



UNIVERSITÀ DI MILANO-BICOCCA

FACOLTÀ DI FISICA

---

# Metodo di Stokes: misure di viscosità della glicerina

---

*Autori:*

Khevin Lorenz Algabre,

Angelo Bassi,

Alessandro C. Ciano.

*Numero di matricola:*

881389

882685

887896

## Indice

1	Obiettivo dell'esperienza	2
2	Cenni teorici	2
3	Misure delle sferette e della glicerina	2
4	Considerazioni sul valore atteso $\eta$	4
5	Misure dei tempi e analisi statistica dei dati	5
6	Analisi degli errori sistematici	9
7	Conclusioni	13

## 1 Obiettivo dell'esperienza

L'obiettivo dell'esperienza è la determinazione del coefficiente di viscosità della glicerina con il metodo di Stokes, dunque attraverso le leggi di fluidodinamica studiate [si vedano i cenni teorici]. È richiesto, inoltre, di confrontare il valore individuato sperimentalmente con quello atteso attraverso la formula e la tabella fornite nella scheda di laboratorio. [Ulteriori considerazioni al paragrafo 3]

## 2 Cenni teorici

La *legge di Stokes* afferma che in un fluido a regime laminare la forza di attrito viscoso agente su una sfera di raggio  $r$  che si muove con velocità  $v$  è data da

$$F_{\text{friction}} = 6\pi\eta rv \quad (1)$$

dove  $\eta$  è il coefficiente di viscosità del fluido.

Considerando che sulla sfera agiscono anche forza peso e forza di Archimede, la risultante sarà

$$\vec{R} = \vec{P} + \vec{F}_{\text{Arc}} + \vec{F}_{\text{friction}}$$

Il bilanciamento delle forze costituisce dunque un metodo per determinare il coefficiente di viscosità: facendo cadere una sferetta in un fluido, all'aumentare della velocità delle sferette aumenterà proporzionalmente anche la forza di attrito viscoso  $F_{\text{friction}}$ . La sferetta continuerà ad accelerare finché la risultante delle forze non sarà nulla, a quel punto si sarà raggiunta la *velocità limite*  $v_L$ .

Considerando che la forza peso e forza di Archimede risultano in modulo rispettivamente  $P = V\rho_{\text{sfera}}g$  e  $F_{\text{Arc}} = V\rho_{\text{liquid}}g$  si ricava

$$\eta = \frac{2gr^2(\rho_{\text{sfera}} - \rho_{\text{liquid}})}{9v_L} \quad (2)$$

## 3 Misure delle sferette e della glicerina

Le misure sono effettuate utilizzando un cilindro graduato riempito di glicerina e sferette in acciaio di diametri differenti. Durante l'esperienza è necessario tenere sotto controllo la temperatura sul termometro digitale.

Sono state realizzate innanzitutto le seguenti misure preliminari sugli elementi dell'apparato sperimentale utilizzato. Esse sono soggette a soli errori di tipo casuale.

Le sfere fornite risultano essere sfere perfette con diametri di: 6 mm, 5 mm, 4 mm, 3 mm, 2 mm, misurati con l'ausilio di un micrometro Palmer di precisione 0.01 mm. Le masse sono rispettivamente di: 0.88 g, 0.51 g, 0.26 g, 0.11 g, 0.33 g. Sono state utilizzate due bilance differenti per effettuare le pesate ed entrambe hanno restituito i medesimi valori, quindi la misura effettuata è soggetta a soli errori casuali. La prima bilancia, quella di cui si sono considerati i valori, aveva una precisione  $\sigma_m = 0.01g$ , mentre quella usata per verificare, una precisione pari a del decimillesimo di grammo. L'incertezza sulle masse delle sfere sarà considerata in ogni caso trascurabile.

Noto che la densità di un corpo di massa omogenea è dato da  $\rho = m/V$ , dove  $V$  è il volume occupato, si è determinata la densità delle sfere e si è ottenuto:  $\rho_{\text{sferette}} = 7780 \pm 5 \text{ kg/m}^3$ , valore ricavato con le pesate sulle varie sfere, considerando queste ultime come sfere perfette. Tale valore è la media delle densità individuate con sfere di diametro differente e risulta compatibile con la densità dell'acciaio.

