

## Teorema del momento della quantità di moto o teorema dell'impulso

$$(9) \quad \mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

Nel caso particolare in cui la forza totale applicata al punto materiale sia nulla la (9) si esprime nella forma: *la quantità di moto di un punto materiale sottoposto a forze la cui somma è nulla ( $\mathbf{F} = 0$ ) resta costante in un sistema di riferimento inerziale (teorema di conservazione della quantità di moto)*; si può cioè esprimere il I principio della dinamica nella forma: *in un sistema inerziale, un punto materiale non sottoposto ad azioni mantiene inalterata la sua quantità di moto ( $\mathbf{p} = \text{cost}$ )*.

Dalla (9) si ha

$$(10) \quad \mathbf{F}dt = d\mathbf{p}$$

$\mathbf{F}dt$  è chiamato impulso elementare della forza nell'intervallo fra  $t$  e  $(t+dt)$ . La variazione della quantità di moto del punto fra due istanti  $t_1$  e  $t_2$  è espressa da

$$(11) \quad \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}dt = \Delta\mathbf{p} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 .$$

L'integrale a primo membro prende il nome di *impulso della forza durante l'intervallo di tempo considerato*.

## Conservazione del momento della quantità di moto

Per un punto materiale soggetto alla forza  $\mathbf{F}$  si è stabilita (in un sistema di riferimento inerziale) la relazione

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}.$$

Se si prende in considerazione un punto  $O$  (polo) *fisso* nel sistema di riferimento adottato e si indica con  $\mathbf{r}$ <sup>(18)</sup> il vettore (applicato)  $\mathbf{OP}$ , la relazione precedente si può modificare moltiplicando i due membri vettorialmente a sinistra per  $\mathbf{r}$

$$(71) \quad \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{M} = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt}.$$

D'altra parte se si differenzia la (66)

$$(72) \quad \frac{d\mathbf{b}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt},$$

osservando che in tale relazione il primo termine del secondo membro è nullo perché i due vettori  $d\mathbf{r}/dt = \mathbf{v}$  e  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$  sono paralleli, si trova

---

<sup>(18)</sup> Andrebbe scritto a rigore  $(O, \mathbf{r})$ .

dalle (71) e (72) che, in un sistema di riferimento inerziale, è

$$(73) \quad \mathbf{M} = \frac{d\mathbf{b}}{dt}.$$

*In un sistema inerziale la derivata rispetto al tempo del momento della quantità di moto di un punto materiale rispetto a un punto fisso è pari al momento della forza totale agente su di esso calcolato rispetto al medesimo punto.*

La (71) può essere generalizzata considerando il caso in cui il punto  $O$ , rispetto al quale si calcolano i momenti, non sia fisso, ma sia invece dotato di una velocità  $\mathbf{v}_0$  nel sistema di riferimento inerziale adottato. In tal caso, nella (72) il termine  $d\mathbf{r}/dt \times \mathbf{p}$  non si annulla identicamente in quanto la derivata  $d\mathbf{r}/dt$  è pari a  $\mathbf{v} - \mathbf{v}_0$  e sarà quindi

$$[72'] \quad \frac{d\mathbf{b}}{dt} = -\mathbf{v}_0 \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt}.$$

Si trova allora:

$$(74) \quad \mathbf{M} = \frac{d\mathbf{b}}{dt} + \mathbf{v}_0 \times \mathbf{p}.$$

Se la (73) viene proiettata su una retta orientata fissa  $a$  per il punto fisso  $O$  si ha

$$(75) \quad M_a = \frac{db_a}{dt}$$

*cioè: in un sistema inerziale, la derivata rispetto al tempo del momento assiale della quantità di moto di un punto materiale rispetto a una retta orientata fissa è a ogni istante pari al momento, rispetto alla medesima retta, della forza totale agente su di esso.*

*Rispetto a un polo fisso il momento delle forze è pari alla derivata temporale del momento della quantità di moto*

*Rispetto a un polo mobile il bilancio tra momento delle forze e della quantità di moto tiene conto della velocità del polo*

Prende il nome di impulso elementare angolare il prodotto

$$\mathbf{M} dt$$

e per la (73) esso vale

$$(76) \quad \mathbf{M} dt = d\mathbf{b}$$

se i momenti sono calcolati rispetto a un *punto fisso*. L'impulso angolare in un intervallo di tempo finito è pari alla variazione del momento della quantità di moto:

$$(77) \quad \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M} dt = \mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1 = \Delta \mathbf{b}.$$

Nel caso particolare che sia nullo il momento della somma delle forze applicate al punto materiale rispetto a un punto fisso  $O$ , la (73) fornisce

$$(78) \quad \mathbf{b} = \text{cost}$$

cioè il momento della quantità di moto del punto materiale calcolato rispetto a  $O$  resta costante (*teorema di conservazione del momento della quantità di moto*).

Consideriamo alcuni esempi di applicazione del teorema del momento della quantità di moto.

*Se è nullo l'impulso angolare, si mantiene costante il momento della quantità di moto*

## Teorema del lavoro e dell' energia cinetica e Teorema delle forze vive

**Teorema del lavoro e dell'energia cinetica (forze vive):** per integrazione nello spazio di  $\mathbf{F} = m d\mathbf{v}/dt$ :

$$L = \Delta T$$

### ■ 3.3. ENERGIA CINETICA. TEOREMA DEL LAVORO E DELL'ENERGIA CINETICA

Durante il moto di un punto materiale varie forze possono contemporaneamente agire e per ciascuna di esse separatamente potrà considerarsi la espressione (2) che dà il lavoro elementare compiuto dalla singola forza: questo lavoro è positivo se l'angolo formato fra i vettori forza e spostamento è acuto e corrisponde a un effettivo lavoro compiuto dall'ente che fornisce la forza; il lavoro è nullo se l'angolo è  $\pi/2$  ed è negativo se l'angolo è ottuso. In quest'ultimo caso il lavoro è negativo nel senso che l'ente che genera la forza subisce il lavoro e invece è la reazione offerta dal punto materiale che in realtà esegue un lavoro.

La somma (algebrica) dei lavori eseguiti da tutte le forze che agiscono contemporaneamente su un punto materiale quando questo subisce uno spostamento è pari al lavoro compiuto per lo stesso spostamento dalla somma delle forze applicate, che è quella che determina il moto del punto.

Con riferimento a questa forza totale  $\mathbf{F}$  risultante delle forze applicate al punto, si può scrivere per il lavoro elementare, utilizzando il secondo principio della dinamica

$$(8) \quad dL = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} dt.$$

Si osservi che

$$\frac{d(v^2)}{dt} = \frac{d(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})}{dt} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 2 \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v}$$

e quindi la (8) diviene

$$(9) \quad dL = \frac{m}{2} \frac{d(v^2)}{dt} dt = \frac{m}{2} d(v^2) = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = dT$$

avendo posto

$$T = \frac{1}{2}mv^2.$$

Il lavoro compiuto dalla forza totale applicata al punto materiale  $\mathbf{F}$  nel passaggio dalla posizione 1 alla posizione 2

$$(10) \quad L_{12} = \int_1^2 dL = \int_1^2 dT = T_2 - T_1 = \Delta T_{12}$$

dipende esclusivamente dai valori che la grandezza  $T$  assume nelle posizioni iniziale e finale.

Questa grandezza si chiama energia cinetica e ha le dimensioni stesse del lavoro, ovviamente essa si misura in joule ed erg, rispettivamente, nel SI e nel CGS. Per comprendere facilmente il suo significato si consideri il caso in cui la posizione finale 2 corrisponda alla quiete ( $v_2 = 0$ ); la forza applicata al punto materiale a partire dalla posizione 1 ne ha contrastato il moto facendo diminuire la velocità fino al valore zero; il lavoro complessivo compiuto dalla forza applicata è stato

$$L_{12} = -T_1 = -\frac{1}{2}mv_1^2.$$

In questo caso

$$T_1 = -L_{12}$$

rappresenta il lavoro fatto contro la forza applicata. Ciò significa, in termini generali, che un punto materiale per il fatto di essere in moto (velocità  $v$ ) e di essere dotato di inerzia (massa  $m$ ) ha una capacità a compiere lavoro (contro una forza che contrasti il moto) espressa da

$$T = \frac{1}{2}mv^2$$

esso, cioè, possiede una energia  $T$ , il cui nome *cinetica* giustifica la sua origine, dal moto del punto.

