Capitolo 2
Linguaggi e Grammatiche

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Informatica

Prof. ENRICO DENTI

Dipartimento di Informatica – Scienza e Ingegneria (DISI)

COS'È UN LINGUAGGIO?

Dice il dizionario:

"Un linguaggio è un *insieme di parole* e di *metodi di combinazione* delle parole usate e *comprese da una comunità di persone*."

È una definizione *poco precisa*:

- *non evita le ambiguità* dei linguaggi naturali
- non si presta a descrivere processi computazionali *meccanizzabili*
- *non aiuta a stabilire proprietà*

LA NOZIONE DI LINGUAGGIO

- Occorre una nozione di linguaggio *più precisa*
- Linguaggio come *sistema formale* che consenta di risponde a domande come:
  - quali sono le *frasi lecite*?
  - si può stabilire se una *frase appartiene al linguaggio*?
  - come si stabilisce il *significato* di una frase?
  - *quali elementi linguistici primitivi* ?

SINTASSI & SEMANTICA

- Sintassi: l'insieme di *regole formali* per la scrittura di frasi corrette («programmi») in un linguaggio, che dettano le *modalità per costruire frasi corrette* nel linguaggio stesso.

- Semantica: l'insieme dei significati da attribuire alle frasi (sintatticamente corrette) del linguaggio.

MA:

Una frase può essere *sintatticamente corretta* e tuttavia *non avere significato!*

SINTASSI & SEMANTICA ☺

Una frase può essere *sintatticamente corretta* e tuttavia *non avere significato!*

SINTASSI & SEMANTICA

- La *sintassi* è solitamente espressa tramite *notazioni formali* come
  - BNF, EBNF
  - diagrammi sintattici
- La *semantica* è esprimibile:
  - *a parole* (poco precisa e ambigua)
  - mediante azioni
    → semantica *operazionale*
  - mediante funzioni matematiche
    → semantica *denotazionale*
  - mediante formule logiche
    → semantica *assiomatica*

INTERPRETAZIONE vs COMPILAZIONE

Un *interprete* per un linguaggio L:

- accetta in ingresso le singole frasi di L
- e le esegue una per volta.

Il risultato è la *valutazione* della frase.

Un *compilatore* per un linguaggio L, invece:

- accetta in ingresso un intero programma scritto in L
- e lo riscrive in un altro linguaggio (più semplice).

Il risultato è dunque una *riscrittura* della "macro-frase".

A volte la differenza è più sfumata di quel che si può pensare..

ANALISI LESSICALE & SINTATTICA

- L'*analisi lessicale* consiste nella individuazione delle singole parole (*token*) di una frase
  - L'analizzatore lessicale (detto *scanner* o *lexer*), data una sequenza di caratteri, li aggrega in token di opportune categorie (nomi, parole chiave, simboli di punteggiatura, etc.)
- L'*analisi sintattica* consiste nella verifica che la frase, intesa come *sequenza di token*, rispetti le regole grammaticali del linguaggio.
  - L' analizzatore sintattico (detto *parser*), data la sequenza di token prodotta dallo scanner, genera una rappresentazione interna della frase – solitamente sotto forma di *opportuno albero*.

ANALISI SEMANTICA

- L'*analisi semantica* consiste nel determinare il significato di una frase
  - L'analizzatore semantico, data la rappresentazione intermedia prodotta dal parser, controlla la *coerenza logica* della frase
    - se le variabili sono usate solo dopo essere state definite
    - se sono rispettate le regole di compatibilità in tipo
    - …
  - Può anche trasformare ulteriormente la rappresentazione delle frasi in una forma più adatta alla generazione finale di codice.
- Già, ma... *cos'è il "significato"* di una frase?

SIGNIFICATO DI UNA FRASE

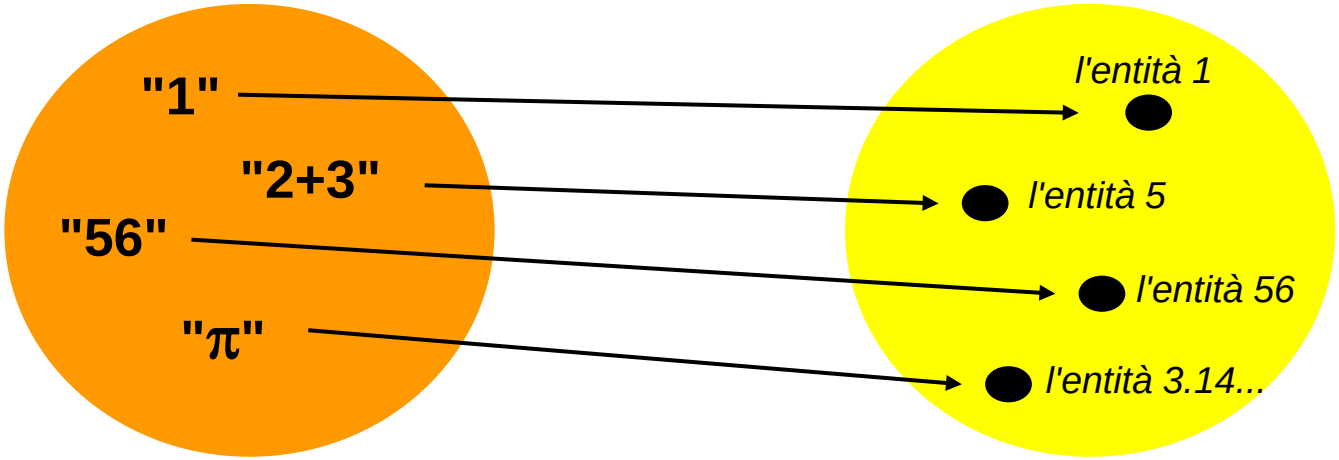
- Chiedersi quale sia il *significato* di una frase significa *associare a quella frase un concetto* nella nostra mente
  - Lo facciamo in base alla nostra cultura ed esperienza di vita

Ad esempio,
se siamo italiani la stringa "spaghetti pomodoro e basilico" (frase) verrà probabilmente associata dalla nostra mente al *concetto* di

SIGNIFICATO DI UNA FRASE

- Per farlo, nella nostra mente deve evidentemente esserci una *funzione* che *associa a ogni frase*
  - cioè a ogni *stringa di caratteri lecita nel linguaggio*
- *un concetto*
  - cioè un *elemento* di un qualche *dominio*

Ad esempio, se il dominio è la *matematica*, la funzione potrebbe essere:



SIGNIFICATO DI UNA FRASE

- Tale funzione deve quindi dare significato:
  - prima a ogni *simbolo* (*carattere* dell'*alfabeto*)
  - poi a ogni *parola* (*sequenza* lecita di caratteri)
  - infine a ogni *frase* (*sequenza* lecita di parole).
- Nel caso dell'esempio:
  - l'alfabeto potrebbe consistere nei simboli "1", "2", .. "9"
    se consideriamo la nostra cultura attuale
    → *ma Giulio Cesare avrebbe scelto "I", "V", "X", …*
  - le parole potrebbero essere sequenze di tali simboli, come "51",
    da intendersi ovviamente secondo la nostra cultura
    - "51" per noi rappresenta il concetto *cinquantuno..*
    - *…ma per Giulio Cesare "VI" avrebbe rappresentato l'entità **sei** !*

DEFINIZIONI

Alfabeto

- un alfabeto A è un insieme *finito e non vuoto* di simboli atomici. Esempio: A = { a, b }

Stringa

- un stringa è una sequenza di simboli, ossia un elemento del prodotto cartesiano A^n.
  Esempi: a ab aba bb …
- *Lunghezza* di una stringa: il numero di simboli che la compongono.
- *Stringa vuota* ε : stringa di lunghezza zero.
  ⇨ Si noti che $A^0 = \{ \varepsilon \}$

DESCRIZIONE DI UN LINGUAGGIO

Linguaggio L su un alfabeto A

- Un linguaggio L è un insieme di stringhe su A
- *Frase* (*sentence*) di un linguaggio: una stringa appartenente a quel linguaggio.
- *Cardinalità* di un linguaggio: il numero delle frasi del linguaggio
  - linguaggio *finito*: ha cardinalità *finita*
  - linguaggio *infinito*: ha cardinalità *infinita*

Esempi:

L1 = { aa, baa }	linguaggio a cardinalità finita
L2 = { a^n, n primo }	linguaggio a cardinalità infinita
L3 = { $a^n b^n$, n>0 }	linguaggio a cardinalità infinita

DESCRIZIONE DI UN LINGUAGGIO

Chiusura A* di un alfabeto A (o ling. universale su A)

- È l'insieme *infinito* di tutte le stringhe composte con simboli di A:

$$A^* = A^0 \cup A^1 \cup A^2 \cup \ldots$$

Chiusura positiva A^+ di un alfabeto A

- È l'insieme *infinito* di tutte le stringhe *non nulle* composte con simboli di A:

$$A^+ = A^* - \{ \varepsilon \}$$

SPECIFICA DI UN LINGUAGGIO

- Problema: come specificare il sotto-insieme di A* che definisce *uno specifico linguaggio?*
  - per specificare un linguaggio *finito*, basta ovviamente *elencarne tutte le frasi*
  - per specificare un linguaggio *infinito*, invece, serve una qualche *notazione* capace di descrivere in modo *finito* un *insieme infinito* di elementi.
- Nasce così la nozione di *grammatica formale*

GRAMMATICA FORMALE

Una *Grammatica* è una *notazione formale* con cui esprimere *in modo rigoroso* la *sintassi* di un linguaggio.

Una grammatica è una *quadrupla* ⟨VT,VN,P,S⟩ dove:

- VT è un *insieme finito di simboli terminali*
- VN è un *insieme finito di simboli non terminali*
- P è un *insieme finito di produzioni*, ossia di *regole di riscrittura* $\alpha \rightarrow \beta$ *dove* α *e* β *sono stringhe:* $\alpha \in V^+$, $\beta \in V^*$
  - ogni regola esprime una trasformazione lecita che permette di scrivere, *nel contesto di una frase data,* una stringa β al posto di un'altra stringa α.
- S è un particolare *simbolo non-terminale* detto *simbolo iniziale* o *scopo* della grammatica.

GRAMMATICA FORMALE

Una *Grammatica* è una [illegible] re *in modo rigoroso* la *sinta*

I simboli *terminali* sono *caratteri* o *stringhe* su un alfabeto A.

Una grammatica è una *quadrupla* ⟨VT,VN,P,[illegible]ove:

- VT è un *insieme finito di simboli terminali*
- VN è un *insieme finito di simboli non terminali*
- P è un *insieme finito di produzioni*, ossia di *regole di* $\alpha \in V^+,\ \beta \in V^*$

I simboli *non terminali* sono dei *meta-simboli* che rappresentano le diverse *categorie sintattiche*.

che permette di sostituire, *nel contesto di una frase data*, una stringa β al posto di un'altra stringa

- **Gli insiemi VT e VN devono essere *disgiunti*: VT ∩ VN = ∅**
- **L'unione VT ∪ VN si dice *vocabolario* della grammatica.**

GRAMMATICHE: CONVENZIONI

CONVENZIONI SUI SIMBOLI

Nelle formule teoriche, per comodità:

- i simboli *terminali* si indicano con lettere minuscole
- i *meta-simboli* si indicano con lettere MAIUSCOLE
- le *lettere greche* indicano *stringhe mixed di terminali e meta-simboli*

CONVENZIONI SULLE PRODUZIONI

- una produzione $\alpha \rightarrow \beta$ riscrive una stringa *non nulla* $\alpha \in V^+$ sotto forma della nuova stringa (eventualmente anche nulla) $\beta \in V^*$

FRASI (sentences) vs. FORME DI FRASI (sentential forms)

- Si dice *forma di frase (sentential form)* una qualsiasi stringa *comprendente sia simboli terminali sia meta-simboli,* ottenibile dallo scopo applicando una o più regole di produzione.
  - una sentential form è un *prodotto intermedio*, in cui alcune parti della (futura) frase sono già finali, mentre altre sono ancora "in itinere", soggette a ulteriori trasformazioni.
- Si dice *frase* una forma di frase *comprendente solo simboli terminali.*
  - una sentence è invece un *prodotto finale*, in cui tutte le parti "in itinere" sono state ormai trasformate e non c'è più nulla di ulteriormente trasformabile.