L'ultima misura preliminare effettuata è quella riguardante la determinazione della densità della glicerina utilizzata. Si è fatto uso di una bilancia idrostatica:

Dalla teoria è noto, che, conoscendo note la densità dell'aria  $\rho_{\text{air}}$  e dell'acqua  $\rho_{\text{water}}$ , si può determinare la densità in questo caso della glicerina  $\rho_{\text{glycerol}}$  effettuando le pesate di un campione di massa all'interno dei tre fluidi e utilizzando la seguente formula:

$$\rho_{\text{glycerol}} = \rho_{\text{air}} + (\rho_{\text{water}} + \rho_{\text{air}}) \frac{F_{\text{glycerol}} - F_{\text{air}}}{F_{\text{water}} - F_{\text{air}}}$$

La densità dell'aria è nota a partire dalle misure di temperatura  $T = (22.0 \pm 0.5)^\circ\text{C}$  (termometro con sensibilità  $0.5^\circ\text{C}$ ) e di pressione  $p = (100.9 \pm 0.1) \text{ kPa}$  (barometro con sensibilità  $0.1 \text{ kPa}$ ). Tramite la formula:

$$\rho_{\text{air}} = \frac{1.2926}{1 + 0.003661 T} \frac{p}{760} \quad \text{p da convertire in mmHg}$$

Da cui si ricava:  $\rho_{\text{air}} = 1.191 \pm 0.002 \text{ kg/m}^3$ .

La densità dell'acqua è nota alla temperatura del laboratorio tramite una tabella disponibile sulla scheda dell'esperienza e risulta:  $\rho_{\text{water}} = 998.23 \text{ kg/m}^3$ .

Sono state effettuate le pesate all'interno di ciascun fluido utilizzando una massa campione ed è risultato (la sensibilità della bilancia idrostatica è pari al decimillesimo di grammo):

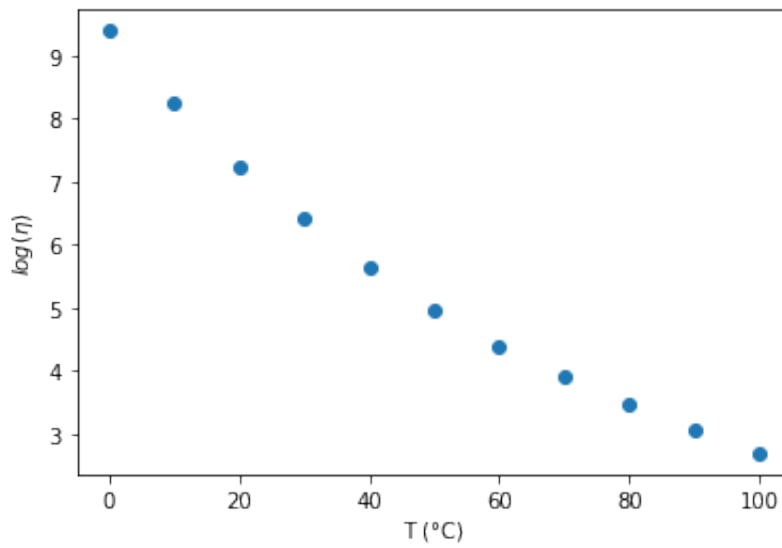
$$m_{\text{air}} = 44.38 \text{ g} \quad m_{\text{water}} = 24.38 \text{ g} \quad m_{\text{glycerol}} = 19.25 \text{ g}$$

In cui i valori sono stati troncati alla seconda cifra decimale a causa di minime oscillazioni che si sono osservate nel corso delle misurazioni dell'ordine del millesimo di grammo. A questo punto è possibile determinare il valore della densità della glicerina la quale risulta essere  $\rho_{\text{glycerol}} = (1253.28 \pm 0.01) \text{ kg/m}^3$ . L'errore relativo su tale valore è dell'ordine di  $10^{-5}$  e verrà considerato nel seguito trascurabile.

## 4 Considerazioni sul valore atteso $\eta$

Sulla scheda dell'esperimento vengono fornite una formula e una tabella per determinare il valore di viscosità previsto in funzione della temperatura del laboratorio. La formula fornita è la seguente:

$$\eta_{\text{scheda}}(T \text{ } ^\circ\text{C}) = e^{-2.18-0.099T} \text{ [kP]} \quad (3)$$



**Figura 1:** Grafico dei dati forniti dalla tabella sulla scheda di laboratorio ( $\eta$  espresso in *centipoise* (cP))

Per una soluzione di glicerina pura la tabella fornisce altri valori di viscosità, di cui si può effettuare un'interpolazione dopo aver linearizzato questi ultimi attraverso il logaritmo. La necessità di interpolare tali valori sta nel fatto che la tabella fornisce le temperature in intervalli di 10 °C con significative variazioni nelle viscosità (si passa da 1412 cP per 20 °C a 612 cP per 30 °C).

Si osserva che per temperature superiori a 40 °C l'andamento del logaritmo della viscosità in funzione della temperatura non è perfettamente lineare [Figura 1]. Perciò, è preferibile interpolare solo nel range di temperature che ci interessano ai fini dell'analisi dati, ad esempio tra 10 °C e 40 °C. Si ricava allora la seconda formula per determinare la viscosità:

$$\eta_{\text{interpol}}(T \text{ } ^\circ\text{C}) = e^{-2.44-0.087T} \text{ [kP]} \quad (4)$$

Si osserva immediatamente dalla [Tabella 1] che i valori di glicerina forniti da (3) e (4) sono compatibili. Si può utilizzare la loro media pesata come valore atteso.

