определители в сумме (2.15) также равны соответствующим алгебраическим дополнениям, и, значит,

$$D=a_{i1}A_{i1}+\dots+a_{ik}A_{ik}+\dots+a_{in}A_{in}. \blacksquare \qquad (2.16)$$

Следствие 1. *Пусть в определителе D (2.13) выбрана строка с номером i и даны n чисел $b_1, \dots, b_n$. Тогда сумма произведений этих чисел на алгебраические дополнения элементов i-й строки определителя D равна определителю, в котором на месте $a_{i1}, \dots, a_{in}$ стоят $b_1, \dots, b_n$:*

$$b_1A_{i1}+\dots+b_nA_{in}=\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ b_1 & \dots & b_n \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (2.17)$$

□ По свойству 6°

$$D' = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ . & . & . \\ b_1 & \dots & b_n \\ . & . & . \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = b_1 A'_{i1} + \dots + b_n A'_{in},$$

где $A'_{i1}, \dots, A'_{in}$ — алгебраические дополнения элементов i-ой строки определителя D'. Но алгебраические дополнения не зависят от элементов i-ой строки, так что они совпадают с алгебраическими дополнениями $A_{i1}, \dots, A_{in}$ определителя D. ■

Следствие 2 (ортогональность строк и алгебраических дополнений). *Сумма произведений элементов какой-либо строки определителя на алгебраические дополнения элементов другой его строки равна нулю.*

□ Действительно, пусть дан определитель

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ . & . & . \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ . & . & . \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \\ . & . & . \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Тогда, по следствию 1, имеем

$$a_{k1}A_{i1} + \dots + a_{kn}A_{in} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ . & . & . \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \\ . & . & . \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \\ . & . & . \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0,$$

поскольку получился определитель с двумя одинаковыми строками. ■

Пример 6. Представьте определитель

$$D(x) = \begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12}+x & \dots & a_{1n}+x \\ a_{21}+x & a_{22}+x & \dots & a_{2n}+x \\ . & . & . & . \\ a_{n1}+x & a_{n2}+x & \dots & a_{nn}+x \end{vmatrix} \qquad (2.18)$$

в виде многочлена, записанного по степеням x.

☐ Докажем, что справедливо равенство

$$D(x)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + x\cdot\sum_{i,\,k=1}^{n} A_{ik}, \qquad (2.19)$$

где A_{ik} — алгебраическое дополнение элемента a_{ik} определителя

$$D(0)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

т.е. $D(x)$ — *линейная* функция от x.

Представим определитель $D(x)$ в виде суммы двух определителей, применив к его первой строке свойство 3°:

$$D(x)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21}+x & a_{22}+x & \dots & a_{2n}+x \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}+x & a_{n2}+x & \dots & a_{nn}+x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & x & \dots & x \\ a_{21}+x & a_{22}+x & \dots & a_{2n}+x \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}+x & a_{n2}+x & \dots & a_{nn}+x \end{vmatrix} =$$

$$= D_1(x)+D_2(x),$$

где определители $D_1(x)$ и $D_2(x)$ определяются очевидным образом. Рассмотрим определитель $D_2(x)$. Вычитая первую строку из всех остальных, получим:

$$D_2(x)=\begin{vmatrix} x & x & \dots & x \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = x\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= x\cdot(1\cdot A_{11}+\dots+1\cdot A_{1n}) = x\cdot\sum_{k=1}^{n} A_{1k}$$

(мы воспользовались (2.17) для первой строки при $b_1=b_2=\dots=b_n=1$).

Применив свойство 3° определителей ко второй строке определителя $D_1(x)$, получим:

$$D_1(x)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31}+x & a_{32}+x & \dots & a_{3n}+x \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}+x & a_{n2}+x & \dots & a_{nn}+x \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ x & x & \dots & x \\ a_{31}+x & a_{32}+x & \dots & a_{3n}+x \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}+x & a_{n2}+x & \dots & a_{nn}+x \end{vmatrix}. \quad (2.20)$$

Как и в случае определителя $D_2(x)$, убеждаемся, что второй определитель в сумме (2.20) равен $x\cdot\sum_{k=1}^{n} A_{2k}$, а первый определитель снова можно представить в виде суммы двух определителей, применив к его третьей строке свойство 3°. И так далее. Через n шагов придем к равенству

$$D(x)=D(0)+x\cdot\left(\sum_{k=1}^{n} A_{1k}+\dots+\sum_{k=1}^{n} A_{nk}\right)=D(0)+x\cdot\sum_{i,\,k=1}^{n} A_{ik},$$

