FisicaGermano

orchi.1736578 [1]

September 2020

[1] Attenzione: per semplicità nella scrittura le formule non comprendono la notazione vettoriale

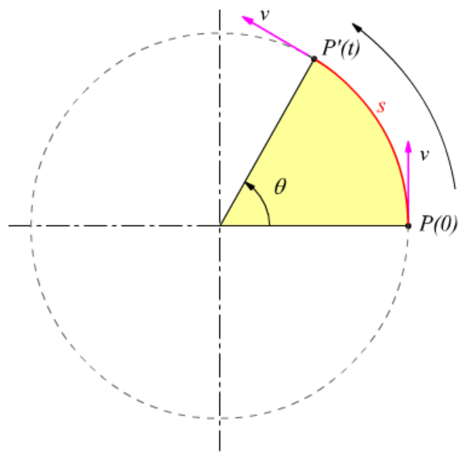
Contents

Chapter 1

Moti cinematica

1.1 Moto circolare

Moto in cui la traiettoria è circolare, velocità e l'accelerazione variano in funzione del cambiamento di direzione del moto.



Relazione tra angolo, spazio percorso e raggio:

$S = R\theta$

Inoltre:

$v = \frac{s}{t}$ velocità $a = \frac{v}{t}$ accelerazione $\omega = \frac{\theta}{t}$ velocità angolare

Quindi si puo scrivere, date le relazioni precedenti della velocità e la relazione angolo,spazio,raggio:

$v = \frac{s}{t} = \frac{R\theta}{t} = \omega R$

Accelerazioni:

Nel moto circolare abbiamo l'accelerazione centripeta/normale e l'accelerazione tangenziale.

Possiamo ricavare l'accelerazione(vedi per approfondimento) dalla definizione: $a = \frac{dv}{dt}$ con $v = \omega \times R$ quindi:

$a = \frac{d(\omega \times R)}{dt} = \omega \frac{dR}{dt} + R \frac{d\omega}{dt}$ Questi due termini rappresentano: l'accelerazione normale ($\omega \frac{dR}{dt} = \omega \times v = \omega \times (\omega \times R)$) l'accelerazione tangenziale ($R \frac{d\omega}{dt} = \alpha R$) (Presente solo se il moto è accelerato)

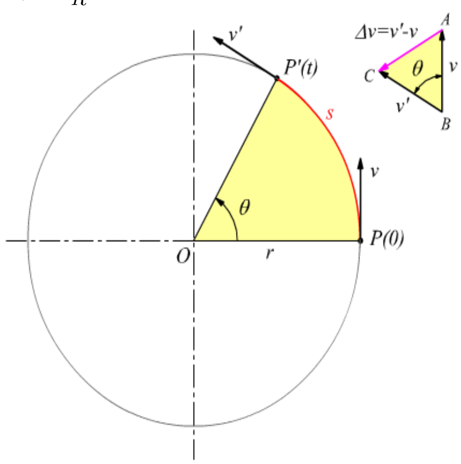
1.1.1 Moto circolare uniforme

La velocità rimane costante in modulo ma cambia in verso.

Per trovare l'accelerazione, possiamo andare a considerare la differenza $\Delta V = v' - v$ in rapporto al tempo t che il punto impiega per anadre dal punto P al punto P' e notiamo che se lo spostamento è piccolo (l'arco PP' è piccolo), il triangolo formato dalla velocità(ABC) e quello OPP' sono simili, quindi possiamo stabilire la relazione che:

$\frac{\Delta v}{v} = \frac{s}{R}$ quindi $\Delta v = svR$ cioè $\frac{\Delta v}{t} = \frac{v^2}{R}$ Quindi abbiamo trovato il modulo e il verso dell'accelerazione centripeta.

$a_t = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$



L'accelerazione tangenziale è nulla. Questo si può anche dimostrare tramite la formula precedente: $a = \frac{dv}{dt}$ che mi da l'accelerazione tangenziale ($R \frac{d\omega}{dt} = \alpha R$). Si nota che quando ω è costante, la sua derivata è nulla e quindi, questa, non è presente come componente.

1.2 Moti relativi

Un moto relativo è un moto relativo ad un determinato sistema di riferimento. Quindi si deve sempre specificare il sistema di riferimento usato per descrivere i fenomeni fisici che si studiano.

1.2.1 Sistema di riferimento inerziale

Sistema che si muove di moto rettilineo uniforme rispetto ad un altro, cioè con velocità costante rispetto ad esso.

Calcoliamo, dati due sistemi di riferimento inerziali, le formule per calcolare la posizione di un corpo in uno dei due sistemi, conoscendo la posizione dell'altro.(esempio).

Sistema di riferimento S fisso e S' secondo sdr che si muove di moto rettilineo uniforme con velocità costante pari a v.

Ho la posizione X' nel sistema di riferimento S', come calcolo questa rispetto il sistema di riferimento S?

Mi calcolo lo spostamento dell'origine di S' nel tempo: $x_0 = vt$ Quindi $x = x' + x_0 = x' + vt$ posizione relativa ad S e quindi $x' = x - vt$ posizione relativa ad S'.

Come calcolare la velocità relativa conoscendo la velocità di trascinamento di un sistema rispetto all'altro.(esempio)

Velocità v rilevata da un osservatore in un sistema di riferimento S, conoscendo la velocità v'(Velocità relativa) rilevata da un osservatore in un sistema S' inerziale rispetto al primo.

$v = v_0 + v'$ Velocità rilevata dall'osservatore in S.
v_0 è la velocità di trascinamento, velocità di S' rispetto ad S.

Per quanto riguarda l'accelerazione, notiamo che non cambia:
$v' = v - v_0$ derivando $\frac{dv'}{dt} = \frac{dv}{dt} + \frac{dv_0}{dt}$ notiamo che essendo v_0 costante, la sua derivata è nulla. Quindi abbiamo che:

$$\frac{dv'}{dt} = \frac{dv}{dt} \text{ quindi } a' = a.$$

Le accelerazioni nei due sistemi di riferimento S e S' sono uguali.

1.2.2 Sistema di riferimento non inerziale e forze apparenti

Sistema che accelera rispetto ad un altro. In questo sistema non vale il primo principio della dinamica, quindi non vale neanche la seconda legge di Newton: $F = ma$.

Una forza apparente è una forza che si manifesta per un osservatore in un sistema di riferimento non inerziale e che non viene osservata nei sistemi inerziali. Consideriamo due sistemi di riferimento S e S', dove S' è in moto uniformemente accelerato l'asse x (vedi).
Sappiamo che:
$x' = x - x_0$ con x_0 in questo caso che indica la posizione in base alla formula del moto uniformemente accelerato: $x_0 = x_i + vt + \frac{1}{2}at^2$
Quindi: $x' = x - x_{0i} - v_{0i}t - \frac{1}{2}a_0t^2$
Troviamo la velocità, derivando l'equazione:

$v' = v - v_{0i} - a_0 t$
Deriviamo ancora e troviamo l'accelerazione relativa in un sistema non inerziale:
$a' = a - a_0$

Moltiplicando per la massa troviamo che:

$$F' = F - F_{app}$$

1.2.3 Sistemi in moto rotatorio e accelerazione di Coriolis

S sistema fisso
S' sistema che si muove di moto circolare uniforme attorno alla propria origine
Origini O e O' coincidenti.
(vedi)
Relazione velocità di un punto P in movimento.

Il sistema mobile S' ha velocita angolare ω costante. E, avendo i due sistemi stessa origine, la posizione del punto P è uguale per entrambi i sistemi: $r' = r$.
Relazione delle velocità:
$v = \frac{dr'}{dt} = \frac{dr}{dt}$ nel sistema S' però, oltre a variare le coordinate dei versori(i, j, k), cambiano anche i versi(poichè ruota), quindi la derivata è più complessa.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r'}}{dt} = \frac{dx'}{dt}\hat{i}' + \frac{dy'}{dt}\hat{j}' + \frac{dz'}{dt}\hat{k}' + x'\frac{d\hat{i}'}{dt} + y'\frac{d\hat{j}'}{dt} + z'\frac{d\hat{k}'}{dt}$$

I primi tre termini che abbiamo scritto forniscono la velocità del punto P rispetto al sistema di riferimento mobile S'. Gli ultimi tre termini posso essere riscritti ricorrendo alle formule di formule di Poisson, secondo le quali:

$$\frac{d\hat{i}'}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{i}' \quad ; \quad \frac{d\hat{j}'}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{j}' \quad ; \quad \frac{d\hat{k}'}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{k}'$$

dove $\times$ denota il prodotto vettoriale. Le direzioni di ogni singolo versore del sistema mobile S' cambiano continuamente direzione, ma le loro posizioni reciproche rimangono fisse. I tre versori in qualunque istante di tempo rimangono sempre perpendicolari gli uni agli altri e ruotano tutti e tre in modo solidale con la stessa velocità angolare ω, esattamente come un corpo rigido.

