

Simulazione dello sviluppo di uno sciame elettromagnetico in atmosfera

Alessandro Liberatore Luca Rickler

12 dicembre 2016

Indice

1	Sciami atmosferici	3
1.1	Sciami elettromagnetici	3
1.2	Sviluppo dello sciame	4
1.3	Riassorbimento dello sciame	5
2	Descrizione codice	5
3	Compilazione codice	6
4	Risultati e confronti con altri modelli	7
A	Appendici	8
A.1	Calcolo dell'energia critica e della lunghezza di radiazione per elettroni e positroni in atmosfera	8
A.2	Modello di Heitler	8

Introduzione

Scopo del seguente programma è la simulazione, con il metodo Monte Carlo, dello sviluppo di uno sciame elettromagnetico in atmosfera.

Tale sciame si può immaginare come prodotto dall'interazione di un raggio cosmico primario con gli elementi componenti l'atmosfera terrestre. Si dà la possibilità all'utente di scegliere l'energia della particella (un raggio gamma) che darà inizio allo sciame scegliendo in un intervallo di energie tra i 10^2 MeV ed i 10^5 MeV.

I risultati di tale simulazione possono essere confrontati con quelli di altre simulazioni presenti allo stato dell'arte.

1 Sciami atmosferici

Un raggio cosmico primario può generare una cascata di particelle secondarie. Questo sciame di particelle viene comunemente chiamato *Extensive Air Showers* (EAS). In particolare questi sciami sono composti sia da una componente elettromagnetica che da una adronica. Nella presente simulazione, si focalizzerà l'attenzione sulla sola componente elettromagnetica generata da un raggio gamma considerato come particella primaria (sciami generati da elettroni o positroni sono, dopo poche lunghezze di radiazione, del tutto analoghi a quelli generati da raggi gamma).

1.1 Sciami elettromagnetici

Come detto, si può considerare uno sciame elettromagnetico come prodotto dall'interazione di un elettrone, positrone o raggio gamma con l'atmosfera terrestre. Date le alte energie in gioco ($\approx 10^5$ MeV), i fenomeni di interazione predominanti per queste particelle a tali energie sono:

- **bremssstrahlung** per gli elettroni ed i positroni;
- **produzione di coppia** per i raggi gamma.

Si supponga, a titolo di esempio, un elettrone come particella primaria. Si avrà la creazione di fotoni (per via della radiazione di bremssstrahlung) che possono a loro volta creare elettroni e positroni tramite la produzione di coppia. Questi a loro volta possono fare bremssstrahlung e così via. Il processo continua fino al raggiungimento delle energie critiche. Queste sono 88.05 MeV per la bremssstrahlung e 10 MeV per la produzione di coppia.

L'energia critica per la bremssstrahlung in atmosfera (considerata composta da azoto molecolare, ossigeno molecolare ed argon) si è ricavata facendo prima una media tra l'energia critica di elettroni e positroni nei singoli elementi che la costituiscono e, successivamente, con le medie ottenute, una media ponderata per considerare l'abbondanza dei suddetti elementi in atmosfera (78% N_2 , 21% O_2 ed 1% Ar). Si veda l'Appendice A per i risultati ottenuti. Le varie energie critiche di elettroni e positroni nei singoli elementi sono state prese da Patrignani et al. (2016). Per quanto riguarda l'energia di soglia per la produzione di coppie, si è scelto il valore di energia per il quale questo tipo di interazione predominasse sugli altri. A tal fine si è ritenuto, come si può osservare nel grafico in Figura 1, che 100 MeV fosse una buona scelta.

Si sono dunque considerate, fino al raggiungimento delle rispettive energie critiche, esclusivamente i processi di bremssstrahlung e di produzione di coppie (che portano allo sviluppo dello sciame). Successivamente, le singole particelle arrivano ad avere

