Meccanica Classica

Esercitazione 1 – Esercizi Vettori

Alessandro Lodi, D.Phil.

Anno Accademico 2024–2025

Indice

1 Addizione di Vettori in Due Dimensioni

1.1 Problema

Data la seguente coppia di vettori:

- **Vettore A** ha componenti $A_x = 3$ e $A_y = 4$.
- **Vettore B** ha componenti $B_x = -2$ e $B_y = 5$.

Calcola

1. Il vettore somma $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ espresso in forma delle componenti.
2. La magnitudine del vettore $\mathbf{C}$.

1.2 Soluzione

1. **Calcolo del Vettore Somma C**:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = (A_x + B_x)\hat{\imath} + (A_y + B_y)\hat{\jmath}$$

Sostituendo i valori:

$$C_x = 3 + (-2) = 1$$

$$C_y = 4 + 5 = 9$$

Quindi,

$$\mathbf{C} = 1\,\hat{\imath} + 9\,\hat{\jmath}$$

2. **Calcolo della Magnitudine di C**:

$$|\mathbf{C}| = \sqrt{C_x^2 + C_y^2} = \sqrt{1^2 + 9^2} = \sqrt{1 + 81} = \sqrt{82} \approx 9.055\,\text{unità}$$

Risultato:

- Vettore Somma $\mathbf{C} = 1\,\hat{\imath} + 9\,\hat{\jmath}$
- Magnitudine di $\mathbf{C} \approx 9.055$ unità

2 Moltiplicazione Scalari di un Vettore

2.1 Problema

Dato il vettore $\mathbf{D} = 4\,\hat{\imath} - 3\,\hat{\jmath}$, esegui le seguenti operazioni:

1. Moltiplica il vettore **D** per lo scalare $k = 2$. Il nuovo vettore verrà chiamato **E**
2. Calcola la magnitudine del vettore **E**.

2.2 Soluzione

1. **Moltiplicazione del Vettore D per lo Scalare** $k = 2$:

$$\mathbf{E} = k \cdot \mathbf{D} = 2 \cdot (4\,\hat{\imath} - 3\,\hat{\jmath}) = 8\,\hat{\imath} - 6\,\hat{\jmath}$$

2. **Calcolo della Magnitudine di E**:

$$|\mathbf{E}| = \sqrt{(8)^2 + (-6)^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10\,\text{unità}$$

Risultato:

- Vettore Risultante $\mathbf{E} = 8\,\hat{\imath} - 6\,\hat{\jmath}$
- Magnitudine di $\mathbf{E} = 10$ unità

3 Calcolo della Magnitudine di un Vettore

3.1 Problema

Calcola la magnitudine dei seguenti vettori:

1. $\mathbf{F} = -5\,\hat{\imath} + 12\,\hat{\jmath}$
2. $\mathbf{G} = 7\,\hat{\imath} - 24\,\hat{\jmath}$

3.2 Soluzione

1. **Magnitudine di F**:

$$|\mathbf{F}| = \sqrt{(-5)^2 + (12)^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13\,\text{unità}$$

2. **Magnitudine di G**:

$$|\mathbf{G}| = \sqrt{7^2 + (-24)^2} = \sqrt{49 + 576} = \sqrt{625} = 25\,\text{unità}$$

Risultato:

- $|\mathbf{F}| = 13$ unità
- $|\mathbf{G}| = 25$ unità

4 Determinazione della Direzione di un Vettore

4.1 Problema

Dato il vettore $\mathbf{H} = 6\,\hat{\imath}+8\,\hat{\jmath}$, determina l'angolo θ che il vettore forma con l'asse x positivo.

4.2 Soluzione

La direzione del vettore $\mathbf{H}$ rispetto all'asse x è data da:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{H_y}{H_x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{8}{6}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) \approx 53.13$$

Risultato:

- L'angolo $\theta \approx 53.13$ sopra l'asse x positivo.