Se facciamo uso delle formule di Poisson, possiamo riscrivere gli ultimi tre termini dell'equazione della velocità $\vec{v}$ nel modo seguente:

$$x'\frac{d\hat{i}'}{dt} + y'\frac{d\hat{j}'}{dt} + z'\frac{d\hat{k}'}{dt} = x'(\vec{\omega} \times \hat{i}') + y'(\vec{\omega} \times \hat{j}') + z'(\vec{\omega} \times \hat{k}')$$

Quindi ricaveremo:

$$v = v' + \omega r'$$

Possiamo ricavare l'accelerazione allo stesso modo, derivando la velocità:
$\frac{dv}{dt} = \frac{(}{dv'+\omega r')}dt = \frac{dv'}{dt} + \frac{d}{dt}(\omega \times r')$
Come prima, bisogna sviluppare la derivata: Alla fine troviamo:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v'}}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r'} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r'}}{dt}$$

Possiamo cancellare il termine in cui compare la derivata della velocità angolare $\vec{\omega}$ rispetto al tempo, perché essa è costante. La derivata della posizione $\vec{r'}$ può essere riscritta mediante la formula che abbiamo ricavato in precedenza.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v'}}{dt} + \vec{\omega} \times \left(\vec{v'} + \vec{\omega} \times \vec{r'}\right)$$

Appoggiandoci a quanto già fatto per la velocità, calcoliamo la derivata di v' rispetto al tempo.

$$\frac{d\vec{v'}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r'}}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx'}{dt}\hat{\imath}' + \frac{dy'}{dt}\hat{\jmath}' + \frac{dz'}{dt}\hat{k}' + x'\frac{d\hat{\imath}'}{dt} + y'\frac{d\hat{\jmath}'}{dt} + z'\frac{d\hat{k}'}{dt}\right) =$$

$$= \frac{d^2x'}{dt^2}\hat{\imath}' + \frac{d^2y'}{dt^2}\hat{\jmath}' + \frac{d^2z'}{dt^2}\hat{k}' + \frac{dx'}{dt}\frac{d\hat{\imath}}{dt} + \frac{dy'}{dt}\frac{d\hat{\jmath}}{dt} + \frac{dz'}{dt}\frac{d\hat{k}}{dt}$$

I primi tre termini ci danno le componenti dell'accelerazione $\vec{a'}$ di P osservata nel sistema mobile S', mentre per gli ultimi tre termini possiamo di nuovo applicare le formule di Poisson.

$$\frac{d\vec{v'}}{dt} = \vec{a'} + \frac{dx'}{dt}(\vec{\omega} \times \hat{\imath}) + \frac{dy'}{dt}(\vec{\omega} \times \hat{\jmath}) + \frac{dz'}{dt}(\vec{\omega} \times \hat{k}) =$$

$$= \vec{a'} + \vec{\omega} \times \left(\frac{dx'}{dt}\hat{\imath}' + \frac{dy'}{dt}\hat{\jmath}' + \frac{dz'}{dt}\hat{k}'\right) =$$

$$= \vec{a'} + \vec{\omega} \times \vec{v'}$$

$$a = a' + 2\omega \times v' + \omega \times (\omega \times r')$$

con $2\omega \times v'$ accelerazione di Coriolis
e $\omega \times (\omega \times r')$ accelerazione centrifuga.

La forza di Coriolis dunque è una forza apparente osservata nei sistemi non inerziali in rotazione, che agisce sui corpi in moto rispetto al sistema di riferimento non inerziale e che ha l'effetto apparente di far deviare i corpi da una traiettoria rettilinea.

La forza di Coriolis c'è poiche consideriamo che il punto ha una velocità propria v' rispetto al sistema ruotante.

1.3 Moto Armonico

1.3.1 Moto Armonico Semplice

Compare quando ci sono delle oscillazioni. C'è una forza elastica che esprime una forza di richiamo, proporzionale allo spostamento. $F = -kx\widehat{x}$
Cerchiamo la soluzione dell'equazione:

$$F = ma = m\frac{dx^2}{dt} \text{ quindi } m\frac{dx^2}{dt} = -kx \text{ e quindi } \frac{dx^2}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$$

Con $\frac{k}{m} = \omega_0^2$ (Ricorda il moto armonico della proiezione di un punto che si muove di moto circolare uniforme: la sua proiezione sugli assi si muove di moto armonico di pulsazione $\omega_0 = 2\pi T$)

Quindi cerchiamo la soluzione di $\ddot{x} + \omega_0 x = 0$
$x(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + .. + a_n t^n$ una serie infinita, da provare come soluzione.
Sostituiamo nell'equazione. Dobbiamo prima derivare.
$\dot{x} = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + ...$
$\ddot{x} = 2a_2 + (3*2)a_3 t + (4*3)a_4 t^2 + (5*4)a_5 t^3 + ...$
Sostituisco:

$$2a_2 + (3*2)a_3 t + (4*3)a_4 t^2 + (5*4)a_5 t^3 + ... + (a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + .. + a_n t^n) * \omega_0^2 = 0$$

questo ha soluzione se e solo se tutti i coefficienti sono uguali a 0. Quindi

$$2a_2 + a_0\omega_0^2 = 0 \text{ (potenza 0)}$$
$$(3*2)a_3 + a_1\omega_0^2 = 0 \text{ (potenza 1)}$$
$$\text{e così via.}$$

Adesso posso esprimere i coefficienti in funzione delle a_0 e delle a_1 (Le quali dipendono dalle condizioni iniziali).

$$a_2 = -\frac{\omega_0^2}{2}a_0$$

$$a_3 = -\frac{\omega_0^2}{3*2}a_1$$

Continuo euguagliando le altre potenze e trovo:

$$a_4 = \frac{\omega_0^4}{4*3*2}a_0$$

$$a_5 = \frac{\omega_0^4}{5*4*3*2}a_1$$

$$...$$

Vado a sostituire all'equazione e ragruppo per a_0 e a_1.

$$x = a_0(1 - \frac{(\omega_0 t)^2}{2!} + \frac{\omega_0 t)^4}{4!} + ...) + \frac{a_1}{\omega_0}(\omega_0 t - \frac{(\omega_0 t)^3}{3!} + \frac{(\omega_0 t)^5}{8!} + ...)$$

La prima parte è lo sviluppo in serie del $cos(\omega_0 t)$ mentre la seconda parte è lo sviluppo del $sen(\omega_0 t)$ quindi:

$$x = a_0 cos(\omega_0 t) + \frac{a_1}{\omega_0} sin(\omega_0 t)$$

$$\dot{x} = -a_0 \omega_0 sin(\omega_0 t) + a_1 cos(\omega_0 t)$$

E quindi mi trovo le due condizioni iniziali($t = 0$):

$$x(0) = a_0 \text{ e } v(0) = a_1$$

La soluzione sarà del tipo

$$Acos(\omega_0 t) + Bsen(\omega_0 t) \text{ con } A = x_0 \text{ e } B = \frac{v_0}{\omega_0}$$

oppure

$$x = Ccos(\omega_0 t + \phi) \text{ Con } C \text{ e } \phi \text{ legate ad } A \text{ e } B\text{:}$$

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{x(0)^2 + (\frac{v(0)}{\omega_0})^2}$$

$$\phi = -arctan(\frac{B}{A}) = -arctan(\frac{v(0)}{\omega_0 x(0)})$$

1.3.2 Moto Armonico Smorzato

Smorzamento dovuto ad un fluido. Quindi ho una forza proporzionale alla velocità.
$F = -kx - bv$ quindi $-kx - b\dot{x} = m\ddot{x}$.
Dobbiamo trovare la soluzione all'equazione:

$$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

Si prova una dipendenza dal tempo esponenziale. Quindi porvo

$$x = Ae^{\lambda t} \ \dot{x} = A\lambda e^{\lambda t} \ \ddot{x} = A\lambda^2 e^{\lambda t}$$

Posso eliminare $Ae^{\lambda t}$ poichè è comune a tutti i termini, allora sostituendo avrò:

$$\lambda^2 + \frac{b}{m}\lambda + \omega_0^2 = 0$$

Come soluzioni avremo:

- $\lambda_+ = -\frac{b}{2m} + \sqrt{(\frac{b}{2m})^2 - \omega_0^2}$
- $\lambda_- = -\lambda_+$

Quindi, come soluzione avrò:

$$x = A_+ e^{\lambda_+ t} + A_- e^{\lambda_- t}$$

Ho 3 casi:

1. Oscillazione piccola $\rightarrow \frac{b}{2m} < \omega_0$ (Numeri complessi) Come soluzione finale avrò:

$$x(t) = Ae^{-\frac{b}{2m}t}cos(\omega t + \phi) \text{ con } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - (\frac{b}{2m})^2}$$

2. Oscillazione grande $\rightarrow \frac{b}{2m} > \omega_0$ Come soluzione finale avrò:

$$x = A_+e^{\lambda_+ t} + A_-e^{\lambda_- t} \text{ con } \lambda \text{ reale}$$

3. Radice nulla. (Smorzamento critico) Come soluzione avrò:

$$x(A_1 + A_2t)e^{-\frac{b}{2m}t}$$

1.3.3 Pendolo semplice

Sistema oscillante, con una massa M tenuta da un filo inestensibile vincolato a muoversi su un supporto fisso.
Oscilla intorno alla posizione di equilibrio dovuta alla forza di gravità.

$$F = ma \text{ e troviamo che } -mgsin\theta = m\ddot{s}$$

$$-mgcos\theta + T = \frac{mv^2}{l} \text{(l lunghezza del filo)}$$

Dove $-mgsin\theta$ rappresenta la forza lungo la direzione della traiettoria e $-mgcos\theta$ è la forza lungo la normale. Quindi:

$$\ddot{s} + gsin(\frac{s}{l}) = 0 \ (\theta = \frac{s}{l})$$

Possiamo fare un approssimazione per piccole oscillazioni, quindi $\theta = sin\theta = \frac{s}{l}$ e troviamo:

$$\ddot{s} + \frac{g}{l}s = 0 \text{ equazione del moto armonico.}$$

Con $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$ e quindi periodo del moto $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.(Per piccole oscillazioni osservare che non dipende dall'ampiezza). Osserviamo anche che con un pendolo possiamo misurare la gravità.
Inoltre:

$$T - mgcos\theta = \frac{mv^2}{l}$$

Si nota che quando il pendolo si muove, la tensione deve sopportare una forza maggiore.

Si può calcolare la velocità tramite lo studio dell'energia. Se parto da un angolo θ con $v_0 = 0$, essendo solo forze conservative, avrò $\Delta T + \Delta U = 0$. Con

$$T_i = 0 \text{ e } T_f = \frac{1}{2}mv^2$$

$$U_i = mgh \text{ e } U_f = 0$$

Con $h = l - lcos\theta = l(1 - cos\theta)$.

Chapter 2

Forza

2.1 Forza Conservativa

Una forza è conservativa se il lavoro compiuto su un corpo lungo una linea chiusa è nullo. Ad esempio la forza di gravità:
Pallina lanciata in aria. Forza gravitazionale verso il basso e spostamento verso l'alto, allora lavoro negativo. Quando la pallina scende il lavoro è positivo. Quindi in un percorso chiuso la somma del lavoro compiuto è nullo.
Anche la forza elastica è conservativa. Mentre la forza di attrito no, poichè è sempre parallela e discorde allo spostamento, per cui in un percorso chiuso il lavoro è sempre negativo.

Il lavoro di una forza conservativa da A a B non dipende dal cammino scelto per andare da A a B.

Le forze conservative sono importanti poichè ad esse si può associare l'energia potenziale.

2.1.1 Energia Potenziale

Ogni corpo soggetto ad una forza conservativa ha una propria energia potenziale. La variazione di energia potenziale è uguale al lavoro cambiato di segno: $\Delta U = -L$

Possiamo parlare di energia potenziale solo per le forze conservative poichè se posizione finale ed iniziale coincidono allora $U_f = U_i$. Quindi abbiamo 0 al primo membro e se la forza è conservativa anche al secondo membro $L = 0$.

Osserviamo che a partire dall'energia potenziale, grazie al gradiente, possiamo ricavarci la forza.

2.1.2 Energia meccanica

$E = T + U$ in presenza di forse conservative vale il principio della conservazione dell'energia: L'energia meccanica si conserva.

$L = \Delta T$ il lavoro compiuto da una forza comporta una variazione di energia cinetica del corpo soggetto alla forza(Teo. energia cinetica)

$L = -\Delta U$ dalla definizione di energia potenziale per una forza conservativa

Dunque in presenza di forse conservative $\Delta T = \Delta U$. Quindi $T_f - T_i = -U_f + U_i$ cioè:

$T_i + U_i = T_f + U_f$ Principio della conservazione dell'energia meccanica $E_f = E_i$

Chapter 3

Urti

Impatto tra due corpi in cui le forze esterne sono trascurabili rispetto alle forze generate dal sistema formato dai due corpi.

3.1 Urto elastico

Urto in cui:

Si conserva la quantità di moto.

Si conserva l'energia cinetica del sistema.

Questo avviene quando i corpi non si deformano a causa dell'urto.

3.2 Urto anelastico

Urto in cui:

Si conserva la quantità di moto.

Non si conserva l'energia cinetica.

3.2.1 Urto completamente anelastico

Questo avvine quando i due corpi dopo l'urto continuano a camminare insieme. In questo caso, si conserva la quantità di moto, ma la formula cambia in:

$$m_1 v_{i1} + m_2 v_{i2} = (m_1 + m_2) v_f \text{ la velocità finale è una sola}$$

Chapter 4

Dinamica e Corpi Rigidi

Centro di massa: $r_{cm} = \frac{1}{M} \sum m_i r_i$

Deriviamo e moltiplichiamo per M:

$$Mv_{c_m} = \sum m_i v_i = P$$

Deriviamo nuovamente:

$$Ma_{cm} = \sum m_i a_i = F_{tot}$$

Momento della forza risultante: $M = \sum r_i \times F_i$ e Momento della forza rispetto un polo O: $M = \sum (r - r_o) \times F = \sum (r - r_o) \times \frac{dp}{dt}$

Momento angolare del sistema rispetto un polo O:

$L_O = \sum r'_i \times p_i$ con $r'_i = r_i - r_o$ posizione del punto i-esimo nel sistema di riferimento del polo.

Derivando utilizzando la regola di derivazione del prodotto:

$$\frac{dL_O}{dt} = (\sum \frac{dr_i}{dt} \times p_i - \sum \frac{dr_o}{dt} \times p_i) + \sum r'_i \times \frac{dp_i}{dt}$$

Considerando che, il primo termine è nullo(I vettori sono paralleli), il secondo è pari a $v_o \times P$ e il terzo pari a M abbiamo:

$$\frac{dL_O}{dt} = M - v_o \times P$$

3.1. Teorema del momento angolare

Nel riferimento inerziale di figura 3 si consideri il momento della forza $\mathbf{F}$ applicata ad un punto, rispetto ad un polo Q:

$$\mathbf{M} = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q) \times \mathbf{F} = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q) \times \frac{d\mathbf{p}}{dt},$$

ed il momento angolare del punto materiale rispetto allo *stesso polo*,

$$\mathbf{L} = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q) \times \mathbf{p}.$$

Derivando rispetto al tempo, si ha

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} - \frac{d\mathbf{r}_Q}{dt} \times \mathbf{p} + (\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q) \times \frac{d\mathbf{p}}{dt},$$

ed osservando che il primo termine del secondo membro è nullo, perché i due vettori sono paralleli, si ha

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = -\mathbf{v}_Q \times \mathbf{p} + \mathbf{M}.$$

Da quest'ultima relazione si ottiene:

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} + \mathbf{v}_Q \times \mathbf{p}. \quad (9)$$

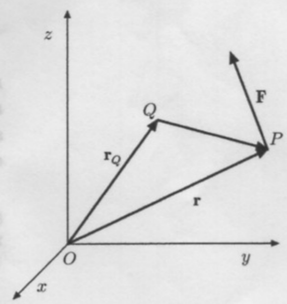


Fig. 9.3

Le quazioni cardinali descrivono il moto di un corpo rigido.

4.1 Prima Equazione Cardinale

Corrisponde al secondo principio della dinamica($F = ma$) e descrive il moto traslatorio di un sistema.

Il centro di massa si muove come un punto materiale con massa pari alla massa di tutto il sistema e soggetto ad una forza uguale alla risultante delle forze esterne agenti:

$F = \frac{dp}{dt} = M\frac{dv}{dt}$ con F risultante delle forze esterne agenti sul sistema, P quantità di moto totale del sistema ed M la massa totale del sistema

Se $F = 0$ allora la P del sistema è costante: Legge di conservazione della quantità di moto.

4.2 Seconda Equazione Cardinale

Descrive il moto rotatorio di un sistema.

Il momento angolare del sistema è dato da:

$\frac{dL}{dt} = M - v_o \times P$ con L momento angolare del sistema, M momento meccanico totale che agisce sul sistema, P quantità di moto del sistema, v_o velocità del polo.

Se la velocità del polo è nulla o se è parallela al vettore P l'equazione diventa $M = \frac{dL}{dt}$. Se $M = 0$ abbiamo la Conservazione del Momento Angolare.

