Laurea Magistrale in Informatica
Metodi Numerici – Matteo Semplice

Esempi di esercizi da temi d'esame

Nota: I seguenti esercizi sono forniti solamente come esempi di esercizi che potrebbero comparire in un tema d'esame. Questa collezione non è in alcun modo esaustiva degli argomenti né del tipo degli esercizi che compariranno nei temi d'esame. Si ribadisce che il programma d'esame è costituito da tutti gli argomenti svolti a lezione e da quelli svolti in laboratorio, come dettagliato sulla pagina di Moodle del corso.

Esempio di tema d'esame: Ciascun tema d'esame sarà di norma costituito da tre esercizi, approssimativamente della stessa difficoltà (e valore in termini di punteggio). Un tipico tema d'esame potrebbe essere costituito dalla richiesta di svolgere gli esercizi 2, 3 e 7 in due ore.

Esame scritto: L'intero esame si svolge in laboratorio informatico, quindi con MatLab a disposizione. Quando si usa MatLab per svolgere alcune parti degli esercizi, vanno riportati sia i comandi utilizzati che i risultati ottenuti. Fanno eccezione i codici sviluppati durante i laboratori, che possono essere utlizzati liberamente senza bisogno di riportarne il contenuto.

Importante: per ottenere il punteggio pieno, tutte le risposte vanno accuratamente giustificate!

Visione dei compiti, verbalizzazione ed esame orale: pochi giorni dopo l'esame scritto (che non è verbalizzante) si tiene un appello verbalizzante. In tale occasione è possibile prendere visione dei compiti, accettare o rifiutare il voto dello scritto, oppure sostenere un esame orale (che consiste nella discussione degli esercizi del compito e in domande su tutto il programma del corso). All'esame orale sono ammessi solo gli studenti che abbiano conseguito almeno 15/30 nella prova scritta e il voto finale registrato sarà la <u>media</u> fra il voto conseguito nello scritto e quello conseguito nell'orale.

---

1. (a) Si definiscano il concetti di *errore assoluto* e di *errore relativo* nell'ambito della soluzione di un sistema lineare di N equazioni in N incognite.

   (b) Si definisca una *function* che prenda in input un intero `N` e restituisca la matrice quadrata `A` di dimensione $N \times N$ e un vettore `b` di N con elementi

$$A_{ij} = \frac{1}{i+j-1}\,, \qquad b = A \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

   (c) Per N da 2 a 15, si calcolino l'errore assoluto e quello relativo nella risoluzione del sistema lineare di matrice A e termine noto b (con un metodo a vostra scelta) e il numero di condizionamento della matrice A, riportando e commentando i risultati.

<u>Soluzione:</u>

(a) L'*errore assoluto* è la distanza fra la soluzione esatta e quella ottenuta con un metodo numerico. La distanza fra vettori si valuta usando una *norma*, come ad esempio

$$\|v\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} (v_i)^2}$$

L'*errore relativo* è il rapporto fra l'errore assoluto e la norma della soluzione esatta. Dette x e $\hat{x}$ le soluzioni esatte ed approssimate, abbiamo

$$\epsilon_A = \|x - \hat{x}\|\,, \epsilon_R = \frac{\|x - \hat{x}\|}{\|x\|}$$

(b)
```
function [A,b] = es1(N)
A=zeros(N);
for i=1:N
   for j=1:N
      A(i,j)=1/(i+j-1);
   end
end
b=A*ones(N,1);
```

(c)
```
for N=2:15
    [A,b]=es1(N);
    % Usiamo la A=LU senza pivoting programmata nel Laboratorio 2
    B = lunopivot(A);
    x = lusolve(B,b);
    ea = norm(x-ones(N,1)); %norma-2
    er = ea/norm(ones(N,1));
    c = cond(A); %condizionamento in norma-2
    disp(sprintf('%d) ea=%e er=%g cond=%g',N,ea,er,c));
end
```

produce l'ouput

```
2) ea=8.005932e-16 er=5.66105e-16 cond=19.2815
[... OMISSIS ...]
7) ea=3.814919e-08 er=1.4419e-08 cond=4.75367e+08
[... OMISSIS ...]
12) ea=5.446844e-01 er=0.157237 cond=1.69949e+16
13) ea=4.850230e+00 er=1.34521 cond=3.45908e+17
14) ea=4.204109e+01 er=11.236 cond=4.69295e+17
15) ea=5.140737e+01 er=13.2733 cond=2.44687e+17
```