DERIVAZIONE

Siano α, β due *stringhe* $\in (VN \cup VT)^*$, $\alpha \neq \varepsilon$

Si dice che β *deriva direttamente* da α ($\alpha \rightarrow \beta$) se

- le stringhe α, β si possono *decomporre* in
  $\alpha = \eta\ A\ \delta$ $\beta = \eta\ \gamma\ \delta$
- ed esiste la produzione $A \rightarrow \gamma$.

Si dice che β *deriva* da α (anche non direttamente) se

- esiste una sequenza di *N* derivazioni *dirette*
  che da α possono infine produrre β

$$\alpha = \alpha 0 \rightarrow \alpha 1 \rightarrow \alpha 2 \rightarrow \ldots \rightarrow \alpha N = \beta$$

SEQUENZA DI DERIVAZIONE

Si dice *sequenza di derivazione* la sequenza di passi che producono una forma di frase σ dallo scopo S.

$S \Rightarrow \sigma$ — σ deriva da S con una sola applicazione di produzioni (in un solo passo)

$S \overset{+}{\Rightarrow} \sigma$ — σ deriva da S con una o più applicazioni di produzioni (in uno o più passi)

$S \overset{*}{\Rightarrow} \sigma$ — σ deriva da S con zero o più applicazioni di produzioni (in zero o più passi)

GRAMMATICA & LINGUAGGIO

Data una grammatica G, si dice perciò

Linguaggio L_G *generato da G*

l'insieme delle frasi

- derivabili dal simbolo iniziale S
- applicando le produzioni P

ossia

$$L_G = \{ s \in VT^* \text{ tale che } S \overset{*}{\Rightarrow} s \}$$

ESEMPIO 1

Il linguaggio L = { $a^n b^n$, n>0 } può essere descritto dalla grammatica G = ⟨VT,VN,P,S⟩ dove:

- VT = { a, b}
- VN = { F }
- S ∈ VN = F
- P = {

  F → a b

  F → a F b

  }

- La prima regola stabilisce che F può essere riscritto come ab: è la frase più corta di L.
- La seconda regola stabilisce che lo scopo F può essere riscritto come aFb; data la presenza di F nella forma di frase, è possibile proseguire con un nuovo passo generativo – di nuovo scegliendo *una qualsiasi* delle due regole:
  - se si sceglie la prima, si avrà aabb
  - se si sceglie la seconda, si avrà aaFbb, che apre la porta a un terzo passo.. e così via.
- Il linguaggio contiene dunque infinite frasi, tutte della forma aa…bb con egual numero di a e b.

GRAMMATICHE EQUIVALENTI

- Una grammatica G1 è *equivalente* a una grammatica G2 se *generano lo stesso linguaggio*
  - una grammatica potrebbe però essere *preferibile a un'altra* ad essa equivalente al punto di vista dell'analisi sintattica
- Purtroppo, stabilire se due grammatiche sono *equivalenti* è in generale un problema *indecidibile*
  - le faccenda cambia se ci si restringe a *tipi particolari* di grammatiche, aventi regole di produzione *"sufficientemente semplici".*

GRAMMATICHE, LINGUAGGI & AUTOMI RICONOSCITORI

Grammatiche di diversa struttura

comportano

linguaggi con diverse proprietà

e implicano

automi di diversa "potenza computazionale"

per *riconoscere* tali linguaggi.

CLASSIFICAZIONE DI CHOMSKY
TIPO 0

Le grammatiche sono classificate in *4 tipi*

in base alla *struttura delle produzioni*

- Tipo 0:
  nessuna restrizione sulle produzioni

  In particolare, le regole possono specificare riscritture che *accorciano la forma di frase corrente.*

Esempio (grammatica di tipo 0)

S → aSBC **CB → BC** **SB → bF** **FB → bF**
FC → cG **GC → cG** **G → ε**

Possibile derivazione: **S → aSBC → abFC → abcG → abc**

lung=4 *lung=3*

CLASSIFICAZIONE DI CHOMSKY
TIPO 1

Le grammatiche sono classificate in *4 tipi*

in base alla *struttura delle produzioni*

- Tipo 1 (*dipendenti dal contesto*): *produzioni vincolate alla forma:*

$$\beta A \delta \rightarrow \beta \alpha \delta$$

con $\beta, \delta, \alpha \in (VT \cup VN)^*$, $A \in VN$, $\alpha \neq \varepsilon$

Quindi, A può essere sostituita da α solo *nel contesto* $\beta A \delta$

Le riscritture *non accorciano mai la forma di frase corrente.*

Una definizione alternativa equivalente (a parte la generazione della stringa vuota) prevede infatti produzioni della forma $\alpha \rightarrow \beta$ con $|\beta| \geq |\alpha|$

ESEMPIO

Esempio (grammatica di tipo 1)

S → aBC | aSBC

CB → DB **DB → DC** **DC → BC**

aB → ab **bB → bb** **bC → bc** **cC → cc**

Infatti, secondo la definizione $\beta A \delta \rightarrow \beta \alpha \delta$ si può trasformare un metasimbolo per volta (**A**), lasciando intatto ciò che gli sta intorno:

Osserva: la lunghezza del lato destro delle produzioni non è mai inferiore a quella del lato sinistro.

S → aBC | aSBC	$\beta = \varepsilon$	$\delta = \varepsilon$
CB → DB	$\beta = \varepsilon$	$\delta =$ **B**
DB → DC	$\beta =$ **D**	$\delta = \varepsilon$
DC → BC	$\beta = \varepsilon$	$\delta =$ **C**
aB → ab	$\beta =$ **a**	$\delta = \varepsilon$
bB → bb	$\beta =$ **b**	$\delta = \varepsilon$
bC → bc	$\beta =$ **b**	$\delta = \varepsilon$
cC → cc	$\beta =$ **c**	$\delta = \varepsilon$

OSSERVAZIONE

La definizione di Chomsky: $\beta A \delta \rightarrow \beta \alpha \delta$

fa capire perché queste grammatiche siano definite *dipendenti dal contesto* (o *contestuali*).

LA DEFINIZIONE ALTERNATIVA: $\alpha \rightarrow \beta$ con $|\beta| \geq |\alpha|$

esprime lo stesso concetto in modo *più pratico*,
ma non esplicita più l'idea di contesto.

Formalmente, essa *ammette produzioni vietate dalla definizione di Chomsky,* come ad esempio BC → CB

tuttavia, *esiste sempre una grammatica equivalente che rispetta la definizione di Chomsky,* ad esempio BC → BD ; BD → CD ; CD → CB

quindi *i due formalismi sono equivalenti*
[*purché* la definizione originale non venga arricchita ammettendo la produzione S → ε, che la definizione alternativa non può esprimere].

CLASSIFICAZIONE DI CHOMSKY
TIPO 2

Le grammatiche sono classificate in *4 tipi*

in base alla *struttura delle produzioni*

- Tipo 2 (*libere dal contesto*):
  produzioni vincolate alla forma:

$$A \rightarrow \alpha$$

con $\alpha \in (VT \cup VN)^*$, $A \in VN$

Attenzione: non c'è più il vincolo $\alpha \neq \varepsilon$

Qui A può *sempre* essere sostituita da α, *indipendentemente dal contesto,* giacché non esiste più l'idea stessa di contesto.

CASO PARTICOLARE: se α ha la forma u oppure u B v, con $u,v \in VT^*$ e $B \in VN$, la grammatica si dice *lineare.*

CLASSIFICAZIONE DI CHOMSKY
TIPO 3

Le grammatiche sono classificate in *4 tipi*

in base alla *struttura delle produzioni*

- Tipo 3 (*grammatiche regolari*): *produzioni vincolate alle forme lineari:*

si sviluppano solo a destra o sinistra

lineare a destra	*lineare a sinistra*
$A \rightarrow \sigma$	$A \rightarrow \sigma$
$A \rightarrow \sigma B$	$A \rightarrow B \sigma$

con $A,B \in VN$, e $\sigma \in VT^*$

IMPORTANTE: le produzioni di una data grammatica devono essere o ***tutte*** lineari a destra, o ***tutte*** lineari a sinistra – non mischiate.

Si noti che anche qui **σ** può essere **ε**.

QUALI MACCHINE PER QUALI LINGUAGGI?

Chi riconosce i diversi tipi di linguaggi?

GRAMMATICHE	AUTOMI RICONOSCITORI
• Tipo 0	• *Se L(G) è riconoscibile*, serve una Macchina di Turing
• Tipo 1	• Macchina di Turing *(con nastro di lunghezza proporzionale alla frase da riconoscere)*
• Tipo 2 *(context-free)*	• Push-Down Automaton (PDA) *(cioè ASF + stack)*
• Tipo 3 *(regolari)*	• Automa a Stati Finiti (ASF)

GRAMMATICHE REGOLARI
CASO PARTICOLARE

Per grammatiche regolari, è *sempre possibile e spesso conveniente* trasformare la grammatica in forma *strettamente lineare*

- non più $\sigma \in VT^*$ (σ è una stringa di caratteri)

lineare a destra	*lineare a sinistra*
$A \rightarrow \sigma$	$A \rightarrow \sigma$
$A \rightarrow \sigma\ B$	$A \rightarrow B\ \sigma$

- ma bensì $a \in VT$ (a è un singolo carattere)

lineare a destra	*lineare a sinistra*
$X \rightarrow a$	$X \rightarrow a$
$X \rightarrow a\ Y$	$X \rightarrow Y\ a$

GRAMMATICHE LINEARI: ESEMPI

VT = { a, +, – }, VN = { S }

- Grammatica G1 (lineare a sinistra: $A \rightarrow B\ y$, con $y \in VT^*$)

  $S \rightarrow a$ $S \rightarrow S + a$ $S \rightarrow S - a$

- Grammatica G2 (lineare a destra: $A \rightarrow x\ B$, con $x \in VT^*$)

  $S \rightarrow a$ $S \rightarrow a + S$ $S \rightarrow a - S$

- Grammatica G3 (G2 resa *strettamente lineare* a destra)

  $S \rightarrow a$ $S \rightarrow a\ A$ $A \rightarrow + S$ $A \rightarrow - S$

  diventa una regola a singolo carattere

- Grammatica G4 (lineare a destra e anche a sinistra)

  $S \rightarrow ciao$

- Grammatica G5 (G4 resa *strettamente lineare* a destra)

  $S \rightarrow c\ T$ $T \rightarrow i\ U$ $U \rightarrow a\ V$ $V \rightarrow o$

RELAZIONE GERARCHICA

Le grammatiche sono in *relazione gerarchica*:

- una grammatica *regolare* (Tipo 3) è un caso particolare di grammatica *context-free* (Tipo 2),
- che a sua volta è un caso particolare di grammatica *context-dependent* (Tipo 1),
- che a sua volta è – ovviamente – un caso particolare di grammatica qualsiasi (Tipo 0).

NB: poiché le grammatiche di tipo 2 (e quindi di tipo 3) possono generare la stringa vuota ε, la relazione di inclusione vale solo se si conviene di ammettere nelle grammatiche tipo 1 anche la produzione $S \rightarrow \varepsilon$

CLASSIFICAZIONE DI CHOMSKY
IL PROBLEMA DELLA STRINGA VUOTA

Nella classificazione di Chomsky,

- Le grammatiche di Tipo 1 *non ammettono* la stringa vuota ε sul lato destro delle produzioni:

$$\beta A \delta \rightarrow \beta \alpha \delta \qquad \alpha \neq \varepsilon$$

- Viceversa, le grammatiche di Tipo 2 *la ammettono:*

$$A \rightarrow \alpha \qquad \alpha \in V^* \quad (\alpha \text{ può essere } \varepsilon)$$

- e lo stesso vale per le grammatiche di Tipo 3:

lin. a destra	*lin. a sinistra*	
$A \rightarrow \sigma$	$A \rightarrow \sigma$	
$A \rightarrow \sigma B$	$A \rightarrow B \sigma$	$\sigma \in VT^*$ (σ può essere ε)

MA COME? NON C'È CONTRADDIZIONE ??

CLASSIFICAZIONE DI CHOMSKY
IL PROBLEMA DELLA STRINGA VUOTA

COME È POSSIBILE che

- le grammatiche siano in relazione gerarchica tra loro
- ma al contempo la stringa vuota *non* sia ammessa nel Tipo 1 e *sia invece ammessa* nei Tipi 2 e 3 ?

