



UNIVERSITÀ DI PISA

DIPARTIMENTO DI FISICA

**Fourier Series and Signal Processing
Exercises Using Python: Practical
Applications in Simulating RC Circuits
and Waveforms**

Autore:

Alessandro C. Ciano

Numero di matricola:

654532

Indice

1 QUADRA E TRIANGOLARE	2
2 PINNA DI SQUALO	5
3 AMPIEZZA DELLA FORMA D'ONDA INTEGRATA	7
4 INTEGRATORE + DERIVATORE	8
5 ACCOPPIAMENTO AC IN INGRESSO ALL'OSCILLOSCOPIO	9
6 RIPPLE IN UN TRENO DI IMPULSI	10

1 QUADRA E TRIANGOLARE

Il primo degli esercizi proposti chiedeva di ricostruire un'onda quadra e triangolare. Il modo più semplice è ricavare i coefficienti matematicamente, molto facile per funzioni semplici come queste. Un secondo metodo può essere di utilizzare direttamente le funzioni modello di interesse e di far calcolare al programma tutti i coefficienti tramite un pacchetto che permetta di sfruttare il calcolo integrale. Un grosso svantaggio di quest'ultimo è che gli integrali dei coefficienti degenerano per grandi valori di n (numero di elementi della somma), anche aumentando il numero di punti dell'array; inoltre per funzioni più complesse non avremo a disposizione la funzione che vogliamo ricostruire in partenza.

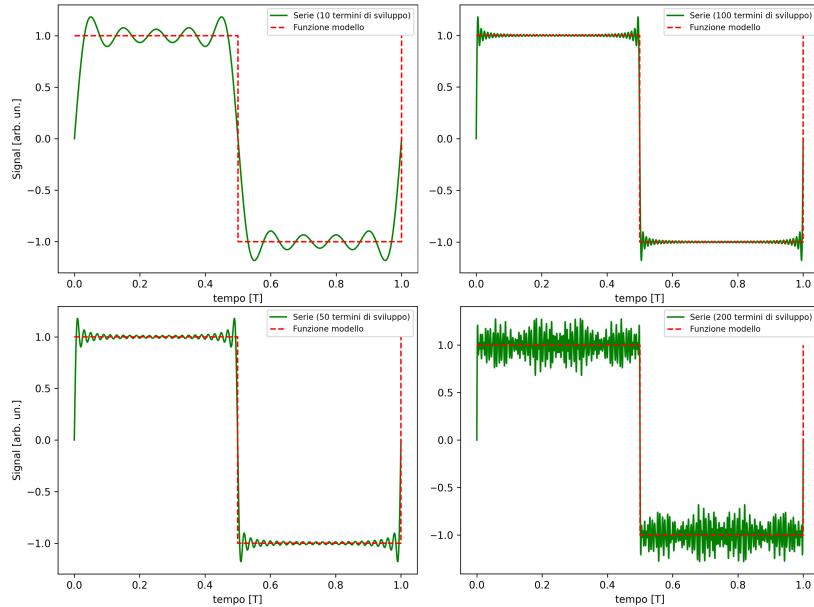


Figura 1: Simulazione di onda quadra tramite una funzione modello della libreria `scipy.signal`. Si noti che con soli 200 termini di sviluppo il risultato degenera.

