Laurea Magistrale in Informatica
METODI NUMERICI – Matteo Semplice

Laboratorio 3 – autovalori, autovettori, pagerank

Approssimare l'autovalore di modulo massimo di una matrice Sia A una matrice quadrata di ordine N e $\lambda_{\max}$ il suo autovalore di modulo massimo. Il metodo iterativo

$$x^{(k+1)} = Ax^{(k)}, \qquad \alpha_k = \langle x^{(k+1)}, x^{(k)} \rangle / \langle x^{(k)}, x^{(k)} \rangle$$

è tale che $\alpha_k \to \lambda_{\max}$ e $x^{(k)} \to v$ con $Av = \lambda_{\max} v$.

- Scrivete una function `[a,v]=maxautovalore(A,it)` che, presa in ingresso una matrice `A` e un numero `it` di iterazioni, applichi il metodo sopra delineato e restituisca sia l'autovalore approssimato che l'autovettore corrispondente. Testate la vostra function con la matrice restituita da `ferrovielombarde()` (su Moodle)

Dopo 20 iterazioni, la successione α_k sta convergendo? Cosa osservate riguardo all'ordine di grandezza degli elementi dell'autovettore $x^{(k)}$?

- Modificate la function in modo che normalizzi $x^{(k)}$ ad ogni iterazione:

$$y = Ax^{(k)}, \qquad x^{(k+1)} = y/\|y\|, \qquad \alpha_k = \langle x^{(k+1)}, x^{(k)} \rangle$$

(Perché non è più necessaria la divisione nella formula per α_k?)

Testate nuovamente l'algoeritmo e verificate che converge allo stesso autovalore, ma osservate che ora le componenti dell'autovettore rimangono limitate.

Matrice dei collegamenti L'algoritmo *PageRank* sfruttato da Google si basa sulla seguente definizione di importanza. L'importanza $I(\alpha)$ di un sito α è definita coma la sommatoria (pesata) delle importanze dei siti β con un link ad α:

$$I(\alpha) = \sum_{\beta \in Web} \frac{A(\alpha, \beta)}{\sharp\beta} I(\beta)$$

dove A è una matrice il cui elemento di posto (α, β) è 1 che il sito α ha un link al sito β e 0 altrimenti. $\sharp\beta$ indica il numero di link uscenti dal sito β.

- Data la matrice A, come si può calcolare $\sharp\beta$ per ogni sito?
- Applicate il teorema di Gershgorin (per colonne) alla matrice

  $$B_{\alpha,\beta} = A_{\alpha,\beta}/\sharp\beta$$

  Cosa potete dire degli autovalori?

Matrice dei collegamenti ferroviari Considerata l'eneorme dimensione della matrice che desccrive tutti i collegamenti nel Web, ci proponiamo di risolvere il compito (ben) più modesto di fare una classifica dei nodi ferroviari di una regione, seguendo gli stessi principi.

La matrice A dei collegamenti ferroviari lombardi viene restituita dalla function `ferrovielombarde.m`. (Una analoga matrice per il Piemonte si può costruire osservando l'immagine sul sito `http:\\www.`)

- Visualizzate la posizione degli 1 mediante il comando `spy`? È simmetrica? Ve lo aspettavate? Perché?
- Cosa possiamo dire sugli autovalori della matrice $B_{i,j} = A_{i,j}/\sharp j$?
- Approssimate l'autovalore di modulo massimo ed il suo autovettore con la function `maxautovalore` e, ordinando con `sort` gli elementi dell'autovettore, create la "classifica".
- Sapendo che il valore corretto dell'autovalore di modulo massimo è 1, studiate il grafico della convergenza dei valori α_k calcolati da `maxautovalore`. Fate grafici in scala lineare e logaritmica dell'errore rispetto al numero di iterazioni. Uno di essi è "lineare"? Cosa significa?