т.е. к равенству (2.19). ■

Замечание 1. Поскольку определитель $D(0)$ получается из определителя $D(x)$ прибавлением ко всем элементам $-x$, имеем в силу равенства (2.19):

$$D(0)=D(x)+(-x)\cdot\sum_{i,k=1}^{n} A'_{ik}, \quad (1)$$

где A'_{ik} — алгебраическое дополнение элемента $a_{ik}+x$ определителя $D(x)$ — некоторый многочлен от x. Из системы уравнений (2.19) — (1) находим:

$$x\cdot\left(\sum_{i,\,k=1}^{n} A_{ik}-\sum_{i,\,k=1}^{n} A'_{ik}\right)=0,$$

откуда, в силу условия равенства нулю многочлена, окончательно получаем:

$$\sum_{i,\,k=1}^{n} A'_{ik}=\sum_{i,\,k=1}^{n} A_{ik},$$

т.е. *сумма алгебраических дополнений всех элементов определителя не изменяется при прибавлении к каждому элементу одного и того же числа.*

Замечание 2. Если все элементы одной строки (столбца) определителя равны единице, то сумма алгебраических дополнений всех элементов определителя равна самому определителю. Для доказательства достаточно положить $x=-1$ в равенстве (2.19) и учесть, что в этом случае $D(-1)=0$.

Результат примера 6 (формула (2.19)) может оказаться полезным при практическом вычислении определителей.

Пример 7. Вычислите определитель

$$D=\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \dots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+a_n \end{vmatrix}.$$

▲ Положим

$$d=\begin{vmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}=a_1a_2\dots a_n.$$

Тогда определитель D можно получить, прибавив ко всем элементам определителя d по 1. Следовательно, по формуле (2.19) при $x=1$ имеем

$$D=a_1a_2\dots a_n+\sum_{i,k=1}^{n}A_{ik},$$

где A_{ik} — алгебраическое дополнение элемента определителя d, стоящего в i-й строке и k-м столбце. Если $i\neq k$, то $A_{ik}=0$, поскольку в этом случае определитель A_{ik} содержит нулевой столбец (строку). Если $i=k$, то $A_{ii}=$ $=a_1\dots a_{i-1}a_{i+1}\dots a_n$ при $2\leq i\leq n-1$, $A_{11}=a_2\dots a_n$, $A_{nn}=a_1\dots a_{n-1}$. Поэтому $D=$ $=a_1a_2\dots a_n+a_1a_2\dots a_n\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\dots+\frac{1}{a_n}\right)$, где принято естественное соглашение: при $a_i=0$ второе слагаемое заменяется на произведение $\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}a_j$ (и, в частности, оно равно нулю, если какие-либо два из чисел a_i равны нулю). ▼

Пример 8. Вычислите определитель

$$D(x,y)=\begin{vmatrix} a_1 & x & x & \dots & x \\ y & a_2 & x & \dots & x \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y & y & y & \dots & a_n \end{vmatrix}.$$

▲ Воспользуемся приемом, описанным в примере 7. Рассмотрим определитель

$$D=\begin{vmatrix} a_1-x & 0 & 0 & \dots & 0 \\ y-x & a_2-x & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y-x & y-x & y-x & \dots & a_n-x \end{vmatrix}=(a_1-x)\,(a_2-x)\,\dots\,(a_n-x),$$

из которого определитель $D(x,y)$ получается прибавлением x ко всем элементам. По формуле (2.19) имеем:

$$D(x,y)=(a_1-x)\,(a_2-x)\dots(a_n-x)+x\cdot\sum_{i,\,k=1}^{n}A'_{ik},$$

где A'_{ik} — алгебраическое дополнение соответствующего элемента определителя D. В силу замечания 1 к примеру 6 справедливо равенство

$$\sum_{i,k=1}^{n}A'_{ik}=\sum_{i,k=1}^{n}A_{ik},$$

где A_{ik} — алгебраическое дополнение элемента определителя $D(x,y)$, стоящего в i-й строке и k-м столбце.