*Il lavoro compiuto da una forza su un punto materiale ne fa variare corrispondentemente l'energia cinetica*

La (10) esprime un teorema generale, il teorema del lavoro e dell'energia cinetica, detto anche delle forze vive<sup>(1)</sup>, molto importante nella fisica, *valido qualunque siano i tipi di forze che agiscono sul punto materiale: la variazione di energia cinetica di un punto materiale è sempre pari al lavoro compiuto su di esso dalla somma delle forze applicate.* Naturalmente al posto del lavoro della somma delle forze si può considerare la somma algebrica dei lavori compiuti sul punto materiale da tutte le forze che agiscono contemporaneamente su di esso.

Si noti che perché vi sia variazione di energia cinetica in corrispondenza a uno spostamento del punto materiale occorre che vari l'intensità della velocità cioè che la forza totale abbia in un tratto di percorso almeno una componente nella direzione del moto: altrimenti il lavoro fatto dalla forza totale è nullo e l'energia cinetica resta inalterata. Quest'ultima circostanza si verifica nel caso dei moti uniformi: nel moto rettilineo uniforme è  $\mathbf{F} = 0$ , se il moto è circolare uniforme la forza totale (centripeta) è normale alla traiettoria.

Nel caso che il moto del punto sia di rotazione intorno a un punto  $O$ , con velocità angolare di intensità  $\omega$ , l'energia cinetica si scrive

$$(11) \quad T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(mr^2)\omega^2$$

essendo  $r$  la distanza del punto da  $O$  e  $mr^2$  il momento d'inerzia del punto rispetto a  $O$ .

Il teorema del lavoro e dell'energia cinetica è stato dedotto dal secondo principio della dinamica. In molti problemi pratici esso riesce di grande aiuto qualora si abbiano le informazioni richieste nella sua formulazione: la soluzione del problema della determinazione della posizione del punto materiale è allora semplificata dal momento che nella espressione del teorema sono implicate le velocità e non le accelerazioni (che invece intervengono nell'espressione del secondo principio della dinamica).

## Teorema del lavoro e dell'energia cinetica nei sistemi di punti

### ■ 4.7. TEOREMA DEL LAVORO E DELL'ENERGIA CINETICA NEI SISTEMI DI PUNTI

Consideriamo il passaggio di un sistema di  $n$  punti materiali da una configurazione 1 ( $x'_1, y'_1, z'_1, \dots, x'_n, y'_n, z'_n$ ) nel sistema di riferimento adottato a una configurazione 2 ( $x''_1, y''_1, z''_1, \dots, x''_n, y''_n, z''_n$ ). Per ciascun

punto materiale  $j$  si può porre

$$(27) \quad L_j = \int_1^2 (\mathbf{F}_j + \mathbf{f}_j) \cdot d\mathbf{s}_j = \frac{1}{2}m(v_j'')^2 - \frac{1}{2}m(v_j')^2$$

essendo  $\mathbf{F}_j$  e  $\mathbf{f}_j$  le somme delle forze esterne (reali ed apparenti) e interne applicate al punto di massa  $m_j$ : la variazione dell'energia cinetica del singolo punto materiale in un intervallo di tempo è pari al lavoro fatto sul punto dalle forze *interne ed esterne* ad esso applicate.

Sommando le  $n$  relazioni (27) per i vari punti materiali del sistema, si ha

$$(28) \quad L = \sum_j^n L_j = T_2 - T_1$$

ove  $L$  è il lavoro eseguito da tutte le forze agenti sul sistema (interne ed esterne) e  $T$  è l'energia cinetica del sistema

$$(29) \quad T = \frac{1}{2} \sum_j^n m_j v_j^2.$$

*La variazione dell'energia cinetica di un sistema durante un intervallo di tempo qualsiasi è pari al lavoro contemporaneamente compiuto da tutte le forze agenti sul sistema (esterne ed interne). È questo il teorema del lavoro e dell'energia cinetica per i sistemi di punti.*

La variazione di energia cinetica di un sistema di punti è eguale al lavoro compiuto da tutte le forze agenti su tutti i punti

## Teorema del momento della quantità di moto

### 4.5. TEOREMA DEL MOMENTO DELLA QUANTITÀ DI MOTO

Si vuole ora estendere in questo paragrafo al caso di un sistema di punti materiali il risultato del **teorema del momento della quantità di moto**, ritrovato al cap. 2, par. 2.23 per il caso di un punto. A tal proposito, definiamo preliminarmente il momento risultante di un sistema di forze e il momento della quantità di moto di un sistema di punti rispetto a un polo  $O$ .

In un sistema formato da  $n$  punti materiali ( $P_1 \dots P_n$ ), scelto un punto (polo)  $O$  nel sistema di riferimento adottato, si definisce momento totale (o risultante) delle forze applicate ai singoli punti materiali ( $\mathbf{F}_1 \dots \mathbf{F}_n$ ) rispetto ad  $O$ , il vettore

$$(15) \quad \mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \dots + \mathbf{M}_n = \sum_j^n \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_j$$

essendo  $\mathbf{M}_1 \dots \mathbf{M}_n$  i momenti delle forze  $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2 \dots \mathbf{F}_n$  rispetto al medesimo punto  $O$ . Analogamente si definisce momento della quantità di moto del sistema rispetto a  $O$  la somma dei momenti delle quantità di moto dei singoli punti (cap. 2, par. 2.22)

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + \dots + \mathbf{b}_n = \sum_j^n \mathbf{r}_j \times \mathbf{p}_j.$$

Per quanto riguarda il moto di ciascun punto materiale, considerando i momenti rispetto a un punto (polo) fisso  $O$  nel sistema di riferimento adottato vale la relazione [cap. 2, eq. (73)]

$$(16) \quad \mathbf{M}_j^{(\text{est})} + \mathbf{M}_j^{(\text{int})} = \frac{d\mathbf{b}_j}{dt}$$

ove abbiamo distinto le forze applicate al punto  $j$  in forze esterne, reali ed apparenti, di momento  $\mathbf{M}_j^{(\text{est})}$ , e forze interne, di momento  $\mathbf{M}_j^{(\text{int})}$ . Nel caso che il punto di riferimento  $O$  si muova con velocità  $\mathbf{v}_0$ , vale invece la

$$(17) \quad \mathbf{M}_j^{(\text{est})} + \mathbf{M}_j^{(\text{int})} = \frac{d\mathbf{b}_j}{dt} + \mathbf{v}_0 \times m_j \mathbf{v}_j.$$

Sommando le relazioni (16) per tutti i punti del sistema e ricordando che per il principio di azione e reazione le forze scambiate fra due punti sono uguali e opposte e dirette lungo la congiungente i due punti, e hanno

quindi momenti rispetto a  $O$  uguali e opposti, si trova

$$(18) \quad \sum_1^n \mathbf{M}_j^{(\text{int})} = 0.$$

Pertanto ponendo  $\mathbf{M} = \sum_1^n \mathbf{M}_j = \sum_1^n \mathbf{M}_j^{(\text{est})}$ , si ha

$$(19) \quad \mathbf{M} = \frac{d\mathbf{b}}{dt}.$$

Nel caso che il punto  $O$  si muova, si trova

$$(20) \quad \mathbf{M} = \frac{d\mathbf{b}}{dt} + \mathbf{v}_0 \times \mathbf{p}.$$



Come si vede, la (20) si riduce alla (19) non solamente quando è  $\mathbf{v}_0 = 0$ , ma anche se è nulla la quantità di moto  $\mathbf{p}$  del sistema, ovvero anche quando il polo  $O$  coincida col centro di massa. In tale caso, infatti, i due vettori  $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_c$  e  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}_c$  sono paralleli e vale l'espressione (19) nonostante il punto non sia fisso.