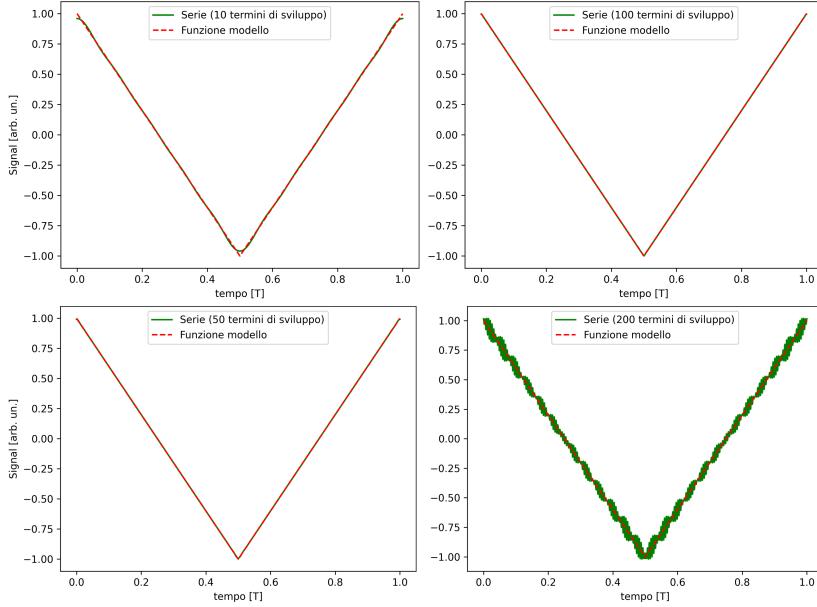


Figura 2: Simulazione di onda triangolare.

Con il primo metodo si evita il problema della divergenza e per grandi valori di n è possibile apprezzare meglio come cambia il risultato al variare dei punti dell'array N : innanzitutto, banalmente, con N non sufficientemente grande non si avranno neppure abbastanza punti per ricreare opportunamente il grafico e si ha una retta inclinata piuttosto che la discontinuità attesa. Cosa più interessante interessante è che per valori bassi ma ragionevoli di n il risultato migliore si ottiene per valori bassi di N , poiché in tal modo si riesce a "rimpiazzare" le oscillazioni con una spezzata.

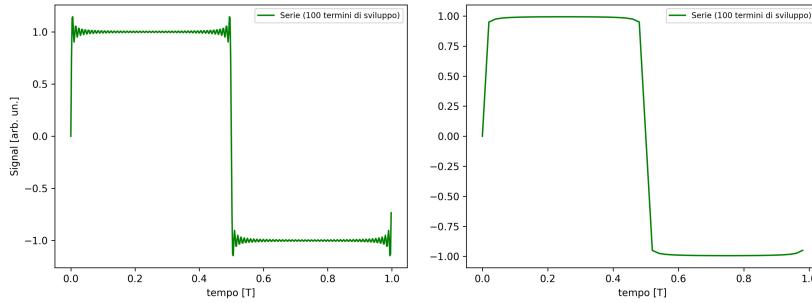


Figura 3: Illustrazione di come un basso valore di punti dell'array tempo N a parità di n possa migliorare il risultato finale: nella fig. di sinistra si ha $N = 500$, mentre in quella di destra $N = 50$

La difficoltà nel simulare una funzione d'onda quadra quadra con un una serie di coseni e seni

risiede in particolare nel punto di discontinuità (a metà periodo), è per questa ragione che per un'onda triangolare si riesce ad ottenere un risultato migliore a parità di sviluppo n .

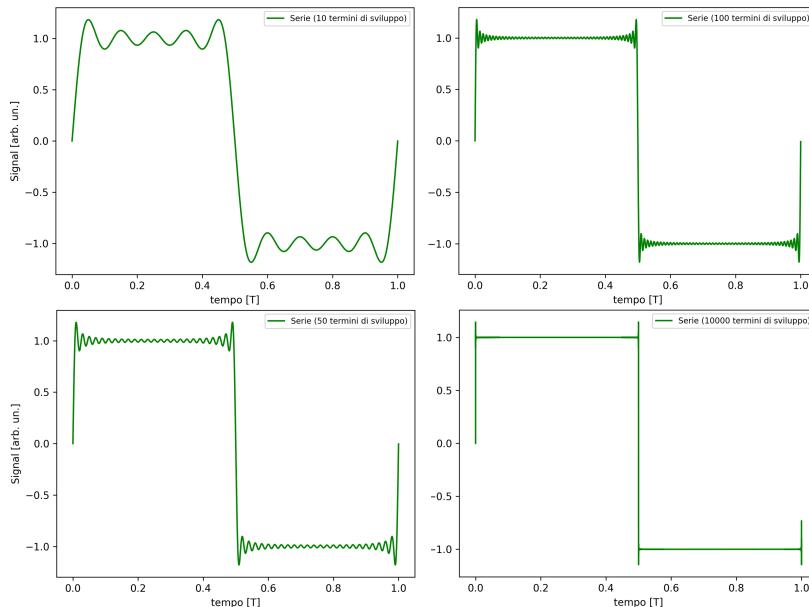


Figura 4: Onda quadra. Per quanto il risultato migliori per grandi sviluppi, permangono degli artefatti nei punti di discontinuità.

