



UNIVERSITÀ DI MILANO-BICOCCA

FACOLTÀ DI FISICA

Tubo di risonanza

Autori:

Khevin Lorenz Algabre,
Angelo Bassi,
Alessandro C. Ciano.

Numero di matricola:

881389
882685
887896

Indice

1	Scopo dell'esperienza	2
2	Cenni teorici	2
3	Apparato sperimentale	4
4	Misure e analisi dei dati	5
4.1	Misure per il tubo aperto	5
4.2	Misure per il tubo chiuso ad un'estremità	7
4.2.1	Lunghezza del tubo costante	7
4.2.2	Lunghezza del tubo variabile	8
4.3	Misura della velocità delle onde sonore nel krypton	9
4.3.1	Misura di velocità dalla riflessione di un'onda sinusoidale	9
4.3.2	Misura di velocità dalla riflessione di un'onda quadra	11
4.4	Misura della forma di risonanza	12
5	Conclusioni	15

1 Scopo dell'esperienza

In questa esperienza si è studiata la propagazione delle onde sonore all'interno di un *tubo di risonanza*, verificando l'instaurazione delle onde stazionarie. In particolare, tenendo conto delle relazioni teoriche tra frequenza ν , numero di armonica n e lunghezza del tubo L [si vedano i cenni teorici], è stata determinata la velocità di propagazione del suono nei seguenti casi:

- Tubo aperto.
- Tubo chiuso a un'estremità.
- Tubo chiuso ad ambo le estremità contenente krypton.

Si sono successivamente confrontati tali valori con quello previsto dalla relazione:

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} \quad (1)$$

Dove $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ e M massa molare relative al gas contenuto nel tubo (aria o krypton in questo caso), R è la costante dei gas e T la temperatura ambientale misurata in Kelvin. Un'altra parte dell'esperienza è dedicata allo studio della forma di risonanza ricavabile misurando le ampiezze dell'onda nell'intorno di una frequenza di risonanza.

2 Cenni teorici

Un'onda acustica causa una perturbazione del mezzo in cui essa si propaga (aria o krypton in questo caso) rappresentabile come una variazione locale di pressione del mezzo stesso.

All'interno del tubo si realizza il fenomeno delle onde stazionarie nel momento in cui un'onda sonora è riflessa all'estremità del tubo andando ad interferire con l'onda originale. In particolare, le onde stazionarie sono caratterizzate dalla presenza di nodi, punti in cui non si osservano variazioni di pressione, e ventri, punti in cui si osserva la massima ampiezza. La riflessione dell'onda acustica avviene sia all'interno del tubo aperto che del tubo chiuso: se l'estremità è chiusa si osserva in tale posizione un ventre, mentre se è aperta si osserva la presenza di un nodo.

L'onda nel tubo subisce in realtà diverse riflessioni che vanno a interferire tra loro. Queste onde di riflessione in generale non sono tutte in fase. Tuttavia, a certe frequenze, dette di *risonanza*, tali onde risultano tutte quante in fase, permettendo di osservare un'onda stazionaria con grande ampiezza.

Le condizioni di risonanza all'interno del tubo risultano più chiare in termini di lunghezza d'onda [Figura 1]. Inoltre, la risonanza dipende anche se il tubo è aperto

o chiuso a una o entrambe le estremità.

Essa si realizza nel tubo aperto quando

$$L = n\lambda_n/2, \quad (2)$$

ove L è la lunghezza del tubo; mentre per il tubo chiuso ad una estremità si realizza quando

$$L = (2n - 1)\lambda/4 \quad (3)$$

Per il tubo chiuso ad ambo le estremità le condizioni per l'instaurarsi delle onde stazionarie sono le medesime che per il tubo aperto, solo con nodi e ventri in posizione invertita.

Tenendo conto, infine, della relazione che intercorre tra frequenza e velocità di propagazione del suono nel mezzo, $\nu_n = v/\lambda_n$, si ricavano le due formule che legano frequenza di risonanza, numero di armonica e lunghezza del tubo nei due casi:

$$\nu_{n,open} = \frac{v}{2L}n \quad (4)$$

$$\nu_{n,closed} = \frac{v}{2L}n - \frac{v}{4L} \quad (5)$$

In tali formule è necessario applicare la correzione dovuta al diametro D del tubo al valore della lunghezza L , sommando il valore $0.4D$ per ciascuna estremità aperta.

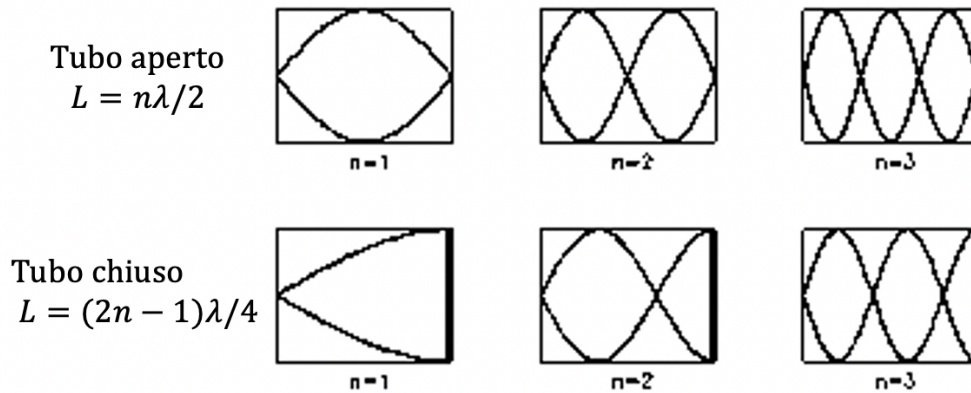
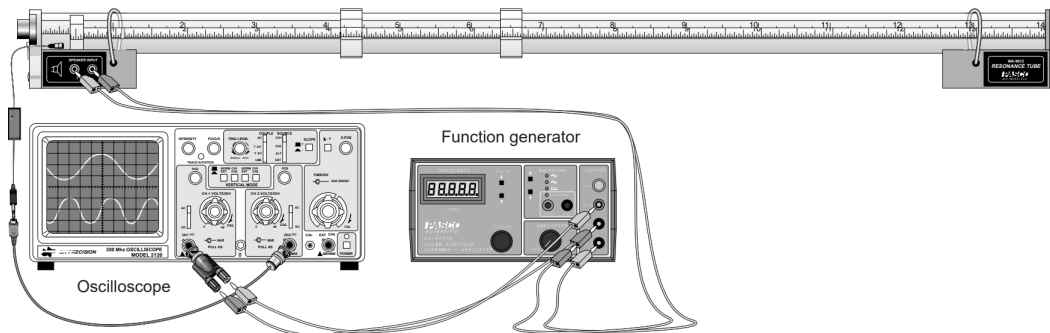