5 Proprietà del Vettore Zero e Vettore Opposto

5.1 Problema

Considera il vettore $\mathbf{J} = 9\,\hat{\imath} - 12\,\hat{\jmath}$. Esegui le seguenti operazioni:

1. Trova il vettore opposto $-\mathbf{J}$.
2. Verifica che la somma di $\mathbf{J}$ e $-\mathbf{J}$ dia il vettore zero.
3. Calcola la magnitudine del vettore zero.

5.2 Soluzione

1. **Determinazione del Vettore Opposto $-\mathbf{J}$:**

$$-\mathbf{J} = -(9\,\hat{\imath} - 12\,\hat{\jmath}) = -9\,\hat{\imath} + 12\,\hat{\jmath}$$

2. **Verifica della Somma $\mathbf{J} + (-\mathbf{J})$:**

$$\mathbf{J} + (-\mathbf{J}) = (9\,\hat{\imath} - 12\,\hat{\jmath}) + (-9\,\hat{\imath} + 12\,\hat{\jmath}) = (9 - 9)\,\hat{\imath} + (-12 + 12)\,\hat{\jmath} = 0\,\hat{\imath} + 0\,\hat{\jmath} = \mathbf{0}$$

Conferma: La somma di $\mathbf{J}$ e $-\mathbf{J}$ è il vettore zero.

3. **Calcolo della Magnitudine del Vettore Zero $\mathbf{0}$:**

$$|\mathbf{0}| = \sqrt{0^2 + 0^2} = \sqrt{0} = 0\,\text{unità}$$

Risultato:

- Vettore Opposto $-\mathbf{J} = -9\,\hat{\imath} + 12\,\hat{\jmath}$
- Somma $\mathbf{J} + (-\mathbf{J}) = \mathbf{0}$
- Magnitudine del Vettore Zero $|\mathbf{0}| = 0$ unità

6 Addizione e Sottrazione di Vettori

6.1 Problema

Due forze agiscono su una particella:

- **Forza $\mathbf{F}_1$** ha una magnitudine di 50 N diretta verso est.
- **Forza $\mathbf{F}_2$** ha una magnitudine di 30 N diretta a 60° nord di est.

Porta a termine le seguenti richieste:

1. Rappresenta entrambe le forze in forma componenti. Per fare questo dovrai fissare un sistema di riferimento. A lezione chiederò di motivare la tua scelta.
2. Calcola la forza risultante $\mathbf{F}_R = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$ in forma componenti.
3. Determina la magnitudine e la direzione della forza risultante.

NB: la soluzione dell'esercizio non richiede alcuna conoscenza pregressa riguardo alla forza meccanica e argomenti affini. Nel dubbio, come sempre e comunque, Google è vostro amico.

6.2 Soluzione

1. **Rappresentazione delle Forze in Forma Componenti**
   - **Forza $\mathbf{F}_1$**:
     - Diretta verso est, che prenderemo come direzione positiva lungo l'asse x.
     $$\mathbf{F}_1 = 50\,\mathrm{N}\,\hat{\imath}$$
   - **Forza $\mathbf{F}_2$**:
     - Magnitudine: 30 N
     - Direzione: 60° nord di est
     - Componenti:
     $$F_{2x} = 30\cos 60 = 30 \times 0.5 = 15\,\mathrm{N}$$
     $$F_{2y} = 30\sin 60 = 30 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 25.98\,\mathrm{N}$$
     $$\mathbf{F}_2 = 15\,\mathrm{N}\,\hat{\imath} + 25.98\,\mathrm{N}\,\hat{\jmath}$$
2. **Calcolo della Forza Risultante $\mathbf{F}_R$**
   $$\mathbf{F}_R = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = (50\,\mathrm{N} + 15\,\mathrm{N})\,\hat{\imath} + (0\,\mathrm{N} + 25.98\,\mathrm{N})\,\hat{\jmath} = 65\,\mathrm{N}\,\hat{\imath} + 25.98\,\mathrm{N}\,\hat{\jmath}$$
3. **Magnitudine e Direzione di $\mathbf{F}_R$**
   - **Magnitudine:**
   $$|\mathbf{F}_R| = \sqrt{(65)^2 + (25.98)^2} \approx \sqrt{4225 + 674.9} \approx \sqrt{4899.9} \approx 70\,\mathrm{N}$$
   - **Direzione:**
   $$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{25.98}{65}\right) \approx \tan^{-1}(0.3997) \approx 21.8 \text{ nord di est}$$

   Forza Risultante: Circa **70 N** diretta **21.8° nord di est**.