Inoltre, come si evince dalla fig. 4, proprio nei punti di discontinuità si presentano delle increspature indesiderate che creano il cosiddetto **fenomeno di Gibbs**. Per fenomeno di Gibbs intendiamo la presenza di forti oscillazioni nei polinomi di Fourier di una funzione con discontinuità di prima specie, che possono appunto produrre increspature nell'approssimazione. Queste possono essere ridotte includendo più termini nella serie, ma non saranno mai completamente eliminate.

Anche per questo metodo la serie di Fourier riesce a riprodurre funzioni triangolari con grande accuratezza già per pochi termini di sviluppo.

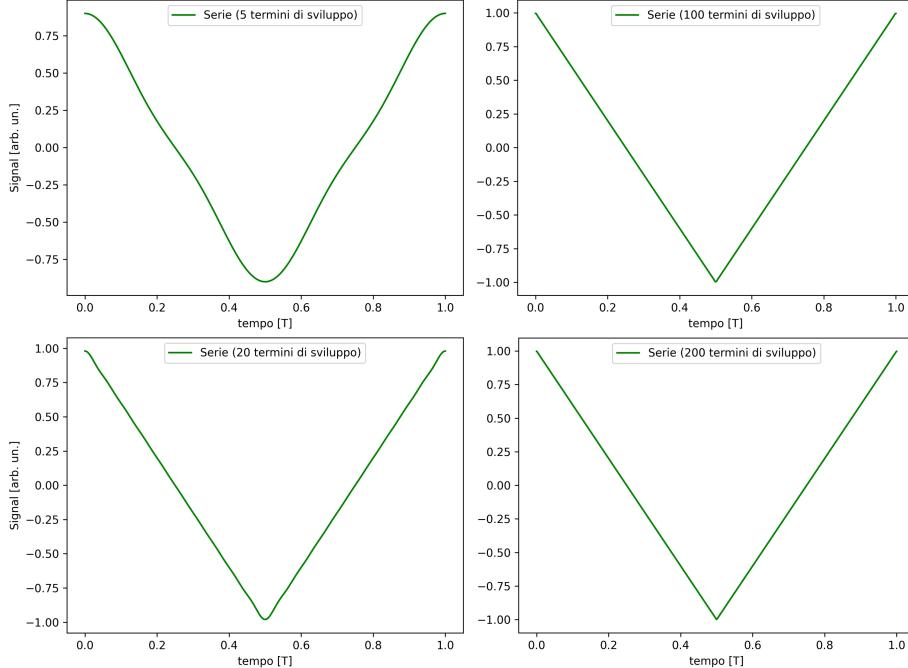


Figura 5: Simulazione di onda triangolare.

2 PINNA DI SQUALO

In questa sezione si vuole simulare l'uscita di un integratore a cui viene inviata una funzione d'onda quadra. Un integratore RC è costituito da un circuito come in figura 6, per il quale si approssima che la corrente I scorra soltanto attraverso la serie della resistenza R e del condensatore C . Scegliendo delle onde di periodo $T \ll \tau = RC$ si ottiene quindi un'ampiezza del segnale di uscita V_{out} considerevolmente ridotta rispetto a quella del segnale in ingresso V_{in} . In questo modo si ottiene la stima

$$V_{\text{out}} = \frac{\int V_{\text{in}}(t') dt'}{RC}$$

per la quale è importante sottolineare che non è possibile determinare precisamente l'intervallo di integrazione. Utilizzando il metodo simbolico è possibile simulare l'onda con una serie

$$V_{\text{out}}(t) = \sum_{k=1}^N \frac{2}{\pi k} G_k \sin(2\pi f_k t + \Delta\phi_k)$$

con $\Delta\phi_k = \arctan(-f_k/f_T)$ e $G_k = \frac{1}{\sqrt{1+f_k/f_T}}$ per soli k dispari.