**Tabella 1:** Valori di viscosità ricavati dalle due formule e convertiti in centipoise. Le incertezze sono legate alla precisione del termometro  $\sigma_T = 0.5$  °C. Nella colonna di destra sono stati inseriti i valori della media pesata dei due valori di  $\eta$ .

T (°C)	$\eta_{\text{scheda}}$ (cP)	$\eta_{\text{interpol}}$ (cP)	$\eta_{\text{best}}$ (cP)
18.0	1903 ± 94	1821 ± 79	1855 ± 61
18.5	1811 ± 90	1743 ± 76	1771 ± 58
19.0	1723 ± 85	1669 ± 73	1692 ± 55
19.5	1640 ± 81	1598 ± 70	1616 ± 53
20.0	1561 ± 77	1530 ± 67	1543 ± 50
20.5	1485 ± 74	1465 ± 64	1474 ± 48
21.0	1414 ± 70	1402 ± 61	1407 ± 46
21.5	1345 ± 67	1343 ± 58	1344 ± 44
22.0	1280 ± 63	1286 ± 56	1283 ± 42
22.5	1219 ± 60	1231 ± 54	1225 ± 40
23.0	1160 ± 57	1178 ± 51	1170 ± 38
23.5	1104 ± 55	1128 ± 49	1117 ± 37
24.0	1050 ± 52	1080 ± 47	1067 ± 35

## 5 Misure dei tempi e analisi statistica dei dati

Prima di effettuare le misure si è valutato se si stesse operando effettivamente in regime di velocità limite. La temperatura in laboratorio era di circa 21.5°C durante questa fase. La precisione del termometro digitale è  $\sigma_T = 0.5$  °C.

È stata ricavata innanzitutto l'equazione che descrive il moto della sfera nella glicerina. Tenendo conto che la resistenza del mezzo è  $F_{\text{res}} = 6\pi\eta rv$  e che la sferetta è soggetta alla forza peso  $F_{\text{peso}} = mg$  e alla spinta di archimede  $F_{\text{arc}} = V\rho g$ , si può determinare la velocità di una sferetta di dato raggio  $r$  risolvendo la seguente equazione differenziale <sup>[1]</sup> ( $\rho$  densità della glicerina e  $V$  volume della sferetta):

$$mg - V\rho g - 6\pi\eta rv = m \frac{dv}{dt} \quad (5)$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{(1 - \frac{V\rho}{m})g - kv} = dt, \quad \text{con } k = \frac{6\pi\eta r}{m}$$

Integrando tra  $v$  e  $v_o = v(t = 0)$

$$\Rightarrow \log\left(\frac{(1 - \frac{V\rho}{m})g - kv}{(1 - \frac{V\rho}{m})g - kv_o}\right) = -kt$$

$$\Rightarrow v(t) = v_L + (v_o - v_L)\exp(-kt),$$

tenendo conto che la velocità limite è

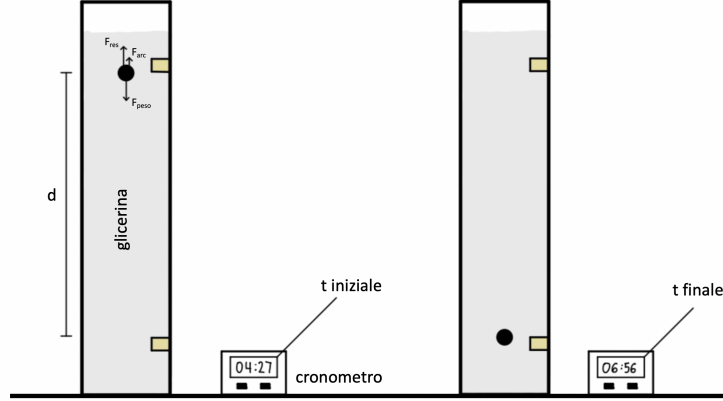
$$v_L = \frac{(1 - \frac{V\rho}{m})g}{k} = \frac{(m - V\rho)g}{6\pi\eta r} \quad (6)$$

siccome la funzione tende asintoticamente a tale valore.

Dopo un tempo  $T = \frac{10}{k}$  il secondo addendo è praticamente nullo. Si può utilizzare  $T$  come riferimento per prevedere dopo quanto tempo all'interno della glicerina si è effettivamente in regime di velocità limite. Si osserva che con le masse e i raggi delle sferette utilizzate e con un valore di  $\eta_{\text{expected}}(21.5^\circ\text{C}) = 1344 \text{ cP}$ , l'ordine di grandezza di  $T$  è di  $10^{-4} \text{ s}$  per le sferette da  $6 \text{ mm}$  e  $10^{-2} \text{ s}$  per quelle da  $2 \text{ mm}$ , dunque la velocità limite è raggiunta praticamente subito al contatto con la colonna di liquido.