Osserviamo un rapidissimo peggioramento degli errori a partire da valori molto bassi di N: per il sistema 7×7 solo 7 delle 15 cifre significative disponibili sono corrette ($\epsilon_R \simeq 10^{-8}$) e da $N = 12$ in poi nessuna cifra del risultato è corretta. Tale comportamento è completamente giustificato dalla creacita del numero di condizionamento: infatti osserviamo che la relazione teorica $\epsilon_R = \kappa\varepsilon$ fra l'errore relativo, la precisione macchina ε e il numero di condizinamento κ è approssimativamente verificata in tutti i casi testati.

2. (a) Qual è l'effetto dei seguenti comandi MatLab?

```
t=linspace(0,2*pi);
plot(3+2*cos(t) , 1+2*sin(t));
```

(b) Definire i concetti di *autovalore* e *autovettore* di una matrice ed enunciare il Primo Teorema di Gershgorin relativo alla localizzazione degli autovalori di una matrice quadrata A.

(c) Predisporre una function che, presa in ingresso una matrice A, verifichi che sia quadrata, e mostri a video in un grafico la regione in cui si trovano i suoi autovalori secondo il teorema prima enunciato. Verificarne la correttezza applicandola alla matrice

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 2 \\ -1 & 11 & 1 \\ 0 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

i cui autovalori sono approssimativamente $10.0338, 8.0376, -5.0714$.

3. (a) Definire brevemente il concetto di pivoting nelle decomposizione LU di una matrice quadrata ed illustrarne la necessità o l'utilità nella la risoluzione di un sistema lineare.

(b) Calcolare la decomposizione LU della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

In questo caso il pivoting è necessario?

(c) Calcolare la soluzione esatta del sistema lineare

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + 2z = 2 \\ x + 2y + 2z = 1 \end{cases}$$

4. (a) Definire il concetto di polinomio interpolatore di un insieme di coppie di dati (x_i, y_i). In particolare, quando possiamo garantire che il polinomio interpolatore esiste ed è unico?
   (b) Determinare il polinomio $p(x)$ interpolatore della funzione

$$f(x) = sin(e^x - 1)$$

   sull'intervallo $[0, 2]$ usando 3 nodi equispaziati.
   (c) Valutare l'errore di interpolazione e ripetere usando 5 nodi equispaziati.

   Nota: per il punto (a) occorre rispondere con un enunciato preciso del fatto che esiste ed è unico un polinomio di grado N che interpola $N + 1$ dati *con ascisse tutte diverse fra loro.* Il punteggio intero sarà assegnato alle risposte che includono anche una giustificazione del perché. Idealmente tale giustificazione è quella illustrata a lezione (usando i polinomi di Lagrange), anche se un semplice conteggio del numero di coefficienti incogniti e del numero di relazioni fra di essi indotte dal passaggio per gli $N+1$ dati è sufficiente.

   L'errore nel punto (c) risulta rispetivamente di 1.5390 e 0.2545

5. (a) Definire il concetto di interpolazione ai minimi quadrati di una serie di dati $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^{N}$ mediante un polinomio lineare $r(x)$. Come si possono ricavare i coefficienti del polinomio $r(x)$?
   (b) Determinare la retta che approssima ai minimi quadrati i dati

