Meccanica Classica

Esercitazione 1 – Teoria Propagazione Errori

Alessandro Lodi, D.Phil.

Anno Accademico 2024–2025

Indice

1 Cifre Significative e Incertezza Frazionaria 2

2 Regole per l'Addizione, Sottrazione e Moltiplicazione di Quantità con Incertezze 3

3 Esempio: Aggiunta e Sottrazione di Masse 4

4 Esempio: Propagazione dell'Incertezza da un Singolo Mattone a un Muro 4

5 Note Finali 5

1 Cifre Significative e Incertezza Frazionaria

Il numero di cifre significative in una quantità è un indicatore approssimativo dell'incertezza frazionaria in quella quantità.

Per un matematico, l'affermazione che $\boldsymbol{x} = \mathbf{21}$ **con due cifre significative significa**, in modo univoco, che x è più vicino a 21 che a 20 o 22. Quindi il numero 21 con due cifre significative significa 21 ± 0.5.

Per uno scienziato sperimentale, la maggior parte dei numeri sono valori letti da una strumentazione (o calcolati tramite simulazione). Se un misuratore digitale mostra due cifre significative e indica 21, può significare 21 ± 0.5, ma può anche significare 21 ± 1 o persino 21 ± 5 (tutti i misuratori sono accompagnati da un manuale che spiega le incertezze effettive). In queste circostanze, l'affermazione che un numero misurato ha due cifre significative è solo un'indicazione approssimativa della sua incertezza.

Consideriamo ora due numeri,

$$x = 21 \quad \text{e} \quad y = 0.21,$$

entrambi certificati accurati a due cifre significative. Secondo la convenzione appena concordata, questi valori significano

$$x = 21 \pm 1 \quad \text{e} \quad y = 0.21 \pm 0.01.$$

Sebbene i due numeri abbiano entrambi due cifre significative, presentano evidentemente incertezze molto diverse. D'altra parte, entrambi hanno la stessa incertezza frazionaria, che in questo caso è del 5%:

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta y}{y} = \frac{1}{21} = \frac{0.01}{0.21} = 0.05 \quad \text{ovvero } 5\%.$$

Pertanto, l'affermazione che i numeri 21 e 0.21 (o 210, o 2.1, o 0.0021, ecc.) abbiano due cifre significative è equivalente a dire che sono incerti al 5%. Allo stesso modo, 21.0, con tre cifre significative, è incerto allo 0.5%, e così via.

Purtroppo, questa utile connessione è solo approssimativa. Ad esempio, l'affermazione che $s = 10$, con due cifre significative, significa

$$s = 10 \pm 1 \quad \text{ovvero } 10\%.$$

All'estremo opposto, $t = 99$ (ancora con due cifre significative) significa

$$t = 99 \pm 1 \quad \text{ovvero } 1\%.$$

Evidentemente, l'incertezza frazionaria associata a due cifre significative varia dall'1% al 10%, a seconda della prima cifra del numero considerato.

La corrispondenza approssimativa tra cifre significative e incertezze frazionarie può essere riassunta come nella Tabella 1.

Tabella 1: Corrispondenza approssimata tra cifre significative e incertezze frazionarie

Numero di Cifre Significative	**La corrispondente incertezza frazionaria è tra**	**Approssivatimamente**
1	10% and 100%	50%
2	1% and 10%	5%
3	0.1% and 1%	0.5%

2 Regole per l'Addizione, Sottrazione e Moltiplicazione di Quantità con Incertezze

Quando si combinano due o più quantità misurate, è fondamentale propagare correttamente le incertezze associate per ottenere una stima accurata dell'incertezza del risultato. Di seguito sono riportate le regole fondamentali per l'addizione, la sottrazione e la moltiplicazione di quantità con incertezze.