Sperimentalmente, inoltre, si è verificato che i tempi per attraversare lo stesso numero di tacche della colonna di glicerina è il medesimo sia all'inizio che alla fine della colonna.

Ulteriori considerazioni sono necessarie per quanto riguarda il modo più idoneo di rilasciare le sferette nella colonna. Sulla superficie della glicerina era presente un leggero strato di acqua probabilmente condensatasi dall'aria: se si lancia la sferetta lontano dalla superficie, si osserva, grazie al differente indice di rifrazione dei due liquidi, che essa trascina parte dell'acqua nella glicerina sottostante contaminandola. Inoltre, sulle sferette più piccole ( $r = 1 \text{ mm}, 1.5 \text{ mm}$ ) si formano bollicine che, in accordo con la legge di Archimede, ne determinano un rallentamento. Da queste due osservazioni si deduce che conviene far cadere le palline il più vicino possibile alla superficie del liquido. Il percorso scelto per effettuare le misure è stato segnato da due pezzi di nastro adesivo. Questi sono stati posizionati in modo da evitare la zona contaminata dalla precedente verifica. Si può quindi passare alle misurazioni.



**Figura 2:** Schema dell'apparato sperimentale

La legge fisica utilizzata si ricava immediatamente dalla (6) ed è la seguente:

$$\eta = \frac{2gr^2(\rho_{sferetta} - \rho_{glycerol})}{9v_{limite}}, \quad (7)$$

Siccome i diametri, dunque i raggi  $r$ , delle sferette sono già stati misurati è necessario individuare solo le velocità limite di ciascuna di esse.

Assumendo la distanza compiuta da ciascuna sferetta come costante e pari a  $d = 19.3 \pm 0.1 \text{ cm}$ , si sono registrati i tempi di passaggio all'inizio e alla fine del percorso (segnati da nastro adesivo attaccato al cilindro graduato) con l'ausilio di un cronometro di sensibilità  $\sigma_t = 0.01 \text{ s}$  e un cellulare dotato di videocamera in modalità slow-motion per una maggiore precisione [Figura 2]. Le misure sono state effettuate in ordine decrescente di diametro della sferetta.

Questa scelta in realtà determina un errore di parallasse siccome è stato utilizzato un solo cellulare. Tale errore sistematico verrà analizzato nella sezione [Analisi degli errori sistematici] in modo da analizzare anche l'effetto della rifrazione.

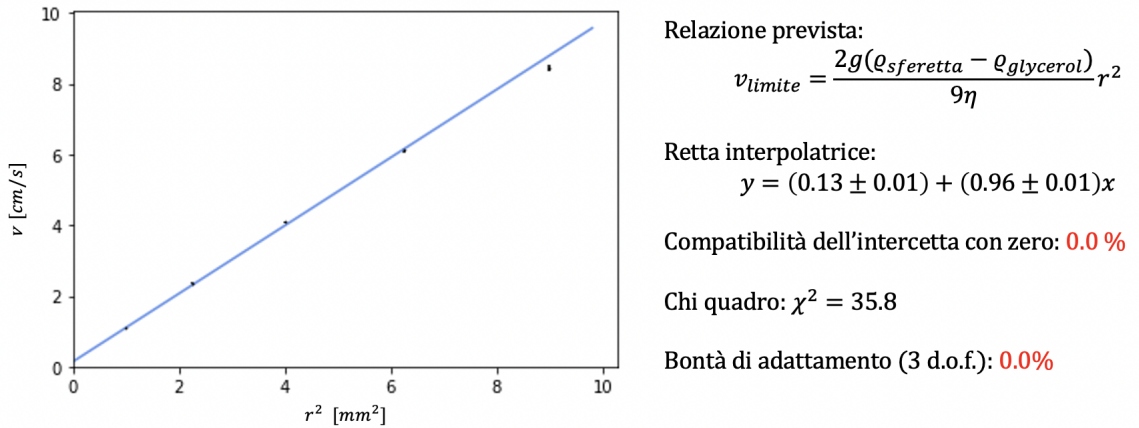
I dati sulle acquisizioni dei tempi in funzione del raggio della sferetta sono riassunti in [Tabella 2].



