

## Über die Streuung von Strahlung durch freie Elektronen nach der neuen relativistischen Quantendynamik von Dirac.

Von **O. Klein** und **Y. Nishina** in Kopenhagen.

(Eingegangen am 30. Oktober 1928.)

Auf Grund der neuen, von Dirac entwickelten relativistischen Quantendynamik wird die Intensität der Comptonstreuung berechnet. Das Resultat zeigt Abweichungen von den entsprechenden Dirac-Gordonschen Formeln, die von der zweiten Größenordnung hinsichtlich des Verhältnisses der Energie des primären Lichtquants zu der Ruheenergie des Elektrons sind.

Einleitung. Auf Grundlage der älteren Form der relativistischen Quantenmechanik haben Dirac\* und Gordon\*\* eine Theorie der Intensität und Polarisation der Comptonstreuung entwickelt, die für nicht zu kurzwellige Strahlung in guter Übereinstimmung mit der Erfahrung zu sein scheint. Nach der kürzlich von Dirac\*\*\* entwickelten neuen relativistischen Quantendynamik, bei der die mit der Eigenrotation des Elektrons zusammenhängenden Erscheinungen von selbst berücksichtigt werden, hat sich die Grundlage für eine Theorie der Streuung des Lichtes an freien Elektronen geändert, und man kann erwarten, daß auch die Endresultate der Dirac-Gordonschen Theorie des Comptoneffekts hiervon beeinflusst werden. In der vorliegenden Arbeit haben wir versucht, das Problem der Streustrahlung bei freien Elektronen auf Grundlage von Diracs neuer Dynamik des Elektrons in Angriff zu nehmen. Wir haben uns hierbei der von Gordon gegebenen Behandlung angeschlossen, die auf einer korrespondenzmäßigen Verwertung der Wellenmechanik beruht. Man wird erwarten, daß die von Dirac gegebene Strahlungstheorie, die eine Berücksichtigung der Strahlungsdämpfung erlaubt, in diesem Falle ein übereinstimmendes Resultat gibt, wenn es sich um die erste Näherung in bezug auf die Intensität der Primärstrahlung handelt.

In der vorliegenden Arbeit haben wir uns auf die Berechnung der Intensität der Streustrahlung in ihrer Abhängigkeit von Richtung und Wellenlänge beschränkt. Die Frage der Polarisation der Streustrahlung wird der eine von uns in einer nachfolgenden Arbeit behandeln\*\*\*\*. Es

---

\* P. M. A. Dirac, Proc. Roy. Soc. (A) **111**, 405, 1926, wird im folgenden als A zitiert.

\*\* W. Gordon, ZS. f. Phys. **40**, 117, 1927.

\*\*\* P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. (A) **117**, 610, 1928, wird im folgenden als B zitiert.

\*\*\*\* Y. Nishina, ZS. f. Phys. **52**, 869, 1929.

hat sich gezeigt, daß in dem Gebiet der harten  $\gamma$ -Strahlen die Abweichungen unserer Resultate von den Dirac-Gordonschen Formeln beträchtlich sind, so daß z. B. die Wellenlängenbestimmung der kosmischen durchdringenden Strahlung nach der vorliegenden Theorie bedeutend kürzere Wellenlängen liefern würde als nach der älteren Theorie. Gerade in diesem Gebiet scheinen aber die experimentellen Ergebnisse über den Comptoneffekt zu unsicher zu sein, um zurzeit eine Entscheidung für oder gegen die Theorie zu liefern. Hier wäre jedoch eine genaue experimentelle Prüfung sehr erwünscht, nicht am wenigsten im Hinblick auf die von Dirac hervorgehobene Schwierigkeit seiner neuen Theorie, die mit der Möglichkeit von negativen Energien zusammenhängt.

§ 1. Orientierende Bemerkungen über die Diracsche Wellengleichung. Nach Dirac\* wird das quantenmechanische Problem bei einem Elektron mit der Ladung  $-e$  und der Ruhemasse  $m$ , das sich in einem Kraftfeld bewegt, wo das elektrostatische Potential  $V$  und das Vektorpotential  $\mathfrak{A}$  ist, durch die folgende Hamiltonsche Form  $F$  bestimmt:

$$F = \frac{E + eV}{c} + \varrho_1 \left( \sigma, \mathfrak{p} + \frac{e}{c} \mathfrak{A} \right) + \varrho_3 mc, \quad (1)$$

wo  $E$  die Energie des Elektrons und  $\mathfrak{p}$  seinen Impulsvektor mit den Komponenten  $p_1, p_2, p_3$  nach den Achsen  $x_1, x_2, x_3$  eines rechtwinkligen Koordinatensystems bedeutet, während  $c$  die Vakuumlichtgeschwindigkeit bezeichnet. Ferner ist  $\sigma$  ein Matrixvektor mit den Komponenten  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ , die folgende Relationen erfüllen:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 \sigma_2 &= i \sigma_3 = -\sigma_2 \sigma_1, & \sigma_1^2 &= 1, \\ \sigma_2 \sigma_3 &= i \sigma_1 = -\sigma_3 \sigma_2, & \sigma_2^2 &= 1, \\ \sigma_3 \sigma_1 &= i \sigma_2 = -\sigma_1 \sigma_3, & \sigma_3^2 &= 1, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

und  $\varrho_1$  und  $\varrho_3$  sind zwei von drei Matrizen, die mit (2) identische Relationen erfüllen und außerdem mit den  $\sigma$  vertauschbar sind. Wie Dirac gezeigt hat, können alle diese Größen mittels Matrizen mit vier Zeilen und Kolonnen dargestellt werden. Dementsprechend bestehen die zu der Hamiltonschen Form  $F$  gehörigen zueinander adjugierten Eigenfunktionen  $\varphi$  und  $\psi$ , die wir als Funktionen der Koordinaten  $x_1, x_2, x_3$  und der Zeit  $t$  betrachten wollen, aus je vier Komponenten  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$  bzw.  $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ , indem ein Ausdruck wie  $\mu \psi$ , wo  $\mu$  eine vierzeilige Matrix bedeutet, als Abkürzung für die vier Größen  $\sum_{k=1}^4 \mu_{ik} \psi_k$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ )

\* P. A. M. Dirac, l. c. B.

zu verstehen ist, während  $\varphi\mu$  die Größen  $\sum_{k=1}^4 \varphi_k \mu_{ki}$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) bezeichnet, wo  $\mu_{ik}$  die Matrixelemente von  $\mu$  sind.

