

Un'introduzione elementare agli strumenti matematici per lo studio dei segnali acustici

Paolo Boggiatto, Evanthia Carypis e Alessandro Oliaro
Dipartimento di Matematica, Università di Torino

Indice

1	Introduzione	2
1.1	I segnali e loro definizione	3
1.2	Classificazione dei segnali	5
2	La serie e la trasformata di Fourier	10
2.1	La serie di Fourier	10
2.2	La trasformata di Fourier	13
2.3	Il principio di indeterminazione	16
2.4	Limiti della trasformata di Fourier	19
3	La trasformata di Gabor	22
3.1	La partitura musicale	29
3.2	Applicazioni: analisi, elaborazione e ricostruzione di segnali .	31
3.3	Conclusione	35

Capitolo 1

Introduzione

Quando ascoltiamo un brano musicale il nostro orecchio riesce a percepire senza difficoltà la sequenza di suoni che lo compongono, distinguendone le caratteristiche principali. Un musicista è in grado di trasformare ciò che sente in una partitura musicale. Tuttavia, non è necessario essere esperti per saper identificare suoni acuti, gravi, ritmi e melodie. Esiste un metodo matematico per simulare il lavoro svolto dal nostro orecchio e costruire un analogo della partitura musicale? In queste note vogliamo mostrare come sia possibile fare ciò, usando alcuni strumenti della cosiddetta “Analisi Armonica”. Questa è una branca della matematica che si occupa dello studio dei segnali tramite rappresentazioni di funzioni intese come sovrapposizione di onde fondamentali, dette anche *armoniche*, e rappresenta un potente strumento per lo studio di fenomeni dinamici di qualunque natura, trovando numerose applicazioni in aree come l’ingegneria e la fisica, o in campi di impiego di interesse industriale (vibrazioni, diagnostica di impianti industriali, analisi del rumore, ecc.). Tra gli strumenti dell’Analisi Armonica presenteremo, in particolare, la serie di Fourier, la trasformata di Fourier e la trasformata di Gabor che, come vedremo, permetteranno di rispondere affermativamente alla nostra domanda, fornendo una matematizzazione del processo di riconoscimento dei suoni svolto dal nostro apparato uditivo. Per rendere comprensibili i concetti che introdurremo, integriamo la descrizione degli argomenti con parecchi disegni, ottenuti utilizzando i pacchetti grafici del software Maple.

1.1 I segnali e loro definizione

Cerchiamo di capire che cosa indichiamo col termine di *segnale* a partire da un esempio. Consideriamo il dialogo tra due persone: la comunicazione orale sappiamo che avviene per mezzo della trasmissione di un *segnale vocale* da “chi parla” a “chi ascolta”. Il segnale viene generato tramite il sistema di *produzione della voce*, costituito dall’insieme degli organi di fonazione come la lingua, le corde vocali, i polmoni, ecc., grazie al quale “chi parla” induce una variazione nella pressione dell’aria: tale variazione costituisce il “segnale vocale” propriamente detto. Immaginiamo ora di voler matematizzare quanto espresso. Consideriamo un piano di tipo spazio-pressione come in Figura 1.1 e fissiamo, sull’asse spaziale (asse orizzontale), due punti, A e B (per comodità, facciamo coincidere A con l’origine degli assi cartesiani), ad una certa distanza Δs , in cui supponiamo si trovino i due interlocutori.

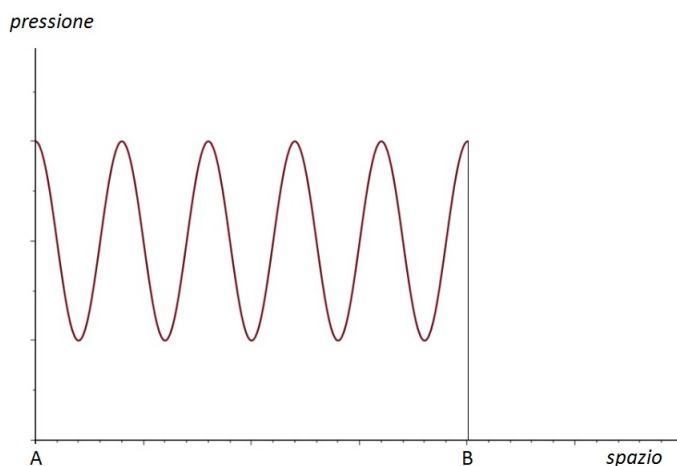


Figura 1.1: Esempio di segnale.

Se la persona che si trova in A “parla”, la variazione della pressione acustica dell’aria viene rappresentata tramite una sorta di *onda* che parte da A e si dirige verso B . Ovvero, possiamo immaginare che l’onda si sposti lungo l’asse spaziale e, solo dopo aver percorso l’intero tratto Δs che separa i due interlocutori, giunga all’orecchio della persona in B . Si osservi che l’*altezza* a cui si trova il grafico è del tutto arbitraria in questa situazione e, in generale, dipenderà dalle condizioni in cui si considera la pressione. Pertanto, per quanto detto finora, sembra che il concetto matematico necessario alla trasposizione matematica dei segnali sia quello di *funzione*. Formalmente

vedremo che tale oggetto esprime bene l'idea intuitiva di segnale, in quanto si adatta perfettamente alle svariate situazioni derivanti dalla realtà. Non ci riferiamo, quindi, solo all'esempio di segnale vocale considerato ma, più in generale, a tutte le tipologie di segnale. Infatti, per quanto la natura fisica cui si riferiscono possa essere molto diversa, i segnali hanno una caratteristica di base comune: essi associano una certa informazione al modo di variare di una grandezza fisica. Di conseguenza, rappresenteremo i segnali tramite delle funzioni del tipo

$$\begin{aligned} f : X \subseteq \mathbb{R} &\rightarrow Y \subseteq \mathbb{R} \\ x &\mapsto y = f(x), \end{aligned}$$

dove X rappresenta il dominio della funzione f , Y il codominio e sono entrambi sottoinsiemi di \mathbb{R} . Per semplicità, in questa sede ci occuperemo di segnali in \mathbb{R} , ovvero funzioni dipendenti da una sola variabile, ma è chiaro che il discorso può essere esteso a dimensioni superiori. Inoltre, la variabile x può assumere diversi significati, a seconda della prospettiva che consideriamo. Per chiarire le idee, torniamo all'esempio iniziale. Sul piano spazio-pressione fissiamo un punto tra A e B , che indichiamo con s_0 . Cambiamo “prospettiva” in modo da considerare ora il segnale dipendente dalla variabile temporale, ovvero mettiamoci nelle condizioni di voler comprenderne l'andamento allo scorrere del tempo. Allora è come se guardassimo lo stesso fenomeno dal punto di vista di un grafico di tipo tempo-pressione (si veda la Figura 1.2).

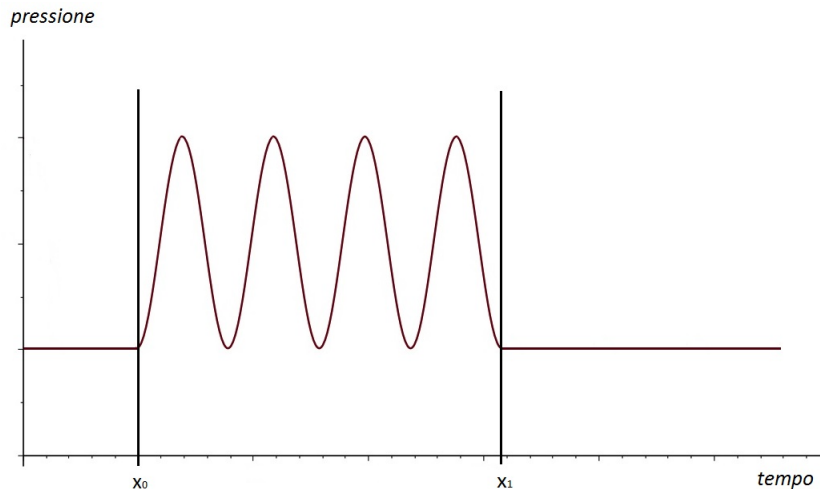


Figura 1.2: Segnale $f(x)$ su un piano di tipo tempo-pressione.

Fissiamo d'ora in avanti la notazione utilizzata quando consideriamo una funzione f : denotiamo con x la variabile indipendente e possiamo immaginare che essa rappresenti il variare del *tempo*; con la variabile dipendente $f(x)$ indichiamo, invece, una certa grandezza fisica che muterà allo scorrere di x . Ciò che si osserva è dunque una funzione con dominio nell'intervallo di tempo $X = \Delta x = [x_0, x_1]$, ovvero il segnale come si presenta al variare di x .

1.2 Classificazione dei segnali

Nello studio dei segnali è utile ricorrere ad una sorta di classificazione, basata sull'osservazione di caratteristiche comuni che distinguono alcune funzioni da altre. La prima suddivisione, diciamo la più naturale, è quella che separa i segnali *periodici* dai segnali *non periodici*. Precisamente abbiamo quanto segue.