4.3 Terza Equazione Cardinale

Non trattata da me.

4.4 Energia cinetica e Teorema di König

In un sistema si può esprimere l'energia cinetica come:

$$T = \frac{1}{2} \sum m_j v_j^2$$

Oppure utilizzando il moto del centro di massa:

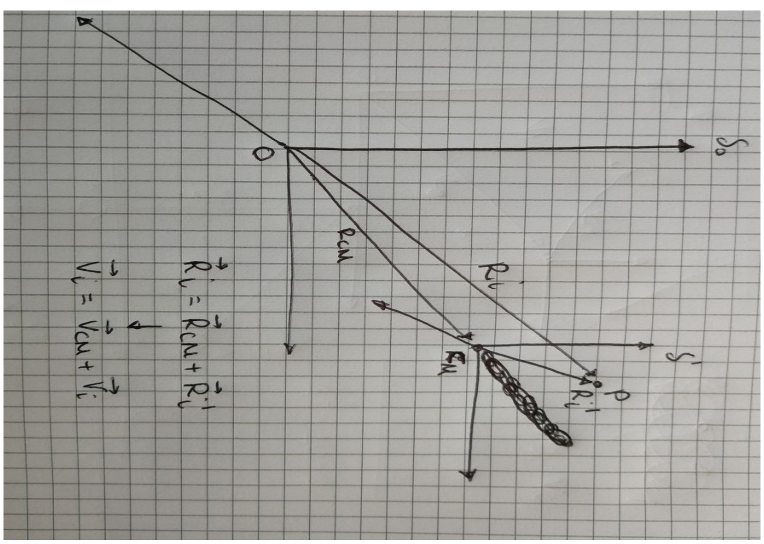
$$v_c = \frac{dr_c}{dt}$$

possiamo dire:
Se si considerano i due sistemi S e S' (il quale ha origine nel centro di massa del sistema e che si sposta con esso di moto traslatorio), abbiamo che:

$$r_i = r_{cm} + r_i'$$

Quindi

$$v_i = v_{cm} + v_i' \text{ essendo } v_{cm} \text{ la velocità del centro di massa in } S$$



Quindi:

$$T = \frac{1}{2} \sum m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum m_i v_i * v_i = \frac{1}{2} \sum m_i (v_{cm} + v_i') * (v_{cm} + v_i') = \frac{1}{2} \sum m_i v_{cm}^2 + \frac{1}{2} \sum m_i v_i'^2 + \sum m_i v_{cm} v_i'$$

Si nota che l'ultimo termine è 0:

$$\sum m_i v_{cm} v'_i = v_{cm} \sum m_i v'_i \text{ dove } \sum m_i v'_i = m v'_{cm}$$

poichè posso esprimere la qnt di moto come prodotto della massa per la velocità del centro di massa. v'_{cm} è la velocità del centro di massa nel sistema S'. Quindi è nulla.
E quindi:

$$T = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} \sum m_i v_i'^2 \text{ Teorema di König}$$

L'energia cinetica di un sistema di punti è pari all'energia cinetica propria nel sistema del centro di massa più l'energia di traslazione del centro di massa.

4.5 Teorema di Huygens-Steiner

Permette di calcolare il momento d'inerzia di un soldio rispetto ad un asse parallelo a quello passante per il centro di massa.

Il momento d'inerzia rispetto ad un asse a, parallelo ad un altro c passante per il centro di massa si ottiene sommando al momento d'inerzia rispetto a c il prodotto tra la massa del corpo e il quadrato della distanza tra gli assi c e a.

$$I_a = I_{cm} + md^2 \text{ dove } d \text{ è la distanza tra i due assi } c \text{ e } a.$$

Chapter 5

Elettrostatica

Fenomeni elttrici tra cariche che sono immobili nello spazio.

$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2}\hat{r}$ Forza di Coulomb fra cariche puntiformi

$E = \frac{F}{q}$ Campo elettrico

$U = Fdl$ Energia potenziale , F forza di Coulomb(E' conservativa quindi possiamo parlare di energia potenziale).

$V = \frac{U}{q} = Edl$ Potenziale elettrico (Energia potenziale per unità di carica).

$u = \frac{U}{\tau} = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$ Densità di energia di un campo elettrico(Valore di energia per unità di volume), con τ volume in cui c'è il campo elettrico.

5.1 Legge di Gauss

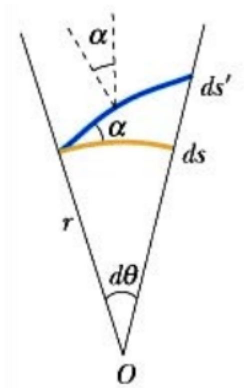
La legge di Gauss permette di calcolare il campo elettrico per distribuzioni con determinate simmetrie.

$$\phi_S(E_0) = \int_S E_0 \bullet dS = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}$$

Il Flusso del campo elettrico attraverso una superficie chiusa è pari al rapporto tra la carica contenuta nella superficie stessa ed ϵ_0. (vedi).

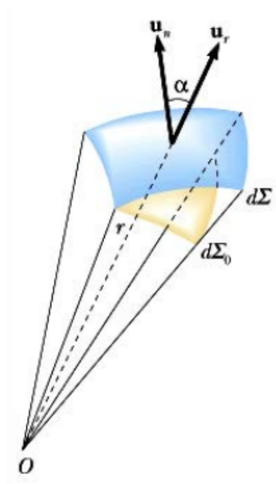
5.1.1 Angolo solido

L'angolo solido è l'estensione tridimensionale dell'angolo piano. $d\Theta = \frac{dS' cos\alpha}{r} = \frac{dS}{r}$ Preso un elemento dS di superficie, dS_0 la sua proiezione, u_n la normale della



superficie dS e u_r il versore del raggio r uscente dal punto di osservazione O, definiamo l'angolo solido come:

$$d\Omega = \frac{dS cos\alpha}{r^2} = \frac{dS_0}{r^2}$$

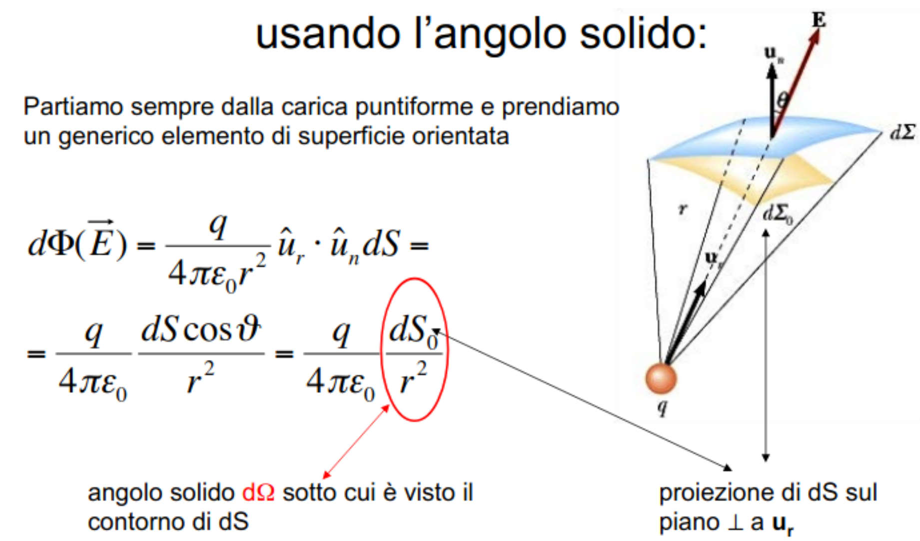


Quindi possiamo dimostrare la legge di Gauss:

Prendiamo un generico elemento della superficie orientata, sappiamo che il flusso elementare di E_0 di una carica puntiforme vale:

$$d\phi_S(E_0) = E_0 \cdot \hat{n} dS = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{u_r} \cdot \hat{u_n} dS$$

Avrò:



Quindi il flusso di E di una carica puntiforme, grazie alla dipendenza da $\frac{1}{r^2}$, dipende solo dall'angolo solido e non dalla distanza da q o dalla superficie.

Quindi $d\phi(E_0) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{dScos\theta}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}d\Omega$

Il flusso attraverso la superficie finita S vale allora

$$\Phi(\vec{E}) = \int_S \vec{E} \cdot \hat{u}_n dS =$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int d\Omega = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \Omega$$

Passando ora ad una superficie chiusa dobbiamo distinguere
i casi in cui
•carica interna
•carica esterna

Se la carica è interna alla superficie chiusa, si sommano tutti i contributi, poichè hanno lo stesso segno:

$\phi(E_0) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_S d\Omega = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} 4\pi = \frac{q}{\epsilon_0}$ Poichè l'angolo solido totale di una superficie chiusa è 4π

Altrimenti, se la carica è esterna, gli elementi saranno a due a due di segno opposto(Un contributo che entra nella superficie e uno che ne esce), quindi avremo che il flusso è 0.