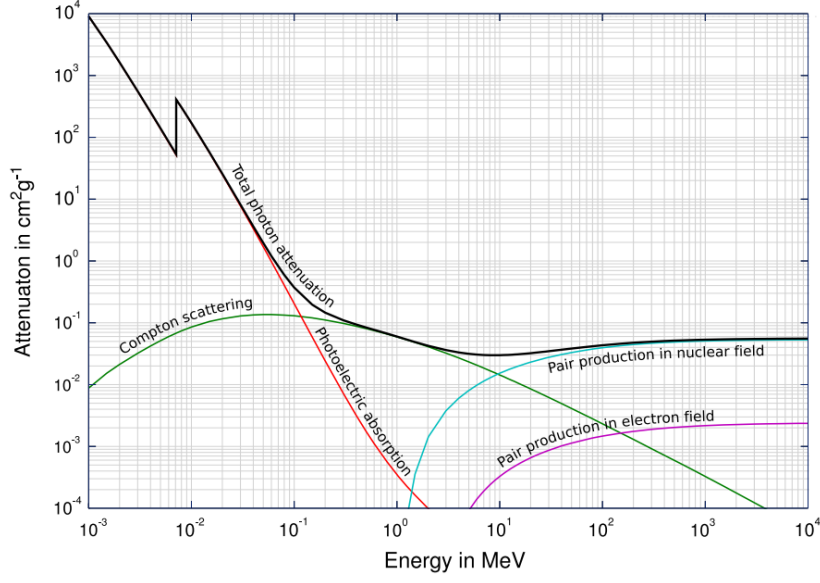


Figura 1: Diversi meccanismi di attenuazione di fotoni in un mezzo in funzione dell'energia.

energie sotto soglia e, non venendosi a creare nuove particelle, comincia il riassorbimento dello sciame.

Viene spiegata di seguito, più in dettaglio, la logica utilizzata per la simulazione Monte Carlo dello sviluppo ed il riassorbimento dello sciame.

1.2 Sviluppo dello sciame

Si consideri l'atmosfera come divisa in strati atmosferici di spessore pari ad una lunghezza di radiazione \tilde{x}_0 [g/cm²]. Nel primo strato atmosferico sarà presente il raggio cosmico primario che, se ad energia sufficiente (i.e. $> E_{soglia}$), interagirà facendo produzione di coppia o bremsstrahlung. Si studiano poi separatamente il comportamento di elettroni/positroni e di raggi gamma.

Cominciando dal fenomeno di bremsstrahlung, da letteratura (H. Bichsel, January 2012), si trova che il numero di fotoni prodotti come radiazione di bremsstrahlung in funzione dello spazio percorso e dell'energia dei gamma emessi (compresa tra k_{min} e k_{max}) risulta essere pari a:

$$N_\gamma = \frac{d}{\tilde{x}_0} \left[\frac{4}{3} \ln \frac{k_{max}}{k_{min}} - \frac{4(k_{max} - k_{min})}{3E_e} + \frac{k_{max}^2 - k_{min}^2}{2E_e^2} \right] \quad (1)$$

che vale per distanze percorse $d \ll \tilde{x}_0$ [g/cm²]. L'elettrone perde, per ogni gamma prodotto, la rispettiva energia. Questi gamma emessi, possono o non possono fare produzione di coppia in funzione alla loro energia (che viene divisa esattamente a metà tra l'elettrone ed il positrone creati).

Ogni particella creata (sia gamma di bremsstrahlung che elettroni/positroni di produzione di coppia) è stata considerata emessa ad un certo angolo zenitale θ e ad uno azimutale ϕ (estratto casualmente tra 0 e 2π). L'angolo θ considerato ha un valore

medio fisso di:

$$\langle \theta \rangle = \frac{m_e c^2}{E_e} \quad (2)$$

per l'emissione dei gamma di bremsstrahlung, e di:

$$\langle \theta \rangle = \frac{m_e c^2}{E_\gamma} \quad (3)$$

per l'emissione di coppie.

Conoscendo θ e conoscendo la distanza reale percorsa (x) dalle particelle, possiamo risalire alla distanza verticale (s) compiuto attraverso la trigonometria: $s = x \cos \theta$.

Questi processi continuano, di volta in volta, fino al raggiungimento delle rispettive energie di soglia.

1.3 Riassorbimento dello sciame

Per quanto riguarda il riassorbimento dello sciame, si è proceduto nuovamente in modo diverso per elettroni/positroni e raggi gamma.