- **Segnali periodici:** sono quei segnali il cui andamento si ripete dopo un determinato intervallo di tempo detto *periodo* e che indichiamo con T . Matematicamente, ciò si esprime dicendo che ogni volta che si trasla verso destra o verso sinistra di un intervallo di ampiezza proprio T , si vede che il grafico coincide esattamente con quello di partenza, ovvero, in formula,

$$f(x) = f(x + T).$$

L'inverso della durata del periodo viene detto *frequenza fondamentale* e si indica con ω_0

$$\omega_0 = \frac{1}{T}.$$

Come vedremo nel seguito, i segnali periodici vengono studiati tramite l'uso della cosiddetta *serie di Fourier*.

- **Segnali non periodici:** sono segnali il cui andamento non rispetta alcun tipo di regolarità e per cui non si riesce ad individuare un periodo T . Per il loro studio è necessario uno strumento potente chiamato *trasformata di Fourier*, a cui dedichiamo un paragrafo nel seguito.

La suddivisione appena vista non risulta l'unica possibile, anzi, essa può essere fatta rientrare in un contesto ancora più generale, in quanto vi sono numerose altre proprietà che qualificano i segnali e portano a opportune distinzioni tra le varie funzioni. Precisamente, individuiamo due tipologie di classificazione:

- (1) **classificazione fenomenologica:** avviene sulla base dell'andamento temporale del segnale, ovvero come esso appare;
- (2) **classificazione morfologica:** avviene sulla base delle caratteristiche del *dominio* in cui varia x e del *codominio*, cioè l'insieme definito da $f(x)$.

Descriviamo separatamente queste due suddivisioni.

Classificazione fenomenologica. In tale contesto i segnali si distinguono ulteriormente in

- *segnali deterministici:* sono segnali noti a priori e per il loro studio si utilizzano i classici metodi dell'analisi matematica. Essi si suddividono poi ancora in
 - *segnali periodici;*
 - *segnali non periodici;*
- *segnali aleatori:* non sono noti a priori, per studiarli sono necessari metodi utilizzati in statistica.

Classificazione morfologica. Come abbiamo visto nel paragrafo precedente, un segnale è una funzione f della variabile indipendente tempo x . Tale classificazione avviene sulla base delle caratteristiche del

- *dominio:* precisamente distinguiamo i segnali in
 - *segnali continui:* funzioni che hanno come dominio tutto l'asse \mathbb{R} dei numeri reali;
 - *segnali discreti:* funzioni che hanno come dominio l'insieme dei numeri interi \mathbb{Z} .
- *codominio:* distinguiamo i segnali in
 - *segnali ad ampiezza continua:* hanno come codominio l'insieme \mathbb{R} dei numeri reali;
 - *segnali ad ampiezza discreta:* hanno come codominio un insieme finito (o infinito numerabile).

All'interno delle classificazioni fornite si potrebbero considerare altre sotto-suddivisioni, in base alle caratteristiche prese in esame. Tuttavia, in queste note, ci basta la prima distinzione data, per cui ci focalizziamo sui segnali periodici e su quelli non periodici. Più precisamente, vediamo come essi si possano caratterizzare in base a determinate grandezze fisiche, quali:

- *altezza*: ovvero la frequenza di un segnale. Per segnali acustici, alle alte frequenze corrispondono suoni acuti ed alle basse frequenze suoni gravi;
- *intensità*: ovvero l'ampiezza. Per segnali acustici ciò corrisponde a quello che nel linguaggio comune è detto “volume” del suono;
- *durata*: ovvero l'intervallo di tempo in cui è presente il segnale.

In base ad esse possiamo dare la seguente definizione.

Definizione 1. Si dice che ad un segnale $f(x)$ corrisponde la *frequenza pura* ω_0 se e solo se il segnale è del tipo

$$f(x) = A \cos(2\pi\omega_0(x - b)) + K,$$

con

- A *ampiezza* delle oscillazioni;
- ω_0 la *frequenza*, ovvero il numero di oscillazioni nell'unità di tempo;
- b la *traslazione orizzontale* o fase;
- K la *traslazione verticale*

In tal caso, il segnale $f(x)$ è un **segnale periodico**.

Osservazione 2. Nella definizione abbiamo usato la funzione *coseno*, ma sarebbe stato esattamente lo stesso considerare la funzione *seno*. Si ricordi, infatti, la formula trigonometrica

$$\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \sin \theta.$$

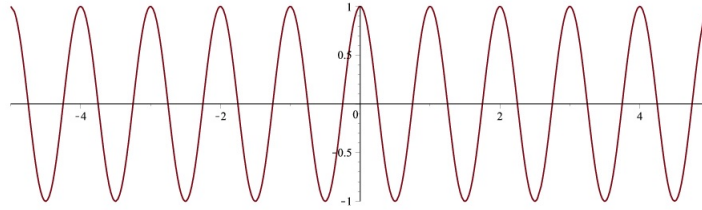
Come vedremo in seguito, un segnale può essere decomposto in una somma o un integrale di funzioni armoniche. In particolare, per lo studio dei segnali periodici si fa riferimento alla serie di Fourier, che approssima qualunque funzione periodica tramite somme di seni e coseni. Mentre per le funzioni non periodiche si ricorre alla trasformata di Fourier, definita tramite un integrale (per una breve descrizione intuitiva di integrale si veda l'Appendice). In entrambi i casi, l'insieme delle frequenze delle armoniche contenute nel segnale di partenza, le relative ampiezze e fasi costituiscono il cosiddetto *contenuto in frequenza* del segnale.

Ciò che distingue i segnali periodici da quelli non periodici è chiaramente legato alla frequenza. Per le funzioni periodiche esistono due modi per calcolare la frequenza. Il primo consiste nel fissare un intervallo di tempo, contare il numero di occorrenze dell'evento che si ripete in tale intervallo e dividere quindi il risultato di tale conteggio per l'ampiezza dell'intervallo di tempo. Il secondo metodo, invece, è quello di misurare l'intervallo di tempo tra gli istanti iniziali di due eventi successivi, ovvero il periodo T e, quindi, calcolare la frequenza come grandezza reciproca di questa durata:

$$\omega = \frac{1}{T}.$$

Per chiarire le idee, si pensi al classico esempio

$$f(x) = \cos(2\pi x)$$



In questo caso $A = 1$, $b = 0$, $K = 0$ e $T = 1$. Pertanto il segnale in esame ha frequenza ω pari a 1.

Tuttavia, un segnale come quello dell'esempio, in realtà non esiste, perché esso sarebbe un segnale “eterno”, senza inizio né fine. Mentre in natura esistono segnali come:

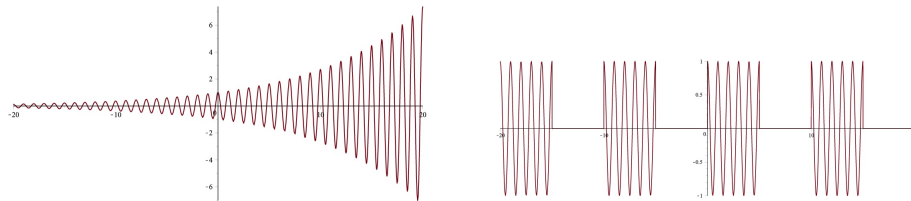


Figura 1.3: Esempi di segnali di durata limitata nel tempo, come si verifica in natura.

Alle funzioni appena viste non si applica più la formula $\omega = 1/T$, poiché non sono funzioni periodiche di periodo T . Tuttavia il nostro orecchio associa

ancora ad esse una certa frequenza ω . Come trovare allora un sostituto per la formula $\omega = 1/T$? Vedremo che, per segnali non necessariamente periodici, ciò che sostituisce il concetto di frequenza $\omega = 1/T$ è legato alla *trasformata di Fourier*, che fornisce l'intensità corrispondente ad ogni singola frequenza $\omega \in \mathbb{R}$ contenuta nel segnale di partenza.

Capitolo 2

La serie e la trasformata di Fourier

2.1 La serie di Fourier

Intorno al 1800 il matematico **Joseph Fourier**, studiando a lungo la propagazione del calore, intuì che qualsiasi funzione $f(x)$ può essere sviluppata, in un intervallo di lunghezza 2π , mediante una combinazione lineare di funzioni goniometriche (seni e coseni) del tipo:

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos(x) + \cdots + a_k \cos(kx) + \cdots + b_1 \sin(x) + \cdots + b_k \sin(kx) + \cdots,$$

dove a_k e b_k sono opportuni coefficienti. Il suo lavoro, contenuto nel trattato *Théorie Analytique de la Chaleur* del 1822, venne poi formalizzato in modo più rigoroso da due matematici tedeschi, **Bernhard Riemann** e **Lejeune Dirichlet**. Quest'ultimo osservò che molti fenomeni fisici erano di tipo “periodico”: le pulsazioni cardiache, gli impulsi elettrici, la trasmissione delle onde, le oscillazioni di un pendolo, etc. In particolare, si rese conto che per molti tipi di onde vale il cosiddetto *principio di sovrapposizione* per cui se in un determinato punto dello spazio transitano due o più onde, lo spostamento di una particella che si trova in quel punto è dato semplicemente dalla somma degli spostamenti che le onde, singolarmente, le conferiscono agendo da sole. In tal modo è possibile analizzare un fenomeno ondulatorio, anche molto complesso, attraverso una combinazione di moti ondulatori più semplici.