Si può quindi esprimere il **teorema del momento della quantità di moto** nella forma: *la derivata rispetto al tempo del momento della quantità di moto calcolato rispetto a un punto fisso nella terna di riferimento adottata o al centro di massa del sistema è uguale al momento, rispetto al medesimo punto, delle forze esterne (reali e apparenti) applicate al sistema.*

Ricordando (cap. 2, par. 2.21) la definizione di momento di un vettore (forza, quantità di moto) rispetto a una retta orientata (asse), si può giungere a un'altra espressione importante. Scegliendo una retta orientata fissa  $a$  passante per un punto fisso o per il centro di massa e indicando con  $b_a = \sum_j b_{aj}$  e con  $M_a = \sum_j M_{aj}$  il momento delle quantità di moto del sistema e il momento totale delle forze esterne rispetto ad  $a$ , si ha dalla (19)

$$(21) \quad \frac{db_a}{dt} = M_a.$$

Quindi, considerato, nel sistema di riferimento adottato, un asse fisso passante per un punto fisso o per il centro di massa *la derivata rispetto al tempo del momento delle quantità di moto rispetto a tale asse è uguale al momento totale rispetto al medesimo asse delle forze esterne agenti sul sistema.*

L'uso del **teorema del momento della quantità di moto** in questa forma è particolarmente utile quando tutti i punti del sistema ruotino intorno al medesimo asse. In tal caso (cap. 2, par. 2.22) il contributo a  $b_a$  del punto materiale  $m_j$  che ha una velocità  $\omega_j$  diretta come  $a$  è:

$$(22) \quad b_{aj} = m_j r_j^2 \omega_{ja} = m_j r_j^2 \dot{\varphi}_j$$

essendo  $\omega_{ja}$  la proiezione di  $\omega_j$  su  $a$ ; essa è  $\pm\omega_j$  secondo che  $\omega_j$  abbia il verso di  $a$  (segno  $+$ ) o l'opposto (segno  $-$ ); essa è pari alla velocità angolare scalare introdotta al cap. 1, par. 1.12.

Nel caso importante che tutti i punti abbiano la stessa velocità  $\omega$  (e quindi la stessa  $\dot{\varphi}$ )

$$(23) \quad b_a = \left( \sum_1^n m_j r_j^2 \right) \omega_a = I_a \omega_a = I_a \dot{\varphi}$$

essendo  $\omega_a = \pm \omega$  secondo che  $\omega$  abbia il verso di  $a$  (segno  $+$ ) o quello opposto (segno  $-$ ), avendo posto

$$(24) \quad I_a = \sum_1^n m_j r_j^2.$$

Momento d'inerzia  
assiale

$I_a$  prende il nome di momento d'inerzia del sistema rispetto all'asse  $a$ . In tal caso la (21) si scrive

$$(25) \quad M_a = \frac{d}{dt}(I_a \dot{\varphi}).$$

## Teorema del lavoro e dell'energia cinetica per fluidi ideali. Equazione di Bernoulli

### 8.11. TEOREMA DEL LAVORO E DELL'ENERGIA CINETICA PER FLUIDI IDEALI. EQUAZIONE DI BERNOULLI

L'applicazione del teorema del lavoro e dell'energia cinetica al caso del moto stazionario di un fluido ideale (incompressibile e privo di viscosità) in un tubo di flusso o in un condotto, fornisce una equazione, detta di Bernoulli, che ha un notevole interesse nella dinamica dei fluidi e dei liquidi in specie.

Si consideri il fluido che a un certo istante  $t$  si trova a occupare lo spazio fra la sezione 1 (area  $S_1$ ) e la sezione 2 (area  $S_2$ ) di un condotto o di un tubo di flusso (fig. 8.20). Supponiamo che le sezioni siano sufficientemente piccole in modo che si possa ammettere che in tutti i punti di una sezione la velocità  $v$ , la pressione  $p$  e la quota  $z$  rispetto a un piano di riferimento abbiano gli stessi valori.

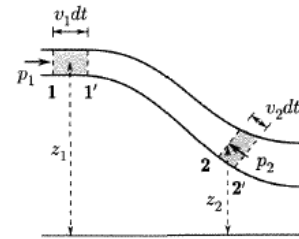


Fig. 8.20

Useremo gli indici 1 e 2 per le grandezze nelle due sezioni. In un intervallo di tempo  $dt$  il fluido contenuto inizialmente fra le sezioni 1 e 2 si è spostato e all'istante  $(t + dt)$  esso si trova fra le sezioni 1' e 2' che distano dalle originarie rispettivamente di  $ds_1 = v_1 dt$  e  $ds_2 = v_2 dt$ .

Per il teorema del lavoro e dell'energia cinetica, il lavoro fatto nel tempo  $dt$  dalle forze esterne che sollecitano la massa fluida deve essere uguale alla variazione di energia cinetica del sistema. Le forze che sollecitano il sistema sono la forza di gravità e le forze di superficie. Il lavoro  $dL_g$  compiuto dalle forze di gravità, poiché la massa fra le sezioni 1' e 2 resta invariata, è pari a quello che si ha nel passaggio della massa

$$dm = \rho S_1 v_1 dt = \rho S_2 v_2 dt$$

dalla quota  $z_1$  alla  $z_2$ . Esso è dato da:

$$dL_g = (z_1 - z_2)g dm.$$

Il lavoro delle forze di superficie sarà unicamente quello corrispondente alle sezioni terminali che, essendo le forze di pressione dirette verso l'interno del fluido, nelle due sezioni è di segno contrario. Si ha quindi

$$\begin{aligned} dL_p &= S_1 p_1 v_1 dt - S_2 p_2 v_2 dt \\ &= \frac{dm}{\rho} (p_1 - p_2). \end{aligned}$$

Si osservi che i tre termini hanno le dimensioni di una lunghezza. Il primo di essi dà la quota del centro di massa della sezione rispetto a un piano di riferimento e prende il nome di altezza geometrica. Il secondo dà l'altezza di una colonna di liquido di densità  $\rho$  che determina una pressione pari alla pressione nella sezione, è cioè il dislivello che si determinerebbe per es. in un manometro ad aria libera formato da un semplice tubo a U, collegato alla sezione in esame: esso prende il nome di altezza piezometrica. Il terzo termine ha l'espressione della altezza alla quale giunge un grave lanciato verso l'alto con la velocità iniziale  $v$ , pari alla velocità delle particelle fluide nella sezione: esso è chiamato altezza di arresto. Il teorema di Bernoulli si può esprimere dicendo che *nel moto stazionario di un fluido ideale in un condotto, o lungo una qualsivoglia linea di corrente, si mantiene costante la somma delle altezze geometrica, piezometrica e d'arresto.*

Analogamente, la variazione di energia cinetica è quella che compete al passaggio di una massa  $dm$  dalla regione compresa fra le sezioni 1 e 1' alla regione compresa fra le sezioni 2 e 2', essendo quella relativa alla massa tra le sezioni 1' e 2 rimasta invariata:

$$dT = \frac{1}{2} dm (v_2^2 - v_1^2).$$

Il teorema del lavoro e dell'energia cinetica si scrive:

$$dL_g + dL_p = dT$$

$$g(z_1 - z_2)dm + \frac{dm}{\rho}(p_1 - p_2) = \frac{1}{2} dm (v_2^2 - v_1^2)$$

*Il teorema di Bernoulli è un'applicazione del teorema del lavoro e dell'energia cinetica*

da cui si ottiene:

$$(36) \quad z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g}.$$

*In un tubo di flusso è costante la somma delle tre altezze: geometrica, piezometrica e di arresto*

L'equazione di Bernoulli esprime il fatto che per ogni sezione del condotto è

$$(37) \quad z + \frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} = \text{cost.}$$

## Applicazione del teorema del lavoro e dell'energia cinetica al moto stazionario di fluidi viscosi

### 8.12. APPLICAZIONE DEL TEOREMA DEL LAVORO E DELL'ENERGIA CINETICA AL MOTO STAZIONARIO DI FLUIDI VISCOSI

La presenza della viscosità in un fluido reale altera in parte i risultati del teorema di Bernoulli, poiché nel bilancio energetico considerato parte dell'energia si dissipa ed esce dal computo delle energie meccaniche.