Die physikalische Verwertung der Gleichung (1) beruht auf der Annahme, daß, wenn  $\varphi$  und  $\psi$  zusammengehörige Wellenfunktionen der Hamiltonschen Funktion (1) sind — d. h. bei hermiteschen Matrizen  $\varrho_1, \varrho_3$  und  $\sigma$ , daß  $\varphi$  und  $\psi$  zueinander konjugiert komplex sind —,  $\varphi\psi d\tau$  die Wahrscheinlichkeit dafür angibt, daß das Elektron in dem Volumenelement  $d\tau$  angetroffen wird. Hieraus folgt nach Dirac für die Wahrscheinlichkeit, daß das Elektron in der Zeit  $dt$  ein Flächenelement  $df$  durchquert, —  $c\varphi\varrho_1\sigma_s\psi df dt$ , wo  $\sigma_s$  die Komponente des Vektors  $\sigma$  in der Normalrichtung des Flächenelements bezeichnet, und wo  $\varphi\mu\psi$ , wenn  $\mu$  wieder eine beliebige vierzeilige Matrix bedeutet, gleich  $\sum_{i,k} \varphi_i \mu_{ik} \psi_k$  sein soll. Wenn wir die Größen  $\varphi\psi$  und  $-c\varphi\varrho_1\sigma\psi$  mit der Ladung  $-e$  des Elektrons multiplizieren, bekommen wir die sogenannte wellenmechanische elektrische Dichte  $\varrho$  und den elektrischen Stromdichtevektor  $\mathfrak{J}$ . Es gilt also

$$\varrho = -e\varphi\psi, \quad \mathfrak{J} = ec\varphi\varrho_1\sigma\psi. \quad (3)$$

§ 2. Eigenfunktionen der Diracschen Wellengleichung bei einem freien Elektron. Wir wollen zuerst ein freies Elektron betrachten, wo wir, wie in der Schrödingerschen Theorie, folgende zu je einem Werte von  $p$  gehörigen Funktionen  $\varphi_0$  und  $\psi_0$  als Eigenfunktionen wählen können, nämlich

$$\varphi_0(p) = u(p) e^{\frac{i}{\hbar}[Et - (p\mathbf{r})]}, \quad \psi_0(p) = v(p) e^{-\frac{i}{\hbar}[Et - (p\mathbf{r})]}, \quad (4)$$

wo  $\hbar$  die durch  $2\pi$  dividierte Plancksche Konstante und  $\mathbf{r}$  den Koordinatenvektor mit den Komponenten  $x_1, x_2, x_3$  bezeichnet, während  $u(p)$  und  $v(p)$  von der Zeit und den Koordinaten unabhängige Größen sind, die aus vier Komponenten bestehen und folgende rein algebraische Gleichungen zu befriedigen haben:

$$\left. \begin{aligned} u(p) \{E/c + \varrho_1(\sigma p) + \varrho_3 mc\} &= 0, \\ \{E/c + \varrho_1(\sigma p) + \varrho_3 mc\} v(p) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Zu einem gegebenen  $p$  gehören nach diesen Gleichungen zwei Werte der Energie  $E$ , ein positiver und ein negativer, welche beide die Relation

$$E^2/c^2 = m^2 c^2 + p^2 \quad (6)$$

erfüllen, die dem Zusammenhang zwischen Energie und Impuls in der Relativitätsmechanik Ausdruck gibt. Da die Gleichungen (5) Abkürzungen von Systemen mit je vier Gleichungen darstellen, so sollte man eigentlich

erwarten, daß zu einem gegebenen Werte von  $p$  vier Energiewerte gehörten, was eben der Möglichkeit entspricht, neben den physikalisch nicht sinnvollen negativen Energiewerten die mit dem Eigenmagnetismus des Elektrons zusammenhängende Verdopplung der Anzahl der Eigenwerte zu berücksichtigen. Diese Entartung bei dem freien Elektron hat zur Folge, daß, wenn wir einen bestimmten Energiewert wählen — wir werden uns dabei selbstverständlich auf positive Werte beschränken —, die Verhältnisse der Komponenten von  $u(p)$  und ebenso von  $v(p)$  noch nicht festgelegt sind, sondern diese hängen von zwei frei wählbaren Größen ab. Bei der folgenden Berechnung der Intensität der Streustrahlung ist es notwendig, diese Entartung in Betracht zu ziehen.

Wir wollen zuerst den Fall eines ruhenden Elektrons betrachten. Hier ist  $p = 0$ , und wir setzen  $E = mc^2$ . Die Gleichungen (5) werden also einfach

$$u(0)(1 + \varrho_3) = 0, \quad (1 + \varrho_3)v(0) = 0. \quad (7)$$

Wir wollen  $\varrho_3$  als Diagonalmatrix wählen, indem wir setzen\*:

$$\varrho_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Es folgt dann, daß die Gleichungen (7) befriedigt sind, wenn  $u_3, v_3, u_4, v_4$  gleich Null sind, während  $u_1, v_1$  und  $u_2, v_2$  beliebig gewählt werden können. Wir können mit anderen Worten die allgemeine zu dem gegebenen Energiewert gehörige Lösung aus zwei unabhängigen Lösungen zusammensetzen, bei denen  $u_1, v_1$  bzw.  $u_2, v_2$  allein von Null verschieden sind.

Wir wollen nun ferner die Komponente  $\sigma_3$  von  $\sigma$  nach der  $x_3$ -Achse als Diagonalmatrix wählen, indem wir setzen:

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Nach Dirac ist nun  $u(p)\sigma v(p)$  proportional dem magnetischen Moment des Elektrons, das zu der Lösung  $u(p), v(p)$  gehört. Die erwähnten beiden Lösungen geben also ein gleich großes, aber entgegengesetzt gerichtetes magnetisches Moment des Elektrons nach der  $x_3$ -Achse.

---

\* Wir haben für  $\varrho_3$  das umgekehrte Zeichen gewählt wie Dirac, damit für positive Energie die zwei ersten anstatt der zwei letzten Komponenten von  $u$  und  $v$  endlich bleiben.

Wir können deshalb  $u_1, v_1$  bzw.  $u_2, v_2$  als die zu den beiden möglichen Stellungen des magnetischen Moments in bezug auf die  $x_3$ -Achse gehörigen Eigenfunktionen betrachten.

Den Fall eines beliebigen  $p$ -Wertes können wir leicht auf den Fall  $p = 0$  zurückführen, indem wir eine mit der Lorentztransformation innig zusammenhängende Kontakttransformation vornehmen<sup>†</sup>. Es sei

$$S = \alpha + i\beta \varrho_2(\sigma p), \quad S^{-1} = \alpha - i\beta \varrho_2(\sigma p), \quad (10)$$

$$\alpha^2 + \beta^2 p^2 = 1,$$

wo wir  $\alpha$  und  $\beta$  gleich näher bestimmen wollen. Wir setzen

$$F^* = S(E/c + \varrho_1(\sigma p) + \varrho_3 mc) S^{-1}. \quad (11)$$

Man hat nun

$$S \varrho_1 S^{-1} = \varrho_1 (\alpha - i\beta \varrho_2(\sigma p))^2 = (\alpha^2 - \beta^2 p^2) \varrho_1 + 2\alpha\beta \varrho_2(\sigma p)$$

und also

$$S \varrho_1(\sigma p) S^{-1} = (\alpha^2 - \beta^2 p^2) \varrho_1(\sigma p) + 2\alpha\beta p^2 \varrho_3.$$