Следовательно, справедливо равенство

$$D(x,y)=(a_1-x)\,(a_2-x)\,\dots\,(a_n-x)+x\cdot\sum_{i,\,k=1}^{n}A_{ik}. \tag{1}$$

По свойству 1° определителей $D(y,x)=D(x,y)$, поэтому из (1) находим, что также справедливо равенство

$$D(x,y)=(a_1-y)(a_2-y)\,\dots\,(a_n-y)+y\cdot\sum_{i,\,k=1}^{n}A_{ik}. \tag{2}$$

Решая систему уравнений (1) — (2), окончательно получаем:

$$D(x,y)=\frac{y(a_1-x)(a_2-x)\dots(a_n-x)-x(a_1-y)(a_2-y)\,\dots\,(a_n-y)}{y-x}$$

(числитель дроби обращается в нуль при $y=x$ и, следовательно, по теореме Безу нацело делится на $y-x$). ▼

Пример 9. Докажите, что сумма алгебраических дополнений всех элементов определителя

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

равна определителю

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_{21}-a_{11} & a_{22}-a_{12} & \dots & a_{2n}-a_{1n} \\ a_{31}-a_{11} & a_{32}-a_{12} & \dots & a_{3n}-a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}-a_{11} & a_{n2}-a_{12} & \dots & a_{nn}-a_{1n} \end{vmatrix} = \qquad (2.21)$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_{21}-a_{11} & a_{22}-a_{12} & \dots & a_{2n}-a_{1n} \\ a_{31}-a_{21} & a_{32}-a_{22} & \dots & a_{3n}-a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}-a_{n-1,1} & a_{n2}-a_{n-1,2} & \dots & a_{nn}-a_{n-1,n} \end{vmatrix}.$$

▲ Рассмотрим определитель

$$D(x)=\begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12}+x & \dots & a_{1n}+x \\ a_{21}+x & a_{22}+x & \dots & a_{2n}+x \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}+x & a_{n2}+x & \dots & a_{nn}+x \end{vmatrix},$$

который получается из определителя D прибавлением x ко всем его элементам. С одной стороны, по формуле (2.19) $D(x)=D+x\cdot\sum\limits_{i,\,k=1}^{n}A_{ik}$, где $\sum\limits_{i,\,k=1}^{n}A_{ik}$ — сумма алгебраических дополнений всех элементов D. С другой стороны, вычитая первую строку определителя $D(x)$ из остальных, получаем, используя свойство 3° определителей:

$$D(x)=\begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12}+x & \dots & a_{1n}+x \\ a_{21}-a_{11} & a_{22}-a_{12} & \dots & a_{2n}-a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}-a_{11} & a_{n2}-a_{12} & \dots & a_{nn}-a_{1n} \end{vmatrix} =$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21}-a_{11} & a_{22}-a_{12} & \dots & a_{2n}-a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}-a_{11} & a_{n2}-a_{12} & \dots & a_{nn}-a_{1n} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x & x & \dots & x \\ a_{21}-a_{11} & a_{22}-a_{12} & \dots & a_{2n}-a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}-a_{11} & a_{n2}-a_{12} & \dots & a_{nn}-a_{1n} \end{vmatrix}.$$

Первый из получившихся определителей равен D: для доказательства достаточно прибавить первую строку к каждой из остальных. Второй определитель равен произведению x на определитель в левой части (2.21). Сравнивая два полученных представления для $D(x)$ в виде линейной функции от x, заключаем, что

$$\sum_{i,k=1}^{n} A_{ik}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_{21}-a_{11} & a_{22}-a_{12} & \dots & a_{2n}-a_{1n} \\ a_{31}-a_{11} & a_{32}-a_{12} & \dots & a_{3n}-a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}-a_{11} & a_{n2}-a_{12} & \dots & a_{nn}-a_{1n} \end{vmatrix}. \qquad (2.22)$$

Для завершения доказательства остается проверить равенство (2.21). Вычтем из n-й строки определителя (2.22) его $(n-1)$-ю строку, затем из $(n-1)$-й строки —$(n-2)$-ю и т.д. В результате получим определитель в правой части (2.21). Утверждение примера 9 полностью доказано. ▼

Из этого утверждения вытекает очевидное следствие (см. также замечание 1 к примеру 6): сумма алгебраических дополнений всех элементов определителя не изменится, если ко всем элементам прибавить одно и то же число.

