Academia Preuniversitaria "Bryce"... ¡Alto Nivel!

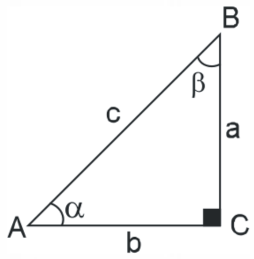
TEORÍA

TRIGONOMETRÍA

Bryce

TEMA:
RAZONES TRIGONOMETRICAS

1. Definiciones de las Razones Trigonométricas de Ángulos Agudos



Se denomina Razón Trigonométrica (R.T.) al cociente que se establece entre las longitudes de dos lados de un triángulo rectángulo. Estas son:

Seno, Coseno, Tangente, Cotangente, Secante y Cosecante.

Seno de α $\rightarrow$ $\text{Sen}\alpha = \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}} = \dfrac{C.O.}{H.} = \dfrac{a}{c}$

Coseno de α $\rightarrow$ $\text{Cos}\alpha = \dfrac{\text{cateto adyacente}}{\text{Hipotenusa}} = \dfrac{C.A.}{H.} = \dfrac{b}{c}$

Tangente de α $\rightarrow$ $\text{Tan}\alpha = \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \dfrac{C.O.}{C.A.} = \dfrac{a}{b}$

Cotangente de α $\rightarrow$ $\text{Cot}\alpha = \dfrac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}} = \dfrac{C.A.}{C.O.} = \dfrac{b}{a}$

Secante de α $\rightarrow$ $\text{Sec}\alpha = \dfrac{\text{Hipotenusa}}{\text{cateto Adyacente}} = \dfrac{H.}{C.A.} = \dfrac{c}{b}$

Cosecante de α $\rightarrow$ $\text{Csc}\alpha = \dfrac{\text{Hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \dfrac{H.}{C.O.} = \dfrac{c}{a}$

2. Razones Trigonométricas Reciprocas

$\boxed{\text{sen}\alpha.\text{csc}\alpha = 1}$ $\boxed{\text{cos}\alpha.\text{sec}\alpha = 1}$ $\boxed{\text{tan}\alpha.\text{cot}\alpha = 1}$

3. Teorema del Complemento:

Si $\alpha + \beta = 90^o$ entonces se cumple:

$\boxed{R.T.(\alpha) = CO - RT(\beta)}$

Como $\beta = 90^o - \alpha$

También se tendrá en forma equivalente:

$\boxed{R.T(\alpha) = CO - RT(90 - \alpha)}$

R.T.		CO-RT
$\text{sen}\alpha = \cos\beta$	$\leftrightarrow$	$\text{sen}\alpha = \cos(90^o - \alpha)$
$\cos\alpha = \text{sen}\beta$	$\leftrightarrow$	$\cos\alpha = \text{sen}(90^o - \alpha)$
$\tan\alpha = \cot\beta$	$\leftrightarrow$	$\tan\alpha = \cot(90^o - \alpha)$
$\cot\alpha = \tan\beta$	$\leftrightarrow$	$\cot\alpha = \tan(90^o - \alpha)$
$\sec\alpha = \csc\beta$	$\leftrightarrow$	$\sec\alpha = \csc(90^o - \alpha)$
$\csc\alpha = \sec\beta$	$\leftrightarrow$	$\csc\alpha = \sec(90^o - \alpha)$

Datos Extras

Las siguientes fórmulas

*Sabias que?

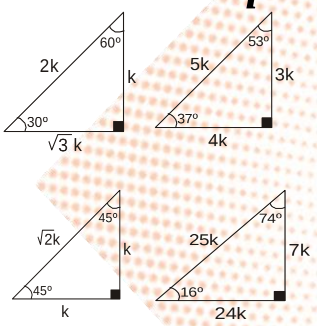
Las siguientes fórmulas auxiliares van a servir de apoyo en ciertos problemas.

$\text{vers}\theta = 1 - \cos\theta$

$\text{cov}\,\theta = 1 - \text{sen}\theta$

$\text{Ex}\sec\theta = \sec\theta - 1$

*Recuerda que?



*Ten en cuenta

Para resolver ejercicios apoyarse en el Teorema de Pitágoras:

$a^2 + b^2 = c^2$

Donde: a y b son los catetos y c la hipotenusa

PROBLEMAS PROPUESTOS

01. Hallar "x" en cada caso:

a) $\operatorname{sen}3x = \cos 2x$

b) $\operatorname{sen}(30° + x) = \cos 2x$

c) $\operatorname{tg}(45° + x) = \operatorname{ctg}x$

02. Hallar el ángulo agudo "x" si:

a) $\operatorname{sen}20°.\csc x = 1$

c) $\cos(3x + 20°).\sec 50° = 1$

d) $\operatorname{sen}(2x - 10°).\csc(x + 30°) = 1$

03. Resolver los siguientes sistemas:

a) $\cos x = \operatorname{sen}y \quad \wedge \quad x - y = 10°$

b) $\operatorname{ctg}2x = \operatorname{tg}3y \quad \wedge \quad 2x - y = 10°$

c) $\operatorname{tg}(5x - 25°) = \operatorname{ctg}(90° - y) \quad \wedge \quad 2y - 5x = 5°$

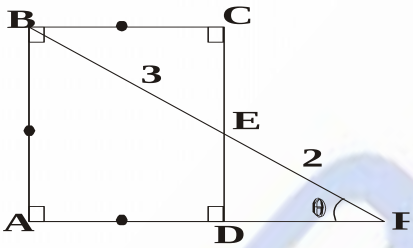
04. En cada una de las expresiones siguientes, hallar "x":

a) $2x\operatorname{tg}45° + \operatorname{tg}60°.\sqrt{3} = 2x.\operatorname{sen}30° + \cos^2 60°$

b) $3x\operatorname{tg}^2 60° - 2\sec^2 45° = 6\cos 60° + 3\operatorname{tg}^2 30°$

c) $2x\operatorname{sen}30° - \sec 45°.\csc 45° = 3\cos 60° + 5\operatorname{tg}45°$

05. Del grafico calcular: "tanθ"



a) 2/5
b) 5/3
c) 3/2
d) 3/5
e) 3/7

06. En un triángulo rectángulo ABC (recto en B) se sabe que b – a = 40 y Csc A.Tag A = 1,45. Calcular la suma de los catetos.
a) 200
b) 225
c) 205
d) 41
e) 81

07. En un triángulo ABC (recto en A) se cumple que:

2.Sen B = $\sqrt{3}$.Sen C;

Calcular el valor de:
E = 7.SenB.SenC + 2.TagB.

a) $\sqrt{3}$

b) $2\sqrt{3}$

c) $3\sqrt{3}$

d) $4\sqrt{3}$

e) $5\sqrt{3}$

08. En un triángulo rectángulo ABC, recto en B se verifica que Sen A = 7/25 y su área es $21m^2$. El perímetro del triángulo, es:
a) 56m
b) 50m
c) 42m
d) 32m
e) 28m