**Tabella 2:** Risultati delle misure dei tempi di caduta delle sferette. I raggi delle sferette hanno incertezza trascurabile. Per le incertezze sui tempi si è preferito utilizzare la semidispersione massima per le sferette di raggio 1 e 1.5 mm a causa della formazione di bollicine. Nella colonna a destra il valore di velocità misurato come  $v = d/\Delta t$

r (mm)	$\Delta t$ (second)	$v$ (cm s <sup>-1</sup> )
1	$17.86 \pm 0.16$	$1.08 \pm 0.01$
1.5	$8.15 \pm 0.05$	$2.37 \pm 0.02$
2	$4.73 \pm 0.04$	$4.08 \pm 0.04$
2.5	$3.16 \pm 0.03$	$6.12 \pm 0.07$
3	$2.28 \pm 0.02$	$8.45 \pm 0.09$

I dati della [Tabella 2] sono stati riportati su un diagramma  $v$  vs.  $r^2$ .



**Figura 3:** Grafico dei dati della [Tabella 2]: in azzurro la retta che approssima meglio l'andamento delle velocità in funzione del raggio al quadrato.

Sullo stesso grafico è riportato il risultato di un'interpolazione lineare con retta generica. La retta interpolatrice risulta essere:

$$y = (0.13 \pm 0.01) + (0.96 \pm 0.01)x$$

Contro le previsioni l'intercetta di tale retta non risulta compatibile con il valore previsto di zero. Inoltre, il  $\chi_0^2$  della retta risulta essere pari a  $\chi_0^2 = 35.8$ , che con un test di compatibilità con 3 gradi di libertà corrisponde a una probabilità di accordo con i dati praticamente nulla.

Si estrapola comunque il valore del coefficiente di viscosità  $\eta$  ricavabile dal coefficiente

angolare  $m$ :

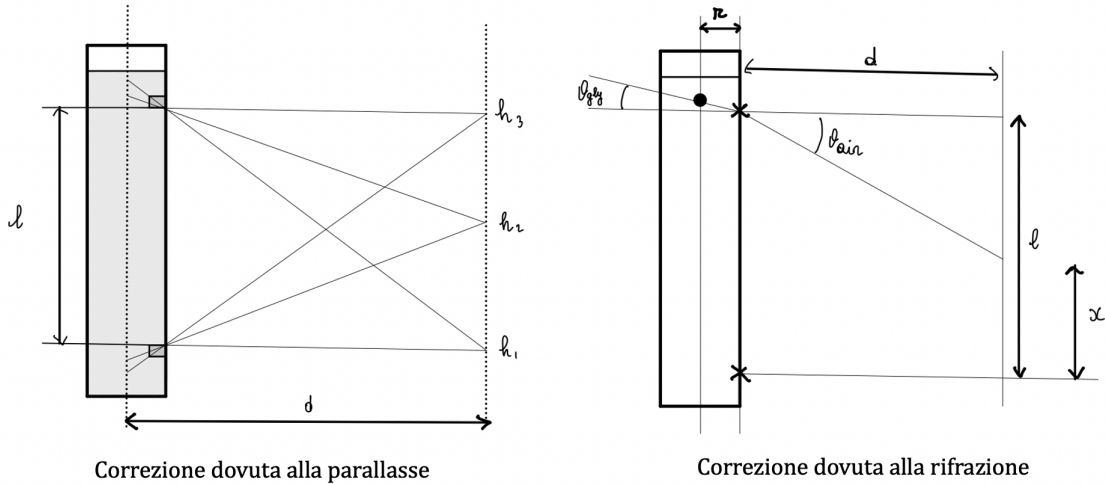
$$\eta = \frac{2g(\rho_{sferetta} - \rho_{glycerol})}{9m} = (1477 \pm 11) \text{ cP}$$

## 6 Analisi degli errori sistematici

Come già detto, nel corso dell'esperimento si è creato un grosso errore sistematico scegliendo di utilizzare un cellulare. Questo ha determinato un errore di parallasse che va considerato, anche tenendo conto dell'effetto della rifrazione.

La distanza a cui sono state filmate le cadute delle sfere si può assumere compresa tra i 50 cm e gli 80 cm. Per quanto riguarda la parallasse, si può dimostrare con ragionamenti sui triangoli simili che, fissata una distanza dal cilindro  $d$ , non importa l'altezza a cui è stata osservata la caduta delle sfere: la correzione sulla distanza sarà la medesima. Se si tiene conto solo dell'errore dovuto alla parallasse l'errore da apportare allo spazio  $l$  percorso dalla sferetta, e dunque della velocità  $v = d/\Delta t$ , va dal 6% osservando a distanza 80 cm al 10% osservando da 50 cm. Si è utilizzata la seguente proporzione:

$$l_{parallasse} : (d + r) = l_{vero} : d$$



**Figura 4:** Schemi delle correzioni dovute alla parallasse e alla rifrazione. L'errore di parallasse non dipende dall'altezza. Per la rifrazione, invece, bisogna tener conto del fatto che ci sono due punti che si stanno osservando: l'inizio e la fine del percorso della sferetta. In entrambi è da applicare la correzione della rifrazione.

