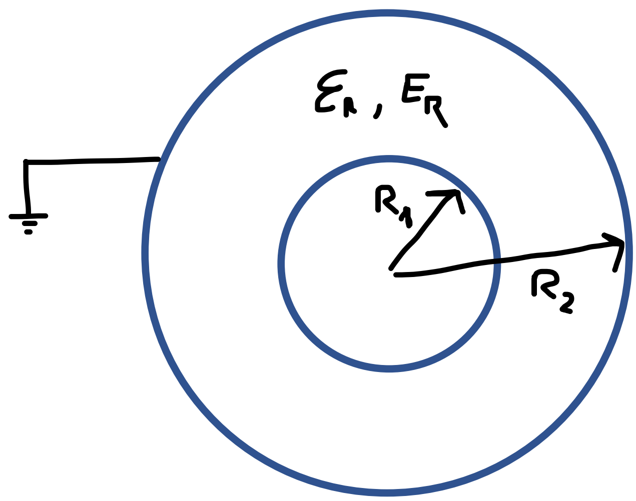
Fisica Generale 13 Settembre 2022

Tutte le equazioni devono essere esplicitate in forma analitica prima di inserire i valori numerici. Esplicitare l'analisi dimensionale della soluzione finale. L' esercizio deve essere svolto in maniera sequenziale e ben discussa. Soluzioni numeriche devono essere riportate nel SI.

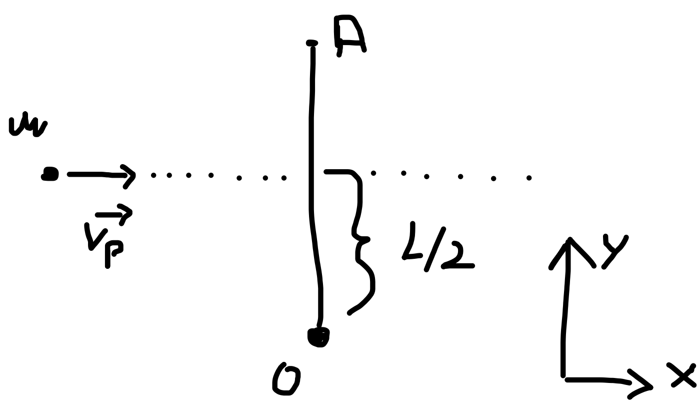
1) Si consideri un condensatore sferico di raggio interno R1 e raggio esterno R2. L'armatura esterna e' a potenziale nullo mentre quella interna a potenziale V. Tra le armature si trova un dielettrico omogeneo e isotropo con costante dielettrica e_r nota e che puó supportare un valore massimo di campo elettrico noto e in modulo pari a E_R (rigidità dielettrica).

   A. Ricavare l'espressione del campo elettrico tra le armature del condensatore e graficarlo in funzione del raggio R.
   B. Ricavare l'espressione della capacità del condensatore descritto.
   C. Determinare l'espressione del modulo della massima d.d.p. (V_{MAX}) che si puó applicare tra le armature del condensatore.



2) Un'asta omogenea di massa m_a=2 kg e lunghezza L = 40 cm disposta parallelamente ad un piano verticale, può ruotare intorno ad un asse fisso passante per l'estremità O e perpendicolare al piano. Inizialmente si trova in quiete quando viene colpita centralmente da un proiettile di massa m=100 g e velocità v_p= 300 ms. Il proiettile rimane conficcato nell'asta. Calcolare:

   A. L'espressione per il momento di inerzia dell'asta rispetto al suo CM e rispetto al polo O prima dell'urto.
   B. La velocità del centro di massa del sistema quando transita per il punto più basso della sua traiettoria.
   C. L'espressione del momento angolare del punto A in funzione del polo O del sistema dopo l'urto.



N°2

b) Nell' urto si conserva il momento della q.d.m. rispetto all' asse:

$$m \frac{\ell}{2} v_P = \left[I_0 + m \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \right] \omega$$

$$\omega = \frac{m (\ell/2) v_P}{\frac{1}{3} m_s \ell^2 + m \left(\frac{\ell}{2}\right)^2} = 54{,}2 \text{ rad/s}$$

Il sistema, partendo con energia cinetica:

$$T_0 = \frac{1}{2} \left[I + m \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \right] \omega^2$$

inizia a cadere. Nel suo moto é soggetto alla forza peso (conservativa) e alle reazioni vincolari, a lavoro nullo: si conserva perció l'energia meccanica. L'energia potenziale della forza peso é:

$$U = (m_s + m) g\, y_c$$

dove y_c é la coordinata del c.d.m. rispetto ad un asse verticale orientato verso l'alto. Poiché il c.d.m. del sistema é posto a $\ell/2$ da un estremo, la sua variazione di quota é pari a ℓ. É perciò

$$\frac{1}{2} \left[I + m \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \right] \omega^2 + (m_s + m) g \ell = \frac{1}{2} \left[I + m \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \right] \omega'^2$$

dove ω' é la velocità angolare del sistema quando transita in basso. Si ottiene:

$$\omega' = \left\{ \omega^2 + \frac{(m_s + m) g \ell}{\frac{1}{2} \left[I + m \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \right]} \right\}^{\frac{1}{2}} = 55{,}5 \text{ rad/s}$$

Il c.d.m. descrive una traiettoria circolare di raggio $l/2$ intorno all'asse.
La sua velocità in basso sarà:

$$v_c = \omega' \frac{l}{2} \simeq 11 \ m/s$$

b) Momento inerzia asta:

$$I_{CM} = \frac{m_a L^2}{12}$$

$$I_O = \frac{m_a L^2}{3}$$

Per la dimostrazione vedere appunti o testo consigliato!

c) Momento angolare asta in modulo vale:

$$L_{a,O} = I_O \omega = \left[I_{CM} + \left(\frac{L}{2}\right)^2 m_a\right] \omega$$

rispetto al polo O — rispetto al CM

Il sistema avrà momento angolare totale (asta + proiettile)

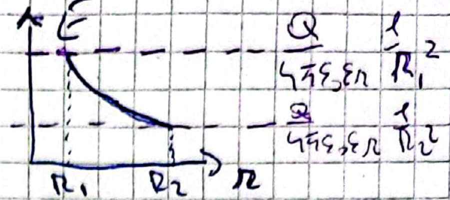
$$L_{TOT} = L_{a,O} + \left(\frac{L}{2}\right)^2 m \omega = \left[I_{CM} + \left(\frac{L}{2}\right)^2 m_a + \left(\frac{L}{2}\right)^2 m\right] \omega$$

• Un corpo di massa m in A ha momento pari a: $L_{m,A} = L^2 m \omega$

N° 1

a) Il campo elettrico nella zona tra le armature:

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{1}{r^2}$$



dove Q é la carica che immaginiamo posta sull' armatura interna.

Il massimo valore di E si ha in prossimità dell' armatura interna e quindi:

$$E_{MAX} = E(R_1) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{1}{R_1^2}$$

b) In termini di d.d.p. V si ha:

$$V_1 - V_2 = V = \int_{R_1}^{R_2} E(r)\,dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) =$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\left(\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}\right)$$

Eliminando Q tra le espressioni di E_{MAX} e di V si ha:

$$V = \left(\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}\right) R_1^2 E_{MAX}$$

La massima d.d.p. V_{MAX} si ottiene imponendo che il campo E_{MAX} nel condensatore coincida con la rigidità dielettrica E_R:

$$V_{MAX} = (R_2 - R_1)\frac{R_1}{R_2}E_R$$

B) Capacità condensatore sferico

$$C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r\frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

Dimostrato su qualsiasi testo!!