Si consideri, a tal fine, dapprima il moto di un fluido ideale in un condotto cilindrico, a sezione circolare, disposto orizzontalmente e si supponga che le velocità siano sufficientemente basse perché il moto sia stazionario. In tali condizioni la velocità delle particelle e la pressione sono ovunque le stesse. Se si compie tuttavia l'esperienza come indicato con un fluido reale, dotato di viscosità, si trova che le pressioni nelle varie sezioni sono diverse (v. fig. 8.26).

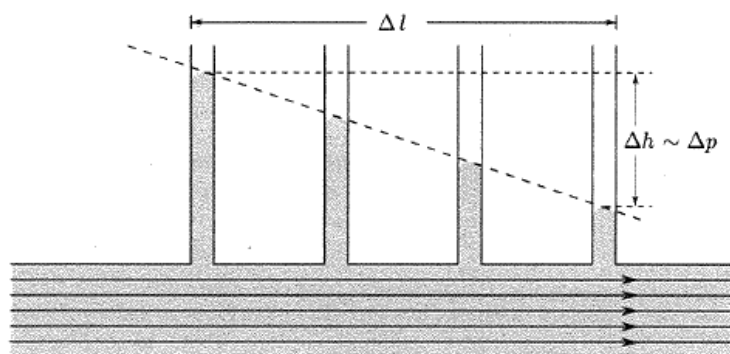


Fig. 8.26

In un fluido viscoso c'è  
perdita di carico lungo un  
tubo di flusso

Il rapporto

$$\frac{\Delta p}{\Delta l}$$

prende il nome di perdita di carico e determina la differenza di pressione che occorre sostenere per unità di lunghezza del tubo affinché il moto stazionario venga mantenuto.

La causa di questo fatto va ricercata nell'esistenza della viscosità. Si è già detto che la viscosità ha origini diverse nei liquidi e nei gas: la sua esistenza produce tuttavia una resistenza di attrito che ostacola lo scorrimento di uno strato fluido su un altro e conduce a dissipazione di energia meccanica che si trasforma in calore.

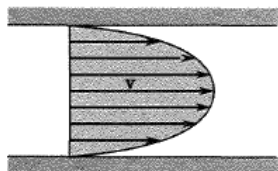


Fig. 8.27

Per meglio comprendere il fenomeno, conviene porre attenzione alla distribuzione della velocità in una sezione trasversale del tubo di figura 8.26 ove ha luogo il moto stazionario. Se il fluido fosse ideale, la velocità sarebbe uguale in tutti i punti della sezione; il fluido si muoverebbe tutto assieme come un corpo rigido e scorrerebbe sulle pareti del tubo. In realtà (fig. 8.27), finché il tubo non ha dimensioni trasversali molto grandi, si trova una distribuzione delle velocità lungo un diametro qualsiasi, simmetrica rispetto all'asse e rappresentata da una parabola. Questi risultati possono ottenersi sperimentalmente introducendo alcune particelle colorate nella corrente fluida, aventi la stessa densità del fluido, e misurandone la velocità.

Una tale distribuzione mostra che il fluido può essere convenientemente immaginato diviso in tanti tubi coassiali, il primo dei quali aderisce alla parete ed è fermo (velocità nulla) mentre gli altri hanno velocità gradualmente crescenti man mano che il loro raggio decresce<sup>(3)</sup>.

Il fatto che lo strato di fluido a contatto con la parete resti fermo genera una sollecitazione di scorrimento nel fluido. Questo andamento del fenomeno mostra che le forze d'attrito che intervengono nel moto di strati fluidi che scorrono uno sull'altro sono quelle di attrito interno, cioè dovute alla viscosità.

L'equazione di Bernoulli va modificata in quanto, nell'applicare il teorema del lavoro e dell'energia cinetica, occorre tenere conto del lavoro delle forze di attrito.

Si consideri il caso di un liquido viscoso in moto stazionario in un tubo sottile che avvenga con le modalità accennate. Si vuole calcolare la distribuzione delle velocità e la perdita di carico.

Si prenda in considerazione un tratto del tubo di raggio  $R$  in cui avviene il moto del fluido viscoso, di lunghezza  $l$  compreso fra le sezioni  $S_1$  e  $S_2$  e poniamo attenzione sulla porzione di fluido contenuto in un tubo coassiale di raggio  $r$  (minore di  $R$ ) (fig. 8.28).

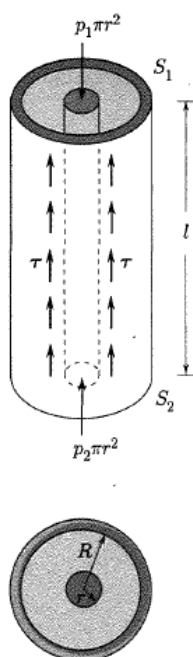


Fig. 8.28

Il fluido nel tubo di raggio  $R$  resta così diviso in due parti col cilindro interno che scorre entro l'involucro costituito dal fluido esterno. Siccome il moto è stazionario e quindi non vi sono accelerazioni, le forze che sollecitano il fluido del tubo interno si devono fare equilibrio. Esse sono: le forze dovute alle pressioni  $p_1$  e  $p_2$  sulle facce piane estreme e la forza di attrito  $F_A$  dovuta alla viscosità, sul mantello esterno del cilindro. Tutte e tre sono dirette come l'asse del cilindro; la prima nel verso del moto, la somma delle altre due in verso opposto. Tale somma, sull'asse del cilindro orientato nel verso del moto, è  $(p_1 - p_2)\pi r^2$ . Per il calcolo della proiezione di  $F_A$  occorre fare qualche considerazione.

Si ricordi innanzitutto che, secondo quanto visto nel cap. 7, par. 7.11, nel moto laminare di un fluido viscoso il coefficiente di viscosità è espresso mediante la sollecitazione di taglio fra due strati che scorrono uno sull'altro ( $\tau = dF_A/d\sigma$  essendo  $d\sigma$  un elemento di superficie fra gli strati e  $dF_A$  l'intensità della forza tangenziale che si esercita fra gli strati in corrispondenza a  $d\sigma$ ) e la  $dv/dn$ , cioè la derivata della velocità dello strato che si considera (in un sistema di riferimento fisso) rispetto alla

coordinata spaziale normale agli strati. Si ha

$$\eta = \frac{dF_A}{d\sigma} \frac{1}{\left| \frac{dv}{dn} \right|}.$$

Nel caso in questione la situazione è del tutto simile: gli strati che scorrono, tuttavia, non sono piani ma cilindrici e la  $n$  (diretta da strati più veloci a strati meno veloci) va sostituita con  $r$ . Si ha quindi per l'intensità della forza tangenziale, cioè per la forza di attrito sull'elemento  $d\sigma$  di un cilindro coassiale con il tubo

$$(40) \quad dF_A = \eta d\sigma \left| \frac{dv}{dr} \right|.$$

La proiezione della  $F_A$ , forza di attrito che si esercita sul mantello di area  $2\pi r \cdot l$  sull'asse orientato nella direzione del moto vale

$$F_A = 2\pi r l \eta \frac{dv}{dr}.$$

Essa è diretta in verso opposto al moto essendo  $dv/dr$  negativa. Si può quindi scrivere:

$$(41) \quad (p_1 - p_2)\pi r^2 + 2\pi r l \eta \frac{dv}{dr} = 0$$

$$(42) \quad dv = \frac{p_2 - p_1}{2\eta l} r dr.$$

Integrando

$$(43) \quad v = \frac{(p_2 - p_1)}{4\eta l} r^2 + C.$$

La costante di integrazione va determinata ponendo la condizione che la velocità sia zero per  $r = R$ , poiché lo strato aderente alla parete resta fermo. Se ne deduce conseguentemente l'espressione

$$(44) \quad v = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l} (R^2 - r^2)$$

per la distribuzione delle velocità, che, come si attendeva, è parabolica col massimo sull'asse del tubo e valore zero alla parete.