Formalmente vale la seguente definizione.



(a) Jean Baptiste
Joseph Fourier
(1768-1830).



(b) Peter Gustav
Lejeune Dirichlet
(1805-1859).



(c) Bern-
hard Riemann
(1826-1866).

Definizione 3. Sia $f(x)$ un segnale di tipo periodico. Allora la **serie di Fourier** ad esso associata è una somma infinita di sinusoidi (dette anche *armoniche*) di frequenze multiple di una certa frequenza fondamentale ω_0 :

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(2k\pi\omega_0 x) + b_k \sin(2k\pi\omega_0 x)).$$

I numeri a_k e b_k , sono detti **coefficienti di Fourier** e si calcolano tramite le seguenti espressioni

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \cos(2k\pi\omega_0 x) dx$$

e

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \sin(2k\pi\omega_0 x) dx,$$

per k che varia in \mathbb{N} .

Chiaramente se la funzione $f(x)$ in esame è una funzione pari, ovvero $f(-x) = f(x)$ (simmetrica rispetto all'asse verticale), il suo sviluppo in serie di Fourier non contiene la funzione seno ed è una funzione di soli coseni:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(2k\pi\omega_0 x)$$

Se $f(x)$ è dispari, ovvero $f(-x) = -f(x)$ (simmetrica rispetto all'origine degli assi), il suo sviluppo in serie di Fourier non contiene la funzione coseno ed è una funzione di soli seni:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(2k\pi\omega_0 x).$$

Osservazione 4. Per poter definire la serie di Fourier in maniera rigorosa, si dovrebbe richiedere una certa “regolarità” per la funzione che descrive il segnale, nello specifico, $f(x)$ deve essere integrabile in modulo:

$$\int_{-T/2}^{T/2} |f(x)| dx < \infty,$$

ovvero la quantità definita tramite l’integrale tra $-\frac{T}{2}$ e $\frac{T}{2}$ deve essere un valore finito.

Come si vede la serie di Fourier permette di esprimere una funzione periodica attraverso un numero discreto di parametri che sono le ampiezze delle componenti cosinusoidali (a_k) e sinusoidali (b_k) alla frequenza fondamentale ω_0 ed alle frequenze multiple $k\omega_0$. Più precisamente, la funzione $f(x)$ viene espressa tramite una somma di funzioni seno e coseno con frequenze multiple della fondamentale, moltiplicate per dei coefficienti numerici, a_k e b_k , da calcolare in funzione del tipo di segnale in esame.

La serie di Fourier è definita solo per segnali periodici. Tuttavia osserviamo che non è detto che ogni volta che si ha la somma di due o più segnali periodici, ciò che si ottiene sia ancora una funzione periodica. Si consideri, ad esempio, il segnale definito da

$$f(x) = \sin(2\pi\omega_1 x) + \sin(2\pi\sqrt{2}\omega_1 x),$$

cioè definito dalla somma di due funzioni periodiche con frequenze “pure” ω_1 e $\sqrt{2}\omega_1$.

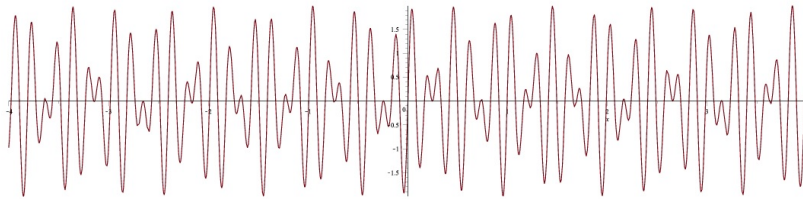


Figura 2.1: $f(t) = \sin(2\pi\omega_1 t) + \sin(2\pi\sqrt{2}\omega_1 t)$ con frequenze pure ω_1 e $\sqrt{2}\omega_1$.

Per quanto il grafico faccia pensare che il segnale sia di tipo periodico, in realtà, un’analisi più approfondita mostrerebbe che se si ripartisce l’asse delle ascisse in intervalli di uguale ampiezza e si confronta la funzione su due intervalli diversi, si hanno grafici che non sono mai esattamente sovrapponibili. Pertanto un segnale di questo tipo, in cui le frequenze non sono

commensurabili (ovvero non posseggono minimo comune multiplo), non si può scrivere come serie di Fourier e, per poterlo analizzare, occorre sostituire la sommatoria della serie con un integrale, precisamente quello che definisce la *trasformata di Fourier*. Questa è una “nuova” funzione che, come vedremo nel prossimo paragrafo, permette di passare dal dominio dei tempi a quello delle frequenze. In queste note ci limitiamo ad una descrizione qualitativa e rimandiamo, ad esempio, a [1] e [3] per una trattazione più avanzata sia della serie che della trasformata di Fourier.

2.2 La trasformata di Fourier

Abbiamo visto che nella serie di Fourier sono presenti solo le frequenze multiple della fondamentale. Nel caso, invece, della *trasformata di Fourier*, compaiono tutte quante le frequenze. Come anticipato, la differenza rispetto a prima sta nella formulazione: nel caso della serie, essa coinvolgeva una sommatoria, nel caso della trasformata sostituiamo “ \sum ” con un integrale “ \int ” (vedere l’Appendice per maggiori chiarimenti).

Definizione 5. Dato un segnale $f(x)$, la sua **trasformata di Fourier** ha la seguente espressione

$$\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i \omega x} f(x) dx.$$

Sotto il simbolo di integrale troviamo il segnale originario $f(x)$, funzione del tempo, che viene in qualche modo *trasformato* in $\hat{f}(\omega)$ che, come si vede, non è più una funzione temporale, ma è una funzione dipendente da ω e, pertanto, sta nel dominio delle frequenze. La trasformata di Fourier è, dunque, un’operazione che fa passare dal dominio dei tempi a quello delle frequenze. La sua caratteristica principale, fondamentale in teoria dei segnali, è quella di *riconoscere le frequenze presenti nel segnale*.

Per come è definita, la trasformata di Fourier è una funzione complessa e, pertanto, può essere espressa attraverso la parte reale e immaginaria. Utilizzando la formula di Eulero (per cui si rimanda all’Appendice), abbiamo la seguente uguaglianza:

$$\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i \omega x} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}} [\cos(2\pi \omega x) - i \sin(2\pi \omega x)] f(x) dx,$$

in cui si osserva come $f(x)$ venga ancora “decomposto” in una somma di seni e coseni ma, a differenza del caso della serie di Fourier in cui si considerano le frequenze multiple di quella fondamentale, in tale contesto ω può assumere qualsiasi valore.

Osservazione 6. Anche per la trasformata di Fourier, come per la serie, occorre specificare che una condizione sufficiente per la sua esistenza è l'*assoluta sommabilità* di $f(x)$ espressa da:

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx < \infty,$$

ovvero, come prima, la quantità definita tramite l'integrale deve essere finita. Tale condizione non è, tuttavia, restrittiva, nel senso che, modificando opportunamente la definizione, è possibile considerare la trasformata di Fourier anche per segnali che non la soddisfano. In tal caso il risultato che si ottiene sarà di solito un oggetto più generale delle funzioni, come mostra il seguente esempio.

Esempio. Consideriamo di nuovo il coseno: possiamo immaginare che rappresenti un'onda sonora semplice.

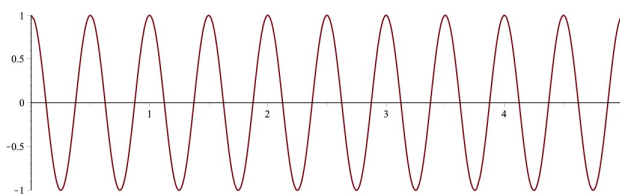


Figura 2.2: $f(x) = \cos(4\pi x)$.

Ci chiediamo se sia possibile riconoscere la nota corrispondente, ovvero la frequenza ad esso associata. La risposta è affermativa, in quanto la trasformata di Fourier trasforma la funzione che descrive il suono in una che descrive la frequenza del suono. Più precisamente, applicando la trasformata di Fourier si ottiene la seguente rappresentazione grafica.

