Meccanica Classica

Esercitazione 1 – Teoria Vettori

Alessandro Lodi, D.Phil.

Anno Accademico 2024–2025

Indice

1 Definizione di Vettori

Un **vettore** è una quantità matematica che in fisica viene associata:

- Una **magnitudine (o modulo):** la lunghezza o intensità del vettore.
- Una **Direzione:** la retta lungo cui si trova il vettore (o l'angolo rispetto a un asse di riferimento).
- Un **Verso:** il "lato" della direzione verso cui il vettore è orientato

Questo contrasta con gli **scalari**, che hanno solo magnitudine (ad esempio, temperatura, massa). Qua sotto vi riporto una serie di grandezze vettoriali spesso incontrate in fisica.

- Spostamento
- Velocità
- Accelerazione
- Forza
- Quantità di moto (Momentum)
- Campi Elettrici e Magnetici

2 Rappresentazione dei Vettori

I vettori possono essere rappresentati in diversi modi:

- **Graficamente:** Come frecce in un sistema di coordinate, dove la lunghezza rappresenta la magnitudine e la freccia indica la direzione (e il verso).
- **Forma Componenti:** Scomposizione di un vettore nelle sue componenti lungo gli assi di coordinate, tipicamente espressa come

  $$\mathbf{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k},$$

  in tre dimensioni.
- **Coordinate Polari:** Utilizzando magnitudine e angolo, specialmente in due dimensioni. Ad esempio:

  $$\mathbf{A} = A\angle\theta.$$

  .

3 Addizione e Sottrazione di Vettori

3.1 Addizione

- **Metodo Grafico:** Utilizzando il metodo **testa-coda** o il metodo del **parallelogramma**.
- **Metodo delle Componenti:** Sommando le componenti corrispondenti:

  $$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (A_x + B_x)\hat{\imath} + (A_y + B_y)\hat{\jmath} + (A_z + B_z)\hat{k}$$

3.2 Sottrazione

Sottrarre vettori equivale ad aggiungere il negativo:

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B})$$

3.3 Proprietà

- **Commutativa:**
$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$$
- **Associativa:**
$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$$

4 Componenti dei Vettori

I vettori vengono spesso scomposti in componenti lungo assi mutuamente perpendicolari (solitamente coordinate cartesiane: x, y e z):

$$\mathbf{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}.$$

Che vantaggi offre la seguente modellizzazione? Diversi, e qui ve ne riporto alcuni su cui vale la pena riflettere:

- Semplifica operazioni vettoriali come addizione, sottrazione e moltiplicazione.
- Facilita la risoluzione di problemi fisici trattando ogni componente separatamente.

Questi due punti sono anche quelli che più di frequente vi ho menzionato a lezione

5 Vettori Unitari

I **vettori unitari** sono vettori con magnitudine pari a uno, utilizzati per indicare la direzione:

- Tipicamente denotati come $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ e $\hat{k}$ lungo gli assi x, y e z rispettivamente.
- Qualsiasi vettore può essere espresso come combinazione di vettori unitari moltiplicati per le sue componenti.

Esempio:
$$\mathbf{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}$$

6 Prodotto Scalare

Il **prodotto scalare** (in inglese *dot product* combina due vettori per produrre uno scalare:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| \cos\theta$$

Dove θ è l'angolo tra **A** e **B**.

6.1 Forma Componenti

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

6.2 Applicazioni

- Calcolo del lavoro compiuto:
$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{d}$$
- Determinazione dell'angolo tra vettori

7 Prodotto Vettoriale

Il **prodotto vettoriale** (in inglese *cross product*) di due vettori risulta in un terzo vettore perpendicolare a entrambi:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| \sin\theta\, \hat{n}$$

Dove $\hat{n}$ è il vettore unitario perpendicolare al piano contenente $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$, seguendo la regola della mano destra.

7.1 Forma Componenti

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_y B_z - A_z B_y)\hat{\imath} + (A_z B_x - A_x B_z)\hat{\jmath} + (A_x B_y - A_y B_x)\hat{k}$$

7.2 Applicazioni

- Calcolo della coppia (in inglese *torque*):
$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$
- Determinazione del momento angolare

8 Magnitudine di un Vettore

La **magnitudine** (o lunghezza) di un vettore $\mathbf{A}$ è data da:

$$|\mathbf{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

Questo deriva dal teorema di Pitagora in tre dimensioni.

9 Direzione di un Vettore

La **direzione** di un vettore può essere specificata mediante angoli relativi agli assi di coordinate o tramite vettori unitari. In due dimensioni, l'angolo θ rispetto all'asse positivo x è comunemente usato:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{A_y}{A_x}\right)$$

10 Spazi Vettoriali e Vettori Base

I vettori in fisica spesso esistono all'interno di uno **spazio vettoriale**, una struttura matematica che consente l'addizione di vettori e la moltiplicazione scalare. Una **base** è un insieme di vettori linearmente indipendenti che spaziano lo spazio, permettendo di esprimere qualsiasi vettore nello spazio come combinazione lineare dei vettori base. La base di gran lunga più usata (e l'unica che vedremo in questo corso) è la **base cartesiana**:

- **Base Cartesiana:** $\{\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}\}$ nello spazio tridimensionale.

11 Applicazioni in Fisica

I vettori sono indispensabili in diverse aree della fisica:

- **Meccanica:** Descrizione di forze, velocità, accelerazioni e quantità di moto.
- **Elettromagnetismo:** Rappresentazione dei campi elettrici e magnetici.
- **Meccanica Quantistica (Avanzato):** Vettori di stato nello spazio di Hilbert.
- **Relatività (Avanzato):** quadri-vettori che combinano dimensioni spaziali e temporali.

12 Proiezione di Vettori

Proiettare un vettore su un altro implica trovare la componente di un vettore nella direzione dell'altro:

$$\text{Proiezione di } \mathbf{A} \text{ su } \mathbf{B} = \left(\frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{|\mathbf{B}|^2}\right)\mathbf{B}$$

Questo concetto è utile per risolvere forze, velocità e altre quantità vettoriali in componenti.

13 Menzione al Calcolo Vettoriale Avanzato

Nei temi avanzati di fisica, i vettori si estendono al calcolo con operazioni come:

- **Gradiente (∇):** Misura il tasso e la direzione di cambiamento nei campi scalari.
- **Divergenza ($\nabla\cdot$):** Misura la magnitudine di una sorgente o di un pozzo in un punto dato di un campo vettoriale.
- **Rotore ($\nabla\times$):** Misura la rotazione di un campo vettoriale attorno a un punto.

Queste operazioni sono fondamentali nell'elettromagnetismo, nella dinamica dei fluidi e in altri campi.