Sembrerebbe esserci una evidente contraddizione.

L'*assenza di contraddizione* è dovuta al seguente

TEOREMA
le produzioni di grammatiche di Tipo 2 (e quindi anche 3) possono sempre essere riscritte in modo da evitare la stringa vuota: al più, possono contenere la regola S → ε

CLASSIFICAZIONE DI CHOMSKY
IL PROBLEMA DELLA STRINGA VUOTA

TEOREMA

quindi dal tipo 2 in p

- Se G è una grammatica *context free* con produzioni della forma $A \to \alpha$, con $\alpha \in V^*$ (cioè, α può essere ε)
- allora *esiste una grammatica context free G'* che genera *lo stesso linguaggio L(G)* ma *le cui produzioni hanno o la forma* $A \to \alpha$, con $\alpha \in V^+$ (α *non è* ε) *oppure la forma* $S \to \varepsilon$, ed *S non compare sulla destra in nessuna produzione*.

In pratica, il teorema assicura che la **sola differenza** fra una grammatica context free **con o senza *ε-rules*** è che il linguaggio generato dalla prima include la stringa vuota.

I linguaggi di programmazione (Pascal, C, …) hanno spesso produzioni che ammettono la stringa vuota, di solito per descrivere parti *opzionali.*

ELIMINAZIONE DELLE ε–RULES

Come determinare la grammatica equivalente G' ?

Siano

- YESε l'insieme dei metasimboli $A_1..A_k$ da cui *si può* ricavare ε
- NOε l'insieme dei metasimboli $B_1..B_m$ da cui *non si può* ricavare ε

Allora:

- se G contiene la regola $S \rightarrow \varepsilon$, anche G' contiene tale regola
- se G contiene *altre regole* della forma $X \rightarrow \varepsilon$, G' *non* le contiene
- se G contiene una produzione della forma $X \rightarrow C_1\ C_2\ \ldots\ C_r$ (r≥1), G' contiene la produzione $X \rightarrow \alpha_1\ \alpha_2\ \ldots\ \alpha_r$ dove:

  $\alpha_i = C_i$ se $C_i \in VT \cup NO\varepsilon$

  $\alpha_i = C_i \mid \varepsilon$ se $C_i \in YES\varepsilon$

  con il *vincolo* che non tutti gli α_i possono essere ε.

ESEMPIO 1

Si consideri l'esempio a lato.
Qui YESε = {A} e NOε = {S, B}.

- G *non contiene* la regola S → ε quindi *neppure G' la contiene.*
- G *contiene una regola* della forma X → ε
  È la regola A → ε, *che va quindi tolta.*
- Al suo posto, poiché A∈YESε, *ogni occorrenza di A va sostituita da* (A|ε)
- Nel caso della regola S → A B | B ciò non ha effetti, poiché (A|ε)B riproduce A B | B
- Invece, A → a A diventa A → a (A|ε)
- Semplificando e riscrivendo si ottiene la nuova grammatica G'

Grammatica G (con ε -rules)

S → A B | B
A → a A | ε
B → b B | c

Grammatica G'

S → A B | B
A → a (A|ε)
B → b B | c

Grammatica G'

S → A B | B
A → a A | a
B → b B | c

La nuova grammatica non genera mai la stringa vuota.

ESEMPIO 2

Grammatica G (con ε -rules)

S → A B
A → a A | ε
B → b B | ε

Grammatica G'

S → (A|ε) (B|ε)
A → a (A|ε)
B → b (B|ε)

Grammatica G'

S → A B | B | A | ε
A → a A | a
B → b B | b

- La nuova grammatica può generare la stringa vuota ***solo al primo passo della derivazione*** (regola S → ε), *ma non nei passi intermedi*
- Ergo, il linguaggio in sé comprende la stringa vuota, ma *le forme di frase non possono comunque accorciarsi.*

GRAMMATICHE e LINGUAGGI

- Poiché le grammatiche sono in relazione gerarchica, può accadere che un linguaggio possa essere generato da più grammatiche, *anche di tipo diverso*
  - un linguaggio di Tipo 3 potrebbe in realtà essere generato anche da grammatiche di Tipo 2, Tipo 1, Tipo 0
  - un linguaggio di Tipo 2 potrebbe in realtà essere generato anche da grammatiche di Tipo 1, Tipo 0
  - un linguaggio di Tipo 1 potrebbe in realtà essere generato anche da grammatiche di Tipo 0

Non è detto infatti che la prima grammatica che si trova per generare un dato linguaggio sia necessariamente *la migliore (più semplice)*

CONSEGUENZA

- Il tipo del linguaggio *può non coincidere* col tipo della grammatica che lo genera
  - il linguaggio generato potrebbe essere di *un tipo più semplice* della sua grammatica
- D'ora in poi, dicendo che un linguaggio è di un certo tipo intenderemo che è *il tipo della grammatica più semplice* in grado di generarlo
  - per *linguaggi dipendenti da contesto* (o di Tipo 1) si intendono linguaggi che *richiedono come minimo una grammatica di Tipo 1* per essere generati
  - analogamente, per *linguaggi liberi da contesto* (o di Tipo 2) si intendono linguaggi che *richiedono come minimo una grammatica di Tipo 2..*
  - .. e lo stesso vale per i *linguaggi regolari* (o di Tipo 3)

ESEMPIO $a^n b^n c^n$ (1/3)

Il linguaggio **L = { $a^n b^n c^n$, n≥0}** è (almeno) di Tipo 1 in quanto esiste una grammatica di Tipo 1 che lo genera:

G1

S → aBC | aSBC

CB → DB **DB → DC** **DC → BC**

aB → ab **bB → bb** **bC → bc** **cC → cc**

La grammatica diventa *più compatta* se espressa con la *definizione alternativa* di grammatica di Tipo 1, che ammette lo scambio:

G2

S → aBC | aSBC

CB → BC

aB → ab **bB → bb** **bC → bc** **cC → cc**

Il linguaggio sarebbe però generabile *anche da una grammatica di Tipo 0*, come ad esempio quella mostrata in precedenza:

G0

S → aSBC **CB → BC** **SB → bF** **FB → bF**

FC → cG **GC → cG** **G → ε**

ESEMPIO $a^n b^n c^n$ (2/3)

Una grammatica ancora più semplice potrebbe essere:

G3

S → abc | aBSc

Ba → aB

Bb → bb

DUBBI & DOMANDE

- Ci si potrebbe quindi chiedere se non esista per questo linguag-gio una grammatica ancora più semplice, *magari di Tipo2*
- Più in generale, ci si potrebbe chiedere *se ci sia un modo generale per capire se una grammatica più semplice esista.. e magari trovarla.*

Risponderemo presto a entrambe le domande ☺

ESEMPIO $a^n b^n c^n$ (3/3)

Derivazione della frase aabbcc

Grammatica G2:

S → aBC | aSBC
CB → BC
aB → ab
bB → bb
bC → bc
cC → cc

Derivazione:

S → aSBC → aaBCBC → aaBBCC →
→ aabBCC → aabbCC → aabbcC → aabbcc

Grammatica G3:

S → abc | aBSc
Ba → aB
Bb → bb

Derivazione:

S → aBSc → aBabcc → aaBbcc → aabbcc

RAMI DI DERIVAZIONE "MORTI"

- Nelle grammatiche di Tipo 1 *non è garantito che qualunque sequenza di derivazione porti a una frase*
  - Può succedere di trovarsi in una *strada chiusa,* impossibilitati a proseguire *perché non ci sono regole di produzione applicabili*
  - Questo non succede mai nel Tipo 2 e nel Tipo 3

Esempio

Grammatica G2:

S → aBC | aSBC
CB → BC
aB → ab
bB → bb
bC → bc
cC → cc

Derivazione su ramo morto:

S → aSBC → aaBCBC → aabCBC →
→ aabcBC → ???????

GRAMMATICHE DI TIPO 1 e DI TIPO 2

C'è dunque una *caratteristica cruciale* che discri-mina una grammatica di Tipo 1 da una di Tipo 2 ?

Dice Chomsky:

Tipo 1: produzioni della forma $\sigma A \delta \rightarrow \alpha$
Tipo 2: produzioni della forma $A \rightarrow \alpha$

In particolare, il Tipo 1 ammette produzioni della forma

$$BC \rightarrow CB$$

che *scambiano due simboli*

- Questa caratteristica è *impossibile da esprimere nel Tipo 2*
- Per esprimerla occorre infatti poter scrivere *due elementi sul lato sinistro della produzione,* ma il Tipo 2 ammette in tale posizione *un unico metasimbolo!*

GRAMMATICHE DI TIPO 2 e DI TIPO 3

Analogamente, c'è una *caratteristica* che distin-gue una grammatica di Tipo 2 da una di Tipo 3 ?

Dice Chomsky:

Tipo 2: produzioni della forma $A \rightarrow \alpha$
dove α *può contenere più metasimboli, in qualsiasi posizione*
[$\alpha \in (VT \cup VN)^*$, $A \in VN$]

Tipo 3: produzioni lineari, della forma
$A \rightarrow \sigma$ *o* $A \rightarrow \sigma B$ *(a destra)* oppure
$A \rightarrow \sigma$ *o* $A \rightarrow B \sigma$ *(a sinistra)*
dove *ci può essere un solo metasimbolo, o in testa o in coda*
[$A,B \in VN$, $\sigma \in VT^*$]

GRAMMATICHE DI TIPO 2 e DI TIPO 3

Analogamente, c'è una *caratteristica* che distin-gue una grammatica di Tipo 2 da una di Tipo 3 ?

Dice Chomsky:

Tipo 2: produzioni della forma $A \rightarrow \alpha$

dove α *può contenere più metasimboli, in qualsiasi posizione*

[$\alpha \in$ (VT ∪ VN)* A ∪ VN]

Nel Tipo 2, i meta-simboli possono trovarsi *in mezzo* alla forma di frase; nel Tipo 3, no.

Tipo

A

$A \rightarrow \sigma$ *o* $A \rightarrow B\ \sigma$ *(a sinistra)*

dove *ci può essere un solo metasimbolo, o in testa o in coda*

[A,B ∈ VN, σ ∈VT*]

SELF - EMBEDDING

Una grammatica contiene *self-embedding* quando una o più produzioni hanno la forma

$$A \overset{*}{\Rightarrow} \alpha_1 A \alpha_2 \qquad (\text{con } \boldsymbol{\alpha_1, \alpha_2} \in V^+)$$

TEOREMA: una grammatica di Tipo 2 *che non contenga self-embedding* genera un *linguaggio regolare*

Dunque, *è il self-embedding* la *caratteristica cruciale* di una grammatica di Tipo 2, che la differenzia da una di Tipo 3.

- Se non c'è self-embedding in nessuna produzione, esiste una grammatica equivalente di Tipo 3, quindi il linguaggio generato è regolare.
- Non vale necessariamente il viceversa: una grammatica **con** self-embedding *potrebbe comunque generare un linguaggio regolare,* se il self-embedding è "finto" (ovvero, "disattivato" da altre regole)

SELF-EMBEDDING: ESEMPIO

La grammatica G:

$S \rightarrow aSc \qquad S \rightarrow A \qquad A \rightarrow bAc \qquad A \rightarrow \varepsilon$

presenta self-embedding e genera il linguaggio L(G):

$L(G) = \{ a^n b^m c^{n+m} \quad n,m \geq 0 \}$

Il ruolo del self-embedding è introdurre una ricorsione in cui *si aggiungono contemporaneamente simboli a sini-stra e a destra,* garantendo di procedere "di pari passo".

È essenziale per definire linguaggi le cui frasi devono contenere simboli bilanciati, come ad esempio le parentesi:

$S \rightarrow (S) \qquad S \rightarrow a$

Questa grammatica genera il linguaggio $L(G) = \{ (^n a)^n \quad n \geq 0 \}$

"FINTO" SELF – EMBEDDING (1/4)

Nonostante la presenza di self-embedding, il linguaggio generato *può essere regolare se la regola con self-embedding è disattivata da altre regole meno restrittive,* che *vanificano il vincolo* che il self-embedding vorrebbe imporre

- Identificare casi del genere non è banale

  Riferimento: "*Self-embedded context-free grammars with regular counterparts*", by S.Andrei, W.Chin, S.Cavadini; Acta Informatica 40, 349-365, 2004, Springer

- Ci limiteremo a illustrarlo tramite alcuni esempi.