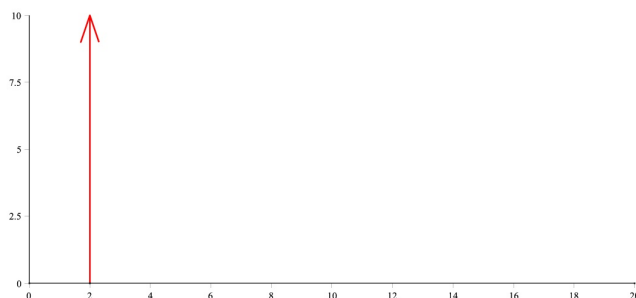


Figura 2.3: Trasformata di Fourier della funzione $f(x) = \cos(4\pi x)$, relativa alle frequenze positive.

Come anticipato, in questo caso la trasformata di Fourier del segnale non è più una funzione ma una distribuzione. Nell'esempio considerato la distribuzione ottenuta è legata alla *delta di Dirac* ed esprime il fatto che tutto il contenuto energetico delle frequenze è concentrato in un solo punto che, in questo caso, coincide con $\omega = 2$. Tale distribuzione non è rappresentabile in modo standard tramite un grafico come nel caso delle funzioni. Si tratta, infatti, di un "limite" di funzioni che si concentrano sempre più nel punto $\omega = 2$. Tale limite non è implementabile con il software Maple e, per questo motivo, in Figura 2.3 è stato disegnato manualmente tramite una freccia centrata in $\omega = 2$. Uno studio più approfondito sulle distribuzioni tuttavia esula dallo scopo di queste note.

Consideriamo ora un'onda sonora composta (ad esempio un accordo). In questo caso è possibile risalire alle onde sonore semplici (ovvero alle note che compongono l'accordo)?

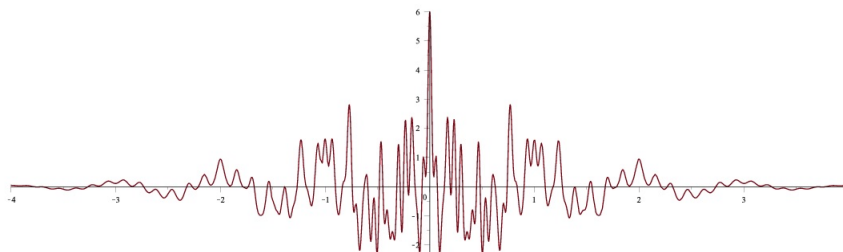


Figura 2.4: Esempio di segnale $f(x)$ contenente diverse frequenze difficilmente distinguibili. Sull'asse orizzontale leggiamo la variabile temporale x .

Applicando la trasformata di Fourier ad un segnale di questo tipo, si ottiene una rappresentazione in cui compaiono tante “collinette” quante sono le frequenze del segnale originario.

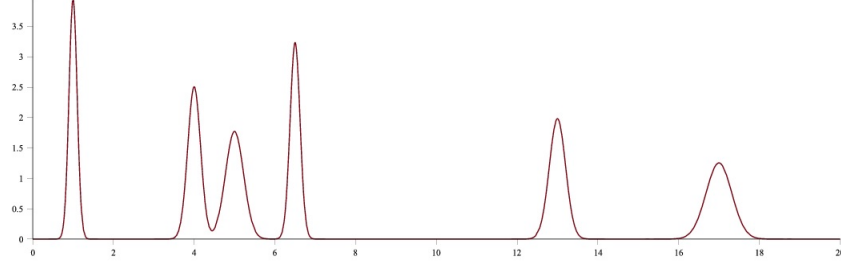


Figura 2.5: Trasformata di Fourier $\hat{f}(\omega)$ corrispondente: sull’asse orizzontale ora “leggiamo” le frequenze ω . Come si vede in figura, ci sono 6 funzioni “a campana”: ognuna è centrata nel valore della frequenza corrispondente contenuta nel segnale originario.

Queste “collinette” sono funzioni *a campana* (o *funzioni gaussiane*), centrate esattamente nella frequenza contenuta nel segnale (hanno proprio un picco in corrispondenza del valore).

2.3 Il principio di indeterminazione

Dato un segnale $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, introduciamo le seguenti definizioni e notazioni:

- $\sigma_f^2 = \int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 dx$ dispersione dell’energia rispetto al tempo;
- $\sigma_{\hat{f}}^2 = \int_{\mathbb{R}} \omega^2 |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega$ dispersione dell’energia rispetto alle frequenze;
- $E_f = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx$ energia del segnale f .

Il valore definito da

$$\Delta x = \frac{\sigma_f^2}{E_f}$$

è chiamato *durata effettiva* del segnale f . Il valore definito da

$$\Delta \omega = \frac{\sigma_{\hat{f}}^2}{E_f}$$

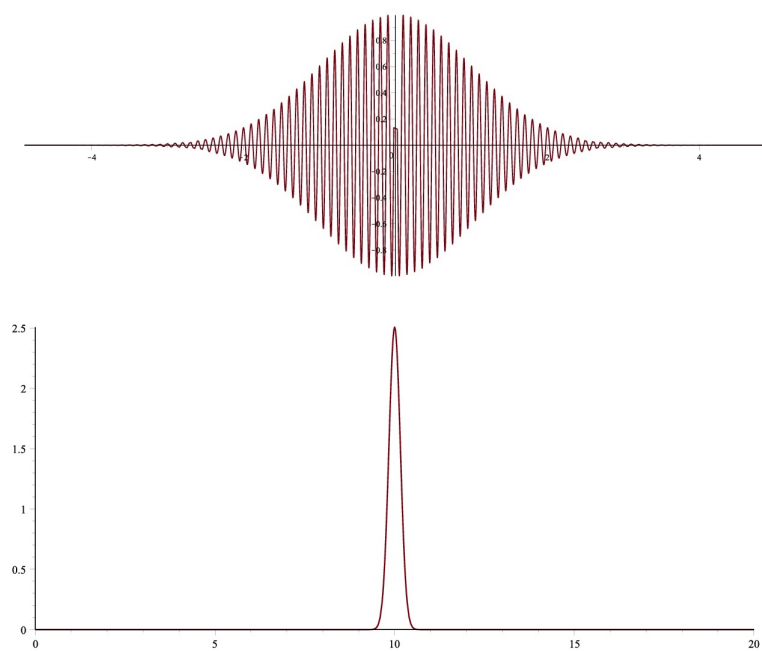
è chiamato *banda di frequenze effettiva*. f ed \hat{f} possono essere interpretati come due modi equivalenti di rappresentare la distribuzione di energia del segnale, il primo rispetto al tempo, il secondo rispetto alle frequenze. Il *principio di indeterminazione* è una relazione tra Δx e $\Delta\omega$. Esso afferma che

non si può avere dispersione delle frequenze e del tempo entrambe piccole a piacere.

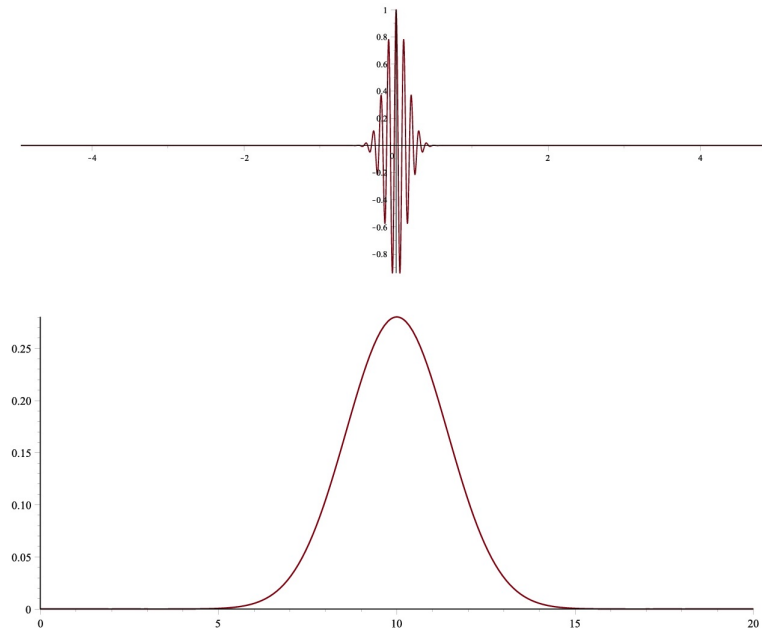
Matematicamente tale concetto è espresso dalla seguente relazione

$$\Delta x \cdot \Delta\omega \geq \frac{1}{4\pi}.$$

Quindi, se Δx è piccolo, $\Delta\omega$ dovrà necessariamente essere grande (questo è legato al fatto che, se il segnale esiste per un tempo molto breve, è più difficile distinguere in modo preciso le frequenze). Viceversa, se Δx è grande, $\Delta\omega$ sarà piccolo (e, pertanto, considerando intervalli temporali molto lunghi si potranno determinare frequenze ben precise). Nelle seguenti figure si evidenzia questa “dualità” tra la durata del segnale e la concentrazione della sua trasformata di Fourier.