□ Доказательство очевидным образом получается, если воспользоваться равенством (2.22). ■

Пример 10. Докажите, что кососимметрический определитель четного порядка не изменится, если ко всем его элементам прибавить одно и то же число.

▲ Пусть D — данный кососимметрический определитель порядка $2n$. Тогда $a_{ki}=-a_{ik}$ для всех $i, k=1, 2, \dots, 2n$ (в частности, $a_{ii}=0$). Рассмотрим определитель $D(x)$, получающийся из D прибавлением ко всем элементам x. По формуле (2.19)

$$D(x)=D+x\cdot\sum_{i,\,k=1}^{2n} A_{ik},$$

так что достаточно доказать, что равна нулю сумма алгебраических дополнений всех элементов D. По свойству 1° определителей, $A_{ki} = A_{ki}^T$. В силу кососимметричности по свойству 2° имеем $A_{ki}^T = (-1)^{2n-1} A_{ik} = -A_{ik}$. Значит, $A_{ki} = -A_{ik}$, $A_{ki} + A_{ik} = 0$ для всех i и k, в частности, $A_{ii} = 0$ для всех $i = 1, 2, \ldots, 2n$. Следовательно,

$$\sum_{i,\,k=1}^{2n} A_{ik} = \sum_{i=1}^{2n} A_{ii} + \sum_{i \neq k} A_{ik} = 0 + 0 = 0,$$

поскольку в первой сумме все слагаемые равны нулю, а во второй слагаемые разбиваются на пары $(A_{ik},\ A_{ki})$ так, что сумма слагаемых, входящих в пару, равна нулю. Таким образом, $D(x) = D$, что и требовалось доказать. ▼

В §2 для произвольного определителя D четвертого порядка было установлено равенство (2.10), которое мы назвали формулой разложения определителя D по первой строке. В отличие от (2.16), равенство (тождество) (2.10) позволяет свести вычисление определителя 4-го порядка к вычислению нескольких определителей меньшего (а именно, третьего) порядка. Сейчас мы покажем, что и в равенстве (2.16) можно заменить определители A_{ik} n-го порядка на соответствующим образом выбранные определители $(n-1)$-го порядка.

Минором порядка $n-1$ для данного определителя называется определитель матрицы, получающейся из матрицы исходного определителя посредством вычеркивания одной строки и одного столбца. Минор, получающийся вычеркиванием строки и столбца, содержащих a_{ik}, обозначается через M_{ik}.

Следующее свойство определителей касается вычисления алгебраических дополнений.

7°. *Алгебраическое дополнение A_{ik} отличается от соответствующего минора M_{ik} лишь на множитель $(-1)^{i+k}$, то есть $A_{ik} = M_{ik}$, если число $i+k$ четно, и $A_{ik} = -M_{ik}$ в противном случае.*

☐ Сначала рассмотрим случай $i = k = 1$:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Согласно определению детерминанта (см. (2.4))

$$A_{11} = \sum_{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)} (-1)^{\operatorname{inv}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a_{n\alpha_n},$$

причем нужно положить $a_{11} = 1$, $a_{1k} = 0$ при $k = 2, 3, \ldots, n$ и $a_{i1} = 0$ при $i = 2, 3, \ldots, n$. Поэтому в сумме нужно сохранить только слагаемые при $\alpha_1 = 1$ и $(\alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, пробегающей все перестановки чисел $2, 3, \ldots, n$, и при этом положить $a_{11} = 1$. В таком случае получаем

$$A_{11} = \sum_{(\alpha_2, \ldots, \alpha_n)} (-1)^{\operatorname{inv}(1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)} a_{2\alpha_2} \ldots a_{n\alpha_n}.$$

Поскольку 1 на первом месте не образует инверсий с другими элементами, $\operatorname{inv}(1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \operatorname{inv}(\alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, и поэтому

$$A_{11} = \sum_{(\alpha_2, \ldots, \alpha_n)} (-1)^{\operatorname{inv}(\alpha_2, \ldots, \alpha_n)} a_{2\alpha_2} \ldots a_{n\alpha_n} = \begin{vmatrix} a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & . \\ a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

(Последнее равенство справедливо в силу определения детерминанта: достаточно (2.4) применить к определителю $\begin{vmatrix} a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & . \\ a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$, учитывая, что в этом определителе вторые индексы на единицу больше номеров столбцов, так что $\operatorname{inv}(\alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ равно числу инверсий в номерах столбцов.) Итак, $A_{11} = M_{11}$.

