

↳ merging of QM and Information theory

- paradosso EPR → non possono conoscere contemporaneamente osservabili non compatibili
- ↳ Heisenberg → non commutanti
- ↳ entanglement
- 1) la descrizione quantistica non è completa
- 2) le due osservabili non esistono simultaneamente
- variabili messe

dimostrazione di Bell → experiment di Aspect

le variabili da misure non funzionano

anno '90 : nasce la Quantum Information

→ Quantum Computer → parallelismo

### Elettroni

- Einstein sull'effetto fotovoltaico → la luce è fatta di quanti
- ↳ doppia natura della luce

secondo quantizz.

equazioni di Maxwell in vuoto

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$$



$$E(z) = \left( \frac{2W}{\lambda E_0} \right)^{1/2} g(t) \sin(kz)$$

↳ singolo modo di radiazione

In similità colto iD un muro con piani riflettenti.

$$B(z) = ( ) g(t) \cos(kz)$$

$$\begin{aligned} q &\sim x \\ \dot{q} &\sim v \sim p \quad \sim \dot{q} = p \end{aligned}$$

$$H = \frac{1}{2} \int dV \left( \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) = \dots = \frac{1}{2} (p^2 + m^2 q^2) \quad \text{oscillatore armonico}$$

→ facile da quantizzare →  $x, p \mapsto \hat{x}, \hat{p}$  con  $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$

$$\Rightarrow E, B \mapsto \hat{E}, \hat{B}$$

$$\begin{cases} \hat{a} = (\omega \hbar)^{-1/2} (wq + ip) \\ \hat{a}^\dagger = (\omega \hbar)^{-1/2} (wq - ip) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{E} = \epsilon_0 (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \sin k z \\ \hat{B} = B_0 (\hat{a} - \hat{a}^\dagger) \cos k z \end{cases}$$

$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$

$\hat{H} = \hbar \omega \left( \frac{1}{2} + \hat{a}^\dagger \hat{a} \right)$

per un generico operatore  $\frac{d\hat{O}}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{O}]$

$$\frac{d\hat{a}}{dt} = \dots = -i\omega \hat{a} \Rightarrow \hat{a}(t) = \hat{a}(0) e^{-i\omega t}$$

$$\hat{a}^\dagger(t) = \hat{a}^\dagger(0) e^{i\omega t}$$

$$\hat{H}|n\rangle = \hbar \omega \left( \frac{1}{2} + \hat{n} \right) |n\rangle = E_n |n\rangle$$

$$\hat{H}(\hat{a}^\dagger |n\rangle) = (E_n + \hbar \omega) (\hat{a}^\dagger |n\rangle)$$

$$\Rightarrow E_n = \hbar \omega \left( n + \frac{1}{2} \right) \quad n \in \mathbb{N}$$

$E_0 = \frac{\hbar \omega}{2}$  : energia di punto zero  $|0\rangle = 0 \rightarrow$  nessuna emissione

nello stato  $|n\rangle$  ci sono  $n$  fotoni

$$a|n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle$$

$$a^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle \Rightarrow |n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^\dagger)^n |0\rangle$$

$$\langle n|m\rangle = \delta_{nm} \quad \tau = \sum_n |n\rangle \langle n|$$

L2: 10/01/2020

Lo stato  $|n\rangle$  ha energia definita, ma non  $\hat{E}, \hat{B}$  sono definiti.

$$\langle n | \hat{E} | n \rangle = \epsilon_0 \sin k z (\langle n | a + a^\dagger | n \rangle) = 0$$

ma

$$\langle n | \hat{E}^2 | n \rangle = \epsilon_0^2 \sin^2 k z \langle n | (a^\dagger a + a a^\dagger + a a^\dagger + a^\dagger a) | n \rangle = 2 \epsilon_0^2 \sin^2 k z \left( n + \frac{1}{2} \right)$$

$$\text{fluttuazione } \Delta \hat{E}^2 = \langle \hat{E}^2 \rangle - \langle \hat{E} \rangle^2$$

obs: anche  $|0\rangle$  ha  $\langle \hat{E}^2 \rangle \neq 0 \rightarrow$  fluttuazioni del vuoto