09. Hallar "x" en:
(8.Ctg 53º + 14Sen30º)(x + 3) = 66 – Ctg 45º
a) -2
b) 1
c) -1
d) 2
e) 0

10. Calcular "x" si se cumple:

$$\sqrt{3}\operatorname{Sen}\theta.\operatorname{Tag}(x + 20º) = \frac{2.\operatorname{Cos}30º}{\operatorname{Ctg}45º\operatorname{Csc}\theta}$$

a) 10º
b) 15º
c) 20º
d) 25º
e) 30º

11. Hallar la diferencia de los posibles valores de "x" en la ecuación:
$x^2\csc^2 30º.\operatorname{Tag} 37º - x\csc 53º.\operatorname{Sec}^2 45º - \operatorname{Sec}^2 60º = 0$

a) 8/3
b) 28/3
c) -4/ 3
d) 3/8
e) 8

12. En un triángulo rectángulo la mediana relativa a la hipotenusa mide 13m y la tangente de su mayor ángulo agudo es 2,4. Calcular el perímetro del triángulo.
a) 30m
b) 60m
c) 80m
d) 50m
e) 70m.

13. Si $Tag\phi = Tag40º.Tag50º$ donde ϕ es un ángulo agudo, calcular:

$$E = \operatorname{Tag}\left(\frac{\phi}{3}\right).\operatorname{Tag}\left(\frac{5\phi}{3}\right)$$

a) 1
b) 2
c) 3
d) 1/3
e) $\sqrt{3}$

14. En un triangulo ABC (C=90º) se verifica que: tanB = cosA (4 - cscA).
Calcular: R=tanA + cscB

a) $\sqrt{2}$

b) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

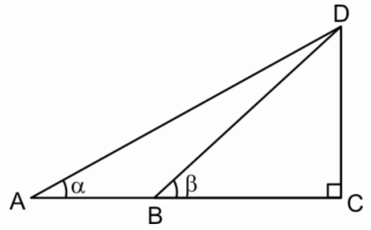
c) $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

d) $\sqrt{3}$

e) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

15. En la figura, CD = 3A

Hallar: $R = 3\text{Tag}\alpha\left(\dfrac{1}{\text{Tag}\beta} + \dfrac{1}{3}\right)$



a) 2
b) 1
c) 3
d) -3
e) -1

16. Si: cos(2x - θ) .csc(x + 3θ) = 1

Hallar: $E = \dfrac{\text{sen}3x - \cos 2\theta}{\text{tg}(x+\theta)}$

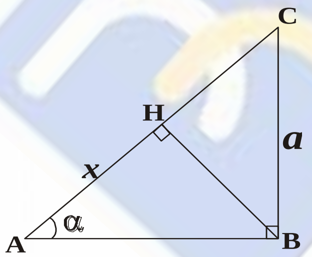
a) 0
b) 1
c) 2
d) 1/2
e) ¾

17. Si sen(40º - x) = tan(20º + α). Cos(50º + x)
Obtener:

$$R = \frac{\sec(2x - 5^o).\tan(x + \alpha + 50^o)}{\cot(\alpha - x - 10^o)}$$

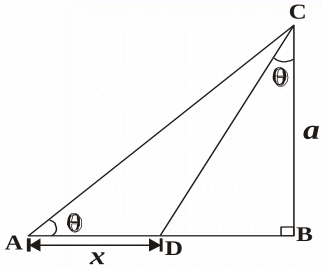
a) $\sqrt{2}/2$
b) $\sqrt{2}$
c) 1
d) 2
e) $\sqrt{3}$

18. Del grafico, hallar "x" en términos de "a" y "α"



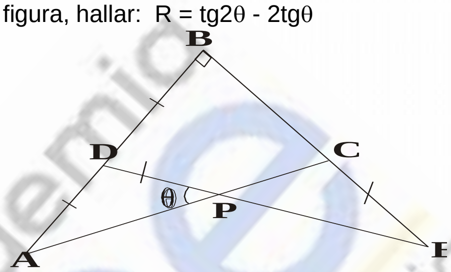
a) asenα.tgα
b) asenα.secα
c) acosα.cscα
d) acosα.cotα
e) asecα.cscα

19. Calcular "x" en términos de "a" y "θ"



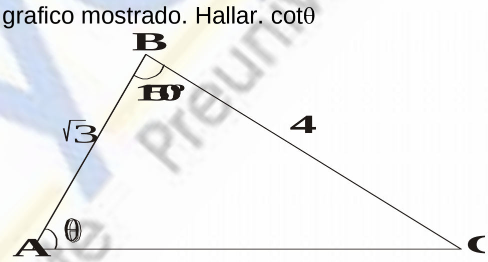
a) a(tgθ - ctgθ)
b) a(cscθ - ctgθ)
c) a(secθ - tgθ)
d) a(cscθ - secθ)
e) a(ctgθ - tgθ)

20. De la figura, hallar: R = tg2θ - 2tgθ



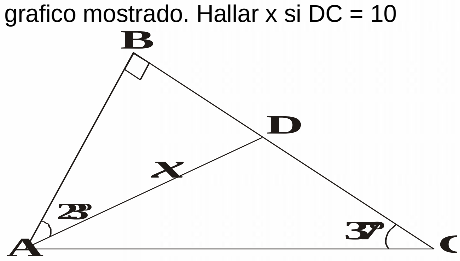
a) ½
b) 1
c) 2
d) 3/2
e) ¾

21. Del grafico mostrado. Hallar. cotθ



a) $3\sqrt{3}$
b) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$
c) $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$
d) $\sqrt{3}$
e) $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

22. En el grafico mostrado. Hallar x si DC = 10



a) 10
b) 11
c) 9
d) 12
e) 7

TEMA:
ÁNGULOS VERTICALES

Datos Extras

*Ten en cuenta

Debes tener en cuenta los triángulos rectángulos notables en la solución de este tipo de problemas

*Observación

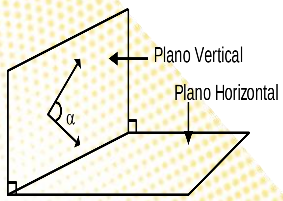
Tener en cuenta que el ángulo de observación está comprendido entre 0º y 180º.

*Recuerda

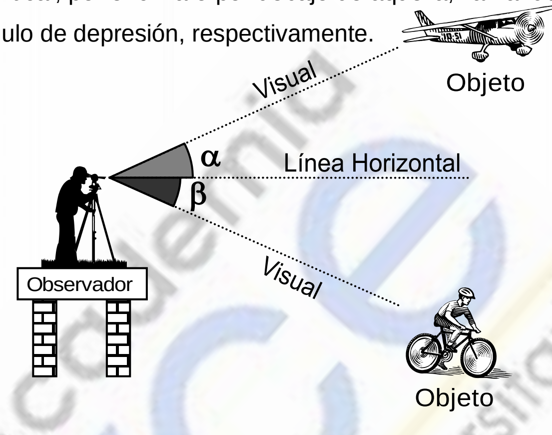
De no indicarse la altura del observador y no siendo esta altura la incógnita del problema, entonces se deberá considerar que está observando desde un punto del suelo.