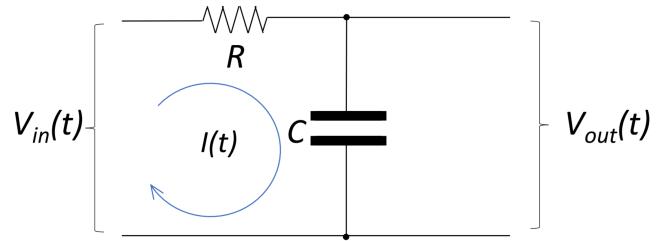


Figura 6: Integratore RC.

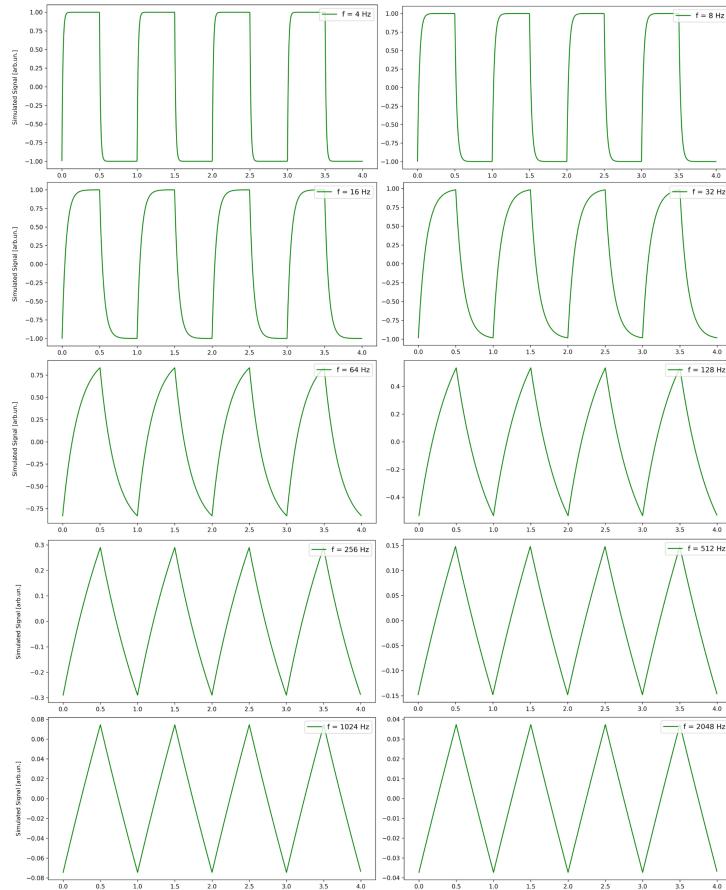


Figura 7: Simulazione per varie frequenze f dell'integratore con $f_T = 48.6 \text{ Hz}$. Gli array grafici sono composti da $N = 1000$ punti e realizzati sommando su $n = 1000$ iterazioni.

In sede di laboratorio si sono raccolti vari record di dati per frequenze diverse collegando una piattaforma Arduino direttamente al circuito nei punti di interesse. Sono stati scelti dei valori per resistenza e capacità di $C = 1 \mu\text{F} \pm 20\%$ e $R = 0.670 \text{ k}\Omega \pm 1\%$, per cui la frequenza di taglio

attesa risulta $f_T = (238 \pm 24)$ Hz. Tenendo conto del fattore di fase costante, del fatto che Arduino accetta solo differenze di potenziale positive in ingresso, e del fattore di scala relativo, si ottengono i grafici in fig. 8. Tutte le simulazioni sono state effettuate ponendo una f_T compatibile con il valore nominale atteso.