$(\hat{E}, \hat{n}) \neq 0 \rightarrow$  vale heisenberg  $\Delta \hat{E} \Delta \hat{n} \geq \dots$

anche  $\Delta n \Delta \phi \geq 1$

fase

operatore di quadratura

$$\hat{E}(t) = \epsilon_0 \sin k z (\hat{a} e^{-i\omega t} + \hat{a}^\dagger e^{i\omega t})$$

$$\hat{x}_1 = \frac{\hat{a} + \hat{a}^\dagger}{2} \quad \hat{x}_2 = \frac{\hat{a} - \hat{a}^\dagger}{2i} \quad (\hat{x}_1, \hat{x}_2) = \frac{i}{2}$$

$$\Delta \hat{x}_1 \Delta \hat{x}_2 \geq \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \hat{E}(t) = 2 \epsilon_0 \sin k z (\hat{x}_1 \cos \omega t + \hat{x}_2 \sin \omega t)$$

si chiamano quadrature perché cancellano in quadratura di fase

### Radiazione termica

consideriamo il nostro resonatore in equilibrio termico

$$\text{stabilità di Boltzmann} \quad P_n = \frac{e^{-\beta E_n}}{\sum_m e^{-\beta E_m}}$$

come mai è così?

b.e.g. sistema con 4 particelle e 3  $\Delta E$  energia totale

come posso ripartire l'energia?

E	0	1	2	3	$(\times \Delta E)$	modi possibili
3	0	0	0	1		4
2	1	1	0			72
1	3	0	0			4
						108

lo stato con  $E=0$  oppure  $3 \cdot 4 + 2 \cdot 72 + 4 = 40$

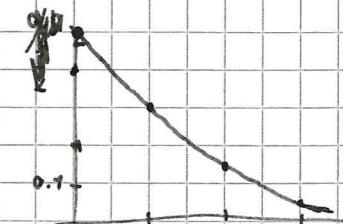
$$E = 7 \Delta E$$

$$E = 2 \Delta E$$

$$E = 3 \Delta E$$

$$4 + 0 + 0 = 4$$

$$\Delta E_{\text{tot}} = 80$$



Boltzmann viene fuori dall'assumere che ogni aggiustazione dell'energia sia equiprobabile

introduciamo l'operatore densità

$$\hat{\rho} = \frac{e^{-\beta \hat{H}}}{\text{Tr } e^{-\beta \hat{H}}} \quad ] = \hat{\rho} = \sum_n e^{-\beta E_n} = \dots = \frac{e^{-\beta \hbar \omega / 2}}{1 - e^{-\beta \hbar \omega}}$$

si può calcolare il valo medio di  $n$

$$\langle n \rangle = \text{Tr}(n\rho) = \dots = \cancel{\text{Tr}(\sqrt{\frac{e^{-\beta \hbar \omega}}{1 - e^{-\beta \hbar \omega}}})} \frac{1}{e^{\beta \hbar \omega} - 1}$$

numero di emulsioni (i.e. faloni) che mi appello

per faloni visibili  $\hbar \omega \sim \text{eV}$  a  $T = \text{ambiente}$   $\langle n \rangle \sim 10^{-40}$

per faloni nelle microonde  $\langle n \rangle \gg 1$

$$\bar{n} := \langle n \rangle \sim e^{-\beta \hbar \omega} = \frac{\bar{n}}{1 + \bar{n}}$$

$$\Rightarrow \hat{\rho} = \frac{1}{1 + \bar{n}} \sum_n \left( \frac{\bar{n}}{\bar{n} + 1} \right)^n |n\rangle \langle n|$$

$$\Rightarrow P_n = \frac{\bar{n}}{(\bar{n} + 1)^{\bar{n} + 1}} \rightarrow \text{distribuzione di Bose Einstein}$$

$$\Delta n^2 = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2 \quad \langle n^2 \rangle = \text{Tr}(n^2 \rho) = \bar{n} + 2\bar{n}^2$$

$$= \bar{n} + \bar{n}^2$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta n}{\bar{n}} = \sqrt{\frac{\bar{n} + \bar{n}^2}{\bar{n}^2}} \approx 1 + \frac{1}{2\bar{n}}$$