*Gráfico

Representación de los planos



Ángulos verticales: Se denomina así a aquellos ángulos agudos, uno de cuyos lados se ubica sobre la línea horizontal mientras que el otro se localiza en el mismo plano vertical, por encima o por debajo de aquella, llamándose: ángulo de elevación y ángulo de depresión, respectivamente.



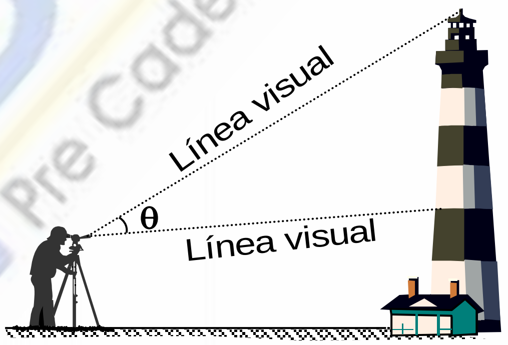
Donde:

α : Ángulo de elevación ($\alpha < 90^\circ$)

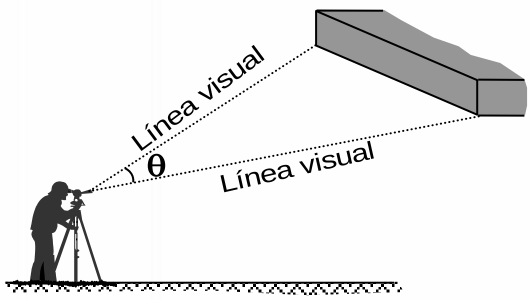
β : Ángulo de depresión ($\beta < 90^\circ$)

Ángulo de Observación o de Visibilidad:

Es el ángulo formado por dos líneas visuales que definen un campo de observación respecto de un observador. Este ángulo puede ubicarse en cualquier plano: en un plano vertical (P.V), en un plano horizontal (P.H.) y en cualquier orientación.



θ : Ángulo de observación en el P.V.



θ : Ángulo de observación en el P.H

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Una persona observa la parte mas alta de un edificio con un ángulo de elevación de 45º, acercándose 48m el nuevo ángulo de elevación es 53º. Hallar la altura del edificio.
a) 12m
b) 13m
c) 14m
d) 15m
e) 16m

2. Un niño de 1,30m de estatura esta situado a 5,40m de la base de un poste y observa la parte mas alta de dicho poste con un ángulo de elevación de 53º. Hallar la altura del poste.
a) 8,5m
b) 7,5m
c) 7m
d) 6,5m
e) 5,5m

3. Una persona situada en la parte superior de una torre de $15\sqrt{3}$ m de altura observa a dos personas con ángulos de depresión de 30º y 60º respectivamente. Hallar la distancia que separa a las personas.
a) 20m
b) 25m
c) 30m
d) 35m
e) 40m

4. Dos personas están colocadas a ambos lados de un poste, de tal forma que una de ellas observa la parte mas alta con un ángulo de elevación de 45º y la otra observa el punto medio del poste con un ángulo de elevación de 37º. Hallar la altura del poste si las personas están separadas una distancia de 25m.
a) 11
b) 18
c) 15
d) 17
e) 49

5. Una persona observa la parte más alta de un edificio con un ángulo de elevación de 53º y el techo del noveno piso con un ángulo de elevación de 37º. Hallar el número de pisos que tiene el edificio.
a) 13m
b) 15m
c) 16m
d) 18m
e) 17m

6. Desde la parte superior de un edificio se observan a una persona que se acerca hacia ésta con un ángulo de depresión "θ" y cuando la persona ha recorrido una distancia igual a la altura del edificio es observado con un ángulo de depresión que es el complemento de "θ" . Calcular "tanθ"
a) $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$
b) $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$
c) $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$
d) $\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$
e) $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

7. A 20m de la base de una torre, un hombre la observa con un ángulo de elevación "α", se aleja en línea recta otros 20m y ahora la ve con un ángulo "β". Si Tanα + tanβ = 0,75 y el hombre mide 1,7m. Hallar la altura de la torre.
a) 10,7m
b) 12,7m
c) 11m
d) d) 12m
e) 11,7m

8. Desde el suelo se observa un monumento sobre un pedestal bajo un ángulo de 8º. Si la parte mas alta se observa con un ángulo de elevación de 45º. (Del pedestal). Hallar la altura del monumento si el pedestal mide 18m.
a) 5
b) 6
c) 7
d) 8
e) 9

9. Desde un punto en tierra ubicado a 36m de una torre se observa su parte mas alta con un ángulo de elevación "α" (tgα = 1/3). ¿Qué distancia habría que alejarse para que el ángulo de elevación tenga como tangente 1/5?
a) 12
b) 18
c) 20
d) 24
e) 36

10. Desde lo alto de un edificio de 20 pisos; cada uno de altura 2,5m se divisa un objeto en el suelo con un ángulo de depresión "α", (tanα = 1,25). ¿A que distancia del edificio se halla el objeto?
a) 10m
b) 20m
c) 40m
d) 80m
e) N.A.

11. Desde lo alto de un edificio se ve un punto en tierra con un ángulo de depresión "α" y a otro punto ubicado a la mitad entre el primer punto y el edificio, con un ángulo de depresión "90 - α". Calcular "cot α"

a) $\sqrt{2}$
b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
c) $2\sqrt{2}$
d) $\frac{\sqrt{2}}{4}$
e) 1

12. Un niño observa los ojos de su padre con un ángulo de elevación "θ", y los pies del mismo con un ángulo de depresión igual al complemento de "θ". Calcular el mínimo valor de la tangente del ángulo de depresión con que vé el padre los pies de su hijo.

a) 3
b) $\sqrt{3}$
c) $\sqrt{2}$
d) 2
e) $2\sqrt{2}$

13. Celedonio observa la parte superior de una torre con un ángulo de elevación α, se dirige hacia él y encontrándose a la mitad del camino observa nuevamente la parte superior y un punto ubicado a mitad del edificio con ángulos β y θ respectivamente. Calcular β si α y θ son complementarios.
a) 75º
b) 53º
c) 60º
d) 63º30'
e) 67º30'

14. Descendiendo por una colina, se divisa un objeto, fuera de ella, con un ángulo de depresión "α". A la mitad del descenso el ángulo de depresión para el objeto es "β". Si la inclinación de la colina respecto a la horizontal es "θ". Calcular:

$$R = \frac{\cot\alpha - \cot\beta}{\cot\alpha - \cot\theta}$$

a) 1
b) -1
c) -2
d) 2
e) 3

15. Cinthia observa la parte mas alta de su casa con un ángulo de elevación θ, al avanzar X metros hacia su casa observa un punto de la línea visual anterior con un ángulo de elevación igual a (90º - θ) pero se da con la sorpresa que el área del triángulo rectángulo mayor formado por la casa, el camino hacia su casa y la visual es 4 veces el área del triangulo rectángulo de hipotenusa x. ¿Cuántos metros avanzó Cinthia? Si la distancia de ella a la parte más alta de su casa es 36m
a) 9m
b) 12m
c) 15m
c) 18m
e) 21m