7 Prodotto Scalare e Lavoro Compito

7.1 Problema

Una forza **F** di 10 N è applicata a un angolo di 30° rispetto all'orizzontale. La forza muove un oggetto orizzontalmente di 5 metri. Ti chiedo di:

1. Esprimere la forza **F** in forma estesa delle sue componenti.
2. Calcolare il lavoro compiuto dalla forza usando il prodotto scalare. Il lavoro compiuto da una forza non è altro che il prodotto della forza e lo spostamento che essa provoca. Forza e spostamento sono vettori.

7.2 Soluzione

1. **Esprimere la Forza F in Forma Componenti**
   - Magnitudine: 10 N
   - Direzione: 30° sopra l'orizzontale (asse x positivo)
   - **Componenti:**

$$F_x = 10 \cos 30 = 10 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 8.66\,\mathrm{N}$$
$$F_y = 10 \sin 30 = 10 \times 0.5 = 5\,\mathrm{N}$$

$$\mathbf{F} = 8.66\,\mathrm{N}\,\hat{\imath} + 5\,\mathrm{N}\,\hat{\jmath}$$

2. **Calcolo del Lavoro Compito Usando il Prodotto Scalare**
   - **Spostamento d**: 5 metri orizzontalmente

$$\mathbf{d} = 5\,\mathrm{m}\,\hat{\imath}$$

   - **Lavoro Compito** W:

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{d} = (8.66\,\mathrm{N}\,\hat{\imath} + 5\,\mathrm{N}\,\hat{\jmath}) \cdot (5\,\mathrm{m}\,\hat{\imath}) = (8.66 \times 5) + (5 \times 0) = 43.3\,\mathrm{J}$$

   Lavoro Compito: 43.3 joule

8 Prodotto Vettoriale e Coppia (Torque)

8.1 Problema

Una forza **F** di 15 N è applicata in un punto situato a 0.4 metri dal perno. La forza è applicata perpendicolarmente alla leva.

Compiti:

1. Esprimi la forza **F** e il vettore posizione **r** in forma componenti.
2. Calcola la coppia $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$.

8.2 Soluzione

1. **Esprimere F e r in Forma Componenti**
   - Poiché la forza è applicata perpendicolarmente alla leva, assumiamo:
     - **Vettore Posizione r**: lungo l'asse x
       $$\mathbf{r} = 0.4\,\mathrm{m}\,\hat{\imath}$$
     - **Forza F**: perpendicolare a **r**, lungo l'asse y
       $$\mathbf{F} = 15\,\mathrm{N}\,\hat{\jmath}$$
2. **Calcolo della Coppia $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$**
   - Utilizzando il prodotto vettoriale:
     $$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r}\times\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \end{vmatrix} = \hat{\imath}(0\times0-15\times0)-\hat{\jmath}(0.4\times0-0\times0)+\hat{k}(0.4\times15-0\times0)$$
     $$\boldsymbol{\tau} = 0\,\hat{\imath} - 0\,\hat{\jmath} + 6\,\hat{k} = 6\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}\,\hat{k}$$

   Coppia: 6 N·m diretta **fuori dal piano** (assumendo che $\hat{k}$ sia fuori dal piano).

9 Proiezione di Vettori

9.1 Problema

Il vettore **A** ha componenti $A_x = 12\,\mathrm{m/s}$ e $A_y = 5\,\mathrm{m/s}$. Il vettore **B** ha componenti $B_x = 3\,\mathrm{m/s}$ e $B_y = 4\,\mathrm{m/s}$.