Ferner

$$S \varrho_3 S^{-1} = (\alpha^2 - \beta^2 p^2) \varrho_3 - 2\alpha\beta \varrho_1(\sigma p).$$

Es folgt also

$$F^* = E/c + (\alpha^2 - \beta^2 p^2 - 2\alpha\beta mc) \varrho_1(\sigma p) \\ + ((\alpha^2 - \beta^2 p^2) mc + 2\alpha\beta p^2) \varrho_3.$$

Wir wollen nun  $\alpha$  und  $\beta$  so wählen, daß der Koeffizient von  $\varrho_1(\sigma p)$  in  $F^*$  verschwindet, d. h. wir verlangen

$$\alpha^2 - \beta^2 p^2 - 2\alpha\beta mc = 0. \quad (12)$$

Ferner setzen wir

$$(\alpha^2 - \beta^2 p^2) mc + 2\alpha\beta p^2 = m^* c \quad (13)$$

und haben dann

$$F^* = E/c + \varrho_3 m^* c. \quad (14)$$

Es folgt nun durch eine einfache Rechnung

$$m^{*2} c^2 = m^2 c^2 + p^2, \quad (15)$$

und wenn wir im Einklang hiermit setzen

$$m^* c = + \sqrt{m^2 c^2 + p^2}, \quad (16)$$

so bekommen wir leicht

$$\alpha = \sqrt{\frac{m^* + m}{2m^*}}, \quad \beta = \sqrt{\frac{m^* - m}{2m^* p^2}}, \quad (17)$$

wodurch die Bedingung (12) erfüllt ist.

<sup>†</sup> Die folgende Betrachtung steht in naher Beziehung zu Diracs Ausführungen über die Invarianz seiner Gleichungen gegenüber Lorentztransformationen, l. c. B, S. 615.

Setzen wir nun

$$u(p) = u^*(p) S(p), \quad v(p) = S^{-1}(p) v^*(p), \quad (18)$$

wo  $S(p)$  und  $S^{-1}(p)$  die Größen (10) für einen bestimmten Wert von  $p$  bedeuten, so folgt aus (11), daß  $u^*$  und  $v^*$  die Gleichungen

$$u^*(E/c + \varrho_3 m^* c) = 0, \quad (E/c + \varrho_3 m^* c) v^* = 0$$

befriedigen, oder da nach (16)  $E = m^* c^2$

$$u^*(1 + \varrho_3) = 0, \quad (1 + \varrho_3) v^* = 0,$$

d. h. wir bekommen die Gleichungen (7) für den Fall  $p = 0$ . In dieser Weise können wir  $u(p)$  und  $v(p)$  mit Hilfe der unabhängigen Größen  $u_1^*, v_1^*$  und  $u_2^*, v_2^*$  darstellen, die jedoch weniger einfach als für  $p = 0$  mit der Magnetisierung des Elektrons zusammenhängen.

Es sei nun für einen Augenblick  $u(p)$ ,  $v(p)$  eine Lösung, die einer der beiden unabhängigen Eigenfunktionen entspricht, wo also entweder  $u_1^*, v_1^*$  oder auch  $u_2^*, v_2^*$  allein von Null verschieden sind. Wir wollen diese Lösung so normieren, daß sie einem Elektron entspricht. Wenn  $\varphi_0(p)$  und  $\psi_0(p)$  die zugehörigen Eigenfunktionen im Koordinatenraum sind, so heißt dies bekanntlich bei kontinuierlichen Eigenwerten

$$\int \varphi_0(p') \psi_0(p'') dr = \delta(p' - p''), \quad (19)$$

wo  $dr$  das Volumenelement bezeichnet und die Integration über den ganzen in Frage kommenden Raum zu erstrecken ist, während  $\delta(p' - p'')$  die von Dirac eingeführte singuläre Funktion bedeutet, deren Integral hinsichtlich  $p'$  über ein beliebiges Gebiet im Impulsraum, das die Stelle  $p' = p''$  enthält, gleich Eins ist. Durch Einsetzung der Ausdrücke (4) für  $\varphi_0$  und  $\psi_0$  in (19) ergibt sich durch Vergleich mit dem Fourierschen Integraltheorem

$$u(p) v(p) = (2\pi\hbar)^{-3}. \quad (20)$$

Wir wollen schließlich die konjugiert komplexen Größen  $u_1^*$  und  $v_1^*$  bzw.  $u_2^*$  und  $v_2^*$ , die zu den beiden verschiedenen Eigenlösungen  $u(p)$ ,  $v(p)$  gehören, folgendermaßen durch reelle Größen darstellen:

$$\left. \begin{aligned} u_1^*(p) &= a_1 e^{i\delta_1(p)}, & u_2^*(p) &= a_2 e^{i\delta_2(p)}, \\ v_1^*(p) &= a_1 e^{-i\delta_1(p)}, & v_2^*(p) &= a_2 e^{-i\delta_2(p)}. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Nach (20) gilt dann  $a_1^2 = a_2^2 = (2\pi\hbar)^{-3}$ , so daß wir die Amplituden  $a_1$  und  $a_2$  so wählen können, daß sie von dem  $p$ -Wert unabhängig sind. Dagegen sind die Phasen  $\delta_1(p)$  und  $\delta_2(p)$  für jeden  $p$ -Wert vollständig frei wählbar.

§ 3. Lösung der Wellengleichung für ein Elektron in einem ebenen monochromatischen Strahlungsfeld. Wir wollen

hier ein Elektron betrachten, das mit einem ebenen monochromatischen Wellenzug beleuchtet wird. Diesen können wir mittels eines Vektorpotentials  $\mathfrak{A}$  von der folgenden Form beschreiben:

$$\mathfrak{A} = a e^{i\nu\left(t - \frac{(\mathbf{n}\mathbf{r})}{c}\right)} + \bar{a} e^{-i\nu\left(t - \frac{(\mathbf{n}\mathbf{r})}{c}\right)}, \quad (22)$$

wo  $a$  und  $\bar{a}$  zwei konstante, zueinander konjugiert komplexe Vektoren bezeichnen, die senkrecht auf dem Einheitsvektor  $\mathbf{n}$  stehen, welcher die Fortpflanzungsrichtung der Wellen angibt. Der Ort, wo das Potential  $\mathfrak{A}$  zur Zeit  $t$  gemessen wird, ist hierbei durch den von einem festen Punkte zu dem betreffenden Ort gezogenen Radiusvektor  $\mathbf{r}$  gekennzeichnet worden. Ferner bedeutet  $\nu$  die mit  $2\pi$  multiplizierte Schwingungszahl der Strahlung. Wir wollen unter Vernachlässigung höherer Potenzen als der ersten von  $|\mathfrak{A}|$  Lösungen der zu  $F$  gehörigen Wellengleichungen von der Form