16. Una persona ubicada en el camino que forma un ángulo "θ" con la horizontal observa, la parte mas alta de una torre de longitud 20m que esta sobre el camino con un ángulo "2θ", si nos acercamos a la torre una distancia de 40m el nuevo ángulo de elevación es "3θ". Hallar "$\text{sen}\theta$"
a) $\frac{1}{2}$
b) $\frac{1}{4}$
c) $\frac{1}{8}$
d) $\frac{1}{16}$
e) $\frac{2}{3}$

17. Una niña de estatura "h" observa lo alto de un poste, notando que su visual tiene una pendiente del 20%. Si la altura del poste es "H", calcular "h/H", para que al alejarse la niña una distancia igual a la altura del poste su visual hacia lo alto del mismo tenga una pendiente del 8%.
a) 13/14
b) 13/15
c) 7/9
d) 12/13
e) N.A.

18. En una habitación en la cual hay un foco luminoso, la sombra proyectada por una persona es de 2,4m. Si la línea que une el foco con la cabeza de dicha persona mide 1m y forma un ángulo de inclinación de 37º con respecto a la horizontal . Hallar la altura a que se encuentra el foco del suelo.
a) 1,8m
b) 2,4m
c) 3,2m
d) 3m
e) 2m

19. Una avenida recta que conduce a una torre esta inclinada un ángulo de 30º respecto a la horizontal. Desde un punto situado a $20\sqrt{3}$ m de la base de la torre se observa la parte superior de esta con un ángulo de elevación de 60º.
Halle la altura de la torre.
a) $10\sqrt{3}$
b) $30\sqrt{3}$
c) $20\sqrt{3}$
d) 40
e) 50

SEMANA 3

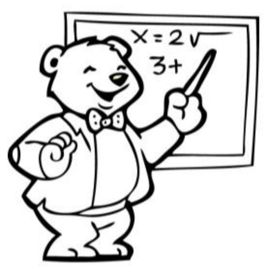
TEMA:
ÁNGULOS EN POSICIÓN NORMAL

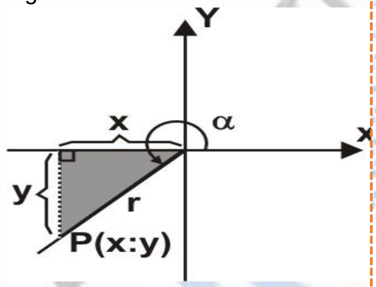
ÁNGULO EN POSICIÓN NORMAL.
Es aquel cuyos elementos están plenamente determinados en un plano cartesiano, de modo qué:

- Su vértice es el origen del sistema de coordenadas
- Su lado inicial es el semi-eje positivo de las abscisas
- Su lado terminal nos indicará el cuadrante al cual pertenece el ángulo.

Definiciones de las R.T. de ángulos en posición normal

Sea α un ángulo en posición normal tal que su lado final pasa por el punto P(x;y).
Se definen las razones trigonométricas de α, de la siguiente manera:





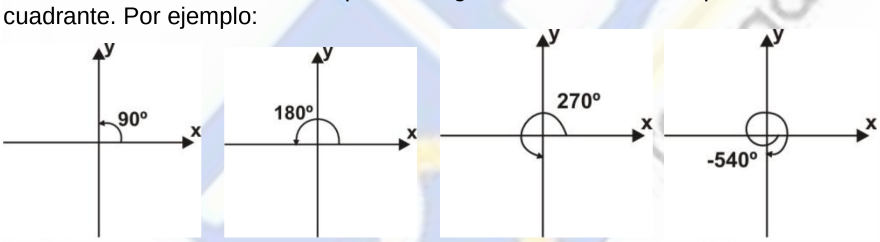
$\boxed{r=\sqrt{x^2+y^2}}$; $r>0$

$$\operatorname{sen}\alpha=\frac{\text{ordenada}}{\text{radio vector}}=\frac{y}{r} \qquad \cot\alpha=\frac{\text{abscisa}}{\text{ordenada}}=\frac{x}{y}$$

$$\cos\alpha=\frac{\text{abscisa}}{\text{radio vector}}=\frac{x}{r} \qquad \sec\alpha=\frac{\text{radio vector}}{\text{abscisa}}=\frac{r}{x}$$

$$\tan\alpha=\frac{\text{ordenada}}{\text{abscisa}}=\frac{y}{x} \qquad \text{cas}\alpha=\frac{\text{radio vector}}{\text{ordenada}}=\frac{r}{y}$$

ANGULO CUADRANTAL
Es aquel ángulo en posición normal cuyo final se encuentra sobre un semieje. Por convención se ha establecido que los ángulos cuadrantales no pertenecen a ningún cuadrante. Por ejemplo:



VALORES DE LAS R.T. DE LOS ÁNGULOS CUADRANTES

A partir de las definiciones anteriores se pueden deducir los valores del siguiente cuadro:

	ÁNGULO CUADRANTAL			
R.T.	**0º - 360º**	**90º**	**180º**	**270º**
Sen	**0**	**1**	**0**	**-1**
Cos	**1**	**0**	**-1**	**0**
Tan	**0**	**ND**	**0**	**ND**
Cot	**ND**	**0**	**ND**	**0**
Sec	**1**	**ND**	**-1**	**ND**
csc	**ND**	**1**	**ND**	**-1**

Datos Extras

*

Sabias que?

Si: α y β son dos ángulos coterminales, entonces se cumplrencia de dos ángulos coterminales es un número entero de vueltas de 360º.

ii) R.T.$(\alpha)=$R.T.(β) Si dos ángulos son coterminales sus razones trigonométricas serán iguales.

*Recuerda que?

-El radio vector siempre será positivo, en cualquiera de los cuadrantes que este se encuentre

*Ten en cuenta

Para ángulos menores de una vuelta.