Se si considera anche la rifrazione, l'effetto di quest'ultima è di "compensazione" dell'errore di parallasse. Quello che si osserva, però, è che per la rifrazione ritorna

la dipendenza dall'altezza. Dunque, la funzione che descrive la correzione è a due variabili: la distanza dal cilindro e l'altezza rispetto a cui si è filmato.

Se si considera, ad esempio, il punto iniziale del percorso si può applicare la legge di Snell:

$$n_{air}\sin(\theta_{air}) = n_{gly}\sin(\theta_{gly})$$

dove con  $n$  sono stati indicati gli indici di rifrazione ( $n_{air} = 1$ ,  $n_{gly} = 1.47$ ).

Seguendo lo schema descritto in [Figura 4] a destra, dalla legge di Snell si ricava per l'inizio del percorso:

$$n_{air} \frac{l-x}{\sqrt{(l-x)^2 + d^2}} = n_{gly} \frac{\Delta_1}{\sqrt{\Delta_1^2 + r^2}}$$

Dove con  $\Delta_1$  si indica la lunghezza che viene "aggiunta" al valore vero di  $l$ . Da cui si ricava:

$$\Delta_1 = r \sqrt{\frac{f}{1-f}}, \quad f = \frac{n_{air}^2}{n_{gly}^2} \frac{(l-x)^2}{(l-x)^2 + d^2}$$

Analogamente per la parte finale del percorso si la correzione  $\Delta_2$  da apportare si ricava essere:

$$\Delta_2 = r \sqrt{\frac{g}{1-g}}, \quad g = \frac{n_{air}^2}{n_{gly}^2} \frac{x^2}{x^2 + d^2}$$

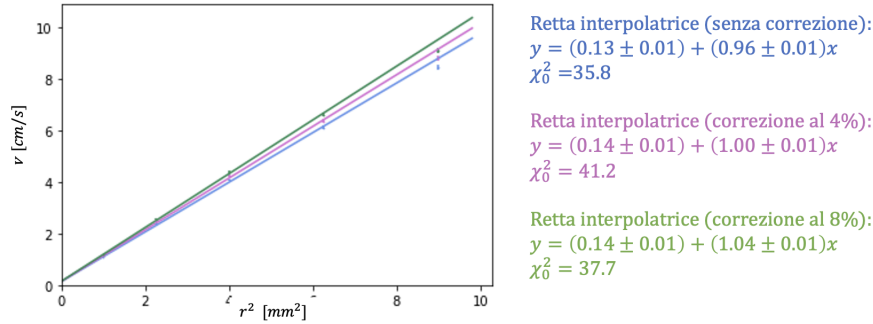
Alla fine la correzione da apportare sarà la somma di  $\Delta_1$  con  $\Delta_2$ . Si nota subito che la correzione è una funzione in  $d$  e  $x$ . Per poter determinare l'entità di tale correzione si è considerato il range di valori di interesse: distanza  $d$  compresa tra  $50 \text{ cm}$  e  $80 \text{ cm}$ , e  $x$  compresa tra  $0 \text{ cm}$  e  $19.3 \text{ cm}$ .

Si ricava che l'errore dovuto alla parallasse viene compensato da un valore minimo di circa  $3 \text{ mm}$  a un valore massimo di circa  $1 \text{ cm}$  a seconda della distanza e dell'altezza. Se si considera il caso peggiore, dunque con una compensazione solo di  $3 \text{ mm}$ , le percentuali di correzione passano da un range che va dal 6% al 10% ad un range che va dal 4% all'8%. Si riportano i valori di velocità senza e con tali correzioni nella [Tabella 3].

**Tabella 3:** Si riportano i valori di velocità per ciascuna sferetta senza e con correzione rispettivamente del 4% e dell'8%

$r$ (mm)	$v$ (cm s <sup>-1</sup> )	$v_{4\%}$	$v_{8\%}$
1	$1.08 \pm 0.01$	$1.12 \pm 0.01$	$1.17 \pm 0.01$
1.5	$2.37 \pm 0.02$	$2.47 \pm 0.02$	$2.56 \pm 0.02$
2	$4.08 \pm 0.04$	$4.24 \pm 0.04$	$4.41 \pm 0.04$
2.5	$6.12 \pm 0.07$	$6.37 \pm 0.07$	$6.61 \pm 0.08$
3	$8.45 \pm 0.09$	$8.79 \pm 0.09$	$9.12 \pm 0.10$

Si riportano i dati in un diagramma  $v$  vs.  $r^2$ .



