Calc. e Complessità

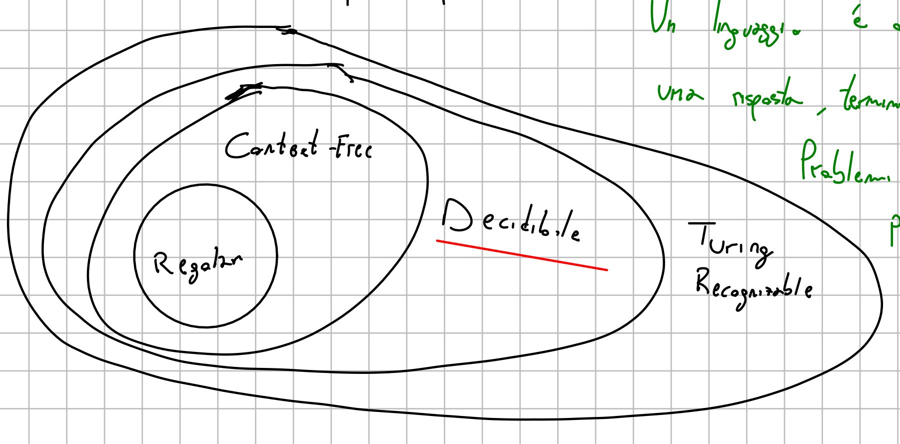
Lezione 5 (2 Parte del modulo di Calcolabilità)

Per molti problemi non c'è un algoritmo che li risolve.

Parliamo di Decidibilità

Parliamo di domande di cui non possiamo sapere una risposta nemmeno in tempi grandi!

Ricordiamo le classi più semplici



Un linguaggio è decidibile se una MT dà sempre una risposta, terminando sempre.

Problemi che sono accettati da un decisore positivo

Ricorda: Un linguaggio è regolare se è riconosciuto da un DFA

MTUniversali

Una MTU, è in grado di prendere una descrizione di una MT e simularne il calcolo. È una cosa che facciamo oggi senza pensarci! Turing negli anni 30 parlava di questa MTU

Una MTU ha 5 registri, con Q, Σ, Γ e δ funzione di transizione (Universale)

δ sarà una lista di 5-uple: $\delta(q_1, a_1) = q_1', a_1', L_1/R_1$ ..... $\delta(q_n, a_n) = q_n', a_n', L/R$

Dalla MTU si passerà ai moderni computer, una MTU è una macchina "Programmabile"

MDTU che simula DFA

Data $A_{DFA} = \{\langle B, w\rangle \mid B \text{ is a DFA that accepts } w\}$ Non fornisco il DFA, ma la stringa riconosciuta da esso

Questa domanda: Problema di accettazione di DFA è DECIDIBILE

In generale tutti i linguaggi su DFA sono DECIDIBILI

Emptyness problem: Ci chiediamo se è vuoto

$E_{DFA} = \{\langle A\rangle \mid A \text{ is a DFA and } L(A) = \emptyset\}$ È decidibile. Il libro lo dimostra

Riduco questo problema a: Esiste un cammino sullo stato di accettazione o rifiuto

Eguaglianza di Automi

$EQ_{DFA} = \{\langle A, B\rangle \mid A \text{ and } B \text{ are DFAs and } L(A) = L(B)\}$: Decidibile

Alcuni di questi problemi sulle grammatiche Context-Free non sono decidibili: Posso scrivere una grammatica che accetta tutto, ma non è un problema decidibile. Invece posso sapere se non accetta nulla. Per i linguaggi Turing-Recognizable nessuno di questi è DECIDIBILE.

Un A_{MT} è decidibile?

$A_{TM} = \{\langle M, w\rangle \mid M \text{ is a TM and } M \text{ accepts } w\}$ Possiamo avere un decisore positivo.

Accetta con: sì

opposto

Noto come problema della Fermata Non è decidibile

Halting problem

Va avanti all'infinito

Se siamo in grado di determinare.

Usando il metodo di diagonalizzazione di Cantor possiamo dimostrare che si possono elencare/enumerare tutti i numeri razionali.

Turing si chiese lo stesso per i numeri irrazionali

Questo perché partendo dalla lista si può produrre un nuovo numero che non era presente in essa.

Per ogni numero cambiamo la cifra rendendola diversa, così siamo sicuri che per ogni numero nella lista, questo nuovo, abbia una cifra diversa per esso!

Usando questo metodo, posso dimostrare, che non esistono Terminator per il problema della fermata. Posso ottenere al massimo un decisore positivo

Dimostrazione

Suppongo per assurdo che A_{TM} è decidibile. Quindi esiste H che accetta se M accetta la stringa w.

$$H(\langle M, w\rangle) = \begin{cases} \text{accept} & : \text{if } M \text{ accept } w \\ \text{reject} & : \text{if } M \text{ does not accept } w \end{cases}$$

Ora costruisco una nuova macchina D con H come subroutine

D = "On input $\langle M\rangle$, Where M is TM

1. Run H on $\langle M, \langle M\rangle\rangle$ // Applica M a se stessa esempio dei compilatori
2. Output the opposite of what H outputs: if H accepts → reject and if reject → accept

$$D(\langle M\rangle) = \begin{cases} Acc & \text{if } M \neg Acc\langle M\rangle \\ \neg Acc & \text{if } M\ acc\langle M\rangle \end{cases}$$

$$D(\langle D\rangle) = \begin{cases} \text{accept} & \text{if } D \neg Acc\langle D\rangle \\ \text{reject} & \text{if } D\ Acc\langle D\rangle \end{cases} \Rightarrow \text{Contraddizione!}$$

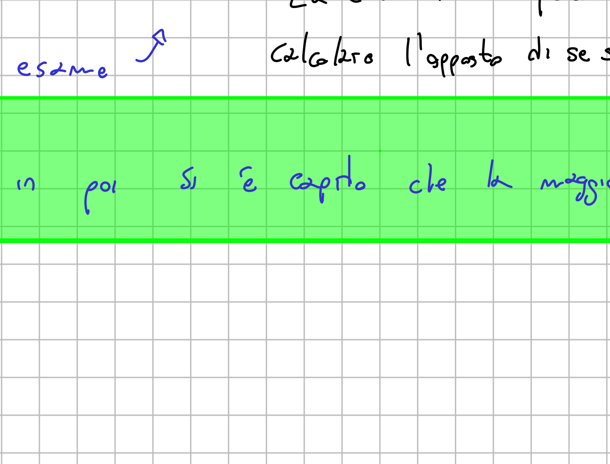
Ovviamente se H è un decisore positivo accettiamo che diverga e non sarebbe contraddittorio

Immaginiamo di avere una lista di MT (si possono enumerare)

Enumeratore

M_i su $\langle M_j\rangle$ in qualche caso accetta, in altri non accetta, in altri non termina

Diagonalizzazione di Cantor



Nel caso di H

Se trovo rej scrivo accept e viceversa

Trovo una Nuova Macchina di Turing

D dato che H e D sono TM allora saranno nella lista, ma D calcola l'opposto della diagonale

La contraddizione è palese: il ? sarebbe quando si cerca di calcolare l'opposto di se stesso nella entry

Domanda esame

Da qui in poi si è capito che la maggior parte dei problemi non è decidibile