$\rightarrow$  se c'è sempre una probabilità finita di avere  $n=0$

la fine termica non va bene per trasmettere informazione

$$\text{in 3D la densità di modi è } g(w) = \frac{w^2}{\pi^2 c^3}$$

densità di energia  $V(w) = \hbar w \bar{n} g(w)$

$$V = \int_0^\infty dw V(w) = (\dots) T^4 \rightarrow \text{legge di Stefan Boltzmann}$$

si trova anche la legge di sperimentalmente di Wien  $w_{\max} = \frac{2\pi c}{\lambda_{\max}} \propto T$

relazione tra il massimo di emissione e la temperatura

Analisi di  $\alpha$

$$\hat{\alpha} |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle \quad |\alpha\rangle = \sum_n c_n |n\rangle$$

$$\Rightarrow \hat{\alpha}^* |\alpha\rangle = \sum_n c_n \sqrt{n} |n-1\rangle = 2 \sum_n c_n |n\rangle \Rightarrow c_n \sqrt{n} = \alpha c_{n-1}$$

$$\Rightarrow c_n = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} c_0$$

$$\gamma = \langle \alpha | \alpha \rangle = |c_0|^2 e^{|\alpha|^2} \Rightarrow c_0 = e^{-\frac{1}{2} |\alpha|^2}$$

$$\Rightarrow |\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2} |\alpha|^2} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad \text{onda coerente}$$

$$\sim \langle \alpha | \tilde{E} | \alpha \rangle = i \sqrt{\frac{\hbar \omega}{2 \epsilon_0 V}} (2 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} + 2^* e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} + \omega t)})$$

↑ onde piane

$$\Rightarrow \Delta E = \sqrt{\frac{\hbar \omega}{2 \epsilon_0 V}}$$

$\rightarrow \tilde{E}$  sembra un campo classico ma in realtà ha fluttuazioni  $\neq 0$   
i.e. onda piana

$\rightarrow$  significa fissi di  $\alpha$

$|\alpha|$  è legato all'ampiezza del campo

$$\bar{n} = \langle \alpha | \bar{n} | \alpha \rangle = |\alpha|^2$$

$$\langle n^2 \rangle = \bar{n} + \bar{n}^2$$

$$\Rightarrow \Delta n = \sqrt{\langle n^2 \rangle - \bar{n}^2} = \sqrt{\bar{n}} \quad \frac{\Delta \bar{n}}{\bar{n}} = \frac{1}{\sqrt{\bar{n}}}$$

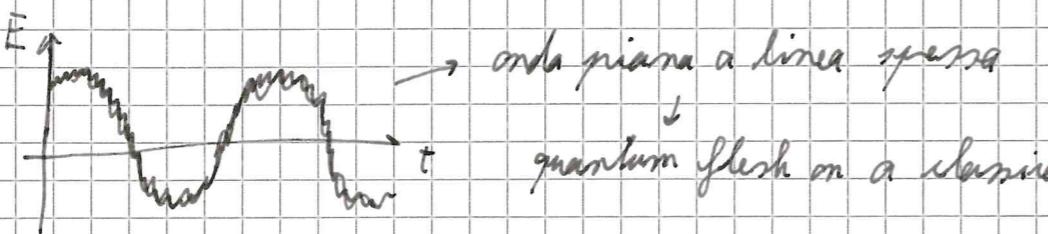
$$P_n = |\langle n | \alpha \rangle|^2 = e^{-\bar{n}} \frac{\bar{n}^n}{n!} \sim \text{di Poissoniana}$$

$\alpha = |\alpha| e^{i\phi}$   $\rightarrow$  la fase in distribuzione come una gaussiana centrata in 0 e con ampiezza  $|\alpha|$

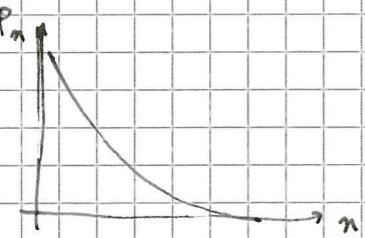
con  $\vec{r}$  or niente troppo grande  $P_0 \sim 0$

$\hookrightarrow$  lo stato coerente è solo adatto a trasmettere informazione

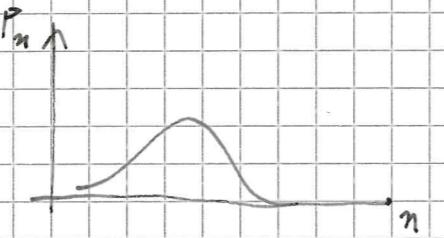
$\rightarrow$  campo elettrico



Statistica termica



Statistica di stato coerente



Come produrre uno stato coerente?