"FINTO" SELF – EMBEDDING (2/4)

ESEMPIO 1

S → a S a | X
X → a X | b X | a | b

- Sembrerebbe che le frasi dovessero avere la forma $\mathbf{a^n\ Y\ a^n}$ ..
- .. ma la parte centrale **X** si espande in una *sequenza qualunque* di **a** e **b**, vanificando il vincolo che le **a** in testa e in coda siano in egual numero.
- Risultato: L(G) è regolare, in quanto comprende qualunque sequenza di **a** e **b**

"FINTO" SELF – EMBEDDING (3/4)

ESEMPIO 2

S → a b S b a | a b a

- In questo esempio, il self-embedding viene disattivato in un modo *particolarmente subdolo e sottile*
- Apparentemente i due lati "sinistro" e "destro" crescono in parallelo, producendo un numero identico di gruppi $(\mathbf{a\ b})^k$ e $(\mathbf{b\ a})^k$ …
- .. ma sul più bello, nel mezzo viene piazzato un **a b a** che *spariglia le carte e "distrugge i confini"* fra i due gruppi $(\mathbf{a\ b})^k$ e $(\mathbf{b\ a})^k$ rendendoli *indistinguibili*

S → a b S b a → a b a b S b a b a → a b a b a b S b a b a b a →
→ a b a b a b …. S …. b a b a b a → a b a b a b a b a b a b a b a

- Risultato: la frase è *una sequenza di una quantità dispari di gruppi* ***a b***, seguiti da una **a** finale –un linguaggio regolare: L(G) = { $\mathbf{(a\ b)^{2n+1}\ a}$, n ≥0 }
- Grammatica di Tipo 3 equivalente: **S → X a**
  X → a b | X a b a b

"FINTO" SELF – EMBEDDING (4/5)

ESEMPIO 3

S → a S a | ε

$$L(G) = \{ (a\ a)^n , n \geq 0 \}$$

- Qui il self-embedding, più che disattivato, è *inutile*, perché con un alfabeto di un solo carattere si possono generare solo frasi *estremamente semplici*
- In effeti, *è impossibile distinguere un "gruppo di sinistra" da un "gruppo di destra" se sono fatti tutti solo da un unico possibile simbolo!*
- Grammatica di Tipo 3 equivalente : **S → a a S | ε**

L'osservazione precedente è generalizzata dal seguente

TEOREMA: ogni linguaggio *context-free di alfabeto unitario* è in realtà un *linguaggio regolare.*

RICONOSCIBILITÀ DEI LINGUAGGI

- I linguaggi generati da grammatiche di Tipo 0 *possono in generale NON essere riconoscibili* (decidibili)
  - Non è garantita l'esistenza di una MdT capace di decidere se una frase appartiene o meno al linguaggio
- Al contrario, i linguaggi generati da grammatiche di Tipo 1 (e quindi di Tipo 2 e 3) SONO *riconoscibili*
  - Esiste sempre una MdT capace di decidere se una frase appartiene o meno al linguaggio
  - L'efficienza del processo di riconoscimento, però, è un'altra faccenda…

RICONOSCIBILITÀ DEI LINGUAGGI

- Per ottenere un *traduttore efficiente* occorre adottare linguaggi generati da (classi speciali di) grammatiche di Tipo 2
  - Tutti i linguaggi di programmazione sono infatti *context free*
  - Il riconoscitore prende il nome di PARSER

parser e scanner sono ovviamente due componenti separati, non monolite

- Per ottenere *particolare efficienza* in sotto-parti di uso *estremamente frequente*, si adottano spesso per esse linguaggi generati da grammatiche di Tipo 3
  - identificatori & numeri
  - Il riconoscitore prende il nome di SCANNER (o *lexer*)

QUALI MACCHINE PER QUALI LINGUAGGI?

Chi riconosce i diversi tipi di linguaggi?

GRAMMATICHE	AUTOMI RICONOSCITORI
• Tipo 0	• *Se L(G) è riconoscibile*, serve una Macchina di Turing
• Tipo 1	• Macchina di Turing *(con nastro di lunghezza proporzionale alla frase da riconoscere)*
da qui ci si concentra dal tipo 2 in giu	
• Tipo 2 *(context-free)*	• Push-Down Automaton (PDA) *(cioè ASF + stack)*
• Tipo 3 *(regolari)*	• Automa a Stati Finiti (ASF)

NOTAZIONI PER GRAMMATICHE DI TIPO 2

- Alla luce del discorso precedente, d'ora in poi ci concentreremo sulle *grammatiche di Tipo 2 (e 3)*
- Passando dalla teoria alla pratica, è opportuno modificare le notazioni fin qui utilizzate
  - non è pratico utilizzare lettere greche
  - non è il caso di continuare a riservare le lettere maiuscole ai meta-simboli, perché vogliamo poterle usare nelle frasi (e dunque nell'alfabeto *terminale*)
    → serve un nuovo modo per indicare i metasimboli
  - nelle tastiere e nei font "di base", non ci sono frecce e altri simboli particolari → sarebbe meglio farne senza

GRAMMATICHE B.N.F.

In una *Grammatica BNF*

::= rappresenta una freccia

- le regole di produzione hanno la forma $\alpha ::= \beta$ con $\alpha \in V^+$, $\beta \in V^*$
- i meta-simboli $X \in VN$ hanno la forma $\langle nome \rangle$
- il meta-simbolo | indica *l'alternativa*

Questa estensione permette di esprimere un *insieme di regole* aventi *la stessa parte sinistra*:

$X ::= A_1$ .... $X ::= A_N$

in forma compatta:

$X ::= A_1 \mid A_2 \mid .. \mid A_N$

ESEMPIO 2

G = ⟨VT,VN,P,S⟩, dove:

VT = { il, gatto, topo, sasso, mangia, beve }

VN = { <frase>, <soggetto>, <verbo>, meta simboli
<compl-ogg>, <articolo>, <nome> }

S = <frase>

P = { P definisce la struttura per i meta siml

<frase> ::= <soggetto> <verbo> <compl-ogg>

<soggetto> ::= <articolo><nome>

<articolo> ::= il

<nome> ::= gatto | topo | sasso

<verbo> ::= mangia | beve

<compl-ogg> ::= <articolo> <nome>

}

ESEMPIO 2: DERIVAZIONE

ESEMPIO: derivazione della frase

"il gatto mangia il topo"

(ammesso che tale frase *sia derivabile*)

<frase>

→ **<soggetto> <verbo> <compl-ogg>**

→ **<articolo> <nome> <verbo> <compl-ogg>**

→ **il <nome> <verbo> <compl-ogg>**

→ **il gatto <verbo> <compl-ogg>**

→ **il gatto mangia <compl-ogg>**

→ **il gatto mangia <articolo><nome>**

→ **il gatto mangia il <nome>**

→ **il gatto mangia il topo**

EXTENDED B.N.F. (EBNF)

La notazione EBNF è una *forma estesa* della notazione B.N.F., rispetto a cui introduce alcune *notazioni compatte* per *alleggerire la scrittura* delle regole di produzione

	Forma EBNF	BNF equivalente	significato
1	X ::= [a] B	X ::= B | aB	a può comparire 0 o 1 volta
2	X ::= $\{a\}^n$ B	X ::= B | aB | ...| a^nB	a può comparire da 0 a n volte
3	X ::= {a} B	X ::= B | aX	a può comparire 0 o più volte

a opzionale

la differenza tra 2 e 3 sta nel numero finito (n) o infinito di a (nel 3 si usa una regola ricorsiva per ottenere infinite a)

NOTA: la produzione X ::= B | aX è ricorsiva (a destra).

Forma EBNF	BNF equivalente	significato
X ::= (a | b) D | c	X ::= a D | b D | c	raggruppa categorie sintattiche

ESEMPIO 3: NUMERI NATURALI

G = ⟨VT,VN,P,S⟩

dove:

VT = { 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 }

VN = { <num>, <cifra>, <cifra-non-nulla> }

S = <num>

EBNF

P = {

<num> ::= <cifra> | <cifra-non-nulla> {<cifra>}

<cifra> ::= 0 | <cifra-non-nulla>

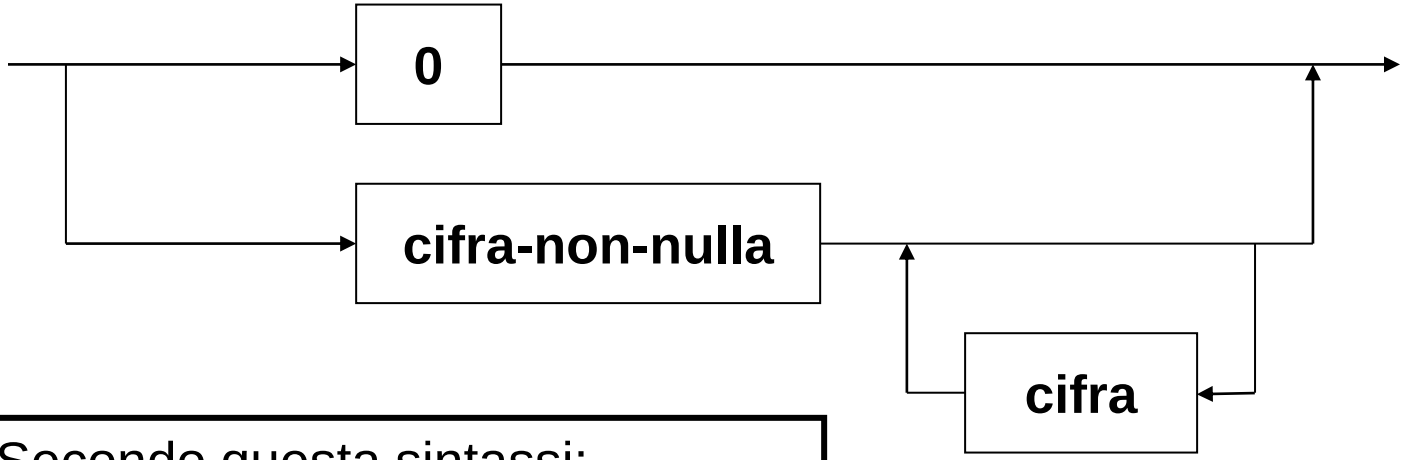
<cifra-non-nulla> ::= 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9

}

non si puo' usare per scrivere "03" (nei linguaggi perche' 0 se per ottale e 0x per esadecimale

ESEMPIO 3: NUMERI NATURALI

La stessa sintassi può essere espressa tramite un *diagramma sintattico*



Secondo questa sintassi:

- "0" è una frase **lecita**
- "131" è una frase **lecita**
- "013" è una frase **illecita**

ESEMPIO 4: NUMERI INTERI

- Sintassi analoga alla precedente
- ma *con la possibilità di mettere un segno (+,-)* davanti al numero naturale

Quindi:

- stesse regole di produzione
  più una (al top level) per generare il segno
- stesso alfabeto terminale
  più i due simboli + e -

ESEMPIO 4: NUMERI INTERI

G = ⟨VT,VN,P,S⟩, dove:

VT = { 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,+,- }

VN = {<int>, <num>,
<cifra>, <cifra-non-nulla> }

P = {

<int> ::= [+|-] <num>

Lo scopo ora è <int>, non più <num>

<num> ::= <cifra> | <cifra-non-nulla> {<cifra>}

<cifra> ::= 0 | <cifra-non-nulla>

<cifra-non-nulla> ::= 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9

}

ESEMPIO 5: IDENTIFICATORI

Nell'uso pratico si danno di solito solo le regole di produzione, definendo VT, VN e S *implicitamente*

- i non-terminali hanno la forma BNF <…>
- il primo di essi è il simbolo iniziale

P = {

<id> ::= <lettera> { <lettera> | <cifra>}

<lettera> ::= A | B | C | D | ... | Z

<cifra> ::= 0|1|2|3|4|5|6|7|8|9

}

scopo

VN

VN

VT

VT

ALBERI DI DERIVAZIONE

Per le sole grammatiche di Tipo 2 si introduce il concetto di *albero di derivazione*

- ogni *nodo dell'albero* è associato a un *simbolo* del vocabolario $V = VT \cup VN$
- la *radice* dell'albero coincide con lo *scopo* S
- se $a_1, a_2, ..., a_k$ sono i k figli ordinati di un dato nodo X (associato al simbolo $X \in VN$), significa che la grammatica contiene la produzione

$$X ::= A_1\ A_2 \ldots A_k$$

dove A_i è il simbolo associato al nodo a_i

Si noti che *l'albero di derivazione non può esistere per grammatiche di Tipo 1 e 0* perché in esse il lato sinistro delle produzioni ha *più di un simbolo* e dunque i nodi figli avrebbero *più di un padre* (ergo non si otterrebbe più un albero, ma un generico grafo).