Per quanto riguarda gli elettroni, una volta che hanno raggiunto valori di energia sotto soglia, percorrono uno strato atmosferico pari al range di percorrenza degli elettroni in un mezzo che, da letteratura (Katz and Penfold, 1952), risulta pari a:

$$R_{max} = \begin{cases} 0.412 E_e^{1.265 - 0.0954 \ln E_e} & 0.01 \leq E_e \leq 2.5 \text{ MeV} \\ 0.530 E_e - 0.106 & E_e > 2.5 \text{ MeV}. \end{cases} \quad (4)$$

I raggi gamma vengono invece subito abbandonati una volta sotto la soglia della produzione di coppia (non si considerano dunque effetti quali lo scattering Compton e l'effetto fotoelettrico).

2 Descrizione codice

Il codice consta di tre classi (Vector3D, Particle, Costants) più quella di esecuzione (Simulation.C).

Nella classe "Vector3D" (.h e .cpp), sono presenti tutti i metodi e le proprietà necessarie al calcolo vettoriale che si utilizzerà nel programma per definire verso e direzione delle particelle.

Nella classe "Particle" (.h e .cpp) sono riportati invece i metodi che permettono la propagazione alle particelle e di "compiere azioni" quali la bremsstrahlung o la produzione di coppia.

Poi nella classe "Costants" (.h) sono semplicemente riportate le costanti più usate nella simulazione (e.g. energie di soglia, masse delle particelle, ecc...).

Infine, in "Simulation.C" è presente il ciclo principale di esecuzione del programma. Il funzionamento di tale ciclo è quello che segue.

Si parte con una particella (raggio gamma) ad una certa energia E . Questo gamma, e tutti quelli che verranno creati nella simulazione, fanno creazione di coppia ad una distanza fissa pari a:

$$x = \frac{7}{9} \tilde{x}_0. \quad (5)$$

come noto da manuali. Si hanno dunque un elettrone ed un positrone che verranno trasportati singolarmente per vedere se e quando interagiscono. Si è proceduto estraendo

casualmente un valore di energia tra 1 keV ed E_e (energia dell'elettrone/positrone generatore). Il valore minimo è stato scelto arbitrariamente decidendo di ignorare i raggi gamma di energia inferiore al keV mentre il valore massimo è stato scelto uguale ad E_e per una ovvia conservazione di energia. Da (1), nota l'energia dell'elettrone/positrone E_e , ricavo il libero cammino medio d ponendo $N_\gamma = 1$ e $k_{min}, k_{max} = 1 \text{ keV}, E_e$. Il risultato, che ci dà quindi la distanza entro la quale ho per certo la produzione di un raggio gamma, lo si usa come coefficiente di una distribuzione esponenziale con coefficiente d da cui si estrae randomicamente la distanza in cui consideriamo emesso il fotone. Ho quindi la distanza in cui viene emesso un γ di bremsstrahlung di energia estratta, di nuovo randomicamente, tra 1 keV ed E_e . Bisogna ora valutare se questa energia estratta risulta superiore a 10 MeV (ovvero è in grado di fare produzione di coppie). In caso affermativo, si genererà appunto un fotone di energia pari all'energia estratta e si toglierà questa energia all'elettrone generatore. In caso contrario, non si genera il fotone (che "morirà subito" in quanto non sarà in grado di fare neanche una volta produzione di coppia) ma si conserva lo stesso l'energia sottraendo l'energia estratta per il fotone, all'energia dell'elettrone generatore. Questo processo viene fatto per ogni elettrone che si viene a creare nello sciame con energia sufficiente per fare bremsstrahlung (energia che di volta in volta andrà a diminuire) ed in ogni distanza estratta casualmente da una distribuzione esponenziale di coefficiente d . A livello di codice, ogni particella viene trasportata e si valuta, in generale, se essa interagisce o no.

Se non interagisce, ma ha energia sufficiente per farlo (i.e. energia sopra soglia), viene portata avanti di uno step ed il ciclo ricomincia. Se l'energia è sotto soglia, inizia il processo di riassorbimento in funzione del tipo di particella in esame (come è stato riportato nel paragrafo precedente).

Se interagisce, si immagazzinano i prodotti:

1. "elettrone e positrone" nel caso di produzione di coppia;
2. "particella primaria (elettrone o positrone) e raggio gamma" nel caso di bremsstrahlung da parte di elettrone o positrone.