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad \rightarrow \hat{a}|\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle$$

$\hookrightarrow$  stato con la minima fluttuazione possibile  $\rightarrow$  vicino alla griglia del nucleo  
displacementi del nucleo

$$D(\alpha) = \exp(\alpha a^\dagger - \alpha^* a) \quad \rightarrow |\alpha\rangle = D(\alpha)|0\rangle$$

acogniamente ma il campo c.m.  $\vec{A}$  è la varia

$$\vec{V}(t) = \int d^3r \vec{j}(r,t) \cdot \vec{A}(r,t)$$

$\rightarrow$  signi fase opposta di dipolo per  $\vec{A}$

$$\rightarrow V(t+\delta t, t) = \dots = \hat{D}(u(t)\delta t)$$

$\uparrow$   
operatore di evoluzione

$$u(t) \propto e^{-i\omega t}$$

dipolo

$\rightarrow$  proprietà degli stati coerenti

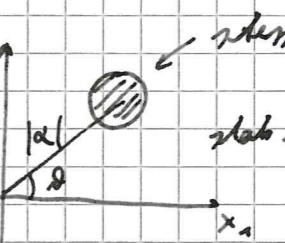
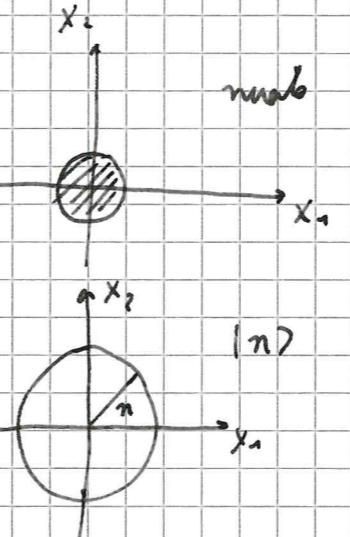
$$\rightarrow$$
 non sono ortogonali  $\langle \alpha | \beta \rangle = e^{\frac{i}{2}(\beta^* \alpha - \alpha^* \beta)} e^{-\frac{1}{2}|\beta-\alpha|^2}$

$$|\alpha | \beta \rangle |^2 = e^{-|\beta-\alpha|^2} \neq 0$$

$\alpha \neq \beta, |\alpha - \beta| > 1$  allora  $|\alpha\rangle, |\beta\rangle$  sono i ortogonali

$\rightarrow$  completezza :  $1 = \int \frac{d^3x}{\pi} |\alpha(x)|^2 \rightarrow$  ma i' overcomplete  
 $"ci sono troppi stati"$

$\rightarrow$  rappresentando in coordinate



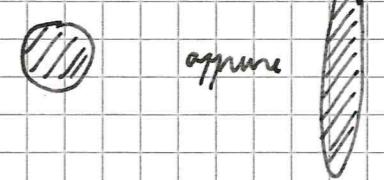
$$|\alpha| = \sqrt{|\alpha|} e^{i\phi}$$

$|\alpha|$  è collegato al numero  
di fotoni dello stato  
coerente

sono diagrammi di fase

$(x_{12})$

$$\Delta x_1 \Delta x_2 = \frac{1}{4}$$



Interazione tra l'atomo e il campo

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + V(r)$$

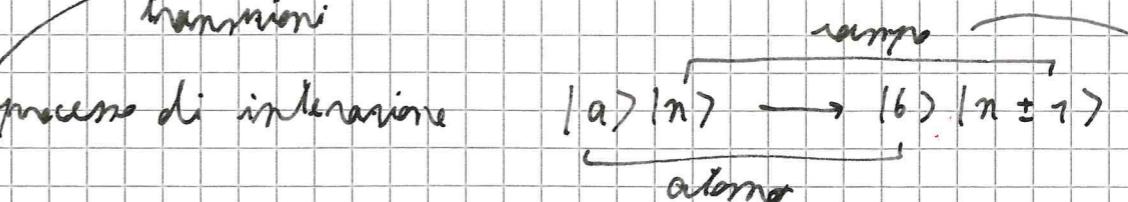
$$H = \frac{1}{2m} (\vec{p} + e\vec{A})^2 - e\phi + V(r)$$

$$\rightarrow \vec{D} \cdot \vec{A} = 0 \quad \rightarrow \vec{D} \vec{A} = 0$$

$\rightarrow$  si può scrivere l'hamiltoniana per il campo  $H = \hbar \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \dots$

