ESAME DI OTTIMIZZAZIONE COMBINATORIA
APPELLO DEL 15/09/2020

Esercizio 1. (7 punti) Si consideri il seguente programma lineare intero.

$$\begin{aligned} \max\ z = & x_1 + x_2 \\ \text{soggetto a}\quad & 3x_1 + 2x_2 \le 5 \\ & 3x_1 - 3x_2 \le 1 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+. \end{aligned}$$

Il suo rilassamento continuo ha la seguente forma standard e riformulazione ottima.

$$\begin{aligned} \max\ z = & x_1 + x_2 \\ \text{soggetto a}\quad & 3x_1 + 2x_2 + x_3 \le 5 \\ & 3x_1 - 3x_2 - x_4 \le 1 \\ & x_1, x_2 \ge 0. \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \max\quad z &= \tfrac{29}{15} - \tfrac{2}{5}x_3 - \tfrac{1}{15}x_4 \\ x_1 &= \tfrac{17}{15} - \tfrac{1}{5}x_3 + \tfrac{2}{15}x_4 \\ x_2 &= \tfrac{4}{5} - \tfrac{1}{5}x_3 - \tfrac{1}{5}x_4 \end{aligned}$$

(a) Effettuare il branch del nodo radice e valutare i rilassamenti dei nodi figli utilizzando il metodo del simplesso duale. (4 punti)

(b) Sul rilassamento del nodo radice, generare un taglio di Gomory e riottimizzare utilizzando il simplesso duale. (3 punti)

Esercizio 2. (7 punti) Data la seguente matrice delle distanze corrispondente ad un TSP metrico, determinarne una soluzione approssimata utilizzando l'algoritmo di Christofides.

$$d_{ij} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \infty & 12 & 6 & 8 & 6 & 7 \\ & \infty & 6 & 9 & 6 & 9 \\ & & \infty & 8 & 5 & 3 \\ & & & \infty & 3 & 11 \\ & & & & \infty & 8 \\ & & & & & \infty \end{pmatrix} \end{array}$$

Esercizio 3. (7 punti) Si consideri il seguente problema generico di selezione ottima di elementi da un dato insieme. Si supponga di avere un insieme S di n elementi, ciascuno dei quali caratterizzati da due parametri v_i e c_i che rappresentano rispettivamente il valore ed il costo dell'elemento i-esimo, con $i = 1, \dots, n$. Selezionare l'elemento i significa inserirlo in una delle ℓ liste disponibili pagando il costo c_i con parte del budget B_j della lista j, on $j = 1, \dots, \ell$. Supponiamo che valga la seguente: $\sum_{i=1}^{n} c_i \gg \sum_{j=1}^{\ell} B_j$. L'obiettivo è quello di selezionare un sottoinsieme degli elementi in S in modo da massizzare il valore totale degli elementi selezionati.

Supponendo di partire da una soluzione ammissibile data, discutere due possibili intorni di ricerca locale per il problema dato, studiando inoltre la complessità dell'esplorazione degli intorni proposti.

Esercizio 4. (7 punti) Si consideri il seguente problema di flusso di massimo, dove per ogni arco sono riportate le capacità. Trovare la soluzione ottima (valore totale del flusso e flussi sui singoli archi), illustrando i passi dell'algoritmo applicato, scelto tra quelli visti a lezione. Si individui infine il taglio di capacità minima.