$$\left. \begin{aligned} \varphi(\mathbf{p}) &= \varphi_0(\mathbf{p}) \left\{ 1 + f(\mathbf{p}) e^{i\nu\left(t - \frac{(\mathbf{n}\mathbf{r})}{c}\right)} + \bar{f}(\mathbf{p}) e^{-i\nu\left(t - \frac{(\mathbf{n}\mathbf{r})}{c}\right)} \right\}, \\ \psi(\mathbf{p}) &= \left\{ 1 + g(\mathbf{p}) e^{i\nu\left(t - \frac{(\mathbf{n}\mathbf{r})}{c}\right)} + \bar{g}(\mathbf{p}) e^{-i\nu\left(t - \frac{(\mathbf{n}\mathbf{r})}{c}\right)} \right\} \psi_0(\mathbf{p}) \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

aufsuchen, wo  $\varphi_0(\mathbf{p})$ ,  $\psi_0(\mathbf{p})$  die in (4) gegebenen Eigenfunktionen des freien Elektrons sind, während  $f, \bar{f}$  und  $g, \bar{g}$  konstante vierzeilige Matrizen sind. Die allgemeine Lösung der Wellengleichungen ergibt sich in der betrachteten Näherung durch Superposition aller möglichen Lösungen von der Form (23). Zur Bestimmung der Größen  $f, \bar{f}, g, \bar{g}$  ist es zweckmäßig, von den Gleichungen zweiter Ordnung auszugehen, die nach Dirac aus den zu  $F$  gehörigen Gleichungen erster Ordnung leicht abgeleitet werden können und die lauten:

$$\left. \begin{aligned} &\left\{ \frac{\hbar^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \left( -i\hbar \nabla + \frac{e}{c} \mathfrak{A} \right)^2 + m^2 c^2 \right\} \psi + \frac{e\hbar}{c} (\boldsymbol{\sigma} \mathfrak{E}) \psi \\ &\quad + \frac{ie\hbar}{c} \boldsymbol{\sigma}_1 (\boldsymbol{\sigma} \mathfrak{E}) \psi = 0, \\ &\left\{ \frac{\hbar^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \left( i\hbar \nabla + \frac{e}{c} \mathfrak{A} \right)^2 + m^2 c^2 \right\} \varphi - \frac{e\hbar}{c} \boldsymbol{\sigma} (\boldsymbol{\sigma} \mathfrak{E}) \\ &\quad + \frac{ie\hbar}{c} \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\sigma}_1 (\boldsymbol{\sigma} \mathfrak{E}) = 0, \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

wo  $\nabla$  den Vektoroperator mit den Komponenten  $\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}$  bedeutet, während  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{H}$  die zu  $\mathfrak{A}$  gehörige elektrische bzw. magne-

tische Feldstärke sind. Durch Einsetzen der Ausdrücke (23) in (24) findet man

$$\left. \begin{aligned} f(p) &= \frac{e}{2h\nu(E/c - (np))} \{2(a p) + h(\sigma\eta) - ih\varrho_1(\sigma\varepsilon)\}, \\ \bar{f}(p) &= -\frac{e}{2h\nu(E/c - (np))} \{2(\bar{a} p) + h(\sigma\bar{\eta}) - ih\varrho_1(\sigma\bar{\varepsilon})\}, \\ g(p) &= -\frac{e}{2h\nu(E/c - (np))} \{2(a p) + h(\sigma\eta) + ih\varrho_1(\sigma\varepsilon)\}, \\ \bar{g}(p) &= \frac{e}{2h\nu(E/c - (np))} \{2(\bar{a} p) + h(\sigma\bar{\eta}) + ih\varrho_1(\sigma\bar{\varepsilon})\}, \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

wo  $\varepsilon$  und  $\bar{\varepsilon}$  bzw.  $\eta$  und  $\bar{\eta}$  folgendermaßen mit der elektrischen Feldstärke  $\mathfrak{E}$  bzw. der magnetischen Feldstärke  $\mathfrak{H}$  des Strahlungsfeldes zusammenhängen:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{E} &= \varepsilon e^{i\nu(t - \frac{(nr)}{c})} + \bar{\varepsilon} e^{-i\nu(t - \frac{(nr)}{c})}, \\ \mathfrak{H} &= \eta e^{i\nu(t - \frac{(nr)}{c})} + \bar{\eta} e^{-i\nu(t - \frac{(nr)}{c})}, \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

da

$$\mathfrak{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t}, \quad \mathfrak{H} = \text{rot } \mathfrak{A}.$$

so folgt

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon &= -\frac{i\nu}{c} a, & \bar{\varepsilon} &= \frac{i\nu}{c} \bar{a}, \\ \eta &= -\frac{i\nu}{c} [na], & \bar{\eta} &= \frac{i\nu}{c} [n\bar{a}]. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

§ 4. Berechnung des Streustrahlungsfeldes. Die allgemeine Lösung der Wellengleichungen bei Gegenwart der einfallenden Strahlung können wir in der besprochenen Näherung folgendermaßen schreiben:

$$\Phi = \int \varphi(p) dp, \quad \Psi = \int \psi(p) dp, \quad (28)$$

wo  $\varphi(p)$  und  $\psi(p)$  die in (23) und (25) gegebene angenäherte Lösung der betreffenden Gleichungen bezeichnen — wobei vorerst keine Normierung vorausgesetzt werden soll —, während die Integration  $\int dp$  als Abkürzung für die dreifache Integration  $\int dp_1 \int dp_2 \int dp_3$  über alle vorkommenden Werte der Impulskomponenten  $p_1, p_2, p_3$  zu betrachten ist. Die zu der allgemeinen Lösung gehörige elektrische Stromdichte ist gegeben durch

$$\mathfrak{J} = ec\Phi\varrho_1\sigma\Psi = ec \int \int \varphi(p)\varrho_1\sigma\psi(p') dp dp'. \quad (29)$$

In diesen Ausdruck wollen wir nun die Ausdrücke (23) für  $\varphi$  und  $\psi$  einführen und ihn in korrespondenzmäßiger Weise nach den verschiedenen



möglichen Strahlungsprozessen ordnen\*. Unter Vernachlässigung von Größen der Größenordnung  $|a|^2$  bekommen wir durch eine einfache Umformung:

$$\begin{aligned} \mathfrak{Z} = & \mathfrak{Z}_0 + ce \int \int d\mathfrak{p} d\mathfrak{p}' \left\{ u(\mathfrak{p}) [\mathfrak{Q}_1 \sigma g(\mathfrak{p}')] \right. \\ & + f(\mathfrak{p}) \mathfrak{Q}_1 \sigma] v(\mathfrak{p}') e^{\frac{i}{h} \left[ (E + h\nu - E')t - \left( \mathfrak{p} + n \frac{h\nu}{c} - \mathfrak{p}' \right) \tau \right]} \\ & \left. + \text{konjugiert komplexes Glied} \right\}, \end{aligned} \quad (30)$$

wo  $\mathfrak{Z}_0$  die zu den ungestörten Eigenfunktionen  $\varphi_0, \psi_0$  gehörige Stromdichte bezeichnet.