$\hookrightarrow$  maximando l'energia di punto o  $\rightarrow$  non interviene nelle transizioni

processo di interazione



$\rightarrow$  l'energia di punto zero non è utilizzabile

$\rightarrow n=0 \rightarrow$  no assorbimento ma possibile emissione  
 $n > 0$  assorbimento e emissione stimata

perde/acquista  
un fotone

emissione  
spontanea

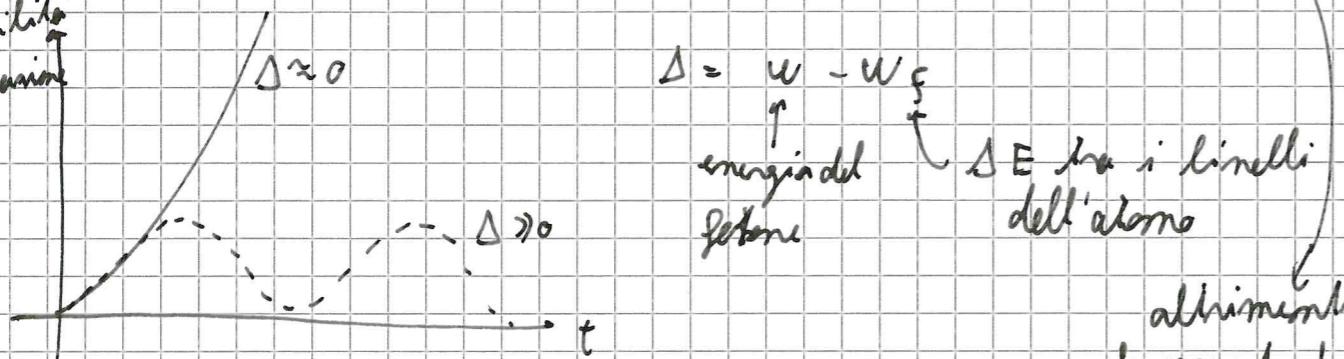
per l'emissione spontanea lo stato emesso prende la fase dal ruoto

$$\frac{|\langle f_2 | H | i \rangle|^2}{|\langle f_1 | H | i \rangle|^2} = \frac{|\text{emissione}|^2}{|\text{assorbimento}|^2} = \frac{n+1}{n}$$