Per distinguere i casi "1." e "2.", si valuta la presenza o meno del raggio gamma nella coppia di particelle create. In caso affermativo, significa che il fenomeno avvenuto è la bremsstrahlung e dunque l'elettrone/positrone generatore viene mantenuto (con energia pari a quella precedente meno l'energia del gamma emesso). In caso negativo il fenomeno avvenuto è la creazione di coppia ed il ciclo semplicemente si chiude tornando pronto per essere ripetuto. Quanto detto, è mostrato nel diagramma di flusso in Figura 2.

L'immagazzinamento delle particelle, viene fatto attraverso il riempimento, di step in step, di due vector che si aggiornano a vicenda.

3 Compilazione codice

Per la compilazione del codice ...

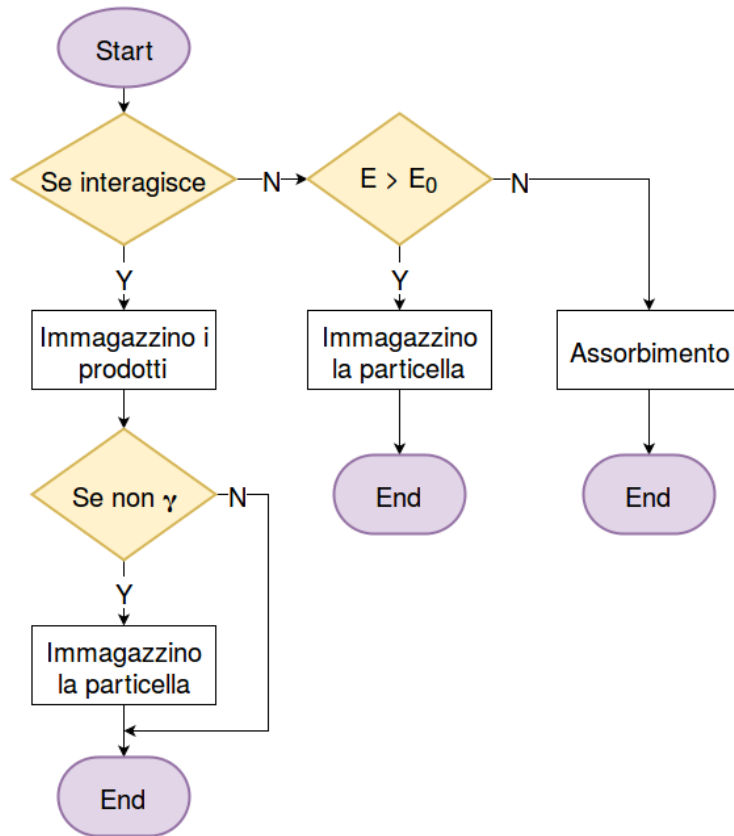


Figura 2: Ciclo principale.

4 Risultati e confronti con altri modelli

Come conferma della bontà della simulazione, si sono paragonati i risultati ottenuti con quelli di altre simulazioni. In particolare si può notare come l'andamento dell'energia per strato atmosferico ottenuto sia in linea con quello ottenuto con simulazioni svolte con Geant4 e come il coefficiente angolare ottenuto dallo studio dell'elongation rate sia effettivamente prossimo a quello stimato nei modelli di Heitler (si veda Appendice B).

MATTERE CONFRONTI TRA FIGURA BELLA NOSTRA CON FIGURA DELL'ARTICOLO E INSERIRE FIT LINEARE CONFRONTANDO IL COEFFICIENTE ANGOLARE CON QUELLO STIMATO NEL MODELLO DI HEITLER.