Es sei nun  $\mathfrak{A}$  das zu  $\mathfrak{Z}$  gehörige Vektorpotential in einem Punkte, dessen Entfernung  $r$  sehr groß ist, verglichen mit den Dimensionen des Gebiets, das dem Elektron zur Verfügung steht, welche ihrerseits als groß zu betrachten sind im Vergleich mit den Wellenlängen des Lichtes und der de Brogliewellen. Diese Annahmen dürften eben den Beobachtungen des Comptoneffekts entsprechen. Es sei ferner  $n'$  ein Einheitsvektor, der die Beobachtungsrichtung angibt, d. h. die Richtung eines Radiusvektors, der von einem Punkte des Gebiets des Elektrons nach dem Beobachtungspunkt gezogen wird. Es ergibt sich dann in wohlbekannter Weise\*\*:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} = & \frac{e}{r} \int \int d\mathfrak{p} d\mathfrak{p}' \left\{ e^{\frac{i}{h} (E + h\nu - E') \left( t - \frac{r}{c} \right)} \int d\mathfrak{r} u(\mathfrak{p}) [\mathfrak{Q}_1 \sigma g(\mathfrak{p}')] \right. \\ & + f(\mathfrak{p}) \mathfrak{Q}_1 \sigma] v(\mathfrak{p}') e^{-\frac{i}{h} \left[ \mathfrak{p} - \mathfrak{p}' + n \frac{h\nu}{c} - n' \frac{E + h\nu - E'}{c} \right] \tau} \\ & \left. + \text{konjugiert komplexes Glied} \right\}, \end{aligned} \quad (31)$$

wo  $\int d\mathfrak{r}$  die Integration  $\int dx_1 \int dx_2 \int dx_3$  über das ganze dem Elektron zur Verfügung stehende Gebiet andeutet. Dieses Integral können wir nach dem Vorgang von Gordon\*\*\* mit Hilfe des Fourierschen Theorems auswerten, indem wir anstatt  $\mathfrak{p}$  und  $\mathfrak{p}'$  gewisse neue Vektoren  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{B}'$  mit den Komponenten  $P_1, P_2, P_3, P'_1, P'_2, P'_3$  durch folgende Relationen einführen:

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{p} + n \frac{h\nu}{c} - n' \frac{E + h\nu}{c}, \quad \mathfrak{B}' = \mathfrak{p}' - \frac{E'}{c} n'. \quad (32)$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} = & \frac{(2\pi h)^3}{r} \int \frac{d\mathfrak{B}}{d\mathfrak{B}'} \left\{ e^{i\nu' \left( t - \frac{r}{c} \right)} u(\mathfrak{p}) [\mathfrak{Q}_1 \sigma g(\mathfrak{p}')] \right. \\ & \left. + f(\mathfrak{p}) \mathfrak{Q}_1 \sigma] v(\mathfrak{p}') + \text{konjugiert komplexes Glied} \right\}, \end{aligned} \quad (33)$$

\* Vgl. O. Klein, ZS. f. Phys. **41**, 407, 1927.

\*\* Vgl. z. B. O. Klein, ebenda, l. c. S. 422.

\*\*\* W. Gordon, l. c. S. 129.

wo  $\mathcal{A}$  bzw.  $\mathcal{A}'$  die Funktionaldeterminanten der  $P_k$  nach den  $p_k$  bzw. von den  $P'_k$  nach den  $p'_k$  bedeuten, während  $p'$  der spezielle Wert dieser Größe ist, der bei gegebenem  $p$  aus der Relation  $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}'$  folgt, d. h. aus

$$p + n \frac{h\nu}{c} = p' + n' \frac{h\nu'}{c}, \quad (34)$$

wo  $\nu'$  gegeben ist durch die Relation

$$E + h\nu = E' + h\nu'. \quad (35)$$

Dies sind eben die wohlbekannten Comptonschen Relationen, die dem Zustand  $p$  und dem einfallenden Lichtquant bei gegebener Beobachtungsrichtung einen bestimmten Endzustand zuordnen.

Aus (33) folgt nun nach Gordon\* folgender Ausdruck für das zu einem Übergang von dem Zustand  $p$  nach dem Zustand  $p'$  gehörige Strahlungspotential  $\mathfrak{A}(p, p')$ :

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}(p, p') = & \frac{(2\pi h)^3}{r} \frac{1}{\sqrt{\mathcal{A}\mathcal{A}'}} \left\{ e^{i\nu'(t-\frac{r}{c})} u(p) [\varrho_1 \sigma g(p') \right. \\ & \left. + f(p) \varrho_1 \sigma] v(p') + \text{konjugiert komplexes Glied} \right\}, \quad (36) \end{aligned}$$

wo  $u(p)$ ,  $v(p)$  und  $u(p')$ ,  $v(p')$  nunmehr als normiert zu betrachten sind.

Durch die Größe  $\mathfrak{A}(p, p')$  ist das Strahlungsfeld, das zu einem bestimmten Comptoneffekt gehört, vollständig bestimmt. Aus ihr folgt die magnetische Feldstärke  $\mathfrak{H}(p, p')$  durch die Relation

$$\mathfrak{H}(p, p') = \text{rot } \mathfrak{A}(p, p'), \quad (37)$$

und aus dieser wiederum die elektrische Feldstärke  $\mathfrak{E}(p, p')$  durch die Beziehung

$$\mathfrak{E} = [\mathfrak{H}(p, p'), n]. \quad (38)$$

Wir müssen nun die Größe  $\mathfrak{A}(p, p')$  oder besser  $\mathfrak{H}(p, p')$  auf eine Form bringen, die sich für eine numerische Berechnung der Intensität und Polarisation der Streustrahlung eignet. Zu diesem Zweck haben wir in (36) die durch (25) gegebenen Ausdrücke für  $f, \bar{f}, g, \bar{g}$  einzusetzen und dann die von Dirac gegebenen Rechenregeln für die Matrizen  $\varrho$  und  $\sigma$  zu benutzen, um das Resultat in der Form von gewöhnlichen Zahlen zu erhalten. Hierbei werden wir der Einfachheit wegen annehmen, daß der mit  $p$  bezeichnete Anfangszustand einem ruhenden Elektron entspricht. Die entsprechenden Werte für  $\mathfrak{A}(p, p')$  und  $\mathfrak{H}(p, p')$  bezeichnen wir mit  $\mathfrak{A}_0$  und  $\mathfrak{H}_0$ . Es soll also gelten

$$p = 0, \quad E = mc^2. \quad (39)$$

\* W. Gordon, l. c. S. 130; siehe auch I. Waller, Phil. Mag. 4, 1228, 1927.