0º IC $<$ 90º

90º $<$ IIC $<$ 180º

180º $<$ IIIC 270º

270º $<$ IVC $<$ 360º

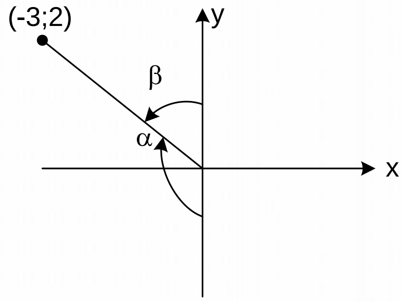
PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Si: $\cos^2\theta = \dfrac{1}{16}$, $\theta \in IVC$

   Calcule: $M = \dfrac{\sec\theta - \csc\theta}{1 - \text{ctg}\,\theta}$

   A) $\dfrac{\sqrt{15}}{4}$ B) $\dfrac{1}{4}$ C) $\dfrac{-\sqrt{15}}{4}$ D) $-\dfrac{1}{4}$ E) 4

2. De la figura mostrada, determine:
   $M = \tan\alpha + \tan\beta$



   A) $\dfrac{1}{3}$
   B) $\dfrac{2}{3}$
   C) 1
   D) 2
   E) 3

3. Se tiene un ángulo "θ" en posición normal que verifica las siguientes condiciones:

   i) $|\cos\theta| = -\cos\theta$ ii) $|\text{tg}\,\theta| = \text{tg}\,\theta$ iii) $|\text{sen}\,\theta| = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$

   determine el valor de:
   $M = \sqrt{5}.\csc\theta + 9\cos\theta$

   A) -11 B) -10 C) -9 D) -8 E) -6

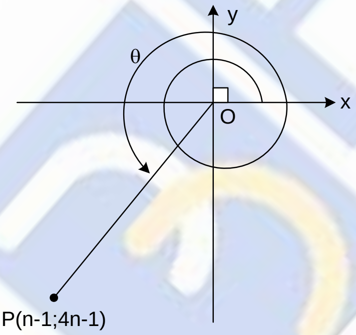
4. Si: $\text{ctg}\,\alpha = 2,4 \wedge \csc\alpha < 0$; sabiendo además que "$\alpha$" es un ángulo en posición normal halle:

   $P = 2\,\text{sen}\,\alpha + \dfrac{1}{4}\cos\alpha$

   A) -1 B) 1 C) 0 D) -2 E) 2

5. Halle "n" del gráfico, si $\text{ctg}\,\theta = 0,333...$

   A) 1
   B) 2
   C) -2
   D) $\dfrac{1}{2}$
   E) $-\dfrac{1}{2}$



6. Si el punto (2m;-3m) pertenece al lado final de un ángulo "ϕ" en posición normal. Calcule :
   $\omega = 13\left(\text{sen}^2\phi - \cos^2\phi\right); m > 0$

   A) -5 B) 5 C) $-\dfrac{1}{5}$ D) $\dfrac{1}{5}$ E) 0

7. Si: $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{5}{2}$ $\wedge$ $\text{sen}\,\alpha < 0$

   Halle: $E = \csc\alpha + \dfrac{29}{4}\cos\alpha - \sqrt{29}\,\text{ctg}\,\alpha$

   A) $-\dfrac{3\sqrt{29}}{10}$ B) $-\dfrac{7\sqrt{29}}{10}$

   C) $-\dfrac{\sqrt{29}}{10}$ D) $-\dfrac{11\sqrt{29}}{10}$ E) $-\dfrac{3\sqrt{29}}{10}$

8. Si "b" es un ángulo de 4to cuadrante y $\cos b = \dfrac{24}{25}$, halle:

   $V = 5\,\text{sen}\,b + 6\,\text{tg}\,b + 12\sec b$

   A) 12,85 B) 12,15 C) 10,35 D) 9,35 E) 8,35

9. Si $2^{\text{Ctg}\,\theta - 2} = \sqrt{2}^{\,\text{Ctg}\,\theta}$

   y $\theta \in III\ C$

   Halle: $G = \sqrt{17}\left[\text{sen}\,\theta - \cos\theta\right]$

   A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

10. Si: $\sqrt[6]{\sqrt[4]{\text{sen}^2\,\theta}} = \sqrt[4]{\text{sen}\,\theta}^{\,\cos\theta}$

    Además $\theta \in IV$ cuadrante.

    Halle: $A = \sec\theta + \dfrac{1}{\sqrt{8}}\,\text{tg}\,\theta$

    A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

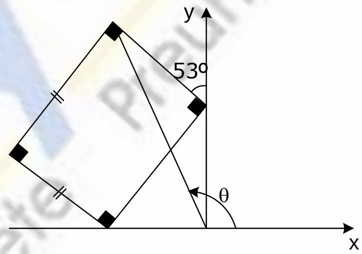
11. Si: $\sqrt{\text{sen}\,\theta} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$; $\text{tg}\,\theta < 0$

    Halle:

    $H = \csc\theta + \sqrt{3}\,\text{ctg}\,\theta$

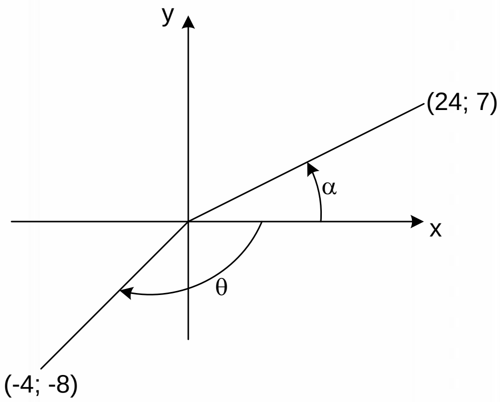
    A) 1 B) 5 C) 4 D) -1 E) 3

12. Del gráfico calcule "$\cot\theta$"



    A) $\dfrac{3}{7}$ B) $\dfrac{4}{7}$ C) $\dfrac{5}{7}$ D) $-\dfrac{3}{7}$ E) $-\dfrac{4}{7}$

13. Del gráfico calcule:
    $E = 25\,\text{sen}\,\alpha + \text{tg}\,\theta$



    A) 1 B) 3 C) 5 D) 7 E) 9

14. Siendo "α y θ" son las medidas de dos ángulos en posición normal, tal que: $\alpha - \theta = 360º$, $90º < \theta < 180º$

    Calcule: $E = \dfrac{\cos\alpha + \cos\theta}{\text{sen}\,\alpha + \text{sen}\,\theta}$

    Dado que: $\text{tg}\,\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

A) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ B) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ C) $\sqrt{2}$ D) $-\sqrt{2}$ E) -1

15. Si los puntos P (m, n + 1) y Q (n, m + 1) pertenecen al lado final de un ángulo "θ" en posición normal:
Además: n = 2m
Calcular:

$$V = \text{ctg}\,\theta + \csc^2\theta + \text{sen}\,\theta\cos\theta$$

A) $\frac{1}{2}$ B) -1   C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ E) -2

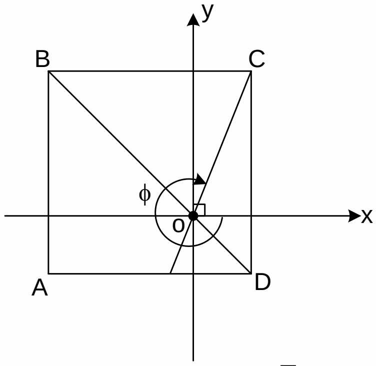
16. Siendo "θ" y "ϕ" dos ángulos positivos del IC y menores de una vuelta para los cuales se cumple que: $\text{Cos}(2\theta+\phi)=0$

Halle el valor de:

$$k = \frac{5\,\text{sen}(\theta+\phi)+3\cos\theta}{5\cos\theta-3\,\text{sen}(\theta+\phi)}$$