A Appendici

A.1 Calcolo dell'energia critica e della lunghezza di radiazione per elettroni e positroni in atmosfera

Si consideri un'atmosfera composta da: 78% N_2 , 21% O_2 ed 1% Ar . Da Patrignani et al. (2016) si hanno i seguenti valori:

	x_0 [m]	\tilde{x}_0 [g/cm ²]	E_c [MeV]
N_2 :	326	37.99	e^- : 91.74; e^+ : 89.71
O_2 :	257	34.24	e^- : 81.45; e^+ : 79.62
Ar :	118	19.55	e^- : 38.03; e^+ : 37.06

Da questi valori è possibile ricavare una lunghezza di radiazione \tilde{x}_0 ed una energia critica media per elettroni e positroni in atmosfera:

$$\tilde{x}_0 = \frac{37.99 * 78 + 34.24 * 21 + 19.55 * 1}{78 + 21 + 1} \approx 37.02 \text{ g/cm}^2;$$

$$E_c = \frac{\frac{91.74+89.71}{2} * 78 + \frac{81.45+79.62}{2} * 21 + \frac{38.03+37.06}{2} * 1}{78 + 21 + 1} \approx 88.05 \text{ MeV};$$

che sono i valori utilizzati nella simulazione per gli elettroni ed i positroni.

A.2 Modello di Heitler

Lo sviluppo di uno sciame elettromagnetico, basato su due processi fondamentali (produzione di coppia e bremsstrahlung), è comunemente descritto, con le opportune approssimazioni e semplificazioni, dal modello di Heitler.

Uno sciame E.M. è generato da un γ o un e^\pm che interagisce con l'atmosfera terrestre. La perdita di energia da parte di un γ o un e^\pm in atmosfera è descrivibile da:

$$-\frac{dE}{d\xi} = \frac{E}{\lambda_T} \quad (6)$$

da cui ottengo:

$$E(\xi) = E_0 e^{-\xi/\lambda_T} \quad (7)$$

con λ_T dell'aria che vale $\approx 37 \text{ gcm}^{-2}$. La quantità di materia attraversata dalla particella prima di perdere metà della propria energia è quindi data da:

$$\frac{E(\xi)}{E_0} = \frac{1}{2} = e^{-\xi/\lambda_T} \quad (8)$$

da cui ottengo:

$$\xi = \lambda_T \ln 2. \quad (9)$$

Ciò significa che un e^\pm emette, per bremsstrahlung, un γ dopo avere percorso una distanza di dimezzamento $d = \lambda_T \ln 2$. Un γ dopo avere percorso la stessa distanza (in realtà sarebbe $\lambda_p = 9/7 \lambda_T$ ma approssimo $\lambda_p \approx \lambda_T$) dà origine ad una coppia elettrone positrone.

Considero che, ad ogni interazione, l'energia dei e^\pm (e dei γ) venga divisa *a metà*. Queste sono tutte approssimazioni fatte per semplificare il modello. In Figura 3 è schematizzato lo sviluppo di uno sciame E.M. generato da un γ primario interagente con l'atmosfera.

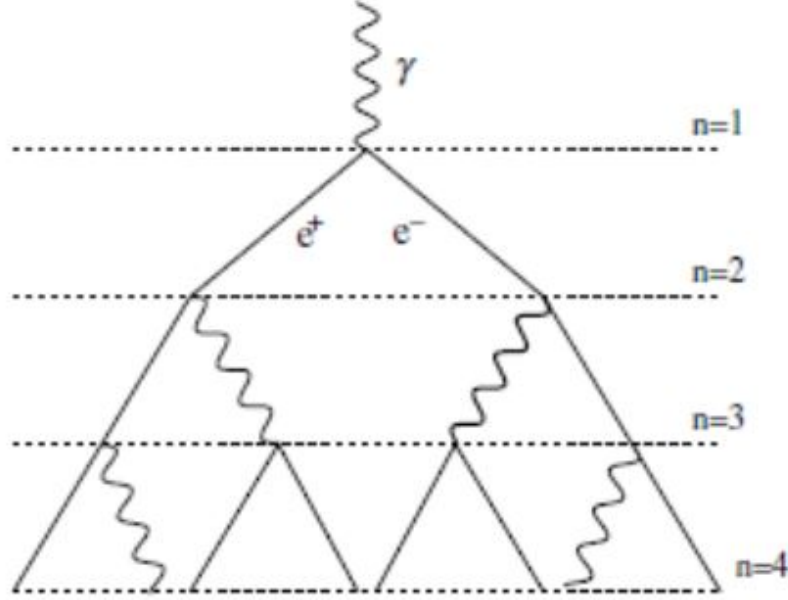


Figura 3: Sviluppo in atmosfera di uno sciame elettromagnetico generato da un γ (dove "n" indica il numero di lunghezze di radiazione, considerate uguali per e^\pm e γ , attraversate dallo sciame).

