Correttezza: induzione ed invarianti di ciclo

Esercizio 1

Si consideri il seguente algoritmo che calcola il quadrato del suo parametro:

```
Square(z)
   ▷ Pre: z numero intero ≥ 0
   ▷ Post: ritorna l’intero z²
x ← 0
y ← 0
while x < z do
   y ← y + 2x + 1
   x ← x + 1
return y
```

Si dimostri formalmente la correttezza della funzione, cioè:

- si trovi l’invariante del ciclo,
- si dimostri che l’invariante è vero inizialmente e viene mantenuto dal ciclo
- usando l’invariante si dimostri che il valore restituito è z2.

1. Invariante = condizione mantenuta all’interno del ciclo + condizione di uscita dal ciclo;
   In questo caso: $y = x^2 \wedge x \leq z$
2. All’inizio $y = 0,\ x = 0$ quindi $y = x^2 = 0$
   Per ogni iterazione $y = y + 2x + 1,\ x = x + 1$ quindi $y = 1 = x^2$
   $y = 1 + 2(1) + 1 = 4,\ x = 1 + 1 = 2$, che soddisfa $y = x^2 = 2^2 = 4$
3. Prendendo per esempio $z = 3$, il ciclo termina con $x \leq z \rightarrow x = 3$, e avremo
   $y = x^2 = 3^2 = 9 = z^2$

Esercizio 2

Nota: l’invariante non è altro che il caso base

```
k = n
z = 1
y = x
while k > 0
      if x % 2 == 1
            z = z * y
```

```
    y = y^2
    k = k/2
return z

FastExp(x, n)
if(n == 0)
    return 1
else
    y = FastExp(x, n/2)
    if(n % 2 == 1)
        return y^2 * x
    else
        return y^2
```

Esercizio 3

Ndr: pre condizione quello che deve entrare dentro il ciclo
post condizione quello che esce

```
LinSearch(A[i…j], a)
//pre-con: A array int, a intero
//post-con: k = A[k] se esiste, -1 altrimenti
//invariante: per ogni i < k-1, A[i] ≠ a
k = 0
while k < max
    if A[k] == a
        return A[k]
    else
        k++
return -1

LinSearchRec(A[i…j], k)
//pre-con: A array int, a intero
//post-con: k = A[k] se esiste, -1 altrimenti
if(i < j)
    if(i == k && A[i] ≠ nil)
        return A[i]
    else
        return LinSearchRec(A[], i++, j, k)
else
    return -1
```

Esercizio 4

```
DicSearchRec(A[i…j], a)
//Pre: A array interi, a intero
//Post: k ∈ A[i…j] = a se esiste, -1 altrimenti
if(i==j)
     if(A[i]==a)
          return i
     else
          return -1
else
     if(A[j/2]<a)
          return DicSearchRec(A[i…j/2], a)
     else
          if(A[j/2]==a)
               return j/2
          else
               return DicSearchRec(A[j/2…j], a)

DicSearchIter(A[i…j], a)
//Pre: A array interi, a intero
//Post: k ∈ A[i…j] == a se esiste, -1 altrimenti
//invariante: se A[h]==a, allora h ∈ i…j
y = i
z = j
while y≠z
     if(A[y]==a)
          return y
     else
          if(A[z]==a)
               return z
          else
               if(a < A[z])
                    z = (y+z)/2
               else
                    y = (y+z)/2
if(A[y]==a)
     return y
else
     return -1
```

Esercizio 5

1. inv: `A[j] = min(A[j…n])`
   All'inizio A[j] == A[n] quindi banalmente valido; per ogni iterazione, A[j] viene spostato indietro se minore del precedente, quindi sarà il minimo tra esso e i suoi seguenti.
2. inv: `A[i…n] ⩾ A[1…i-1]`
   Valido sempre perché è ordinato in senso non decrescente, e valido di base perché `A[1…0] = ∅` quando `i = 1`.

Alberi

Negli esercizi che seguono si assume che gli alberi binari siano realizzati con record di tre campi: key per la chiave (di solito un intero), left e right per i puntatori al sottoalbero sinistro e destro rispettivamente. Se invece gli alberi sono k-ari allora la realizzazione utilizza record a tre campi con il campo key come sopra, il campo child per il puntatore al primo dei sottoalberi, il campo sibling per il puntatore al fratello.