Mit Hilfe der Gleichungen (5) für  $u$  und  $v$  können wir alle in dem Ausdruck für  $\mathfrak{A}_0$  vorkommenden Matrizen auf die Einheitsmatrix und den Matrixvektor  $\sigma$  reduzieren. Auf Grund der Relationen (2) ist es dann möglich, das Resultat als einen in den Komponenten von  $\sigma$  linearen Ausdruck darzustellen. Hierbei ist folgende von Dirac\* herangezogene, mit der Quaternionenrechnung innig zusammenhängende Rechenregel von Nutzen, die man leicht mit Hilfe von (2) beweist:

$$(\mathfrak{B} \sigma) (\mathfrak{C} \sigma) = (\mathfrak{B} \mathfrak{C}) + i (\sigma, [\mathfrak{B} \mathfrak{C}]), \quad (40)$$

sowie die aus ihr folgende

$$\sigma (\sigma \mathfrak{B}) = \mathfrak{B} + i [\sigma \mathfrak{B}],$$

wo  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{C}$  zwei beliebige, mit  $\sigma$  vertauschbare Vektoren bedeuten.

Wie aus (5) hervorgeht, kommt in den Größen  $f$  und  $g$  außer der Matrix  $\sigma$  noch die Matrix  $\varrho_1 \sigma$  vor. In (36) werden diese Matrizen mit  $\varrho_1 \sigma$  multipliziert. Die resultierende Matrix ist nach (2) bzw. (40) eine lineare Kombination von der Einheitsmatrix, von  $\varrho_1$ ,  $\varrho_1 \sigma$  und  $\sigma$ . Diese Matrix kommt dann zwischen  $u(p)$  und  $v(p')$  zu stehen, und wir können zeigen, daß sowohl  $u(p) \varrho_1 v(p')$  wie  $u(p) \varrho_1 \sigma v(p')$  auf die Größen  $u(p) v(p')$  und  $u(p) \sigma v(p')$  zurückgeführt werden können. In der Tat folgt aus

$$u(p) (1 + \varrho_3) = 0 \\ \{E'/c + \varrho_1 (\sigma p') + \varrho_3 m c\} v(p'),$$

durch Multiplikation mit  $\varrho_1 v(p')$  bzw.  $u(p) \varrho_1$

$$u(p) (\varrho_1 + i \varrho_3) v(p') = 0, \\ u(p) \{E'/c \varrho_1 + (\sigma p') - i \varrho_3 m c\} v(p') = 0,$$

oder durch Elimination von  $v(p) \varrho_2 u(p')$

$$u(p) \varrho_1 v(p') = - \frac{u(p) (p' \sigma) v(p')}{E'/c + m c}. \quad (41)$$

In ähnlicher Weise findet man

$$u(p) \varrho_1 \sigma u(p') = - \frac{u(p) \sigma (\sigma p') v(p')}{E'/c + m c}, \quad (42)$$

eine Beziehung, die nach (40) auf einen in  $\sigma$  linearen Ausdruck reduziert werden kann. Wir wollen folgende Abkürzungen einführen:

$$\begin{aligned} u(p) \sigma v(p') &= s, & u(p') \sigma v(p) &= \bar{s}, \\ u(p) v(p') &= d, & u(p') v(p) &= \bar{d}, \end{aligned} \quad (43)$$

wo  $s$  und  $\bar{s}$  zwei zueinander konjugiert komplexe Vektoren bezeichnen, während  $d$  und  $\bar{d}$  zwei konjugiert komplexe Skalare sind. Mit Hilfe der

\* P. A. M. Dirac, l. c. B., S. 618.

Beziehungen (41) und (42) bekommen wir nun für das Potential  $\mathfrak{A}_0$  einen in  $\mathfrak{s}$ ,  $\bar{\mathfrak{s}}$  und  $d$ ,  $\bar{d}$  linearen Ausdruck. Wir wollen diesen hier nicht hinschreiben, sondern uns mit der nach (27) zu berechnenden magnetischen Feldstärke  $\mathfrak{H}_0$  begnügen, die sowohl für die Polarisation wie für die Intensität der Streustrahlung maßgebend ist. Es folgt nach einiger Rechnung, wobei die Relationen (34) und (35) herangezogen werden:

$$\begin{aligned} \mathfrak{H}_0 = & \frac{(2\pi h)^3 e^2 v'}{2m c^2 r \left( v - v' + \frac{2m c^2}{h} \right)} \sqrt{\frac{E' v'}{m c^2 v}} \left\{ d \left( \frac{1}{v} n' \varepsilon \right) (v' - v) [n' n] \right. \\ & - v' \left( \frac{1}{v} + \frac{1}{v'} \right)^2 \frac{m c^2}{h} [n' \varepsilon] \Bigg) - i \left[ \left( \frac{1}{v'} - \frac{1}{v} \right) \left( (\mathfrak{s}, n v - n' v') ((n' \varepsilon) n \right. \right. \\ & - (n n') \varepsilon) + \left( v - v' + \frac{2m c^2}{h} \right) ((\bar{\mathfrak{s}} n') \varepsilon - (n' \varepsilon) \bar{\mathfrak{s}}) \Bigg) \\ & + \frac{2}{v} (\varepsilon n') ((n' \mathfrak{s}) (n v - n' v') + (v' - (n n') v) \mathfrak{s}) \\ & \left. - \left( \frac{1}{v} + \frac{1}{v'} \right) \left( (n [\varepsilon \mathfrak{s}]) v [n' n] + v' (n' [n \varepsilon]) [n' \mathfrak{s}] \right) \right] \Bigg\} e^{i v' (t - \frac{r}{c})} \\ & + \text{konjugiert komplexes Glied,} \end{aligned} \quad (44)$$

wo wir die aus (32) mit Hilfe von (34) folgenden Werte von  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{A}'$  benutzt haben<sup>†</sup>, nämlich

$$\mathcal{A} = 1 - \frac{c}{E} (n' p) = 1, \quad \mathcal{A}' = 1 - \frac{c}{E'} (n' p') = \frac{m c^2 v}{E' v'}. \quad (45)$$

Wir wollen hier nicht auf die nähere Diskussion dieses Ausdrucks eingehen, sondern uns damit begnügen, die Intensität der in verschiedenen Richtungen gestreuten Strahlung zu untersuchen<sup>††</sup>. Zu diesem Zwecke bilden wir die Größe  $\mathfrak{H}_0^2$ . Hierbei wollen wir als Anfangszustand die eine der auf S. 856 erwähnten zu  $p = 0$  gehörigen Eigenfunktionen wählen, d. h. für diesen Zustand seien entweder  $u_1, v_1$  allein, oder  $u_2, v_2$  allein von Null verschieden und nach (20) normiert. Wir betrachten also die Streustrahlung eines Elektrons, das von einem nach der  $x_3$ -Achse gerichteten Felde magnetisiert worden ist. Für den Endzustand haben wir hierbei sowohl  $u_1^*, v_1^*$  wie  $u_2^*, v_2^*$  von Null verschieden und normiert anzunehmen. Dies entspricht nach der allgemeinen wellenmechanischen Methode zur Berechnung der Übergangswahrscheinlichkeiten der Möglich-

<sup>†</sup>) W. Gordon, l. c. S. 130.