A) $\text{sen}\theta$ B) 2   C) $\cos\theta$ D) 4   E) 1

17. Si: ABCD es un cuadrado, del gráfico, calcule: $\text{ctg}\,\phi\left(\overline{AD}=\overline{OB}\right)$



A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B) 1   C) $\frac{1}{2}$ D) $\sqrt{2}+1$ E) $\sqrt{2}-1$

18. En la figura AOB es un cuarto de circunferencia.

Halle: "tg θ"

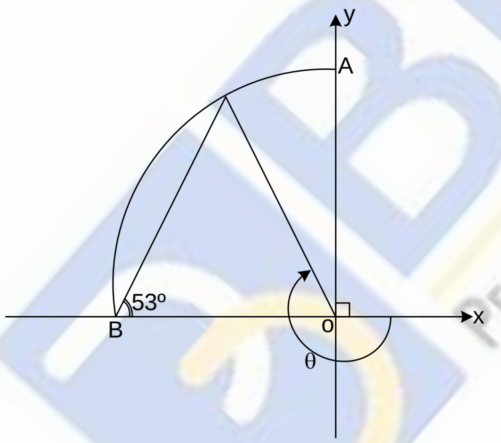
A) 1

B) $\frac{7}{24}$

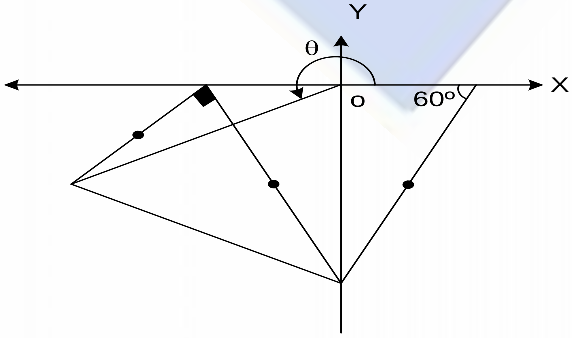
C) $-\frac{7}{24}$

D) $\frac{24}{7}$

E) $-\frac{24}{7}$



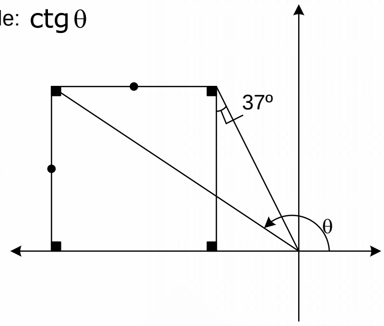
19. Halle: $\text{Ctg}\,\theta$



A) $1+\sqrt{3}$ B) $\sqrt{3}-1$ C) $\sqrt{2}+1$

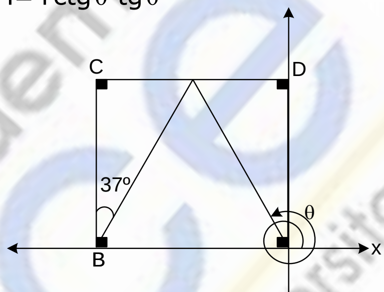
D) 1   E) $\frac{1}{3}$

20. Halle: $\text{ctg}\,\theta$



A) $\frac{5}{4}$ B) $-\frac{5}{4}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $-\frac{7}{4}$ E) $\frac{1}{4}$

21. Si: ABCD es un cuadrado.
Halle: $M=4\,\text{ctg}\,\theta-\text{tg}\,\theta$



A) 1   B) 2   C) 3   D) 4   E) 5

22. Determinar el menor de dos ángulos coterminales, si la suma de ellos es 1320º y el mayor está comprendido entre 900º y 1200º.
A) 100º   B) 140º   C) 240º   D) 300º   E) 420º

23. Dos ángulos coterminales que están en relación de 2 a 7 la diferencia de ellos es mayor que 1200º pero menor que 1500º.
Halle los ángulos.
A) 1400º y 576º   B) 2130º y 576º   C) 2016º y 576º
D) 1080º y 576º   E) 720º y 216º

24. Las medidas de dos ángulos coterminales son proporcionales a los número 5 y 2. Además la medida del mayor ellos está comprendida entre 1000º y 1700º; halle la suma de medidas de dichos ángulos.
A) 1880º   B) 1860º   C) 1680º   D) 1660º   E) 1200º

25. Dada la ecuación:

$$\sqrt{\cos\alpha+1}+\sqrt{-1-\cos\alpha}=1-\text{sen}\theta$$

Halle "$\alpha+\theta$"; si cada uno de ellos es un ángulo cuadrantal, positivo y menor a una vuelta.
A) 720º   B) 90º   C) 180º   D) 270º   E) 360º

26. Si $\text{sen}\,\theta=\underbrace{-\frac{1}{3}-\frac{1}{15}-\frac{1}{35}-\ldots}_{\text{"n términos"}}$ y $\cos\theta<0$

Calcular el valor de:

$$M=\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{3n+1}}(\tan\theta)+(\sec\theta)$$

A) -1   B) $\frac{1}{2}$ C) 1

D) $\sqrt{2}$ E) 2

TEMA:
REDUCCION AL PRIMER CUADRANTE

I. REDUCCIÓN AL PRIMER CUADRANTE: Reducir al primer cuadrante significa expresar la función trigonométrica de todo ángulo no agudo en términos de la función trigonométrica de un ángulo agudo.

II. ÁNGULO DE REFERENCIA: Al ángulo agudo formado por el lado final de un ángulo positivo en posición normal "α" con el lado positivo o negativo del eje x se le llama ángulo de referencia y lo denotamos por "αR"

Si: $\alpha \in IIC \rightarrow \alpha_R = 180° - \alpha$

Si: $\alpha \in IIIC \rightarrow \alpha_R = \alpha - 180°$

Si: $\alpha \in IVC \rightarrow \alpha_R = 360° - \alpha$

Para reducir al primer cuadrante se presentan tres casos:

CASO I: REDUCCIÓN PARA ÁNGULOS POSITIVOS MENORES QUE UNA VUELTA: Para este caso utilizaremos: $F.T(\alpha) = \pm F.T.(\alpha_R)$

El signo ($\pm$) dependerá de la F.T. que se trata y del cuadrante en el cual está ubicado el ángulo "α".

***CASO II:* REDUCCIÓN PARA ÁNGULOS POSITIVOS MAYORES QUE UNA VUELTA:**

En este caso se divide la variable angular "θ" por 360° hasta obtener por cociente un número entero "K" y como residuo un valor "α".