Segnale $f(x)$ di “lunga durata” e corrispondente trasformata di Fourier $\hat{f}(\omega)$ molto concentrata.

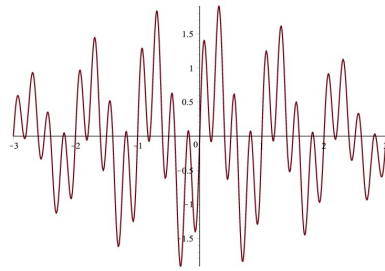


Segnale $f(x)$ di “breve durata” e corrispondente trasformata di Fourier $\hat{f}(\omega)$ poco concentrata.

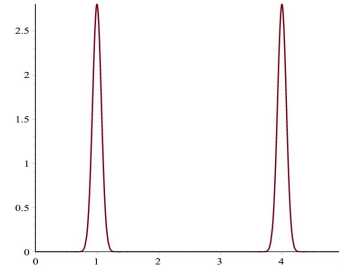
2.4 Limiti della trasformata di Fourier

La trasformata di Fourier, come abbiamo visto, segnala le frequenze che compaiono in un dato segnale, permettendo ad esempio di risalire alle singole frequenze presenti in un'onda sonora composta. Essa ha però un limite, che illustriamo con i seguenti esempi.

Esempio 1.

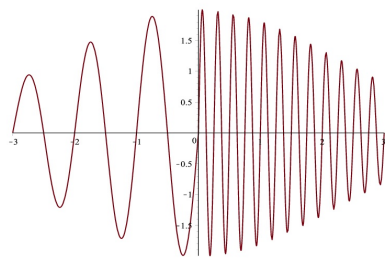


Segnale f_1

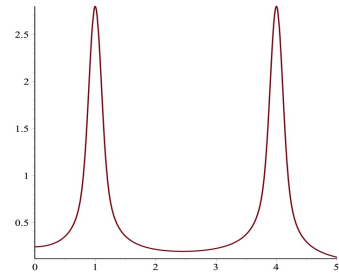


Trasformata di Fourier \hat{f}_1

Esempio 2.

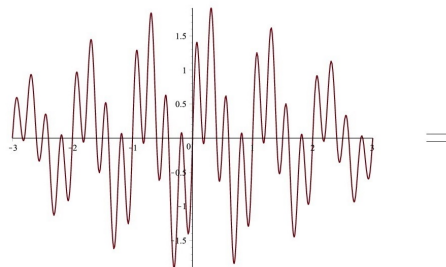


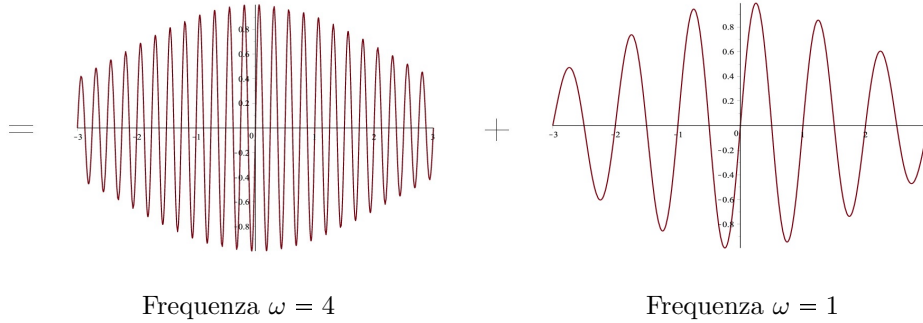
Segnale f_2



Trasformata di Fourier \hat{f}_2

Possiamo notare che le trasformate di Fourier dei due segnali f_1 e f_2 sono simili (in particolare hanno gli stessi picchi in corrispondenza delle stesse frequenze $\omega = 1$ e $\omega = 4$), mentre i due segnali di partenza sono molto diversi tra loro. La spiegazione di questo fenomeno è che il segnale f_1 è costituito dalla somma di due frequenze, nel modo seguente:





Le due frequenze che, sommate, generano f_1 sono le stesse che compaiono in f_2 , con l'unica differenza che, in f_1 , esse *suonano* contemporaneamente, mentre in f_2 esse *suonano* in successione, una dopo l'altra.

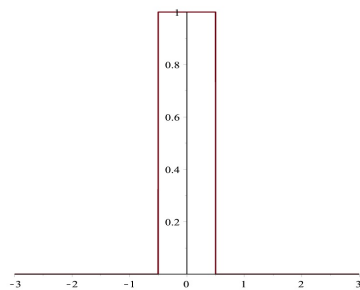
Guardando il grafico della trasformata di Fourier, riusciamo effettivamente a riconoscere che nei due segnali compaiono le frequenze 1 e 4, ma non riusciamo a capire *quando* compaiono. Quest'informazione in realtà è contenuta nella trasformata di Fourier (infatti le due trasformate non sono perfettamente identiche), ma non è chiaramente individuabile. Per rendere questa informazione *leggibile* in modo semplice, c'è bisogno di un'idea nuova, che presenteremo nel prossimo paragrafo.

Capitolo 3

La trasformata di Gabor

Riprendiamo gli esempi del paragrafo precedente, e cerchiamo di formalizzare un metodo (basato sulla trasformata di Fourier) che permetta non solo di individuare le frequenze del segnale, ma di mettere in evidenza anche in quali intervalli di tempo esse compaiono. Per fare questo, non possiamo analizzare tutto il segnale contemporaneamente, ma dobbiamo analizzarne un tratto per volta. In questo modo, diventerà evidente che, in ogni tratto del segnale f_1 sono presenti contemporaneamente entrambe le frequenze, mentre, per quanto riguarda f_2 , in tratti diversi del segnale vi sono frequenze diverse.

Matematicamente si tratta di “tagliare” il segnale, moltiplicandolo per una “funzione finestra” che viene fatta spostare nel tempo. Successivamente si applica la trasformata di Fourier al segnale tagliato. In tal modo la trasformata coinvolge soltanto le frequenze che cadono nell’intervallo determinato dalla “finestra” e non tutte quelle presenti nel segnale stesso. Consideriamo per esempio una funzione finestra $g(x)$ del seguente tipo:



Finestra g

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Lo spostamento della finestra nel tempo si effettua tramite una traslazione, cioè considerando $g(t - x)$; la trasformata di Gabor di f si definisce quindi come la trasformata di Fourier di f moltiplicata per una traslazione di g . Precisamente, si ha la seguente definizione.

Definizione 7. Fissata una “funzione finestra” opportuna $g \neq 0$, la **trasformata di Gabor** (detta anche **short-time Fourier transform** o, ancora, **windowed Fourier transform**) di un segnale f rispetto a g è data da

$$V_g(f)(x, \omega) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i \omega t} f(t) \overline{g(t - x)} dt, \quad \text{per ogni } x, \omega \in \mathbb{R}.$$

Questa trasformata deve il suo nome a **Dennis Gabor**, ingegnere elettrico e fisico, noto per l’invenzione dell’olografia per cui ha ricevuto il Premio Nobel nel 1971.



Figura 3.1: Dennis Gabor (1900 – 1979)

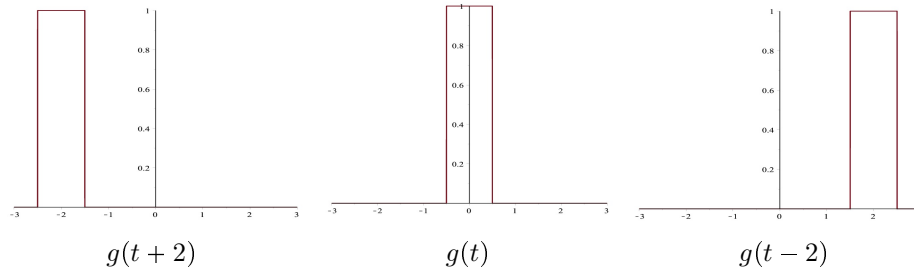
Osserviamo che nella definizione di $V_g f(x, \omega)$ compare il complesso coniugato di $g(t - x)$ (si veda l’Appendice per un’introduzione sui numeri complessi); questo è dovuto a motivazioni matematiche formali che esulano dagli obbiettivi della presente trattazione. Negli esempi che considereremo prenderemo in considerazione finestre g reali, per cui il complesso coniugato di g coincide con g stessa (nel seguito ignoreremo dunque la coniugazione complessa sulla finestra g).

A differenza della trasformata di Fourier, la *trasformata di Gabor* di un segnale è quindi una funzione in due variabili, il tempo x e la frequenza ω . Essa fornisce indicazioni sia sulle frequenze sia sui tempi in cui esse compaiono nel segnale.