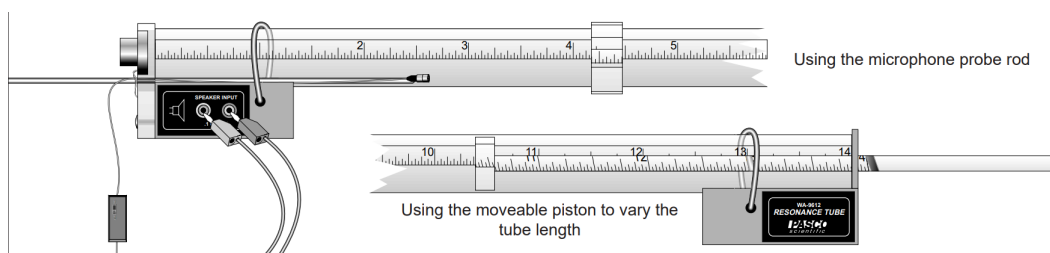
Figura 1: Schemi delle onde stazionarie all'interno del tubo

3 Apparato sperimentale

La strumentazione utilizzata è costituita da un tubo di risonanza, al quale ad un estremo è stato fissato un altoparlante e all'interno un microfono mobile. Quest'ultimo consente di rilevare la frequenza e l'intensità in vari punti del tubo delle onde sonore emesse dallo speaker. Le caratteristiche di quest'ultime possono essere impostate grazie a un generatore di funzioni periodiche sinusoidali, di ampiezza e frequenza variabili. Per visualizzare i segnali inviati dall'altoparlante e rilevati dal microfono si utilizza un oscilloscopio, che deve essere collegato a entrambe le apparecchiature. Lo schema dell'apparato sperimentale è descritto nella figura sottostante:



Per effettuare le misure con il tubo chiuso si fa uso di un pistone mobile.



4 Misure e analisi dei dati

4.1 Misure per il tubo aperto

Nel caso del tubo aperto, il mezzo in cui si propagano le onde sonore è l'aria. Noti la massa molare media dell'aria $M_{air} = 28.96 \text{ g mol}^{-1}$, il valore di $\gamma = 7/5$ (si approssima l'aria a un gas ideale biatomico), e conoscendo la temperatura del laboratorio pari a $T = 22.0^\circ\text{C}$, misurata con termometro di precisione $\sigma_T = 0.5^\circ\text{C}$, si può ricavare il valore di velocità del suono atteso nell'aria con la relazione (1):

$$v_{expected} = \sqrt{\frac{7RT}{5M_{air}}} = (344.3 \pm 0.3) \text{ m s}^{-1} \quad (6)$$

Come prima operazione si sono misurate le dimensioni del tubo con un metro a nastro di sensibilità $\sigma = 1 \text{ mm}$. Il tubo è risultato avere una lunghezza $L = (90.0 \pm 0.1) \text{ cm}$ e un diametro $D = (3.2 \pm 0.1) \text{ cm}$.

Una volta accesa e montata correttamente l'apparecchiatura si è posizionato il microfono al centro del tubo, dove si prevedeva esserci il ventre per la prima armonica. Sul generatore di funzioni è stata selezionata una funzione sinusoidale e impostata un'ampiezza di $\Delta V = 4.00 \text{ V}$. Sul canale 1 (CH1 - giallo) dell'oscilloscopio è apparsa, quindi l'onda generata. Anche per le misure sul tubo chiuso verranno mantenute queste impostazioni.

Si è proceduto dunque all'individuazione della prima armonica, variando la frequenza delle onde generate e individuando il valore per la quale l'ampiezza dell'onda rilevata dal microfono (CH2 - viola) fosse massima.

In modo analogo si è proseguito per la seconda armonica ($n = 2$): si è posizionato il microfono a un quarto della lunghezza del tubo (22.5 cm dall'estremità sinistra) e variando la frequenza si è individuato il valore che garantisse l'ampiezza massima. Allo stesso modo si sono determinate le armoniche successive. Per verificare ulteriormente che l'armonica fosse effettivamente quella corretta si è mosso il microfono lungo il tubo per controllare che la posizione dei nodi e dei ventri fossero nella configurazione prevista per quell'armonica.

Le incertezze sui valori delle frequenze sono state determinate empiricamente osservando l'oscilloscopio quale fosse la minima variazione della frequenza corrispondente ad una variazione di ampiezza apprezzabile. Per migliorare la precisione della stima si è ripulito il grafico dell'onda rilevata dal microfono dai rumori utilizzando la funzione "average" dell'oscilloscopio e aiutandosi con i cursori orizzontali. Si è effettuata, inoltre, una stima prima aumentando leggermente il valore della frequenza e successivamente diminuendone il valore. Si è scelto il valore massimo delle due stime come incertezza.