Consideriamo uno sciame iniziato da un γ di energia E_0 . Dopo n lunghezze di dimezzamento d avremo 2^n particelle di energia $E_0/2^n$ l'una.

Dunque lo spazio percorso dopo n lunghezze di dimezzamento d sarà:

$$X = nd, \quad (10)$$

ma anche che:

$$d = \lambda_T \ln 2; \quad (11)$$

quindi otteniamo:

$$X = n\lambda_T \ln 2; \quad (12)$$

che mi rappresenta appunto la profondità a cui mi arriva lo sciame.

Poiché $\ln 2 = \log_2 2 / \log_2 e$, ho che il numero di particelle posso scriverlo come:

$$N = 2^n = 2^{X/(\lambda_T \ln 2)} = 2^{\frac{X}{\lambda_T} \log_2 e} = e^{\frac{X}{\lambda_T}}. \quad (13)$$

Il numero di particelle al massimo sviluppo dello sciame (N_{max}), considerando che la moltiplicazione termina quando l'energia delle particelle diventa inferiore dell'energia critica, è:

$$\begin{cases} N_{max} = 2^{n_{critico}} \\ E_0 = N_{max} E_{critico}^\gamma \end{cases} \quad (14)$$

da cui otteniamo:

$$n_{critico} = \frac{1}{\ln 2} \ln \frac{E_0}{E_{critico}^\gamma} \quad (15)$$

e, di conseguenza, si ha che:

- Numero particelle al massimo sviluppo dello sciame: $N_{max} \propto E_0$;
- Profondità di massimo sviluppo: $X_{max} \propto \ln(E_0)$;

dove la proporzionalità per la profondità di massimo sviluppo si trova sostituendo alla (12) il valore di $n_{critico}$ trovato in (15).

Tuttavia raramente gli esperimenti si trovano esattamente al massimo sviluppo di uno sciame. Trovandosi più in basso del massimo dello sciame, misuro principalmente il numero di elettroni presenti in esso. Si trova che il modello descritto sovrastima il numero di elettroni rispetto quello dei γ . Si introduce quindi una costante di attenuazione $g = 10$:

$$N_e = \frac{N_{max}}{g}. \quad (16)$$

Sperimentalmente si misura anche la così detta *elongation rate* che è definita come la crescita di X_{max} in funzione di E_0 :

$$\Delta \equiv \frac{dX_{max}}{d \log E_0} \quad (17)$$

e poiché, come visto, ho che:

$$X_{max} = \lambda_T \ln 10 \log \frac{E_0}{E_{critico}^\gamma} \quad (18)$$

(dove ho usato: $\log_{10} \frac{E_0}{E^\gamma} = \frac{\ln(E_0/E^\gamma)}{\ln 10}$), ottengo:

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{dX_{max}}{d \log E_0} \\ &= \frac{d(\lambda_T \ln 10 \log (E_0/E_{critico}^\gamma))}{d \log E_0} \\ &= \frac{d(2.3\lambda_T(\log E_0 - \log E_{critico}^\gamma))}{d \log E_0} \\ &= 2.3\lambda_T. \end{aligned} \quad (19)$$

Osserviamo quindi che il valore dell'*elongation rate* (che ricordiamo essere la variazione di X_{max} in funzione di E_0) è circa *costante*! Rappresentando quindi X_{max} in funzione del logaritmo in base dieci dell'energia del primario, mi aspetto di ottenere una retta con coefficiente angolare circa pari a 2.3.

Riferimenti bibliografici

S.R. Klein H. Bichsel, D.D. Groom. Passage of particles through matter. Report, University of Washington, January 2012.

- L. Katz and A. S. Penfold. Range-energy relations for electrons and the determination of beta-ray end-point energies by absorption. *Rev. Mod. Phys.*, 24:28–44, Jan 1952. doi: 10.1103/RevModPhys.24.28. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.24.28>.
- C. Patrignani et al. Review of Particle Physics. *Chin. Phys.*, C40(10):100001, 2016. doi: 10.1088/1674-1137/40/10/100001.