Questo verifica la legge di Gauss.

5.1.2 Teorema della divergenza

$$\phi(E_0) = \int_S E \cdot \hat{n} dS = \int_\tau divE d\tau$$

Esso stabilisce che il flusso di un qualunque vettore, purchè continuo insieme alle sue derivate prime, attraverso una superficie chiusa è pari all'integrale della sua divergenza esteso al volume racchiuso dalla superficie.
L'operatore divergenza indica, per un qualsiasi vettore, in un prodotto scalare:

$$\nabla \bullet E = divE = \frac{\delta E}{\delta x} + \frac{\delta E}{\delta y} + \frac{\delta E}{\delta z}$$

5.2 Teorema del Rotore(Stokes)

L'integrale di linea diventa un integrale di superficie:

$$\oint_S Bdl = \int rotBdS$$

5.3 Campo elettrostatico nei Dielettrici

In un dielettrico(Un corpo isolante) non ci sono cariche libere di muoversi, ma si possono creare delle perturbazioni dello stato di equilibrio che vanno ad orientare i dipoli che costituiscono il materiale. Queste perturbazioni vengono generate dall'applicazione di un campo elettrostatico sul dielettrico.

Avrò quindi:

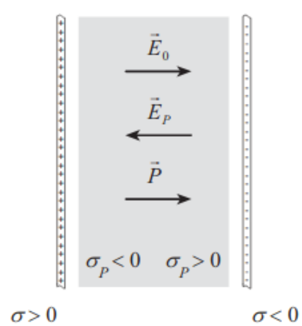
ρ_{libere} Densità cariche che esistono anche senza il campo

$\rho_{polarizzazione}$ Densità cariche dovute alla presenza del dielettrico

Quindi avrò che, la prima equazione di Maxwell diventerà:

$$divE_0 = \frac{\rho_l + \rho_p}{\epsilon_0}$$

Esperienza condensatore(Faraday):



Condensatore piano nel vuoto con quantità di carica Q, quindi:

$$C_0 = \frac{Q}{V} = \epsilon_0 \frac{S}{d}$$

$$E_0 = \frac{\sigma_l}{\epsilon_0}$$

$$V_0 = E_0 d$$

Se inserisco una lastra di dielettrico tra le armature, vedo che la ddp diminuisce.

Questo perchè si osserva che $C = \epsilon_r C_0$. Quindi, l'aumento della capacità relativo all'inserimento del dielettrico tra le armature corrisponde alla diminuzione della differenza di potenziale V presente tra le armature(Se Q è fissata).

Quindi, essendo $V = Ed$ nel dielettrico ci sarà un campo elettrico $E < E_0$. Per avere ciò devo avere:

$$\sigma_{pol} < \sigma_{lib}$$

Questo si può notare dal fatto che, il campo totale presente all'interno del materiale è:

$$E = E_0 - E_p$$

Quindi, essendo il campo elettrico la densità della carica libera diviso l'epsilon ho:

$$E = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} - \frac{\sigma_p}{\epsilon_0}$$

5.3.1 Intensità di polarizzazione

Nel dielettrico i dipoli, una volta investiti dal campo elettrico, saranno uguali e allineati nella direzione del campo E. Quindi in un campo elettrico, le particelle si trasformano in dipoli con momento

$$|p| = q\delta \text{ con } \delta \text{ lo spostamento delle cariche nel dielettrico}$$

Questo stato viene detto di POLARIZZAZIONE e si può rappresentare come:

$$P = Np \text{ con } N \text{ numero di particelle per unità di volume, } p \text{ momento di dipolo medio}$$

Questo rappresenta il momento di dipolo globale prodotto dal campo elettrico(grado di allineamento delle molecole di un dielettrico) e viene detto Intensità di polarizzazione (o vettore di polarizzazione).

5.3.2 Vettore spostamento elettrico

L'insieme dei dipoli allineati dal campo elettrico è assimilabile ad un unico dipolo orientato nel verso del campo esterno E_0. Quindi il modulo del vettore polarizzazione è la risultante di tutti i dipoli

$$q_P d \text{ cioè la carica di polarizzazione per la distanza}$$

Diviso il volume compreso tra le armature Sd:

$$P = \frac{q_P d}{Sd} = \frac{q_P}{S} = \sigma_P$$

Possiamo definire il Vettore Spostamento Elettrico come:

$$D \cdot \hat{n} = \sigma \text{ con } \hat{n} \text{ la normale alla superficie di un'armatura del condensatore.}$$
$$\text{Nel condesatore } D \text{ e } \hat{n} \text{ sono paralleli, quindi } D = \sigma.$$

Quindi, essendo

$$E = \frac{1}{\epsilon_0}(\sigma - \sigma_P)$$

posso scrivere, isolando σ e ricordando che $P = \sigma_P$

$$D = \epsilon_0 E + P$$

Nella maggior parte dei dielettrici P è proporzionale ad E e possiamo scrivere:

$P = \epsilon_0 \chi_e E$ con χ_e suscettività dielettrica e fornisce un'indicazione della capacità che ha il mezzo di polarizzarsi sotto l'azione di un campo elettrico.

Per approfondimento: qui.

Chapter 6

Campo magnetico

Cariche in moto esercitano fra loro azioni che possono essere descritte tramite un vettore, induzione magnetica B.
Il campo creato da una corrente e le azioni del campo su cariche in moto vengono descritte da:

$$F = IL \times B \text{ Seconda formula di Laplace}$$

$$dB_0 = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{dl \times \hat{r}}{r^3} \text{ Prima formula di Laplace}$$

Inoltre, la forza che il campo esercita su una singola carica in moto è:

$$F = qV \times B \text{ Forza di Lorentz}$$

Se all'interno di un campo magnetico variabile ho un circuito (Per variazione del campo o per variazione della geometria del circuito), si presenta nel circuito una fem(indotta):

$$fem = -\frac{d\phi(B)}{dt} \text{ Legge di Faraday-Neuman-Lenz }$$ [1]

E quindi si avrà una corrente nel circuito pari a:

$$i = \frac{\Delta V}{R} = \frac{-\frac{d\phi(B)}{dt}}{R} = \frac{fem}{R}$$

6.1 Definizione dell'Ampere, flusso e circuitazione del campo magnetico(Legge di Ampere)

Il flusso del campo magnetico attraveso una superficie chiusa è nullo. Questo comporta il fatto che non esistono sorgenti puntiformi discrete che possano essere isolate(a differenza del campo elettrico).

[1] Il segno meno che compare in questa espressione significa che il verso della forza elettromotrice indotta è sempre tale da opporsi alla variazione di flusso che la genera. Ossia, se diminuisce $\phi(B)$, la f.e.m. indotta è tale che la corrispondente corrente circolante nel circuito, genera un campo magnetico (indotto) che si aggiunge al campo magnetico inducente; se $\phi(B)$ aumenta, la corrente indotta ha il verso opposto e da luogo ad un campo magnetico (indotto) che si sottrae al campo magnetico inducente.

$$\phi(B_0) = \oint_S B_0 \bullet dS = 0$$

La circuitazione del campo magnetico lungo una linea chiusa qualsiasi invece:

$$\oint B_0 dl = \sum \mu_0 i \text{ (Per correnti stazionarie)}$$

Questa può essere presa come espressione della legge di Ampère o della circuitazione.