Esercizio 1

```
Foo(T)
parentK ← T.key
success ← true
C ← T.child
while C ≠ nil do
      success ← SumSiblings(C, parentK) ∧ Tree-DFS(C)
      C ← C.sibling
end while
return success

SumSiblings(C, p)
sum ← C.key
C ← C.sibling
while C ≠ nil do
      sum ← sum + C.key
      C ← C.sibling
end while
if sum ≠ p then
      return false
else
      return true
end if
```

Esercizio 2

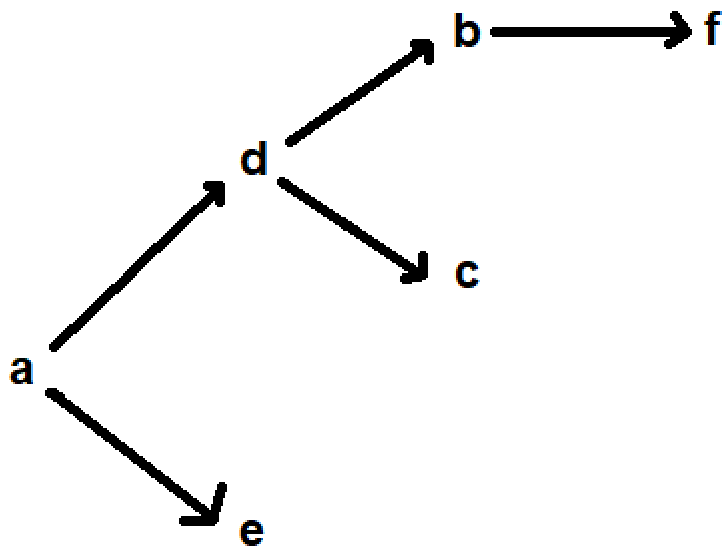
```
SommaRamo(T, k)
if k == 0 then
    k ← SommaCammino(T)
end if
C ← T.child
while C ≠ nil do
    SommaRamo(C, k)
    if C.child == nil then
        C.child ← nuova foglia V
        V.key ← k
        V.child ← V.sibling ← nil
    else
        C ← C.sibling
    end if
end while
```

```
SommaCammino(T)
k ← T.key
C ← T.child
while C ≠ nil do
    k ← k + C.key + SommaCammino(C)
    C ← C.sibling
end while
return k
```

Grafi

Esercizio 1

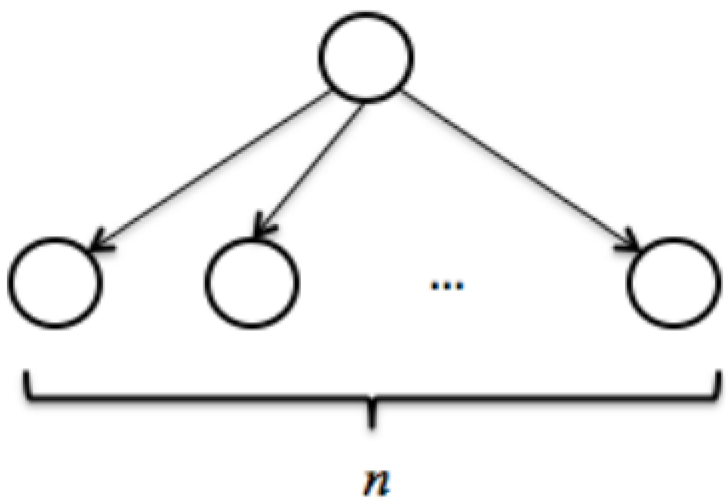
1.



