Laurea Magistrale in Informatica
METODI NUMERICI – Matteo Semplice

Esercizi – foglio 1

1. Programmare uno script che, scelte matrici quadrate (con elementi random) di dimensione crescente (da 5×5 ad almeno 200×200)

   - calcoli il vettore b tale che il sistema lineare $Ax = b$ abbia come soluzione esatta un vettore con tutte le compoenti pari ad 1
   - calcoli le decomposizioni $A = LU$ e $PA = LU$ di ciascuna matrice
   - risolva il sistema lineare $Ax = b$ usando le due decomposizioni precentemente calcolate e il comando \ di MatLab
   - valuti l'errore relativo con cui è stato calcolato x da ciascuno dei tre metodi e si confrontino i risultati su un grafico in scala bilogaritmica con la dimensione del problema in ascissa e gli errori in ordinata.

   Commentate i risultati.

2. Se si conosce la matrice U della decomposizione $A = LU$ ed i moltiplicatori usati per ottenerla (ovvero, data la matrice di resituita in output da `lunopivot.m`), come è possibile ricostruire la matrice A?

   (a) Predisporre una function che, a partire dalla matrice resituita in output da `lunopivot.m`, costruisca i fattori L ed U e infine calcoli A.

   (b) Predisporre una function che, a partire dalla matrice resituita in output da `lunopivot.m`, ricostruisca la matrice A di partenza, percorrendo a ritroso l'algoritmo di calcolo della decomposizione LU.

   (c) valutare il costo computazionale e confrontare i risultati ottenuti con i due procedimenti.

3. Consultando la mappe su `http://www.regione.piemonte.it/trasporti/rete/index.htm`, create la matrice dei collegamenti ferroviari piemontesi e ripetete l'esperienza della classificazione dell'importanza dei nodi ferroviari fatta nel Laboratorio 3. Oltre alla "classifica", studiate la velocit di convergenza del metodo delle potenze per l'approssimazione dell'autovalore massimo di una matrice. Confrontate con i risultati ottenuti in laboratorio nel caso della Lombardia.

4. Le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 17 & 19 & 1 \\ 1 & 1 & 19 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 13 & 15 & 5 \\ 5 & 5 & 15 \end{bmatrix}$$

   hanno (entrambe) $\lambda = 20$ come autovalore massimo.

   (a) Applicate 20 iterazioni del metodo delle potenze (`max_autovalore.m` su Moodle) ad entrambe e verificate che le approssimazioni successive dell'autovalore massimo convergono a 20 in entrambi i casi

   (b) Per ciascuna delle due matrici, fate un grafico dell'errore al variare del numero di iterazioni provando diverse combinazioni di scale lineari e logaritmiche per gli assi delle ascisse ed ordinate finch non trovate un grafico approssimativamente rettilineo. Deducete che

$$E(k) \simeq C\rho^k$$

   e usate l'approssimazione ai minimi quadrati per fornire delle stime di C e ρ

   (Commento: la velocità di convergenza del metodo delle potenze dipende dalla distanza fra l'autovalore massimo e quello immediatamente inferiore. Controllatelo con i comandi `eig(A)` e +`eig(B)`)

5. Per dimostrare l'esistenza di un polinomio di grado N che interpoli $N + 1$ dati (x_k, f_k) per $k = 0, \dots, N$, si può considerare la forma del polinomio di Newton

$$p_N(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + c_N(x - x_0) \cdot \ldots \cdot (x - x_{N-1})$$

   e mostrare che il sistema triangolare delle $N + 1$ equazioni $f_k = p_N(x_k)$ con incognite $c_0, \dots, c_N$ ammette una soluzione. Scrivete i dettagli della dimostrazione, ovviamente assumendo fra le ipotesi che i nodi x_k siano distinti fra loro.

6. Implementate la function `newtoninsert` che prenda in ingresso gli $N+1$ coefficienti di un polinomio di grado N nella forma di Newton, gli $N+1$ nodi usati, un nuovo nodo x_0 e un nuovo valore f_0 e restituisca i coefficienti del polinomio interpolatore di grado $N+1$ che interpoli i vecchi valori oltre a quello nuovo. Verificate il codice usando $2+1$ nodi oppure usando direttamente tutti e 3 i nodi.

7. (a) Il comando `pp=spline(x,y)` restituisce la spline interpolante i dati `x y`, mentre il comando `ppval(pp,X)` valuta la spline nei punti `X`. (Consultate l'help). Calcolate la spline cubica interpolante i dati $x = 0, 2, 3, 6, 7$ e $y = 1, 7, 2, 4, 0$. e disegnatene il grafico prima nell'intervallo $[0, 7]$ e successivamente nell'intervallo $[-2, 9]$. Cosa succede quando si usa la spline per estrapolare?

   (b) Per valori di N crescente, interpolate la funzione $f(x) = 1/(1 + 25x^2)$ sull'intervallo $[-5, 5]$ usando
   - un polinomio di grado N con nodi equispaziati
   - un polinomio di grado N con nodi di Chebichev
   - una spline cubica con N intervalli

   Per ciascun caso, calcolate l'errore di interpolazione e commentate i risultati.

8. (a) Cercate i valori β, w_0, w_1, w_2 tali che la formula di quadratura su $[-1, 1]$ con nodi $-\beta, 0, \beta$ e pesi w_0, w_1, w_2 abbia il massimo ordine di esattezza polinomiale.

   (b) Quale è l'ordine di esattezza polinomiale della formula ottenuta. Quale valore k vi aspettate che compaia nella formula per l'errore di quadratura
   $$E(a, b) = C(b - a)^k f^{(k-1)}(\xi)?$$

   (c) Verificatelo sperimentalmente applicando la formula di quadratura ad una funzione $f(x)$ (di cui sapete calcolare l'integrale esatto) con intervalli $[0, h]$ al decrescere di h

9. (a) Cercate i valori α, β, w_0, w_1 tali che la formula di quadratura su $[-1, 1]$ con nodi α, β e pesi w_0, w_1 abbia il massimo ordine di esattezza polinomiale.

   (b) Quale è l'ordine di esattezza polinomiale della formula ottenuta. Quale valore k vi aspettate che compaia nella formula per l'errore di quadratura
   $$E(a, b) = C(b - a)^k f^{(k-1)}(\xi)?$$

   (c) Verificatelo sperimentalmente applicando la formula di quadratura ad una funzione $f(x)$ (di cui sapete calcolare l'integrale esatto) con intervalli $[0, h]$ al decrescere di h

10. Scrivete una versione non ricorsiva dell'algoritmo di quadratura automatica. Ad esempio potete creare e via via allungare una matrice con

    (a) `T(:,1)`: estremi sx degli intervalli
    (b) `T(:,2)`: estremi dx degli intervalli (oppure la lughezza)
    (c) `T(:,3)`: valore ottenuto dalla quadratura su questo intervallo
    (d) `T(:,4)`: stimatore d'errore su questo intervallo (oopure il valore di tolleranza con cui va confrontato)

    Verificate che la nuova funzione restituisca esattamente lo stesso valor ed usi esattamente gli stessi punti della versione ricorsiva programmata in laboratorio.

    Successivamente (usando i comandi `tic` e `toc`) confrontate il tempo impiegato da ciascuna delle due versioni per approssimare
    $$\int_0^3 x^2 \cos(10\pi x^2) \mathrm{d}x$$
    con tolleranze decrescenti da 10^{-3} a 10^{-8}. (Nota: in dipendenza dalla velocità del calcolatore che usate, potrebbe essere necessario usare un intervallo di integrazione più lungo per osservare differenze significative)