Mediante la forza di attrazione tra due fili percorsi da corrente possiamo definire l'ampère:

Il filo 1 crea un campo magnetico intorno a se dato da:

$$B_1 = \mu_0 \frac{I_1}{2\pi R} \text{ (Legge Biot-Savart)}$$

Sul secondo filo agirà una forza $F = Il \times B$ dovuta al campo B_1 (Seconda Legge di Laplace):

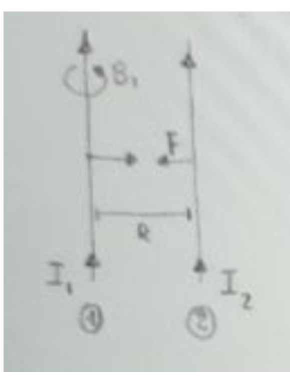
$$F = I_2 l B = I_2 l \frac{\mu_0 I_1}{2\pi R}$$

Se considero le correnti uguali: $I = I_1 = I_2$ si ricava la forza per unità di lunghezza:

$$\frac{F}{l} = \frac{\mu_0}{2\pi R} I^2$$

Quindi si definisce 1 Ampère la corrente che passando per due fili esercita tra di loro una forza per unità di lunghezza pari a:

$$\frac{F}{l} = 2 \cdot 10^{-7} \frac{N}{m} \; (I = 1A, R = 1m, \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7})$$



6.2 Forza Elettromotrice

Quando in un circuito c'è corrente, siamo in presenza di un campo elettrico e questo campo è causa della fem indotta. E possiamo vedere che:

$$\Delta V = \int Edl$$

e che

$$\int Edl = -\frac{d}{dt}\int BdS \text{(Seconda eq. Maxwell)}$$

Quindi

$$\Delta V = -\frac{d}{dt}\int BdS$$

Quando invece modifichiamo la geometria di un circuito immerso in un campo magnetico, possiamo tener conto della Forza di Lorentz:

$$F = qV \times B$$

Sapendo che si genera un fem, cioè una differenza di potenziale e che il campo elettrico è legato alla ddp:

$$\Delta V = \int Edl \text{ con } E = \frac{F}{q}$$

Possiamo arrivare ad un'altra formula per la fem:

$$fem = \int (V \times B)dl \text{ che in determinate condizioni diverra } fem = VBl$$

Possiamo arrivare alla stessa soluzione derivando il flusso di B nel tempo:

$\frac{d\phi}{dt} = \frac{d}{dt}\int Bds$ se il circuito ha una superficie pari a lx avremmo $\frac{d}{dt}Blx = Blv$

6.3 Mutua e auto induzione

Ho due circuiti. Sul circuito 1 scorre corrente, quindi sul circuito 2 viene indotta una corrente dal flusso 1 se la I in 1 varia nel tempo.

Il flusso sulla superficie 2 è creato dalla corrente che scorre sul circuito 1, il quale è proporzionale alla corrente I_1 con un coeff. di proporzionalità.

$\phi_2 = M_{21}I_1$ Con M coeff di mutua induzione che dipende dalla geometria del circuito e dalla loro distanza.

Vale anche il viceversa:

$$\phi_1 = M_{12}I_2$$

Questo effetto vale anche sul circuito stesso:

$$\phi_1 = M_{11}I_1 = LI_1 \text{ con } L \text{ coeff di auto induzione}$$

Questo coefficiente L viene chiamato induttanza e viene utilizzato nei circuiti RL.

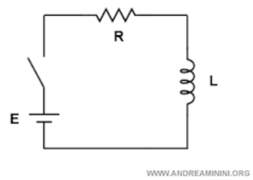
L'elemento induttore con autoinduttanza L, causa la forza elettromotrice pari a:

$$fem = -L\frac{dI}{dt} \text{ (ricordiamo } fem = \frac{d\phi}{dt}\text{)}$$

Quindi in un circuito a corrente continua, la presenza di un elemento di induttanza non fa nulla. Quindi ci serve un interruttore per far variare la corrente in un circuito.

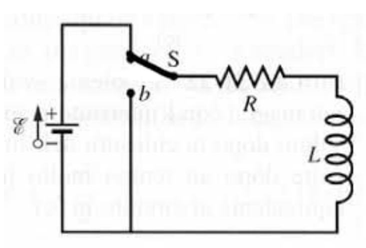
6.3.1 Circuito RL ed Energia

In un circuito RL possiamo trovare equazioni per studiare il circuito.



Chiusura interruttore:

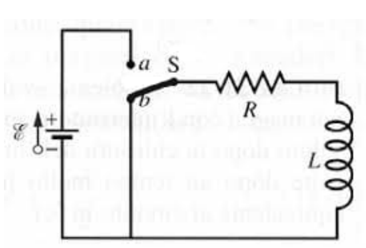
$-L\frac{dI}{dt} = RI - f$ [2] ci darà $I(t) = \frac{f}{R}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$ con $\tau = \frac{L}{R}$ tempo caratteristico.



La corrente finale, quando va a regime, l'induttore si comporta come un filo con corrente $I_f = \frac{F}{R}$.
L'induttore impedisce al circuito che viene chiuso di avere, alla chiusura dell'interruttore, un comportamento non reale(Un gradino, corrente istantanea).

Apertura interruttore e scarica attraverso resistenza:

$-L\frac{dI}{dt} - RI = 0$[3] che ci darà $I(t) = I_f e^{-\frac{t}{\tau}}$ con $\tau = \frac{R}{L}$ tempo caratteristico



[2]Ricordo che andiamo ad operare sui potenziali di ogni elemento del circuito: potenziale dato dalla $fem(f)$ - potenziale dell'induttanza($L\frac{dI}{dt}$) - potenziale sulla resistenza(RI) $= 0$ per Kirchhoff

[3]Come punto 2, solo che qui non si ha il generatore che da un altro potenziale

La presenza dell'induttore mi fa scaricare il circuito con un andamento esponenziale, rendendo reale lo studio del circuito. Altrimenti avrei un gradino.

In R scorre corrente, una corrente generata da L(Nel tempo di scarica), che porta ad una potenza RI^2 (Un effetto di dissipazione). Quindi in un tempo dt avrò una potenza pari a:

$$RI^2dt \text{ energia data da } L$$

Quindi un induttore in cui scorre corrente, ha una energia. Quindi la potenza che spettava all'induttanza è pari a:

$L\frac{dI}{dt}I = RI^2$ quindi nell'induttore, nel tempo dt ho un energia $LdII = RI^2dt$ [4]

Quindi l'energia viene trasferita alla resistenza, che per effetto Joule si dissipa in calore.
Integrando:

$$\int_{I_{max}}^{0} LIdI = \int_{0}^{\infty} RI^2dt$$

trovo l'energia totale che conteneva l'induttore:

$$U = \frac{1}{2}LI^2$$

Chi darà questa energia all'induttore? Il campo magnetico, poichè l'induttore ha un suo campo magnetico. [5]
Abbiamo:

$$B = \mu_0\frac{N}{l}I \text{ e } L = \mu_0 N^2\frac{S}{l}\text{(L per un induttore)}$$

E quindi possiamo esprimere l'energia di un induttore anche come:

$$U = \frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0}B^2(Sl) \text{ e quindi } u = \frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0}B^2 \text{ (Densità di energia dovuta al campo magnetico)}$$

Vedere anche qui per approfondimento sul solenoide.

6.4 Campo Magnetico nella materia

Nel caso di un mezzo materiale, per la descrizione delle azioni magnetiche è necessario tener conto delle cariche che entrano nella struttura materiale giacchè esse sono in moto. Quindi consideriamo un altro vettore M che rappresenta l'intensità di magnetizzazione(analogo a P, intensità di polarizzazione) e un altro vettore legato ad M e B(Come D nei dielettrici). Questo vettore consente di scrivere una relazione fondamentale in cui compare solo la densità di cariche libere(ρ_{lib}).

[4] In $L\frac{dI}{dt}I = RI^2$ parliamo di potenza, mentre in $LdII = RI^2dt$ parliamo di energia
[5] Come per il condensatore che ha il campo elettrico e troviamo quindi la densità di energia(da $U = \frac{1}{2C}Q^2$)

6.4.1 Vettore Intensità del Campo Magnetico H

L'intensità del campo magnetico H, si riduce a B nel caso del vuoto. Sappiamo che:

$$divB_0 = 0 \text{ e } rotB_0 = \mu_0 j$$

In un mezzo materiale(Come per E), andiamo ad aggiungere una densità media delle correnti atomiche j':

$$divB = 0 \text{ e } rotB = \mu_0(j + j')$$

Possiamo calcolare j' ci basiamo sull'esperienza del solenoide(Analogo al condensatore nel campo elettrico):

$$B_0 = \mu_0 n_s i_0 \text{ campo magnetico in un solenoide nel vuoto}$$

Se si inserisce un mezzo omogeno isotropo si osserva che la corrente, dopo un breve transitorio, torna alla stessa intensità, mentre il campo magnetico, pur mantenendo direzione e verso precedente, ha un valore diverso. Si può scrivere:

$$B = \mu n_s i_0 \text{ con } \mu = \mu_0 \mu_r \text{(Permeabilità assoluta e permeabilità relativa)}$$

Avrò:

$$B - B_0 = \mu_0[(\mu_r - 1)n_s i_0]$$

Quindi, l'introduzione del mezzo, porta alla presenza di correnti all'interno del solenoide che risulta pari a:

$$i_M = (\mu_r - 1)i_0 \text{ corrente di magnetizzazione}$$

In questo modo si può definire M come il memento magnetico per unità di volume del mezzo:

$$M = \frac{m_1}{S} = n_s i_M \hat{n}$$

Da questa posso scrivere la precedente relazione($B - B_0$)come:

$$B = B_0 + \mu_0 M$$

Quindi, si avrà che:

$$rotB = rotB_0 + \mu_0 rotM = \mu_0(j + j') \text{ e } rotB_0 = \mu_0 j$$

Allora:

$$rotM = j'$$

Come nel campo elettrico per D possiamo semplificare l'espressione ponendo:

$$H = \frac{B - \mu_0 M}{\mu_0} \text{ vettore intensità campo magnetico}$$

Scrivendo così:

$$rotH = j \text{ utile poichè in questo caso compare solo la densità delle correnti esterne}$$

6.5 Processi non stazionari

6.5.1 Legge di Ampère-Maxwell

La legge di Ampère con l'aggiunta di Maxwell afferma che i campi magnetici possono essere generati in due modi: tramite correnti elettriche (come dice la legge di Ampère originale) e da campi elettrici variabili (è questa l'aggiunta di Maxwell, chiamata da lui corrente di spostamento).