Se si vuole calcolare la portata nel caso in oggetto, bisogna innanzi tutto calcolare la quantità di fluido che passa attraverso una corona circolare della sezione trasversale compresa fra le circonferenze di raggio  $r$  e  $r + dr$

$$(45) \quad dQ = v dA = 2\pi r dr \frac{p_1 - p_2}{4\eta l} (R^2 - r^2).$$

Integrando, si ha la legge di Poiseuille per la portata

$$(46) \quad Q = \frac{\pi(p_1 - p_2)}{2\eta l} \int_0^R (R^2 - r^2) r dr = \frac{\pi(p_1 - p_2)R^4}{8\eta l}.$$

*Moto laminare  
di Poiseuille in un  
condotto cilindrico*

Questa formula mostra come la portata di un fluido attraverso un capillare possa essere usata per misurare il coefficiente di viscosità, se si determina contemporaneamente la differenza di pressione che viene mantenuta agli estremi del tubo per avere il moto stazionario. Tale possibilità è sfruttata in alcuni viscosimetri.

La perdita di carico nel tubo risulta essere dalla (46)

$$(47) \quad \frac{\Delta p}{l} = \frac{8\eta Q}{\pi R^4}.$$

## Teorema di Fourier sulle funzioni periodiche

### ■ 9.4. TEOREMA DI FOURIER SULLE FUNZIONI PERIODICHE

Per il seguito delle considerazioni è importante il teorema seguente di analisi dovuto a Fourier. Sia data una funzione a un solo valore  $x = x(t)$  periodica di periodo  $T$  e frequenza  $\nu = 1/T$ . Essa, sotto condizioni molto generali<sup>(5)</sup>, può essere sempre espressa mediante una somma di infiniti termini (serie) armonici di frequenza multiple della frequenza della funzione data.

Si può cioè scrivere per una  $x(t) = x(t + nT)$ , con  $n$  intero:

$$(1) \quad \begin{aligned} x(t) = & a_0 + a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + \dots + a_r \cos r\omega t + \dots \\ & + b_1 \sin \omega t + b_2 \sin 2\omega t + \dots + b_r \sin r\omega t. \end{aligned}$$

I valori di  $a_0$  e dei coefficienti costanti  $a_r$  e  $b_r$  si calcolano facilmente con le seguenti osservazioni. Integrando ambo i membri della (1) fra 0 e  $T$ , tutti gli integrali delle funzioni seno e coseno sono nulli, così che si ha

$$\int_0^T x(t) dt = a_0 T$$

che dà il valore

$$(2) \quad a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt;$$

$a_0$  è pari al valore medio della funzione nel periodo  $T$ .

Se si moltiplicano entrambi i membri della (1) per  $\cos r\omega t$  e si integra fra 0 e  $T$ , tutti gli integrali a destra sono nulli tranne  $\int_0^T a_r \cos^2 r\omega t dt$ . Si ha quindi

$$\int_0^T x(t) \cos r\omega t dt = a_r \int_0^T \frac{1 + \cos 2r\omega t}{2} dt = a_r \frac{T}{2}$$

da cui

$$(3) \quad a_r = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos r\omega t dt.$$

Analogamente, moltiplicando i due membri della (1) per  $\sin r\omega t$  e integrando fra 0 e  $T$  si ottiene

$$(4) \quad b_r = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin r\omega t dt.$$

*Sviluppo  
di una funzione  
in serie di Fourier*

Si osservi che la (1) può anche scriversi

$$(5) \quad \begin{aligned} x(t) = & a_0 + c_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + c_2 \sin(2\omega t + \varphi_2) + \dots \\ & + c_r \sin(r\omega t + \varphi_r) + \dots \end{aligned}$$

Il primo termine, di frequenza uguale a quella di  $x(t)$ , si chiama fondamentale, gli altri: seconda armonica, terza armonica etc.

Se si ricorda che

$$\sin(r\omega t + \varphi_r) = \sin r\omega t \cos \varphi_r + \cos r\omega t \sin \varphi_r$$

si deduce dal confronto della (1) e della (5) che

$$\begin{cases} c_r \cos \varphi_r = b_r \\ c_r \sin \varphi_r = a_r \end{cases}$$

da cui

$$(6) \quad \begin{cases} c_r^2 = a_r^2 + b_r^2 \\ \tan \varphi_r = \frac{a_r}{b_r} \end{cases}$$

Coefficienti dello  
sviluppo di Fourier

## Teorema di Carnot

### ■ 17.5. TEOREMA DI CARNOT

Si vuole ora stabilire un teorema molto importante, che va sotto il nome dello scienziato che lo ha formulato: Carnot. La dimostrazione presentata da Carnot, tuttavia, è incorretta perché si basa sulla teoria del calorico. Esso è stato riformulato da Lord Kelvin e da Clausius ed è una conseguenza necessaria del secondo principio: esso può essere considerato come un altro enunciato del secondo principio della termodinamica. L'enunciato del teorema di Carnot è il seguente: *tutte le macchine reversibili operanti fra due medesime temperature<sup>(2)</sup> hanno lo stesso rendimento; nessuna macchina irreversibile che lavori fra le stesse temperature può avere rendimento maggiore di quello delle macchine reversibili.*



Questo teorema contiene due affermazioni che vanno dimostrate successivamente. Si supponga di avere due macchine reversibili  $R$  e  $R'$  che operino fra le due stesse temperature  $T_1$  e  $T_2 < T_1$ . Esse possono differire per la sostanza usata o per i punti che limitano le trasformazioni e che definiscono il ciclo. Siano  $Q_1, Q_2$  le quantità di calore che la  $R$  rispettivamente prende dalla sorgente a temperatura  $T_1$  e cede alla sorgente alla temperatura  $T_2$ , e  $L$  il lavoro compiuto. Siano  $Q'_1, Q'_2$  e  $L'$  le analoghe quantità per la macchina  $R'$ . I rendimenti delle due macchine sono

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} \quad \eta' = \frac{Q'_1 - Q'_2}{Q'_1}.$$

Supponiamo per assurdo che sia  $\eta > \eta'$ , cioè

$$(5) \quad \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} > \frac{Q'_1 - Q'_2}{Q'_1}.$$

Per vedere come una tale posizione non sia lecita, si immagini di proporzionare le macchine in modo che  $L = L'$  e di collegarle in modo che  $R$  operi in senso diretto e  $R'$  in senso inverso (fig. 17.4); l'eguaglianza dei lavori esterni delle due macchine

$$(6) \quad L = Q_1 - Q_2 = Q'_1 - Q'_2 = L'$$

consente di ricavare dalla (5)

$$(7) \quad \frac{1}{Q_1} > \frac{1}{Q'_1}$$

e

$$Q_1 < Q'_1.$$

Ancora dalla (6) si ha

$$(8) \quad Q_2 < Q'_2.$$

Si ottiene allora che la sorgente ad alta temperatura guadagna una quantità di calore (positivo)  $Q'_1 - Q_1$ , mentre la sorgente a bassa temperatura ne perde la stessa quantità  $Q'_2 - Q_2$ . Ciò significherebbe che una quantità di calore è trasferita da un corpo a temperatura  $T_2$  a un corpo a temperatura più alta senza necessità di fornire un lavoro dall'esterno: questo è contrario al secondo principio della termodinamica. Si conclude quindi che la (5) costituisce un assurdo e quindi che  $\eta$  non può essere maggiore di  $\eta'$ . Ripetendo lo stesso ragionamento nell'ipotesi che  $R'$  funzioni in senso diretto e  $R$  in senso inverso, si può mostrare che  $\eta'$  non può essere maggiore di  $\eta$ . Si conclude quindi che deve necessariamente essere:

$$(9) \quad \eta = \eta'.$$

Per dimostrare la seconda parte del teorema, si supponga che la macchina  $R$  sia irreversibile. Ripetendo il ragionamento precedente si può mostrare che  $\eta_{\text{irr}}$  non può essere maggiore di  $\eta'$ . Siccome peraltro la  $R$  non può essere fatta funzionare in senso inverso, non si può provare che  $\eta'$  non può essere maggiore di  $\eta_{\text{irr}}$ . Ne segue, poiché  $\eta' = \eta_{\text{rev}}$ :

$$(10) \quad \eta_{\text{irr}} \leq \eta_{\text{rev}}$$

che prova la seconda parte del teorema di Carnot.