i random

loria in presenza di fotoni è più probabile l'emissione

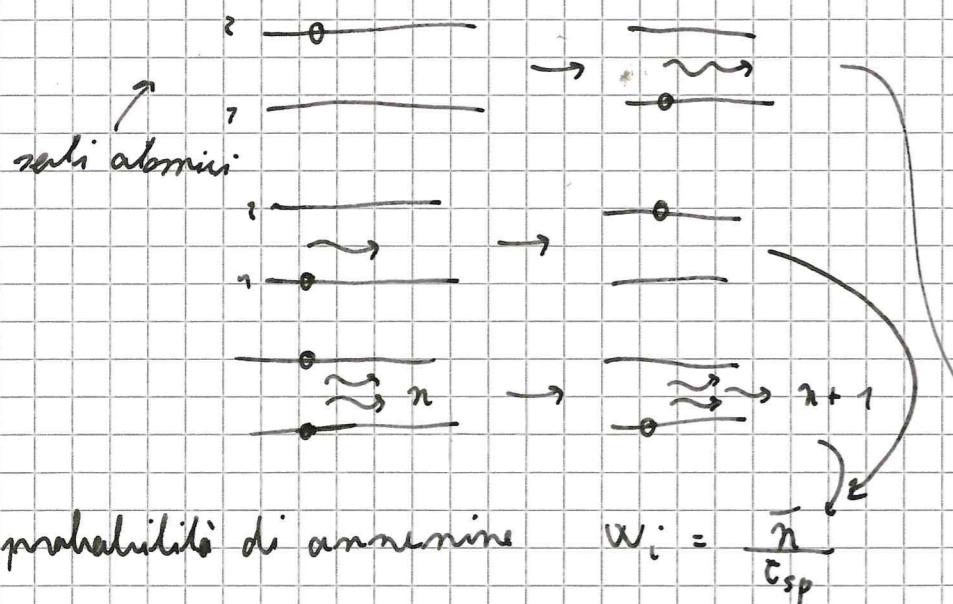
probabilità d'interazione



segale per assorbimento ed emissione

### crash course on LASERS

$$E_2 - E_1 = \hbar \omega$$



$$\text{probabilità di annessione } w_i = \frac{n}{n_{\text{sp}}}$$

$$\text{in totale } \frac{\text{emissione}}{\text{assorbimento}} = \frac{n+1}{n}$$

il problema è che il processo tende a  $n \rightarrow \infty$  con  $\frac{\text{emissione}}{\text{assorb.}} = 1$

non molto utile

→ devi estendere il numero di livelli

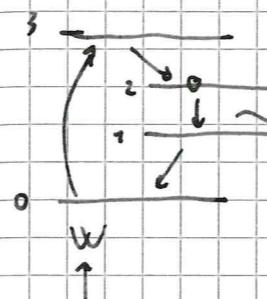
emissione spontanea

assorbimento

emissione stimolata

$$w_i = \frac{1}{t_{\text{sp}}}$$

posso fare via spontanea che stimolata



emissione che ci interessa  
è random  
probabilità  $\sigma \rightarrow 3 \rightarrow$  pumping

→ vogliamo  $3 \rightarrow 2$  con alta probabilità

$2 \rightarrow 1$  con bassa probabilità  $\rightarrow$  → vogliamo 2 stato metastabile  
 $1 \rightarrow 0$  alta probabilità

→ il Neodimio è un ottimo candidato

anche bene → desiderabile per mia formazione al livello 2  
 $\lambda \sim 900 \text{ nm}$

pompare  $0 \rightarrow 3$

la probabilità di essere al livello 2  
è più alta di quella del livello 1

$$N = N_2 - N_1 \quad \begin{matrix} \text{numero di fotoni nei} \\ \text{due stati} \end{matrix}$$

che di per sé ha un tempo di decadimento di  $\sim 200 \mu\text{s}$   
è un raro!!

→ inversione di popolazione

$$\frac{N_2}{N_1} = e^{-\beta(E_2 - E_1)} \sim 0 \Rightarrow N_2 \sim N_1$$

nel nostro caso invece

$$N \approx w t_{\text{sp}} \rightarrow \text{il livello 2 agisce come magazzino di energia}$$

ora faccio un risonatore

intensità luminosa

$$\phi = \frac{I}{h\nu} \quad \text{flusso di fotoni}$$

$$\frac{d\phi}{dz} = \underbrace{\gamma(j) \phi(z)}_{\text{coefficiente di guadagno}}$$

$$\gamma(j) = N \sigma(j) \text{ con } \sigma \propto \frac{1}{t_{\text{sp}}}$$

$$J_F = \frac{c}{2d}$$

$$J = q J_F \rightarrow \text{modo che relaziona}$$

insieme a  $N$

vogliamo negligenzare le probabilità delle transizioni rare

$N > 0 \Rightarrow \phi$  cresce esponenzialmente

se uno degli spicchi ha riflettività  $< 1 \rightarrow$  il fascio può uscire dal risonatore  
raggio laser

$\alpha_r$ : coefficiente di attenuazione del cristallo  $\sim I(z) \propto e^{-\alpha_r z}$

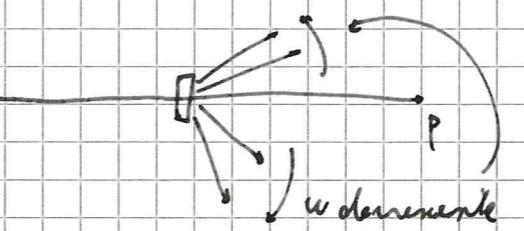
LASER = emissione stimata + innescione di polarizzazione + risonatore attivo