Si: $\theta > 360° \Rightarrow$

$$\begin{array}{r|l} \theta & 360° \\ \cline{2-2} \alpha & K \end{array}$$

$\therefore$ $\theta = 360° K + \alpha;\ K \in Z;$ $F.T.(\theta) = F.T.(\alpha)$

***CASO III:* REDUCCIÓN PARA ÁNGULOS NEGATIVOS MAYORES O MENORES QUE UNA VUELTA:** En este caso se pasa de ángulo negativo a ángulo positivo, empleando las funciones trigonométricas de ángulos negativos :

$Sen(-\alpha) = -Sen\alpha$

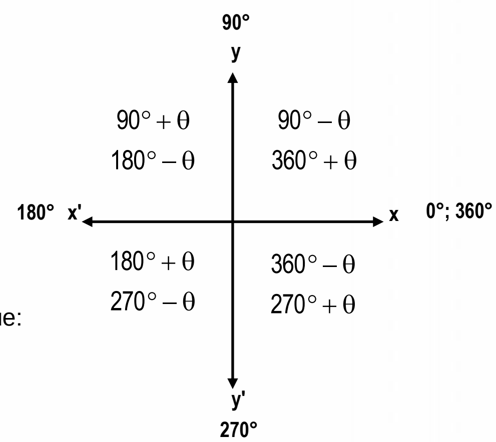
$Cos(-\alpha) = Cos\alpha$

$Tan(-\alpha) = -Tan\alpha$

$Cot(-\alpha) = -Cot\alpha$

$Sec(-\alpha) = Sec\alpha$

$Csc(-\alpha) = -Csc\alpha$

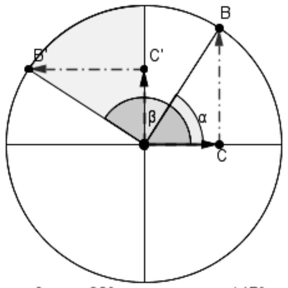


Si θ es un ángulo agudo se tiene que:

- $F.T.(180° \pm \theta) = \pm F.T.(\theta)$
- $F.T.(360° \pm \theta) = \pm F.T.(\theta)$
- $F.T.(90° \pm \theta) = \pm CoF.T.(\theta)$
- $F.T.(270° \pm \theta) = \pm CoF.T.(\theta)$

Datos Extras
***Ten en cuenta**

$\beta = 90° + \alpha$



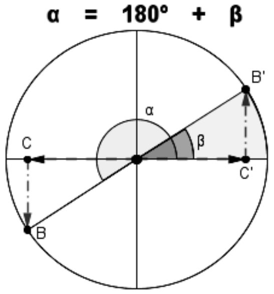
$\beta = 90° + \alpha = 147°$

$\overline{OB} = \overline{OB'} = r$

$\sin\beta = \cos\alpha$

$\cos\beta = -\sin\alpha$

$\alpha = 180° + \beta$



$\alpha = 180° + \beta$

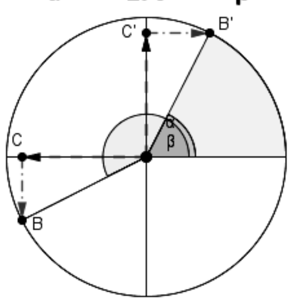
$\overline{OB} = \overline{OB'} = r$

$\sin\alpha = -\sin\beta$

$\cos\alpha = -\cos\beta$

$\tan\alpha = \tan\beta$

$\alpha = 270° - \beta$



$\alpha = 270° - \beta$

$\overline{OB} = \overline{OB'} = r$

$\sin\alpha = -\cos\beta$

$\cos\alpha = -\sin\beta$

$\tan\alpha = \dfrac{1}{\tan\beta}$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Calcular el valor de Sen 120º . Cos 330º

   a) $\sqrt{3}$ /4 b) $\sqrt{3}$ /2 c) ¼
   d) 3/4 e) 1

2. Calcular el valor de :
   E = Sen 150º - Cos 120º + Tg 135º
   a) -2 b) -1 c) 0
   d) 1 e) 2

3. Simplificar : $\dfrac{3\,Sen\,20^\circ - 2\,Cos\,110^\circ}{Cos\,70^\circ}$

   a) 1 b) 2 c) 3
   d) 4 e) 5

4. Calcule el valor aproximado:
   $$M = 5\ \mathrm{sen}127^\circ - \sec^2 240^\circ + 2\,\mathrm{tg}^3\,315^\circ$$
   a)-2 b) 2 c) 6
   d) -6 e) 0

5. Si: $\mathrm{ctg}\,20^\circ = a$
   Calcule:
   $$E = \frac{\csc 200^\circ\,\mathrm{sen}\,110^\circ}{\cos 290^\circ \csc 430^\circ}$$
   A) a B) -a C) a^2
   D) $-a^2$ E) 1

6. Calcule el valor de:
   $$P = \frac{\mathrm{sen}\ 150^\circ \cos(-225^\circ)}{\mathrm{tg}\,60^\circ \mathrm{ctg}(-30^\circ)}$$
   a) $\dfrac{\sqrt{12}}{12}$ b) $\dfrac{\sqrt{2}}{12}$ c) $\dfrac{-\sqrt{12}}{12}$
   d) $-\dfrac{\sqrt{2}}{12}$ e) 1

7. Simplificar:
   $$W = \frac{sen330^\circ \cos 135^\circ}{\tan 585^\circ . \cos 900^\circ} - \frac{\cot(-240)\cos 390^\circ}{\sec 300^\circ . sen630^\circ}$$
   a) $\dfrac{1-\sqrt{2}}{4}$ b) $\dfrac{\sqrt{2}-1}{4}$ c) $\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$
   d) $\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$ e) 1

8. Reducir:
   $$M = \frac{sen(-120^\circ) - \cos 210^\circ + \sec 300^\circ}{\tan(135^\circ) + \sec(-225^\circ) + \sec(-315^\circ)}$$
   a) -2 b) -1 c) 2
   d) -1/2 e) 1

9. Reducir:
   $$A = \csc^2 675^\circ - \mathrm{ctg}^2 855^\circ + \mathrm{tg}^2 960^\circ$$
   a) $\dfrac{1}{2}$ b) $\dfrac{3}{2}$ c) $-\dfrac{1}{2}$
   d) 2 e) 4

10. Calcule:
    $$M = \frac{\cos(-5520^\circ).\mathrm{ctg}\,100027^\circ}{\mathrm{tg}(-2400^\circ)}$$
    a) 1 b) $-\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$ c) $\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$
    d) $-\dfrac{\sqrt{3}}{8}$ e) $\dfrac{\sqrt{3}}{8}$

11. Simplifique:
    $$R = \frac{\mathrm{tg}(\pi + x).\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right).\sec(2\pi - x)}{\mathrm{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right).\mathrm{sen}(2\pi - x).\csc\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}$$
    a) -1 b) -2 c) -3
    d)+1 e) 2

12. Calcule el valor de:
    $$R = \frac{\mathrm{sen}\frac{5\pi}{4}.\mathrm{tg}\frac{2\pi}{3}.\csc\frac{7\pi}{6}}{\cos\frac{5\pi}{3}.\mathrm{ctg}\frac{5\pi}{4}.\sec\frac{11\pi}{6}}$$
    a) $-3\sqrt{2}$ b) $\sqrt{2}$ c) $2\sqrt{2}$
    d) $5\sqrt{2}$ e) $7\sqrt{2}$