Addizione e Sottrazione

Quando si aggiungono o si sottraggono due quantità, le incertezze assolute si sommano. Supponiamo di avere due quantità misurate A e B con incertezze assolute ΔA e ΔB rispettivamente. Allora, la somma $C = A + B$ e la differenza $D = A - B$ avranno incertezze date da:

$$\Delta C = \Delta A + \Delta B$$
$$\Delta D = \Delta A + \Delta B$$

Moltiplicazione e Divisione

Quando si moltiplicano o si dividono due quantità, le incertezze relative (frazionali) si sommano. Supponiamo di avere due quantità misurate A e B con incertezze relative $\frac{\Delta A}{A}$ e $\frac{\Delta B}{B}$ rispettivamente. Allora, il prodotto $C = A \times B$ e il rapporto $D = \frac{A}{B}$ avranno incertezze relative date da:

$$\frac{\Delta C}{C} = \frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta B}{B}$$
$$\frac{\Delta D}{D} = \frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta B}{B}$$

Esempi

- **Addizione**: Se $A = 10 \pm 0.5$ e $B = 20 \pm 1.0$, allora:

$$C = A + B = 30 \pm (0.5 + 1.0) = 30 \pm 1.5$$

- **Moltiplicazione**: Se $A = 5.0 \pm 0.1$ e $B = 3.0 \pm 0.2$, allora:

$$\frac{\Delta A}{A} = \frac{0.1}{5.0} = 0.02 \quad (2\%)$$

$$\frac{\Delta B}{B} = \frac{0.2}{3.0} \approx 0.067 \quad (6.7\%)$$

$$\frac{\Delta C}{C} = 0.02 + 0.067 = 0.087 \quad (8.7\%)$$

$$C = A \times B = 15.0 \pm 1.3$$

3 Esempio: Aggiunta e Sottrazione di Masse

Come ulteriore esempio supponiamo che siate in laboratio di Chimica e volete miscelare i liquidi contneuti in due matracci distinti. Avete (giustamente) misurato le masse dei matracci quando erano vuoti e ora che sono pieni. L'obbiettivo della misura è trovare la massa totale del liquido e di esprimerla con la sua incertezza. I dati sono:

- M_1 = massa del primo matraccio e del contenuto = 540 ± 10 g
- m_1 = massa del primo matraccio vuoto = 72 ± 1 g
- M_2 = massa del secondo matraccio e del contenuto = 940 ± 20 g
- m_2 = massa del secondo matraccio vuoto = 97 ± 1 g

Calcolo quindi la massa totale del liquido:

$$M = M_1 - m_1 + M_2 - m_2$$

$$= (540 - 72 + 940 - 97)\text{g} = 1\,311 \text{ g}.$$

Per quanto visto prima, l'incertezza in questa risposta è la somma di tutte e quattro le incertezze,

$$(10 + 1 + 20 + 1) \text{ g} = 32 \text{ g}.$$

Pertanto, la massa totale del liquido (correttamente arrotondata) è:

$$\text{massa totale del liquido} = 1\,310 \pm 30 \text{ g}.$$

4 Esempio: Propagazione dell'Incertezza da un Singolo Mattone a un Muro

Le proprietà degli errori tornano molto comode quando si devono stimare velocemente le incertezze di quantità derivate da prodotti o divisioni. Consideriamo la misurazione dell'altezza di un singolo mattone:

$$(\text{altezza di un mattone}) = h = 10.0 \pm 0.1 \text{ cm}$$

Se voglio conoscere l'incertezza associata all' altezza di un muro composto da 50 strati di questi mattoni, non devo fare altro che moltiplicare h e la sua incertezza per 50:

$$H = 50 \times h = 500 \pm 5 \text{ cm}$$

Questo dimostra anche come piccole incertezze nelle misurazioni individuali si accumulino in incertezze maggiori finali. In questo caso, l'incertezza nell'altezza del muro è 50 volte l'incertezza nella misurazione di un singolo mattone.

5 Note Finali

Il contenuto esposto è stato riadattato dal libro *Error Analysis: The Study of Uncertainties in Physical Measurements* di John R. Taylor (University Science Books, 1997). La lettura del testo è consigliata per ulteriori approfondimenti.