Пусть теперь i и k любые:

$$A_{ik} = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,k-1} & 0 & a_{1,k+1} & \ldots & a_{1n} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{i-1,1} & \ldots & a_{i-1,k-1} & 0 & a_{i-1,k+1} & \ldots & a_{i-1,n} \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{i+1,1} & \ldots & a_{i+1,k-1} & 0 & a_{i+1,k+1} & \ldots & a_{i+1,n} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & \ldots & a_{n,k-1} & 0 & a_{n,k+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Переместим 1 в левый верхний угол, сохранив порядок остальных строк и столбцов. Для этого поменяем местами i-ю строку последовательно со всеми предыдущими, а затем то же сделаем с k-м столбцом. Определитель при этом приобретет множитель $(-1)^{i-1+k-1}=(-1)^{i+k}$, так что

$$A_{ik}=(-1)^{i+k}\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{11} & \dots & a_{1,k-1} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,k-1} & a_{i-1,k+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ 0 & a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,k-1} & a_{i+1,k+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n1} & \dots & a_{n,k-1} & a_{n,k+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Используя доказанное утверждение для $i=k=1$, окончательно получаем:

$$A_{ik}=(-1)^{i+k}\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,k-1} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,k-1} & a_{i-1,k+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,k-1} & a_{i+1,k+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,k-1} & a_{n,k+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}=(-1)^{i+k}M_{ik}. \blacksquare$$

В соответствии с доказанным свойством 7°, равенству (2.16) можно придать следующий вид:

$$D=a_{i1}(-1)^{i+1}M_{i1}+\dots+a_{ik}(-1)^{i+k}M_{ik}+\dots+a_{in}(-1)^{i+n}M_{in}. \quad (2.23)$$

Как правило, теорема о разложении определителя по строке (столбцу) применяется в форме (2.23). Из (2.23) следует, что вычисление определителя n-го порядка может быть сведено к вычислению нескольких определителей $(n-1)$-го порядка. Заметим, что если некоторые из элементов i-й строки равны нулю, то соответствующие им миноры, понятно, вычислять не нужно. Поэтому полезно так предварительно преобразовать определитель, используя следствие 1 свойства 5°, чтобы в одной из строк (или в одном из столбцов) достаточно много элементов оказались замененными нулями. В действительности *свойство 5° позволяет в любой строке (в любом столбце) заменить нулями все элементы, кроме одного.* В самом деле, если $a_{ik}\neq 0$, то любой элемент i-й строки $a_{ij},\ j\neq k$, будет заменен нулем после вычитания k-го столбца, умноженного на $\dfrac{a_{ij}}{a_{ik}}$, из j-го столбца. Иными словами, вычисление определителя n-го порядка можно свести к вычислению одного определителя $(n-1)$-го порядка.

Пример 11. Вычислите определитель пятого порядка

$$D=\begin{vmatrix}-2 & 5 & 0 & -1 & 3\\ 1 & 0 & 3 & 7 & -2\\ 3 & -1 & 0 & 5 & -5\\ 2 & 6 & -4 & 1 & 2\\ 0 & -3 & -1 & 2 & 3\end{vmatrix}.$$

▲ Прибавляя ко второй строке утроенную пятую и вычитая из четвертой строки учетверенную пятую, получим:

$$D=\begin{vmatrix}-2 & 5 & 0 & -1 & 3\\ 1 & -9 & 0 & 13 & 7\\ 3 & -1 & 0 & 5 & -5\\ 2 & 18 & 0 & -7 & -10\\ 0 & -3 & -1 & 2 & 3\end{vmatrix}.$$

Разложим этот определитель по третьему столбцу, содержащему лишь один не равный нулю элемент (с суммой индексов $i+k=5+3=8$, т.е. четной), получим:

$$D=(-1)\cdot\begin{vmatrix}-2 & 5 & -1 & 3\\ 1 & -9 & 13 & 7\\ 3 & -1 & 5 & -5\\ 2 & 18 & -7 & -10\end{vmatrix}.$$