<sup>††</sup>) Vgl. die nachfolgende Arbeit von Y. Nishina, wo die Frage der Polarisation der Streustrahlung diskutiert wird.

keit von sowohl solchen Übergängen, wo das magnetische Moment des Elektrons ungeändert bleibt, wie solchen, wo es seine Richtung ändert.

Bei der Bildung von  $\tilde{S}_0^2$  bekommen wir nun einen bilinearen Ausdruck in den Größen  $d, s$  und  $\bar{d}, \bar{s}$ , den wir über die Phasen  $\delta_1$  und  $\delta_2$  des Anfangs- und Endzustandes zu mitteln haben. Es handelt sich also um eine Summe von Gliedern von der Form  $u(p') \alpha v(p) \cdot u(p) \beta v(p')$ , die wir nach den Phasen zu mitteln haben, wo  $\alpha$  und  $\beta$  zwei Matrizen sind. Nehmen wir zuerst an, daß  $u_1(p)$  und  $v_1(p)$  von Null verschieden sind, so können wir hierfür schreiben

$$\sum_{i,k} u_i(p') \alpha_{i1} v_1(p) u_1(p) \beta_{1k} v_k(p').$$

Dies aber ist gleich  $u_1(p) v_1(p) \cdot u(p') \alpha \mu \beta v(p')$ , wo  $\mu$  die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

vorstellt.

Wir können  $\mu$  nach (8) und (9) folgendermaßen mit Hilfe von  $\varrho_s$  und  $\sigma_s$  darstellen:

$$\mu = \left( \frac{1 + \sigma_s}{2} \right) \left( \frac{1 - \varrho_s}{2} \right), \quad (46)$$

und es gilt also

$$u(p') \alpha v(p) \cdot u(p) \beta v(p') = (2\pi h)^{-3} u(p') \alpha \mu \beta v(p'), \quad (47)$$

wo wir nach (20)  $u_1 v_1 = (2\pi h)^{-3}$  gesetzt haben. Falls wir als Anfangszustand den zu  $u_2, v_2$  gehörigen Zustand gewählt hätten, so wäre für  $\mu$  die Größe  $\left( \frac{1 - \sigma_s}{2} \right) \left( \frac{1 - \varrho_s}{2} \right)$  zu nehmen.

Wir wollen nun annehmen, daß  $\alpha = (\mathfrak{U} \sigma)$  und  $\beta = (\mathfrak{B} \sigma)$  ist, wo  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{U}$  mit  $\sigma$  vertauschbare Vektoren sind. Es ist dann  $u(p') \alpha v(p) = (\mathfrak{U} \bar{s})$  und  $u(p) \beta v(p') = (\mathfrak{B} \bar{s})$ , und wir haben

$$(\mathfrak{B} \bar{s}) (\mathfrak{U} \bar{s}) = (2\pi h)^{-3} u(p') (\mathfrak{U} \sigma) \mu (\mathfrak{B} \sigma) v(p').$$

Es gilt nun

$$(\mathfrak{U} \sigma) \left( \frac{1 + \sigma_s}{2} \right) = \left( \frac{1 - \sigma_s}{2} \right) (\mathfrak{U} \sigma) + C_s,$$

so daß

$$(\mathfrak{B} \bar{s}) (\mathfrak{U} \bar{s}) = (2\pi h)^{-3} u(p') \left( \frac{1 - \varrho_s}{2} \right) \left\{ \left( \frac{1 - \sigma_s}{2} \right) (\mathfrak{U} \sigma) (\mathfrak{B} \sigma) + C_s (\mathfrak{B} \sigma) \right\} v(p'). \quad (48)$$

Auf der rechten Seite dieser Gleichung stehen zwischen  $u(p')$  und  $v(p')$  Matrizen, die entweder von der Form  $\frac{1 - \varrho_s}{2}$  oder von der Form  $\frac{1 - \varrho_s}{2} \sigma$

sind. Wir können diese leicht in folgender Weise umformen. Aus den Gleichungen

$$u(p') \{E'/c + q_1(\sigma p') + q_3 mc\} = 0, \quad \{E'/c + q_1(\sigma p') + q_3 mc\} v(p') = 0$$

folgt ähnlich wie auf S. 863

$$u(p') \left( \frac{1 - q_3}{2} \right) v(p') = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{mc^2}{E'} \right) u(p') v(p'). \quad (49)$$

Ferner folgt

$$u(p') \left( \frac{1 - q_3}{2} \right) \sigma v(p') = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{E'}{mc^2} \right) u(p') \sigma v(p') - \frac{p'}{2mE'} u(p') (\sigma p') v(p'), \quad (50)$$

so daß die Größen  $u(p') \left( \frac{1 - q_3}{2} \right) v(p')$  und  $u(p') \left( \frac{1 - q_3}{2} \right) \sigma v(p')$  durch die Größen  $u(p') v(p')$  und  $u(p') \sigma v(p')$  ausgedrückt werden können. Da nun der durch  $p'$  gekennzeichnete Endzustand die beiden unabhängigen Lösungen in gleicher Stärke enthalten soll, so ist es von vornherein klar, daß der Mittelwert von  $u(p') \sigma v(p')$  nach den Phasen verschwinden muß. Dies folgt auch in der Tat aus der Darstellung, (18) und (21), der Größen  $u(p')$ ,  $v(p')$ . Wir wollen also annehmen, daß

$$\overline{u(p') \sigma v(p')} = 0, \quad (51)$$

wo der Strich die Mittelwertbildung nach den Phasen  $\delta_1(p')$  und  $\delta_3(p')$  andeutet. Diese Annahme genügt nun, um alle vorkommenden Mittelwerte zu berechnen. Wir müssen zuerst den Wert von  $u(p') v(p')$  haben. Es folgt aus (18) und (20)

$$u(p') v(p') = u^*(p') v^*(p') = 2(2\pi h)^{-3}. \quad (52)$$

Ferner folgt aus (48)

$$\overline{(\mathfrak{B} \mathfrak{s}) (\mathfrak{U} \mathfrak{s})} = \frac{1}{2} (2\pi h)^{-3} u(p') \left( \frac{1 - q_3}{2} \right) v(p') \{(\mathfrak{B} \mathfrak{U}) + i[\mathfrak{B} \mathfrak{U}]_3\}, \quad (53)$$

oder nach (49) und (52), wenn wir setzen

$$\gamma = \frac{1}{2} (2\pi h)^{-3} \left( 1 + \frac{mc^2}{E'} \right), \quad (54)$$

$$\overline{(\mathfrak{B} \mathfrak{s}) (\mathfrak{U} \mathfrak{s})} = \gamma \{(\mathfrak{B} \mathfrak{U}) + i[\mathfrak{B} \mathfrak{U}]_3\}. \quad (55)$$