Tabella 1: Risultati delle misure per le frequenze di risonanza e relative armoniche.

n	ν_n [Hz]
1	185.0 ± 1.0
2	371.0 ± 1.0
3	557.5 ± 1.5
4	743.8 ± 1.8
5	933.6 ± 2.0

Le misure delle frequenze di risonanza al variare del numero di armonica sono state disegnate in un diagramma ν_n vs. n . [Figura 2]

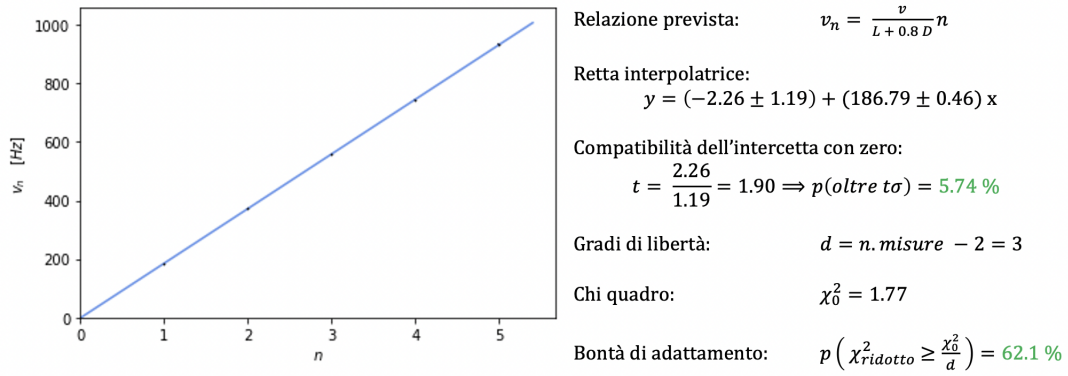


Figura 2: Grafico in cui si riportano i risultati delle misurazioni per il tubo aperto. In azzurro è mostrata la retta ottenuta per interpolazione lineare che approssima meglio i dati.

Sullo stesso grafico è stato disegnato dell'interpolazione lineare dei dati con una retta generica. Il risultato dell'interpolazione è:

$$y = [(186.79 \pm 0.46)x + (-2.26 \pm 1.19)] \text{ Hz}$$

Il χ^2 della retta è $\chi_0^2 = 1.77$, che per 3 gradi di libertà mostra una probabilità di accordo con i dati del 62.1%. Inoltre, l'intercetta risulta compatibile con il valore previsto di zero con una probabilità di accordo del 5.74%.

Si può estrapolare dal valore del coefficiente angolare della retta m il valore della velocità del suono nell'aria, utilizzando la relazione (4) e la relativa correzione per il diametro. Si ha

$$v_{\text{open}} = 2(L + 0.8D)m = (345.8 \pm 1.0) \text{ m s}^{-1}$$

4.2 Misure per il tubo chiuso ad un'estremità

4.2.1 Lunghezza del tubo costante

La prima parte dello studio del tubo chiuso a un'estremità viene realizzata mantenendo la lunghezza L costante. Una volta posizionato il pistone, si è misurato L con l'ausilio del metro a nastro ed è risultato $L = 80.0 \pm 0.1 \text{ cm}$.

Per la determinazione delle varie armoniche si procede in maniera analoga al punto precedente, tenendo però conto della diversa disposizione di nodi e ventri (secondo schema in Figura [1]). Per esempio, per determinare la prima armonica si è posizionato il microfono all'estremità del tubo chiusa, verificando la presenza di un ventre. In questo caso la legge che lega frequenza di risonanza, la lunghezza del tubo e l'ordine di armonica è data dalla legge (5), sempre tenendo conto della correzione per il diametro.

Tabella 2: Si riportano i risultati delle misure delle frequenze in funzione del numero di armonica per il tubo di lunghezza costante.

n	$\nu_n \text{ [Hz]}$
1	104.5 ± 0.7
2	316.3 ± 1.5
3	527.7 ± 2.0
4	738.0 ± 2.0
5	948.0 ± 3.0

Analogamente a quanto fatto per il tubo aperto si riportano i dati in un diagramma ν_n vs. n e si effettua un'interpolazione lineare con retta generica.

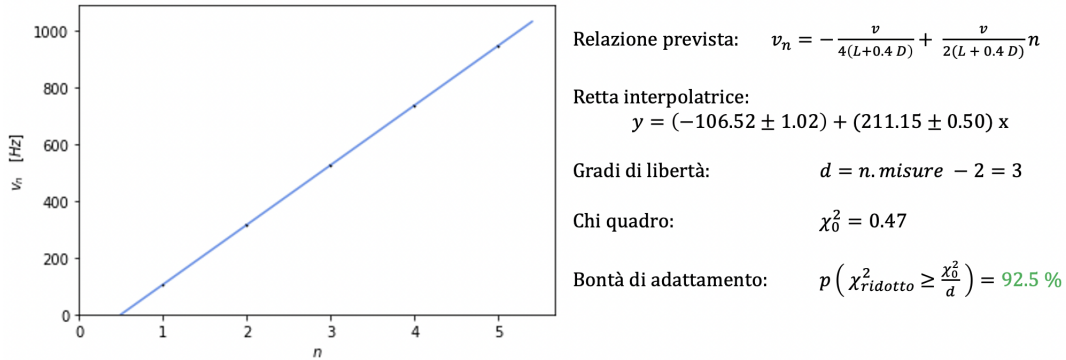


Figura 3: Grafico in cui si riportano i risultati delle misurazioni per il tubo chiuso a un'estremità e lunghezza costante. In azzurro è mostrata la retta ottenuta per interpolazione lineare che approssima meglio i dati.

L'equazione della retta interpolatrice ottenuta dai dati è

$$y = [(211.15 \pm 0.50)x + (-106.52 \pm 1.02)] \text{ Hz}$$

Il suo χ^2 è pari a $\chi_0^2 = 0.48$, che con un test di compatibilità con 3 gradi di libertà mostra un accordo con i dati del 92.5%, maggiore della soglia minima di accettabilità del 5%.