x	0	1.2	2.1	3.4	4.0	4.2
y	0	0.5	3.1	2.5	5.1	3.2

   Risultato: $r(x) = 0.9745x - 0.02$

6. Si consideri la seguente function MatLab

```
1  function V = es6(f,a,b,t)
2  % Input
3  % f    : function handle
4  % a,b,t: double
5  e=[a,b]; fe=f(e);
6  m=(a+b)/2; fm=f(m);
7  n=1;
8  v=(b-a)/n * sum( [1/3*fe , 2/3*fm ,-1/6*(f(a)+f(b))]);
9  p=2*t;
10 while (p>t)
11     n=2*n;
12     h=(b-a)/n;
13     e=[e,m]; fe=[fe,fm];
14     m=(a+h/2):h:b;
15     fm=f(m);
16     V=h*sum( [1/3*fe , 2/3*fm ,-1/6*(f(a)+f(b))]);
17     p=abs(V-v)/15;
18     v=V;
19 end
```

   (a) Quale è lo scopo del metodo numerico implementato? Cosa rappresenta la variabile `V` in output e la variabile `t` in input?
   (b) Spiegare dettagliatamente il funzionamento dell'algoritmo, facendo attenzione particolare alle linee 8, 13, 17.
   (c) Illustrare le basi teoriche del funzionamento dell'algoritmo, spiegando in particolare il fattore 15 della divisione alla linea 17.

7. (a) Definire cosa si intende per *formula di quadratura* a $N + 1$ nodi in un intervallo $[a, b]$.
   (b) Calcolare, giustificando il metodo adottato, i pesi ottimali per una formula di quadratura che impieghi quattro nodi equispaziati (ad esempio $0, 1/3, 2/3, 1$ nell'intervallo $[0, 1]$).

(c) Determinate sperimentalmente e successivamente giustificate teoricamente l'ordine di convergenza della formula ottenuta. (Ad esempio approssimate con la formula $\int_0^h e^x \mathrm{d}x$, il cui valore esatto è $e^h - 1$).

8. (a) Si descriva il metodo di bisezione: scopo, ipotesi di partenza e funzionamento.

   (b) Si dimostri che esiste almeno una soluzione dell'equazione
$$sin(e^x - 1) = 0$$
   nell'intervallo $[1, 1.5]$ e si determini a priori il numero di iterazioni necessarie per approssimarla con il metodo di bisezione a meno di una tolleranza ε.

   (c) Si calcoli il valore approssimato di tale radice a meno di 10^{-3}.

9. (a) Stabilire se la successione
$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{k+1} = 1 - 0.5 * \sin(x_k) \end{cases}$$
   è convergente ed in tal caso caratterizzarne il limite

   (b) Si programmi un metodo per approssimare il limite di tale successione a meno di una tolleranza ε, sfruttando la successione sopra indicata e un criterio d'arresto opportunamente giustificato.

   (c) Quante iterazioni impiega il metodo nel caso $\varepsilon = 10^{-4}$?

10. (a) Si definisca il metodo di Eulero Esplicito e si illustrino i vantaggi e svantaggi rispetto al metodo di Eulero Implicito.

    (b) Si determini un passo temporale h_0 tale che il metodo di Eulero Esplicito sa stabile per l'equazione differenziale
$$y' = e^{-y} \;, \qquad y(0) = 0.01$$

    (c) Si approssimi la soluzione dell'equazione differenziale del punto precedente nell'intervallo $[0, 10]$, usando come passo di integrazione $h_0/2$, $h_0/4$, $h_0/8$, $h_0/16$ ed infine $h_0/32$. Per ciascuna ripetizione, si disegni un grafico della soluzione ottenuta e si valuti l'errore commesso al tempo finale $t = 10$, assumendo come valore corretto $y(10) = 2.543044572296263$. Quale è l'ordine di convergenza del metodo?

11. (a) Si applichi il metodo delle differenze finite con 15 punti per approssimare la soluzione del problema ai limiti
$$-u''(x) + u(x) = 4\sin(2\pi x) \text{ per } x \in (0, 1) \;, \quad u(0) = 0, u(1) = 0$$
    derivando la matrice A ed il vettore b del sistema lineare

    (b) Si stabilisca se il sistema lineare è risolubile con il metodo di Jacobi

    (c) Si tracci un grafico della soluzione dell'equazione differenziale