Osserviamo anche che, nella definizione di trasformata di Gabor, non vi è una scelta unica della funzione finestra; la finestra g , che abbiamo considerato sopra, ha il vantaggio di tagliare il segnale senza modificarlo, però il

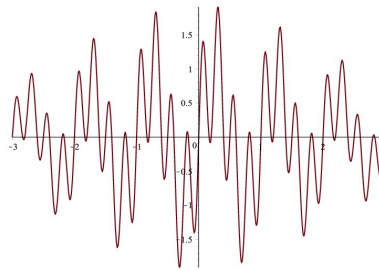
fatto che non sia continua produce delle irregolarità nelle rappresentazioni. Per questo motivo, spesso si preferisce considerare finestre di tipo gaussiano, che, pur modificando leggermente il segnale, assicurano rappresentazioni più regolari e facilmente leggibili. Per testi più approfonditi sull'argomento rimandiamo a [1] e [2].

Vogliamo ora analizzare la trasformata di Gabor degli esempi del paragrafo 7. Osserviamo innanzitutto cosa succede quando moltiplichiamo i corrispondenti segnali per $g(t - x)$; a titolo esemplificativo, consideriamo $x = -2$, $x = 0$, $x = 2$:

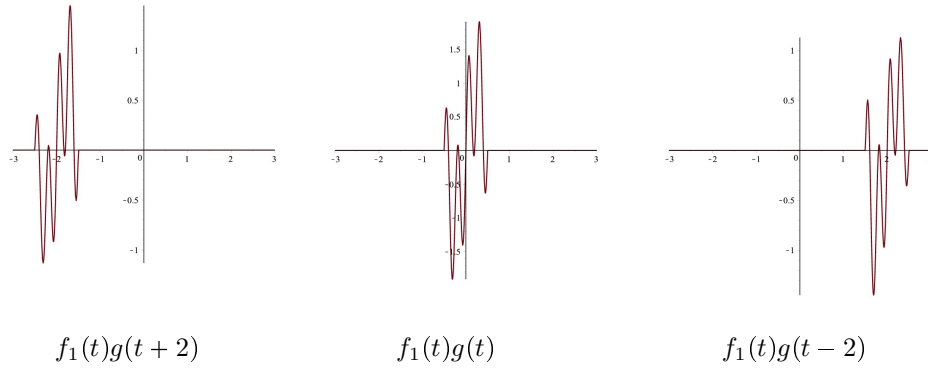


Otteniamo quindi i seguenti grafici di $f(t)g(t - x)$.

Esempio 1.

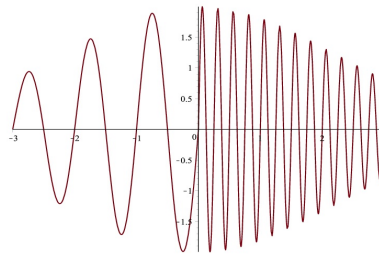


Segnale f_1

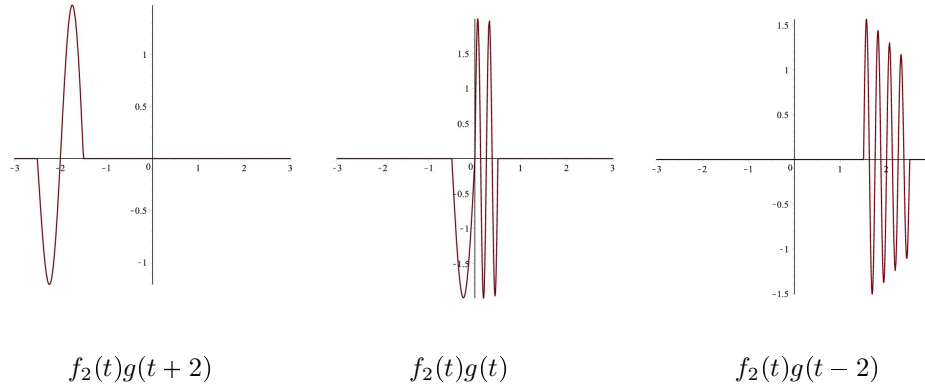


Si nota già da questi grafici che il segnale tagliato contiene sempre le stesse frequenze, sia per $x < 0$ che per $x > 0$.

Esempio 2.

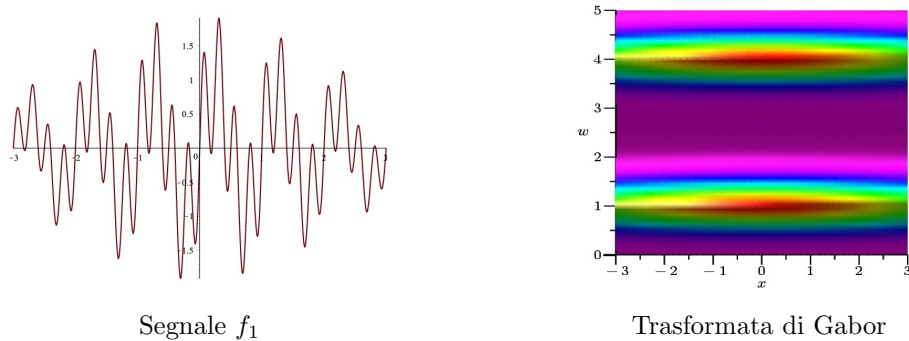


Segnale f_2



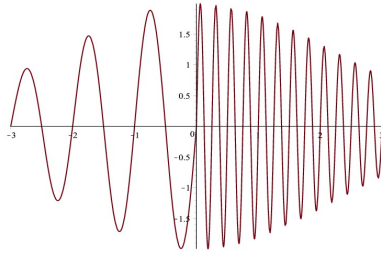
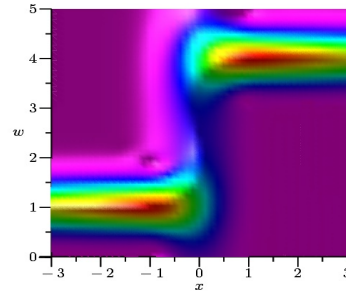
A differenza dell'esempio precedente, qui si nota che i diversi tagli del segnale contengono diverse frequenze, per $x < 0$ e per $x > 0$. Notiamo anche che, in questo caso, sorge un problema, evidenziato nel grafico centrale: quando tagliamo il segnale vicino a $x = 0$, c'è un' "interferenza" tra la frequenza $\omega = 1$, presente per $x < 0$, e la frequenza $\omega = 4$, presente per $x > 0$. Di tale problema e delle sue conseguenze sui grafici della corrispondente trasformata di Gabor parleremo più avanti. Riportiamo ora i grafici delle trasformate di Gabor di f_1 e f_2 . In queste rappresentazioni leggiamo i tempi x sull'asse orizzontale, e le frequenze ω su quello verticale.¹

Esempio 1.



Esempio 2.

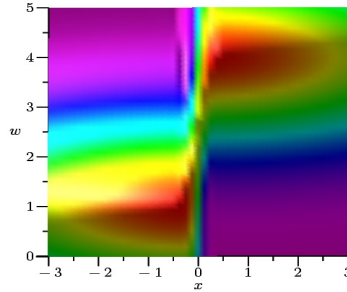
¹I grafici delle trasformate di Gabor che presentiamo nei prossimi paragrafi sono ottenuti con una finestra di tipo gaussiano

Segnale f_2 

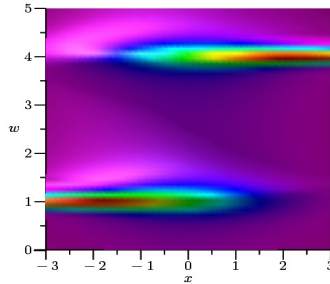
Trasformata di Gabor

I grafici delle trasformate di Gabor di f_1 e f_2 mostrano chiaramente il fatto che, nel primo caso, le due frequenze $\omega = 1$ e $\omega = 4$ compaiono in contemporanea, mentre nel secondo caso compaiono in successione.

Vogliamo ora soffermarci sul secondo esempio, e analizzare il comportamento vicino a $x = 0$. Abbiamo già osservato che, quando tagliamo il segnale f_2 vicino all'origine, vediamo nella stessa “finestra” entrambe le frequenze; questo ha un riscontro nella corrispondente trasformata di Gabor, in cui notiamo che le due frequenze, vicino a $x = 0$, non sono perfettamente separate, ma c'è una sorta di “interferenza” tra di loro, nonostante nel segnale di partenza esse siano nettamente distinte nel tempo. Potremmo tentare di limitare questo problema prendendo una finestra g molto stretta, in modo da “vedere” entrambe le frequenze per il minor tempo possibile. Questo però causa un altro problema: prendere una finestra molto stretta corrisponde ad analizzare volta per volta una parte molto piccola del segnale, e come già osservato nel paragrafo 6, da un tratto molto piccolo del segnale, è più difficile individuare correttamente le frequenze. Quindi, se da un lato una finestra stretta permette di aumentare la precisione sui tempi, dall'altro compromette la precisione sulle frequenze. Calcolando $V_g f_2$ con una finestra molto stretta, si ottiene infatti il grafico seguente.