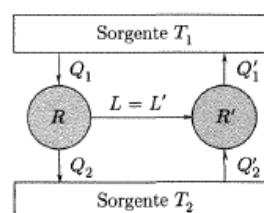


Fig. 17.4

*Per il teorema di Carnot, tutte le macchine reversibili operanti tra due medesime temperature hanno rendimenti eguali*

Quindi: *tutte le macchine termiche che seguono un ciclo reversibile prelevando quantità di calore a una temperatura  $T_1$  e restituendo quantità di calore a una seconda temperatura  $T_2$  hanno il medesimo rendimento, indipendentemente dalla natura e quantità della sostanza che descrive il ciclo, dall'estensione delle trasformazioni che costituiscono il ciclo e dalle grandezze che variano ( $p$  e  $V$ ,  $H$  e  $M$  ecc.).*

Questa importantissima circostanza fa sì che il rendimento di una qualsiasi macchina reversibile che opera prelevando calore a temperatura  $T_1$  e restituendo calore alla temperatura  $T_2$ , può essere ottenuto facendo uso della (4) ricavata nel caso che la sostanza sia un gas perfetto. Si osservi che nella (4) vengono usate le temperature assolute da misurarsi con un termometro a gas perfetto.

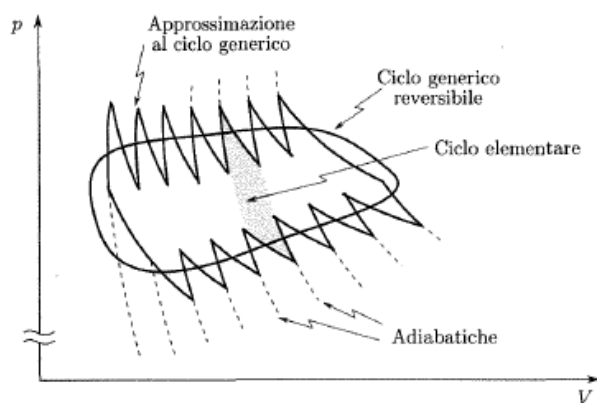


Fig. 17.5

Nel caso di cicli, anche reversibili, nei quali gli scambi di calore non avvengano esclusivamente alle temperature massima e minima del ciclo stesso, il rendimento è minore di quello precedentemente trovato. Ciò si vede facilmente osservando la figura 17.5. Un ciclo reversibile qualsiasi può sempre essere approssimato da un insieme di cicli di Carnot percorsi successivamente: si osservi infatti che le trasformazioni comuni a due cicli sono percorse due volte in sensi contrari e quindi tutto ciò equivale a approssimare la linea del ciclo data con una spezzata formata da tratti di isoterme e adiabatiche che si possono rendere piccoli a piacere. Solo alcuni dei cicli di Carnot possono essere tali da operare

fra le temperature massima e minima del ciclo dato: altri operano con un salto di temperatura inferiore e quindi la trasformazione di quantità di calore in lavoro verrà fatta con un rendimento globale inferiore a quello di una macchina di Carnot che operi fra le temperature estreme del ciclo dato.

## LISTA TEOREMI LIBRO ELETTROMAGNETISMO:

### Teorema della divergenza di Gauss:

(39)

$$\int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \int_\tau \operatorname{div} \mathbf{E} d\tau$$

Teorema della  
divergenza

Esso stabilisce che il flusso di un qualunque vettore, purché continuo insieme alle sue derivate prime, attraverso una superficie chiusa è pari all'integrale della sua divergenza esteso al volume racchiuso dalla superficie.

La dimostrazione può essere fatta nella seguente maniera. Si immagini di dividere il volume racchiuso dalla superficie  $S$  in cubi infinitesimi, mediante piani paralleli ai piani  $xy$ ,  $yz$ ,  $zx$  (fig. 1.25).

Consideriamo (fig. 1.26) uno di questi cubetti.

Il flusso uscente dalla superficie del cubetto è la somma di quelli uscenti dalle sei facce. Poniamo l'attenzione sulle due faccette normali ad  $x$  (la 1 e la 2). L'intensità del campo normale alle faccette è per la 1,  $E_x$  e per la 2,  $[E_x + (\partial E_x / \partial x) dx]$ .

Il flusso complessivo uscente è

$$-E_x dy dz + \left( E_x + \frac{\partial E_x}{\partial x} dx \right) dy dz = \frac{\partial E_x}{\partial x} d\tau.$$

Analoghe relazioni si hanno per le altre due coppie di facce. Il flusso elementare uscente dalla superficie chiusa del cubetto è allora

$$(40) \quad d\phi = \left( \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) d\tau = \operatorname{div} \mathbf{E} d\tau.$$

Se si sommano le espressioni (40) per tutti i cubetti in cui il volume  $\tau$  è stato diviso, accade che la somma dei flussi al primo membro è pari al flusso uscente da  $S$ . Si osservi infatti che i flussi attraverso le pareti dei cubetti che non sono parte di  $S$  danno un contributo totale nullo alla somma dei flussi uscenti giacché ogni parete appartiene a due cubi contigui ed il flusso relativo entra due volte nella somma con segni opposti. Si ha così la (39).

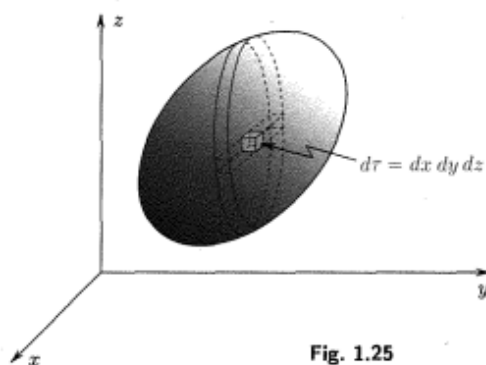


Fig. 1.25

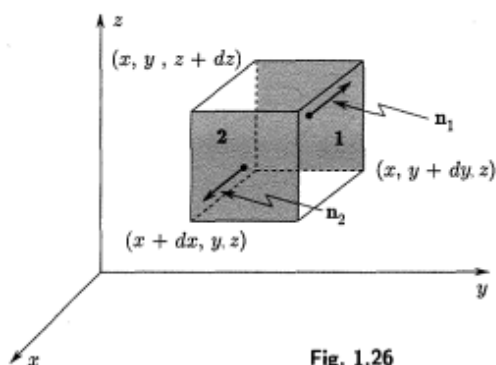


Fig. 1.26

## TEOREMA DI COULOMB

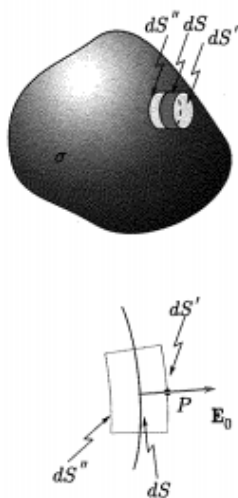


Fig. 1.38

Campo alla superficie  
di un conduttore

### f. Campo nelle vicinanze della superficie di un conduttore carico

Si abbia un conduttore carico (fig. 1.38). Come si è visto la carica in eccesso si distribuisce sulla superficie esterna  $S$  con una densità  $\sigma$  che sarà in genere funzione del punto<sup>(33)</sup>. Si vuole determinare il campo  $\mathbf{E}_0$  in un punto  $P$  fuori dalla superficie ma infinitamente prossimo ad essa (teorema di Coulomb).

Si osservi innanzitutto che il campo alla superficie del conduttore, e quindi in  $P$ , è normale alla superficie stessa; se ciò non fosse il campo alla superficie avrebbe una componente tangenziale che farebbe muovere gli elettroni e non si avrebbe una situazione di equilibrio (statica). Si consideri ora una superficie elementare di area  $dS'$ , per  $P$  parallela alla superficie del conduttore e la superficie chiusa di una figura (fig. 1.38) formata da  $dS'$ , da generatrici normali a  $S$  per l'orlo di  $dS'$  e da  $dS''$  (anche essa parallela a  $S$  come  $dS'$ ) interna ad  $S$ . La carica nel suo interno è  $\sigma dS$  ed il flusso uscente si riduce a quello attraverso  $dS' = dS$ . Infatti nell'interno del conduttore  $\mathbf{E}_0$  è zero e sulla superficie laterale del cilindro, fuori del conduttore,  $\mathbf{E}_0$  è normale ad  $\mathbf{n}$ .