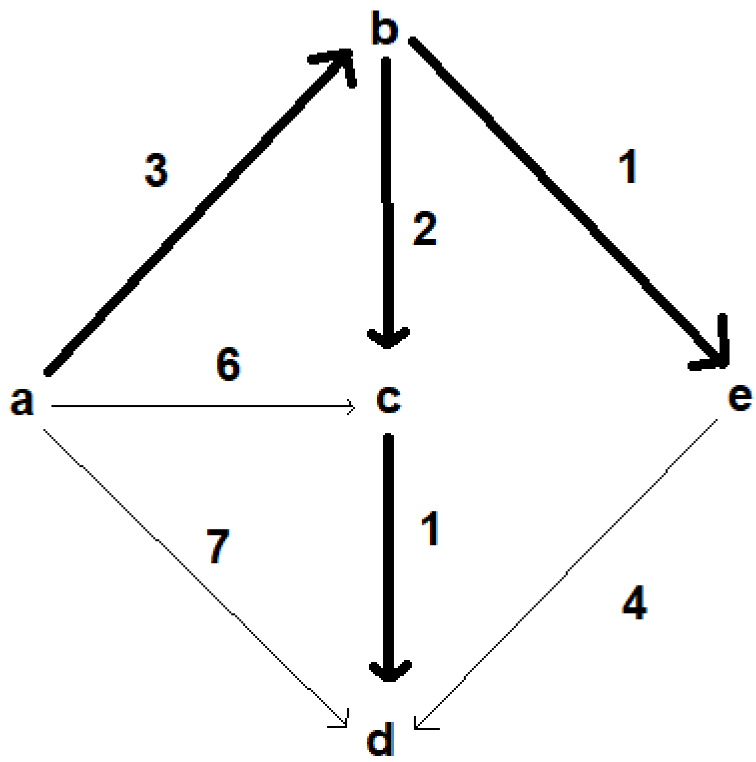
1) a (radice)
2) de (visita a, in coda d ed e)
3) ebc (visita b, in coda b e c, e già in coda)
4) bc (visita e, niente da aggiungere alla coda, a e d già visitate)
5) cf (visita b, in coda f, a ed e già visitate, c già in coda)
6) f (visita c, niente da aggiungere alla coda, a ed e già visitate)
7) ∅ (visita f, niente da aggiungere alla coda, d ed e già visitate)

2.

è un albero la cui radice r ha n figli:



Esercizio 2



NB: Dijkstra lavora su uno heap minimo (per ogni elemento n < dei figli, figlio sinistro 2n > figlio destro 2n+1)

1) a0, b∞, c∞, d∞, e∞
2) b3, d7, c6, e∞ (estrazione a; aggiornamento b, c, d; riordinamento: d>c quindi d è figlio sx di b)
3) e1, d7, c5 (estrazione b; aggiornamento c, e; riordinamento: e nuovo minimo)
4) c5, d7 (estrazione e; riordinamento: c nuovo minimo)
5) d6 (estrazione c; aggiornamento d)

Esercizi da fonti esterne

N.1

Si consideri lo heap minimo rappresentato con l'array:

`[14, 32, 18, 50, 41, 23, 90, 87, 64, 53, 43]`

ottenuto dopo l'estrazione del minimo **5**, dall'array:

1. `[5, 14, 18, 32, 41, 23, 90, 50, 64, 53, 43, 87]`
2. `[5, 14, 23, 32, 41, 18, 90, 50, 64, 53, 43, 87]`
3. `[5, 14, 18, 50, 41, 23, 90, 32, 64, 53, 43, 87]`

Da questo, dopo l'inserimento della chiave **15** si ottiene:

1. [14, 32, 15, 50, 41, 18, 90, 87, 64, 53, 43, 23]
2. [14, 32, 15, 50, 41, 23, 90, 87, 64, 53, 43, 18]
3. [14, 50, 15, 32, 41, 18, 90, 87, 64, 53, 43, 23]

Soluzione:

In un heap minimo, l'etichetta dei figli di ogni nodo (radice compresa) sono > dell'etichetta del padre.
I figli di ogni nodo sono posizionati a 2i (figlio sinistro) e 2i+1 (figlio destro).
Allora, si può notare che le configurazioni **1** e **1** sono le uniche che lasciano lo heap in uno stato corretto.

N.2

Si consideri il seguente algoritmo:

```
Casper(A[0…n-1])
     > Pre: array di interi
for i := 0 to n-2
     for j := i+1 to n-1
          if A[i] = A[j] then
               return false
return true
```

Si risponda succintamente alle seguenti domande:

1. Quando Casper(A) ritorna true?
2. Qual è la sua complessità in termini di Θ?
3. Sapreste indicare un algoritmo che risolva lo stesso problema in tempo asintoticamente migliore?

Soluzione:

1. Ritorna true se tutti i numeri interi nell'array A sono diversi;
2. $\Theta(n^2)$;
3. Serve ordinare l'array con un algoritmo come MergeSort o HeapSort per portare l'algoritmo ad una complessità di Θ(n log n).