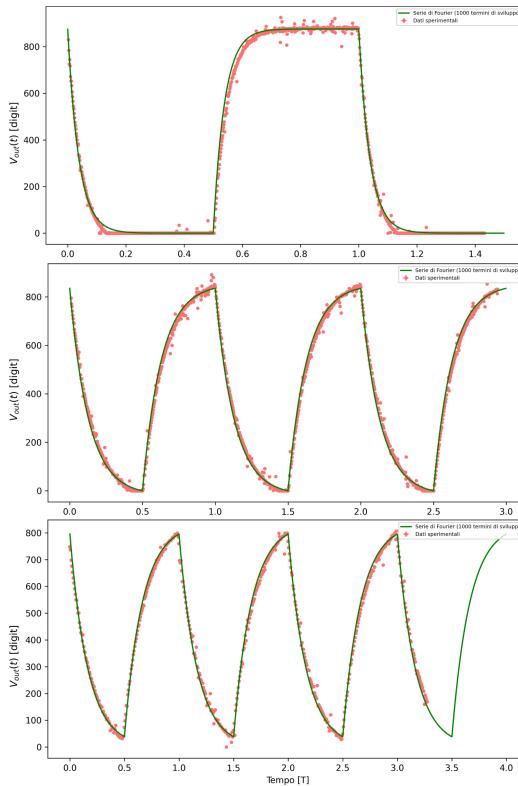


Figura 8: Simulazione e dati acquisiti sperimentalmente a confronto: rispettivamente le frequenze utilizzate sono $f = 53$ Hz, $f = 175$ Hz e $f = 242$ Hz.

L'accordo tra dati e simulazione parrebbe soddisfacente ma un risultato migliore si sarebbe potuto ottenere per una resistenza più grande e quindi frequenze di taglio più basse.

3 AMPIEZZA DELLA FORMA D'ONDA INTEGRATA

Un aspetto critico dell'integratore RC è che questo può essere visto come un *filtro passa basso* (*low-pass filter*), in quanto esprimendo il guadagno G in funzione della frequenza di ingresso è possibile apprezzare come il guadagno si mantenga costante all'aumentare della frequenza, fino ad arrivare alla cosiddetta *corner frequency*, a partire dalla quale si osserva una graduale discesa, che in un diagramma di Bode appare come lineare (in ambito industriale in realtà sia per filtri passa alto che per passa basso vorremmo dei punti di discontinuità in prossimità della *corner frequency*, dove il guadagno passi da costante a 0 e viceversa).

Per verificare sperimentalmente il risultato si è scelta una frequenza di taglio $f_T = 125$ Hz, prendendo varie misure di potenziali V_{out} e V_{in} a varie frequenze di ingresso. Confrontando i risultati di $(V_{\text{out}}/V_{\text{in}}, f)$ a $G(f) = 1/\sqrt{1 + (f/f_T)^2}$ si ottiene il grafico in fig. 9.

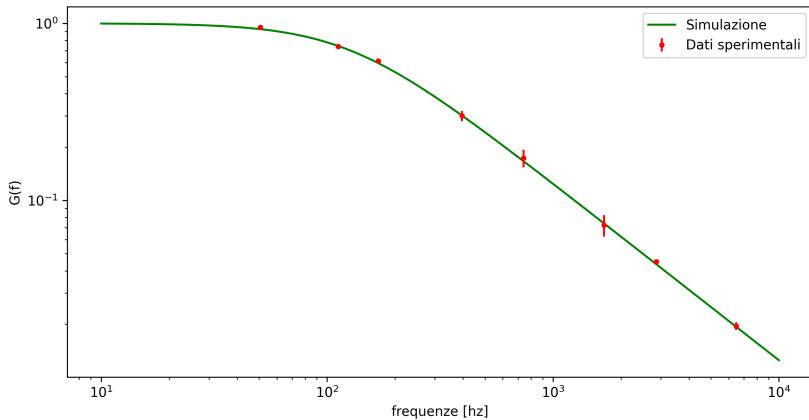


Figura 9: Simulazione del guadagno $G(f)$ e dati acquisiti sperimentalmente a confronto.

4 INTEGRATORE + DERIVATORE

Si considera adesso un circuito composto da integratore e derivatore a cascata. Resistenze e capacità in questo caso devono essere scelte con cura: innanzitutto si deve mantenere la condizione $V_{\text{out}} \ll V_{\text{in}}$, che si traduce in $T \ll \tau = R_A C_A$ per l'integratore e $T \gg \tau = R_B C_B$ per il derivatore. Inoltre è utile utilizzare resistenze C_A abbastanza più grandi di C_B per considerare come indipendenti le due maglie.