RIPRENDENDO L' ESEMPIO 2

G = ⟨VT,VN,P,S⟩ con

VT = { il, gatto, topo, sasso, mangia, beve }

VN = { <frase>, <soggetto>, <verbo>,
<compl-ogg>, <articolo>, <nome> }

S = <frase>

P = {

<frase> ::= <soggetto> <verbo> <compl-ogg>

<soggetto> ::= <articolo><nome>

<articolo> ::= il

<nome> ::= gatto | topo | sasso

<verbo> ::= mangia | beve

<compl-ogg> ::= <articolo> <nome>

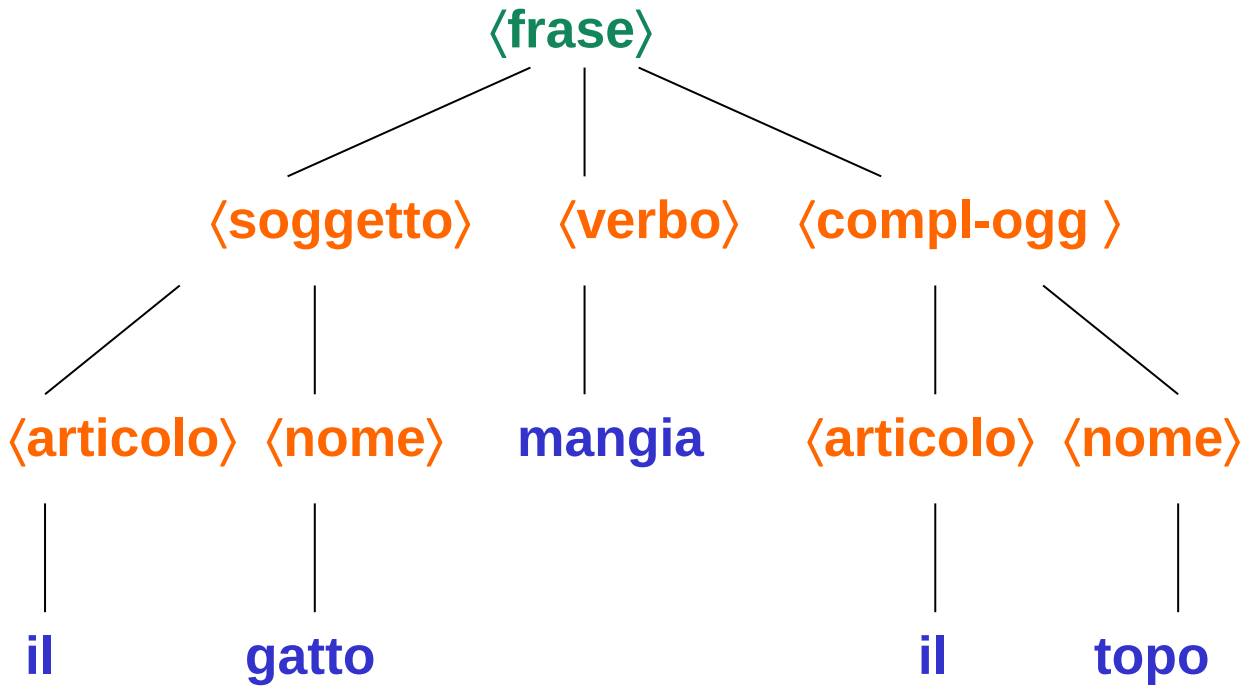
}

RIPRENDENDO L' ESEMPIO 2

Derivazione della frase

"il gatto mangia il topo"

(ammesso che tale frase *sia* derivabile)



RIPRENDENDO L' ESEMPIO 4

G = ⟨VT,VN,P,S⟩, dove:

VT = { 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,+,- }

VN = {<int>, <num>,
<cifra>, <cifra-non-nulla> }

P = {

EBNF

<int> ::= [+|-] <num>
<num> ::= <cifra> | <cifra-non-nulla> {<cifra>}
<cifra> ::= 0 | <cifra-non-nulla>
<cifra-non-nulla> ::= 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9

}

RIPRENDENDO L' ESEMPIO 4

- Qui una regola è scritta in EBNF (Extended BNF), che *non è direttamente mappabile* su un albero.
- Occorre perciò riscriverla in BNF standard, ricordando le equivalenze:

X ::= {a} B ↔ **X ::= B | aX**

X ::= B {a} ↔ **X ::= B | Xa**

- Dunque, la regola:

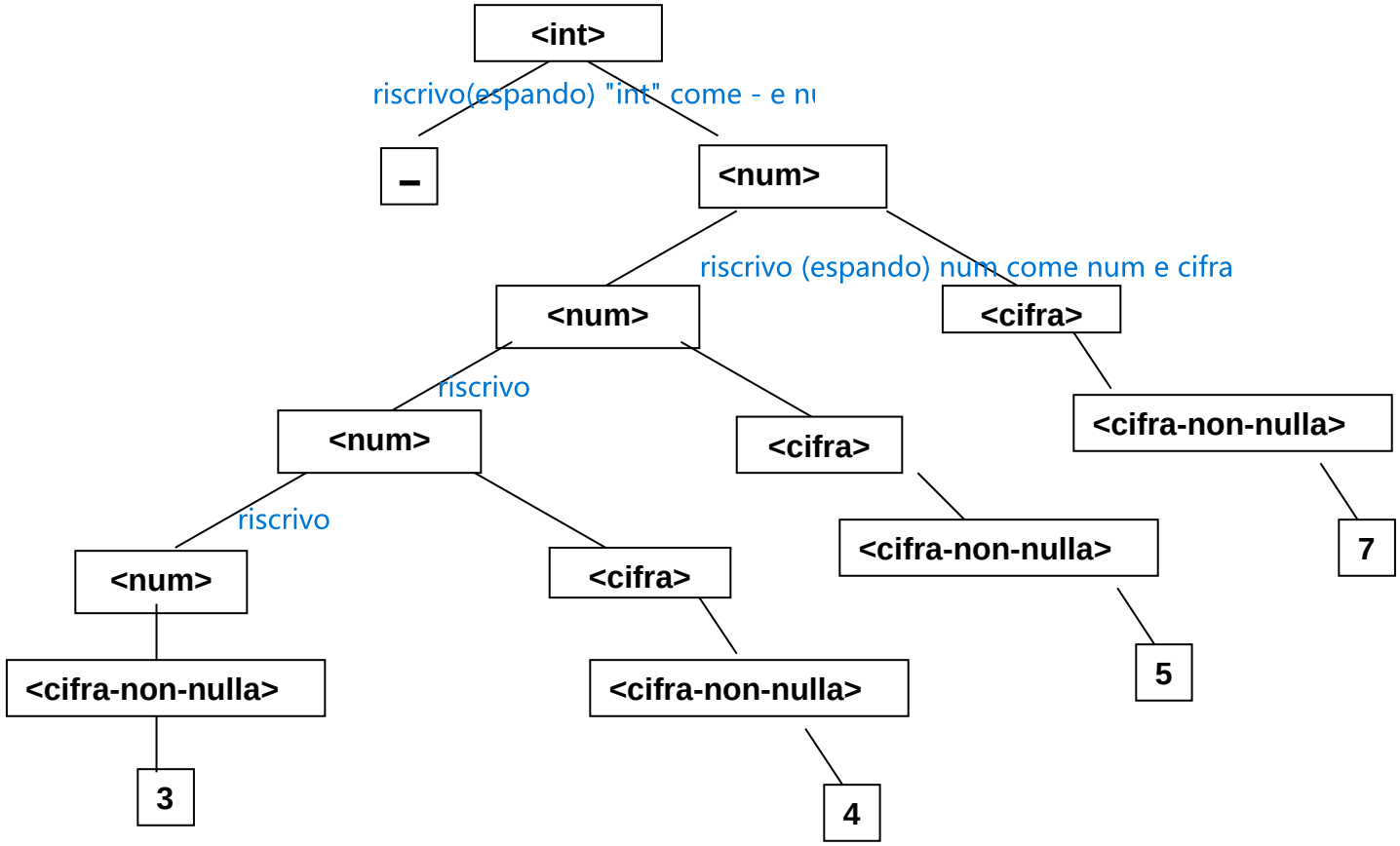
<num> ::= <cifra-non-nulla> {<cifra>}

va riscritta come:

<num> ::= <cifra-non-nulla> | <num> <cifra>

RIPRENDENDO L' ESEMPIO 4

Albero di derivazione del numero intero -3457:



DERIVAZIONI CANONICHE

DERIVAZIONE “LEFT-MOST” *(deriv. canonica sinistra)*

- A partire dallo scopo della grammatica, si riscrive sempre *il simbolo non-terminale più a sinistra.*

DERIVAZIONE “RIGHT-MOST” *(deriv. canonica destra)*

- A partire dallo scopo della grammatica, si riscrive sempre *il simbolo non-terminale più a destra.*

AMBIGUITÀ

- Una grammatica è *ambigua* se esiste almeno una frase che ammette *due o più derivazioni canoniche sinistre distinte* (i.e. per cui esistono almeno due alberi sintattici distinti).
  - *Grado di ambiguità* = numero di alberi sintattici distinti
- L'ambiguità è una caratteristica *indesiderabile.*

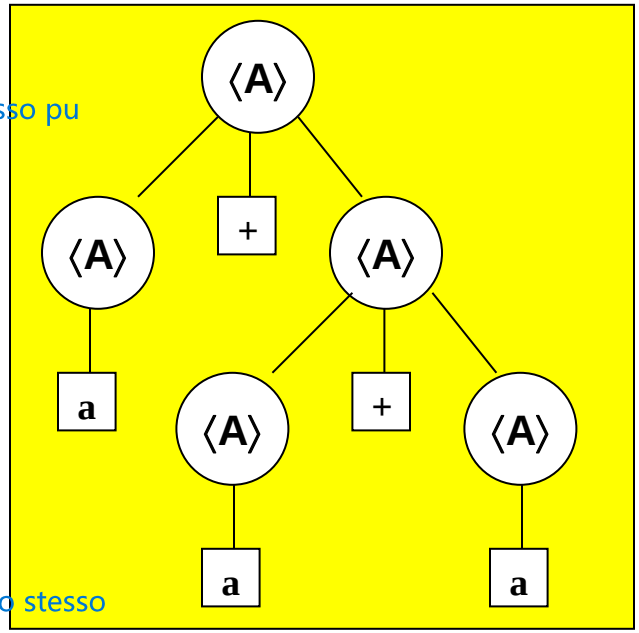
due percorsi diversi per arrivare allo stesso pu

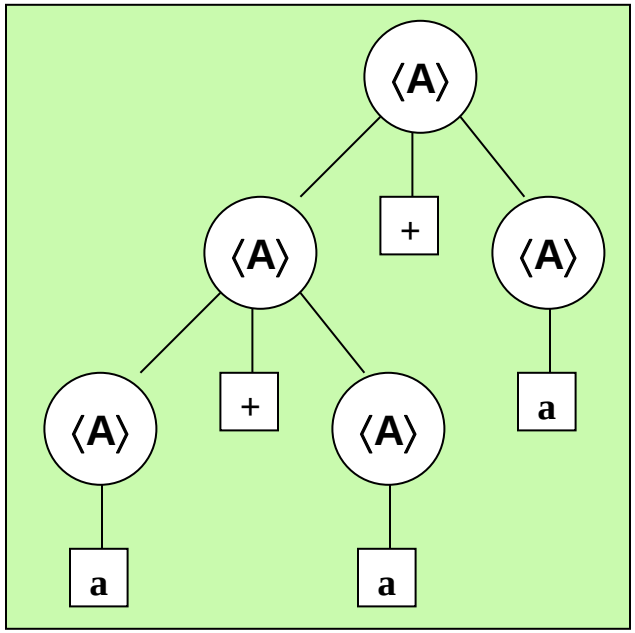
ESEMPIO

A ::= A + A

A ::= a

La frase a+a+a è *ambigua*:





ambigua per via di processi di derivazione diversi che conducono allo stesso risultato