Преобразуем полученный определитель, прибавляя к первой строке удвоенную вторую и вычитая из третьей строки утроенную вторую, а из четвертой — удвоенную вторую:

$$D=-\begin{vmatrix}0 & -13 & 25 & 17\\ 1 & -9 & 13 & 7\\ 0 & 26 & -34 & -26\\ 0 & 36 & -33 & -24\end{vmatrix},$$

а затем разложим его по первому столбцу, заметив, что единственному не равному нулю элементу этого столбца соответствует нечетная сумма индексов $2+1=3$. Получим, что

$$D=\begin{vmatrix}-13 & 25 & 17\\ 26 & -34 & -26\\ 36 & -33 & -24\end{vmatrix}.$$

Полученный определитель можно непосредственно вычислять по правилам (2.6)—(2.7), однако для упрощения вычислений разумно предварительно заменить его элементы на меньшие числа, пользуясь свойствами 5° и 2°:

$$D=\begin{vmatrix}-13 & 25 & 17\\ 26 & -34 & -26\\ 36 & -33 & -24\end{vmatrix}\overset{5^\circ}{=}\begin{vmatrix}-13 & 25 & 4\\ 26 & -34 & 0\\ 36 & -33 & 12\end{vmatrix}\overset{5^\circ}{=}\begin{vmatrix}-13 & 25 & 4\\ 26 & -34 & 0\\ 10 & 1 & 12\end{vmatrix}\overset{2^\circ}{=}2\cdot 4\cdot\begin{vmatrix}-13 & 25 & 1\\ 13 & -17 & 0\\ 10 & 1 & 3\end{vmatrix}\overset{5^\circ}{=}$$

$$\overset{5^\circ}{=}8\cdot\begin{vmatrix}0 & 8 & 1\\ 13 & -17 & 0\\ 10 & 1 & 3\end{vmatrix}\overset{5^\circ}{=}8\cdot\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ 13 & -17 & 0\\ 10 & -23 & 3\end{vmatrix}\overset{5^\circ}{=}8\cdot\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ 13 & -4 & 0\\ 10 & -13 & 0\end{vmatrix}\overset{(2.6)}{=}$$

$$\overset{(2.6)}{=}8\cdot(-10\cdot(-4)\cdot 1+13\cdot(-13)\cdot 1)=-8\cdot 129=-1032.$$ ▼

Пример 12. Вычислите определитель

$$D=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & \ldots & n\\ n & 1 & 2 & \ldots & n-1\\ n-1 & n & 1 & \ldots & n-2\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 2 & 3 & 4 & \ldots & 1\end{vmatrix}$$

(в строках циклически передвигаются числа 1, 2, 3, ..., n).

▲ Прибавим к последней строке все предшествующие, получим, вынося общий множитель $1+2+3+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ за знак определителя:

$$D=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & \ldots & n\\ n & 1 & 2 & \ldots & n-1\\ n-1 & n & 1 & \ldots & n-2\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 3 & 4 & 5 & \ldots & 2\\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1\end{vmatrix}.$$

Теперь получим нули в последней строке, вычитая из каждого столбца предыдущий (из последнего предпоследний, затем из предпоследнего предшествующий и т.д.), после чего воспользуемся теоремой о разложении определителя по последней строке:

$$D=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1\\ n & 1-n & 1 & \dots & 1 & 1\\ n-1 & 1 & 1-n & \dots & 1 & 1\\ . & . & . & . & . & .\\ 3 & 1 & 1 & \dots & 1-n & 1\\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}(-1)^{n+1}\begin{vmatrix}1 & 1 & \dots & 1 & 1\\ 1-n & 1 & \dots & 1 & 1\\ 1 & 1-n & \dots & 1 & 1\\ . & . & . & . & .\\ 1 & 1 & \dots & 1-n & 1\end{vmatrix}.$$

Вычтем в получившемся определителе порядка $n-1$ первую строку из всех остальных:

$$D=\frac{n(n+1)}{2}(-1)^{n+1}\begin{vmatrix}1 & 1 & \dots & 1 & 1\\ -n & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & -n & \dots & 0 & 0\\ . & . & . & . & .\\ 0 & 0 & \dots & -n & 0\end{vmatrix}.$$