La velocità con cui si propaga l'onda sonora nell'aria può essere estrapolata sia dal coefficiente angolare m che dall'intercetta q . I due valori risultano quindi:

- $v_{closed,1} = 2(L + 0.4D)m = (343.3 \pm 0.9) \text{ ms}^{-1}$
- $v_{closed,2} = -4(L + 0.4D)q = (346.3 \pm 3.3) \text{ ms}^{-1}$

4.2.2 Lunghezza del tubo variabile

La seconda parte dello studio della propagazione delle onde lungo il tubo chiuso a un'estremità è realizzata modificando la lunghezza L con l'ausilio del pistone mobile. Si vuole quindi verificare la relazione di proporzionalità inversa tra frequenza di risonanza e lunghezza del tubo dato un numero fissato di armonica. Infatti, se si ricava λ dalla (3) e la si sostituisce nella formula nota $\nu_n = v/\lambda$ si ottiene la nuova relazione:

$$\nu_n = \frac{(2n-1)v}{4} \frac{1}{L} \quad (7)$$

Si è variata, dunque, la posizione del pistone mobile, si è misurato con il metro a nastro la lunghezza L e si è collocato in tale estremità il microfono per rilevare i ventri. È stato scelto di studiare l'instaurarsi delle onde stazionarie per $n = 1$. La (7) si riduce quindi a:

$$\nu_1 = \frac{v}{4} \frac{1}{L}$$

Tabella 3: Si riportano i dati di L , del suo inverso con la correzione del diametro e le frequenze di risonanza per $n = 2$. Le incertezze su L sono pari alla sensibilità $\sigma = 1 \text{ mm}$ del metro, mentre quelle sul suo inverso, ottenute per propagazione, risultano trascurabili rispetto alle incertezze sulle frequenze.

L [m]	L^{-1} [m ⁻¹]	ν_n [Hz]
0.80	1.23	104.5 ± 0.7
0.70	1.40	120.0 ± 0.5
0.60	1.63	139.0 ± 0.5
0.50	1.95	166.0 ± 0.7
0.30	3.20	272.0 ± 1.2

Si rappresentano i dati ottenuti su un diagramma ν_n vs $1/L$ e si effettua un'interpolazione lineare con retta generica. Il risultato è mostrato in Figura 4.

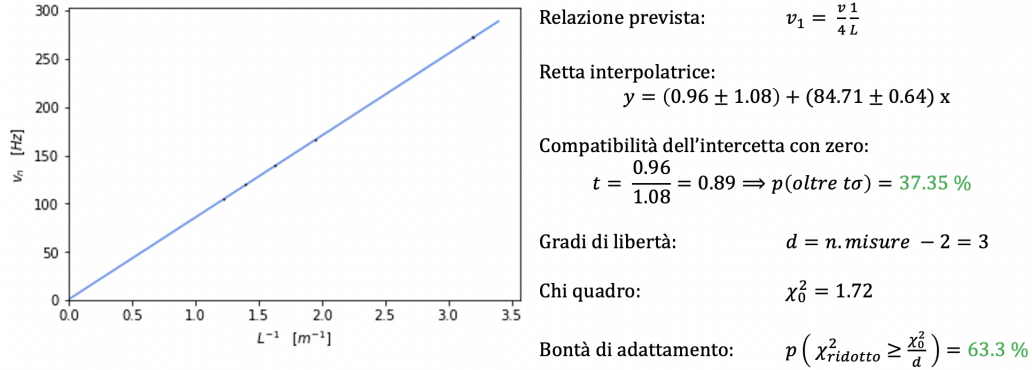


Figura 4: Grafico dei dati per il tubo chiuso a lunghezza variabile. In azzurro è rappresentata la retta che interpola meglio i dati.

La retta interpolatrice ottenuta ha intercetta compatibile con il valore previsto di zero con una probabilità del 37.35%. La retta ha $\chi_0^2 = 1.72$, che corrisponde con un test di compatibilità a una probabilità di accordo con i dati pari al 63.3%, superiore alla soglia minima di accettabilità fissata al 5%.

Dal coefficiente angolare $m = 84.71 \text{ ms}^{-1}$ della retta si può estrapolare un terzo valore della velocità del suono per il tubo chiuso:

- $v_{closed,3} = 4m = (338.8 \pm 2.6) \text{ ms}^{-1}$

4.3 Misura della velocità delle onde sonore nel krypton

4.3.1 Misura di velocità dalla riflessione di un'onda sinusoidale

Per questa parte dell'esperienza si è sostituito il tubo dell'aria con un tubo chiuso contenente krypton. Una volta collegato quest'ultimo al generatore di funzioni e all'oscilloscopio, si è proceduto come i punti precedenti impostando come funzione generata una onda sinusoidale con ampiezza $\Delta V = 4.00 \text{ V}$.

Il tubo con il krypton non è dotato di microfono mobile, ma è fissato a una delle estremità. Queste sono entrambe chiuse, quindi la relazione che lega la lunghezza del tubo e la frequenza è la (4) con la disposizione di nodi e ventri invertiti: all'instaurarsi delle armoniche si verifica la presenza di un ventre nell'estremità chiusa del microfono.

Sotto l'ipotesi che il tubo contenga solo krypton e considerando quest'ultimo come gas ideale monoatomico si è individuato il valore previsto per la velocità del

suono. Con $M_{krypton} = 83.80 \text{ Jmol}^{-1} \text{K}^{-1}$, $\gamma = 5/3$ e una temperatura pari a $T = (22.0 \pm 0.5)^\circ \text{C}$, si ottiene:

$$v_{krypton,exp} = \sqrt{\frac{5RT}{3M_{krypton}}} = (220.9 \pm 0.2) \text{ ms}^{-1}$$

Una volta segnata e verificata la lunghezza del tubo $L = 1.475 \text{ m}$ scritta sull'etichetta senza incertezza, si è proceduto con l'individuazione della prima armonica. Siccome non è possibile muovere il microfono lungo il tubo per verificare la posizione dei nodi, si è alzato progressivamente il valore della frequenza da 0 Hz fino a quando non si è osservato l'instaurarsi del primo ventre. Dopodiché si sono individuate le successive armoniche tenendo conto che le rispettive frequenze erano da individuare nell'intorno di multipli interi della fondamentale.