Equazione di continuità che esprime la conservazione della carica elettrica:

$$\mathrm{div} j = -\frac{\delta\rho}{\delta t}$$

Nel caso stazionario ($\frac{\delta\rho}{\delta t} = 0$).
Il campo magnetico creato dalla corrente in un mezzo isotropo è dato da:

$$\mathrm{rot}\ H = \mathrm{rot}\frac{B}{\mu} = j$$

Se si applica questa a correnti non stazionarie abbiamo che $\frac{\delta\rho}{\delta t} \neq 0$ e quindi $\mathrm{div} j \neq 0$, mentre doverebbe essere uguale a 0(Proprietà divergenza di un rotore). Quindi si trova che:

$\mathrm{rot} H = \mathrm{rot}\ \frac{B}{\mu} = (j + \frac{\delta(\epsilon E)}{\delta t})$ Che equivale a dire che il campo magnetico è generato sia da correnti di conduzione, sia da campi elettrici variabili.

In questo caso non abbiamo più la contraddizione, poichè calcolando la divergenza avremo:

$$0 = divj + div(\frac{\delta(\epsilon E)}{\delta t}) = divj + \frac{\delta}{\delta t}div(\epsilon E)$$

E per processi di qualsiasi tipo vale:

$$\mathrm{div}(\epsilon E) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

E quindi trovaiamo l'equazione di continuità:

$$\mathrm{div} j + \frac{\delta\rho}{\delta t}$$

Chapter 7

Circuiti e correnti

7.1 Correnti alternate

Esempio, una spira che gira. Avrà quindi un andamento nella corrente:

$$I(t) = I_0 cos(\omega t)$$

Considerando che la corrente passa in una resistenza:

$$P(t) = RI^2(t) = RI^2 cos^2(\omega t)$$

Per un periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$, dobbiamo integrare nel tempo e troviamo:

$$P = RI_0^2 \frac{T}{2}$$

Corrente equivalente/efficace: corrente continua che passando nella stessa resistenza in cui passa la corrente alternata, dissipi la stessa energia nel periodo t.

$$RI_c^2 \frac{T}{2} = Ri_c^2 T$$

Quindi la corrente efficace la definisco come:

$$i_e = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$$

Esiste anche una tensione efficace. (Basta moltiplicare per R)

$$V_e = \frac{V_0}{\sqrt{2}}$$

7.1.1 Impedenza

Chapter 8

Equazioni di Maxwell

[1]

[1] Nell'immagine la due e la tre sono invertite.

EQUAZIONI DI MAXWELL

I° eq:

F. INTEGRALE | F. DIFFERENZIALE

- Legge di Gauss per l'elettricità:

$$\oint_S \bar{E} \cdot d\bar{s} = \frac{q}{\varepsilon_0} \quad \Big| \quad div\,\bar{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

II° eq:

- Legge di Gauss per il magnetismo

$$\oint \bar{B} \cdot d\bar{s} = \phi \quad \Big| \quad div\,\bar{B} = \phi$$

(Le linee di induzione magnetica sono sempre chiuse)

III° eq:

- Legge di induzione di Faraday

$$\oint \bar{E} \cdot dl = -\frac{d\phi_B}{dt} \quad \Big| \quad rot\,\bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$$

IV° eq:

- Legge di Ampere

$$\oint \bar{B} \cdot dl = \mu_0 i \quad \Big| \quad rot\,\bar{B} = \mu_0\left(\bar{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}\right)$$

(Generalizzata Maxwell)

$$\underbrace{+ \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt}}_{\text{Effetto campo elettrico variabile}}$$

Chapter 9

Gas Perfetti

Un Gas perfetto è un modello di gas reale ad alte rarefazioni e temperatura, con equazione:

$$pV = nRT$$

Caratteristiche generali per i gas perfetti:

$$\Delta U = Q - L \text{ Primo principio termodinamica}$$

Inoltre

$$C = \frac{\delta Q}{\delta t} \text{ capacità termica}$$

E quindi: $(Q = C\Delta T)$

$$Q = c_v n \Delta T = c_v m \Delta T$$

n moli, m massa c_v calore specifico a volume costante.

$$dL = pdV$$

$R = c_p - c_v$ questo risultato si trova dallo studio della trasformazione isobara

9.0.1 Legame tra c_p e c_v

Trasformazione isobara

$$\Delta U = -p\Delta V + nc_p \Delta T$$

So che $\Delta U = nc_v \Delta T$ (Si trova dalla trasformazione isocora tenendo in considerazione che non dipende dalla trasformazione ma solo dagli stati iniziali e finali) Quindi:

$$nc_v \Delta T = -p\Delta T + nc_p \Delta T$$

E da qui si trova: $c_v = c_p - R$

9.1 Trasformazione dei Gas Perfetti

I gas sono sistemi termodinamici che possono scambiare energia meccani con l'esterno mediante il lavoro di forze legate alla pressione p. L'equazione di stato, si può trovare notando che tutti i gas si comportano allo stesso modo quando le pressioni vengono fatte decrescere. Questo comportamento limite viene descritto dalle tre relazioni:

$$pV = p_0V_0 \text{ per } T \text{ costante}$$
$$p = p_0\frac{T}{T_0} \text{ per } V \text{ costante}$$
$$v = v_0\frac{T}{T_0} \text{ per } P \text{ costante}$$

9.1.1 Equazione di Stato

L'equazione di stato si può trovare andando a combinare le varie trasformazioni:

1. Trasformazione Isoterma
2. Trasformazione Isocora

• ISOTERMA

$p_i V_i = p_f V_f$

• ISOCORA (V_{cost})

$p_f = p_i \frac{T}{T_0}$

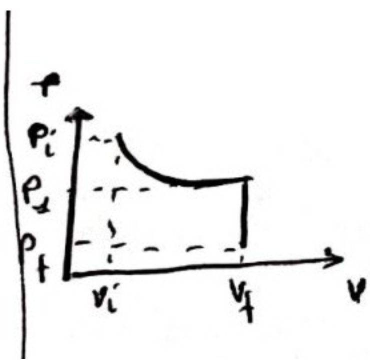
$p_i V_i = \frac{p_f V_f T_0}{T}$

Quindi

$\frac{p_f V_f}{T} = \frac{p_i V_i}{T_0} = z$

Quindi

$\boxed{p_f V_f = nRT}$



$\frac{p_i v_i}{T_0}$ non dipende dal gas: per Avogrado ho che

Per stessi valori di pressione e temperatura, volumi uguali di gas diversi contengono lo stesso numero di molecole

Cioè

A stessa T e P il volume occupato è lo stesso per tutti i gas

Quindi le condizioni iniziali non dipendono dal gas ma da n, cioè il numero di kmoli contenuto in una massa m. ($n = \frac{m}{M}$ (M peso molecolare)).

9.1.2 Trasformazione adiabatica

Non c'è scambio di calore con l'esterno $dQ = 0$ (istante per istante). Quindi

$$Q = 0 \text{ e } dL = pdV \text{ allora } \Delta U = -pdV = nc_v dT$$

Posso scrivere quindi:

$$nc_v dT + pdV = 0$$

e ricordando che

$$p = \frac{nRT}{V}$$

$$nc_v dT + \frac{nRT}{V} dV = 0$$

Allora:

$$-\frac{dT}{T} = \frac{R}{c_v}\frac{dV}{V}$$

e ricordando che $R = c_p - c_v$, mi ritrovo

$$-\frac{dT}{T} = (\frac{c_p}{c_v} - 1)\frac{dV}{V}$$

Ponendo $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ e integrando:

$$(\gamma - 1)ln(\frac{V_b}{V_a}) = -ln(\frac{T_b}{T_a}) \text{ alla fine trovo } TV^{(\gamma-1)} = cost$$

Posso trovare espressioni equivalenti utilizzando le equazioni di stato. ($pV^\gamma = cost$)

9.2 Energia Interna dei Gas Perfetti

Esperienza di Joule, gas in espansione libera(Non fa lavoro esterno).