AMBIGUITÀ

- Purtroppo, stabilire se una grammatica di Tipo 2 sia ambigua è un problema *indecidibile*
  - però, in pratica, un certo numero di derivazioni è spesso sufficiente per "convincersi" della (non per dimostrare la) ambiguità di G
- Se una grammatica è ambigua, spesso se ne può trovare un'altra che non lo sia – *ma non sempre.*
- Un linguaggio si dice *intrinsecamente ambiguo* se *tutte le grammatiche che lo generano sono ambigue.*
  - ESEMPIO: $L = \{ a^n b^n c^* \} \cup \{ a^* b^n c^n \}$, con $n \geq 0$
    Intuitivamente, tutte le frasi della forma $a^n b^n c^n$ appartengono a entrambi i sotto-linguaggi, quindi esistono due derivazioni distinte
  - ESEMPIO: $L = \{ a^n b^n c^m d^m \} \cup \{ a^n b^m c^m d^n \}$, con $m,n \geq 1$
    Come sopra, almeno alcune frasi della forma $a^n b^n c^n d^n$ ammettono due derivazioni distinte

come detto a lezione, sono linguaggi progettati apposta per essere ambigui avendo cose che vanno in conflitto tra loro

LA STRINGA VUOTA

- La stringa vuota *può* far parte delle frasi generate da una *grammatica di Tipo 0*, poiché la generica regole di produzione $\alpha \rightarrow \beta$ prevede $\alpha \in V^+$, $\beta \in V^*$
  - le forme di frase possono accorciarsi durante la riscrittura
- La stringa vuota invece *non può* far parte delle frasi generate da una grammatica di Tipo 1 (e quindi neanche di tipo 2 e 3) perché lì vige la condizione $\alpha \neq \varepsilon$ e perciò la generica forma di frase *non può mai* accorciarsi.

RICORDA: questo non è in contraddizione con il fatto che le produzioni di grammatiche di Tipo 2 e 3 possano "apparentemente" ammettere ε sul lato destro delle produzioni, perché esiste sempre una grammatica equivalente senza ε-rules (escluso al più S).

LA STRINGA VUOTA

- Talora però *farebbe comodo* avere la stringa vuota ε nel linguaggio, per esprimere *parti opzionali*
- È possibile farlo *senza alterare il tipo della grammatica* purché se ne ammetta la presenza nella sola produzione di *top-level* $S \rightarrow \varepsilon$ ed S non compaia altrove.
  - in questo modo, il solo caso in cui ε entra in gioco è se è scelta all'inizio, *al primo passo di derivazione*
  - tutte le altre stringhe sono generate da S *usando regole diverse,* che non contengono ε: ergo, le forme di frase non possono comunque accorciarsi.
- Questa proprietà è catturata dal seguente teorema:

LA STRINGA VUOTA

TEOREMA

- Dato un linguaggio L di tipo 0, 1, 2, o 3
- i linguaggi $L \cup \{\varepsilon\}$ e $L - \{\varepsilon\}$ *sono dello stesso tipo.*

Ad esempio, le produzioni:

S ::= ε | X
X ::= ab | a X b

definiscono il linguaggio (context-free) $L = \{ \mathbf{a^n b^n}, n \geq 0\}$

(Vale ovviamente la convenzione $\boldsymbol{a^0 = b^0 = \varepsilon}$*)*

FORME NORMALI

Un linguaggio di tipo 2 *non vuoto* può essere sempre generato da una grammatica di tipo 2 in cui:

- ogni simbolo, terminale o non terminale, compare nella derivazione di qualche frase di L
  - ossia, non esistono simboli o meta-simboli inutili
- non ci sono produzioni della forma $A \rightarrow B$ con $A,B \in VN$
  - ossia non esistono produzioni che “cambiano solo nome” a un meta-simbolo
- se il linguaggio non comprende la stringa vuota ($\varepsilon \notin L$) allora *non ci sono* produzioni della forma $A \rightarrow \varepsilon$.

FORME NORMALI

In particolare si può fare in modo che *tutte le produzioni abbiano una forma ben precisa:*

- *forma normale di Chomsky*

  produzioni della forma $A \rightarrow B\ C \mid a$
  con $A,B,C \in VN$, $a \in VT \cup \varepsilon$

- *forma normale di Greibach* (per linguaggi privi di ε)

  produzioni della forma $A \rightarrow a\ \alpha$
  con $A \in VN$, $a \in VT$, $\alpha \in VN^*$

La forma normale di Greibach facilita, come si vedrà, la costruzione di riconoscitori.

ESEMPIO 1

Esiste un algoritmo che trasforma ogni grammatica di tipo 2 in forma normale di Chomsky.

Qui lo vediamo solo applicato a un esempio.

- Grammatica data:

  $S \rightarrow d\,A \mid c\,B$

  $A \rightarrow d\,A\,A \mid c\,S \mid c$

  $B \rightarrow c\,B\,B \mid d\,S \mid d$

- *Forma normale di Chomsky*

  $S \rightarrow M\,A \mid N\,B$ $\qquad$ $M \rightarrow d$ $\qquad$ $N \rightarrow c$

  $A \rightarrow M\,P \mid N\,S \mid c$ $\qquad$ $P \rightarrow A\,A$

  $B \rightarrow N\,Q \mid M\,S \mid d$ $\qquad$ $Q \rightarrow B\,B$

La trasformazione in forma di Greibach richiede alcune tecniche extra.

TRASFORMAZIONI IMPORTANTI

- Per facilitare la costruzione dei riconoscitori, è spesso rilevante poter trasformare la struttura delle regole di produzione per renderle *più adatte* allo scopo.
- Alcune trasformazioni particolarmente importanti sono
  - la *sostituzione*
  - il *raccoglimento* a fattor comune
  - la *eliminazione della ricorsione sinistra*.

Tra gli altri usi, queste trasformazioni sono la base per trasformare una qualsiasi grammatica di tipo 2 in forma normale di Greibach.

TRASFORMAZIONI IMPORTANTI

- Per facilitare la costruzione dei riconoscitori, è spesso rilevante poter trasformare la struttura delle regole di produzione per renderle *più adatte* allo scopo.
- Alcune trasformazioni particolarmente importanti sono
  - la *sostituzione*
  - il *raccoglimento* a fattor comune
  - la *eliminazione della ricorsione sinistra.*

Banali, analoghe all'algebra

Importante, ma con conseguenze

Tra gli altri usi, queste trasformazioni sono la base per trasformare una qualsiasi grammatica di tipo 2 in forma normale di Greibach.

IL PROBLEMA DELLA RICORSIONE SINISTRA

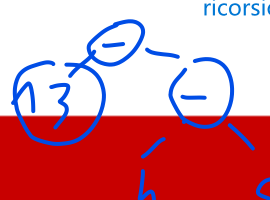
- La ricorsione sinistra bad

  X → X a c | p

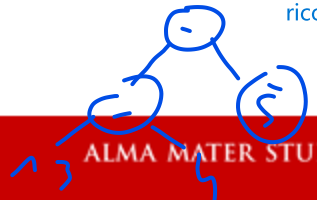
- *nasconde l'iniziale delle frasi prodotte,* che si può determinare solo guardando altre regole
  - nell'esempio sopra, tutte le frasi iniziano per **p**, ma questo *non si vede* dalla regola ricorsiva **X → X a c**
  - non è così nella ricorsione destra, che invece evidenzia proprio l'iniziale delle produzioni: **X → r X | a**
- La buona notizia è che, tecnicamente, si può *sempre* sostituire la ricorsione sinistra con una destra.
- La cattiva notizia è che spesso *non ci potremo permettere il lusso di farlo,* a causa delle conseguenze.

esempio 13-4-5

ricorsione a destra



ricorsione a sinistra



equivalente, ma la ricorsione a destra pone il problema della semantica: le operaizoni sono associative a sinistra, quindi prima faccio 13-4, poi 9-5 ecc. se parto da destra invece (ricorsione a DESTRA), significa espandere prima 4 e 5, quindi fare prima 4-5 (risultato sbagliato)

SOSTITUZIONE

La sostituzione consiste nell' *espandere un simbolo non terminale* che compare nella parte destra di una regola di produzione, sfruttando a tale scopo un'altra regola di produzione.

Nella grammatica a lato è possibile sostituire il metasimbolo **S** nella seconda produzione, usando a tale scopo la prima produzione.

ESEMPIO

S → X a
X → b Q | S c | d

Espandiamo quindi **S** come indicato: la nuova regola per **X** non contiene più alcun riferimento a S

ESEMPIO

S → X a
X → b Q | X a c | d

IL RACCOGLIMENTO A FATTOR COMUNE

Il raccoglimento a fattor comune consiste nell' isolare il prefisso più lungo comune a due produzioni.

ipotesi A: appena ottieni un carattere, il "compilatore" deve sapere quale regola applicare, senza aspettare. questo significa che nel primo esempio bisogna per forza tirare a caso

Nella grammatica a lato è possibile isolare il prefisso **a S** comune alle prime due produzioni.

ESEMPIO

S → a S b | a S c

Raccogliamo quindi a fattore comune il prefisso comune **a S** …

ESEMPIO

S → a S (b | c)

…e introduciamo un nuovo meta-simbolo **X** per esprimere *la parte che segue* il prefisso comune.

ESEMPIO

S → a S X

X → b | c

la x serve per efficientare il programma: con X succede che quando si arriva a X si e' certi: nel primo caso invece sotto ipotesi A si sarebbe dovuto "indovinare" la regola giusta, causando una cascata di "tiri di monetine" che causano irrimediabilmente errori

ELIMINAZIONE DELLA RICORSIONE SINISTRA

E' una trasformazione *sempre possibile*, articolata in due passi:

- Fase 1: eliminazione dei cicli ricorsivi a sinistra
- Fase 2: eliminazione della ricorsione sinistra diretta.

Fase preliminare

- si stabilisce una *relazione d'ordine* fra i meta-simboli coinvolti del ciclo ricorsivo
- Nel nostro caso, sia dunque **C > B > A**

ESEMPIO

A → B a
B → C b
C → A c | p

Fase 1

- si modificano tutte le produzioni del tipo **Y → Xα** *in cui* **Y > X**, sostituendo a **X** le forme di frase stabilite dalle produzioni relative a **X**

Si ottiene quindi:

A → B a
B → C b
C → C b a c | p

Fase 2

- le produzioni ricorsive dirette **X → X α | p** si modificano introducendo un metasimbolo **Z** e scrivendo **X → p | p Z** e **Z → α | α Z**

Ergo, **C → C b a c | p** diventa

C → p | p Z
Z → b a c | b a c Z

ELIMINAZIONE DELLA RICORSIONE SINISTRA

- Perché, dunque, potremmo *non poterlo (volerlo) fare?*
  - Sostituendo la ricorsione sinistra con una destra, si generano le stesse frasi, ma con regole (dichiaratamente!) diverse
  - Ergo, se interessa solo il risultato finale «ai morsetti», rimpiazzare la ricorsione sinistra con una destra è lecito e privo di conseguenze
  - se, invece, interessa anche *come ci si è arrivati* (ossia, la sequenza di derivazione), allora il rimpiazzo non è lecito perché cambiando le regole cambia anche la sequenza di derivazione.
- In un puro riconoscitore, che deve solo dire «sì o no», eliminare la ricorsione sinistra *è fattibile senza conseguenze*
- In un vero parser, che deve anche *dare significato alle frasi* (lecite), *regole diverse* tipicamente implicano *significato diverso* per alcune frasi, con ciò *alterando il liguaggio*

ESEMPIO

- Nelle espressioni aritmetiche, la cultura matematica diffusa nei secoli richiede associatività sinistra:
  - in matematica, `13-5-4` ha il significato di `(13-5)-4` cioè *quattro*
  - non sarebbe la stessa cosa se fosse `13-(5-4)` cioè *dodici*
- Sfortunatamente, ciò richiede regole grammaticali con ricorsione a sua volta sinistra:

$$E \rightarrow E + t \mid E - t \mid t$$

- Sostituirle con la ricorsione destra è possibile, ma porta a un albero di derivazione con associatività destra, che dà alle espressioni in significato *totalmente diverso!*
  - tecnicamente fattibile
  - culturalmente improponibile

ESEMPIO 2

Queste trasformazioni consentono di trasformare una grammatica in forma normale di Greibach.