Tabella 4: *Si riportano i dati sulle frequenza di risonanza e i corrispettivi numeri di armonica. Le incertezze sono state valutate osservando la minima variazione di frequenza che determinasse una variazione apprezzabile nell'ampiezza dell'onda.*

n	$\nu_n \text{ [Hz]}$
1	98.2 ± 0.5
2	200.0 ± 1.0
3	298.0 ± 1.0
4	396.5 ± 1.2
5	495.5 ± 2.5

Come per i punti precedenti, si rappresentano i dati in un diagramma ν_n vs. n e si effettua un'interpolazione lineare. I risultati sono rappresentati in Figura 5.

La retta interpolatrice è

$$y = [(99.57 \pm 0.33)x + (-1.02 \pm 0.72)] \text{ Hz}$$

Per quest'ultima risulta $\chi_0^2 = 4.80$, che corrisponde con un test di compatibilità con 3 gradi di libertà a una probabilità di adattamento dei dati del 18.7%, maggiore della soglia minima di accettabilità del 5%. L'intercetta risulta compatibile con il valore previsto di zero con una probabilità del 15.6%.

Dal valore del coefficiente angolare m si può estrapolare la velocità di propagazione del suono all'interno del tubo e si ottiene:

$$v_{krypton,1} = 2Lm = (293.7 \pm 1.0) \text{ ms}^{-1} \gg v_{krypton,exp}$$

Si osservi che non è stata applicata la correzione per le dimensioni del diametro alla lunghezza del tubo in quanto esso aveva entrambe le estremità chiuse.

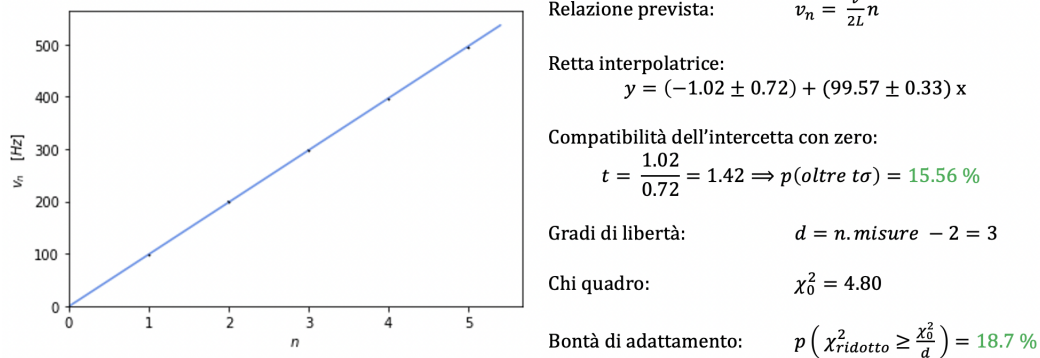


Figura 5: Grafico delle frequenze di risonanza individuate e corrispettive armoniche. La retta azzurra è quella che approssima meglio tali dati.

La velocità ottenuta risulta molto maggiore del valore previsto assumendo che il tubo contenga solo krypton, quindi si può supporre che in realtà vi sia una miscela del gas nobile con l'aria. Tale ipotesi può essere verificata misurando la velocità dell'onda sonora dalla riflessione di un'onda quadra.

4.3.2 Misura di velocità dalla riflessione di un'onda quadra

È stata quindi selezionata l'onda quadra e si è impostato come frequenza 10 Hz all'interno del generatore di funzioni e si è controllato sull'oscilloscopio che sul canale 1 (CH1 - giallo) apparisse l'onda generata. Sull'oscilloscopio, in viola, si è osservata la formazione di una successione di impulsi sonori. [Figura 6] Quest'ultimi sono caratterizzati da una distanza temporale pari all'intervallo di tempo che intercorre tra l'emissione di un impulso e la sua ricezione alla stessa estremità del tubo.

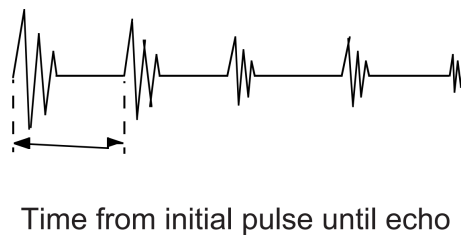


Figura 6: Rappresentazione del treno di impulsi sonori visibile sul canale viola dell'oscilloscopio.

La distanza tra due impulsi poteva essere determinata misurata contando il numero di quadretti compresi tra di essi sulla griglia dello schermo. Si è preferito, però, utilizzare le funzionalità dell'oscilloscopio per avere maggiore precisione sulla singola misura: selezionando su *measure* si è impostata la misura automatica della distanza temporale Δt tra più impulsi consecutivi. L'oscilloscopio, dunque, ha restituito il valore medio delle misurazioni in *ms* e l'incertezza associata. Il valore individuato è $\Delta t = (10.02 \pm 0.04) \text{ ms}$

A questo punto è stato possibile determinare il valore di velocità del suono nel tubo tenendo conto che l'onda ha percorso due volte la lunghezza L :

$$v_{krypton,2} = \frac{2L}{\Delta t} = (294.4 \pm 1.2) \text{ ms}^{-1}$$

4.4 Misura della forma di risonanza

Questa parte dell'esperienza è stata effettuata in data diversa. La temperatura del laboratorio segnata dal termometro era pari a $T = (24.0 \pm 0.5)^\circ\text{C}$.