Compiti:

1. Trova la proiezione di **A** su **B**.
2. Calcola la magnitudine di questa proiezione.

9.2 Soluzione

1. **Proiezione di A su B**

   La formula della proiezione:

   $$\text{Proiezione}_{\mathbf{B}}\mathbf{A} = \left(\frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{|\mathbf{B}|^2}\right)\mathbf{B}$$

   - **Prodotto Scalare $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$**:

     $$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = (12)(3) + (5)(4) = 36 + 20 = 56\,\mathrm{m^2/s^2}$$

   - **Magnitudine di B**:

     $$|\mathbf{B}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5\,\mathrm{m/s}$$
     $$|\mathbf{B}|^2 = 25\,\mathrm{m^2/s^2}$$

   - **Proiezione:**

     $$\text{Proiezione}_{\mathbf{B}}\mathbf{A} = \left(\frac{56}{25}\right)\mathbf{B} = 2.24 \times (3\,\hat{\imath} + 4\,\hat{\jmath}) = 6.72\,\hat{\imath} + 8.96\,\hat{\jmath}\ \mathrm{m/s}$$

2. **Magnitudine della Proiezione**

   $$|\text{Proiezione}_{\mathbf{B}}\mathbf{A}| = \left|\frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{|\mathbf{B}|}\right| = \frac{56}{5} = 11.2\,\mathrm{m/s}$$

   Proiezione di A su B: Vettore $6.72\,\hat{\imath} + 8.96\,\hat{\jmath}$ **m/s** con una magnitudine di **11.2 m/s**.

10 Componenti Vettoriali nel Moto

Nota Preventiva: Questo problema contiene argomenti che non abbiamo ancora reviewato a lezione. Non vi preoccupate se non siete in grado di risolverlo totalmente (in fisica molto spesso succede proprio così). Provate comunque a chiaritevi che tipo di moto meglio descrive questa situazione fisica, se la descrizione più accurata è fornita da un moto uniforme o un moto con una accelerazione/decelerazione.

10.1 Problema

Un proiettile viene lanciato con una velocità iniziale di $v_0 = 20\,\mathrm{m/s}$ a un angolo di 45 sopra l'orizzontale. Soddisfa le seguenti richieste

1. Scomponi la velocità iniziale nelle sue componenti orizzontali e verticali.
2. Determina il tempo di volo.
3. Calcola l'altezza massima raggiunta dal proiettile.
4. Trova la gittata orizzontale del proiettile.

Assumi resistenza dell'aria trascurabile e $g = 9.81\,m/s^2$.

10.2 Soluzione

1. **Scomposizione della Velocità Iniziale nelle Componenti**

   - **Componente Orizzontale** (v_{0x}):

   $$v_{0x} = v_0 \cos 45 = 20 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 14.14\,\mathrm{m/s}$$

   - **Componente Verticale** (v_{0y}):

   $$v_{0y} = v_0 \sin 45 = 20 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 14.14\,\mathrm{m/s}$$

   - **Componenti:**

   $$\mathbf{v}_0 = 14.14\,\mathrm{m/s}\,\hat{\imath} + 14.14\,\mathrm{m/s}\,\hat{\jmath}$$

2. **Tempo di Volo**

   - Il tempo per raggiungere il punto più alto:

   $$t_{\mathrm{up}} = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{14.14}{9.81} \approx 1.443\,\mathrm{s}$$

   - Tempo totale di volo:

   $$t_{\mathrm{totale}} = 2 \times t_{\mathrm{up}} \approx 2.886\,\mathrm{s}$$

3. **Altezza Massima Raggiunta**

   $$h_{\max} = \frac{v_{0y}^2}{2g} = \frac{(14.14)^2}{2 \times 9.81} \approx \frac{200}{19.62} \approx 10.2\,\mathrm{m}$$

4. **Gittata Orizzontale del Proiettile**

$$\text{Gittata} = v_{0x} \times t_{\text{totale}} \approx 14.14 \times 2.886 \approx 40.8\,\text{m}$$

Riepilogo:

- **Componenti della Velocità Iniziale:** $14.14\,\hat{\imath}$ m/s (orizzontale), $14.14\,\hat{\jmath}$ m/s (verticale)
- **Tempo di Volo:** Circa **2.89 secondi**
- **Altezza Massima:** Circa **10.2 metri**
- **Gittata Orizzontale:** Circa **40.8 metri**