Si ha così:

$$E_0 dS = \frac{\sigma dS}{\epsilon_0},$$

<sup>(33)</sup>  $\sigma$  dipende dalla curvatura della superficie (vedi par. 1.21).

cioè

(52)

$$E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}.$$

Teorema di Coulomb

È questa la conclusione del cosiddetto teorema di Coulomb.

## TEOREMA DI STOKES:

Il **teorema** di Stokes si scrive per  $\mathbf{E}_0$

$$(74) \quad \oint_C \mathbf{E}_0 \cdot d\mathbf{l} = \int_S \text{rot } \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{n} dS = \int_S (\nabla \times \mathbf{E}_0) \cdot \mathbf{n} dS,$$

essendo  $S$  una superficie qualsiasi che ha come contorno  $C$ . Se si tiene presente che poiché  $\mathbf{E}_0$  è conservativo, la circuitazione di  $\mathbf{E}_0$  (lungo una qualsiasi linea chiusa) è zero, si ha:

$$\int_S \text{rot } \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{n} dS = 0.$$

Tale relazione deve valere qualunque sia la  $S$  che ha per contorno la linea chiusa  $C$  considerata: ciò richiede che sia in ogni punto del campo elettrostatico

$$(75) \quad \text{rot } \mathbf{E}_0 = 0.$$

Il campo elettrostatico è quindi irrotazionale. La (75) costituisce la forma particolare che la seconda equazione di Maxwell assume per i casi stazionari.

La relazione <sup>(41)</sup> differenziale (75) che lega i valori di  $\mathbf{E}_0$  in punti vicini e valida punto per punto, può essere presa, al pari di

$$(76) \quad \mathbf{E}_0 = -\text{grad } V_0,$$

per esprimere la natura conservativa di  $\mathbf{E}_0$ . Si osservi che nella (75) intervengono solo le componenti di  $\mathbf{E}_0$  (con le loro derivate) mentre nella (76) interviene anche la funzione potenziale.

*Teorema di Stokes*

*Il equazione  
di Maxwell per i casi  
stazionari*

## TEOREMA DI SOVRAPPOSIZIONE:

### a. Teorema di sovrapposizione

A volte questo teorema è anche detto principio di sovrapposizione <sup>(22)</sup>. Esso discende dalla linearità della legge di Ohm e delle relazioni di Kirchhoff e si esprime: in una qualsiasi rete di generatori e resistenze la corrente in ogni punto è la somma delle correnti che vi sarebbero se ogni generatore venisse considerato separatamente e gli altri generatori venissero sostituiti da resistenze pari alle loro resistenze interne.

Con riferimento alla figura 3.34c la corrente in un ramo (per esempio attraverso  $R_3$ ) quando sono presenti contemporaneamente  $f_5$  ed  $f_1$  è pari alla somma delle correnti  $I'_3$  ed  $I''_3$  per gli schemi a e b.

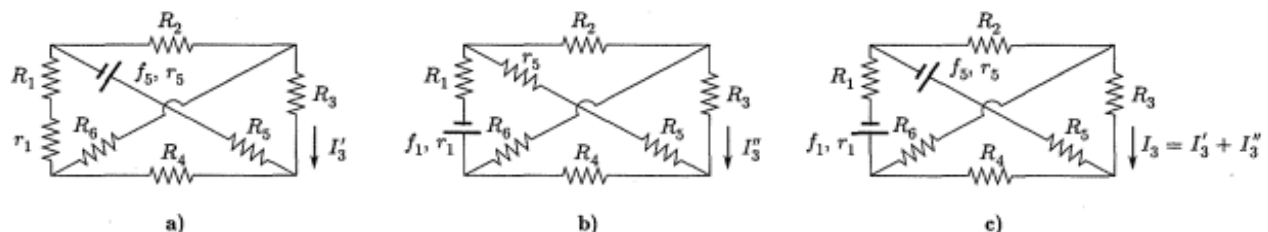


Fig. 3.34

## TEOREMA DI RECIPROCITA':

### b. Teorema di reciprocità

In una qualsiasi rete di generatori e resistenze, se una forza elettromotrice ( $f$ ) inserita in un ramo ( $i$ ) produce una corrente ( $I_j$ ) in un altro ramo ( $j$ ), la corrente che si otterrebbe in  $i$  ( $I_i$ ) inserendo la  $f$  in  $j$  è pari a  $I_j$ .

In altri termini i rapporti  $f_i/I_j$  e  $f_j/I_i$ , chiamati resistenze di trasferimento ( $R_{ij}$ ,  $R_{ji}$ ), sono uguali

$$(78) \quad R_{ij} = R_{ji}.$$

Anche questo teorema scende dalla linearità delle equazioni di Kirchhoff.

## TEOREMA DI THEVENIN:

### c. Teorema di Thevenin

In una rete di generatori e resistenze comunque complicata si considerino due punti che separano la rete in due parti: essi possono essere considerati i terminali di uscita di una prima rete e quelli di entrata di una seconda rete (fig. 3.35). La prima rete può essere sempre sostituita ai fini dei calcoli per la seconda rete mediante un semplice generatore avente forza e.m. pari alla d.d.p. a circuito aperto fra i due terminali e resistenza interna pari alla resistenza di ingresso della prima rete misurata tra i terminali stessi.

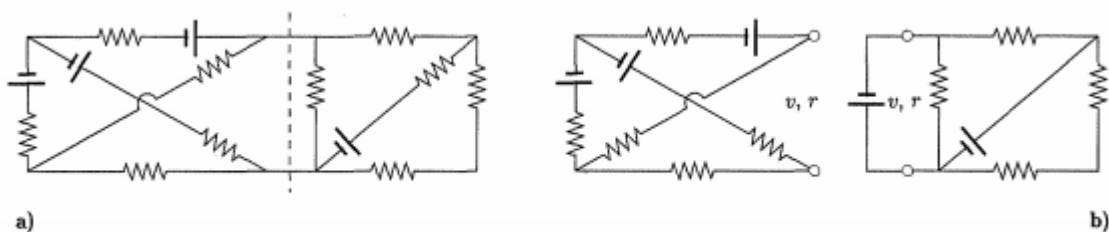


Fig. 3.35

## TEOREMA DEL MASSIMO TRASFERIMENTO DI POTENZA:

### d. Teorema del massimo trasferimento di potenza

Si consideri una rete comunque complicata di generatori e resistenze che termini in due punti ai quali è collegata una rete comunque complicata formata da elementi passivi. Il sistema può schematizzarsi sempre mediante una sorgente che ha una f.e.m.  $f$ , ed una resistenza interna  $r$ , la quale alimenti una resistenza di carico  $R_c$  (fig. 3.36). L'intensità della corrente è

$$(79) \quad I = \frac{f}{R_c + r}$$

e la potenza fornita al carico

$$(80) \quad P_c = \frac{f^2 R_c}{(R_c + r)^2}.$$

Evidentemente tale potenza cresce se  $r$  diminuisce. Supponiamo che  $r$  abbia un valore fissato e che invece  $R_c$  possa variare. La potenza  $P_c$  tende a zero sia per  $R_c$  tendente a zero sia per  $R_c$  tendente a valori molto grandi. Per ottenere il valore per cui  $P_c$  è massimo basta porre la prima derivata uguale a zero

$$(81) \quad \frac{dP_c}{dR_c} = 0 = f^2 \left[ \frac{1}{(R_c + r)^2} - \frac{2R_c}{(R_c + r)^3} \right]$$

cioè

$$(82) \quad R_c = r.$$

Che si tratti di un massimo può essere controllato osservando che la derivata seconda ha valore negativo per  $R_c = r$ .

Si ha così: una data sorgente di f.e.m. fornisce il massimo della potenza ad un carico quando la resistenza di carico uguaglia la resistenza interna del generatore.

In tali condizioni la potenza fornita al carico è

$$(83) \quad P_{c \max} = \frac{f^2}{4R_c}$$

e risulta la metà della potenza erogata dalla sorgente: l'altra metà è consumata nell'interno della sorgente stessa.