La forma della curva di risonanza è descritta da una funzione della seguente forma:

$$A(\omega) = \frac{M_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \quad (8)$$

Dove A è l'ampiezza dell'onda e ω_0 è la pulsazione propria del sistema. In questo caso, non vengono utilizzate direttamente delle pulsazioni, ma delle frequenze. Ciò non va a inficiare sulla forma della curva se non per un fattore pari a 2π .

Un'ulteriore forma che è stata studiata è la quella dello sfasamento ϕ dell'onda in funzione della frequenza. La relazione prevista è la seguente:

$$\phi = \arctan\left(-\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) \quad (9)$$

Per misurare la forma di risonanza e lo sfasamento è stato usato il tubo aperto del primo punto, quindi di lunghezza $L = (90.0 \pm 0.1) \text{ cm}$ e diametro $D = (3.2 \pm 0.1) \text{ cm}$. Sul generatore di frequenze è stata selezionata un'onda sinusoidale di ampiezza $\Delta V = 4.00 \text{ V}$.

Si è studiata la forma di risonanza per la seconda armonica, dunque $n = 2$ e si è posizionato il microfono dove si prevedeva esserci il secondo ventre, dunque a $3/4$ della lunghezza del tubo. Una volta fatto ciò, si è individuata la frequenza di risonanza osservando le ampiezze dell'onda sulla l'oscilloscopio. Si è individuato un valore pari a $\nu_2 = 372.0 \pm 1.0 \text{ Hz}$, compatibile con il valore individuato per la medesima armonica al punto 4.1.

Sullo schermo dell'oscilloscopio veniva restituito il valore dell'ampiezza dell'onda e la relativa incertezza in mV e si è segnato il valore. Dopodiché, la frequenza è stata diminuita e poi anche aumentata progressivamente di 1 o 2 Hz rispetto alla frequenza di risonanza, segnando di volta in volta il valore di ampiezza e l'incertezza associate. Per i medesimi valori di frequenza è stato determinato lo sfasamento utilizzando come riferimento l'onda gialla. L'oscilloscopio era in grado di determinare tale sfasamento restituendo il valore in gradi. L'incertezza è stata valutata costante pari a $\sigma_{phi} = 1^\circ$ osservando le piccole variazioni che il valore restituito subiva durante la misurazione.

I dati raccolti per ciascuna frequenza sono stati raccolti nella Tabella 5.

Tabella 5: *Risultati delle misure di ampiezza e fase acquisite tramite l'oscilloscopio sull'onda rilevata dal microfono (CH2 - viola). Con il generatore si potevano selezionare valori di frequenza ν con una precisione pari a $\sigma = 0.001 Hz$.*

ν [Hz]	A [mV]	ϕ [°]
362	60 ± 0.67	88 ± 1
364	76 ± 0.70	95 ± 1
366	94 ± 0.76	99 ± 1
368	130 ± 0.82	108 ± 1
370	184 ± 0.93	123 ± 1
372	250 ± 1.17	151 ± 1
375	214 ± 1.51	202 ± 1
377	158 ± 1.63	221 ± 1
379	122 ± 1.71	232 ± 1
381	100 ± 1.76	245 ± 1

Per quanto riguarda la forma di risonanza, i dati di frequenza e ampiezza sono stati riportati su un grafico ν vs. A con il software PASCO Capstone. È stata poi effettuata un'interpolazione usando come *user defined function* la funzione (8). In questo modo è stato possibile valutare la compatibilità tra i dati e la relazione teorica con un test del χ^2 ed estrapolare dal grafico un nuovo valore della frequenza di risonanza ν_2 da confrontare con quello precedentemente individuato.

Il risultato dell'interpolazione è mostrato in [Figura 7]. La curva ottenuta ha un $\chi_0^2 = 330$, che corrisponde con un test di compatibilità con 7 gradi di libertà (i vincoli sono M_0 , ω_0 e γ) a una probabilità di accordo nulla. Tale risultato verrà discusso nelle conclusioni. Il valore della frequenza di risonanza ricavato dalla curva è $\nu_{2,resonance} = (373.0 \pm 0.10) Hz$, compatibile con il valore di $(372.0 \pm 1.0) Hz$ individuato in precedenza.

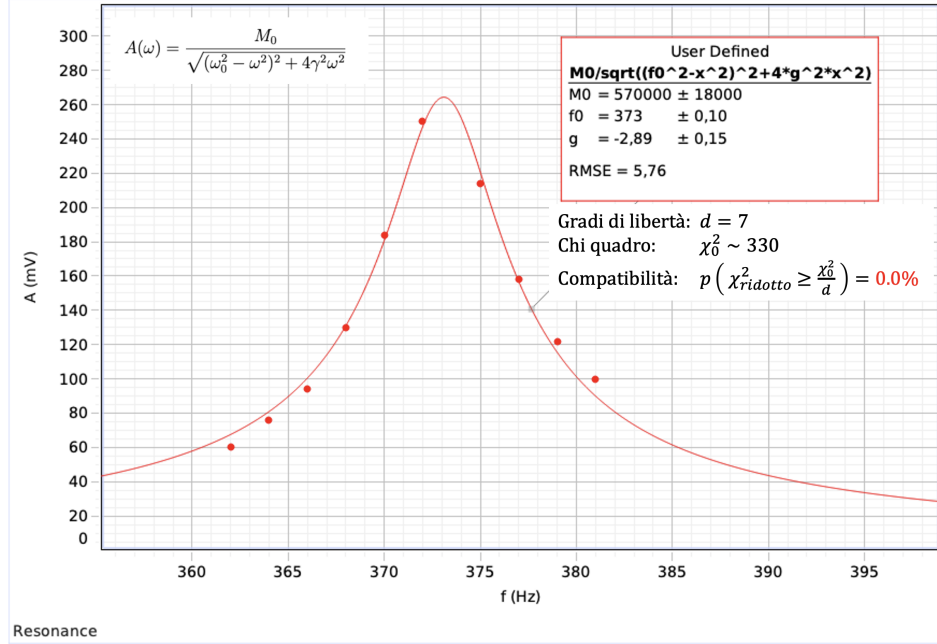


Figura 7: Grafico dell'ampiezza dell'onda viola in funzione della frequenza ottenuto con i dati raccolti. La linea in rossa rappresenta la funzione che interpola meglio i grafici secondo la relazione (8).