Qui lo vediamo solo applicato a un esempio.

- Grammatica data:
  $S \rightarrow X\ a$
  $X \rightarrow b\ S \mid S\ c \mid d$
- *Forma normale di Greibach* ($A \rightarrow p\ \alpha$, $A \in VN$, $p \in VT$, $\alpha \in VN^*$)
  - eliminazione ciclo ricorsivo a sinistra
  - eliminazione ricorsione sinistra diretta
  - sostituzione
  - ridenominazione dei terminali tramite non-terminali ausiliari

ESEMPIO 2

Fase 1
- relazione d'ordine fra i simboli non terminali coinvolti del ciclo ricorsivo : **X > S**

Grammatica data:

S → X a

X → b S | S c | d

Fase 2
- modifica della produzione **X → S c** sostituendo a **S** la produzione **S → X a**

Si ottiene quindi:

S → X a

X → (b S | d) | X a c

Fase 3
- eliminazione ricorsione sinistra **X→ X α | p**, qui con **p = (bS | d)** , introducendo il nuovo simbolo **Z** tale che **Z → α | α Z** e **X ::= p Z | p**

da cui:

S → X a

Z → a c | a c Z

X → (bS | d) Z | (bS | d)

Fase 4
- sostituzione del simbolo **X** nella prima regola

S → bSa | bSZa |dZa | da

Z → a c | a c Z

Fase 5
- introduzione dei non-terminali ausiliari **A** e **C** per rappresentare **a** e **c** dove appropriato

S → bSA |bSZA | dZA | dA

Z → a C | a C Z

A → a

C → c

COME CAPIRE SE UN LINGUAGGIO (NON) È DI TIPO 2 (3) ?

- Capire se un linguaggio è di Tipo 2 (o di Tipo 3) *"solo guardandolo"* in generale non è banale
  interessante
  - non basta "immaginare" come possano essere le produzioni, perché nessuno assicura che le immaginiamo "bene"

- Il *PUMPING LEMMA dà una condizione necessaria, ma non sufficiente,* perché un linguaggio sia di Tipo 2 (o 3)
  - può quindi essere usato per dimostrare "in negativo" che un linguaggio non è di Tipo 2 (o di Tipo 3)…
  - .. ma purtroppo non per affermarlo "in positivo"

IL PUMPING LEMMA
(o "lemma del pompaggio")

L'IDEA DI FONDO

- in un linguaggio infinito, ogni stringa sufficientemente lunga deve avere una parte che si ripete
- ergo, essa *può essere "pompata" un qualunque numero di volte* ottenendo sempre altre stringhe del linguaggio
  - È con questo lemma che si dimostra, ad esempio, che:

    L1 = {$a^n b^n c^n$} **non è di Tipo 2** (quindi è almeno di Tipo 1)

    L2 = {a^p , p primo} **non è di Tipo 3** (quindi è almeno di Tipo 2)(*)

La formulazione è leggermente diversa a seconda che si tratti di linguaggi di Tipo 2 o 3, ma la sostanza non cambia.

(*) in realtà non è neppure di Tipo 2, come si dimostra ri-applicando il lemma.

IL PUMPING LEMMA
per linguaggi context-free

Se L è un linguaggio di Tipo 2, esiste un intero N tale che, per ogni stringa z di lunghezza almeno pari a N:

- z è decomponibile in 5 parti: $z = uvwxy$ $|z| \geq N$
- la parte centrale vwx ha lunghezza limitata: $|vwx| \leq N$
- v e x non sono entrambi nulle: $|vx| \geq 1$
- la 2ª e la 4ª parte possono essere *"pompate" quanto si vuole* ottenendo sempre altre frasi del linguaggio; ovvero, $uv^iwx^iy \in L \quad \forall\, i \geq 0$

- Il numero N (lunghezza minima delle stringhe decomponibili in 5 parti di cui 2 pompabili) dipende dallo specifico linguaggio
- La dimostrazione si basa sulle lunghezze dei cammini nell'albero di derivazione associato (cfr. Hopcroft/Motwani/Ullman, p. 292)

IL PUMPING LEMMA per linguaggi regolari

Se L è un linguaggio di Tipo 3, esiste un intero N tale che, per ogni stringa z di lunghezza almeno pari a N:

- z può essere riscritta come: $z = xyw$ $|z| \geq N$
- la parte centrale xy ha lunghezza limitata: $|xy| \leq N$
- y non è nulla: $|y| \geq 1$
- la parte centrale può essere *pompata quanto si vuole* ottenendo sempre altre frasi del linguaggio; ovvero, $xy^iw \in L \quad \forall\, i \geq 0$

- Il numero N dipende caso per caso dallo specifico linguaggio
- La dimostrazione si basa sull'automa a stati associato (cfr. Hopcroft/Motwani/Ullman, p. 135)

ESEMPIO 1

L = {a^p , p primo } non è un linguaggio regolare.

- se L fosse regolare, esisterebbe un intero N in grado di soddisfare il pumping lemma; sia allora **P un primo ≥ N+2** (che esiste perché i numeri primi sono infiniti): consideriamo allora la stringa **$z = a^P$**
- scomponiamo ora **z** nei tre pezzi **xyw, con |y| = r;**
  ne segue che **|xw| = p – r**
- in base al lemma, se L fosse regolare, la nuova stringa **$xy^{p-r}w$** dovrebbe anch'essa appartenere al linguaggio, ma…
- …. la lunghezza di tale stringa sarebbe:
  $| xy^{p-r}w | = |xw| + (p-r)|y| = (p-r) + (p-r)|y| = (p-r)(1+|y|) = (p-r)(1+r)$
  ovvero non un numero primo
- pertanto, *essa non appartiene a L* e dunque esso non è regolare.

ESEMPIO 2 (1)

L = {$a^n b^n c^n$} non è context-free

- se L fosse context-free, esisterebbe un intero N in grado di soddisfare il pumping lemma; consideriamo allora la stringa **z = $a^N b^N c^N$**
- scomponiamo z nei cinque pezzi uvwxy, con |vwx| ≤ N
- poiché **fra l'ultima "a" e la prima "c" ci sono N posizioni**, il pezzo centrale "**vwx**" **non può contenere sia "a" sia "c",** perché se contiene le une, non è abbastanza lungo da contenere le altre. Quindi, delle due:

1. **o "vwx" non contiene "c"**: allora "vx" è fatta solo di "a" e "b". Ma allora "uwy", che in base al pumping lemma dovrebbe appartenere a L, ha tutte le "c" (che sono N) ma meno "a" o meno "b" del necessario, ergo non appartiene a L → assurdo
2. **o “vwx" non contiene "a"**: allora"vx" è fatta solo di "b" e "c", dunque "uwy" ha N "a" ma meno "b" o meno "c" del necessario, ergo non appartiene a L → assurdo.

ESEMPIO 2 (2)

ESEMPIO: N=6 → z = "aaaaaabbbbbbccccccc"

Scomponiamo z nei cinque pezzi uvwxy, con |vwx| ≤ N

– si può fare in vari modi, dipende da *come* e *dove* si prende **vwx**

– supponiamo di prenderla lunga 5 (comunque, al più 6): la suddivisione può quindi essere una delle seguenti illustrate in tabella:

u	vwx	y
...	...	...
aaaaa	abbbb	bbccccccc
aaaaaa	bbbbb	bccccccc
aaaaaab	bbbbb	ccccccc
aaaaaabb	bbbbc	cccccc
...	...	...

– come si vede, **vwx** non può contenere sia "a" sia "c": se contiene le une, per evidenti motivi di lunghezza non può contenere le altre.

ESEMPIO 2 (3)

– supponiamo, per fissare le idee, che la scelta sia questa:

u	vwx	y
aaaaa	abbbb	bbcccccc

– alla luce di ciò, la sotto-stringa **vx**, lunga almeno 1 ma priva del pezzo centrale **w**, a sua volta è fatta solo di "a" e "b"

– qual è il pezzo centrale **w** in " **abbbb**"? di nuovo, ci sono più possibilità:

v	w	x
a	bbbb	*(vuota)*
(vuota)	abbb	b
ab	bbb	*(vuota)*
(vuota)	abb	bb
...	...	...

– ora, fra le altre stringhe del linguaggio, della forma uv^iwx^iy, c'è anche quella per cui *i=0*, ossia in cui **v** e **x** mancano: è la stringa uwy, ossia..

ESEMPIO 2 (4)

– ..ossia, dato che **u** e **y** sono quelle scelte da noi poco fa:

u	vwx	y
aaaaa	**abbbb**	**bbccccc**

– e che il pezzo centrale **w** è uno di questi:

v	w	x
a	**bbbb**	*(vuota)*
(vuota)	**abbb**	**b**
ab	**bbb**	*(vuota)*
(vuota)	**abb**	**bb**

– la stringa ***uwy*** risulta **"aaaaa" + *w* + "bbccccc"**, ovvero **ha tutte le sei "c" previste in fondo, ma meno "a" e/o meno "b" del necessario,** perché alcune sono state "mangiate" dalla sotto-stringa **vx**

– ergo, la stringa ***uwy*** **non appartiene al linguaggio, violando l'ipotesi.**

ESEMPIO 2 (6)

L = {$a^n b^n c^n$} non è context-free

- in alternativa si può dare una dimostrazione analoga all'Esempio 1
- consideriamo allora la stringa **z = $a^N b^N c^N$**
- scomponiamo z nei cinque pezzi uvwxy, con |vwx| ≤ N: sia **vwx = b^N**
- in particolare, sia |v| = p, |x|=q → |w| = N-p-q
- in base al lemma, se L fosse context free, la nuova stringa **uv^2wx^2y** dovrebbe anch'essa appartenere al linguaggio..
- … ma tale stringa sarebbe: **$a^N b^{2p} b^{N-p-q} b^{2q} c^N = a^N b^{2p+N-p-q+2q} c^N$** ovvero **$a^N b^{N+p+q} c^N$** che ***non avrebbe la forma richiesta***
- pertanto, *essa non appartiene a L* e dunque esso non è context-free.

ESPRESSIONI REGOLARI

ESPRESSIONI REGOLARI

Un formalismo di particolare interesse [per descrivere linguaggi] è quello delle *espressioni regolari.*

Le espressioni regolari sono *tutte e sole le espressioni* ottenibili tramite le seguenti regole:

- *la stringa vuota* ε è una espressione regolare
- dato un alfabeto A,
  ogni elemento $a \in A$ è una espressione regolare
- se X e Y sono espressioni regolari, lo sono anche:

  X+Y (*unione*)
  X•Y (*concatenazione*)
  X* (*chiusura*)

  definite come segue:

ESPRESSIONI REGOLARI

[definizione delle tre operazioni]

Unione (+) *(operatore meno prioritario)*

$X + Y = \{ x \mid x \in X \vee x \in Y \}$

Concatenazione (•) *(associativa ma non commutativa)*

$X \bullet Y = \{ x \mid x = a\,b,\ a \in X \wedge b \in Y \}$

$\{\} \bullet X = \{\}$ *per qualsiasi X*

Chiusura(*) *(operatore più prioritario)*

$X^* = X^0 \cup X^1 \cup X^2 \cup \ldots$

dove $X^0 = \varepsilon$

e $X^k = X^{k-1} \bullet X$

UN PRIMO ESEMPIO

ESEMPIO

X1 = {00, 11}
X2 = {01, 10}

X1 + X2 = {00, 11, 01, 10}

X1 • X2 = {0001, 1101, 0010, 1110}

X2 • X1 = {0100, 0111, 1000, 1011}

X1* = {ε , 00,11, 0000,0011,1100,1111, 000000, 000011, 001100, 001111, 110000, 110011, 111100, 111111, … }

ATTENZIONE: uno stesso linguaggio può essere descritto da *molte espressioni regolari diverse* !