13. Si $\alpha = -\dfrac{\pi}{3}$
    Calcule: $$P = \frac{\mathrm{sen}(-15\pi - \alpha).\cos(92\pi + \alpha)}{\sec\left(\frac{927\pi}{2} + \alpha\right).\csc\left(\frac{1683\pi}{2} + \alpha\right)}$$
    a) $-\dfrac{3}{16}$ b) $-\dfrac{1}{16}$ c) $\dfrac{1}{16}$
    d) $\dfrac{3}{16}$ e) $\dfrac{5}{16}$

14. Reduce:
    $$W = \frac{\cos(-x) + \cos(24\pi + x) + \cos(53\pi - x)}{\mathrm{sen}\left(x - \frac{47\pi}{2}\right)}$$
    a) -1 b) 1 c) -3
    d) 3 e) 0

15. Siendo “α” y “β” las medidas de dos ángulos complementarios:
    $$Q = \frac{\cos(2\alpha + 4\beta)}{\cos(4\beta + 6\alpha)} + \frac{\mathrm{tg}(3\alpha + 2\beta)}{\mathrm{ctg}(2\alpha + 3\beta)}$$
    A) -1 B) 1 C) 0 D) -2 E) 2

16. Reducir:
    $$H = \cos\tfrac{\pi}{7} + \cos\tfrac{3\pi}{7} + \cos\tfrac{4\pi}{7} + \cos\tfrac{6\pi}{7}$$
    a) 0 b) 1 c) 2
    d) $\dfrac{1}{2}$ e) 3

17. Reducir:
    $$P = \mathrm{sen}\frac{37\pi}{11} + \cos\frac{41\pi}{22}$$
    a) 1 b) -1 c) 0
    d) -2 e) 2

18. Reducir:

$$E=\frac{\text{Sen}(-x)}{\text{Senx}}+\frac{\text{Sec}(-x)}{\text{Secx}}+\frac{\text{Tg}(-x)}{\text{Tgx}}$$

a) –1 b) –2 c) –3
d) 1 e) 2

19. Reducir:

$$E=\frac{\text{Sen}(-x)}{\text{Senx}}+\frac{\text{Cos}(\pi+x)}{\text{Cos}(-x)}+\frac{\text{Sec}(270^\circ+x)}{\text{Cscx}}$$

a) –1 b) –2 c) –3
d) 1 e) 2

20. Simplificar: $\frac{\text{Sen}\,(-x)}{\text{Sen}\,x}+\frac{\text{Tg}\,(x-y)}{\text{Tg}\,(y-x)}$

a) 1 b) 2 c) -2
d) -1 e) 0

21. Simplificar : $E=\frac{Csc(270^\circ+x)+Sec(90^\circ+x)}{Sec(360^\circ-x)+Csc(180^\circ-x)}$

a) -1 b) 0 c) 1
d) 2 e) 2 Tg x

22. Reducir : $E=\frac{\text{Sen}\,(\pi+x)\,\text{Tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\text{Ctg}\,(2\pi-x)\,\text{Sen}\,(2\pi+x)}$

a) 1 b) 2 c) -1
d) -2 e) 3

23. Simplificar : $E=\frac{\text{Sen}\,(90^\circ-x)}{\text{Sen}\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)}+\frac{\text{Tg}\,(270^\circ-x)}{\text{Tg}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}$

a) -2 b) -1 c) 0
d) 1 e) 2

24. Simplificar :
$E=\text{Cos}10^\circ+\text{Cos}20^\circ+\text{Cos}30^\circ+\ldots+\text{Cos}170^\circ+\text{Cos}180^\circ$

a) 1 b) 0 c) -1
d) ½ e) -1/2

25. Si : $x+y=2\pi$. Calcular:
Tg x + Sen x + Tg y + Sen y

a) 1 b) 2 c) -1
d) 0 e) -2

26. Si : $\alpha+\beta=270^\circ$, reducir : $\frac{\text{Sen}\,\alpha}{\text{Cos}\,\beta}+\text{Tg}\,\alpha\,\text{Tg}\,\beta$

a) -1 b) -2 c) 0
d) 1 e) 2

27. Reduzca:
$I=\text{En}\,(377\pi+x).\cos(127\pi-x).\sec(144^2\pi+x)$

a) –senx b) cosx c) 1
d) cosx e) senx

28. Simplifique:

$$I=\tan\left(475\frac{\pi}{2}-x\right)\cos\left(955\frac{\pi}{2}+x\right)$$

a) senx b) cosx c) 1
d) –senx e) -cosx

29. Reduzca:

$$P=\text{sen}\left(40^n\pi+x\right).\csc x+\tan^2 x$$

a) secx b) cosx c) tanx
d) $\sec^2 x$ e) cscx

30. Calcule:

$$A=\text{sen}150^\circ.\cos300^\circ.\cos300.\cos315^\circ$$

a) $\sqrt{2}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{4}$
d) $\frac{\sqrt{2}}{8}$ e) $\frac{\sqrt{2}}{16}$

31. Si: $\text{sen}(400082\,\pi+x)\cos(80002\,\pi+x)=a$
Halle: tanx + cotx
a) a b) 1/a c) $1/a^2$
d) 2a e) n.a

32. Simplifique:

$$E=\frac{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right).\text{ctg}(\pi+\theta)-\text{sen}(2\pi-\theta)}{\text{tg}(450^\circ+\theta).\text{ctg}(180^\circ-\theta).\csc(270^\circ-\theta)}$$

a) $\text{tg}\,\theta$ b) $-\text{tg}\,\theta$ c) $\text{ctg}\,\theta$
d) $-\text{ctg}\,\theta$ e) 1

33. Simplificar:

$$G=\frac{sen(180^\circ-x).\cos(90^\circ+x).\tan(270^\circ-x)}{\cot(180^\circ-x).\sec(270^\circ-x).\csc(x-180^\circ)}$$

a) sen^2x b) sen^3x c) sen^4x
d) $-\text{sen}^4x$ e) $-\text{sen}^3x$

34. Si: $\text{tg}(\pi+x)+\cot\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=\text{tg}\frac{\pi}{4}$
Calcular: "cscx"
Si: |secx| = -secx

a) $\sqrt{2}$ b) $\sqrt{3}$ c) $\sqrt{5}$
d) $-\sqrt{5}$ e) $-\sqrt{3}$

35. Si: $\alpha+\beta=\pi$
Calcular: "cos(tgα + tgβ)"

a) 0 b) 1 c) -1
d) cosα e) cosβ

36. En un triángulo ABC calcular:
E = tgA + tg(B + C) + tg(A + B + C)

a) tgA b) tgB c) tgC
d) 0 e) 1

37. En un triángulo ABC calcular:

$$E=\frac{sen(A+B)}{senC}+\frac{cos(B+C)}{cosA}+\frac{tg(A+C)}{tgB}$$

a) 0 b) 1 c) -1
d) 3 e) -3

38. Si: senx = cosy $\wedge$ x e y < 90º

Simplificar: $E=\frac{sen(x+2y)\,.\,tg(2x+3y)}{cos(2x+y)\,.\,tg(4x+3y)}$

a) 0 b) 1 c) -1
d) 2 e)-2