Per la fase dell'onda non è stato possibile effettuare un'interpolazione con una *user defined function* del tipo (9) per insufficienza di dati. Si riportano questi ultimi in un grafico realizzato in Excel. L'andamento dei dati verrà discusso nelle conclusioni.

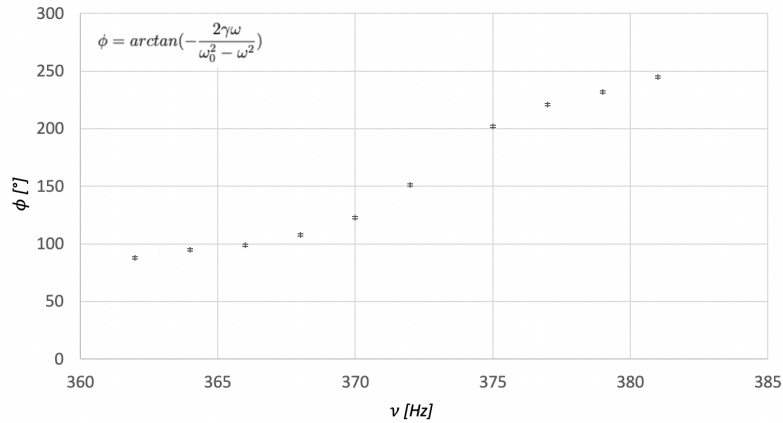


Figura 8: Sul grafico sono riportati i dati per la fase in funzione della frequenza individuati con l'oscilloscopio.

5 Conclusioni

L'esperienza del tubo di risonanza ha permesso di effettuare varie misure indipendenti della velocità del suono nell'aria e all'interno di un altro gas, sfruttando le relazioni che intercorrono tra frequenza, lunghezza del tubo e numero di armonica.

- Per quanto riguarda le misure con tubo aperto, si verifica che i valori della velocità del suono nell'aria misurata v e quella attesa v_{expected} sono compatibili:

$$t_{\text{open}} = \frac{|v_{\text{open}} - v_{\text{expected}}|}{\sqrt{\sigma_{\text{open}}^2 + \sigma_{\text{expected}}^2}} = \frac{|345.8 - 344.3|}{\sqrt{1.0^2 + 0.3^2}} = 1.44$$

Per tale valore di t si ha una compatibilità con il valore atteso pari a $p(\text{oltre } t\sigma) = 15.0\%$, superiore dunque alla soglia minima di accettabilità del 5%.

- Per quanto riguarda le misure con il tubo chiuso, sono stati ottenuti tre valori di velocità differenti: i primi due rispettivamente dal coefficiente angolare e l'intercetta dell'interpolazione dei dati per il tubo di lunghezza costante, mentre il terzo dal coefficiente angolare ottenuto per interpolazione per lunghezze variabili. Si effettuano i test di compatibilità per ciascuna misura:

1. Per la prima misura si ha:

$$t_1 = \frac{|v_{\text{closed},1} - v_{\text{expected}}|}{\sqrt{\sigma_{\text{closed},1}^2 + \sigma_{\text{expected}}^2}} = \frac{|343.3 - 344.3|}{\sqrt{0.9^2 + 0.3^2}} = 1.05$$

A cui è associata una probabilità di compatibilità con il valore atteso pari al $26.4\% > 5\%$.

2. Per la seconda misura si ha:

$$t_2 = \frac{|v_{\text{closed},2} - v_{\text{expected}}|}{\sqrt{\sigma_{\text{closed},2}^2 + \sigma_{\text{expected}}^2}} = \frac{|346.3 - 344.3|}{\sqrt{3.3^2 + 0.3^2}} = 0.60$$

A cui è associata una probabilità di compatibilità con il valore atteso pari al $54.9\% > 5\%$

3. Per la terza misura si ha:

$$t_3 = \frac{|v_{\text{closed},3} - v_{\text{expected}}|}{\sqrt{\sigma_{\text{closed},3}^2 + \sigma_{\text{expected}}^2}} = \frac{|338.8 - 344.3|}{\sqrt{2.6^2 + 0.3^2}} = 2.10$$

A cui è associata una probabilità di compatibilità con il valore atteso pari al $3.6\% < 5\%$

Quest'ultimo valore di velocità risulta dunque non compatibile con il valore previsto teoricamente. Siccome le altre tre misurazioni sono risultate compatibili si può supporre che questa sia soggetta a qualche errore sistematico. Si osserva che la retta interpolatrice dei dati nel grafico ν_n vs. L^{-1} è compatibile con le misurazioni con il test del χ^2 . L'andamento si conferma lineare.

Un'ipotesi è che muovendo il pistone all'interno del tubo si sia accidentalmente avvicinata l'estremità che doveva rimanere libera all'altoparlante in parte chiudendola. Ciò, però, determinerebbe una sovrastima del valore delle frequenze di risonanza, dunque una sovrastima della velocità del suono, cosa che non accade. L'ipotesi fatta non è valida.

Un'ulteriore ipotesi è che per lunghezze del tubo piccole non si instaurino più onde stazionarie "ideali" a causa delle dimensioni del diametro. In questo caso, soprattutto per la prima armonica si noterebbero variazioni dai valori previsti di frequenza: ad esempio, se per questa ragione il nodo che si prevede essere localizzato nell'estremità libera cadesse al di fuori di quest'ultima, si avrebbe una sottostima della frequenza di risonanza. Tale sottostima della frequenza porta a una riduzione del coefficiente angolare della retta interpolatrice e quindi del valore estrapolato di velocità, come si è osservato.