ALTRI ESEMPI

Con riferimento a linguaggi:

- ε denota il *linguaggio vuoto*
- un elemento $a \in A$ denota *il linguaggio {a}*
- R1+R2 denota *l'unione dei linguaggi* denotati da R1 e R2
- R1•R2 denota *la concatenazione dei linguaggi* denotati da R1 e R2
- R* denota il risultato dell'operatore di chiusura applicato al linguaggio denotato da R.

ESEMPIO sull'alfabeto A = { 0, 1 }

0 + 1* = {0, ε , 1, 11, 111, 1111, 11111, … }

(0 + 1)* = {0+1, ε , (0+1)(0+1), (0+1)(0+1)(0+1), … } =
= {ε , 0, 1, 00,10,01,11, 000,010,001,011,100,110,101,111 , … }
= A*

(10 • 01)* = (1001)* = { ε , 1001, 10011001, 100110011001, … }

ESPRESSIONI
vs LINGUAGGI REGOLARI

- Ma perché ci interessa tutto questo?
- Cosa hanno a che fare queste *curiose espressioni* con le grammatiche e i linguaggi ?

La risposta è nel seguente

TEOREMA
i linguaggi generati da *grammatiche regolari*
coincidono
con i linguaggi descritti da *espressioni regolari.*

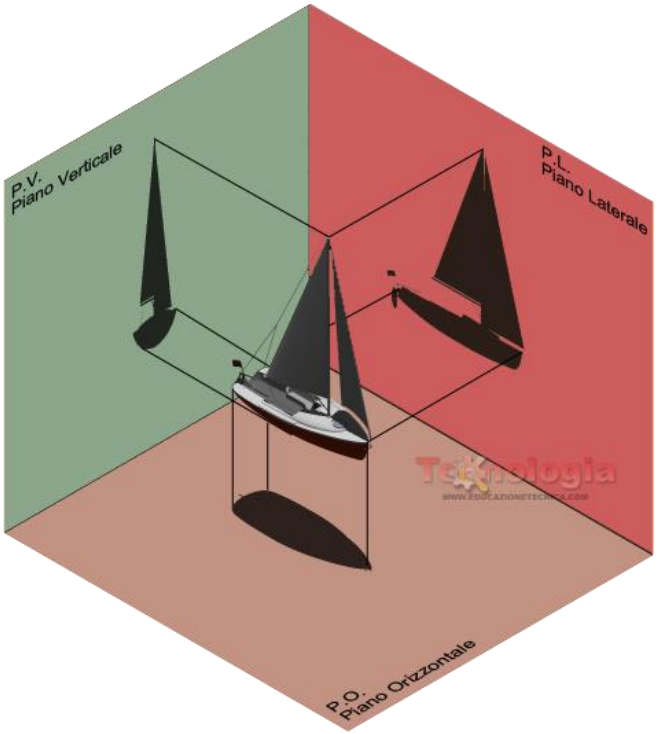
Grammatiche ed espressioni regolari sono quindi *due rappresenta-zioni diverse della stessa realtà:*

- una è costruttiva – dice COME si fa, ma non COSA si ottiene
- l'altra descrittiva – dice COSA si ottiene, ma non COME si ottiene

RAPPRESENTAZIONI DIVERSE DELLA STESSA REALTÀ

GRAMMATICA

- rappresentazione costruttiva
- *dice COME si fa*
- *non COSA si ottiene*



ESP. REGOLARE

- rappresentazione descrittiva
- *dice COSA si ottiene*
- *non COME si fa*

Grammatica

$S \rightarrow a\ S \mid b$

Espressione regolare

$L = \{ a^* b \}$

Si può passare dall'una dall'altra?

PASSAGGI FRA RAPPRESENTAZIONI

Dalla grammatica all'espressione regolare

- si risolvono le cosiddette *equazioni sintattiche*

Dall'espressione regolare alla grammatica

- si interpretano gli operatori dell'espressione regolare in base alla loro semantica (sequenza, ripetizione, alternativa) mappandoli in opportune regole

DALLA GRAMMATICA ALL'ESPRESSIONE REGOLARE

Per passare dalla grammatica all'espressione regolare si interpretano le produzioni come *equazioni sintattiche,* in cui

- i simboli terminali sono i termini noti,
- i linguaggi generati da ogni simbolo non terminale sono le incognite

e si risolvono con le normali regole algebriche.

ESEMPIO: la grammatica lineare a destra vista in precedenza:

$$S \rightarrow a \mid a + S \mid a - S$$

può essere letta come un'equazione con

- tre termini noti: a, +, -
- una incognita, L_S

che impone il vincolo *(usiamo per l'unione il simbolo ∪ anziché +)*

$$L_S = a \cup (a + L_S) \cup (a - L_S) = (a + \cup a -) L_S \cup a$$

la cui soluzione, come vedremo ora, è l'espressione regolare

$$S = (a + \cup a -)^* a$$

SOLUZIONE DI EQUAZIONI SINTATTICHE

- Le equazioni sintattiche si risolvono tramite un *algoritmo*, che esiste in due versioni:
  - per grammatiche regolari a destra
  - per grammatiche regolari a sinistra
- Le due versioni differiscono però solo per un raccoglimento a fattor comune, in cui l'elemento raccolto:
  - nelle grammatiche regolari a destra, è raccolto a destra
  - nelle grammatiche regolari a sinistra, è raccolto a sinistra

  e nella conseguente posizione dei termini nell'espressione risultante.

ALGORITMO
(grammatiche regolari a destra)

1. **Riscrivere ogni gruppo di produzioni del tipo** $X \rightarrow \alpha_1 \mid \alpha_2 \mid \ldots \mid \alpha_n$ **come** $X = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$
2. **Poiché la grammatica è lineare a <u>destra</u>, ogni** α_k **ha la forma** uX_k dove $X_k \in VN \cup \varepsilon$, $u \in VT^*$
   Ergo, si raccolgano a <u>destra</u> i simboli non-terminali dei vari $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ **scrivendo** $X = (u_1 + u_2 + \ldots) X_1 \cup \ldots \cup (z_1 + z_2 + \ldots) X_n$
   dove $X_k \in VN$, $u_k, z_k \in VT^*$
   Ciò porta a un sistema di M equazioni in M incognite dove M è la cardinalità dell'alfabeto VN (cioè il numero di simboli non terminali)
3. **Eliminare dalle equazioni le ricorsioni dirette, data l'equivalenza**
   $X = u X \cup \delta \quad \leftrightarrow \quad X = (u)^* \delta$
   Ognuna delle forme di frase δ conterrà altre incognite, ma non X.
4. **Risolvere il sistema rispetto a S per eliminazioni successive** (metodo di Gauss), eventualmente ri-applicando (2) e (3) per trasformare le equazioni via via ottenute.
5. **La soluzione del sistema è il linguaggio regolare cercato.**

ALGORITMO
(grammatiche regolari a sinistra)

1. **Riscrivere ogni gruppo di produzioni del tipo** $X \rightarrow \alpha_1 \mid \alpha_2 \mid \ldots \mid \alpha_n$ **come** $X = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$
2. **Poiché la grammatica è lineare a <u>sinistra</u>, ogni** α_k **ha la forma** $X_k u$ dove $X_k \in VN \cup \varepsilon$, $u \in VT^*$
   Ergo, si raccolgano a <u>sinistra</u> i simboli non-terminali dei vari $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ **scrivendo** $X = X_1 (u_1 + u_2 + \ldots) + \ldots + X_n (z_1 + z_2 + \ldots)$
   dove $X_k \in VN$, $u_k, z_k \in VT^*$
   Ciò porta a un sistema di M equazioni in M incognite dove M è la cardinalità dell'alfabeto VN (cioè il numero di simboli non terminali)
3. **Eliminare dalle equazioni le ricorsioni dirette, data l'equivalenza**
   $X = X u \cup \delta \quad \leftrightarrow \quad X = \delta (u)^*$
   Ognuna delle forme di frase δ conterrà altre incognite, ma non X.
4. **Risolvere il sistema rispetto a S per eliminazioni successive** (metodo di Gauss), eventualmente ri-applicando (2) e (3) per trasformare le equazioni via via ottenute.
5. **La soluzione del sistema è il linguaggio regolare cercato.**

ESEMPIO
(grammatica lineare a destra)

Fase 1
- scrittura di un'equazione per ogni regola:

Grammatica data:

$S \rightarrow a\ B \mid a\ S$

$B \rightarrow d\ S \mid b$

Fase 2
- eventuali raccoglimenti a fattore comune per evidenziare suffissi: *qui non ce ne sono*

Equazioni:

$S = a\ B + a\ S$

$B = d\ S + b$

Fase 3
- eliminare la ricorsione diretta $X = u\ X + \delta$ riscrivendola come $X = u^*\ \delta$ (qui $\delta = a\ B$)

$S = a^*\ a\ B$

$B = d\ S + b$

Fase 4
- sostituzione della 2ª equazione nella 1ª e sviluppo dei relativi calcoli

$S = a^*\ a\ (d\ S + b) =$

$= a^*\ a\ d\ S + a^*\ a\ b$

Fase 5
- nuova eliminazione della ricorsione introdotta al punto precedente: risultato finale.

$S = a^*\ a\ d\ S + a^*\ a\ b$

$S = (a^*\ a\ d)^*\ a^*\ a\ b$

ESEMPIO – VARIANTE

Fase 1
- scrittura di un'equazione per ogni regola:

Grammatica data:

$S \rightarrow a\ B \mid a\ S$

$B \rightarrow d\ S \mid b$

Fase 2
- se ora eliminiamo subito B, sostituendo la 2ª equazione nella 1ª e raccogliamo S:

Equazioni:

$S = a\ B + a\ S$

$B = d\ S + b$

Fase 3
- eliminando ora la ricorsione $X = u\ X + \delta$ riscrivendola come $X = u^*\ \delta$ (qui $\delta = a\ b$)

$S = a\ (d\ S + b) + a\ S =$

$= (a\ d + a)\ S + a\ b$

- che costituisce già una espressione regolare (risultato finale)

$S = (a\ d + a)^*\ a\ b$

Poco fa però avevamo ottenuto: $S = (a^*\ a\ d)^*\ a^*\ a\ b$

non sembra affatto la stessa cosa.. ☹

RIFLESSIONE

LA PRIMA ESPRESSIONE ottenuta: `S = (a* a d)* a* a b`

LA SECONDA ESPRESSIONE ottenuta: `S = (a d + a)* a b`

Denoteranno lo stesso linguaggio? *si spera..!*

Una terza espressione (deterministica) equivalente:

`S = a (d a + a)* b`

Frasi del linguaggio:

ab, adab, aab, aadadab, …

ossia *tutte le frasi che iniziano per "a", terminano per "b", e hanno eventualmente in mezzo "a" o "da" ripetuti un numero arbitrario di volte.*

In generale, uno stesso linguaggio può essere denotato da più espressioni regolari equivalenti.

RIFLESSIONE

Come si possono ottenere espressioni equivalenti?

- manipolando algebricamente quelle di partenza
  - la manipolazione algebrica diretta è ardua perché gli operatori hanno poche proprietà e quindi trasformare è faticoso e difficile
  - occorre capire "con fantasia" quale trasformazione applicare
- operando sulle "corrispondenti macchine"
  - lì *esistono algoritmi pratici* per trasformare macchine in altre macchine
  - il risultato finale può essere ri-trasformato in espressione regolare ☺

Espressioni regolari in Java [package java.util.regex]

- un'istanza della classe Pattern rappresenta un'espressione regolare, ossia *descrive il linguaggio* (metodo Pattern.compile)
- un'istanza della classe Matcher fa match con una stringa data, ossia *riconosce se la stringa data appartiene al linguaggio* denotato dall'espressione regolare medesima.

DALL'ESPRESSIONE REGOLARE ALLA GRAMMATICA

Per passare dall'espressione regolare alla grammatica si interpretano gli operatori in base alla loro semantica

- sequenza → simboli accostati nella grammatica
- operatore + → simbolo di alternativa nella grammatica (regole distinte)
- operatore * → regola ricorsiva nella grammatica (ciclo)

ESEMPIO: l'espressione regolare vista in precedenza

L = { a* b }

Tutte le frasi di L sono composte dal prefisso **a*** (che può mancare) e dal suffisso **b** (che invece c'è sempre)

S → A b | b

Il prefisso **a*** può essere prodotto da una regola ricorsiva, del tipo:

A → A a o anche **A → a A**