affinché il laser funzioni  $\delta > \lambda_p$

LG: 17/01/2020

SPDC  
spontaneous parametric down conversion

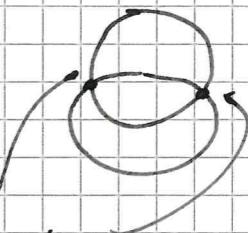
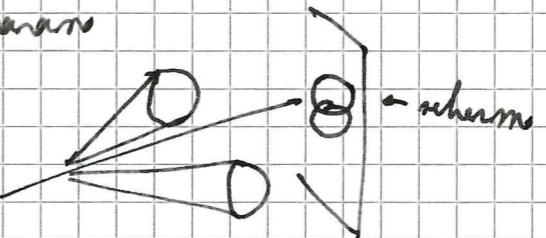
$\rightarrow$  After tipo I  $\rightarrow$  la polarizzazione dei sei è la stessa ed è ortogonale a quella di p  
se sei hanno frequenze diverse vengono emessi ad angoli diversi



$$\vec{k}_s \quad \vec{k}_i \\ \vec{k}_p$$

$\rightarrow$  tipo II  $\rightarrow$  la polarizzazione dei sei è ortogonale

$\rightarrow$  se il cristallo allontana sui versanti i bipprangenti i dueoni si separano



$\rightarrow$  sono interessanti le dimensioni dell'interazione

$\downarrow$   
 $\rightarrow$  antirelazione

$\downarrow$   
 $\rightarrow$  entanglement

$| \rangle \rightarrow | \rangle \leftarrow | \rangle$

$|\psi_0\rangle = |0\rangle_{\text{signal}} |0\rangle_{\text{idler}}$

polariz.  $\rightarrow$  polariz.  $\rightarrow$

$M_{AB} |\psi(t)\rangle = (1 - \mu^2/2) |0\rangle_s |0\rangle_i - i\mu (|V\rangle_s |H\rangle_i + |H\rangle_s |V\rangle_i)$

con post selection si può tagliare le rate di rivel.

$\Rightarrow |\psi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|V\rangle |H\rangle \pm |H\rangle |V\rangle)$

due dei quattro di Bell

gli altri 2

$\downarrow$   
tipo II:

abbi polarizzate ortogonali

### Nonlinear optics

$$P_i = X_{ij}^{(1)} E_j + X_{ijk}^{(2)} E_j E_k + \dots$$

pari non lineare

estensione non-linearietà elettrica

consente l'annibramento a una frequenza e l'emissione di frequenze diverse

e.g. laser neri  $z(h_f) \rightarrow h(z_f)$  armoniche

$\rightarrow$  si annira anche ad armoniche di ordine ~200

o anche ad entranis

abs: in generale  $X_{\alpha}^{(2)} \sim 10^{-3} - 10^{-11}$

$$w_p = w_s + w_i ; \vec{k}_p = \vec{k}_s + \vec{k}_i$$

$\downarrow$

signal idler

probabilità per singolo fotone  
di dividersi in due fotoni

$$|\psi\rangle \approx |\psi_0\rangle + |\psi_1\rangle$$

$$|\psi_1\rangle = -\frac{i}{\hbar} \int dt \hat{a}(t) |\psi_0\rangle$$

$\downarrow$   
nucl

$$= (\dots) \delta(w_p - w_s - w_i) \delta(\vec{k}_p - \vec{k}_s - \vec{k}_i)$$

stato che descrive il sistema signal + idler idler

sfera di Bloch

$$g = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+s_3 & s_1+is_2 \\ s_1-is_2 & 1-s_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(I + \vec{s} \cdot \vec{\sigma})$$

$\vec{s}$  è il vettore di Bloch

$$\sum_{i=1}^3 |s_i|^2 = 1$$



$$g = 1\gamma \times 1\gamma$$

$$|\psi\rangle = \alpha \left(\frac{1}{2}\right) e^{-i\phi/2} |\uparrow\rangle + \beta \left(\frac{1}{2}\right) e^{i\phi/2} |\downarrow\rangle$$

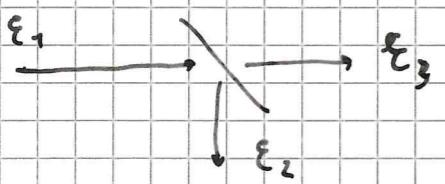
stati mixti

→ ha un paio di quantificazioni parzialmente uno stato entangled all'altro sono stati misti nell'altro

fatone

### Beam Splitter

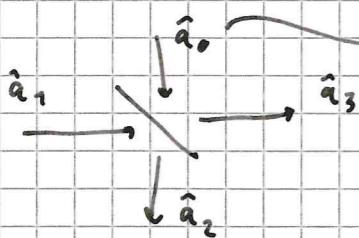
→ essenzialmente uno specchio semiriflettente



$$\begin{aligned} E_2 &= r E_1 \\ E_3 &= t E_1 \end{aligned}$$

$$\text{per un BS } 50/50 \rightarrow r = t = 1/\sqrt{2}$$

→ definizione stato non quantistico



"posta del mondo"