Теперь разложение по последнему столбцу дает

$$D=\frac{n(n+1)}{2}(-1)^{n+1}(-1)^{n}\cdot\begin{vmatrix}-n & 0 & \dots & 0\\ 0 & -n & \dots & 0\\ . & . & . & .\\ 0 & 0 & \dots & -n\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}\cdot(-1)^{n+1+n+n-2}\cdot n^{n-2}=(-1)^{n-1}\cdot\frac{n^{n-1}(n+1)}{2}. \blacktriangledown$$

Пример 13. Вычислите *определитель Вандермонда порядка* n

$$W_n(a_1,a_2,\dots,a_n)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \dots & 1\\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n\\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2\\ . & . & . & . & .\\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots & a_n^{n-1}\end{vmatrix}. \qquad (2.24)$$

▲ Докажем, что *при любом* $n \geq 2$ *определитель Вандермонда равен произведению всевозможных разностей* $a_i - a_j$, *где* $1 \leq j < i \leq n$, *т.е.*

$$W_n(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j). \tag{2.25}$$

Воспользуемся методом математической индукции. При $n = 2$ имеем

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1,$$

т.е. утверждение верно. Пусть наше утверждение уже доказано для определителей Вандермонда ($n-1$)-го порядка. Преобразуем определитель $W_n(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ следующим образом: сначала из n-й строки вычитаем ($n-1$)-ю, умноженную на a_1, затем из ($n-1$)-й вычитаем ($n-2$)-ю, также умноженную на a_1, и так далее, и, наконец, из второй строки вычитаем первую, умноженную на a_1. В результате получим:

$$W_n(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & \ldots & a_n - a_1 \\ 0 & a_2^2 - a_1 a_2 & a_3^2 - a_1 a_3 & \ldots & a_n^2 - a_1 a_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & a_2^{n-1} - a_1 a_2^{n-2} & a_3^{n-1} - a_1 a_3^{n-2} & \ldots & a_n^{n-1} - a_1 a_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

Разложим этот определитель по первому столбцу и в получившемся определителе ($n-1$)-го порядка вынесем из всех столбцов общие множители за знак определителя:

$$W_n(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \ldots (a_n - a_1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ a_2^2 & a_3^2 & \ldots & a_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \ldots & a_n^{n-2} \end{vmatrix}. \tag{2.26}$$

Последний множитель в (2.26) является определителем Вандермонда $W_{n-1}(a_2, a_3, \ldots, a_n)$ порядка $n-1$ и по предположению индукции равен произведению всех разностей $a_i - a_j$ для $2 \leq j < i \leq n$. Следовательно,

$$W_n(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \ldots (a_n - a_1) \cdot \prod_{2 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j) = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j).$$

Равенство (2.25) доказано. ▼

Аналогично можно доказать, что

$$\widetilde{W}_n(a_1,a_2,\dots,a_n)=\begin{vmatrix} a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \\ . & . & . & . & . \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} = \prod_{1\le i<j\le n}(a_i-a_j). \tag{2.27}$$

Впрочем, этот результат можно получить и по-другому: достаточно заметить, что $\widetilde{W}_n$ получается из W_n перестановкой строк, и учесть, что при перестановке двух строк определитель меняет знак. В самом деле, $\widetilde{W}_n$ можно получить из W_n, если последовательно поменять местами последнюю строку W_n со всеми предыдущими, затем предпоследнюю со всеми предыдущими и т.д., т.е. сделав $(n-1)+(n-2)+\dots+1=\dfrac{n(n-1)}{2}$ перемен знака. Но число сомножителей в (2.25) также равно $\dfrac{n(n-1)}{2}$. Заменив каждый из сомножителей a_i-a_j на a_j-a_i, получим произведение (2.27). Заметим еще, что поскольку определитель не меняется при транспонировании, справедливо равенство

$$W_n(a_1,a_2,\dots,a_n)=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ 1 & a_3 & a_3^2 & \dots & a_3^{n-1} \\ . & . & . & . & . \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}. \tag{2.28}$$

§5. Миноры и их алгебраические дополнения. Теорема Лапласа. Определитель произведения двух квадратных матриц. Теорема Бине-Коши

Напомним, что если в некоторой матрице выбраны несколько строк и несколько столбцов, то элементы, находящиеся на пересечениях выбранных строк и столбцов, составляют матрицу, называемую подматрицей (субматри-