ESAME DI OTTIMIZZAZIONE COMBINATORIA
APPELLO DEL 10/06/2015

Esercizio 1. (7 punti) Si consideri il seguente programma lineare intero.

$$
\begin{array}{rll}
\max & z = x_1 + x_2 & \\
\text{soggetto a} & 3x_1 \; +2x_2 \leq 5 & \\
& 3x_1 \; -3x_2 \leq 1 & \\
& x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+. &
\end{array}
$$

Il suo rilassamento continuo ha la seguente forma standard e riformulazione ottima.

$$
\begin{array}{rlll}
\max & z = x_1 + x_2 & \\
\text{soggetto a} & 3x_1 \; +2x_2 + x_3 & \leq 5 \\
& 3x_1 \; -3x_2 - x_4 & \leq 1 \\
& x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+. &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrrrr}
\max & z = & \frac{29}{15} & -\frac{2}{5}x_3 & -\frac{1}{15}x_4 \\
& x_1 = & \frac{17}{15} & -\frac{1}{5}x_3 & +\frac{2}{15}x_4 \\
& x_2 = & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5}x_3 & -\frac{1}{5}x_4
\end{array}
$$

(a) Effettuare il branch del nodo radice e valutare i rilassamenti dei nodi figli utilizzando il metodo del simplesso duale. (4 punti)

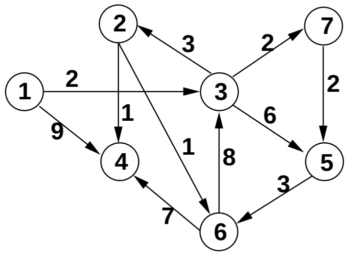
(b) Sul rilassamento del nodo radice, generare un taglio di Gomory e riottimizzare utilizzando il simplesso duale. (3 punti)

Esercizio 2. (7 punti) Dato un grafo $G = (N, A)$ con un peso $c_{ij} \geq 0$ ed una capacità massima u_{ij} per ogni arco $(i, j) \in A$, ed un insieme di K commodity, si consideri il seguente modello di flusso di costo minimo multicommodity:

$$
\begin{array}{lll}
(1) & \min z = \sum_{(i,j)\in A} \sum_{k\in K} c_{ij} x_{ij}^k & \\
(2) & \sum_{(j,i)\in BS(i)} x_{ji}^k - \sum_{(i,j)\in FS(i)} x_{ij}^k = b_i^k & \forall k \in K,\ \forall i \in N \\
(3) & \sum_{k\in K} x_{ij}^k \leq u_{ij} & \forall (i,j) \in A \\
(4) & x_{ij}^k \geq 0 & \forall (i,j) \in A.
\end{array}
$$

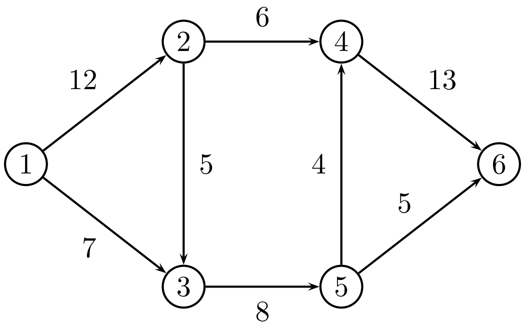
Si discuta un rilassamento del problema dato trattandone l'efficienza e l'efficacia.

Esercizio 3. (7 punti) Dato il grafo in figura



trovare l'albero dei cammini minimi a partire dal nodo 1 applicando l'algoritmo di Bellman-Ford-Moore (ovvero quello che estrae ed inserisce nodi in una coda).

Esercizio 4. (7 punti) Si consideri il seguente problema di flusso di massimo, dove per ogni arco sono riportate le capacità. Trovare la soluzione ottima (valore totale del flusso e flussi sui singoli archi), illustrando i passi dell'algoritmo applicato. Si individui il taglio di capacità minima.



Esercizio 5. (5 punti) La seguente matrice rappresenta i costi un un TSP simmetrico. Calcolare il lower bound del problema per mezzo del rilassamento dell'1-albero, effettuare il branch se necessario, e calcolare i lower bound dei nodi figli.

$$c_{ij} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} - & & & & \\ 5 & - & & & \\ 2 & 6 & - & & \\ 3 & 7 & 8 & - & \\ 8 & 10 & 2 & 1 & - \end{pmatrix} \end{array}$$