11 (Avanzato) Dimostrazione Che Non Sei il Centro dell' Universo

Il seguente problema è stato preso da un noto testo di metodi matematici della fisica, oggi alla settima ristampa e considerato un classico del settore. Vi lascio qui il link. Per i più curiosi, metodi matematici della fisica tratta di strumenti e tecniche matematiche usati per descrivere, analizzare e risolvere i problemi della fisica. In maniera del tutto generale si può dire che sono essenziali per tradurre fenomeni fisici (dai semplici ai più complessi) in modelli matematici che catturino l'essenza del fenomeno stesso. Questi modelli vengono poi usati per fare previsioni sui comportamenti dalla natura.

11.1 Problema

La legge di Hubble afferma che le galassie lontane si stanno allontanando con una velocità proporzionale alla loro distanza da noi sulla Terra. Per la i-esima galassia,

$$\mathbf{v}_i = H\,\mathbf{r}_i$$

dove $\mathbf{v}_i$ è la velocità di recessione, H è la costante di Hubble e r_i è la distanza dalla Terra. Dimostra che questa recessione delle galassie non implica che noi siamo al centro dell'universo. In particolare, considera la galassia a $\mathbf{r}_i$ come un nuovo origine e mostra che la legge di Hubble è ancora valida.

11.2 Soluzione

Per dimostrare che l'osservazione delle galassie in recessione non implica che noi siamo al centro dell'universo, consideriamo una trasformazione del sistema di coordinate. Prendiamo la galassia i con posizione $\mathbf{r}_i$ come nuovo origine e dimostriamo che la legge di Hubble rimane invariata in questo nuovo sistema.

Sistema di Coordinate Originale

Consideriamo il sistema di coordinate originale con noi sulla Terra al'origine O. Per la i-esima galassia, la velocità di recessione è data da:

$$\mathbf{v}_i = H\,\mathbf{r}_i$$

dove:

- $\mathbf{v}_i$ è il vettore velocità della galassia i.
- H è la costante di Hubble.
- $\mathbf{r}_i$ è il vettore posizione della galassia i rispetto a noi.

11.3 Trasformazione al Nuovo Sistema di Coordinate

Supponiamo di prendere la galassia i come nuovo origine O'. La posizione di un'altra galassia j nel sistema originale è $\mathbf{r}_j$. Nel nuovo sistema di coordinate, la posizione della galassia j relativa alla galassia i è:

$$\mathbf{r}'_j = \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i$$

Analogamente, la velocità della galassia j relativa alla galassia i è:

$$\mathbf{v}'_j = \mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i$$

11.4 Applicazione della Legge di Hubble nel Nuovo Sistema

Usiamo la legge di Hubble nel sistema originale per entrambe le galassie i e j:

$$\mathbf{v}_i = H\,\mathbf{r}_i$$

$$\mathbf{v}_j = H\,\mathbf{r}_j$$

Sostituendo queste espressioni nella formula della velocità relativa:

$$\mathbf{v}'_j = \mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i = H\,\mathbf{r}_j - H\,\mathbf{r}_i = H(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) = H\,\mathbf{r}'_j$$

Quindi, abbiamo:

$$\mathbf{v}'_j = H\,\mathbf{r}'_j$$

11.5 Conclusione

Abbiamo dimostrato che, anche prendendo una galassia i come nuovo origine O', la legge di Hubble si applica ancora:

$$\mathbf{v}'_j = H\,\mathbf{r}'_j$$

Questo significa che la velocità di recessione della galassia j rispetto alla galassia i è proporzionale alla loro distanza relativa. Pertanto, nessuna galassia è in una posizione privilegiata come centro dell'universo, e ogni osservatore (in qualsiasi galassia) percepisce le altre galassie allontanarsi da sé secondo la legge di Hubble.

12 Interpretazione Fisica

La dimostrazione matematica conferma che la legge di Hubble è valida in qualsiasi sistema di coordinate scelto, indicando che l'universo è omogeneo e isotropo su larga scala. Non esiste un centro preferenziale nell'universo, e ogni galassia può considerarsi come origine del proprio sistema di riferimento senza contraddizioni con le osservazioni cosmologiche.