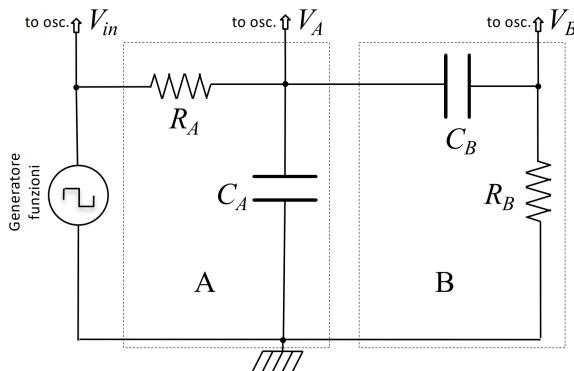


Figura 10: Integratore e derivatore a cascata RC.

In sede di laboratorio si sono dimensionate le due frequenze di taglio come $f_{T,A} = 48.5$ Hz e $f_{T,B} = 2.3$ kHz. Con il metodo simbolico per questi valori è possibile simulare anche l'effetto del derivatore in serie moltiplicando l'attenuazione all'ampiezza delle componenti armoniche già attenuate dall'integratore e sommando invece lo sfasamento.

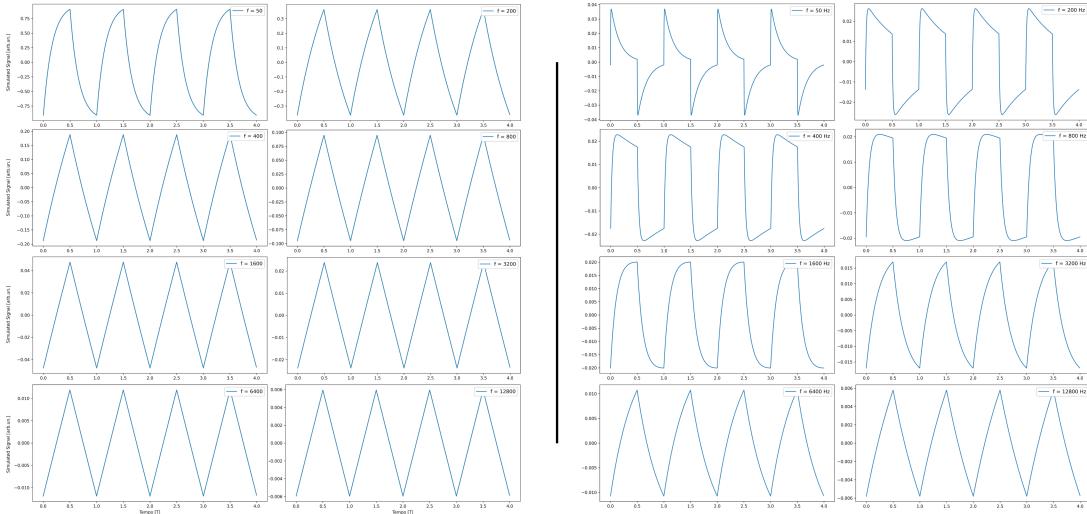


Figura 11: Simulazione dell'integratore RC (zona di sinistra) e dell'integratore e derivatore in serie (zona di destra) per vari valori di f .

5 ACCOPPIAMENTO AC IN INGRESSO ALL'OSCILLOSCOPIO

L'accoppiamento AC in ingresso all'oscilloscopio cancella la componente continua di un segnale visualizzato. Tale modalità può essere modellata con un condensatore C_{AC} in serie al segnale (quando carico impedisce il passaggio di corrente), che con la resistenza di ingresso all'oscilloscopio $r_{osc} = 1\text{ M}\Omega$ forma un circuito derivatore RC, in quanto la resistenza è proprio in parallelo al segnale (tra terra e condensatore). Il comportamento di derivatore RC può essere osservato a basse frequenze, in fig. 12 è riportato il caso di un'onda quadra di $f = 40\text{ Hz}$ con una frequenza di taglio ragionevole per un oscilloscopio $f_T = 10\text{ Hz}$.