Wir können uns leicht von der speziellen Koordinatenwahl befreien. Wenn  $\mathfrak{l}$  ein Einheitsvektor in der Richtung des magnetischen Moments

des magnetisierten Elektrons im Anfangszustand ist, so gilt offenbar allgemein

$$\left. \begin{aligned} \overline{(\mathfrak{B} \mathfrak{s})} (\mathfrak{U} \overline{\mathfrak{s}}) &= \gamma \{ (\mathfrak{B} \mathfrak{U}) + i (1 [\mathfrak{B} \mathfrak{U}]) \} \\ \text{und ebenso} \quad \overline{(\mathfrak{B} \mathfrak{s})} [\mathfrak{U} \overline{\mathfrak{s}}] &= \gamma \{ 2 (\mathfrak{B} \mathfrak{U}) + i (1 [\mathfrak{B} \mathfrak{U}]) \}, \\ \text{weiter} \quad \overline{(\mathfrak{B} \mathfrak{s})} \overline{d} &= \overline{d} (\mathfrak{B} \overline{\mathfrak{s}}) = \gamma (1 \mathfrak{B}) \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

und schließlich

$$d \overline{d} = \gamma. \quad (57)$$

Bei der Berechnung von  $\overline{\mathfrak{H}_0^2}$  wollen wir nun der Einfachheit wegen annehmen, daß das einfallende Licht linear polarisiert ist, so daß  $\varepsilon = \bar{\varepsilon}$  ist. Es ergibt sich dann nach einiger Rechnung

$$\overline{\mathfrak{H}_0^2} = \frac{e^4}{m^2 c^4 r^2} \left( \frac{v'}{v} \right)^3 \left\{ \left( \frac{v}{v'} + \frac{v'}{v} \right) \varepsilon^2 - 2 (n' \varepsilon)^2 \right\} \quad (58)$$

oder, wenn wir den Winkel zwischen der Beobachtungsrichtung und der Wellennormale des einfallenden Lichtes mit  $\Theta$  bezeichnen und den Winkel zwischen der Beobachtungsrichtung und der elektrischen Kraft der einfallenden Welle mit  $\vartheta$ ,

$$I = I_0 \frac{e^4}{m^2 c^4 r^2} \frac{\sin^2 \vartheta}{(1 + \alpha (1 - \cos \Theta))^3} \left( 1 + \alpha^2 \frac{(1 - \cos \Theta)^2}{2 \sin^2 \vartheta (1 + \alpha (1 - \cos \Theta))} \right), \quad (59)$$

wo  $\alpha = \frac{h v}{m c^2}$ , während  $I_0$  die Intensität der einfallenden Strahlung,  $I$  die Intensität der Streustrahlung bezeichnet, von denen erstere in demselben Verhältnis zu  $2 \varepsilon^2$  steht wie letztere zu  $\overline{\mathfrak{H}_0^2}$ . Wenn die einfallende Strahlung unpolarisiert ist, so müssen wir noch über alle bei gegebener Richtung der einfallenden Strahlung möglichen Richtungen von  $\varepsilon$  mitteln. Der Mittelwert von  $\sin^2 \vartheta$  wird hierbei gleich  $\frac{1}{2} (1 + \cos^2 \Theta)$ , so daß

$$\bar{I} = I_0 \frac{e^4}{2 m^2 c^4 r^2} \frac{1 + \cos^2 \Theta}{(1 + \alpha (1 - \cos \Theta))^3} \left( 1 + \alpha^2 \frac{(1 - \cos \Theta)^2}{(1 + \cos^2 \Theta) (1 + \alpha (1 - \cos \Theta))} \right). \quad (60)$$

Wenn wir die letzten Formeln, (58) bis (60), betrachten, so sehen wir, daß in ihnen der Vektor  $\mathbf{l}$  nicht vorkommt. Die Resultate sind also davon unabhängig, ob die streuenden Elektronen vorher magnetisiert worden sind oder nicht. Wie eine nähere Betrachtung des Ausdrucks (44) lehrt, gilt dies jedoch im allgemeinen nur, wenn die primäre Strahlung linear polarisiert ist. Die Streuung bei elliptisch polarisiertem einfallenden Licht ist daher nicht gleich der Summe der zu den einzelnen polarisierten

Komponenten gehörigen Streuungen, ein Umstand, der mit der eigentümlichen Polarisation der Streustrahlung nahe zusammenhängt\*.

Ferner sehen wir, daß die Ausdrücke (59) und (60) sich nur durch den Faktor

$$\left(1 + \alpha^2 \frac{(1 - \cos \Theta)^2}{2 \sin^2 \frac{\Theta}{2} (1 + \alpha (1 - \cos \Theta))}\right) \text{ bzw. } \left(1 + \alpha^2 \frac{(1 - \cos \Theta)^2}{(1 + \cos^2 \Theta) (1 + \alpha (1 - \cos \Theta))}\right)$$

von den entsprechenden Formeln der Dirac-Gordonschen Theorie unterscheiden, d. h. die Abweichungen der beiden Theorien sind von der Größenordnung  $\left(\frac{h\nu}{mc^2}\right)^2$ , während die Abweichungen der früheren Ausdrücke von der klassischen, von J. J. Thomson entwickelten Theorie der Streustrahlung von der Größenordnung  $\frac{h\nu}{mc^2}$  sind\*\*.

Aus (60) können wir leicht einen Ausdruck für den Streukoeffizienten einer Substanz ableiten, die in der Volumeneinheit  $N$  Elektronen enthält. Multiplizieren wir nämlich den Ausdruck (60) mit  $\frac{d\Omega}{h\nu}$ , so bekommen wir die Anzahl von Quanten, die in einem Raumwinkel  $d\Omega$  in der Richtung  $\Theta$  von einem Elektron gestreut werden. Zu jedem gestreuten Lichtquant gehört aber ein einfallendes Lichtquant von der Größe  $h\nu$ , so daß der Energieverlust der einfallenden Strahlung durch Streuungen in dieser Richtung an einem Elektron gleich  $\frac{\nu}{\nu'} d\Omega$  mal dem Ausdruck (60) ist. Durch Integration über alle Richtungen und Multiplikation mit der Anzahl von Elektronen in der Volumeneinheit bekommen wir also für den Streukoeffizienten

$$S = \frac{2\pi Ne^4}{m^2 c^4} \left\{ \frac{1 + \alpha}{\alpha^2} \left[ \frac{2(1 + \alpha)}{1 + 2\alpha} - \frac{1}{\alpha} \log(1 + 2\alpha) \right] + \frac{1}{2\alpha} \log(1 + 2\alpha) - \frac{1 + 3\alpha}{(1 + 2\alpha)^2} \right\}, \quad (61)$$

der sich von dem entsprechenden von Dirac gegebenen Ausdruck wieder durch Größen von der Größenordnung  $\alpha^2$  unterscheidet.

Kopenhagen, Universitetets Institut for teoretisk Fysik, Okt. 1928.

\* Vgl. Y. Nishina, l. c., wo dieser Punkt näher untersucht worden ist.

\*\* Vgl. Nature **122**, 398, September 1928, wo die Beziehung unserer Resultate zu den Experimenten kurz berührt wurde.