Trasformata di Gabor di f_2 , con finestra stretta

D'altra parte, una finestra larga permette di individuare in modo più preciso le frequenze, ma aumenta anche la zona in cui nel segnale tagliato compaiono entrambe le frequenze; il risultato è una maggiore precisione nelle frequenze, e una minore precisione sui tempi, come si vede nel grafico seguente.

Trasformata di Gabor di f_2 , con finestra larga

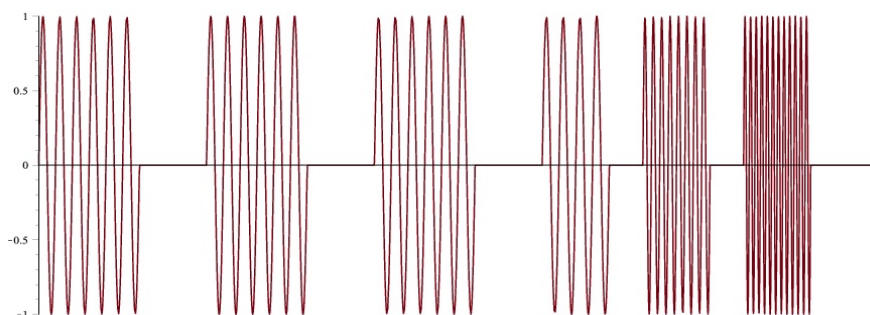
Si potrebbe tentare di ottenere una rappresentazione migliore combinando opportunamente le due precedenti. Per esempio, il prodotto tra una trasformata di Gabor con finestra stretta e una con finestra larga dà in genere risultati migliori sia sui tempi che sulle frequenze, introducendo tuttavia altri tipi di interferenze su cui non ci soffermiamo in queste note.

Osserviamo che questa “dualità” tra tempi e frequenze, per cui un aumento della precisione da un lato comporta una diminuzione dall'altro, è una caratteristica intrinseca della trasformata di Gabor, legata al principio di indeterminazione, e si può formalizzare in modo preciso dal punto di vista matematico. Inoltre, è possibile costruire rappresentazioni più sofisticate della trasformata di Gabor, che permettano, almeno su determinate classi

di segnali, di ottenere una precisione migliore su tempi e frequenze. Queste questioni tuttavia vanno al di là degli obbiettivi di questa trattazione.

3.1 La partitura musicale

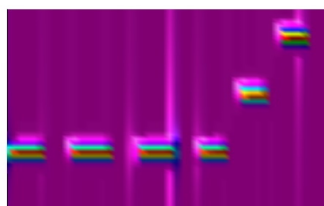
Consideriamo un segnale di questo tipo:



Se un musicista, sentendo suonare questo segnale, lo volesse trascrivere in notazione musicale, scriverebbe qualcosa del genere



D'altra parte, possiamo calcolare la trasformata di Gabor del segnale, e otteniamo il seguente grafico:



Notiamo il parallelismo delle due rappresentazioni. L'analisi tempo-frequenza del segnale, tramite la trasformata di Gabor, ha prodotto qualcosa di simile allo spartito musicale di cui quel segnale è espressione. In entrambi i casi leggiamo, in orizzontale, lo scorrere del tempo e, in verticale, le frequenze presenti nei vari intervalli temporali.

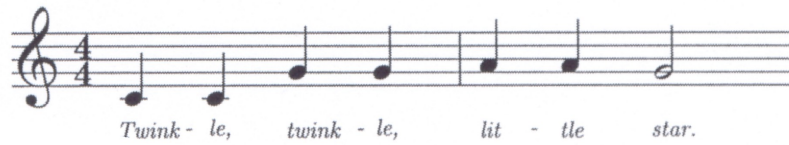
La scrittura di uno spartito equivale dunque all'*analisi del segnale f* in termini dell'informazione tempo-frequenza. Viceversa, suonare corrisponde

all'operazione di *sintesi* o *ricostruzione* del segnale originale f a partire dalla sua rappresentazione tempo-frequenza.

Osserviamo poi che una nota musicale fissa la lunghezza, il volume e una certa combinazione di frequenze. Pertanto una nota costituisce la più piccola e indivisibile parte (atomo) della musica. Lo spartito può essere visto come la decomposizione della musica in atomi tempo-frequenza.

Sebbene in generale un segnale musicale f possa appartenere a uno spazio infinito-dimensionale, uno spartito musicale contiene solo una quantità finita di informazione. Lo spartito risulta quindi solo un'approssimazione e la relazione tra la musica e lo spartito non può essere biunivoca.

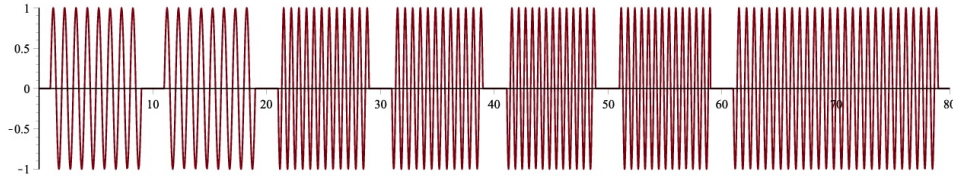
Presentiamo ora un altro esempio che mette in luce il parallelismo tra la trasformata di Gabor e la partitura musicale. Partiamo dalla seguente figura,



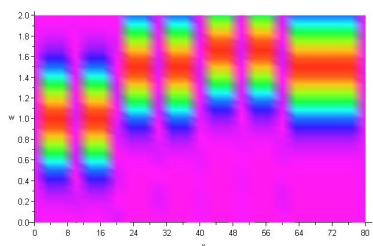
che esprime le prime due battute di *Twinkle twinkle little star* e anticipa quale dovrebbe essere il grafico della trasformata di Gabor.

Consideriamo ora il seguente segnale acustico che modella le note della partitura musicale precedente

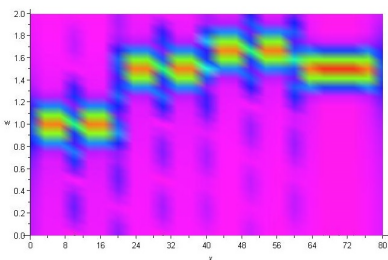
$$f(t) = \begin{cases} \sin(2\pi \cdot x) & \text{se } 1 < x < 9 \\ \sin(2\pi \cdot x) & \text{se } 11 < x < 19 \\ \sin(2\pi \cdot 3/2 \cdot x) & \text{se } 21 < x < 29 \\ \sin(2\pi \cdot 3/2 \cdot x) & \text{se } 31 < x < 39 \\ \sin(2\pi \cdot 5/3 \cdot x) & \text{se } 41 < x < 49 \\ \sin(2\pi \cdot 5/3 \cdot x) & \text{se } 51 < x < 59 \\ \sin(2\pi \cdot 3/2 \cdot x) & \text{se } 61 < x < 79 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



Applichiamo la trasformata di Gabor al segnale acustico $f(x)$ precedente. In particolare la calcoliamo utilizzando due funzioni finestra differenti.



In questo caso è stata usata una finestra gaussiana con supporto nei tempi stretto e, pertanto, largo spettro. Di conseguenza la trasformata di Gabor possiede una buona risoluzione temporale che è evidente nella netta separazione rispetto al tempo delle sette componenti del segnale. Tuttavia si hanno larghe bande di frequenza e questo ci mostra la povera risoluzione spettrale.



In questo secondo caso è stata usata una finestra gaussiana con supporto largo nei tempi e, dunque, stretto spettro. In questa situazione la trasformata di Gabor fornisce una buona risoluzione rispetto alle frequenze per ogni componente del segnale, ma la risoluzione temporale è mediocre, come si nota dalla scarsa precisione nella separazione temporale tra le note.

Abbiamo, quindi, messo ora in luce su un esempio musicale la differenza di comportamento tra una trasformata di Gabor con finestra stretta ed una larga, fenomeno le cui motivazioni erano state analizzate nel paragrafo precedente. In ogni caso possiamo comunque identificare le regioni di massima intensità di energia sul piano tempo-frequenza con corrispondenti note dello spartito musicale, a riprova del fatto che la rappresentazione tempo-frequenza è il corrispettivo matematico della partitura musicale.

3.2 Applicazioni: analisi, elaborazione e ricostruzione di segnali

Dopo aver costruito la trasformata di Gabor e averne analizzato i legami con la partitura musicale è naturale chiedersi quali applicazioni tutto ciò possa avere. A questo proposito vogliamo brevemente illustrare in questo

paragrafo uno dei suoi utilizzi più importanti che consiste nella possibilità di “ripulire” i segnali da vari disturbi.