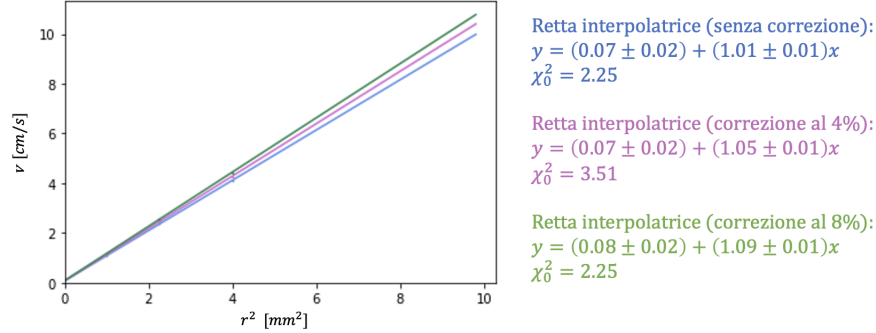
**Figura 5:** Grafici dei dati di velocità in funzione del raggio al quadrato: in azzurro la retta che interpola meglio i dati senza correzione, in violetto i dati con correzione al 4% e in verde i dati con correzione all'8%.

Tutte e tre le interpolazioni effettuate sui dati per correzione differente risultano avere un  $\chi^2_0$  molto elevato, a cui dunque sono associate probabilità di adattamento praticamente nulle.

Il fatto che con il test del  $\chi^2$  risulti non esserci accordo tra i dati e le rette interpolatrici è legato alle variazioni di temperatura del laboratorio. Dalla [Tabella 1] dei valori di viscosità inoltre si nota che variazioni anche solo di 0.5°C, che è la sensibilità  $\sigma_T$  del termometro digitale, possono determinare variazioni nei valori attesi di glicerina, dunque anche di velocità, del 5%.

Nei grafici della [Figura 6] si è scelto di non inserire i dati delle sferette di diametro 6 mm e 5 mm, in quanto le misurazioni sui tempi sono state effettuate prima della pausa di mezzogiorno a una temperatura che è oscillata tra i 21.5°C e i 22°C. Al ritorno dalla pausa di mezzogiorno la temperatura è progressivamente aumentata nel corso delle misurazioni da 22°C a 23°C per una variazione di temperatura totale nel corso dell'esperimento di circa 1.5°C. Questa si può spiegare per la presenza

di diverse persone all'interno del laboratorio, che ha avuto l'effetto di un graduale aumento della temperatura.



**Figura 6:** Grafici dei dati di velocità in funzione del raggio al quadrato: in azzurro la retta che interpola meglio i dati senza correzione, in violetto i dati con correzione al 4% e in verde i dati con correzione all'8%.

Le nuove interpolazioni effettuate escludendo le sfere da 6 mm e da 5 mm mostrano una buona bontà di adattamento con test del  $\chi^2_0$  (c'è un solo grado di libertà in questo caso). La probabilità di adattamento delle rette è superiore in tutti e tre casi alla soglia minima di accettabilità fissata al 5%.

Le intercette non sono compatibili con zero, ma questo si spiega con il graduale innalzamento della temperatura del laboratorio ( $\Delta T = 1^\circ\text{C}$  durante queste tre misurazioni): ciò ha determinato una diminuzione della viscosità della glicerina, dunque un aumento della velocità limite. Il fatto che l'intercetta sia positiva corrobora questa ipotesi in quanto le ultime misurazioni sono state effettuate sulle sfere da 1 mm.

Dai coefficienti angolari  $m$  delle tre rette ottenute si estrapolano i valori del coefficiente di viscosità nota la relazione (7).

**Tabella 4:** Nella tabella sono inseriti i valori estrapolati del coefficiente di viscosità della glicerina  $\eta$ . L'incertezza è ottenuta per propagazione dagli errori sui coefficienti angolari e la densità delle sfere.

	$m \text{ (m}^{-1}\text{s}^{-1}\text{)}$	$\eta_{\text{measured}} \text{ (cP)}$
$v_{0\%}$	$(1.01 \pm 0.01) \times 10^4$	$1409 \pm 14$
$v_{4\%}$	$(1.05 \pm 0.01) \times 10^4$	$1355 \pm 13$
$v_{8\%}$	$(1.09 \pm 0.01) \times 10^4$	$1305 \pm 12$

## 7 Conclusioni

L'esperienza ha permesso di verificare la relazione di proporzionalità prevista tra  $v_{\text{limite}}$  e  $r^2$ , e di determinare il coefficiente di viscosità della glicerina. Si sono presentate, tuttavia, difficoltà nella trattazione dei dati a causa di due significativi errori sistematici: il primo legato alle variazioni di temperatura - si passa da 21.5 °C a 23 °C -, il secondo legato alla scelta di utilizzare una videocamera per effettuare le misure dei tempi e garantire maggiore precisione. Si è introdotto così un grande errore di parallasse di cui si è dovuto tenere conto insieme all'effetto legato alla rifrazione.