Dall'esperienza si deduce che l'energia interna di un gas perfetto dipende unicamente dalla temperatura ed è indipendente dal suo volume.

Questo poichè si è osservato che nell'espansione libera di un gas perfetto la variazioni di temperatura può considerarsi nulla e quindi non avendo scambio di calore con l'esterno($Q = 0$) e $L = 0$ l'energia interna del sistema non varia.

$$U = U(T)$$

A volume costante, quindi, il calore specifico è (considerando massa unitaria) $c_v = (\frac{\delta Q}{\delta t})_V = \frac{dU}{dt}$ e

$$dU = nc_v dT \text{ con } n \text{ numero di k-moli.}$$

9.2.1 Primo Principio della Termodinamica per Gas Perfetti

Possiamo scrivere quindi, date le consideraizoni sopra, il primo principio come($\Delta U = Q - L$):

$$dQ = nc_v dT + pdV$$

9.3 Teoria Cinetica dei Gas

La teoria cinetica dei gas descrive un gas come un gran numero di piccole particelle (atomi o molecole) che sono in costante movimento casuale. Le particelle muovendosi urtano tra di loro e con le pareti del contenitore. La teoria cinetica dei gas spiega le principali proprietà dei gas quali pressione, temperatura e volume.

La teoria cinetica si basa sull'assunzione di alcune ipotesi:

1. Gas formato da un grande numero di molecole, che si muovo in tutte le direzioni
2. Il volume occupato dalle molecole è trascurabile rispetto al volume totale occupato dal gas
3. Le molecole non scambiano forze tra loro
4. Gli urti delle molecole con le pareti del recipiente sono perfettamente elastici

9.3.1 Pressione nella teoria cinetica

Conseguenza delle forze esercitate dalle collisioni delle molecole del gas con le pareti del recipiente.
L'urto con la parete è elastico, quindi si conserva la qnt di moto del sistema (considerando una molecola di massa m)

$$mv = mv'$$

e l'energia

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv'^2$$

La particella, sbattendo sulla parete, trasmette un impulso

$$\Delta P = p_f - p_i \text{ quindi } \Delta P = -mv - mv = -2mv$$

La particella considerata collide con la parete una volta ogni $\frac{2L}{v}$ con L la lunghezza del contenitore(Lo spazio che deve coprire la particella), quindi la forza risultante esercitata sulla parete sarà:

$$f = \frac{\Delta P}{\Delta T} = -\frac{mv^2}{L}$$

La forza totale esercitata dal gas sulla parete sarà data dalla somma di tutte le forze:

$$F = \frac{m}{L} \sum v_i^2$$

e considerando il valor quadratico medio: $\overline{v^2} = \frac{1}{N} \sum v_i^2$ (N numero di molecole)

$$F = \frac{mN}{L} \overline{v^2}$$

La pressione

$$p = \frac{F}{S} = \frac{F}{L^2}$$

Per il numero di Avorgado: $N = N_a \cdot n$, $M = m \cdot N_a$ (massa molare) e considerando che $L^3 = V$, possiamo scrivere la pressione come:

$$p = \frac{n \cdot M \cdot \overline{v^2}}{V}$$

Per ipotesi il gas ha una distribuzione uniforme, quindi per le tre componenti x,y,z a avrà una velocità:

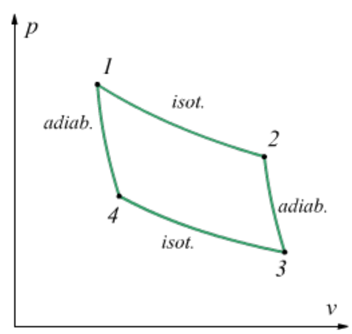
$$\overline{v^2} = \frac{1}{3} \overline{v^2}$$

Chapter 10

Termodinamica

10.1 Macchine Termiche e Ciclo di Carnot

Se si vuole ottenere indefinitivamente trasformazioni di calore in lavoro, occorre costruire un sistema termodinamico che possa operare ciclicamente(ritornando cioè periodicamente a possedere le stesse proprietà): tali sistemi sono detti macchine termiche. In questi cicli la temperatura del sistema varia. Il caso più semplice e più efficiente è quello in cui intervengono due sole temperature e senza scambio di calore con l'esterno. Questo è il ciclo di Carnot, costituito da due trasformazioni reversibili isoterme e due trasformazioni reversibili adiabatiche. Il ciclo richiede due sorgenti termiche.



Nel ciclo descritto il lavoro netto ottenuto L è rappresentato dall'area racchiusa dal ciclo nel piano pV. Non tutto il calore Q_1 assorbito dalla sorgente a temperatura più alta si trasforma in lavoro, poichè una parte di esso Q_2 è ceduto alla sorgente a temperatura più bassa. Quindi, per il primo principio della termodinamica ($\Delta U = Q - L$ ma in un ciclo termodinamico $Q = L$) avrò:

$$L = Q_1 - Q_2$$

Quindi, possiamo chiamare rendimento il rapporto tra lavoro e quantità di calore assorbita.

$$\eta = \frac{L}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$$

Questo rendimento è sempre minore di 1, Q_2 non sarà mai pari a 0.

Il rendimento della macchina di Carnot, che opera fra due temperature T_1 e T_2, si può trovare facilmente se la sostanza è un gas perfetto, lungo le trasformazioni isoterme. E si troverà che:

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

10.2 II principio della termodinamica(Kelvin e Clausius)

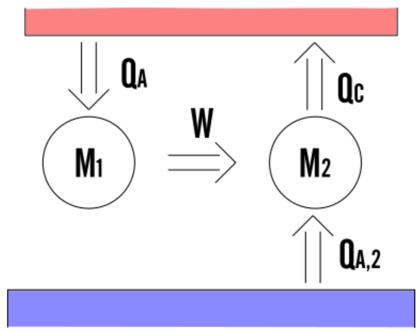
- Clausius:

Non si può realizzare una trasformazione il cui unico risultato sia quello di trasferire una quantità di calore da un corpo a un altro a temperatura maggiore del primo (Non avverrà mai un passaggio di calore spontaneo da un corpo più freddo ad uno più caldo)

- Kelvin

Non si può realizzare una trasformazione il cui unico risultato sia quello di trasformare in lavoro il calore estratto da una sorgente termica.
(Impossibilità di avere un processo che assorba calore e lo trasforma al 100% in lavoro)

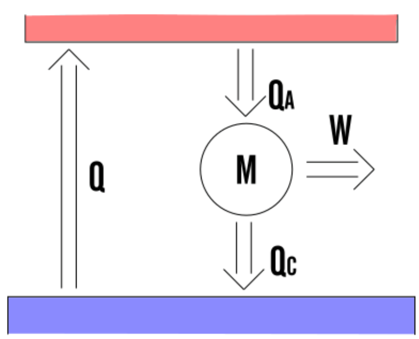
Se nego Kelvin allora nego Clausius:
Macchina termica che lavora converte in lavoro tutto il calore assorbito($W = Q_A$).
Se utilizziamo il lavoro per far funzionare una macchina frigorifera, possiamo assorbire calore da una sorgente fredda e trasferirlo alla sorgente calda.



Violare l'enunciato di Kelvin del secondo principio della Termodinamica implica una violazione dell'enunciato di Clausius.

Quindi viene violato l'enunciato di Clausius(Trasferimento spontaneo da sorgente fredda a calda).

Se nego Clausius allora nego Kelvin:
Macchina termica che assorbe calore dalla sorgente più calda, trasforma una parte di calore in lavoro e una parte la cede alla sorgente più fredda.
Se ritrasferiamo il calore assorbito dallo sorgente più fredda a quella più calda, lo scambio di calore è nullo. E tutto il calore assorbito dalla sorgente più calda viene trasformata in lavoro.



Violare l'enunciato di Clausius del secondo principio della Termodinamica implica una violazione dell'enunciato di Kelvin.

Quindi viene violato l'enunciato di Kelvin(Calore assorbito trasformato interamente in lavoro).

10.3 Teorema di Carnot

Tutte le macchine reversibili operanti fra due medesime temperature hanno lo stesso rendimento.
Nessuna macchina irreversibile che lavori tra le stesse temperature può avere rendimento maggiore di quello delle macchine reversibili.

10.4 Entropia

Grandezza di stato che dipende solo dagli stati iniziali e finali.

Relazione per un ciclo di Carnot:

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2} \text{ (} Q_1 \text{ calore assorbito e } Q_2 \text{ calore ceduto)}$$

Se è positivo il calore assorbito e negativo quello ceduto:

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0 \text{ cioè per un ciclo di Carnot } \sum \frac{Q}{T} = 0$$

Per un ciclo reversibile qualsiasi, si può trasformare la sommatoria in un integrale:

$$\oint \frac{dQ}{T} = 0$$

10.4.1 Disuguaglianza di Clausius