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_2 \\ \hat{a}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & r \\ t & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

→ se BS genera uno stato entangled

$$|0\rangle_0 |1\rangle_1 \xrightarrow{BS} \frac{1}{\sqrt{2}} (i |1\rangle_2 |0\rangle_3 + |0\rangle_2 |1\rangle_3)$$

oggetti → fatone

entangled

$$|0\rangle_0 |2\rangle_1 \xrightarrow{BS} \left| \frac{i\alpha}{\sqrt{2}} \right\rangle_2 \left| \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \right\rangle_3$$

non entangled

plate inverso

$$|1\rangle_0 |1\rangle_1 \xrightarrow{BS} \frac{i}{\sqrt{2}} (|2\rangle_2 |0\rangle_3 + |0\rangle_2 |2\rangle_3)$$

entangled

→ ignorare i 17/17 interferenze in modo distillato  
i.e. doppia riflessione o doppia assorbimento

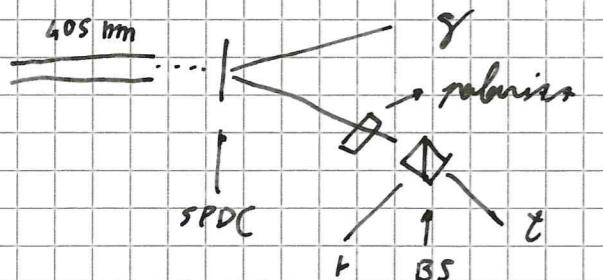
LS: L13: 25/04/2020

random

single photon detector

stationary random grader → coherent state  
rotating random grader → thermal state

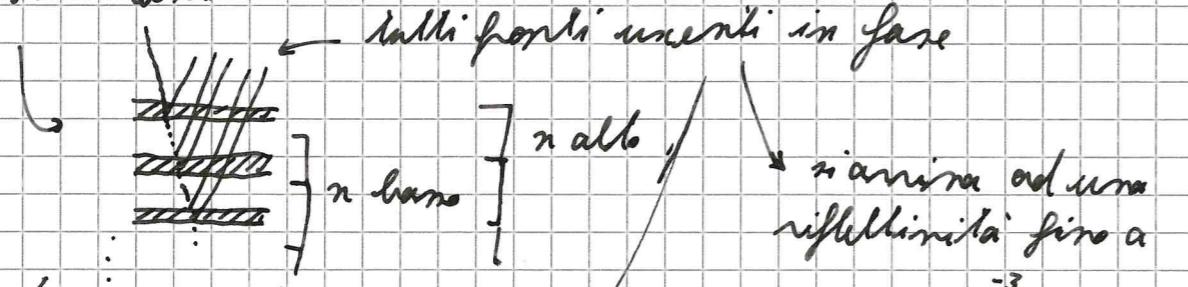
da i 17/17 tempi di arrivo dei fotoni si possono fare misure random



$\gamma$  è l'analisi: permette di selezionare gli stati a singola fotone

» spieghi  $\rightarrow$  spieghi metallici  $\rightarrow$  il metallo si scatta con il laser  
 $\rightarrow$  assorbe un tempo all'evento  
 precisione  $\approx 87$  ps

spieghi analisti:



pattern ripetuto  $\approx 100$  volte seleziona una particolare lunghezza d'onda per cui riflette bene  
 $\rightarrow$  che dipende dall'angolo di incidenza

angoli  $\epsilon \gamma$  hanno comunque una certa tolleranza

$\rightarrow$  scopo dell'esperimento è dimostrare l'invisibilità del fotone

$$\text{i.e. } \gamma^{(2)} := \frac{N_{gr} + N_{gt}}{N_{gr} N_{gt}} \curvearrowleft \text{ e dovrebbe essere } \approx 0$$