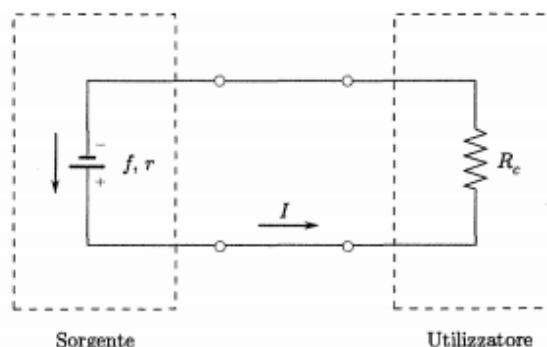


Fig. 3.36

## TEOREMA DI EQUIVALENZA DI AMPÈRE O LEGGE DELLA CIRCUITAZIONE:

Si vede quindi che una spira percorsa da corrente o una bobina di  $N$  spire si comporta sia per quanto riguarda le azioni in un campo magnetico esterno uniforme, sia per quanto riguarda il campo da essa stessa creato a distanza grande (rispetto alle sue dimensioni), in maniera analoga a quella di un dipolo elettrico in elettrostatica (teorema di equivalenza di Ampère).

È quindi logico considerare una di queste distribuzioni di corrente come un dipolo magnetico ed associare ad essa un momento magnetico. La maniera più semplice per definire il momento magnetico è la seguente: il momento magnetico di una spira piana è un vettore normale al piano della spira, diretto verso quella regione dalla quale si vede la corrente nella spira circolare in verso antiorario<sup>(26)</sup> (fig. 4.36) ed il cui modulo vale  $iS$  (in  $\text{Am}^2$ ). Essendo  $\mathbf{m}$  diretto nel verso di  $\mathbf{n}$  si ha:

$$(68) \quad \mathbf{m} = iS\mathbf{n}.$$

Nel caso di una bobina di  $N$  spire si ha:

$$(69) \quad \mathbf{m} = NiS\mathbf{n}.$$

<sup>(26)</sup> Si può anche dire nel verso nel quale avanza una vite destra che ruota come la corrente nella spira.

Teorema di equivalenza di Ampère

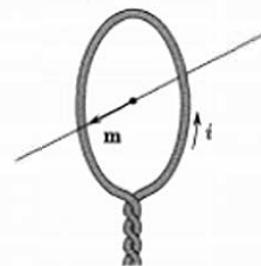


Fig. 4.36

Momento magnetico di una spira  $\mathbf{m} = iS\mathbf{n}$

Momento della coppia che agisce su un dipolo magnetico in un campo uniforme

Con tale definizione il momento della coppia che agisce sul dipolo magnetico in un campo uniforme vale

$$(70) \quad \mathcal{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}_0,$$

e l'induzione del campo creato dalla corrente circolante nella spira a grandi distanze dalla spira stessa ha componenti

$$(71) \quad \begin{aligned} B_{0r} &= \frac{\mu_0}{4\pi} 2m \frac{\cos \theta}{r^3}, \\ B_{0\theta} &= \frac{\mu_0}{4\pi} m \frac{\sin \theta}{r^3}. \end{aligned}$$

Tali espressioni corrispondono del tutto a quelle relative al dipolo elettrico.

Se si considera una spira percorsa da corrente costante in un campo magnetico esterno la (70) fornisce la coppia che su di essa si esercita. Qualora si voglia cambiare la orientazione della spira (del momento magnetico) occorre compiere un lavoro dall'esterno (positivo o negativo) e si può considerare una energia potenziale meccanica  $\mathcal{U}_{\text{mecc}}$ <sup>(27)</sup> associata alla posizione della spira nel campo  $\mathbf{B}_0$ . Si può porre

$$(72) \quad d\mathcal{U}_{\text{mecc}} = d\mathcal{L}_e = -(\text{lavoro della coppia } \mathcal{M}) = -d\mathcal{L}_M.$$

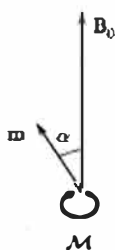
Cioè il lavoro  $d\mathcal{L}_e$  fatto dall'esterno (pari al lavoro della  $\mathcal{M}$  cambiato di segno) per una rotazione  $d\alpha$  conduce ad un aumento di  $\mathcal{U}_{\text{mecc}}$ .

Siorienta il piano determinato da  $\mathbf{B}_0$  ed  $\mathbf{m}$  (fig. 4.37), per esempio con la normale  $z$  positiva verso l'esterno del foglio e sia  $\alpha$  l'angolo orientato (verso positivo antiorario) fra  $\mathbf{B}_0$  ed  $\mathbf{m}$ . La proiezione su  $z$  di  $\mathcal{M}$  è  $\mathcal{M}_z = -mB_0 \sin \alpha$ ; il segno meno si ha giacché la coppia tende ad allineare  $\mathbf{m}$  e  $\mathbf{B}_0$ . Ne segue che il lavoro elementare di  $\mathcal{M}$  per una rotazione  $d\alpha$  di  $\mathbf{m}$  è:

$$(73) \quad d\mathcal{L}_M = \mathcal{M}_z d\alpha = -mB_0 \sin \alpha d\alpha.$$

Di conseguenza

Energia di una spira in un campo magnetico





Di conseguenza

$$(74) \quad dU_{\text{mecc}} = mB_0 \sin \alpha d\alpha.$$

Quello che interessa sono le variazioni di energia potenziale fra le varie posizioni e noi possiamo porre uguale a zero l'energia potenziale meccanica in una qualsiasi posizione. Se si sceglie (in analogia a quanto si è fatto per i dipoli elettrici) di porre zero l'energia potenziale meccanica quando  $\mathbf{m}$  e  $\mathbf{B}_0$  sono normali fra loro ( $\alpha = \pi/2$ ), l'energia potenziale meccanica in una qualsiasi posizione  $\alpha$  è pari al lavoro che agenti esterni devono compiere per portare  $\mathbf{m}$  dalla posizione  $\alpha = \pi/2$  a  $\alpha$

$$(75) \quad U_{\text{mecc}} = mB \int_{\pi/2}^{\alpha} \sin \alpha d\alpha = -mB_0 \cos \alpha = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}_0.$$

Il segno negativo indica che la coppia che si esercita sulla spira tende ad allineare  $\mathbf{m}$  e  $\mathbf{B}_0$  sicché questa è la posizione di energia minima.

Anche questa relazione è analoga a quella elettrostatica

$$(76) \quad U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}_0.$$

### TEOREMA DI SOVRAPPOSIZIONE, RECIPROCITA', THEVENIN, MASSIMO TRASFERIMENTO DI POTENZA:

*Teorema di sovrapposizione:* se una rete di impedenze lineari contiene più di un generatore, la corrente che passa in un qualsiasi punto è la somma delle correnti che ciascun generatore da solo farebbe circolare qualora gli altri generatori fossero sostituiti da impedenze pari alla loro impedenza interna.

*Teorema di sovrapposizione*

*Teorema di reciprocità:* se una f.e.m. applicata in un ramo di una rete di impedenze lineari produce una certa corrente in un altro ramo qualsiasi, la stessa f.e.m., se inserita in quest'ultimo ramo, produrrebbe la stessa corrente nel primo ramo.

*Teorema di reciprocità*

*Teorema di Thevenin:* una qualsiasi rete formata da impedenze lineari e generatori che ha due terminali può essere sostituita da una f.e.m. che agisce in serie con una impedenza. La f.e.m. è pari alla d.d.p. ai terminali a circuito aperto e l'impedenza è l'impedenza vista ai terminali quando tutti i generatori nella rete sono stati sostituiti da impedenze uguali alle loro impedenze interne.

*Teorema di Thevenin*

La dimostrazione di questi tre teoremi si basa sulla linearità delle equazioni di Kirchhoff ed è immediata.

*Teorema del massimo trasferimento di potenza:* una qualsiasi rete a due terminali assorbe la massima potenza da un generatore quando l'impedenza di carico è coniugata della impedenza interna del generatore. Questo sarà dimostrato al par. 7.6.

*Teorema del massimo trasferimento di potenza*