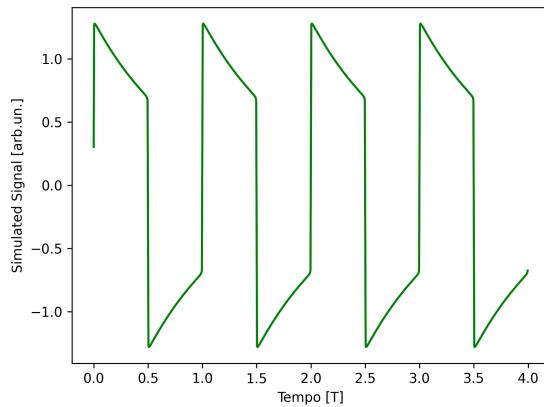


Figura 12: Accoppiamento AC visto come derivatore.

6 RIPPLE IN UN TRENO DI IMPULSI

Nel caso in cui all'ingresso di un integratore si abbia un'onda quadra con duty cycle D non necessariamente di 0.5 (treno di impulsi) è possibile simulare il segnale in ingresso $g(t)$ come

$$g(t) = D + \sum_{k=1}^N \frac{2}{k\pi} \sin(k\pi D) \cos(w_k t)$$

e quello in uscita come

$$g(t) = D + \sum_{k=1}^N G(k) \frac{2}{k\pi} \sin(k\pi D) \cos(w_k t + \Delta\phi(k))$$

con $\Delta\phi = \arctan(-f/f_T)$ sfasamento e $G(f) = 1/\sqrt{1 + (f/f_T)^2}$ guadagno del passa basso

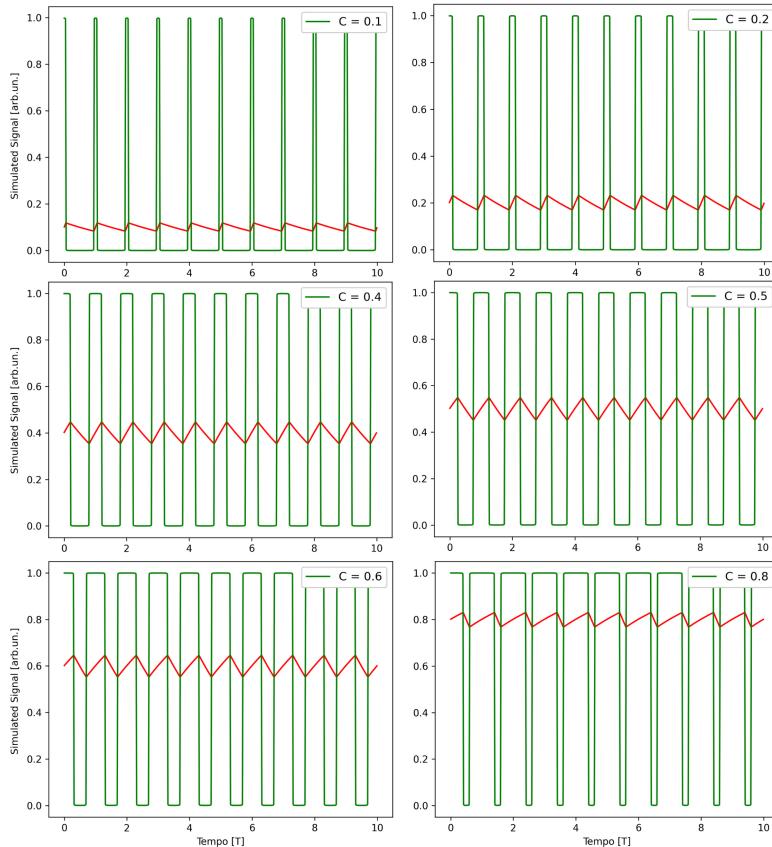


Figura 13: Simulazione di un treno di impulsi (in verde) e della sua integrazione RC (in rosso) per vari valori di D .