Come osservato alla fine dell'analisi dati, le interpolazioni effettuate sulle ultime tre misurazioni hanno garantito un buon accordo tra le rette individuate con il metodo dei minimi quadrati e i dati forniti [Figura 6]. La scelta è stata dettata dalla necessità di considerare un insieme di misure in cui la variazione di temperatura non fosse troppo elevata (si è scelto  $\Delta T = 1$  °C). Nonostante ciò l'intercetta dei grafici non risulta compatibile con zero ( $t > 2$ ) sempre a causa di questa variazione di temperatura come spiegato nel corso dell'analisi degli errori sistematici.

Passando ai valori di viscosità individuati, si possono considerare innanzitutto il valore individuato dalla sola analisi statistica dei dati, e successivamente i tre valori individuati in [Tabella 4] e, valutarne la compatibilità con il valore atteso per una temperatura di 22°C:  $\eta_{\text{expected}} = (1283 \pm 42)$  cP (Glicerina pura)

- Per quanto riguarda il valore di  $\eta = (1477 \pm 11)$  cP ricavato dall'analisi puramente statistica dei dati raccolti, la distanza di tale valore da quello atteso in termini di  $\sigma$  è:

$$t = \frac{|\eta_{\text{measured}} - \eta_{\text{expected}}|}{\sqrt{\sigma_{\text{measured}}^2 + \sigma_{\text{expected}}^2}} = 4.46$$

A cui è associata una probabilità di compatibilità con il valore atteso praticamente nulla. Si conferma così la presenza di errori sistematici.

- Per quanto riguarda i valori presenti in [Tabella 4]. Senza tenere conto dell'errore di parallasse,  $\eta_{\text{measured}}^0 = (1409 \pm 14)$  cP:

$$t_0 = \frac{|\eta_{\text{measured}} - \eta_{\text{expected}}|}{\sqrt{\sigma_{\text{measured}}^2 + \sigma_{\text{expected}}^2}} = 2.84$$

Il grado di compatibilità è  $p(\text{oltre } t\sigma) = 1.14\% < 5\%$ , dunque il coefficiente di viscosità individuato non è compatibile con quello atteso. La sola esclusione delle sfere da 6 mm e da 5 mm per la variazione di temperatura non è

sufficiente per ottenere un valore compatibile. Le ulteriori fonti di errore da considerare sono la parallasse e la rifrazione.

- Introducendo la stima dell'errore sulle velocità al 4%,  $\eta_{6\%} = (1355 \pm 13)$  cP.

$$t_{4\%} = \frac{|\eta_{measured} - \eta_{expected}|}{\sqrt{\sigma_{measured}^2 + \sigma_{expected}^2}} = 1.64$$

Il grado di compatibilità è del 10.1% > 5%. Il coefficiente di viscosità è compatibile con quello atteso.

- Con un errore di parallasse dell'8%,  $\eta_{8\%} = (1305 \pm 12)$  cP

$$t_{10\%} = \frac{|\eta_{measured} - \eta_{expected}|}{\sqrt{\sigma_{measured}^2 + \sigma_{expected}^2}} = 0.50$$

Il grado di compatibilità è del 61.7% >> 5%. Il coefficiente di viscosità è compatibile con quello atteso.

I test di compatibilità effettuati confermano che durante le misurazioni vi è stato un significativo errore legato alla parallasse quantificabile tra il 4% e il 8% (inclusa la compensazione dovuta alla rifrazione).

Per concludere, è necessario osservare che l'analisi dati presentata presuppone a priori l'ipotesi che il liquido all'interno del cilindro sia una soluzione di glicerina pura al 100%. Se anche la soluzione presentasse contaminazione da acqua per l'1%, il valore di viscosità della glicerina atteso diminuirebbe di circa 300 cP. Tale differenza renderebbe incompatibili le tre misure individuate con il valore atteso.

Andrebbero effettuate misure indipendenti e possibilmente con metodi differenti per confermare tale ipotesi. Innanzitutto, l'eliminazione dell'errore legato alla parallasse può essere realizzato utilizzando due differenti cellulari che inquadrino entrambi il cronometro, e che siano uno posto all'inizio del percorso della sferetta e il secondo alla fine. In questa maniera si elimina l'errore, ma si mantiene comunque il vantaggio di misure dei tempi più precise. In secondo luogo, un modo per limitare l'errore sistematico legato alle variazioni di temperatura è effettuare le misure nel minor tempo possibile.

## Riferimenti bibliografici

- [1] P. Mazzoldi, M. Nigro, C. Voci. *Fisica – Volume I*. Seconda edizione. Edises Università.
- [2] J. R. Taylor. *Introduzione all'analisi degli errori*. Seconda edizione. Zanichelli.