- Per quanto riguarda le misure di velocità nel tubo di krypton sono stati ricavati due valori utilizzando prima la riflessione di un'onda di tipo sinusoidale e successivamente quella di un'onda quadra. Il valore atteso teoricamente era $v_{krypton,exp} = (220.9 \pm 0.2) \text{ ms}^{-1}$. Le misure di velocità ottenute sono rispettivamente:

$$\begin{aligned} v_{krypton,1} &= (293.7 \pm 1.0) \text{ ms}^{-1}, \\ v_{krypton,2} &= (294.4 \pm 1.2) \text{ ms}^{-1}. \end{aligned}$$

Ambedue molto superiori a valore atteso e non compatibili con quest'ultimo. Il fatto che i valori siano sovrastimati porta all'ipotesi che all'interno del tubo si sia verificata contaminazione di aria. Il mezzo di propagazione delle onde sonore è quindi una miscela di gas con velocità intermedia tra quella del krypton puro e dell'aria. Il test di compatibilità tra le due velocità misurate indipendentemente corrobora tale ipotesi:

$$t = \frac{|v_{krypton,1} - v_{krypton,2}|}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} = \frac{|293.7 - 294.4|}{\sqrt{1.0^2 + 1.2^2}} = 0.45$$

A cui corrisponde una probabilità di compatibilità $p(\text{oltre } t\sigma) = 65.3\%$, che è maggiore della soglia minima di accettabilità fissata al 5%. L'ipotesi della miscela di gas è confermata.

Quest'ultima parte delle conclusioni riguarda i risultati ottenuti per la forma di risonanza e lo sfasamento.

Risulta dai calcoli che alla forma di risonanza ottenuta per interpolazione su Capstone è associato un $\chi_0^2 \approx 330$, dunque una probabilità di accordo praticamente nulla. È da osservare, tuttavia, che in laboratorio si è osservato che i valori di ampiezza restituiti dall'oscilloscopio variavano lentamente per ciascun valore di frequenza anche di circa 2 mV (il delay nel calcolo è probabilmente dovuto all'utilizzo della modalità "average" per ripulire da "rumori" esterni l'onda viola). Questo significa che le incertezze restituite devono essere certamente sottostimate.

In secondo luogo, se si vanno a vedere i singoli addendi della sommatoria che restituisce il χ_0^2 per ciascun valore di frequenza, si nota che quelli che più contribuiscono ad aumentare il valore della somma sono quelli sulle code della curva di risonanza. Si ricorda la formula del χ_0^2 :

$$\chi_0^2 = \sum \frac{(A_{obs,k} - A_{exp,k})^2}{\sigma_{A_k}^2}$$

Dove $A_{obs,k}$ e σ_{A_k} sono le ampiezze e le incertezze rilevate sperimentalmente dall'oscilloscopio, mentre $A_{exp,k}$ è l'ampiezza prevista dall'interpolazione prevista da Capstone. Nella [Tabella 6] sono stati riportati i valori dei singoli addendi in funzione della frequenza.

Tabella 6: Si riportano i valori degli addendi che contribuiscono per il χ_0^2 per ciascun valore di frequenza usato per determinare la forma di risonanza.

ν	contributo al χ_0^2
362	125
364	49
366	73
368	1
370	12
372	6
375	19
377	0.4
379	14
381	32
<hr/> $\chi_0^2 = 332$ <hr/>	

La conclusione più naturale a cui si è condotti è che siccome la funzione (8), che lega l'ampiezza e la frequenza, rappresenta un caso ideale, essa valga solo nell'intorno della frequenza di risonanza. Ad esempio, dalla [Tabella 6] emerge che già a 362 Hz,

quindi a 10 Hz di distanza dalla frequenza di risonanza, la relazione (8) non è più valida siccome il contributo al χ_0^2 è pari a 125. Questo è una probabile sottostima delle incertezze sulle ampiezze devono aver determinato un valore così elevato del χ_0^2 .

In ultimo, si osservi che il valore di frequenza di risonanza individuato dall'interpolazione dei dati su Capstone, pari a $(373.0 \pm 0.1) Hz$, è compatibile con il valore individuato inizialmente di 372.0 ± 1.0 , in quanto entro $1\sigma = \sqrt{0.1^2 + 1.0^2} \approx 1.0$ da quest'ultimo.

Per quanto riguarda la forma della curva ricavata dai dati sullo sfasamento purtroppo non si possono che fare valutazioni approssimative siccome non è stato possibile effettuare un'interpolazione dati con Capstone.

Si osserva che l'andamento è paragonabile a quello di un arcotangente, solo traslato di 180° verso l'alto. I dati sembrano tendere asintoticamente a destra verso 270° e a sinistra verso 90° come previsto, mentre intorno alla frequenza di risonanza si nota un andamento che suggerisce la presenza del punto di flesso a tangente verticale previsto dalla relazione (9).

La traslazione di 180° verso l'alto si spiega in quanto le misure sono state effettuate per la seconda armonica posizionando il microfono a $3/4$ della lunghezza del tubo, sul secondo ventre. Se si fossero effettuate le misure sul primo ventre, i valori di fase individuati sarebbero stati compresi circa tra -90° e 90° , ovvero il codominio della funzione arcotangente.

Riferimenti bibliografici

- [1] P. Mazzoldi, M. Nigro, C. Voci. Fisica — V olume I. Seconda edizione. Edises Università.
- [2] J. R. Taylor. Introduzione all'analisi degli errori. Seconda edizione. Zanichelli.
- [3] Instruction Manual and Experiment Guide for the PASCO scientific Model WA-9612 "Resonance tube".