Questa operazione prevede essenzialmente 3 fasi:

(1) **Analisi:** il segnale viene analizzato nello spazio tempo-frequenza tramite la trasformata di Gabor. Dato un segnale $f(x)$ questa prima operazione consiste quindi nel passaggio:

$$f(x) \longrightarrow V_g f(x, \omega)$$

(g è una opportuna funzione finestra). Notiamo incidentalmente che la trasformata di Gabor non è affatto l'unica trasformata disponibile. Esistono infatti svariate altre trasformazioni ognuna delle quali presenta a seconda dei casi vantaggi e svantaggi, non ci soffermeremo tuttavia su questo aspetto.

(2) **Elaborazione:** Una volta che si ha a disposizione il segnale nello spazio tempo-frequenza si cerca di distinguere le frequenze effettivamente rilevanti dai “disturbi”. Moltiplicando poi il segnale trasformato, cioè $V_g f(x, \omega)$, per una opportuna funzione che sia nulla nelle zone dello spazio tempo-frequenza individuate come disturbi è possibile “ripulire” il segnale. La distinzione tra disturbi e vere frequenze è, come si può immaginare, una questione assai delicata su cui non ci soffermeremo. Semplificando, si può immaginare ad esempio che in un determinato intervallo di tempo $[a, b]$ non ci si aspetti frequenze in una determinata fascia $[\alpha, \beta]$. Se nel rettangolo $[a, b] \times [\alpha, \beta]$ risultasse $V_g f(x, \omega)$ diversa da zero sarà allora chiaro che si tratta di un disturbo. Per eliminarlo sarà sufficiente moltiplicare $V_g f(x, \omega)$ per una funzione $a(x, \omega)$ che sia zero in $[a, b] \times [\alpha, \beta]$. Il secondo passo consiste quindi nella moltiplicazione:

$$V_g f(x, \omega) \longrightarrow V_g f(x, \omega) a(x, \omega)$$

(3) **Ricostruzione:** il segnale, modificato al punto (2), viene ricostruito a partire dalla sua rappresentazione nel piano tempo-frequenza tramite l'applicazione di una “operazione inversa” della trasformata di Gabor che viene denominata “formula di ricostruzione”. La descrizione di questa formula esula dagli scopi di queste note, ci limitiamo a scrivere la sua espressione che è la seguente:

$$V_g f(x, \omega) a(x, \omega) \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^2} a(x, \omega) V_g f(x, \omega) e^{2\pi i \omega t} g(t - x) dx d\omega$$

L'applicazione in successione delle tre operazioni predendenti prende il nome di “operatore di localizzazione”. Lo studio degli operatori di localizzazione è uno dei settori fondamentali dell'analisi dei segnali. Operatori di questo tipo agiscono sui segnali come filtri variabili nel tempo “lasciando passare” o eliminando le frequenze al variare del tempo a seconda della funzione $a(x, \omega)$ usata nella fase (2).

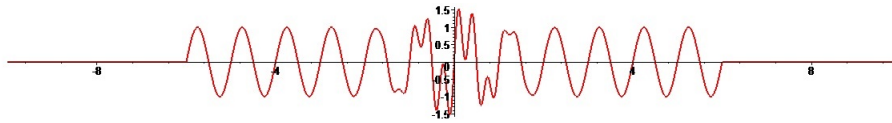
Riassumendo:

$$f(x) \longrightarrow \tilde{f}(x) = \underbrace{\int_{\mathbb{R}^{2d}} a(x, \omega) \underbrace{V_g f(x, \omega)}_{\text{analisi}} e^{2\pi i \omega t} g(t - x) dx d\omega}_{\substack{\text{elaborazione} \\ \text{ricostruzione}}} \left. \vphantom{\int_{\mathbb{R}^{2d}}} \right\} \begin{array}{l} \text{operatore} \\ \text{di} \\ \text{localizzazione} \end{array}$$

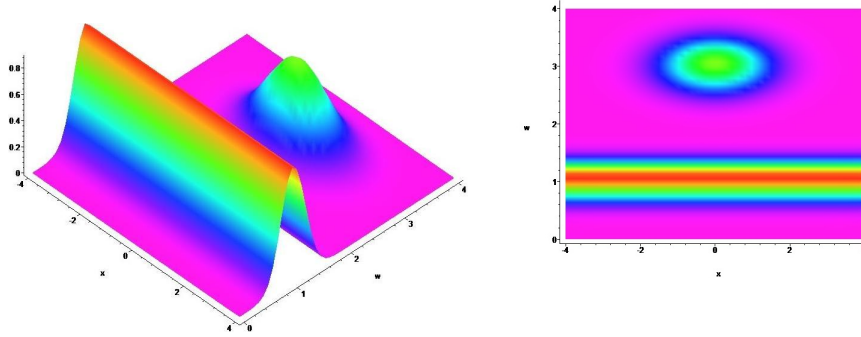
dove $f(x)$ è il segnale originario, $\tilde{f}(x)$ è il segnale “ripulito”.

Per concludere ci proponiamo di illustrare su un semplicissimo esempio la tecnica appena descritta.

Consideriamo il segnale seguente contenente nell'intervallo di tempo $[-4, 4]$ la frequenza $\omega = 1$ soggetta ad un “disturbo” durante l'intervallo $[-1.5, 1.5]$.



Applichiamo la trasformata di Gabor scegliendo per esempio come funzione finestra la gaussiana $g(t) = e^{-t^2}$. Otterremo il grafico:

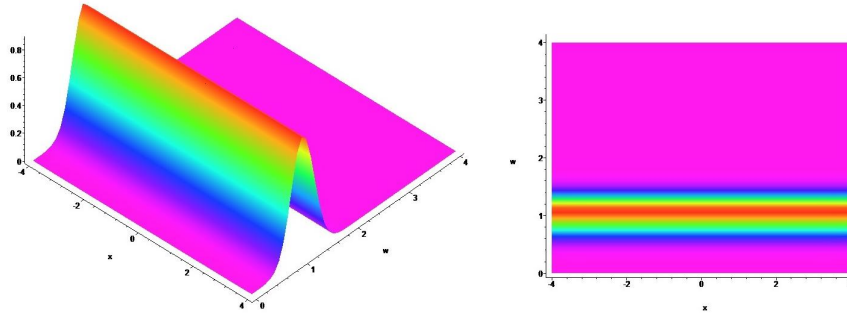


visto rispettivamente in prospettiva e dall'alto.

A differenza di quanto avviene con il grafico del segnale originario, è ora chiaramente riconoscibile che il disturbo è contenuto nel rettangolo $R = [-2, 2] \times [2, 4]$ dello spazio tempo-frequenza. Definiamo allora, ad esempio, $a = \chi_R$, ovvero

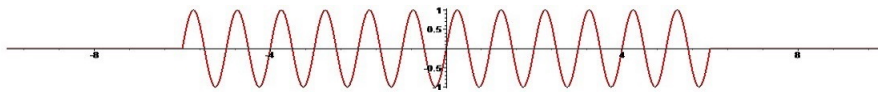
$$a(x, \omega) = \begin{cases} 1 & \text{per } (x, \omega) \in R; \\ 0 & \text{per } (x, \omega) \notin R. \end{cases}$$

Per il prodotto $a(x, \omega)V_g f(x, \omega)$ otteniamo il grafico:



visto rispettivamente in prospettiva e dall'alto.

Come si può vedere il disturbo è stato cancellato. Ricostruendo ora il segnale con la formula di ricostruzione otteniamo:



Ciò corrisponde esattamente alla frequenza $\omega = 1$ “ripulita” dal disturbo originario.

Il principio qui illustrato trova per esempio applicazione nelle tecniche di ripulitura di vecchie incisioni in cui siano presenti fruscii ed altri disturbi.

3.3 Conclusione

Gli argomenti trattati e gli esempi proposti sono stati volutamente semplificati rispetto alle situazioni che si incontrano realmente nelle applicazioni. Scopo di queste note è infatti fornire una presentazione qualitativa ed intuitiva dell'analisi dei segnali senza pretese di completezza e senza eccedere nel rigore matematico. La scelta degli argomenti e del tipo di presentazione riflettono inoltre l'interesse ed i gusti degli autori. Riportiamo nella bibliografia alcuni testi più rigorosi ed approfonditi su questi temi. Ci auguriamo comunque di aver dato un esempio di come una buona comprensione del mondo che ci circonda si basi inevitabilmente sullo sviluppo di adeguati modelli matematici.

Bibliografia

- [1] C. Gasquet, P. Witomski, *Fourier Analysis and Applications: Filtering, Numerical Computation, Wavelets Harmonic Analysis in Phase Space*, Springer-Verlag, 1998.
- [2] K. Gröchenig. *Foundations of Time-Frequency Analysis*. Birkhäuser, Boston, 2001.
- [3] D. Kammler, *A First Course in Fourier Analysis*, Cambridge University Press, 2007.